UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CURSO DE DOUTORADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FABÍOLA DA CRUZ MARTINS

EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: IMPLICAÇÕES PARA A SALA DE AULA

CAMPINA GRANDE – PB
2024

FABÍOLA DA CRUZ MARTINS

EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: IMPLICAÇÕES PARA A SALA DE AULA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB
2024

M379e Martins, Fabíola da Cruz.

Exploração-proposição-resolução de problemas na licenciatura em matemática [manuscrito] : implicações para a sala de aula / Fabíola da Cruz Martins. - 2024.

248 p. : il. colorido.

Digitado. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024. "Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Ensino de matemática. 2. Formação do professor de matemática. 3. Representações múltiplas de álgebra. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Lêda C. D. Andrade - CRB - 15/1032 BC/UEPB

FABÍOLA DA CRUZ MARTINS

EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: IMPLICAÇÕES PARA A SALA DE AULA

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática

Aprovada em: 12/09/2024

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM-UEPB)

____
Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida
Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM-UEPB)

____
Profa. Dra. Maria Isabelle Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____
Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG)

____
Profa. Dra. Verônica Tavares Santos Batinga
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, minha luz e minha fortaleza, por me conceder coragem, sabedoria, perseverança e a oportunidade de alcançar esta conquista.

À minha família, pelo apoio incondicional e pelo incentivo em todos os momentos. Pai, mãe e irmãos, obrigada pela torcida, cuidado e contribuição nesta jornada. Em especial, agradeço a minha irmã, Fabiana Martins, por compartilhar comigo a trajetória de doutorandas.

Ao meu esposo, Neto Olegário, cuja paciência, compreensão, companheirismo e incentivo foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu orientador, Professor Dr. Silvanio de Andrade, cujo exemplo de dedicação, sabedoria e compromisso foi uma constante fonte de inspiração. A sua orientação foi fundamental para a elaboração desta tese, e sou imensamente grata pelo apoio, oportunidade, confiança e paciência.

À Banca Examinadora, formada pelos Professores: Dr. Silvanio de Andrade (UEPB), Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (UEPB), Dra. Maria Isabelle Silva (UEPB), Dr. Nilton Cezar Ferreira (IFG) e Dra. Verônica Tavares Santos Batinga (UFRPE), pela disponibilidade em participar da banca e por todas as contribuições e reflexões que enriqueceram esta pesquisa e me ajudaram a aprimorar meu trabalho.

Ao Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP/UEPB), por colaborar nas discussões, fornecendo direcionamentos que foram essenciais para o desenvolvimento desta pesquisa. Em especial, aos amigos que compartilharam momentos de alegrias e angústias e que fortaleceram o caminho percorrido ao longo do doutorado.

Ao Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba (CCEA/UEPB), especialmente à Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática e aos licenciandos participantes desta pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM/UEPB), pelas oportunidades de aprendizagem e por todo o suporte oferecido ao longo da minha formação. Agradeço, em particular, por possibilitar a mobilidade internacional, um marco significativo na minha trajetória acadêmica. Assim, estendo o agradecimento a Universidade do Chile (UCHILE), que me recebeu com tanto acolhimento, especialmente ao professor Patrício Felmer (UCHILE), por sua orientação e apoio durante esse período.

RESUMO

Este estudo teve como objetivo identificar em quais aspectos uma Unidade Temática, utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra. A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é utilizada como uma perspectiva metodológica, composta por momentos variados, que enfatizam, sobretudo, a construção e aprofundamento dos conceitos e ideias matemáticas, a participação ativa do aluno e a interação entre este e o professor. Utilizando uma metodologia qualitativa, por meio de uma pesquisa pedagógica, os dados foram levantados através do desenvolvimento de uma Unidade Temática com 24 alunos do curso Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina Introdução à Modelagem em Educação Matemática, na qual a professora titular da turma é a própria pesquisadora. A partir das análises, ficou perceptível que, ao realizar atividades sob a perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, os futuros professores podem desenvolver o conhecimento relacionado ao conteúdo matemático, ao conhecimento pedagógico do conteúdo, ao ensino de matemática, à educação, aos contextos sociais, à educação matemática crítica, dentre outros. Os resultados indicam que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática em diversos aspectos, dentre eles, ressaltam-se: o aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos, a ampliação das experiências de trabalho com problemas, a integração de contextos sociais com a Matemática, a prática da utilização das diferentes representações de Álgebra e o desenvolvimento de habilidades profissionais para a utilização dessa metodologia. Portanto, destaca-se a importância de trabalhar com essa metodologia na formação inicial de professores, pois ela possibilita uma prática corporificada na teoria, que pode auxiliar os futuros professores em suas vindouras experiências profissionais. Assim, entende-se que ela potencializa a formação docente. Acredita-se que esta pesquisa avança no que tange ao conhecimento teórico na área de Educação Matemática e, sobretudo, oferece reflexões teórico-práticas sobre uma perspectiva metodológica que pode ser implementada em cursos de formação de professores e na Educação Básica.

Palavras-chaves: ensino de matemática; formação inicial do professor de matemática; representações múltiplas de álgebra.

ABSTRACT

This study aimed to identify in which aspects a Thematic Unit, using Problem Exploration Posing-Solving as a teaching approach, can assist, promote and collaborate in pre-service Mathematics teacher education, specifically in the Algebra teaching. Problem Exploration-Posing-Solving is used as a teaching perspective composed of varied moments, which emphasize above all the construction and deepening of mathematical concepts and ideas, the active participation of the student and the interaction between the student and the teacher. Using a qualitative methodology, through pedagogical research, the data were collected through the development of a Thematic Unit, with 24 Mathematics undergraduates, enrolled in the Introduction course to Modeling in Mathematics Education, in which the class teacher is the researcher herself. Based on the analyses, it became clear that, by carrying out activities from the perspective of Problem Exploration-Posing Solving, future teachers can develop knowledge related to mathematical content, content pedagogical knowledge, mathematics teaching, education, social contexts, critical mathematics education, among others. The results indicate that Problem Exploration-Posing-Solving as a teaching approach can assist, foster and collaborate in the pre-service Mathematics teacher education, in several aspects, among which the following stand out: the deepening of mathematical ideas and concepts, the expansion of experiences of working with problems, the integration of social contexts with Mathematics, the practice of using Algebraic representation different and the development of professional skills for the use of this approach. Therefore, the importance of working with this approach in the pre-service Mathematics teacher education is highlighted as it allows for a practice embodied in theory, which can assist future teachers in their future professional experiences. Thus, it is understood that it enhances teacher education. It is believed that this research advances theoretical knowledge in the area of Mathematics Education and, above all, offers theoretical and practical reflections on a teaching approach that could be implemented in teacher education courses and in Basic Education.

Keywords: mathematics teaching; pre-service mathematics teacher education; algebra multiple representations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> [...] talvez devesse ser este um dos pontos primeiros a ser discutido, num curso de formação com jovens que se preparam para ser professores: o que é perguntar. Insistamos, porém, em que o centro da questão não está em fazer com a pergunta “o que é perguntar?" um jogo intelectual, mas viver a pergunta, viver a indagação, viver a curiosidade, testemunhá-la ao estudante. O problema que, na verdade se coloca ao professor é o de, na prática, ir criando com os alunos o hábito, como virtude, de perguntar, de “espantar-se”. Para um educador nesta posição não há perguntas bobas nem respostas definitivas. Um educador que não castra a curiosidade do educando, que se insere no movimento interno do ato de conhecer, jamais desrespeita pergunta alguma. Porque, mesmo quando a pergunta, para ele, possa parecer ingênua, mal formulada, nem sempre o é para quem a fez. Em tal caso, o papel do educador, longe de ser o de ironizar o educando, é ajudá-lo a refazer a pergunta, com o que o educando aprende, fazendo, a melhor perguntar. (Freire; Faundez, 2011, p. 70)

1.1 Trajetória de Formação

Em todo início de conversa, é imprescindível uma apresentação de quem se propõe a falar, explicitando quem fala e de onde fala, para que, assim, se possa atribuir um maior significado e compreensão sobre o que é verbalizado. Dessa forma, iniciaremos este trabalho discorrendo, sinteticamente, sobre os caminhos acadêmicos e profissionais trilhados pela pesquisadora até o momento, os quais a conduziram até o desenvolvimento desta pesquisa.

Minha caminhada iniciou-se em 2013, ano que decidi ser professora de Matemática e optei por cursar Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) – Campus Cuité / PB. Desde aquele momento, me via como uma pessoa fascinada pelos números, pelas manipulações algébricas, pela visualização geométrica e pela matemática como uma ciência. Eu conseguia enxergar conexões dentro da matemática que muitos ao meu redor não viam ou compreendiam.

No decorrer do curso, tive minhas primeiras experiências docentes dentro da universidade, sendo monitora da disciplina Bioestatística, como também integrante do subprojeto de Matemática no Programa de Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Além dessas, ainda na graduação, tive a minha primeira oportunidade de emprego como professora de Matemática da educação básica em uma escola privada, lecionando, especificamente, nos anos finais do Ensino Fundamental.

Ao longo dessas experiências, me deparei com situações as quais, de imediato, eu não tinha soluções, necessitava de um aprofundamento teórico-prático para buscar as respostas necessárias. Isto posto, exprimo que todo o conhecimento adquirido ao longo do curso e das experiências vivenciadas me enveredaram pelo caminho da pesquisa em Educação Matemática, pois as dificuldades enfrentadas ao longo da docência me despertaram o interesse em investigar questões relacionadas à aprendizagem matemática, ao ensino-aprendizagem de matemática, à formação do professor de matemática, dentre outras.

Nesse contexto, em meio às experiências, leituras, produções, congressos, minicursos e outros conhecimentos adquiridos no decorrer da formação, desenvolvi, no meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado em 2016, a minha primeira pesquisa científica em Resolução de Problemas e ensino de Álgebra. Esse interesse por essas duas grandes áreas foi aprofundado, prosseguiu na pesquisa de mestrado, apresentada em 2019 na UEPB, e permanece nesta pesquisa de doutorado.

Até aquele momento da pesquisa desenvolvida no TCC, eu ainda tinha uma visão limitada de Resolução de Problemas, a compreendia como uma metodologia de ensino, mas não enxergava, com clareza, as possibilidades de aprofundamento que ela possibilitava. No mestrado, tive a oportunidade de aprofundar os estudos nessa perspectiva, compreendendo, de maneira mais ampla, como incorporá-la nas aulas de matemática e passei a contemplar, nessa proposta, a Exploração e a Proposição de Problemas.

A partir dos estudos realizados no Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) na UEPB, o qual faço parte desde 2017, comecei a adentrar nos estudos da literatura nacional e internacional, os quais me permitiram perceber uma maior abrangência dessa proposta. O GEPEP tem utilizado a expressão Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, que, de acordo com Andrade (2017), é uma forma de melhor expressar as conexões existentes entre a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

Além desse aprofundamento nos estudos sobre a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas ter me motivado a prosseguir com os estudos nessa perspectiva, as experiências profissionais que tive nos últimos anos, como professora do curso de Licenciatura em Matemática (2018 – 2019), Coordenadora Pedagógica (2020) e Professora de Matemática da Educação Básica (2014 – 2015, 2017, 2020 – atual), influenciaram-me a direcionar esses estudos para a formação do professor de matemática.

Para completar esse itinerário, ao final do segundo ano de doutorado, quando já havia realizado o estudo exploratório e planejava o levantamento de Dados da pesquisa., fui aprovada, em 2022, no Concurso para professor efetivo da UEPB, Campus VII — Patos-PB, na área de Educação Matemática. A aprovação possibilitou o desenvolvimento de nossa pesquisa pedagógica dentro da minha prática profissional e acrescentou elementos teórico-práticos da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas à formação dos futuros professores de matemática.

1.2 Justificando a Pesquisa

A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino composta por três elementos integrados, nos quais cada um que a compõe auxilia e subsidia o desenvolvimento do outro. Essa metodologia não é uma linha de pesquisa isolada ou um momento específico trabalhado em sala de aula. Sua proposta de utilização ocorre por meio de um desenvolvimento articulado de momentos de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

Nossa concepção teórica sobre essa metodologia é fundamentada em Andrade (1998, 2017) que a propôs à luz de uma perspectiva de educação progressista, em especial a Pedagogia Libertadora de Paulo Freire, a Psicologia Sócio-Histórica de Vygotsky e a Filosofia da Dubitabilidade Matemática de Lakatos. Nessa proposta, o autor destaca que os problemas matemáticos propostos aos alunos representam uma codificação Matemática e transdisciplinar, em que o trabalho de descodificação desse problema possibilita o desencadeamento de conteúdos matemáticos e auxilia na compreensão da realidade.

De acordo com Andrade (2017), a Exploração de Problemas pode ser considerada como um conjunto de ferramentas que possibilita e avança o trabalho da Proposição de Problemas. A Proposição de Problemas, por sua vez, também é um conjunto de ferramentas que operacionaliza e aprimora o trabalho com a Exploração de Problemas. De maneira similar, a Resolução de Problemas desempenha um papel equivalente dentro desse contexto (Andrade, 2017).

Destarte, considera-se que a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas oferece a possibilidade de ir além do problema em questão, assim como da própria Matemática, concentrando o interesse de investigação em todo o processo que envolve a Exploração, a Proposição e a Resolução de Problemas, desenvolvendo, dessa forma, novos conceitos, novas discussões, reflexões e sínteses.

Sendo assim, a Resolução do Problema é parte integrante do processo de investigação, mas não é o único ou o principal objetivo. Mesmo quando o problema abordado não é resolvido, o olhar do professor e/ou pesquisador deve estar voltado para todo o trabalho realizado em torno do problema e para as diversas habilidades desenvolvidas. Assim, a preocupação dessa metodologia não se limita apenas a encontrar a solução do problema, mas diz respeito às aprendizagens que surgem desse processo.

Esta pesquisa vem acrescentar aos estudos já desenvolvidos em Resolução de Problemas (por exemplo, Ferreira, 2017; Martins 2019; Onuchic; Allevato, 2011) a utilização dessa metodologia com ênfase na Exploração e Proposição de Problemas, reconhecidas por possibilitar ao aluno o desenvolvimento de diversos aspectos importantes no ensino-aprendizagem de Matemática. Neste trabalho, discutimos aspectos relacionados à Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no contexto da Resolução de Problemas, de forma que o leitor a reconheça como um aprofundamento dessa consagrada metodologia.

A literatura internacional tem apontado diversas contribuições proporcionadas pelo uso da Proposição de Problemas em sala de aula, tais como o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, de laços e relações pessoais com a Matemática, de habilidades, atitudes e confiança dos alunos em resolver problemas, o aumento da criatividade e uma compreensão mais ampla dos conceitos matemáticos (Cai; Hwang; Melville, 2023; Silver, 1994; Singer; Ellerton; Cai, 2013).

Por outro lado, a nível nacional, a Exploração de Problemas tem se mostrado uma metodologia orientadora que potencializa o trabalho com a Proposição e Resolução de Problemas. Ela é uma ferramenta teórico-metodológica que aprofunda as ideias e conceitos matemáticos, como também possibilita ir além, utilizando a matemática para pensar em questões da própria matemática, como também em questões que envolvem a dimensão social (Andrade, 2017; Martins; Andrade, 2022, 2023; Silveira; Andrade, 2020, 2022; Silveira; Nascimento; Andrade, 2023).

Dessa forma, acredita-se que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas contribui significativamente para o ensino-aprendizagem de Matemática, uma vez que, ao explorar e propor problemas, o aluno tem a oportunidade de se envolver no contexto do problema, seja ele do mundo físico ou não, e na ação Matemática, tornando a aprendizagem mais significativa.

Nesse contexto, pensando na formação do professor de matemática, em suas futuras experiências docentes e no efeito multiplicador de nossa pesquisa, delimitamos como público-alvo deste estudo alunos do curso Licenciatura em Matemática. Assim, baseados em nossa experiência acadêmica e profissional, nos aspectos presentes na literatura sobre Exploração, Proposição e Resolução de Problemas e Ensino de Álgebra, emergiu a questão que motiva esta pesquisa de doutorado: em quais aspectos uma Unidade Temática, que relacione teoria e prática segundo os pressupostos da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra?

Nesse sentido, desenvolvemos esta pesquisa com o objetivo principal de identificar em quais aspectos uma Unidade Temática, utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de

Problemas como metodologia de ensino, pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra.

Destacamos que os verbos auxiliar, fomentar e colaborar tem significados específicos, mas todos envolvem a ideia de "contribuir" para a formação inicial dos professores de Matemática. Nesse contexto, o verbo "auxiliar" refere-se ao fornecimento de suporte à formação inicial do professor de Matemática, analisando como essa metodologia pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem e no desenvolvimento profissional dos futuros professores. O verbo "fomentar" indica a capacidade da metodologia de incentivar, promover e estimular a melhoria das práticas de ensino de Matemática, especialmente de Álgebra. O verbo "colaborar" significa analisar como a metodologia pode contribuir para o aprimoramento da formação do professor de matemática e para o desenvolvimento de práticas de ensino que favoreçam um ensino-aprendizagem de Matemática com mais compreensão.

Este estudo destaca-se por abordar a Proposição de Problemas, um tema emergente que vem ganhando crescente reconhecimento na literatura internacional, mas ainda é timidamente explorado no Brasil. Ao oferecer uma discussão teórica atualizada, tanto no contexto nacional quanto internacional, esta pesquisa se posiciona de forma relevante na literatura existente, contribuindo para o avanço do conhecimento na área.

Além disso, esta pesquisa tem como diferencial, a partir da discussão e análise de dados, apresentar os aspectos em que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de matemática, podendo, assim, evidenciar a sua relevância para a formação docente. Consoante a isso, este estudo apresenta elementos que caracterizam essa proposta e orientam a sua utilização como perspectiva metodológica. Esses elementos são de grande importância, pois podem auxiliar outros professores a incorporar essa abordagem em cursos de formação de professores que ensinam matemática, em formações continuadas e/ou nas aulas de matemática na Educação Básica.

Outro diferencial significativo desta pesquisa é a utilização da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na disciplina Introdução à Modelagem em Educação Matemática. Este estudo envolveu 24 futuros professores de Matemática provenientes de diversas cidades do Sertão Paraibano, bem como de municípios do Pernambuco e Rio Grande do Norte, os quais fazem divisa com o estado da Paraíba. Essa diversidade de participantes destaca a potencial replicabilidade da metodologia em diferentes regiões e contextos educacionais, permitindo expandir os avanços das pesquisas em Educação Matemática para a Educação Básica, colaborando para uma melhoria no ensino e a aprendizagem de Matemática.

A Proposição de Problemas na formação de professores tem sido discutida na literatura internacional, como uma maneira de, sobretudo, proporcionar aos professores experiências que os auxiliem a incorporar a Proposição de Problemas em suas práticas futuras. Segundo Grundmeier (2015), é importante incluir vivências de Proposição de Problemas nos cursos de formação de professores, a fim de que eles possam se preparar para envolver seus futuros alunos nessas atividades. Rosli *et al.* (2015) salientam que, à medida que os futuros professores adquirem conhecimento e experiência ao proporem seus próprios problemas, espera-se que essas ações sejam incorporadas às suas estratégias. Crespo (2015) ressalta a importância de os futuros professores terem experiências com a Proposição de Problemas enquanto alunos, pois, caso contrário, terão dificuldades em realizar essas experiências com seus futuros alunos.

Nesse contexto, ressaltamos a importância deste trabalho com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de Professores de Matemática, pois, como destacam Cai, Hwang e Melville (2023), o ensino através da Proposição de Problemas exige decisões instrucionais, dessa forma, tanto no planejamento quanto na implementação das aulas é essencial que os professores recebam uma preparação adequada.

É de conhecimento geral que, nas práticas tradicionais de ensino de Matemática, são trabalhados problemas decorrentes de livros didáticos e/ou da internet, o que se trata de uma realidade que perdura há vários anos. No entanto, essa estratégia pode ser um obstáculo para o ensino-aprendizagem de Matemática, uma vez que, na maioria das vezes, são problemas que abordam temas que não despertam o interesse dos alunos ou que não estão de acordo com o seu contexto social e/ou nível de compreensão.

Essa problemática tem sido discutida na literatura internacional (Brown; Walter, 1983; Kilpatrick, 1987, 2017), haja vista que diversos estudiosos mencionam que os problemas, geralmente, vêm dos professores, dos livros didáticos, da *internet*, mas, raramente, dos alunos. Nesse contexto, ressaltamos, neste trabalho, a importância de o professor refletir sobre o papel do problema no processo de ensino-aprendizagem de Matemática e de ter essa clareza na sua utilização. Como apontam Virgens e Moretti (2022), o problema deve ter o papel de elemento desencadeador, ou seja, que os professores em formação aprendam, conscientemente, a organizar o ensino considerando o problema como um elemento essencial que possibilite o desencadeamento da aprendizagem.

Nas atividades desenvolvidas nesta pesquisa, trabalhamos com problemas e/ou situações-problema, as quais podem envolver contextos do mundo real ou puramente matemático. De acordo com Cai, Hwang e Melville (2023), quando a situação-problema envolve contextos do mundo real, ela pode fornecer uma oportunidade para os alunos abstraírem características matemáticas do contexto. Já quando ela envolve um contexto puramente matemático, pode fornecer uma oportunidade para os alunos explorarem as características abstratas da matemática e relacioná-las ao seu conhecimento já existente.

A situação-problema não é, necessariamente, uma pergunta ou um questionamento a ser respondido, mas um contexto que desperta a curiosidade e o interesse do aluno, o que o estimula a explorar e, a partir daí, propor o seu problema. As situações-problemas são atividades que em seu processo de problematização desencadeiam um problema ou um conjunto de problemas. Dessa forma, consideramos que o problema emerge da situação-problema, sendo ela um ponto de partida que potencializa a Proposição de Problemas, via Exploração de Problemas.

Ressaltamos, ainda, que esta é uma pesquisa que busca não somente levantar dados, mas contribuir no conhecimento matemático dos licenciandos participantes da pesquisa, no conhecimento pedagógico, no conhecimento pedagógico do conteúdo de matemática, em sua formação como cidadãos críticos-reflexivos, no aprimoramento da prática profissional da professora-pesquisadora e, futuramente, contribuir na prática profissional de outros professores de Matemática de todos os níveis de escolaridades.

Desse modo, destacamos a relevância do nosso Produto Educacional, uma vez que ele possibilitará aos professores de matemática, futuros professores de Matemática e formadores de professores que ensinam matemática a possibilidade de conhecer e de se aprofundar na Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como uma perspectiva metodológica, capaz de contribuir em diversos aspectos relacionados ao ensino-aprendizagem de Matemática, sobretudo no ensino de Álgebra.

1.3 Organização dos capítulos

Para uma melhor compreensão da organização deste trabalho, apresentaremos, neste tópico, os capítulos que o compõem. Neste primeiro capítulo, apresentamos elementos fundamentais da trajetória acadêmica e profissional desta pesquisadora, bem como os motivos que a levaram a desenvolver esta pesquisa. Além disso, contextualizamos a perspectiva de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, mencionando o objetivo geral da pesquisa, o seu diferencial e a organização dos capítulos.

No segundo capítulo, abordamos aspectos relacionados à Exploração e Proposição de Problemas no contexto da Resolução de Problemas a nível nacional e internacional, apresentando uma discussão teórica sobre a perspectiva metodológica Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e suas potencialidades na formação do professor que ensina matemática, destacando-a não como uma alternativa isolada, mas como um aprofundamento da metodologia de Resolução de Problemas.

No terceiro capítulo, apresentamos um levantamento de pesquisas desenvolvidas em âmbito internacional, em um relevante livro na área de Proposição de Problemas, publicado em 2015. Com este capítulo, buscamos apresentar avanços e perspectivas das pesquisas em Proposição de Problemas, assim como possibilitar um refinamento da nossa questão de pesquisa, situando-a na literatura. Concluímos o capítulo apresentando as direções futuras para as pesquisas em Proposição de Problemas sugeridas pelos autores, bem como as perspectivas atuais de pesquisas em Proposição de Problemas na literatura internacional.

No quarto capítulo, discutimos sobre a Álgebra no contexto pedagógico, em que mencionamos sobre suas concepções e compreensões ao longo da história. Além disso, destacamos a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico para um ensino de Álgebra efetivo e com compreensão, bem como discutimos sobre as Representações Múltiplas de Álgebra, esclarecendo as suas potencialidades na manifestação do pensamento algébrico.

No quinto capítulo, trazemos o caminhar metodológico da pesquisa, apresentando a forma como a pesquisa foi planejada, o instrumento de levantamento de dados e os aspectos relacionados às discussões e análises. Além disso, apresentamos o processo de elaboração do Produto Educacional, que consiste em um Guia Didático, o qual objetiva proporcionar aos pesquisadores, professores, futuros professores e formadores de professores que ensinam matemática, uma compreensão teórico-prática sobre a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

No sexto capítulo, trazemos a discussão e análise dos dados obtidos na pesquisa exploratória, que foi realizada como parte de nossos estudos antes do levantamento de dados. Esse estudo buscou uma maior familiarização teórico-prática com a utilização da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, propiciou um aprimoramento das atividades a serem desenvolvidas no levantamento de dados e apoiou a elaboração das categorias de análises que foram utilizadas, posteriormente, como instrumentos de análises de dados.

No sétimo capítulo, apresentamos as descrições e análises da pesquisa pedagógica, realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Apresentamos uma descrição detalhada do desenvolvimento de cada atividade, exibindo diálogos e registros escritos pelos participantes e as discutimos e analisamos de acordo com o referencial teórico.

No oitavo capítulo, apresentamos as considerações finais deste estudo, que incluem uma análise retrospectiva do trabalho desenvolvido, retomamos o objetivo geral para uma última reflexão, enfatizando o diferencial desta pesquisa, as nossas percepções construídas, as conclusões a respeito do trabalho realizado e, por fim, apresentamos uma sugestão para o desenvolvimento de futuras pesquisas sobre este tema, o que este trabalho não conseguiu contemplar.

2 EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PERSPECTIVA METODOLÓGICA

A Exploração de Problemas é uma ferramenta teórica que auxilia e subsidia o trabalho com a Proposição e Resolução de Problemas. Nessa relação, a Proposição de Problemas impulsiona o trabalho com a Exploração e Resolução de Problemas. Elas não se configuraram como linhas de pesquisa independentes ou um momento de trabalho de modo isolado em sala de aula. Sua proposta de utilização acontece de modo integrado, estando vinculada à perspectiva da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Por esse motivo, utiliza-se a expressão composta Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, originalmente utilizada por Andrade (2017), como uma forma de melhor expressar as conexões existentes entre elas e sua interdependência. Esta pesquisa vem acrescentar aos estudos já desenvolvidos em Resolução de Problemas a utilização dessa metodologia com ênfase na Exploração e Proposição de Problemas, reconhecidas por possibilitar ao aluno o desenvolvimento de diversos aspectos importantes no ensino-aprendizagem de Matemática. Estudos que contemplam a Exploração e Proposição de Problemas (por exemplo, Andrade, 2017; Martins, 2019) têm indicado que, embora ofereçam diversas contribuições, são frequentemente as mais difíceis de serem implementadas na prática em sala de aula, em comparação à Resolução de Problemas.

Assim, pretende-se, neste capítulo, abordar aspectos relacionados à Exploração e Proposição de Problemas no contexto da Resolução de Problemas, de forma que o leitor as reconheça como um aprofundamento dessa consagrada metodologia. Desse modo, apresentamos, inicialmente, a Resolução de Problemas no contexto pedagógico ao longo da história, pois consideramos importante evidenciar alguns pontos que são considerados marcos em sua trajetória, os quais contribuíram para o lugar que ela ocupa atualmente. Em seguida, apresentamos os conceitos e compreensões de problemas que utilizamos nesta pesquisa. E, por fim, chegamos ao nosso intuito principal do capítulo, que consiste na discussão teórica sobre a perspectiva metodológica Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e suas potencialidades na formação do professor que ensina matemática.

2.1 A Resolução de Problemas no contexto pedagógico ao longo da história

A Resolução de Problemas como campo de pesquisa em Educação Matemática envolve questões além de aspectos teórico-práticos no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Com efeito, pesquisadores como Allevato e Onuchic (2014), Andrade (1998, 2017), Onuchic (1999) e Pironel (2019) a compreendem sob múltiplas facetas, seja como uma metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, uma forma de avaliação do processo de ensino-aprendizagem, do aluno e do professor e como um meio de fazer matemática.

No entanto, nem sempre ela foi reconhecida por essas múltiplas facetas, uma vez que, ao longo dos anos, tivemos inúmeras compreensões de Resolução de Problemas, sobretudo no que diz respeito ao contexto pedagógico. De acordo com Onuchic (1999), "até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma solução técnica específica" (Onuchic, 1999, p. 199). Ou seja, tinha-se uma visão muito limitada sobre Resolução de Problemas, na qual se apresentava um problema e, depois de resolvido, era apresentada uma lista com outros problemas que seriam resolvidos seguindo o mesmo caminho utilizado no problema anterior.

Ao longo da história, muitas pesquisas em Educação Matemática, a nível nacional e internacional, vêm sendo desenvolvidas. Com isso, diversas concepções sobre a Resolução de Problemas e sua utilização no ensino da Matemática foram discutidas e modificadas, como podemos ver a seguir.

Em 1945, o matemático húngaro George Polya, considerado o pai da Resolução de Problemas, publicou o primeiro livro nessa temática, intitulado *"How to Solve It",* conhecido no Brasil, como "A arte de resolver problemas". Esta publicação é considerada na literatura como a primeira vez em que a Resolução de Problemas é vislumbrada como um tema de interesse para alunos e professores.

Neste livro, Polya (1945) apresenta um roteiro que, na ocasião, auxiliaria o professor no trabalho com a Resolução de Problemas em sala de aula. Esse roteiro é composto por quatro fases, a saber: i) compreensão do problema; ii) estabelecimento de um plano; iii) execução desse plano; iv) retrospecto.

Na compreensão do problema, o autor chama a atenção para três pontos que são considerados por ele as partes principais do problema: a incógnita, os dados e a condicionante. O aluno precisa considerar esses três pontos atentamente, repetidamente e sob várias óticas. Assim, após ter compreendido o problema, o aluno estará preparado para o estabelecimento de um plano. A execução do plano é considerada a parte mais tranquila e essencial, pois é o momento da resolução. Se o plano foi feito corretamente, essa será a fase mais simples para o aluno e para o professor. Por fim, ao tratar do retrospecto, Polya (1945, p. 10) destaca que "se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e examinando o resultado e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas”.

Apesar de, atualmente, essa visão de Resolução de Problemas apresentada no livro de Polya (1945) pareça limitada, o seu trabalho trouxe muitas contribuições para o campo, sendo, inclusive, na década de 1960, nos Estados Unidos, considerado como um marco para que a Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começasse a ser investigada.

O trabalho de Polya (1945) vai além do roteiro apresentado acima, visto que o autor se preocupou com a melhoria das habilidades de resolução de problemas dos alunos e, para isso, buscou incentivar os professores a se tornarem bons resolvedores de problemas e a estimular seus alunos a também o serem. Além disso, o autor ainda se preocupou com o desenvolvimento do pensamento heurístico, por meio de uma visão mais profunda e abrangente de resolução de problemas e de outras habilidades para resolver problemas.

De acordo com Andrade (1998), a partir do final da década de 1960, a prática comum nessa metodologia de investigação era voltada para sessões de resolução de problemas em grupo, com os alunos se manifestando em voz alta. Nessa perspectiva, “o ensino de Resolução de Problemas limitava-se ao ensino da busca da solução, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta” (Andrade, 1998, p. 8).

Em 1980, a Resolução de Problemas ganhou grande visibilidade a nível internacional, quando o *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos da América) publicou um documento intitulado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s* (Uma Agenda para Ação: Recomendações para a Matemática Escolar da década de 1980), recomendando a Resolução de Problemas como o foco da matemática escolar na década de 1980.

Ao tratar desse documento do NCTM, Crespo (2015) discute que tornar a Resolução de Problemas o foco da matemática escolar abriu possibilidades para os alunos aprenderem matemática de maneira mais abrangente e profunda, além de permitir que vivenciassem mais experiências matemáticas e tivessem conhecimento de conteúdos ensinados de forma clássica, bem como de métodos comprovados que são amplamente conhecidos e praticados na disciplina de matemática.

Contudo, vale destacar que Crespo (2015), ao mesmo tempo que aponta as possibilidades da Resolução de Problemas, alcunhando, inclusive, o termo “Pedagogia da Resolução de Problemas”, também faz uma crítica em relação ao seu uso. Ela indica que, de maneira autoritária, a Resolução de Problemas posiciona o professor e o livro didático como aqueles que propõem os problemas, e os alunos como aqueles que resolvem, indicando, portanto, uma estratificação intelectual entre professor e aluno.

De acordo com Fiorentini (1994), os estudos sobre o ensino de Resolução de Problemas no Brasil começaram a ganhar maior efetividade e relevância a partir da segunda metade da década de 1980. O autor observa que, nesse período, a pesquisa nessa área estava majoritariamente restrita a trabalhos acadêmicos, como dissertações e teses. Segundo o autor, essas pesquisas tratavam de estratégias ou de modelos especiais de ensino de Resolução de Problemas, avaliando suas consequências de aprendizagem e tratavam também sobre perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas.

Onuchic (1999) ressalta que, na década de 1980, foram desenvolvidos muitos recursos para o trabalho com resolução de problemas na sala de aula, em que esses materiais passaram a auxiliar professores em seu trabalho. Contudo, a autora aponta que foi notada a ausência de uma coerência e direção necessária para um bom resultado neste trabalho, o que podia estar ocorrendo em decorrência das diferentes concepções que se tinha naquele momento sobre o que significava a "resolução de problemas ser o foco da matemática escolar".

Nesse contexto, Schroeder e Lester (1989) identificaram três abordagens distintas para a incorporação da Resolução de Problemas no ensino de Matemática, conforme os professores estavam utilizando na época. São elas: i) Ensinar sobre Resolução de Problemas; ii) Ensinar Matemática para resolver problemas e iii) Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas.

Os autores explicam que, ao ensinar *sobre* a Resolução de Problemas, o professor enfatiza o roteiro de quatro fases de Polya (1945), apresentado acima, ou alguma variação dele. Nessa abordagem, os alunos aprendem explicitamente as fases e são incentivados a se conscientizar de sua própria progressão através dessas etapas quando resolvem problemas de forma independente. Para os autores, na melhor das hipóteses, ensinar *sobre* resolução de problemas também inclui experiências que realmente resolvem problemas, mas sempre envolve muita discussão explícita e ensino sobre como os problemas são resolvidos.

Ao ensinar Matemática *para* resolver problemas, o professor foca na maneira como a Matemática é ensinada e como aplicá-la na resolução de problemas. Ou seja, o objetivo de aprender Matemática consiste na capacidade de saber aplicá-la. Para os autores, os adeptos dessa abordagem argumentam que a única razão para aprender matemática é ser capaz de usar esse conhecimento para resolver problemas.

Ao tratar do ensino da Matemática *através* da Resolução de Problemas, os autores a consideram como um meio de ensinar Matemática, tendo o problema como o ponto de partida da atividade matemática. Essa concepção é considerada a abordagem mais consistente com as recomendações do NCTM e é a concepção que vem sendo utilizada e considerada com uma perspectiva atual de Resolução de Problemas, a qual a considera como uma metodologia de ensino de Matemática.

A compreensão dessas diferentes concepções são fundamentais para a nossa reflexão sobre a Resolução de Problemas no ensino de Matemática. De acordo com Lester e Cai (2016), se quisermos ajudar os alunos a se tornarem solucionadores de problemas bem-sucedidos, primeiro precisamos mudar nossas visões da Resolução de Problemas como um tópico que é adicionado ao ensino após os conceitos e habilidades terem sido ensinados. Para essa mudança de perspectiva, os autores afirmam que uma alternativa é tornar a resolução de problemas uma parte integral do aprendizado da matemática, ou seja, considerar um ensino através da Resolução de Problemas.

Para Lester e Cai (2016), a abordagem de ensino através da Resolução de Problemas tem demonstrado que os alunos melhoram o seu desempenho na resolução de problemas não porque aprendem estratégias e heurísticas gerais de resolução de problemas, mas porque têm uma compreensão profunda e conceitual da matemática.

Nessa perspectiva, Allevato (2014) destaca que ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas engloba os três modos diferentes de abordar a Resolução de Problemas mencionados por Schroeder e Lester (1989). Segundo a autora, "quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre Resolução de Problemas, quanto aprendem Matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática através da Resolução de Problemas" (Allevato, 2014, p. 215).

Lester e Cai (2016) apontam que, em suas pesquisas, tem-se revelado que a Resolução de Problemas não deve ser ensinada como um tópico separado no currículo de Matemática, pois ensinar os alunos a usar estratégias gerais de resolução de problemas tem demonstrado pouco efeito em seu sucesso como solucionadores de problemas. Nesse sentido, os autores apontam que a Resolução de Problemas deve ser ensinada como parte integrante da aprendizagem matemática, e um compromisso significativo deve ser feito para incluí-la em todos os níveis de ensino e em todos os tópicos matemáticos.

Diante das discussões internacionais em torno do trabalho com a Resolução de Problemas em sala de aula, o Brasil também acompanhou esse movimento e renovou suas orientações curriculares. Em 1989, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), passou a recomendar a Resolução de Problemas como um caminho para fazer matemática em sala de aula (Brasil, 1998).

Além das orientações para essa utilização, os PCN (Brasil, 1998) apontam para a problemática existente relativa à Resolução de Problemas que, na maioria das vezes, não têm desempenhado seu papel no ensino, uma vez que as práticas de ensino predominantes consistem em ensinar o conceito, o procedimento ou a técnica e, em seguida, apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado.

Embora os PCN (Brasil, 1998) apresentem definições pertinentes que correspondam às perspectivas atuais de Resolução de Problemas discutidas na literatura, ele não aprofunda de que maneira esse trabalho pode ser efetivado pelo professor, de modo a alcançar os objetivos propostos. Essa observação, quanto aos PCN, não configura uma reivindicação por modelos descritivos para o trabalho com a Resolução de Problemas, mas a apresentação e discussão de episódios de salas de aulas, como relatos de experiência, que ilustrem o trabalho e produzam reflexões sobre a sua utilização.

Da mesma forma, podemos citar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento brasileiro de caráter normativo homologado em 2018, que define as aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo de sua Educação Básica. Na BNCC, a Resolução de Problemas está presente em diversas habilidades da área de Matemática, mencionando, inclusive, a importância da Formulação de Problemas.

Na BNCC (Brasil, 2018), é enfatizado que, nas habilidades relacionadas à Resolução de Problemas, utiliza-se o termo “elaborar” junto ao termo “resolver”, pois o documento pretende ampliar e aprofundar o significado comumente dado à Resolução de Problemas, esclarecendo que o processo deve ir além da resolução. Contudo, essa menção à Resolução de Problemas é realizada de modo superficial, uma vez que, por meio das habilidades, é definido, de forma descritiva, o que o aluno deve alcançar, sem esclarecer como o professor pode proceder no contexto de uma sala de aula real. Ao analisar o documento, podemos afirmar que as reflexões apresentadas estão distantes do que a literatura traz ao longo do tempo.

A literatura aponta que, a partir de 1989, surgiu no Brasil e no mundo uma nova perspectiva de Resolução de Problemas, em que ela passou a ser considerada em sala de aula como um ponto de partida e como um meio de ensinar Matemática (Allevato; Onuchic, 2009). De acordo com as autoras, nesse ponto de vista, o problema é proposto aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado para sua resolução.

Além disso, Allevato e Onuchic (2009) destacam que a utilização dessa metodologia em pesquisas com alunos e em atividades de formação de professores tem favorecido avanços significativos na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, assim como no aprimoramento da prática docente. As autoras explicam a utilização da palavra composta "Ensino-Aprendizagem-Avaliação", destacando que o ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, com o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. No que diz respeito à avaliação, essa metodologia integra uma concepção mais atual, a qual a avaliação é construída durante a resolução do problema, associando-se ao ensino e objetivando acompanhar o crescimento dos alunos.

De acordo com Van de Walle (2009), por duas décadas desde a publicação dos documentos originais do NCTM, a Resolução de Problemas permanece sendo considerada como um veículo poderoso e eficaz para a aprendizagem. Ao tratar do ensino de matemática pela Resolução de Problemas, o autor defende uma perspectiva que considera que os alunos devem resolver problemas para aprender uma nova matemática, não meramente para aplicá-la.

Essa visão do autor se assemelha à perspectiva atual de Resolução de Problemas, a qual considera que essa proposta possibilita uma gama de aprendizagens ao resolver um problema, isto é, vai além do objetivo de encontrar a solução do problema. Isso fica evidente ao autor apontar que "quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa" (Van de Walle, 2009, p. 57).

Na Paraíba, a Resolução de Problemas vem ganhando visibilidade nos últimos anos, estando presente em disciplinas de Licenciatura em Matemática, como também em Programas de Pós-graduação em Educação Matemática, projetos de pesquisa e extensão, publicações em livros e periódicos, entre outras realizações.

Nos últimos anos, Andrade (2017) tem dado forte atenção ao trabalho com a Exploração e Proposição de Problemas, utilizando a expressão Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, ou somente Exploração de Problemas, por compreender que a Exploração envolve tanto a Proposição, quando a Resolução de Problemas. O autor destaca que a Exploração de Problemas não tem o propósito de se contrapor à Resolução de problemas, e justifica sua proposta, afirmando que, em muitas abordagens, a utilização da Resolução de Problemas limita-se apenas à busca da solução do problema, sem ir além do problema inicialmente dado. Já a proposta de Exploração de Problemas busca a solução, bem como abrange outros pontos.

Contudo, antes de adentrarmos na discussão sobre Exploração e Proposição de Problemas, consideramos imprescindível esclarecer nossa ideia de problema e de que forma ele é considerado nesta pesquisa.

2.2 Concepções de Problema

No contexto da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, perspectiva metodológica a qual utilizamos nessa pesquisa, o problema é visto de uma maneira ampla, em que temos mais interesse no processo de aprendizagem que ele pode desencadear do que na resposta ou solução do problema.

Em nossa pesquisa de mestrado (Martins, 2019), realizamos, no momento inicial da pesquisa de campo, uma roda de diálogo, e, na ocasião, questionamos os licenciandos em Matemática sobre quais eram as suas concepções de “Problema”. Utilizando o recurso da nuvem de palavras, representamos as respostas dos alunos da seguinte forma (figura 1):

Figura 1 – Concepções de problema de licenciandos em Matemática

Fonte: Martins (2019, p. 67).

Essas concepções foram sintetizadas pela pesquisadora e pelos licenciandos, e foi definido que o Problema consiste em uma “situação que ainda não se conhece a solução e precisa ser resolvida, ou seja, que perpassará um caminho de reflexão para chegar à solução” (Martins, 2019, p. 67). Com isso, percebemos que os alunos apresentavam concepções teóricas que correspondiam às perspectivas atuais da Resolução de Problemas discutidas na literatura, entretanto, no decorrer da pesquisa, concluímos que essas concepções eram limitadas apenas à teoria.

Nesse contexto, salientamos a importância de trabalhos na formação inicial do professor de Matemática que possibilitem não somente a discussão de aspectos teóricos, mas que permitam a vivência de experiências práticas, para que, assim, os licenciandos tenham fundamentos teórico-práticos que possam subsidiar suas concepções e suas práticas futuras.

Na literatura atual de Resolução de Problemas, encontramos diversas compreensões de "problema", contudo, destacamos as seguintes concepções (Allevato; Onuchic, 2014; Andrade, 2017; Lester; Cai, 2016; Van de Walle, 2009):

Allevato e Onuchic (2014, p. 44) definem que "para que uma atividade se constitua, de fato, um problema, o professor não pode prescrever aos estudantes os métodos e/ou regras específicas para que obtenham a solução". E explicam que, no problema, o aluno não pode conhecer o método de resolução, deve haver algo novo nele, de modo que seja algo que a pessoa venha a descobrir, e, acima de tudo, deve haver o interesse da pessoa para resolver o problema.

De acordo com Andrade (2017), o problema pode ser entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que: i) o aluno não tem ou não conhece algum processo que lhe permita de imediato encontrar a solução; ii) o aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; iii) introduz-se e/ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo.

Nesta mesma perspectiva, Lester e Cai (2016) definem um problema de matemática como uma tarefa apresentada aos alunos em um ambiente educacional, que inclui uma questão a ser respondida, mas para a qual os alunos não possuem um procedimento ou estratégia imediatamente disponível para respondê-la. Segundo os autores, atividades que são consideradas problemas são aquelas nas quais os alunos se envolvem ativamente, podendo ser apresentadas como projetos, questões, construções, aplicações e exercícios.

De acordo com Van de Walle (2009), um problema voltado para a aprendizagem matemática possui as seguintes características: i) o problema deve começar onde os alunos estão – deve considerar a compreensão atual dos alunos, para que eles tenham as ideias apropriadas para resolver o problema e, mesmo assim, o considere desafiante e interessante; ii) o problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender – os alunos devem dar significado à matemática envolvida e, assim, desenvolver sua compreensão sobre essas ideias; iii) a aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para a resolução realizada – as resoluções devem ser justificadas, de modo que os alunos compreendam que eles também tem a responsabilidade de determinar se as respostas estão corretas.

Assim, a partir das definições citadas pelos autores (Allevato; Onuchic, 2014; Andrade, 2017; Lester; Cai, 2016; Van de Walle, 2009), podemos identificar alguns pontos em comum no entendimento deles por "problema". Primeiramente, podemos mencionar o fato de o aluno não ter uma solução imediata ou conhecer a forma de solucionar, isto é, um problema é aquele que necessita uma reflexão inicial e compreensão em torno dele, para que, assim, se possa ir em busca da solução. Além disso, para a situação se configurar um problema, ela deve despertar o interesse do aluno em resolver, de modo que esse processo de resolução proporcione o desenvolvimento de compreensões, aprendizagens e aprofundamentos de ideias matemáticas.

Nessa compreensão dos autores, fica evidente que aquela atividade que é um problema para um aluno pode não ser para outro, pois nem sempre os alunos têm as mesmas experiências educacionais, então, ao ser apresentado um problema, pode acontecer que algum, dentre os alunos, já o tenham resolvido em um outro momento. Além disso, o interesse do aluno em resolver o problema é algo particular, pois, em meio ao pluralismo existente nas salas de aulas, teremos interesses diversos.

Em sua compreensão, Andrade (2017) amplia a visão de problema, considerando que ele pode ser representado por meio de um projeto, questão, tarefa ou uma situação, desde que seja algo novo para o aluno, que ele tenha interesse em resolver e que promova um trabalho efetivo. Nessa compreensão do autor, percebemos uma visão ampla de problema, o que vai além dos problemas de matemática comumente representados por enunciados, os quais trazem um questionamento ao final.

É neste contexto que compreendemos o motivo pelo qual não encontramos recomendações para o trabalho com listas de problemas, uma vez que se acredita que um problema bem trabalhado pode proporcionar ao aluno o alcance de objetivos que uma lista de problemas ou de exercícios não permitiria. Desse modo, um problema não pode passar despercebido em sala de aula, ele precisa ser significativo para o aluno ao ponto de despertar no discente o interesse de debruçar-se sobre o problema e compreender todo o processo desenvolvido no decorrer da solução.

Em meio a essas concepções de problema, trazemos o seguinte questionamento: "de onde vem os bons problemas?" Essa é uma questão discutida na literatura (Brown; Walter, 1983; Kilpatrick, 1987, 2017) há algum tempo, mas que ainda é relevante nos dias atuais. Brown e Walter (1983) apontam que os problemas, geralmente, vêm dos professores e livros didáticos, enquanto os alunos ficam com a tarefa de resolvê-los. Kilpatrick (1987, 2017) tem a mesma impressão, afirmando que os problemas vêm de professores, de livros didáticos, atualmente, da web, mas, raramente, dos alunos.

Nessa esteira, salientamos que é indiscutível a vasta quantidade de problemas e atividades de matemática disponíveis em livros didáticos e na *internet*, contudo, é importante que o professor tenha a clareza de que nem sempre esses problemas estão de acordo com as compreensões de problema discutidas na literatura, sobretudo no que diz respeito à realidade dos alunos, seja a nível matemático ou que contemple a multicontextualidade da sala de aula.

Por esse motivo, é fundamental que o professor tenha uma compreensão profunda de problema, reconheça o seu papel no ensino-aprendizagem de matemática, tenha uma visão de suas possibilidades de utilização e, assim, possa fazer uma avaliação dos problemas disponibilizados nos livros didáticos e na *internet* e realizar as adaptações necessárias antes do problema ser levado para a sala de aula.

Dessa forma, é relevante salientar a argumentação de Milinkovic (2015) quanto à sua percepção de que é mais fácil ensinar os professores a propor problemas próprios do que instruir-lhes a pesquisar recursos de problemas. Além disso, a autora discute que, além de ensinar o professor a propor problemas, é importante também ensinar como e quando usá-los, em que ordem e como apresentá-los. Desse modo, enfatizamos a importância dessas discussões serem realizadas no âmbito da formação de professores, pois este é um espaço em que se tem a oportunidade de uma aprendizagem ampla e colaborativa.

Compreendemos que essa colocação dos autores não sinaliza inteiramente uma crítica aos problemas que são elaborados ou selecionados pelo professor, uma vez que eles têm suas contribuições ao ensino-aprendizagem e não podem ser ignorados. Como afirmam Lester e Cai (2016), os professores podem desenvolver tarefas matemáticas valiosas simplesmente modificando problemas dos livros didáticos.

Assim, fundamentados em Brown e Walter (1983) e Kilpatrick (1987, 2017), buscamos enfatizar a necessidade de a sala de aula ser um espaço aberto, em que os problemas trabalhados podem ser elaborados pelo professor, mas que também devem ser elaborados pelos próprios alunos, para que, assim, eles também possam aprender Matemática enquanto elaboram esses problemas.

Para elucidar esta discussão, mencionamos o trabalho de Martins (2020), desenvolvido em uma escola da rede estadual da Paraíba, com alunos do 3º ano do Ensino Médio. Na ocasião, o trabalho apresenta um episódio de sala de aula em que os alunos foram convidados a propor problemas que envolvessem o conteúdo Adição de Probabilidades, de modo que abrangessem alguma situação do seu cotidiano. Os problemas propostos pelos alunos trataram de diversos temas, como moda, esporte, lugar, entretenimento, dentre outros. Por meio dos problemas propostos pelos alunos, foi perceptível a contribuição da atividade em diversos aspectos, por exemplo: a discussão sobre pontos específicos do conteúdo que, muitas vezes, o aluno não consegue compreender, a importância de considerar a multicontextualidade da sala de aula como uma alternativa para despertar o interesse do aluno, a interação em sala de aula como forma de promover o envolvimento dos alunos na ação matemática, dentre outros aspectos.

De acordo com Lester e Cai (2016), é muito comum pedir aos alunos que interpretem uma história ou resolvam um problema de história, mas os alunos são menos frequentemente solicitados a criar histórias em salas de aula ou a propor problemas matemáticos com base em determinadas situações. Nesse sentido, os autores destacam que escrever histórias para acompanhar frases numéricas pode ajudar os alunos a se concentrarem no significado dos procedimentos envolvidos, e apontam que podemos examinar o pensamento dos alunos de uma perspectiva diferente se lhes pedirmos que criem seus próprios problemas matemáticos.

Além disso, Lester e Cai (2016) aprofundam essa discussão e mencionam sobre a necessidade de se trabalhar em sala de aula com "problemas que valem a pena". Para os autores, para que um problema seja considerado neste termo, ele precisa ser intrigante, com um nível de desafio que convida à especulação e ao trabalho árduo. Além disso, os autores defendem que o problema não precisa ser complicado ou ter um formato sofisticado, desde que promova aprendizagem matemática dos alunos, ele é um problema que vale a pena.

É nesse contexto que discutimos a Proposição de Problemas, a Exploração de Problemas e a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas nos tópicos a seguir, considerando que, por meio desse movimento, emergem os "bons problemas" e os problemas que "valem a pena", os quais podem ser propostos ou reformulados pelo professor, como também pelos próprios alunos.

2.3 Proposição de Problemas

Para situar a discussão acerca da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, abordamos, nos tópicos anteriores, o contexto histórico da Resolução de Problemas no contexto pedagógico e as compreensões de problema. Neste tópico, discutiremos sobre a Proposição de Problemas e no tópico a seguir, adentraremos na metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

A Proposição de Problemas é um tema emergente em Educação Matemática que, nos últimos anos, vem ganhando proporção em termos de pesquisas e práticas educativas. Ela tem recebido destaque em documentos oficiais, como nos *Standards for Teaching Mathematics,* publicados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991) dos Estados Unidos e em eventos internacionais, como o 15º *International Congress on Mathematical Education* (Congresso Internacional de Educação Matemática), realizado em Sydney – Austrália, no ano de 2024.

Como já mencionado no início do capítulo, a Proposição de Problemas não se configura como uma linha de pesquisa independente, ou mais rica, em termos pedagógicos, que a Resolução de Problemas. Como afirma Crespo (2015), a Proposição de Problemas está inextricavelmente ligada à Resolução de Problemas, pois ela envolve o trabalho de Resolução de Problemas, já que os problemas não surgem simplesmente do nada ou sem algumas explorações matemáticas significativas.

Crespo (2015) afirma que o ensino da matemática por meio da Proposição de Problemas oferece aos alunos a oportunidade de se tornarem produtores de conhecimento, não apenas destinatários de conteúdos já conhecidos. Essa concepção de Proposição de Problemas defendida pela autora é articulada com a concepção de Educação Crítica discutida pelo Educador Brasileiro Paulo Freire.

Brown e Walter (1983) apontam duas maneiras diferentes que explicam como a Proposição de Problemas está enraizada na atividade de Resolução de Problemas. Primeiro, eles apontam que é impossível resolver um novo problema sem antes reconstruir a tarefa colocando novos problemas no próprio processo de resolução. Em segundo, eles assinalam que, para compreendermos completamente o significado do processo realizado na resolução de um problema, é necessário que, ao final dela, seja gerado e analisado um novo conjunto de problemas relacionado ao problema resolvido.

Nesta pesquisa, a Proposição de Problemas é considerada uma ferramenta que auxilia e subsidia o trabalho com a Exploração e Resolução de Problemas, não se configurando como uma linha de pesquisa singular e independente, ou um momento trabalhado de modo isolado em sala de aula, sua proposta de utilização trata de uma integração à perspectiva atual da Metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Apresentamos, a seguir, algumas concepções teóricas sobre Proposição de Problemas discutidas na literatura e que fundamentaram a nossa pesquisa. Consideramos importante ressaltar que, na literatura internacional, para referir-se à Proposição de Problemas, é utilizado, no idioma inglês, o termo *Problem Posing*, ou *Pedagogy Problem Posing* (Pedagogia da Proposição de Problemas), como veremos no capítulo 3. Salientamos essa utilização, pois grande parte do nosso referencial teórico é proveniente da literatura internacional, visto que a Proposição de Problemas tem um maior campo de pesquisa explorado internacionalmente.

Antes de discutirmos sobre as concepções teóricas de Proposição de Problemas, trazemos um destaque ao artigo “On Mathematical Problem Posing”, do autor Ed Silver (1994), o qual é considerado como uma “leitura obrigatória” na pesquisa de Proposição de Problemas (Cai, Hwang e Melville, 2023). De acordo com Cai, Hwang e Melville (2023), este artigo impulsionou a pesquisa sobre a Proposição de Problemas, ajudando a estabelecer as bases para a pesquisa de Proposição de Problemas e apontando as direções-chave que a pesquisa de Proposição de Problemas poderia explorar.

Para Silver (1994), a Proposição de Problemas refere-se tanto à geração de novos problemas quanto à reformulação de determinados problemas, podendo ocorrer antes, durante ou após a resolução de um problema. Dessa forma, o autor esclarece que a geração de problemas pode ocorrer em momentos em que o objetivo não é a solução de um determinado problema, mas a criação de um novo problema a partir de uma situação ou experiência. E pode ocorrer também após a resolução de um problema específico, quando se pode examinar as condições do problema para propor problemas relacionados.

Silver (1994) menciona que, quando a Proposição de Problemas se refere à reformulação de problemas, podemos associar à fase "Estabelecimento de um plano" (Polya, 1945), em que, quando a pessoa tenta resolver o problema e não consegue realizar uma conexão imediata, ela pode recorrer a problemas auxiliares, isto é, a um problema correlato mais acessível. Ou seja, a pessoa pode reelaborar o problema o dividindo em partes, de modo que facilite sua compreensão, ou mesmo buscando associações que o torne mais simples.

Em outras pesquisas desenvolvidas nessa perspectiva, a reformulação de problemas também é utilizada de modo a aprofundar o problema, tornando-o mais complexo, desafiador e coerente didaticamente (Crespo, 2015; Abramovich; Cho, 2015), ou mesmo como uma extensão da heurística de resolução de problemas de Polya (1945), como sendo uma 5ª etapa do seu roteiro (Grundmeier, 2015).

Corroborando dessa ideia, Jurado (2013) considera a Proposição de Problemas como um processo pelo qual um novo problema é obtido a partir de um problema conhecido ou a partir de uma determinada situação, ou seja, a partir da variação ou da elaboração de um problema.

Cai e Hwang (2020) referem-se à Proposição de Problemas Matemáticos utilizando o termo *Mathematical Problem Posing (MPP),* os quais a definem, de modo simples, como um processo de formular e expressar um problema dentro do domínio da matemática. E, de modo mais específico, para alunos e professores, definem a Proposição de Problemas Matemáticos por meio de atividades intelectuais específicas, as quais serão apresentadas a seguir.

Para os alunos, significa: (a) os alunos propõem problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas, e (b) os alunos propõem problemas reformulando os problemas existentes. Para professores, significa: (a) os professores propõem problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas, (b) os professores preveem os tipos de problemas que os alunos podem apresentar com base em determinadas situações-problema, (c) os professores propõem problemas alterando os problemas existentes, (d) os professores geram situações de Proposição de Problemas para os alunos proporem problemas e (e) os professores propõem problemas matemáticos para os alunos resolverem (Cai; Hwang, 2020).

Jurado (2013) apresenta algumas razões didáticas sobre a importância de propor problemas tanto pelos professores quanto pelos alunos. Para ele, quando os problemas são criados pelos professores, eles podem contribuir para aproximar a matemática do contexto do aluno, adequar ao nível dos alunos e, em seguida, aprofundar o nível de dificuldade, problematizar as curiosidades dos alunos, melhorar a qualidade de avaliação e consolidar a formação matemática de professores.

Já quando o problema é criado pelo aluno, Jurado (2013) afirma que ele pode contribuir para motivar o seu estudo, fortalecer a habilidade de resolver problemas e de questionar situações, ampliar a visão matemática e habilidades matemáticas, fazer conexões da matemática com outras campos, desenvolver a criatividade, dentre outros aspectos.

Nesse sentido, acredita-se que a Proposição de Problemas fornece amplo espaço de potencialidades a serem desenvolvidas em sala de aula. Como aponta Silver (1994), ela pode oferecer um meio de conectar a Matemática aos interesses dos alunos, como também pode proporcionar um espaço de discussão potencialmente rico para explorar a interação entre as dimensões cognitiva e afetiva do aprendizado matemático dos alunos.

De acordo com Silver (1994), a Proposição de Problemas foi identificada por alguns líderes consagrados em Matemática e Educação Matemática, a exemplo Hans Freudenthal e George Polya, como um aspecto importante da Educação Matemática e, apresentada em documentos oficiais, como nos *standards for teaching mathematics*, publicados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991) dos Estados Unidos, que destacam a necessidade de o aluno ter a oportunidade de formular problemas de determinadas situações, criar novos problemas e modificar as condições de um determinado problema.

Crespo (2015) discute que, no ano 2000, os pesquisadores começaram a se concentrar na Proposição de Problemas do professor e em como ela abre e fecha as oportunidades de aprendizado dos alunos. No entanto, a autora aponta que a Proposição de Problemas ainda não ganhou a mesma visibilidade que a Resolução de Problemas tem nos currículos de matemática escolar.

Atualmente, a Proposição de Problemas ainda é considerada um campo com territórios inexplorados e que necessita de investigação. Percebemos que a nível nacional temos poucas pesquisas desenvolvidas nessa perspectiva, já a nível internacional temos uma literatura mais densa, com diversas pesquisas na área, contudo, ainda é consensual entre eles que há uma necessidade de intensificar esses estudos.

De acordo com Kilpatrick (2017), a Proposição de Problemas tem chamado mais atenção nos últimos anos devido ao trabalho realizado por Ed Silver e Jinfa Cai, os quais evidenciam exemplos e consequências desse trabalho no livro *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice*, publicado em 2015 pelos autores Florence Mihaela Singer, Nerida F. Ellerton e Jinfa Cai.

Para Singer, Ellerton e Cai (2013), a Proposição de Problemas é uma questão antiga, o que há de novo é a conscientização da necessidade dela permear os sistemas de ensino em todo o mundo, tanto como um meio de ensino (destinado a envolver os alunos em atividades de aprendizado genuínas que produzem uma compreensão profunda dos conceitos e procedimentos da Matemática) quanto como um objeto de ensino (focado no desenvolvimento da proficiência dos alunos na identificação e proposição de problemas de situações não estruturadas) com alvos importantes em situações da vida real.

Na China, por exemplo, estudos apontam que há 70 anos a Proposição de Problemas está presente nos livros didáticos de Matemática, e, consequentemente, nas salas de aula (Jia; Yao, 2021). Para chegar a esta conclusão, Jia e Yao (2021) realizaram uma análise histórica da Proposição de Problemas na área de número e álgebra em seis séries de livros didáticos de matemática da escola primária chinesa publicados entre os anos 1950 e 2010.

Contudo, Jia e Yao (2021) identificaram que, embora a Proposição de Problemas tenha se tornado mais importante na Educação Matemática na China ao longo dos últimos 70 anos, conforme o nível de escolaridade aumenta, o número de tarefas de Proposição de Problemas diminui nos livros didáticos. Diante disso, os autores sugerem aumentar esse número de tarefas e apontam a necessidade de estudos futuros que investiguem essa evolução ao longo dos anos.

No Brasil, temos algumas pesquisas a nível de Mestrado, desenvolvidas na UEPB, que têm dado forte atenção ao trabalho com a Proposição de Problemas, um exemplo são as pesquisas que serão citadas no tópico a seguir (Nascimento, 2014; Silva, V., 2015; Silveira, 2016; Martins, 2019; Silva, C., 2021; Sousa, 2021). Esses trabalhos explicitam, a partir da sua vivência/experiência no âmbito do desenvolvimento da pesquisa, como acontece o processo de Exploração, Proposição e Resolução de problemas dentro do cotidiano de sala de aula.

Andrade (2017) destaca que em todas as pesquisas por ele orientadas a Proposição de Problemas tem recebido uma atenção cada vez maior. E explica:

> Na proposição de problemas, a exploração de problemas é vista como uma caixa de ferramentas que possibilita e avança o trabalho de proposição de problemas. Por sua vez, a proposição de problemas é também uma caixa de ferramenta que operacionaliza e avança o trabalho com a exploração de problemas. Da mesma forma é a resolução de problemas no contexto deste trabalho (Andrade, 2017, p. 388).

Dessa forma, percebe-se a conexão entre a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, a qual Andrade (2017) aponta a necessidade de utilizar um hífen nesse movimento, para melhor expressar essa conexão, ficando, portanto, Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. A utilização dessa palavra composta vai além da escrita, ela vai ao encontro do que Martins e Andrade (2022) discutem, quando mencionam a indissociabilidade entre a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, em que, embora em algum momento da atividade alguma emerja mais do que as outras, não há a possibilidade de separá-las, pois elas se complementam.

Diante disso, ao discutirmos a Proposição de Problemas na literatura, devemos acrescentar a essa discussão o nosso entendimento por Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, a qual consiste na metodologia de ensino que orienta o nosso trabalho.

2.4 Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é compreendida, neste trabalho, como uma metodologia orientadora, a qual tem o problema como o ponto de partida e considera a sala de aula enquanto um espaço aberto e propício à aprendizagem colaborativa. É uma metodologia que tem como base os aspectos relacionados à metodologia de Resolução de Problemas, sugerindo um aprofundamento desta metodologia.

A Exploração de Problemas na sala de aula de matemática é uma perspectiva que vai além do ato de obter a solução de um problema, ela considera a reflexão do problema, o seu entendimento como um todo e as suas múltiplas possibilidades de alcance. Dessa forma, compreende-se que a resolução do problema faz parte do ato de explorar, mas não é o seu único objetivo ou o seu intuito principal.

Nessa perspectiva, mesmo quando o problema explorado não é solucionado, o olhar do professor e/ou pesquisador deve estar direcionado para todo o trabalho que é realizado em torno do problema e as diversas habilidades que são desenvolvidas. Assim, a preocupação da

Exploração de Problemas não está, unicamente, voltada para a solução do problema, mas para as aprendizagens que surgem desse processo.

Assim como a Proposição de Problemas, a Exploração de Problemas é considerada um tema emergente em Educação Matemática, que tem como percursor o professor brasileiro Silvanio de Andrade (1998), o qual explica que essa perspectiva compreende tanto a Resolução de Problemas quanto a Proposição de Problemas. Essa proposta é intitula, originalmente, Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas, mas, de forma prática, o autor tem utilizado o termo Exploração de Problemas ou Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Andrade (2017) explica que essa proposta, que é assumida como uma metodologia de ensino, está situada na linha de pesquisa de Resolução de Problemas, assim, não busca contrapô-la. Contudo, sinaliza que, em muitos casos, a Resolução de Problemas limita-se apenas à busca da solução, o que não é o caso da Exploração de Problemas, que se interessa pela solução, mas abrange também outros aspectos.

Nesse contexto, salientamos que a Exploração de Problemas sugere um aprofundamento da metodologia de Resolução de Problemas, indo além da solução do problema, contemplando a discussão, o desenvolvimento e o aprofundamento de conceitos matemáticos, por meio do movimento de explorar, propor e resolver problemas. Além disso, Andrade (2017) menciona que, além de conceitos matemáticos, a Exploração de Problemas abrange questões de natureza sócio-político-cultural, da educação em geral e da educação matemática em particular, em que a sala de aula é observada em toda sua multicontextualidade.

No Brasil, temos algumas pesquisas a nível de mestrado que foram desenvolvidas nessa perspectiva, sobretudo pelos membros do GEPEP da UEPB, algumas pesquisas de doutorado em andamento e publicações em congressos e periódicos na área de Educação Matemática. Dentre as pesquisas realizadas nessa proposta, destacamos, por tipo e em ordem cronológica, algumas delas a seguir.

Maurício Alves do Nascimento (Nascimento, 2014) desenvolveu um trabalho com alunos do 2º ano do Ensino Médio, de uma Escola Estadual da Paraíba, intitulado “Ensino-aprendizagem de trigonometria através de resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar”. Com esse trabalho, o autor problematiza a complexidade e multicontextualidade do cotidiano da sala de aula e evidencia a Resolução e Exploração de Problemas como uma metodologia capaz de favorecer o trabalho de formação de conceitos e ideias matemáticas dos alunos, pois possibilita um engajamento mais intenso, com diálogo efetivo entre professor-aluno e entre aluno-aluno. Além disso, o autor aponta que a utilização da Exploração de Problemas oportuniza ao professor refletir sobre a sua própria prática docente.

Veralúcia Severina da Silva (Silva, V., 2015) desenvolveu um trabalho com alunos repetentes do 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Pernambuco, intitulado "Proposição e exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de matemática". Esse trabalho teve como diferencial associar a metodologia de Exploração de Problemas à utilização de um software educacional, o qual pôde contribuir também na temática das Tecnologias da Informação e Comunicação. De acordo com a autora, o trabalho evidenciou que essa associação potencializa a criatividade do aluno e possibilita que ele utilize as diferentes formas de representações de uma mesma função.

Adriano Alves da Silveira (Silveira, 2016) desenvolveu um trabalho com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública na cidade de Alagoinha-PB, intitulado "Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas". O trabalho evidenciou que a metodologia utilizada possibilitou ao pesquisador acompanhar o desenvolvimento dos alunos, os quais participaram efetivamente da construção do conhecimento e assumiram papel de investigadores, como também possibilitou a aprendizagem das ideias essenciais de análise combinatória pelos alunos. Com esse trabalho, o autor concluiu que a metodologia permitiu uma aprendizagem com mais compreensão, potencializando o aluno para resolver problemas de Análise Combinatória com foco não apenas na busca da solução do problema, mas no processo da resolução.

Em nossa pesquisa de mestrado (Martins, 2019), desenvolvemos um trabalho com licenciandos em Matemática, intitulado "Ensino-Aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas". Essa pesquisa evidenciou contribuições na formação dos futuros professores em dois aspectos: na utilização da metodologia de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas a qual se mostrou importante na construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares e contribuiu também no desenvolvimento de ideias de álgebra, em que os resultados evidenciaram que as Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas favorecem uma aprendizagem de Sistemas Lineares com mais compreensão.

Cícero Félix da Silva (Silva, C., 2021) desenvolveu um trabalho no contexto do ensino remoto, em decorrência da pandemia de COVID-19, com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual da Paraíba, intitulado "Ensino Aprendizagem de Função afim via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas com o uso do aplicativo Desmos em Contexto Remoto". Na ocasião, autor utilizou como apoio o aplicativo Desmos, o qual se mostrou essencial na exploração dos problemas trabalhados, oferecendo aos alunos a identificação de pontos importantes na representação gráfica de uma situação-problema. O autor acredita que a Exploração de Problemas, associada ao aplicativo Desmos, contribuiu, de forma significativa, para o processo de construção do conceito de função, oferecendo ao professor subsídios para uma boa prática de ensino.

Ana Beatriz Afonso de Sousa (Sousa, 2021) desenvolveu uma pesquisa bibliográfica de cunho qualitativo, intitulada "Pesquisas em Proposição de Problemas: convergências e potencialidades", a qual tinha como objetivo principal identificar pontos de encontro e contribuições da Proposição de Problemas no ensino-aprendizagem de matemática, a partir de sete dissertações de mestrado desenvolvidas no PPGECEM. Das dissertações analisadas pela autora, três delas foram mencionadas anteriormente (Silva, V., 2015; Silveira, 2016; Martins, 2017). Sousa (2021) menciona ter constatado inúmeras possibilidades para a Proposição de Problemas nas aulas de matemática, contudo, aponta que, inicialmente, os alunos participantes das pesquisas analisadas apresentaram um certo desconforto na utilização dessa metodologia, mas esclarece que isso é algo que é superado ao longo das atividades. Assim, a autora acredita que o trabalho desenvolvido pode colaborar na compreensão e incorporação da Proposição de Problemas às práticas utilizadas, além de instigar novas perspectivas e direcionamentos para pesquisas futuras.

Nos trabalhos supracitados, exceto a pesquisa bibliográfica, destacamos a presença de um longo e intenso trabalho em sala de aula, que vive e experencia a exploração de problemas e todas as suas possibilidades de contemplar a matemática no cotidiano escolar. Essa metodologia exige do professor uma imersão constante no processo desenvolvido, de modo que o docente mergulhe no cotidiano de sala de aula e desenvolva um olhar sensível e crítico do processo de ensino-aprendizagem.

Além das dissertações de mestrado mencionadas, também gostaríamos de fazer referência a alguns trabalhos que membros do GEPEP têm publicado nos últimos anos em periódicos reconhecidos da área de Educação Matemática. Em suma, são publicações que enfatizam aspectos teóricos da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas a partir de experiências práticas, desenvolvidas em salas de aulas.

Silveira e Andrade (2020), no artigo publicado na Revista de Educação Matemática (REMat), intitulado "Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio", discutem como uma abordagem em sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de problemas pode potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Esse trabalho foi desenvolvido com alunos do 2º ano do Ensino Médio, por meio de atividades abordando o conteúdo Análise Combinatória. Com esse trabalho, os autores evidenciaram aspectos que demonstram o desenvolvimento dos alunos, tais como a expressão das suas próprias ideias, estratégias e processos de exploração, a justificativa desses processos e o avanço em novas explorações e novos problemas. Assim, os autores concluíram que a metodologia utilizada possibilitou uma aprendizagem com mais compreensão e profundidade.

Martins e Andrade (2021), no artigo publicado na Revista de Matemática, Ensino e Cultura (REMATEC), intitulado “Representações Múltiplas no ensino de Álgebra e Resolução de Problemas: aspectos teóricos e práticos”, apresentam as potencialidades das Representações Múltiplas no ensino-aprendizagem de Álgebra através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Os autores discutem um trabalho desenvolvido com licenciandos em matemática, o qual evidencia o avanço desses alunos nas compreensões de álgebra, favorecido pela transição entre as representações, visto que, a partir das discussões no decorrer das atividades, os alunos passaram a ter mais clareza das representações, não recorrendo à tentativa e erro, como nos primeiros encontros. Dessa forma, os autores concluíram que as Representações Múltiplas de Álgebra, aliadas à Exploração-Proposição-Resolução de Problemas favorecem uma aprendizagem com mais compreensão e contribuem na construção de uma nova postura no ensino de Álgebra.

Silveira e Andrade (2022), em seu artigo publicado na REMat, intitulado “Proposição de problema de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula”, analisam como uma abordagem em sala de aula via Proposição de Problemas pode potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Os autores desenvolveram esse trabalho com alunos do Ensino Médio, os quais, através da Proposição de Problemas, puderam fazer relações entre a matemática e sua realidade social. Os autores concluíram que a proposta de proposição de problemas permite ao aluno atuar como protagonista de sua aprendizagem, propicia o aprofundamento dos principais conceitos de Análise Combinatória e possibilita o desenvolvimento do pensamento matemático. Portanto, os autores defendem que a proposição de problemas deve ocupar um lugar de destaque nas aulas de matemática.

Martins e Andrade (2022), em seu artigo intitulado “Ensino de Sistemas Lineares: uma Proposta Metodológica Utilizando a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas”, publicado na Educação Matemática em Revista (EMR), discutem as implicações da utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares. Essa pesquisa foi realizada por meio de atividades desenvolvidas com licenciandos em matemática, os quais, inicialmente, se mostraram inseguros frente ao conteúdo Sistemas

Lineares, tendo dificuldades nos métodos de resolução, na resolução de um problema, dentre outros. Os autores perceberam que essas dificuldades foram sendo minimizadas no decorrer da proposta e, assim, concluíram que as atividades desenvolvidas utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas possibilitaram reflexões sobre o ensino de Sistemas, tais como a importância de promover a transição entre as representações e utilizá-las como aliadas ao ensino, contribuindo, desse modo, para novas abordagens do conteúdo Sistemas Lineares.

Martins e Andrade (2023), em seu artigo intitulado “Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na licenciatura através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas”, publicado na REMat, apontam as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração, Proposição e Resolução, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, no ensino de Sistemas Lineares na licenciatura. O trabalho foi desenvolvido com licenciandos em matemática, por meio de uma Oficina teórico-prática. Os autores evidenciam que a proposta metodológica utilizada possibilita aos alunos preencherem a lacuna existente na compreensão das representações múltiplas, as quais, comumente, as utilizam de modo isolado. Além disso, destacam que experimentar, na prática, a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como Metodologia de ensino possibilita reflexões no futuro professor sobre o ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares e sobre o ensino de matemática.

Silveira, Nascimento e Andrade (2023) publicaram um artigo no livro “Perspectivas Plurais em Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental Ensino Médio” apresentando a proposta de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na perspectiva da justiça social. Nessa publicação, os autores discutem a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, tanto em seus aspectos cognitivos como na sua dimensão sócio-cultural-política. Na ocasião, são apresentados dois cenários de sala de aula, com situações-problema de análise combinatória, em que um deles aborda o conteúdo de gênero e o outro, o conceito de permutação simples. Os autores apresentam, através desses dois cenários, uma variedade de caminhos cognitivos e socio-políticos-culturais que os estudantes desenvolvem ao longo dos processos de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

Martins e Andrade (no prelo), publicaram o primeiro recorte desta tese por meio do artigo intitulado “Implicações da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática”, na Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM). O artigo objetiva apresentar aspectos nos quais a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas contribui para a formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra. Para tanto, é feita uma discussão teórica sobre a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, como também é discutido sobre as ideias de Álgebra e como possibilitar a transição entre as representações múltiplas por meio dessa metodologia.

Diante dos trabalhos mencionados, salientamos a importância de vivenciar a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na prática de sala de aula, pois essa é a forma mais completa de refletirmos e compreendermos os aspectos teóricos dessa proposta. Entendemos que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é uma oportunidade de o professor fazer da sua sala de aula um campo de pesquisa e refletir continuamente sobre a sua própria prática docente.

Nesse contexto, destacamos que é relevante desenvolver trabalhos nessa perspectiva na Educação Básica, mas, sobretudo, na formação inicial de professores que ensinam matemática, pois, dessa forma, os futuros professores têm a oportunidade de vivenciar e experimentar essa metodologia no decorrer de sua formação e adquirir subsídios para utilizá-las em suas futuras práticas.

Andrade (2017) aponta que, em todas as pesquisas as quais ele tem orientado, que utilizam a perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, a Proposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida nos alunos e que ela só é desenvolvida após um período intenso de trabalho em sala de aula. Para o autor, "isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada apenas na resolução de problemas oriunda de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos" (Andrade, 2017, p. 388).

Isso também foi percebido em nossa pesquisa de mestrado (Martins, 2019), desenvolvida com licenciandos em Matemática. Na ocasião, foi realizada uma pesquisa qualitativa, na modalidade pesquisa pedagógica, por meio de uma oficina, em uma turma do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática, em que a professora da turma era a própria pesquisadora.

No decorrer das atividades realizadas na referida pesquisa (Martins, 2019), percebemos que os alunos – que, de início, tinham apenas conhecimentos teóricos, passaram a compreender e incorporar a Exploração e Proposição de Problemas ao trabalho com Resolução de Problemas. Contudo, ficou evidente que a etapa de Proposição de Problemas sempre era a fase mais difícil de ser trabalhada, sobretudo nas primeiras atividades da pesquisa. De acordo com o observado e mediante a fala dos alunos, isso aconteceu porque eles não estavam habituados a criar problemas, mas a apenas resolvê-los.

Indo mais além do que foi discutido na pesquisa de mestrado, podemos associar essa justificativa dos alunos à fala do brasileiro Freire (2011) no diálogo com o chileno Antônio Faundez, no livro Pedagogia da Pergunta, quando destaca que “no ensino esqueceram-se das perguntas, tanto o professor como o aluno esqueceram-nas, e no meu entender todo conhecimento começa pela pergunta” (Freire; Faundez, 2011, p. 67).

Fazendo uma analogia a Freire (2011), podemos afirmar que assim como o ato de perguntar foi esquecido, consideramos que o ato de propor problemas também o foi, ou, talvez nunca tenha sido muito lembrado. Conforme vem sendo discutido ao longo do capítulo, embora a Proposição de Problemas possibilite diversos aspectos importantes para a aprendizagem de matemática, esta é uma prática que não tem tido muito espaço nas salas de aula, seja pelo professor ou pelo aluno.

Nesse diálogo com Faundez, Freire (2011) aponta que existe nas escolas uma “castração da curiosidade”. Isto é, quando, na sala de aula, se acredita na existência de um saber pronto, em que o aluno está acostumado a ver o professor trazer informações e respostas, sem mesmo lhes oportunizar a fazer as perguntas. Diante disso, Faundez (2011) assegura que o conhecimento se dá com o ato de perguntar, e que isso é algo que o professor deveria estimular.

O extenso e rico diálogo entre Freire e Faundez (2011) propicia uma discussão importante sobre as questões relativas à criticidade, que também têm sido valorizadas nos estudos sobre a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Além disso, nesse diálogo, Freire e Faundez (2011) apontam questões que valorizam a autonomia do aluno, a importância de trabalhar com eles e não para ou sobre eles, assim como a oportunidade de o professor aprender em seu próprio processo de ensinar.

Nesse sentido, muitas reflexões e questionamentos podem ser levantados, pois, embora a Proposição de Problemas seja um tema emergente, que pode contribuir em diversos aspectos: seja no trabalho do professor e/ou na aprendizagem do aluno, aparenta-se que a prática de sala de aula dos dias atuais ainda permanece engessada, em que o aluno espera o professor dizer o que fazer, como fazer e quando fazer e não tem espaço para questionamentos voltados para o porquê fazer.

Assim, pode-se afirmar que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é vista como uma quebra desse modelo de ensino, pois o cenário de sala de aula que utiliza a Proposição de Problemas, assim como a Metodologia de ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas, é um cenário aberto – embora não solto, colaborativo e participativo.

De acordo com Freire (2011, p. 64-65), “a curiosidade do estudante às vezes pode abalar a certeza do professor. Por isso é que, ao limitar a curiosidade do aluno, a sua expressividade, o professor autoritário limita a sua também”, pois, o professor também pode aprender enquanto ensina, dessa forma, quando se abre o espaço da sala de aula para um ambiente movido por perguntas, se rompe o paradigma de professor como detentor do saber e/ou de conhecimento como algo pronto.

É nesse contexto que compreendemos o cenário de uma sala de aula utilizando a metodologia da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, uma vez que não há uma autoridade do professor sobre o ensino de matemática. Tanto o professor quanto os alunos têm a possibilidade e autonomia de dialogar sobre ela. Nesse cenário, o professor mantém o papel de mediador, contudo, deixa o espaço de sala de aula livre para que o aluno possa realizar suas investigações, discussões e descobertas.

Talvez, a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas ainda não seja uma prática comum em sala de aula pelo fato dela conduzir o professor a fazer uma transição de sua “zona de conforto” para a “zona de risco”. Para esclarecer nossa colocação sobre estes dois termos, corroboramos das concepções de Penteado (2000), que compreende a zona de conforto como “a dimensão da prática docente em que estão presentes a previsibilidade e o controle” (Penteado, 2000, p. 32), já a zona de risco, é considerada como uma dimensão que é caracterizada pela incerteza, flexibilidade e surpresa.

Essas definições apresentadas pela autora representam, fortemente, o cenário de sala de aula no trabalho com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, uma vez que, neste trabalho, o professor não consegue prever o que estar por vir, contudo, precisa estar preparado para lidar com as situações porvindouras, seja a nível de conteúdo matemático ou sobre outros contextos que um problema pode abranger.

Ao mencionarmos a necessidade de o professor estar preparado, salientamos sobre uma categoria específica do conhecimento dos professores, denominada por Shulman (1987) como “Conhecimento Pedagógico do Conteúdo” (PCK, da expressão em inglês, *Pedagogical Content Knowledge*), que se refere à capacidade de um professor de transformar o conhecimento do conteúdo que ele possui em formas pedagógicas relevantes e adequadas às variações dos alunos, levando em consideração as experiências e bagagens dos alunos, sendo, inclusive, algo que o diferencia de uma especialista dessa disciplina.

Fiorentini e Lorenzato (2012) trazem uma discussão sobre a diferença entre o matemático e o educador matemático que se aproxima dessa denominação colocada por Shulman (1987), ao mencionarem que o matemático, ao atuar na formação de professores de matemática, tende a conceber uma educação para a matemática, em contrapartida, o educador matemático tenta promover uma educação pela matemática.

Nesse contexto, o professor que trabalha com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, sobretudo na formação de professores, precisa utilizar essa metodologia como uma alternativa para o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para a sua formação e que possibilitem que esses futuros professores também promovam, em suas futuras práticas, uma educação pela matemática.

Nessa esteira, mencionamos que a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas leva em consideração o conhecimento matemático, mas é uma proposta que também leva em consideração outros saberes dos professores, os quais consideramos que pode colaborar no desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Contudo, ao ressaltarmos sobre o trabalho com essa proposta metodológica, não nos referimos a um trabalho puramente teórico, de modo que os futuros professores, unicamente, estudem sobre o conhecimento teórico da literatura nessa perspectiva, mas que, assim como nas pesquisas desenvolvidas e citadas no decorrer desse capítulo, os futuros professores possam vivenciar e experimentar intensamente essa metodologia na prática de sala de aula.

3 PESQUISAS INTERNACIONAIS SOBRE A PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos um levantamento de trabalhos publicados com pesquisas desenvolvidas, em âmbito internacional, com foco na Proposição de Problemas. Nossa fonte de pesquisa é o livro *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice*, publicado em 2015, organizado por Florence Mihaela Singer, Nerida F. Ellerton e Jinfa Cai. Essa obra é reconhecida por Kilpatric (2017) como um marco na visibilidade da Proposição de Problemas em Matemática.

O livro é um número especial sobre a Proposição de Problemas, com 26 artigos, tendo um total de 52 autores de 16 países (Austrália, Bélgica, Canadá, China, República Tcheca, Israel, Itália, Japão, Malásia, Noruega, Romênia, Sérvia, Cingapura, Suécia, Holanda e Estados Unidos da América).

Singer, Ellerton e Cai (2015) salientam que a diversidade cultural das origens dos autores traz para o livro diversas representações, expressões, conhecimentos, habilidades e atitudes em relação às abordagens para a Proposição de Problemas, tornando autêntica a diversidade de perspectivas apresentadas no livro. Além disso, os capítulos da obra demonstram que a Proposição de Problemas não é apenas um fenômeno local e que seu lugar na matemática escolar está ganhando cada vez mais reconhecimento.

Ressaltamos que a nossa escolha para a análise dessa obra se justifica por compreendermos que essa é uma publicação atual e relevante na área de Proposição de Problemas. É, acima de tudo, um livro multidisciplinar, composto por artigos que apresentam diferentes abordagens epistemológicas, filosóficas e pedagógicas para a Proposição de Problemas.

Os artigos analisados foram selecionados com base em trabalhos teóricos que tratam de pesquisas em Proposição de Problemas, bem como aqueles que se concentravam na Proposição de Problemas com o público-alvo Professores de Matemática em formação inicial ou em exercício.

Neste capítulo, apresentamos uma síntese de oito artigos, visando identificar: i) o foco teórico utilizado pelos autores; ii) a forma como a Proposição de Problemas é trabalhada; iii) a aproximação da Proposição de Problemas com a Resolução e a Exploração de Problemas; iv) a Proposição de Problemas na formação de professores de matemática. Ao iniciar cada síntese, apresentaremos uma breve apresentação dos autores dos trabalhos analisados, que está disponível no livro em questão, visando destacar esses relevantes trabalhos que vêm sendo desenvolvidos em diversos países.

Sendo assim, este capítulo aspira apresentar os avanços e perspectivas das pesquisas em Proposição de Problemas na formação inicial do professor de Matemática, bem como possibilitar um refinamento da nossa questão de pesquisa, situando-a na literatura.

Ao final da análise das pesquisas, procuraremos identificar, sistematizar e discutir os seguintes tópicos, tendo em vista que eles interferem diretamente na nossa pesquisa: i) as similaridades e diferenças entre os pesquisadores em relação ao trabalho com a Proposição de Problemas; ii) a relação entre a Proposição de Problemas e a Resolução e a Exploração de Problemas; iii) a Proposição de Problemas na formação inicial do professor de Matemática; iv) as direções futuras para pesquisas em Proposição de Problemas.

3.1 Proposição de Problemas: concepções e contribuições

Neste tópico, apresentamos os trabalhos que discutem a Proposição de Problemas enquanto campo de pesquisa, trazendo concepções a respeito dela e as suas contribuições para a sala de aula de Matemática. Para tanto, serão apresentados os seguintes trabalhos:

Quadro 1 – Trabalhos analisados

	Título	**Autores**
1	Pesquisa de Proposição de Problemas em Educação Matemática: algumas questões respondidas e não respondidas	Jinfa Cai, Stephen Hwang, Chunlian Jiang e Steven Silber
2	Conceituando a Proposição de Problemas por meio da transformação	Jasmina Milinković
3	Usando Tecnologia Digital para Proposição de Problemas Matemáticos	Sergei Abramovich e Eun Kyeong Cho

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

- **Artigo:** Pesquisa de Proposição de Problemas em Educação Matemática: algumas questões respondidas e não respondidas
- **Sobre os autores:**

❖ Jinfa Cai é professor de matemática e educação na Universidade de Delaware nos Estados Unidos. Tem como tema de interesse compreender como os alunos aprendem matemática e resolvem problemas e como os professores podem criar e fornecer ambientes de aprendizagem para os alunos aprenderem matemática. Ele recebeu diversos prêmios, dentre eles: National Academy of Education Spencer Fellowship, American Council on Education Fellowship, International Research Award e Teaching Excellence Award.

❖ Stephen Hwang trabalhou em sua pesquisa de doutorado com o professor Jinfa Cai no Departamento de Ciências Matemáticas da Universidade de Delaware. Seus interesses de pesquisa incluem o ensino e a aprendizagem de justificação e prova matemática, a natureza da prática na disciplina de matemática, o desenvolvimento de hábitos mentais matemáticos e a formação de professores de matemática.

- Chunlian Jiang é Professora Auxiliar na Faculdade de Educação da Universidade de Macau (UM). Ela é doutora pela Nanyang Technological University, Cingapura, possui mestrado em educação matemática e bacharelado em matemática. Ela tem experiência de ensino em escolas de Ensino Médio na China e em Cingapura, tendo como interesse de pesquisa a resolução e proposição de problemas, Olimpíadas de matemática, educação de alunos superdotados em matemática e uso de TI no ensino e aprendizagem de matemática.

- Steven Silber concluiu seu doutorado no Departamento de Educação da Universidade de Delaware, trabalhando com Jinfa Cai no Departamento de Ciências Matemáticas. Seus interesses de pesquisa incluem o pensamento matemático e o raciocínio de alunos e professores enquanto se envolvem em tarefas matemáticas e a transição de alunos do primeiro ano de graduação para cursos de matemática de nível universitário.

O primeiro artigo apresentado neste capítulo é um estudo teórico intitulado “Pesquisa de Proposição de Problemas em Educação Matemática: algumas questões respondidas e não respondidas”, dos autores Cai, Hwang, Jiang e Silber (2015). Este artigo tem como objetivo sintetizar o estado atual do conhecimento em pesquisa de Proposição de Problemas e sugerir questões e direções para estudos futuros.

Destacamos este artigo, inicialmente, por compreendermos sua ampla abrangência nas pesquisas em Proposição de Problemas e, por meio dele, percebermos que, apesar de haver diversas pesquisas realizadas, a Proposição de Problemas ainda apresenta muitos campos inexplorados. Dessa forma, este artigo pode despertar o interesse de diversos pesquisadores em explorar estes campos, bem como aprofundar as pesquisas nos campos já estudados. Além disso, utilizamos essas questões e direcionamentos para estabelecer uma base para a nossa pesquisa.

Cai *et al*. (2015) começam o seu trabalho enfatizando os esforços espalhados pelo mundo para incorporar a Proposição de Problemas na prática de sala de aula. Contudo, os pesquisadores salientam que existem alguns aspectos em que os conhecimentos sobre eles ainda são limitados, tais como: i) processos cognitivos envolvidos na proposição de problemas pelos alunos; ii) estratégias de ensino que podem promover uma proposição efetiva de problemas; iii) eficácia de envolver os alunos em atividades de proposição de problemas.

Dessa forma, os autores apresentam algumas questões, que representam áreas ricas em Proposição de Problemas e representam o estado atual das pesquisas neste campo. Ao discutirem esses temas, os autores também abordam questões relacionadas que ainda permanecem insolventes e, conforme o seu entendimento, merecem um maior cuidado por parte da comunidade de pesquisa.

A questão (1) “Por que a Proposição de Problemas é importante na matemática escolar?” discute sobre a importância intelectual da Proposição de Problemas na investigação científica. Cai *et al.* (2015) argumentam que, tendo em vista o objetivo da educação de preparar os alunos para os tipos de pensamento que serão necessários, a Proposição de Problemas é uma parte relevante do currículo nesse contexto. Além disso, salientam que a Proposição de Problemas pode ser vista sob uma perspectiva crítica para os professores, tanto nos problemas que eles propõem quanto nos que incentivam o aluno a propor.

Os autores discutem os argumentos teóricos que sustentam a relevância da Proposição de Problemas na matemática escolar e citam pesquisadores que estão investigando de forma ativa as ligações entre a Proposição de Problemas e outros aspectos da habilidade matemática, incluindo compreensão conceitual, resolução de problemas e criatividade.

Nesse sentido, Cai *et al.* (2015) destacam que dado o seu potencial para melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática, fica claro que a Proposição de Problemas é uma parte importante da pesquisa e da prática em matemática escolar.

A questão (2) “Os professores e alunos conseguem propor problemas matemáticos relevantes?” aponta para uma linha fundamental de pesquisa na Proposição de Problemas, a qual consiste em explorar os tipos de problemas que professores e alunos podem apresentar. Nessa linha, os pesquisadores propõem uma situação-problema e solicitam que os indivíduos proponham problemas que podem ser resolvidos com base nas informações fornecidas na situação.

Cai *et al.* (2015) salientam que pesquisas de matemática em Proposição de Problemas analisam o desempenho da escola, alunos, futuros professores e professores em serviço, e apontam que eles conseguem apresentar resultados matemáticos interessantes e problemas relevantes. No entanto, os pesquisadores também descobriram que alguns alunos e professores apresentam problemas não matemáticos, problemas insolúveis e problemas irrelevantes.

Diante de tais resultados, os autores apontam para a seguinte pergunta não respondida: “Qual é o motivo pelo qual os alunos apresentam problemas não matemáticos, triviais ou de natureza conceitual?” Além disso, sugere-se o desenvolvimento de uma pesquisa que investigue como alunos e professores interpretam e analisam situações-problema ao se envolverem na proposição de problemas.

A questão (3) “Os alunos e professores podem ser efetivamente treinados para apresentar problemas de alta qualidade?” discute que, apesar de os alunos e professores conseguirem propor problemas, mesmo quando esses problemas são matematicamente corretos, eles nem sempre são de alta qualidade. Dessa forma, alguns estudos abordaram a questão de como melhorar as habilidades de professores e alunos para propor melhores problemas.

Diante dessa discussão, Cai *et al.* (2015) apresentam a seguinte questão não respondida: "Quais estratégias e formas de pensar são mais produtivas para propor problemas e sob quais tipos de situações matemáticas as diferentes estratégias são eficazes?"

Na questão (4) "Quais são os conhecimentos existentes a respeito dos processos cognitivos de Proposição de Problemas?", os autores enfatizam a existência de uma variedade de processos potenciais envolvidos na Proposição de Problemas, os quais podem variar consoante o tipo de problema em questão. Cai *et al.* (2015) apontam que, apesar de as teorias dos processos cognitivos da Proposição de Problemas serem relativamente recentes, há uma longa tradição de atenção às estratégias que podem ser úteis. Nesse contexto, os autores apresentam a estratégia "E se não?", proposta por Brown e Walter (1983), que se baseou na fase "retrospecto" de Polya (1945).

Os autores apresentam, nessa discussão, a seguinte pergunta não respondida: "Como a compreensão da cognição de problematização dos alunos pode auxiliar os professores a melhorar a aprendizagem dos alunos?"

A questão (5) "Como as habilidades de Proposição de Problemas estão relacionadas às habilidades de Resolução de Problemas?" trata da importância de investigar as ligações entre a Proposição de Problemas e a Resolução de Problemas e sugere exemplos de estudos como Cai (1998), Cai e Hwang (2020), Ellerton (1986), Kilpatrick (1987) e Silver e Cai (1996)

Os autores apresentam como argumento teórico o trecho de Kilpatrick (1987), no qual se destaca que a qualidade dos problemas apresentados pelos alunos pode ser um indicador de quão bem eles podem resolver problemas. Além disso, os autores apontam que diversos pesquisadores conduziram estudos empíricos para investigar as possíveis conexões entre a Proposição e a Resolução de Problemas.

Na questão (6) "É possível utilizar a Proposição de Problemas como uma medida de criatividade e resultados de aprendizagem matemática?", os autores apontam que os resultados dos alunos nas aulas de matemática são, geralmente, avaliados, o que os motiva a resolvê-los. Contudo, os pesquisadores constataram que o sucesso dos estudantes na resolução de problemas está diretamente relacionado às suas habilidades de Proposição de Problemas.

Dessa forma, os autores salientam que, dada a potencialidade de serem usadas como medidas de criatividade e outros resultados de aprendizagem matemática, é de responsabilidade da comunidade de pesquisa em educação matemática desenvolver e validar instrumentos adequados de Proposição de Problemas. Dessa forma, apresentam a seguinte pergunta não respondida: "Quais os tipos de tarefas de Proposição de Problemas que melhor revelam a criatividade dos alunos, bem como a compreensão e o entendimento matemático?"

Na questão (7) "Como as atividades de Proposição de Problemas estão inseridas nos currículos de matemática?", os autores salientam que, para que as atividades de Proposição de Problemas possam desempenhar um papel de maior relevância nas salas de aula, é necessário que sejam representadas de forma mais destacada nos currículos. Além disso, é indicado que, para os professores envolverem os alunos nestas atividades, eles precisam de fontes para realizá-las.

Cai *et al.* (2015) apresentam uma discussão a respeito da incorporação da Proposição de Problemas nos currículos e livros didáticos e direcionam para as seguintes perguntas não respondidas: “Como os livros didáticos reais incluem a Proposição de Problemas? Se os projetistas de currículo pretendem incluir a Proposição de Problemas em livros didáticos e materiais didáticos, quais são as melhores maneiras de fazê-lo?”

A questão (8) “Qual é a aparência de uma sala de aula quando os alunos se envolvem em atividades de Proposição de Problemas?” discute que, apesar de a Proposição de Problemas estar presente nos livros e currículos, o grande desafio é a sua implementação na sala de aula, por ser um local complexo. Para isso, é necessário ter bases teóricas e análises aprofundadas da prática.

Cai *et al.* (2015) salientam que, apesar de termos discutido alguns exemplos de ensino em sala de aula que envolvem a Proposição de Problemas, poucos pesquisadores tentaram descrever, com clareza, a dinâmica de ensino em sala de aula em que os alunos estão envolvidos em atividades de Proposição de Problemas.

Nesse sentido, os autores colocam a seguinte Pergunta não respondida: “Quais são os principais elementos que tornam o ensino eficaz na Proposição de Problemas e na Resolução de Problemas nas salas de aula?”

Salientamos que o destaque dado pelos autores demonstra a relevância da nossa pesquisa, que foi descrita e analisada, cuidadosamente, para esclarecer o trabalho com a Proposição de Problemas em uma sala de aula de professores em formação. É perceptível que esta é uma tarefa complexa, mas necessária, uma vez que, para compreendermos a magnitude desta proposta, não é suficiente apresentá-la do ponto de vista teórico.

A questão (9) "Como a tecnologia pode ser usada em atividades de Proposição de Problemas?" discute a relevância de pesquisas que contemplem o uso das tecnologias. Cai *et al.* (2015) salientam que o aumento de tecnologias sofisticadas teve impacto na Proposição de Problemas, uma vez que pesquisadores começaram a investigar como ambientes baseados na web podem facilitar o trabalho de alunos e professores ao propor problemas, discutir as soluções e avaliar e melhorar os problemas e soluções.

Os autores sustentam que a rápida evolução da tecnologia significa que novas ferramentas estão sempre se tornando disponíveis e acessíveis. Diante disso, os autores consideram preocupante a tendência na educação de adotar tecnologias sem ter uma compreensão clara de seus impactos e eficácia. A discussão segue a seguinte questão não respondida: “Quais são os efeitos das ferramentas tecnológicas específicas sobre a Proposição de Problemas dos alunos?”

Na pergunta (10), Cai *et al.* (2015) questionam o que sabemos sobre o impacto de envolver os alunos em atividades de Proposição de Problemas nos resultados dos alunos. Eles enfatizam haver, pelo menos, duas razões para esperar que envolver os alunos em atividades de Proposição de Problemas tenha um impacto positivo em sua aprendizagem. A primeira, é que as atividades de Proposição de Problemas geralmente são tarefas cognitivamente exigentes com o potencial de fornecer contextos intelectuais para um rico desenvolvimento matemático dos alunos. A segunda, é que os processos de resolução de problemas geralmente envolvem a proposição e solução de problemas subsidiários.

Os autores sustentam que, apesar dos argumentos teóricos que sugerem que envolver os alunos em atividades de Proposição de Problemas em sala de aula tenha um impacto positivo na aprendizagem e na proposição de problemas dos alunos, existem poucos estudos empíricos que documentam esse efeito de forma sistemática. Diante disso, os autores finalizam com as seguintes perguntas não respondidas: “Qual o impacto da participação em atividades de Proposição de Problemas no desempenho matemático dos alunos? Como a Proposição de Problemas interfere nos aspectos afetivos da aprendizagem matemática dos alunos?”

Cai *et al.* (2015) salientam que, apesar de a pesquisa sobre a Proposição de Problemas matemáticos ser relativamente recente no campo da Educação Matemática, os pesquisadores conquistaram alguns pontos de apoio relevantes. Dessa forma, considerando o trabalho realizado e as diversas perguntas que ainda não foram respondidas, Cai *et al.* (2015) finalizam esta pesquisa com uma pergunta final abrangente e sem resposta. “Como podemos entender a Proposição de Problemas?”

Os autores finalizam o artigo afirmando que o que foi discutido não é, necessariamente, uma proposta para uma teoria única e abrangente de Proposição de Problemas, mas salientam a necessidade de uma construção teórica mais sólida que possibilite um melhor entendimento sobre a Proposição de Problemas.

- **Artigo:** Conceituando a Proposição de Problemas por meio da transformação
- **Sobre a autora:**

❖ Jasmina Milinković é Professora Associada na Faculdade de Formação de Professores da Universidade de Belgrado, Sérvia, onde leciona Metodologia de Ensino de Matemática, Jogos Matemáticos, Avaliação de Matemática e cursos relacionados. Ela obteve seu doutorado na Faculdade de Formação de Professores da Universidade de Belgrado, na Sérvia. Os seus interesses de investigação centraram-se nas implicações da teoria das representações em diferentes áreas relacionadas com a aprendizagem e o ensino da matemática.

Este artigo, intitulado "Conceituando a Proposição de Problemas por meio da transformação" da autoria de Milinković (2015) tem como objetivo delinear uma abordagem para desenvolver a proficiência dos professores na Proposição de Problemas. A autora investiga as razões pelas quais é importante que um professor de matemática seja um bom propositor de problemas, bem como discute as ligações entre o conhecimento matemático e a capacidade de propor problemas.

Milinkovic (2015) inicia o seu artigo com um ditado antigo que afirma não haver perguntas não inteligentes, mas sim respostas não inteligentes. A afirmação inicial da autora nos leva ao ponto central da Exploração de Problemas, uma vez que consideramos que todos os problemas matemáticos apresentados podem se tornar um bom problema, ou, em outras palavras, um problema inteligente. Apesar de parecer simples, mediante uma análise aprofundada, podemos desencadear diversos conceitos.

A autora apresenta questionamentos relevantes, tais como: "Por que é importante que os educadores matemáticos estudem a Proposição de Problemas? É importante para os professores? É uma atividade adequada para os alunos também?" Esses questionamentos permitem-nos refletir sobre essa utilização e situar nossa pesquisa no âmbito das pesquisas já realizadas.

Ao abordar o importante papel da Proposição de Problemas, Milinkovic (2015) salienta que, mesmo em áreas nas quais a matemática é usada como ferramenta, como nas ciências e nas engenharias, o processo de aplicação da matemática começa com o reconhecimento de um problema a ser resolvido. Dessa forma, na sala de aula de matemática, onde a matemática tem um papel mais relevante que a função de ferramenta, a proposição de problemas não pode ser ignorada.

Nesse contexto, a autora discute a Proposição de Problemas na formação de professores, trazendo uma discussão relevante sobre a ligação entre saber matemática e saber propor problemas. A autora salienta que, para alguns membros da comunidade de pesquisa educacional, a proficiência na Proposição de Problemas é considerada parte do conhecimento pedagógico, enquanto para outros está mais próxima do conhecimento matemático. Dessa forma, a discussão nos sugere uma reflexão sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Milinkovic (2015) aponta alguns estudos que mostram, inclusive, que os próprios autores de livros didáticos parecem não ter capacidade para propor problemas, como, por exemplo, problemas que tenham como resultado um número "fácil" que produza um resultado "limpo". Dessa forma, a autora enfatiza a importância de, ao ensinar os futuros professores a serem bons propositores de problemas, solicitar que reflitam sobre as suas percepções em matemática.

Nessa discussão, Milinkovic (2015) apresenta uma perspectiva de trabalho com a Proposição de Problemas através da transformação, acreditando que essa seja uma estratégia eficaz para desenvolver a proficiência dos professores. A autora destaca dois tipos de transformações, como podemos ver a seguir:

No primeiro tipo, ela explica que, ao transformar um problema em um novo, significa que alguns (um ou mais) dos elementos do espaço do problema são modificados, enquanto os outros permanecem os mesmos, ou seja, pode-se alterar o dado, o que é procurado ou o contexto. O problema transformado pode ser mais ou menos difícil que o problema inicial, que, dependendo do conhecimento do professor que propõe, pode até se tornar insolúvel.

A autora sustenta que podemos e devemos aprender a transformar problemas simples em problemas complexos, em uma sequência de etapas. Nesse contexto, ela apresenta a sequência de problemas a seguir, como um exemplo de como partir de um caso mais simples para um caso complexo dentro do mesmo conteúdo, no caso, a combinatória.

Quadro 2 – Exemplo de casos de problemas

Problema 1. Quantos números de 2 dígitos podem ser escritos usando os dígitos 2 e 4? Escreva-os.

Problema 2. Usando os dígitos 2, 4 e 8, escreva todos os números de 2 dígitos, de modo que nenhum dígito no número seja repetido.

Problema 3. Escreva todos os números de 2 dígitos usando os dígitos 2, 4 e 8. Quantos são?

Problema 4. Escreva todos os números de 3 dígitos usando os dígitos 1 e 2. Quantos são?

Problema 5. Quantos números diferentes de quatro dígitos você pode obter colocando dígitos no lugar das estrelas? (a) 1**7 (b) **43 (c) ***5

Problema 6. Quantos números ímpares de 4 dígitos você pode obter usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 de modo que nenhum dígito no número seja repetido.

Fonte: Retirado de Milinkovic (2015, p. 54, tradução nossa).

Milinkovic (2015) apresenta diferentes estratégias e tipos de problemas para o trabalho com a transformação na Proposição de Problemas, abrangendo diversos campos e conceitos, como: análise combinatória, aritmética e geometria. A autora apresenta, por fim, um diferencial, sugerindo a utilização de jogos como ponto de partida para esse tipo de trabalho, em que os professores podem refletir sobre as estratégias envolvidas no jogo e tentar torná-lo mais simples ou mais complexo.

No segundo tipo, a transformação do problema envolve mudar a representação do problema. A autora sugere que, para aumentar a confiança dos alunos em relação ao uso de diferentes representações na resolução de problemas, é necessário confrontar-lhes com diferentes formas de problemas.

Milinkovic (2015) corrobora as ideias de Friedlander e Tabach (2001), autores que fundamentam a nossa pesquisa, ao tratarmos das Representações Múltiplas de Álgebra. Para eles, a apresentação de uma situação-problema pelo professor em diferentes representações poderia incentivar a flexibilidade na escolha das representações por parte dos alunos, pois "a apresentação de um problema em várias representações confere legitimação ao seu uso no processo de solução" (Friedlander; Tabach, 2001, p. 176)

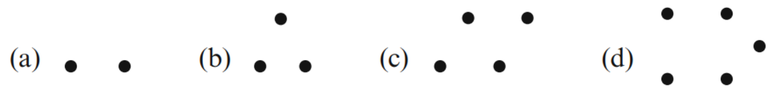
Em vista disso, Milinkovic (2015) propõe um trabalho com Proposição de Problemas, utilizando as diferentes representações como uma estratégia para aprimorar a proficiência dos professores em formação na Proposição de Problemas.

A seguir, apresentamos um exemplo apresentado pela autora, que apresenta problemas com contextos e representações diferentes, mas que têm as mesmas ideias matemáticas em suas soluções.

Quadro 3 – Problemas com mesmas ideias matemáticas e diferentes representações

Problema 1: Amigos estão apertando as mãos quando se encontram. Quantos apertos de mão aconteceriam se houvesse: (a) 2 amigos (b) 3 amigos (c) 4 amigos (d) 5 amigos?

Problema 2: Quantos segmentos podem ser desenhados através dos pontos dados?



Problema 3: Quantas combinações de duas letras sem considerar a ordem você pode fazer com: (a) 2 letras (b) 3 letras (c) 4 letras (d) 5 letras?

Problema 4: Determine o número de estradas que ligam as cidades se cada duas cidades estiverem conectadas. (a) cidades A e B (b) cidades A, B e C (c) cidades A, B, C e D (d) cidades A, B, C, D, E.

Fonte: Retirado de Milinkovic (2015, p. 62-63, tradução nossa).

Consideramos este trabalho da autora como relevante, pois, muitas vezes, se discute a importância de se utilizar metodologias e perspectivas na formação de professores para que eles possam ter melhores subsídios em suas futuras práticas docentes. Contudo, nem sempre é claro como se deve realizar este trabalho e quais estratégias utilizar para desenvolver determinadas capacidades.

O trabalho da autora demonstra claramente a proposta de uma abordagem que visa desenvolver a proficiência dos professores em propor problemas por meio de transformações. Além disso, sustenta a relevância do domínio do conteúdo pelos professores nas atividades de proposição de problemas, sejam elas teóricas ou práticas, enfatizando não haver como se tornar um bom propositor de problemas sem o conhecimento adequado do conteúdo.

- **Artigo:** Usando Tecnologia Digital para Proposição de Problemas Matemáticos
- **Sobre os autores:**

❖ Sergei Abramovich é professor de Educação Matemática no Departamento de Currículo e Instrução da State University of New York, Estados Unidos. Ele tem trabalhado com professores em formação e em exercício, professores de escolas públicas e seus alunos e colegas em educação matemática e matemática e divulgou resultados de sua pesquisa através de apresentações em conferências internacionais em 20 países.

❖ Eun Kyeong Cho é professora associada do departamento de educação da Universidade de New Hampshire, nos Estados Unidos. Seus interesses de pesquisa são formação inicial de professores, desenvolvimento profissional, integração tecnológica e diversidade. Ela apresenta e publica artigos sobre a proposição de problemas possibilitados pela tecnologia desde 2006.

No artigo "Usando Tecnologia Digital para Proposição de Problemas Matemáticos", Abramovich e Cho (2015) discutem como o uso adequado de recursos digitais, os quais são amplamente disponíveis, pode motivar e apoiar a proposição de problemas matemáticos. Nesse contexto, eles citam ferramentas de tecnologia digitais modernas, como planilhas eletrônicas, calculadoras gráficas, Maple e Wolfram Alpha, para facilitar e melhorar as habilidades dos professores de formação inicial na proposição de problemas matemáticos.

Os autores iniciam o texto abordando a presença das tecnologias digitais na vida das pessoas atualmente e enfatizando a necessidade de elas serem usadas nas salas de aula como uma ferramenta para apoiar o ensino e aprendizagem de matemática. Vale salientar que essa realidade, citada pelos autores se referindo ao ano 2015, nos Estados Unidos, se torna cada dia mais atual, inclusive, aqui no Brasil.

Em suma, neste estudo, chamaremos a atenção para o conceito de Coerência Didática mencionado pelos autores, conceito este que fundamenta a nossa pesquisa. Os autores, ao analisarem a Proposição de Problemas sob a perspectiva da Coerência Didática, referem-se à resolubilidade formal do problema, adequação e outras características pedagógicas, bem como relevância sociocultural. Dessa forma, eles apresentam três subconceitos de Coerência Didática, inter-relacionados, porém distintos: Coerência Numérica, Contextual e Pedagógica.

De acordo com Abramovich e Cho (2015), um problema apresenta Coerência Numérica quando é possível a sua solução em um sistema numérico específico. A Coerência Contextual diz respeito a sua coerência com o contexto real e/ou sociocultural de um grupo heterogêneo de alunos. A Coerência Pedagógica consiste em sua adequação à série específica, às capacidades, aos pontos fortes, ao nível de desenvolvimento ou aos interesses dos alunos.

Para uma melhor compreensão da Coerência Didática, apresentaremos, no quadro 4 a seguir, um exemplo de problema para cada tipo de coerência abordada pelos autores e os seus respectivos comentários.

Quadro 4 – Problemas incoerentes didaticamente citados por Abramovich e Cho (2015)

Coerência	Problema	Comentários dos autores
Numérica	Usando apenas selos de 2 centavos, 4 centavos e 6 centavos, encontre todas as maneiras de fazer uma postagem de 25 centavos.	Os dados do problema não permitem a sua solução, portanto, esse é um problema que não tem coerência numérica.
Contextual	De quantas maneiras alguém pode fazer uma postagem de 35 centavos usando 10 centavos, selos de 8 centavos e 3 centavos?	A ausência de coerência contextual é explicada pelo fato de os dados não coincidirem com a realidade, pois uma postagem nos Estados Unidos não custa 35 centavos e por não existir selos no valor de 8 centavos.
Pedagógica	De quantas maneiras alguém pode ganhar 20 dólares usando apenas notas de 1 dólar, notas de 5 dólares e notas de 10 dólares?	Como esse é um problema que possui 9 soluções, ele não é pedagogicamente coerente para crianças, pois, facilmente as desmotivaria.

Fonte: Abramovich e Cho (2015, elaborado e traduzido pela autora).

Ao analisarmos estes exemplos, podemos compreender que para um problema ser considerado didaticamente coerente para um grupo de alunos, é necessário que ele atenda aos três aspectos de Coerência Didática citados no quadro acima. Além disso, ressaltamos que os conceitos de Coerência Contextual e Pedagógica são semelhantes a discussão do conceito de "problema" feita por Allevato e Onuchic (2014), as quais destacam que o que é um problema para um aluno, pode ser que não seja para outro, da mesma forma, um problema que tenha Coerência Contextual e/ou Pedagógica para um grupo de alunos, pode ser não tenha para outro.

Nesse contexto, Abramovich e Cho (2015) discutem o papel das tecnologias na reformulação de um problema, de modo a torná-lo coerente numericamente, contextualmente e pedagogicamente. Os autores apontam que, em seus estudos, ao propor problemas a partir dos dados gerados em planilhas, os professores foram capazes de interpretar criticamente e modificar adequadamente os resultados computacionais.

Nesse sentido, o trabalho dos autores demonstrou que as ferramentas das tecnologias digitais podem motivar e apoiar atividades de proposição de problemas. Além disso, ressaltou a importância dos professores terem compreensão conceitual de questões didáticas relacionadas às tecnologias e a proposição de problemas, de modo que eles possam participar ativamente do seu processo de construção do conhecimento e se apropriarem dessas experiências de aprendizagem, compreendendo o que, de fato, significa o aluno como um produtor do conhecimento.

3.2 A Proposição de Problemas na Educação Básica

Neste tópico, apresentamos os trabalhos que discutem a utilização da Proposição de Problemas na sala de aula de Matemática da Educação Básica. Para tanto, serão apresentados os seguintes trabalhos:

Quadro 5 – Artigos analisados

	Título	Autores
1	Resolução de Problemas e Proposição de Problemas dos professores de Matemática de nível médio	Roslinda Rosli, Mary Margaret Capraro, Dianne Goldsby, Elsa Gonzalez y Gonzalez, Anthony J. Onwuegbuzie and Robert M. Capraro
2	Desenvolvendo as habilidades de Proposição de Problemas de futuros professores do Ensino Fundamental e Médio	Todd A. Grundmeier

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

- **Artigo:** Resolução de Problemas e Proposição de Problemas dos professores de Matemática de nível médio
- **Sobre os autores:**

❖ A autora Roslinda Rosli é doutora pelo Departamento de Ensino, Aprendizagem e Cultura da Texas A&M University, com ênfase na área de Educação Matemática. Ela é professora sênior do Departamento de Inovação de Ensino e Aprendizagem da Universidade Nacional da Malásia. Suas áreas de pesquisa incluem conhecimento matemático para ensino, proposição de problemas, resolução de problemas e formação de professores.

❖ A autora Mary Margaret Capraro formou-se na University of Southern Mississippi. É professora associada no Texas A&M University, tendo como interesse de pesquisa temas que incluem conhecimento e preparação de professores em educação matemática e compreensão de conceitos matemáticos pelos alunos.

❖ A autora Dianne Goldsby, professora clínica plena, é membro do corpo docente clínico do Departamento de Ensino, Aprendizagem e Cultura da Texas A&M University, ministra cursos de Educação Matemática, incluindo métodos matemáticos, resolução de problemas e matemática e ciências integradas. Os seus interesses de investigação centram-se nas percepções dos professores de formação inicial sobre a matemática e o ensino da matemática.

- ❖ A autora Elsa Gonzalez y Gonzalez é professora assistente no Departamento de Liderança Educacional, Currículo e Instrução no Texas A&M—Corpus Christi. Seus interesses de pesquisa incluem liderança em educação superior, questões metodológicas em estudos qualitativos multilíngues análise de dados, mulheres no ensino superior e acesso e retenção de mulheres sub-representadas e estudantes e professores latinos nos campos STEM.

- ❖ O autor Anthony J. Onwuegbuzie é professor do Departamento de Liderança e Aconselhamento Educacional da Sam Houston State University, ministra cursos de nível de doutorado em pesquisa qualitativa, pesquisa quantitativa e pesquisa mista, incluindo avaliação de programas. Suas áreas de pesquisas incluem populações desfavorecidas e carentes, como minorias, crianças que vivem em zonas de guerra e alunos com necessidades especiais.

- ❖ O autor Robert M. Capraro é co-diretor da Aggie STEM, diretor da STEM Collaborative for Teacher Professional Learning e professor de Educação Matemática no Departamento de Ensino, Aprendizagem e Cultura da Texas A&M University. Recebeu o prêmio de melhor artigo da Conferência Internacional sobre Educação em Engenharia.

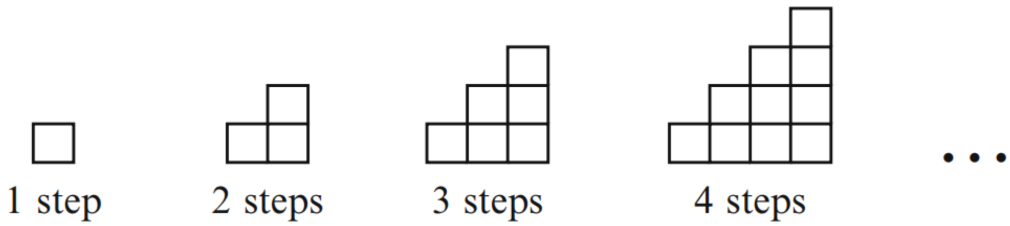
A pesquisa dos autores Rosli *et al.* (2015), intitulada "Resolução de Problemas e Proposição de Problemas dos professores de Matemática de nível médio", teve como objetivo responder às seguintes questões de pesquisa: 1) Como alguns professores em formação inicial de nível médio resolvem a tarefa de padrão de blocos antes ou depois de propor problemas matemáticos? 2) Como alguns professores em formação inicial de nível médio propõem problemas matemáticos antes ou depois de resolver a tarefa de padrão de blocos? 3) Qual é a relação entre as habilidades de alguns professores de formação inicial de nível médio em resolver e propor problemas? 4) Quais são as percepções e preocupações dos professores de formação inicial de nível médio ao propor problemas matemáticos?

Para tal, foi aplicada uma tarefa de padrão de blocos (figura 2), com o objetivo de avaliar as capacidades destes professores para resolver e propor problemas. Este estudo foi conduzido a partir de dados empíricos coletados de 51 professores em formação de nível médio, matriculados no curso de resolução de problemas. Este tipo de curso era necessário para a conclusão de uma graduação em estudos interdisciplinares e a certificação do Ensino Médio em uma universidade pública do Texas.

Figura 2 – Padrão de blocos utilizado nas duas atividades

Please work *individually* on the task given below.

Look at the figures below.



i. How many blocks are needed to build a staircase of five steps? Explain how you found your answer.

ii. How many blocks are needed to build a staircase of 20 steps? Explain how you found your answer.

iii. Based on part i. and ii. write a rule to generalize the solution for any number of steps or describe in words how to find the numbers of blocks used in each step.

Fonte: Rosli *et al*., (2015, p. 350)

Nesse curso, os professores em formação, muitas vezes, resolveram tarefas matemáticas ao longo do semestre. Na pesquisa, as tarefas foram distribuídas da seguinte maneira: metade dos participantes, selecionados aleatoriamente, ficaram no grupo A e foram solicitados a resolver, individualmente, a primeira parte da atividade de resolução de problemas do padrão de blocos. A outra metade dos participantes, que pertencia ao grupo B, realizou a atividade de forma inversa. Todos os participantes foram solicitados a registrar em uma folha as suas respostas.

Rosli *et al.* (2015) usaram métodos mistos para a coleta e análise de dados, como quantitativos e qualitativos, de forma que as respostas escritas foram coletadas e transformadas usando rubricas de pontuação, analisadas e, posteriormente, qualificadas por meio de discussão de narrativa.

Antes de analisarmos os resultados do trabalho, salientamos a fundamentação teórica dos autores apresentados no artigo. Eles citam a estrutura de Proposição de Problemas do autor Silver (1994), que se refere à criação de novos problemas e à reformulação de problemas já existentes, que pode ser realizada antes, durante e depois da resolução do problema. No trabalho dos autores, foi considerada a geração e a reformulação de problemas antes e depois de uma atividade de resolução de problemas.

Em sua discussão teórica, Rosli *et al.* (2015) apontam a baixa quantidade de pesquisas na literatura de formação de professores, enfatizando a ligação entre a Resolução e Proposição de Problemas. Além disso, exemplificam alguns estudos realizados e apontam a necessidade de mais pesquisas para examinar a natureza da relação entre essas duas atividades.

Os resultados do estudo apresentado neste artigo indicam que os futuros professores do grupo A, que resolveram a tarefa primeiro e propuseram o problema posteriormente, tiveram um desempenho superior na atividade de Proposição de Problemas. Em comparação, o grupo B, que apresentou os problemas e resolveu a tarefa posteriormente, teve um desempenho superior na atividade de Resolução de Problemas.

Os autores enfatizaram que os professores do Grupo B, os que propuseram primeiro o problema, tinham certas capacidades ao criarem os seus próprios problemas matemáticos, sem ver exemplos de problemas semelhantes. Apesar de a maioria dos problemas que eles criaram serem semelhantes aos da tarefa de resolução de problemas, eles conseguiram gerar alguns problemas matematicamente eficazes para alunos do Ensino Médio. Em contraste, os professores que pertenciam ao grupo A, que resolveram o problema primeiro, tiveram um melhor desempenho na reformulação de novos problemas — muitos ainda fizeram apenas mudanças simples no contexto do problema e usaram conceitos matemáticos básicos.

Dessa forma, Rosli *et al*. (2015) concluíram, com base neste estudo, que a Resolução de Problemas deve ser seguida pela Proposição de Problemas. Se o ensino for estruturado dessa maneira, os professores de licenciatura em Matemática terão um melhor aproveitamento do pouco tempo disponível e poderiam estabelecer uma base para construir habilidades de Proposição de Problemas, a qual é considerada uma habilidade indispensável para todo novo professor de Matemática.

Os autores enfatizam a importância de os professores formadores enfatizarem as atividades de Proposição de Problemas em sala de aula e fornecerem suporte para os professores em formação experimentarem o processo de geração e reformulação de problemas matemáticos. Dessa forma, ao adquirirem conhecimentos prévios e experiências ao proporem os seus próprios problemas, espera-se que estas ações sejam incorporadas às suas estratégias de ensino.

- **Artigo:** Desenvolvendo as habilidades de Proposição de Problemas de futuros professores do Ensino Fundamental e Médio
- **Sobre o autor:** Todd A. Grundmeier

❖ O autor Todd A. Grundmeier é professor de matemática no departamento de matemática da Cal Poly. Seus interesses de pesquisa estão voltados para a educação matemática de graduação, incluindo temas como proposição de problemas, geometria, cálculo, tecnologia e auto investigação.

O trabalho do autor Grundmeier (2015), intitulado “Desenvolvendo as habilidades de Proposição de Problemas para futuros professores do Ensino Fundamental e Médio”, apresenta os resultados de uma pesquisa exploratória que incluiu a proposição de problemas em um curso de conteúdo de matemática para futuros professores do Ensino Fundamental e Médio. Nesse trabalho, a proposição de problemas foi incorporada de duas maneiras: geração de problemas (propor problemas a partir de um conjunto de informações dadas) e reformulação de problemas (propor problemas relacionados a um determinado problema).

O trabalho apresentado pelo autor foi desenvolvido por meio de um curso para futuros professores de matemática dos ensinos fundamental e médio, que tratou de temas como resolução de problemas, análise de dados, probabilidade, matemática discreta e pensamento algébrico. As aulas desse curso eram realizadas duas vezes por semana, com duração de 1 hora e 50 minutos, desenvolvidas sob uma perspectiva que considerava o aluno como o centro do processo de ensino-aprendizagem, mediante trabalhos em grupos e discussões.

Nesse curso, o autor utilizou atividades de Proposição de Problemas (reformulação e geração de problemas) para oferecer aos alunos a oportunidade de apresentar problemas matemáticos. A reformulação de problemas foi utilizada como uma extensão da resolução de problemas sob a perspectiva de Polya (1945), que utiliza um roteiro de quatro etapas. Na ocasião, a Proposição de Problemas foi acrescentada como a quinta etapa do roteiro, na qual os alunos deveriam propor um problema relacionado ao problema original. A geração de problemas ocorreu nas pré-avaliações e pós-avaliações, quando os alunos recebiam um conjunto de informações para serem usadas como um contexto para possíveis problemas matemáticos.

Em seguida, Grundmeier (2015) apresenta alguns problemas propostos e reformulados pelos alunos e suas categorias de análise. Além disso, salienta que as crenças dos participantes sobre a relação entre a proposição de problemas e a matemática escolar foram coletadas na pré-avaliações e pós-avaliação de crenças e cinco entradas de diário de registros.

No início de seu trabalho, o autor apresenta algumas definições (quadro 6) para facilitar a compreensão de como essas ideias foram usadas nessa pesquisa.

Quadro 6 – Definições de termos para o trabalho com problemas

Termo	**Esclarecimento do termo**
Enunciado	Refere-se aos resultados das tarefas de proposição de problemas do aluno. Os enunciados são todos os textos produzidos como resposta a uma tarefa de proposição de problemas e não são necessariamente um problema ou pergunta de matemática.
Problema	Enunciado matemático para a qual existe uma solução válida.
Reformulação de problema	O processo de propor um problema relacionado a um problema que é ou foi o foco da resolução de problemas.

Geração de Problemas	O processo de propor um problema com base em um conjunto de informações fornecidas, podendo incluir informações adicionais, desde que permaneça relacionado ao conjunto original de informações.

Fonte: Grundmeier (2015, p. 414, tradução nossa)

Os questionamentos apresentados pelos futuros professores e as declarações nos seus diários sugerem que, ao longo do semestre, eles refletissem sobre a criação de problemas e o ensino e a aprendizagem, à medida que criavam problemas e respondiam às perguntas propostas. Essa reflexão permitiu que os participantes fornecessem descrições detalhadas de suas novas crenças sobre a proposição de problemas à medida que desenvolviam suas próprias capacidades de proposição de problemas.

Consideramos relevante salientar a presença dos questionamentos apresentados no diário, os quais eram chamados de *"prompt"*, pois compreendemos que essa estratégia foi uma ótima oportunidade para os futuros professores refletirem sobre o seu papel como professor e sobre a atividade de Proposição de Problemas, bem como para o professor formador ter um *feedback* do trabalho que estava sendo realizado.

Para auxiliar na compreensão da nossa percepção, destacamos as seguintes entradas no diário mencionadas pelo autor:

> Imagine que você está ensinando e alguém entra para observar sua sala de aula e uma aula de matemática que você está ensinando. Escreva uma descrição de sua sala de aula e da lição do ponto de vista do observador. O que eles veriam você fazendo durante a aula, o que eles veriam os alunos fazendo, o que eles notariam sobre sua sala de aula? (Grundmeier, p. 425, 2015, tradução nossa)
> Por favor, escreva uma breve reflexão sobre como você acha que a aula está indo até agora neste semestre, quais aspectos você achou mais úteis, menos úteis e por quê? como é a carga de trabalho? quais aspectos você mudaria? quais tópicos adicionais você gostaria de ter abrangido? (Grundmeier, p. 426, 2015, tradução nossa)
> Como você está reformulando ou propondo problemas, quem é seu público-alvo? Por quê? O público muda dependendo do problema? Você se consideraria melhor em propor problemas como reformulações ou em propor problemas a partir de conjuntos de informações fornecidas? Por quê? (Grundmeier, p. 426, 2015, tradução nossa)

A entrada final do diário foi coletada na semana 15 e os participantes responderam ao seguinte *prompt*:

> Por favor, escreva uma reflexão sobre suas experiências neste curso neste semestre. As seguintes perguntas podem ajudar a orientar sua reflexão: (1) O que aprendi sobre mim mesmo como aluno de matemática? (2) O que aprendi sobre mim mesmo como futuro professor de matemática? (3) Como minha concepção de matemática ou ensino mudou? (4) Que perguntas ainda tenho? (Grundmeier, p. 427, 2015, tradução nossa)

De acordo com Grundmeier (2015), à medida que os participantes adquirem experiência na proposição de problemas, eles tornam-se mais eficientes na criação de problemas e criativos na reformulação de problemas. O autor chegou a essa conclusão com base nas suas análises e observações, uma vez que a proposição de problemas não foi discutida de forma explícita em sala de aula.

No início do semestre, os professores em formação que participaram do curso, usaram técnicas de reformulação de problemas superficiais na primeira vez que reformularam problemas relacionados ao conteúdo específico do curso. Ao longo das atividades, os participantes foram ganhando confiança e desenvolvendo sua criatividade ao reformular problemas. Dessa forma, os autores concluíram que ao envolver futuros professores nas experiências com proposição de problemas, é possível desenvolver as habilidades de geração e reformulação de problemas, sem, necessariamente, ensiná-los técnicas explícitas de proposição de problemas.

Grundmeier (2015) argumenta que, ao incluir a Proposição de Problemas nas aulas de matemática, não há diminuição do tempo de aula para discutir conteúdos matemáticos e não requer tempo de aula dedicado explicitamente ao ensino da proposição de problemas. Nesse contexto, ele salienta a necessidade de incorporar essas experiências nos cursos de formação de professores, para que elas possam prepará-los para envolver os seus futuros alunos em atividades de Proposição de Problemas.

3.3 A Proposição de Problemas e a formação de professores

Neste tópico, apresentamos os trabalhos que discutem a Proposição de Problemas na formação de professores que ensinam matemática, trazendo pesquisas que envolvem a formação inicial e continuada. Para tanto, serão apresentados os seguintes trabalhos:

Quadro 7 – Artigos analisados

	Título	**Autores**
1	Uma revisão sobre a Proposição de Problemas na formação de professores	Helena P. Osana e Ildiko Pelczer
2	Uma coleção de experiências de Proposição de Problemas para futuros professores de matemática que fazem a diferença	Sandra Crespo
3	A Proposição de Problemas como componente integral do currículo de matemática: um estudo com professores do Ensino Médio em formação e em exercício	Nerida Ellerton

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

- **Artigo:** Uma revisão sobre a Proposição de Problemas na formação de professores
- **Sobre os Autores:**

❖ Helena P. Osana é Professora Associada do Departamento de Educação da Concordia University em Montreal, Canadá. Seu foco particular está nos fatores pedagógicos que impactam positivamente o uso significativo de símbolos e manipulativos pelas crianças. Ela também investiga a resolução de problemas e o pensamento algébrico de professores de formação inicial e é envolvida em iniciativas de desenvolvimento profissional para professores em exercício sobre o pensamento e a investigação das crianças na sala de aula de matemática.

- A autora Ildiko Pelczer é doutora em Educação Matemática pela Concordia University em Montreal, Canadá. A sua investigação centra-se no conhecimento matemático dos professores de formação inicial para o ensino com um interesse especial no seu conhecimento de conteúdo especializado. Ela colaborou em estudos sobre intervenções pedagógicas para aprimorar as habilidades dos professores para propor problemas e estudos sobre a identificação de recursos de criatividade matemática no pensamento dos alunos.

O trabalho das autoras Osana e Pelczer (2015), intitulado "Uma revisão sobre a Proposição de Problemas na formação de professores", apresenta uma revisão das pesquisas realizadas entre 1990 e 2012 sobre Proposição de Problemas em cursos de métodos matemáticos na formação de professores do Ensino Fundamental. As autoras apresentam uma discussão a respeito das implicações para os formadores de professores de matemática advindos da revisão de literatura.

Osana e Pelczer (2015) afirmam que a pesquisa em Proposição de Problemas teve início nos anos 1980 e, desde então, desperta o interesse das pessoas. As primeiras pesquisas sobre a Proposição de Problemas focaram no pensamento e raciocínio das crianças, bem como na avaliação da compreensão matemática delas. O interesse em investigar as habilidades de Proposição de Problemas de professores surgiu lentamente.

Ao discutir o significado do termo "problema", as autoras esclarecem que ele tem diferentes significados em seu artigo, podendo ser considerado uma palavra formal, na qual a Proposição de Problemas se refere ao ato de projetar tal problema durante o planejamento ou no meio de uma aula. Além disso, pode ser considerado uma pergunta formulada verbalmente com o objetivo específico de aprofundar o raciocínio de uma criança ou como uma forma de estender a aplicação de um conceito matemático pelo aluno.

O trabalho das autoras apresenta uma análise de oito artigos, tendo como foco principal as práticas dos formadores de professores em relação à Proposição de Problemas. Em particular, eles analisam as formas como eles tentaram promover a proposição de problemas entre seus alunos ou as formas como eles usaram a proposição de problemas como uma abordagem de sua prática pedagógica.

As formas pelas quais os formadores de professores incorporaram a Proposição de Problemas em suas práticas resultaram nas seguintes categorias: i) Proposição de Problemas como uma habilidade que integra a prática docente; ii) Proposição de Problemas como uma atividade separada do ensino; e iii) Proposição de Problemas como uma ferramenta para pesquisadores ou para formadores de professores modificarem ou aprimorarem o conhecimento dos professores em formação.

A partir da revisão de literatura realizada, Osana e Pelczer (2015) afirmam que a Proposição de problemas é um empreendimento complexo que pode ser estudado sob diversos ângulos. Além disso, as autoras destacam que ficou perceptível na maioria dos artigos revisados que é preciso incluir a Proposição de Problemas como um objetivo da formação de professores.

Dessa forma, as autoras propõem que, para aprimorar a Proposição de Problemas dos professores em formação, é necessário considerar uma série de fatores, que estão relacionados ao seu desenvolvimento, tais como: (a) foco no conteúdo e no conhecimento curricular dos professores; (b) variedade de estratégias utilizadas pelos professores para propor problemas; (c) grau de exigência de reflexão sobre os critérios (matemáticos e pedagógicos) de avaliação dos problemas; e (d) foco no desenvolvimento de sua metacognição, implicando, em parte, reflexões sobre crenças e atitudes pessoais relacionadas à matemática.

As autoras apresentam a questão: "como um formador de professores de matemática pode lidar com o ensino de Proposição de Problemas, um construto que, reconhecidamente, não é bem compreendido, em termos práticos?" e, por meio dela, apresentam temas comuns e conceitos fundamentais dos estudos revisados, os quais permitem implicações para o desenvolvimento profissional.

A revisão de literatura realizada pelas autoras revela temas relevantes, como, por exemplo, o impacto das experiências matemáticas proporcionadas pelos professores, que envolvem as suas percepções, crenças, atitudes e habilidades na Proposição de Problemas. Além disso, outro ponto relevante destacado é que, apesar de o conhecimento de matemática ser necessário, ele não é o bastante para a Proposição de Problemas dos professores.

Osana e Pelczer (2015) apontam que as tarefas de reformulação de problemas podem resultar em uma maior consciência dos aspectos críticos da aprendizagem em Proposição de Problemas, e que os professores devem aprender a considerar as vantagens e desvantagens de cada reformulação.

As autoras também salientam a importância dada pelos educadores à metacognição com seus alunos ao se envolverem na Proposição de Problemas e afirmam haver uma dificuldade de determinar as contribuições relativas da atividade metacognitiva e do próprio ato de propor o problema. Dessa forma, as autoras supõem que, ao se envolverem em atividades metacognitivas, como manter portfólios, refletir em diários escritos e responder a perguntas abertas sobre seu pensamento, os professores de formação inicial aprendem tanto, ou talvez mais, sobre como propor problemas do que, simplesmente, praticando a habilidade.

Em suma, Osana e Pelczer (2015) afirmam que a Proposição de Problemas é um meio eficaz para o crescimento e um instrumento para o desenvolvimento da curiosidade e da vontade de aprender. Contudo, as autoras afirmam que é preciso realizar mais pesquisas nessa área.

- **Artigo:** Uma coleção de experiências de Proposição de Problemas para futuros professores de matemática que fazem a diferença
- **Sobre a Autora:**

❖ Sandra Crespo é professora associada de educação matemática na Michigan State University. A sua investigação centra-se no currículo e na pedagogia da formação de professores. Ela se interessa especialmente pela prática de Proposição de Problemas porque a compreende como uma alternativa que redistribui a dinâmica de poder na sala de aula sobre quem produz e quem consome o conhecimento matemático, associando à produção de conhecimento disciplinar e à pedagogia crítica.

O trabalho da autora Sandra Crespo (2015), intitulado "Uma coleção de experiências de Proposição de Problemas para futuros professores de matemática que fazem a diferença", tem como objetivo apresentar uma reflexão sobre o impacto de três tipos distintos de experiências de Proposição de Problemas realizadas com futuros professores do Ensino Fundamental em diferentes configurações institucionais.

A autora considera a Proposição de Problemas uma das formas mais elevadas do conhecimento matemático e um caminho seguro para ganhar visibilidade no mundo da matemática. Crespo (2015) utiliza o termo Pedagogia da Proposição de Problemas e indica que nela os alunos são considerados co-construtores do conhecimento e participantes ativos de suas experiências educacionais, enquanto a Pedagogia da Resolução de Problemas posiciona o livro didático e o professor como a única autoridade que apresenta problemas matemáticos válidos, gerando uma estratificação intelectual e uma divisão sobre quem propõe e quem resolve.

Crespo (2015) define a sala de aula de Proposição de Problemas como um ambiente no qual os problemas são gerados não somente pelo professor e livro didático, mas também pelos alunos, que são fortemente incentivados a levantar questões de relevância pessoal e social. A autora salienta, nessa discussão, a relevância de os futuros professores terem, em sua formação, experiências com a Proposição de Problemas enquanto alunos, pois, caso contrário, terão dificuldades para realizar essas experiências com seus futuros alunos. A autora sustenta que, apesar de terem crenças e visões bem fundamentadas a respeito do ensino de matemática, considerando-se professores que propõem problemas relevantes e valiosos, a falta de experiências práticas impede que a sua visão seja aplicável à realidade da sala de aula.

É importante salientar que o trabalho de Crespo (2015) apresenta um referencial teórico sob uma perspectiva crítica, na qual a autora associa a Pedagogia da Proposição de Problemas ao empoderamento e transformação, com base nos estudos de Freire (1970) e nos trabalhos dos pesquisadores Aguirre (2009) e Gutstein e Peterson (2005).

Além disso, a autora apresenta uma discussão de abordagens inexperientes de Proposição de Problemas, como, por exemplo, a proposição de problemas fechados, proposição de problemas simplificados e proposição de problemas cegamente. De acordo com Crespo (2015) essas atividades podem ser caracterizadas como abordagens desempoderadas e desempoderadoras, pois, mesmo que de modo inconsciente e involuntário, elas tendem a reproduzir o modelo de Educação Bancária, citado por Freire (1970).

De acordo com Crespo (2015), essas abordagens são classificadas da seguinte maneira: i) a proposição de problemas fechados considera problemas de tradução rápida, em que os problemas gerados buscam testar velocidade e precisão; ii) a proposição de problemas simplificados é definida como aquela na qual as adaptações estreitam o escopo matemático, e os problemas gerados assumem a forma de dicas e levam os solucionadores a uma estratégia de solução; iii) a proposição de problemas cegamente acontece quando a complexidade matemática do problema proposto é subestimada, não há uma compreensão profunda da matemática.

Nesse contexto, a autora apresenta três vertentes de experiências de Proposição de Problemas, cada uma fornecendo uma perspectiva diferente sobre os papéis e responsabilidade do professor na Proposição de Problemas, sendo elas: (a) propor problemas aos alunos conscientemente; (b) propor problemas com os alunos; e (c) propor problemas de relevância pessoal e/ou social. A autora destaca que uma única vertente não é suficiente, juntas elas formam uma estrutura que pode ser usada como um modelo inicial para orientar outros formadores de professores no planejamento de experiências de Proposição de Problemas para futuros professores.

Na primeira vertente, Crespo (2015) propõe atividades para os futuros professores aprenderem a avaliar as tarefas dos livros didáticos, antes de as levar para os alunos. Dessa forma, a autora sugere que os futuros professores podem aprender critérios para avaliar a qualidade instrucional de problemas de matemática, além de aprender a usar esses critérios para identificar tarefas matemáticas de alto nível e baixo nível, e reformular problemas para aumentar sua qualidade instrucional.

Na segunda vertente, a autora apresenta uma experiência de um trabalho realizado em que consistia na troca de cartas entre professores e alunos. Nas cartas, eram propostos problemas e, durante a troca, era possível discutir o trabalho matemático realizado no problema, bem como a proposição de novos problemas pelos alunos. Foi um trabalho que os futuros professores se surpreenderam com o progresso dos seus alunos, assim como com os problemas propostos por eles. Por esse motivo, Crespo (2015) enfatiza a importância de os futuros professores compartilharem a autoridade matemática com seus alunos, permitindo que os problemas matemáticos sejam gerados por eles e não somente pelo livro didático.

Na terceira vertente, a autora apresenta experiências de exploração e proposição de problemas com os futuros professores, visando investigar o que torna os problemas matematicamente interessantes, bem como considerou as conexões entre a matemática e o mundo fora da escola.

A autora, inicialmente, cita um projeto que testava duas estruturas diferentes: “explore primeiro e propõe depois”, em comparação a “propõe primeiro e explore depois”. Nesse projeto, foram avaliados a quantidade e a qualidade dos problemas matemáticos gerados por futuros professores em cada uma das duas estruturas. Observou-se que os professores propuseram uma melhor coleção de problemas na estrutura “explore primeiro e propõe depois”, quando se envolveram pessoalmente em explorações abertas de determinadas situações primeiro, para matematizar essas situações depois, o que já é previsto na literatura. Na estrutura “propõe primeiro e explore depois”, os professores propuseram os tipos padrões de problemas matemáticos de baixo nível, como, por exemplo: nomear, identificar e contar.

Crespo (2015) apresentou novas experiências de Exploração e Proposição de Problemas visando demonstrar a importância da matemática na abordagem de problemas fora da escola, abordando atividades de relevância social, envolvendo desigualdades e lutas de poder, bem como comparações entre o tamanho relativo e a localização geográfica dos países representados nos mapas mundiais, a superlotação das salas de aula, dentre outros tópicos. Essa experiência foi uma novidade para os futuros professores, os quais afirmavam nunca ter visto a matemática ser abordada dessa maneira.

Diante de tudo que foi discutido, Crespo (2015) conclui que ainda há muito a ser investigado a respeito do impacto dessas experiências na formação inicial de professores, mas ressalta os efeitos destas experiências sobre o aluno, o professor e o currículo. Ela explica que para o aluno, é uma experiência matemática diferenciada quando ele resolve problemas no qual o professor tem clareza de sua qualidade instrucional. Como também, difere para o professor que propõe, quando eles estão dispostos a compartilhar a autoridade intelectual e propor ou melhorar as atividades em conjunto. Dessa maneira, o currículo também é modificado pelo professor e pelos alunos, quando eles abordam problemas de relevância pessoal e social.

A autora salienta, ainda, que criar um ambiente que permita aos futuros professores explorarem e discutirem o potencial matemático da Proposição de Problemas e avaliarem o interesse matemático e pedagógico dos problemas, pode ser um passo benéfico para preparar os professores em formação para planejar oportunidades matemáticas ricas e capacitadoras para seus alunos. Assim, sugere que seja criada uma versão mais elaborada e refinada da estrutura apresentada neste artigo para estudos futuros, de forma que ajude a descrever e acompanhar o crescimento e o progresso dos futuros professores na melhoria de suas práticas de Proposição de Problemas ao longo do tempo.

- **Artigo:** A Proposição de Problemas como componente integral do currículo de matemática: um estudo com professores do Ensino Médio em formação e em exercício
- **Sobre a Autora:**

❖ Nerida F. Ellerton é professora de matemática na Illinois State University, possui dois doutorados: em Físico-Química (Adelaide) e em Educação Matemática (Victoria University, NZ). Ela lecionou em escolas e universidades e atuou como consultora em vários países. Seus interesses de pesquisa incluem história da educação matemática, fatores linguísticos na aprendizagem e ensino de matemática, proposição de problemas, educação em álgebra e educação matemática no Sudeste Asiático.

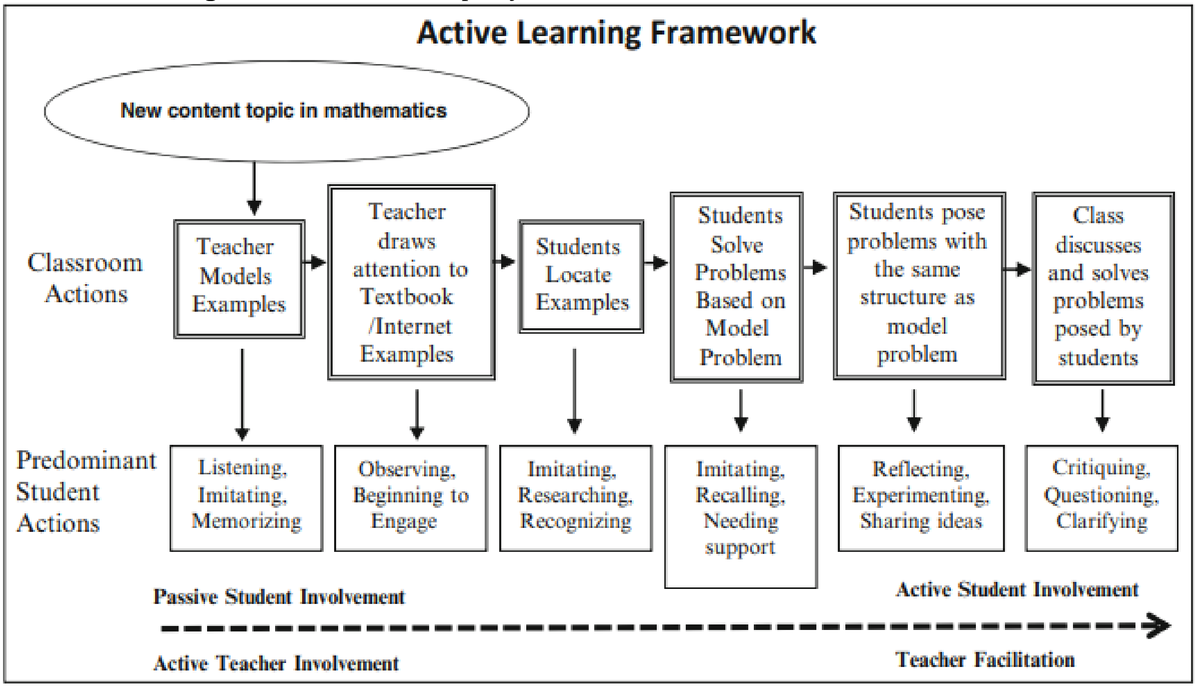
O artigo da autora Ellerton (2015) intitulado “A Proposição de Problemas como componente integral do currículo de matemática: um estudo com professores do Ensino Médio em formação e em exercício” busca apresentar detalhes de um estudo em que a Proposição de Problemas é considerada um componente integral de uma aula de modelagem matemática para professores em formação inicial e em exercício no Ensino Médio. Por meio das reflexões do estudo realizado, a autora discute aspectos importantes da Proposição de Problemas na formação de professores e propõe características de uma Pedagogia para a Proposição de Problemas.

Em sua discussão inicial, a autora destaca a necessidade dos professores em formação e em exercício experimentarem a Proposição de Problemas como componente integral do currículo de matemática, para que assim, essas experiências forneçam um modelo a ser utilizado por eles em suas escolas, de modo que tornem a Proposição de Problemas como componente integral do currículo de matemática de seus alunos.

Para Ellerton (2015) a formação de professores pode fornecer contextos férteis nos quais tanto os professores em exercício quanto os professores em formação podem crescer dentro de uma cultura rica em Proposição de Problemas.

A autora apresenta uma estrutura para situar a Proposição de Problemas na sala de aula de Matemática, como podemos ver na figura 3 a seguir.

Figura 3 – Situando a Proposição de Problemas na sala de aula de matemática



Fonte: Ellerton (2013, p. 99).

O esquema da autora é intitulado de "Estrutura de Aprendizagem Ativa" e em sua organização evidencia as ações de uma sala de aula de matemática e as ações dos alunos nesse contexto. Assim, elucida que, inicialmente, quando é apresentado o novo tópico de um conteúdo de matemática, em que o professor apresenta exemplos fundamentados no livro didático, os alunos têm um envolvimento passivo, em que suas ações consistem em ouvir, imitar, memorizar, observar, pesquisar, etc. À medida que as ações de sala de aula se aproximam de um lugar que dar espaço para os alunos proporem problemas e resolverem os próprios problemas, o envolvimento do aluno passa a ser ativo e as suas ações consistem em refletir, experimentar, criticar, questionar, esclarecer, dentre outros.

Com essa estrutura, fica evidente que a autora situa a Proposição de Problemas em uma perspectiva de Educação Crítica, a qual considera o ensino centrado no aluno, considerando o professor como um facilitador/mediador e não como uma figura autoritária e detentora do conhecimento.

Neste artigo, Ellerton (2015) apresenta um estudo realizado com 11 alunos participantes de um curso de modelagem matemática, oferecido em um curso de graduação para professores do Ensino Médio, em uma universidade dos Estados Unidos. Nesse curso, os alunos eram apresentados a pelo menos um novo problema de modelagem matemática a cada semana e esperava-se que trabalhassem, em pares, na redação de relatórios detalhados sobre o problema apresentado. Vale salientar que todos os problemas trabalhados foram criados pelo instrutor do curso.

Como culminância do curso, os alunos desenvolveram e apresentaram um projeto de proposição de problemas que consistia em formular um problema de modelagem matemática de sua própria escolha. Para auxiliar os alunos, o instrutor do curso entregou-lhes um conjunto de tarefas a serem realizadas após a criação da tarefa, consistindo nas seguintes ações: 1) Trocar este problema com outro aluno. 2) Refinar o problema com base no feedback inicial. 3) Compartilhar o rascunho do problema e solução com o seu grupo. 4) Refinar o problema novamente e compartilhar com outro grupo. 5) Escrever um relatório individual sobre o processo de criação. 6) Escrever reflexão individual sobre o exercício do projeto.

Como resultado desse projeto, Ellerton (2015) aponta que os alunos apresentaram problemas originais, com diferentes cenários e diferentes matemáticas. E destaca que embora o instrutor tenha trabalhado diversos problemas anteriormente, os alunos não sobrepuseram estes problemas, contudo, ao mesmo tempo, utilizaram ideias e compreensões matemática adquiridas em aulas anteriores.

Considerando seu olhar como professora-pesquisadora, a autora descreve a Pedagogia da Proposição de Problemas como uma abordagem holística para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Nessa compreensão de abordagem holística, a autora aponta que a Pedagogia da Proposição de Problemas abraça, em vez de evitar, a complexidade construtiva e incentiva professores a encontrar espaços que formam zonas desafiadoras, mas confortáveis, para estabelecer ambientes de aprendizagens poderosos para eles e para seus alunos.

Como resultado da pesquisa, a autora identifica três características principais que sustentam a integração da Proposição de Problemas nos currículos de matemática, em cursos para professores em formação e em exercício, e ressalta que a ausência de qualquer uma delas pode afetar uma integração bem-sucedida.

A primeira característica consiste em “estabelecer metas além da mera aquisição de habilidades de Proposição de problemas”. A autora explica que alcançar compreensões e aplicações conceituais sólidas, com habilidades na Proposição e Resolução de Problemas é considerado um meio para um fim e não um fim em si mesmo.

A segunda característica sugere “fornecer andaimes à medida que os alunos constroem confiança com a Proposição de Problemas”. Para esclarecer a analogia, a autora explica que em seu estudo, o andaime foi fornecido através do trabalho em grupo, através da estrutura do processo do projeto e através do ambiente inicial que foi criado dentro do próprio curso. Assim, ela destaca que as reflexões dos alunos estão repletas de referências a tais andaimes.

A terceira característica aponta “ter um propósito relevante e tangível para a Proposição de Problemas”. De acordo com a autora, no decorrer do projeto, os alunos discutiam constantemente sobre a empolgação para preparar problemas que poderiam usar em suas próprias salas de aula. Por meio disso, a autora destaca o quão relevante foi o projeto de acordo com o propósito dos alunos.

Vale ressaltar um marco importante do trabalho, que é a introdução da autora ao termo *Pedagogy of Problem Posing (PPP):* Pedagogia da Proposição de Problemas, que é definida como ensino que integra a Proposição de Problemas. Ao introduzir este termo, a autora faz uma analogia ao termo cunhado por Freire (1970) *“problem-posing education”* – Educação da Proposição de Problemas ou Educação Problematizadora. A partir dos aspectos mencionados no trabalho e dessa interligação, percebemos uma postura de Educação Crítica da autora, a qual defende um ensino e aprendizagem que tenha o aluno como centro de todo o processo e o professor como um mediador.

A introdução do termo de Ellerton (2015) é justificada como sendo uma maneira de dar visibilidade a Proposição de Problemas, pois, para a autora, se não houver um diálogo sério entre as partes interessadas sobre a integração da Proposição de Problemas na sala de aula de matemática, ela sempre permanecerá à margem, sendo apenas mencionada em documentos curriculares.

A partir do estudo realizado, a autora traz como resultado de seu trabalho oito características da Pedagogia da Proposição de Problemas e sinaliza que precisam ser realizadas mais pesquisas sobre elas. A partir dessas características, podemos notar um interesse em consolidar a base teórico-prática da Pedagogia da Proposição de Problemas, uma vez que ela caracteriza todo o cenário, buscando esclarecer o papel do professor, do aluno, do problema e da sala de aula, sempre enfatizando a importância da Proposição de Problemas na aprendizagem de matemática.

Em resumo, as características são as seguintes:

i) As primeiras experiências dos alunos com a Proposição de Problemas precisam ser estruturadas pelo professor;

ii) Os alunos precisam se sentir à vontade para compartilhar os rascunhos de seus problemas;

iii) Os professores precisam estabelecer um espaço acolhedor para a troca de feedback crítico sobre os problemas;

iv) Os professores devem encorajar os alunos a assumir responsabilidade na criação de problemas matemáticos;

v) A reflexão dos alunos sobre conceitos matemáticos e habilidades, no ato de criação do problema, precisa desenvolver o conhecimento matemático;

vi) As tarefas definidas para a Proposição de Problemas devem estar ao alcance de todos os alunos;

vii) O tempo gasto na Proposição de Problemas matemáticos não deve ser diferenciado do tempo gasto em matemática;

viii) Os professores devem modelar a Proposição de Problemas para seus alunos, tornando explícito que ele está ativamente envolvido na formulação e refinamento dos problemas.

Por fim, a autora chama a atenção para a necessidade de pais, diretores, consultores, supervisores de matemática, autores de livros didáticos e planejadores de currículos terem conhecimento dos fundamentos teóricos da Pedagogia da Proposição de Problemas. Pois, acredita que esta representa uma oportunidade inexplorada para transformar tarefas rotineiras em grandes descobertas.

3.4 Nossas considerações sobre os artigos analisados

Ao analisarmos os artigos citados anteriormente, procuramos identificar os seguintes aspectos:

- O trabalho com a Proposição de Problemas, identificando o foco teórico utilizado pelos autores e os aspectos práticos desses trabalhos;
- A relação entre a Proposição de Problemas e a Resolução e Exploração de Problemas;
- A Proposição de Problemas na formação de professores de matemática.

Ressaltamos que na análise desses aspectos, focalizamos o nosso olhar para os trabalhos de Milinkovic (2015), Abramovich e Cho (2015), Rosli *et al.* (2015), Grundmeier (2015), Crespo (2015) e Ellerton (2015). Embora também tenhamos analisado e descrito a síntese dos trabalhos de Cai *et al.* (2015) e Osana e Pelczer (2015) e os considerarmos relevantes no decorrer dessa discussão, não os abordaremos nas análises realizadas por meio dos quadros destacados nos tópicos a seguir, pois, como eles tratam de pesquisas bibliográficas, não se enquadrariam aos nossos aspectos de investigação.

3.4.1 O trabalho com a Proposição de Problemas

Neste tópico, apresentamos nossas análises sobre o modo como os pesquisadores trabalharam com a Proposição de Problemas nas pesquisas desenvolvidas, enfatizando o seu embasamento teórico e a atividade prática. Essas análises permitiram aperfeiçoar o nosso instrumento de levantamento de dados para o desenvolvimento da Pesquisa Pedagógica, permitindo alinhar a nossa pesquisa conforme a literatura.

É importante salientar que, quando nos referimos à utilização de alguma metodologia de ensino, sobretudo na formação inicial de professores, muitos questionamentos são colocados, sobretudo: Como planejar e desenvolver esse trabalho? Como começar? Quando e como terminaremos o processo? Dentre outros.

Questionamentos como esses são frequentes ao se tratar da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, uma vez que é uma proposta que não sugere uma sequência de passos ou um roteiro, como ocorreu anteriormente com a resolução de problemas, como podemos perceber nos roteiros de 4 etapas criado por Polya (1945) e no roteiro de 10 etapas criados por Allevato e Onuchic (2014).

Esses roteiros criados por esses autores, foram uma estratégia utilizada por eles para auxiliar o professor a ajudar o aluno a resolver problemas (Polya, 1945) e para auxiliar professores a trabalharem com a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino-aprendizagem de matemática (Allevato; Onuchic, 2014). Dessa maneira, os interessados em trabalhar sob a perspectiva da Proposição de Problemas, também podem se questionar sobre os rumos para o desenvolvimento desse trabalho.

Dessa forma, com o objetivo de auxiliar pesquisadores, professores e futuros professores a compreenderem como se desenvolve o trabalho sob essa perspectiva, apresentamos, no quadro 8, as diferentes formas como os autores dos trabalhos analisados têm utilizado a Proposição de Problemas.

Como é possível observar, todas as pesquisas analisadas, dos autores listados no quadro 8 a seguir, contemplam o entendimento de Silver (1994), o qual compreende que a Proposição de Problemas se refere tanto à criação de novos problemas quanto à reformulação de determinados problemas, podendo ocorrer antes, durante ou após a resolução de um problema. Evidenciando, portanto, que não existe um caminho único ou um roteiro fixo para o trabalho nessa perspectiva.

Ao contrário, as diferentes formas de trabalhar com a Proposição de Problemas, mencionadas pelos autores dos trabalhos analisados e sintetizadas no quadro 8, nos incentivam a pensar e rever o nosso trabalho com a Proposição de Problemas, o qual mantém a criatividade e mediação do professor como fundamentais na utilização dessa metodologia e o aluno como o centro de todo o processo.

Quadro 8 – O trabalho com a Proposição de Problemas

Autores	**Foco teórico**	**Proposição de Problemas na sala de aula**
Milinkovic (2015)	É identificada uma preocupação na ligação entre saber matemática e saber propor problemas, enfatizando a importância do conhecimento pedagógico do conteúdo, embasado em Shulman (1986).	A proposição de problemas é trabalhada baseada na ideia de transformação, da seguinte forma: i) Transformar problemas rotineiros em avançados, alterando os dados, o que é procurado ou o contexto; ii) Propor problemas transformando a sua representação, por exemplo, da verbal para a algébrica, da tabular para a numérica.
Abramovich e Cho (2015)	Os autores embasam o trabalho em Abramovich e Cho (2006, 2008, 2012), no que trata da coerência didática (numérica, pedagógica e contextual) nos problemas propostos.	A proposição de problemas é realizada a partir da modificação de problemas, para que eles não sejam diretamente solucionáveis pela tecnologia. Além disso, ela também pode ser trabalhada modificando problemas que não têm coerência didática para que eles passem a ter, atendendo aos três aspectos.
Rosli *et al.* (2015)	A proposição de problemas é utilizada na perspectiva de Silver (1994), isto é, como geração e reformulação de problemas, podendo acontecer antes e depois da atividade de resolução de problemas.	A proposição de problemas é trabalhada com foco na geração e na reformulação de problemas, das seguintes formas: i) Resolve-se o problema e, em seguida, propõe novos problemas; ii) Reformula o problema com base no problema original e, em seguida, resolve-se o problema.
Grundmeier (2015)	A proposição de problemas é utilizada na perspectiva de Silver (1994), isto é, como geração e reformulação de problemas, considerando-a como uma continuação do trabalho de George Polya.	A proposição de problemas foi incorporada como geração e reformulação de problemas. Nessa perspectiva, a reformulação do problema ocorreu como uma extensão do roteiro de quatro etapas de George Polya, como sendo uma 5º etapa.
Crespo (2015)	A proposição de problemas é vista na perspectiva crítica, associada ao empoderamento e transformação (Freire, 1970; Aguirre, 2009; Gutstein; Peterson, 2005).	A proposição de problemas foi trabalhada de três formas: - Propor problemas aos alunos de forma consciente; - Propor problemas com os alunos; - Propor problemas de relevância pessoal e/ou social.
Ellerton (2015)	A proposição de problemas é trabalhada na perspectiva crítica, associada a Educação Problematizadora (Freire, 1970), que visa a participação ativa do aluno e considera o professor como facilitador.	A proposição de problemas foi trabalhada em grupos colaborativos, por meio da criação de atividade de modelagem matemática, discussão e refinamento da atividade e escrita de relatórios sobre o processo de proposição de problemas e reflexão individual sobre o projeto como um todo.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

A partir dos elementos apresentados no quadro 8 acima, percebe-se uma postura de Educação Crítica nos trabalhos analisados, em que atitudes como trabalho colaborativo, diálogo, autonomia, criatividade, dentre outras são valorizadas. Esses aspectos são, sobretudo, demonstrados nos trabalhos de Crespo (2015) e Ellerton (2015), que defendem um ensino e aprendizagem baseados na perspectiva libertadora de Freire (1970), o que afasta essa proposta do que é considerado Educação Bancária.

Freire (1970) aponta que, na perspectiva de Educação Bancária, o educador, ao invés de se comunicar, faz comunicados, ou seja, não há uma abertura para diálogos. Ao mesmo tempo, os alunos recebem os comunicados, memorizam e repetem. Essa é uma perspectiva de educação em que não há criatividade, transformação e, consequentemente, não há conhecimento. Assim, é uma perspectiva que se distancia da de Proposição de Problemas discutida neste estudo.

3.4.2 Relação entre a Proposição e a Resolução e Exploração de Problemas

Conforme vem sendo discutido ao longo do capítulo, esta pesquisa foi desenvolvida utilizando a proposta metodológica de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Desse modo, com o intuito de situarmos nossa pesquisa no âmbito internacional, apresentamos a seguir nossas considerações acerca da relação dos trabalhos analisados com a Resolução e com a Exploração de Problemas.

Para deixarmos claro o nosso entendimento por Exploração de Problemas, utilizaremos as definições de Andrade (2017), que a compreende como um trabalho inacabado no contexto da sala de aula, que vai além da busca da solução do problema e refere-se a tudo que se faz nele a partir do movimento P-T-RS (Problema – Trabalho – Reflexões e Sínteses). Além disso, o autor menciona que a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é tratada à luz de uma perspectiva de Educação Progressista, Crítica e Libertadora, não considerando apenas os processos e conceitos matemáticos, abrangendo também questões de natureza sócio-político-cultural.

Grande parte dos autores dos trabalhos analisados neste capítulo consideram a Proposição de Problemas como uma questão nova para a comunidade escolar, em comparação a Resolução de Problemas que já tem uma base consolidada na literatura. Em geral, os autores dos trabalhos analisados tendem a considerar a Resolução de Problemas como uma ferramenta de caráter limitado, na qual o professor e o livro didático são os principais responsáveis intelectualmente, enquanto os alunos tendem a se manter numa posição de submissão. Em contrapartida, os autores consideram a Proposição de Problemas como uma proposta aberta, na qual os alunos têm a oportunidade de participar ativamente na elaboração ou reformulação dos problemas, contribuindo, dessa forma, para o desenvolvimento do seu conhecimento.

Contudo, os trabalhos analisados mostram uma forte ligação entre a Proposição de Problemas e a Resolução de Problemas, sendo consideradas intrínsecas. Destacar essa relação é relevante para que possamos deixar claro que, ao trabalharmos com a Exploração-Proposição-

Resolução de problemas, não buscamos contrapor a metodologia de Resolução de Problemas consolidada, mas sim proporcionar um aprofundamento.

Ao contrário da perspectiva da Resolução de Problemas, que é amplamente associada à Proposição de Problemas, a perspectiva da Exploração de Problemas ainda é bastante tímida nos trabalhos da literatura internacional. Essa percepção revela o diferencial do nosso trabalho, que busca evidenciar os aspectos em que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas contribui para a formação do professor de matemática, bem como apresentar elementos que definem essa proposta e orientam a sua utilização como perspectiva metodológica, os quais podem auxiliar outros professores a adotarem essa metodologia em cursos de formação de professores que ensinam matemática, em formações continuadas e/ou nas aulas de matemática.

O quadro 9 a seguir apresenta aspectos de cada trabalho analisado, demonstrando a ligação entre a Proposição de Problemas e a Resolução de Problemas.

Quadro 9 – Relação entre a Proposição de Problemas e a Resolução de Problemas

Autor	**Relação entre a Proposição de Problemas e Resolução de Problemas**
Milinkovic (2015)	Os autores consideram que a resolução de problemas está presente em níveis de esquematização na proposição de problemas, pois enquanto os alunos estão aprendendo matemática, eles passam por vários níveis de compreensão. Há um movimento entre proposição e resolução, sobretudo no das representações.
Abramovich e Cho (2015)	Para os autores, a resolução de problemas está intrinsicamente ligada a proposição de problemas, visto que, ao propor um problema que seja coerente numericamente, há que se pensar no processo possível de resolução, da mesma forma, na coerência pedagógica e contextual. Assim, a proposição de problemas motiva a resolução de problemas e vice-versa.
Rosli *et al.* (2015)	Os autores mencionam que quando os alunos estão envolvidos no processo de resolução de problemas, eles geralmente propõem problemas com base em situações que veem. Portanto, a Resolução de Problemas deve preceder a Proposição de Problemas, pois essa é uma alternativa para melhorar a proposição de problemas e para otimizar o tempo em sala de aula.
Grundmeier (2015)	O autor trabalha a proposição de problemas por meio da reformulação de problemas, como uma extensão da resolução de problemas, ocorrendo depois. Ele acredita que a proposição de problemas potencializa a resolução de problemas, pois identificou um avanço dos alunos na resolução de problemas, os quais propuseram problemas mais plausíveis e mais exigentes.
Crespo (2015)	A autora considera que a Resolução e a Proposição de Problemas estão inextricavelmente entrelaçadas, pois o processo de resolução, naturalmente, dá origem a novos problemas. Em outras palavras, no processo de resolução, são necessárias reformulações de problemas. Da mesma forma, a proposição de problemas também envolve o trabalho de resolução de problemas, pois os problemas não surgem do nada ou sem algumas explorações matemáticas significativas.
Ellerton (2015)	A autora compreende a resolução de problemas como um meio de integrar a proposição de problemas ao currículo. Contudo, ao comparar a resolução e a proposição de problemas, a autora menciona que quando os alunos propõem problemas, eles usam modos expressivos de comunicação, sendo protagonistas no processo de aprendizagem.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

A discussão realizada por Cai *et al.* (2015) sobre a Proposição de Problemas nos leva a compreender que a visão internacional sobre o trabalho que contempla essa proposta tem uma grande preocupação com o problema em si, ou seja, sua estrutura, qualidade, conceitos matemáticos a serem abordados e as possíveis habilidades que esse problema pode potencializar.

A Exploração de Problemas, ao contrário, se concentra no problema, mas vai além dele, pois, apesar de ser um problema aparentemente simples, a mediação do professor pode permitir o desenvolvimento de diversos aspectos na aprendizagem. Além disso, o trabalho de Exploração de Problemas se concentra na abrangência do problema, seja a nível de aprofundamento matemático, permitindo o desenvolvimento de outros conceitos, como questões sócio-políticas-culturais, despertando um olhar matemático crítico-reflexivo.

Como tem sido observado por Andrade (2017), a grande maioria das pesquisas em Resolução de Problemas, sejam nacionais ou internacionais, têm se concentrado nos conceitos e procedimentos matemáticos. Diante disso, o autor destaca a necessidade de investigar questões mais amplas, pois para ele, pensar em ideias e conceitos matemáticos também requer pensar nessas questões. Nessa discussão, o autor menciona as seguintes questões:

> Quais práticas sócio-político-culturais tem permeado as pesquisas e práticas em Resolução de Problemas? Quais práticas matemáticas e de Educação Matemática têm estado subjacentes às pesquisas e práticas em Resolução de Problemas? Quais práticas de educação, homem, mundo, sociedade, escola, professor, aluno, avaliação, ensino, aprendizagem, saber-poder têm estado subjacentes às práticas de Resolução de Problemas? (Andrade, 2017, p. 390).

Dada essa timidez na relação entre a Proposição e a Exploração de Problemas, analisamos essa relação nos trabalhos analisados nesse capítulo, classificando-os de acordo com as seguintes categorias: i) sem indícios de aproximação; ii) aparente aproximação e iii) nítida aproximação. No quadro 10 a seguir, apresentamos uma síntese de nossas análises e em seguida, fazemos uma breve discussão.

Quadro 10 – Relação entre a Proposição de Problemas e a Exploração de Problemas

Autor	**Categoria**	**Comentários da pesquisadora**
Milinkovic (2015)	Aparente aproximação	Percebe-se uma aparente aproximação nos dois aspectos de transformação trabalhados: i) quando trata da proposição do problema pela transformação da representação, pois necessita da exploração do conceito matemático; ii) quando trata da proposição de problemas por meio da transformação que adiciona novos dados, pois há a possibilidade de explorar outros conteúdos e outros temas.
Abramovich e Cho (2015)	Aparente aproximação	A aparente aproximação é notada quando os autores tratam da importância do uso das tecnologias para modificar os problemas, o qual necessita de uma exploração inicial para a proposição de novos problemas. Nesse contexto, compreende-se que modificar problemas de modo que eles tenham coerência didática pode ser um momento oportuno para a exploração de problemas.
Rosli *et al.* (2015)	Sem indícios de aproximação	O artigo não evidencia indícios de aproximação, pois no trabalho com os grupos, percebe-se algo limitado ao problema em si, como análise da estrutura/contexto, compreensão, entendimento, estratégias e clareza do problema, não sugerindo um aprofundamento proposto pela exploração de problemas.
Grundmeier (2015)	Sem indícios de aproximação	Embora o trabalho tenha resultados positivos com relação a proposição de problemas, percebe-se um enfoque maior ao problema, não evidenciando um aprofundamento do processo. Assim, nota-se um foco no tipo de problema, não contemplando outros aspectos que a exploração dele pode desencadear.

Crespo (2015)	Nítida aproximação	O trabalho apresenta uma forte relação com a exploração de problemas, que procura tornar explícito o papel que a matemática pode desempenhar na abordagem de problemas maiores fora da escola, como questões com desigualdades e lutas de poder entre interesses públicos e privados e entre grupos privilegiados e oprimidos. Além disso, a autora expõe que quando a exploração é trabalhada antes, os alunos propõem problemas de melhor qualidade.
Ellerton (2015)	Aparente aproximação	O artigo evidencia uma pequena relação entre a Proposição de Problemas e a exploração de problemas, há uma exploração em torno do aperfeiçoamento do problema em si, não indo além dele. Assim, pode-se inferir uma relação tímida, isto é, antes da resolução de problemas, quando os alunos realizaram ações como interpretação e reflexão do problema.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Dos trabalhos analisados, identificamos que os trabalhos de Rosli *et al.* (2015) e Grundmeier (2015) não apresentam indicativos de aproximação com a proposta de exploração de problemas. Os dois trabalhos têm em comum o enfoque em torno do problema, contemplando a proposição e a resolução de problemas, não apontando, portanto, indícios de exploração de problemas.

Os trabalhos dos autores Milinkovic (2015), Abramovich e Cho (2015) e Ellerton (2015) indicam uma aparente aproximação da proposição de problemas com a exploração de problemas. Sendo que nos trabalhos de Milinkovic (2015) e Abramovich e Cho (2015) a relação pode se concretizar por meio da reformulação de problemas, em que o problema é transformado de modo a aumentar o nível de dificuldade ou abranger novos conteúdos e/ou temas. Enquanto no trabalho de Ellerton (2015) a Exploração de Problemas pode acontecer antes da resolução de problemas, no momento da interpretação e reflexão do problema.

O artigo de Crespo (2015) é o único trabalho que consideramos ter uma nítida aproximação com a proposta de Exploração de Problemas, pois ele enfatiza um contexto de sala de aula aberta, que compartilha a autoridade matemática com os alunos. Além disso, contempla a abordagem de questões de natureza sócio-político-cultural como uma estratégia para o trabalho com a proposição de problemas. Inclusive, destacamos uma consideração da autora ao realizar o trabalho nessa perspectiva, que menciona um “tipo diferente de projeto de proposição de problemas”, ou seja, abordar questões dessa natureza não é algo comum na literatura internacional.

Além desses trabalhos, ressaltamos uma aparente aproximação da Proposição com a Exploração de Problemas no trabalho dos autores Osana e Pelczer (2015), que não foi mencionado no quadro 10, por tratar de um artigo bibliográfico. Entendemos que ele sugere uma aparente aproximação ao argumentar em suas análises que as explorações matemáticas de situações da vida real, quando combinadas com investigação aberta e restrições pedagógicas específicas, podem ser altamente produtivas para o desenvolvimento das habilidades de proposição de problemas dos professores em formação.

3.4.3 A Proposição de Problemas na formação de professores

Como esse trabalho tem como fenômeno de interesse a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática, consideramos importante analisar as considerações dos trabalhos analisados para com esse público. Assim, buscaremos compreender o motivo pelos quais os autores consideram relevante trabalhar com a proposição de problemas na Licenciatura em Matemática.

No quadro 11 a seguir, elucidamos as considerações dos autores em relação ao trabalho com a Proposição de Problemas na formação do professor de matemática.

Quadro 11 – A Proposição de Problemas na formação do professor de matemática

Autores	**A Proposição de Problemas na Formação do Professor de Matemática**
Milinkovic (2015)	Com o trabalho com a Proposição de problemas na formação de professores, os futuros professores não aprendem somente a propor problemas, mas também como e quando usá-los, em que ordem e como apresentá-los. Além disso, espera-se que os professores em formação obtenham uma visão mais profunda da estrutura da matemática do Ensino Fundamental.
Abramovich e Cho (2015)	Acredita-se que preparar os futuros professores com compreensão conceitual de questões didáticas relacionadas à proposição de problemas com tecnologia, permitindo que eles participem ativamente de seu próprio processo de aprendizagem, possibilita que eles se apropriem de suas experiências de aprendizagem e tenham uma compreensão renovada do que significa ser aluno em uma sala de aula de matemática, como produtor e não apenas como consumidor de conhecimento.
Rosli *et al.* (2015)	Os futuros professores devem descobrir e criar problemas matemáticos para utilizarem em suas futuras salas de aula e não dependerem apenas de problemas de livros didáticos que podem ou não interessar os alunos. Ao experimentarem o processo de proposição e reformulação de problemas na formação inicial, os futuros professores poderão adquirir conhecimento e experiência em propor seus próprios problemas, possibilitando incorporar essa prática aos seu repertório de estratégias de ensino.
Grundmeier (2015)	Nesse estudo, a proposição de problemas não foi discutida explicitamente em classe, mas à medida que os participantes ganharam experiência nessa atividade, eles se tornaram mais eficientes e criativos. Assim, destaca-se que envolver os futuros professores nas atividades de proposição de problemas, tem o potencial de ajuda-los a desenvolver habilidades de geração e reformulação de problemas, possibilitando experiências que podem ajuda-los a envolver seus futuros alunos nesse tipo de atividade.
Crespo (2015)	Sem um trabalho significativo na proposição de problemas durante a formação de professores, os futuros professores entrarão na profissão com visão e estratégias limitadas para o ensino de matemática. Por isso, os futuros professores precisam de experiências que permitam ir além do que elaborar problemas de matemática improvisados ou sem algum trabalho significativo.
Ellerton (2015)	É importante que os professores de formação inicial entendam o que é estar envolvido na proposição de problemas matemáticos, mas, acima de tudo, que eles próprios aprendam a se tornem formuladores de problemas competentes e consistentes.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Dada as afirmações dos autores, reafirmamos a necessidade de os futuros professores terem experiências de aprendizagem com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e se apropriarem delas durante sua formação inicial. Dessa forma, eles poderão ter uma compreensão profunda do significado de ser ativo na construção do conhecimento matemático, tanto como aluno, como quanto professor, além disso, poderão construir subsídios teórico-práticos para essa utilização em suas futuras práticas docentes, de modo que eles sintam-se seguros para mediar momentos de exploração de problemas, para serem propositores de problemas e para proporcionar experiências de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para os seus futuros alunos.

Para finalizar nosso estudo sobre essa amostra de pesquisas apresentadas na literatura internacional, apresentamos as recomendações feitas pelos autores dos trabalhos apresentados, os quais têm esclarecido a necessidade de aprofundar os estudos sobre a Proposição de Problemas, para que possamos construir uma base teórica mais consolidada. Diante disso, os autores mencionam as seguintes direções para pesquisas futuras no campo da Proposição de Problemas:

- Analisar como alunos e professores interpretam e analisam situações-problema ao se envolverem na proposição de problemas (Cai *et al.*, 2015);
- Investigar quais os benefícios potenciais de propor problemas por meio da transformação (Milinkovic, 2015);
- Compreender as potencialidades do uso da tecnologia digital para a proposição de problemas matemáticos (Abramovich; Cho, 2015)
- Investigar a relação entre a resolução de problemas e a proposição de problemas (Rosli *et al.*, 2015)
- Acompanhar professores, que tiveram prática de proposição de problemas em sua formação, e investigar se implementam e como eles implementam práticas de proposição de problemas. (Grundmeier, 2015);
- Identificar quais os fatores que contribuem para o desenvolvimento da proposição de problemas dos professores em formação (Osana; Pelczer, 2015);
- Identificar os reais impacto de atividades que envolvem propor problemas conscientemente, propor problemas com os alunos e propor problemas de relevância pessoal e/ou social (Crespo, 2015);
- Investigar os oito aspectos identificados como características da Pedagogia da Proposição de Problemas (Ellerton, 2015).

Pesquisas atuais desenvolvidas na literatura internacional, têm contemplado algumas dessas direções apontadas pelos autores, como também têm ampliado as investigações em Proposição de Problemas. Nesse contexto, destacamos dois trabalhos (Brady; Ramírez, Lesh, 2023; Cai; Hwang; Melville, 2023) que consideramos de grande destaque nos últimos anos, nessa linha de pesquisa.

Brady, Ramírez e Lesh (2023) apresentam em seu trabalho algumas conexões entre a Proposição de Problemas e a Modelagem Matemática, considerando suas visões sobre a natureza dos problemas e o seu papel potencial na aprendizagem e no ensino de ideias matemáticas poderosas. Os autores discutem a Proposição de Problemas no processo de Resolução de Problemas.

De acordo com Brady, Ramírez e Lesh (2023) a Resolução de Problemas é considerada como uma matematização interpretativa, ou seja, como uma maneira de conceituar, descrever ou explicar situações matematicamente, ao invés de simplesmente executar regras ou procedimentos. Nesse contexto, eles associam o processo de Resolução de Problemas à Proposição de Problemas, argumentando que propor problemas para si mesmo é um componente integral de toda resolução autêntica de problemas.

O trabalho de Cai, Hwang e Melville (2023) é mais amplo, uma vez que é apresentada uma breve revisão da literatura sobre Proposição de Problemas nas últimas três décadas, elucidando os avanços marcantes na pesquisa de Proposição de Problemas, sobretudo baseados no artigo "*On Mathematical Problem Posing*" de Silver (1994). Além disso, os autores discutem os avanços na pesquisa de Proposição de Problemas a partir de três áreas específicas: i) Processos afetivos e cognitivos da Proposição de Problemas; ii) Ensinando Matemática através da Proposição de Problemas; e iii) Aprendizagem profissional de professores para ensinar matemática através da Proposição de Problemas. Os autores argumentam que estreitaram o olhar para essas três áreas específicas, pois acreditam que entre as muitas áreas de pesquisa relacionadas à Proposição de Problemas, estas estão maduras para um progresso que poderia significativamente mover o campo inteiro adiante.

Salientamos que as três áreas mencionadas não estão totalmente separadas, uma vez que, apesar de a pesquisa ter como foco uma área específica, não impede que ela atenda às outras. Nesse contexto, destacamos que a nossa pesquisa contempla as três áreas, mas tem como foco principal a área (iii). A nossa pesquisa está situada nessa área, uma vez que não se concentra em desenvolver nos futuros professores a capacidade de propor problemas, mas sim em prepará-los, de forma teórico-prática, para trabalhar em suas salas de aula com o ensino de Matemática através da Proposição de Problemas. Neste campo, o nosso foco é a formação profissional dos professores, com a ênfase principal em usar a experiência profissional para ensinar matemática.

Assim, salientamos a relevância de nossa pesquisa para a formação inicial de professores, pois como mencionam Cai, Hwang e Melville (2023) embora os professores sejam capazes de propor problemas, aprender como engajar os seus alunos em atividades de proposição de problemas de modo que atinja aos objetivos de aprendizagem de uma aula de matemática exigirá uma significativa aprendizagem profissional do professor.

4 ÁLGEBRA: COMPREENSÕES E REPRESENTAÇÕES

Neste capítulo, trazemos uma discussão sobre Álgebra. Inicialmente, apresentamos seu contexto histórico, destacando os marcos, concepções e compreensões ao longo da história e, em seguida, discutimos sobre as compreensões e concepções atuais de Álgebra, enfatizando a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico para um ensino efetivo de Álgebra e com compreensão. Dando sequência, apresentamos as Representações Múltiplas de Álgebra, ressaltando as suas vantagens e desvantagens e esclarecendo sobre as potencialidades de um ensino de álgebra que contemple a transição entre essas representações.

4.1 Álgebra ao longo da história

A Álgebra está presente nos tópicos abordados na Educação Básica, como também nos currículos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado na área de Ciências Exatas, nos cursos de Pós-Graduação dessa área, dentre outros. Ela consiste em um ramo da Matemática que compreende diversos campos, áreas e aplicações, tendo em cada campo o seu objeto de estudo e suas especificidades.

De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), o interesse legal em introduzir a Álgebra no ensino brasileiro ocorreu com a Carta Régia de 19 de agosto de 1799. Conforme a Carta, a Álgebra seria introduzida de forma independente, assim como a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria, disciplinas que já faziam parte do ensino.

Segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014), no século XVIII, a Álgebra poderia ser compreendida de duas formas: tanto pela determinação de incógnitas, a partir do uso de signos e símbolos e a manipulação destes, como poderia também ser considerada simplesmente uma aritmética generalizada.

A partir da primeira metade do século XIX, estabeleceu-se um debate, motivado pelos trabalhos dos matemáticos George Peacock (1791-1858), Augustus de Morgan (1815-1864) e Evariste Galois (1811-1832), a respeito da natureza da Álgebra. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), duas concepções de Álgebra eram evidenciadas nesse debate. Por um lado, uma tendência tradicional, em que a Álgebra era considerada como uma aritmética universal ou generalizada e, por outro lado, uma tendência moderna, em que a Álgebra consistia em um sistema simbólico postulacional.

Ao realizarem uma análise sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) identificam as seguintes concepções que se revelaram ao longo da história: i) concepção processológica – considerava a Álgebra como um conjunto de procedimentos para resolver certos problemas, cuja resolução se baseava em um passo-a-passo; ii) concepção linguístico-estilística – encarava a Álgebra como uma linguagem específica, que tinha como objetivo expressar, concisamente, procedimentos específicos; iii) concepção linguístico-sintático-semântica – compreendia a Álgebra como uma linguagem particular e específica, a qual os signos adquiriram o caráter de símbolos e foi estabelecida distinção entre o uso da letra para representar genericamente quantidades discretas e contínuas; e iv) concepção linguístico-postulacional – se assemelha à concepção (iii) pois também reconhecia a Álgebra como uma linguagem simbólica, no entanto, ela conferia aos signos um maior grau de abstração e generalidade, estendendo o domínio da Álgebra a todos os campos da Matemática.

Essas concepções de Álgebra trazem um aporte histórico em relação ao desenvolvimento deste ramo da matemática. De acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014) analisar essas concepções nos possibilita entender as duas formas como a Álgebra pode ser compreendida: como uma linguagem e como um conjunto de procedimentos. Sob outro ponto de vista, a partir dessas concepções de Álgebra, podemos perceber que elas não surgiram isoladamente, mas que evoluíram e se complementaram, no sentido de um aperfeiçoamento de sua linguagem própria.

De modo a esclarecer a especificidade da Álgebra e o seu papel na história do pensamento humano, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam concepções de Educação Algébrica que se manifestaram e tiveram repercussão em três momentos distintos: antes, durante e depois do Movimento da Matemática Moderna, e que, historicamente, têm exercido maior influência no ensino de Matemática Elementar.

Uma primeira concepção de Educação Algébrica é denominada linguístico-pragmática, que predominou durante o século XIX, se estendendo até a metade do século XX. Essa concepção vincula o papel pedagógico da Álgebra, como instrumento de resolução de problemas, à concepção linguístico-sintático-semântica dessa disciplina.

Nessa concepção, acredita-se que as técnicas adquiridas pelo transformismo algébrico[1] são necessárias e suficientes para que o aluno adquira a capacidade de resolver problemas. Esse transformismo algébrico mencionado pelos autores é totalmente independente de objetos concretos, figuras ou ilustrações, ele se caracteriza por uma sequência de tópicos que, partindo do estudo das expressões algébricas, passava pelas operações, chegando às equações, para, finalmente, utilizá-las na resolução de problemas.

[1] "Processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas" (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p.83).

A segunda concepção, que iria contrapor a concepção anterior, é denominada concepção fundamentalista-estrutural. Nela, a Álgebra tem como papel pedagógico fornecer fundamentos referentes aos vários campos da Matemática escolar. Além disso, nessa concepção acredita-se que introduzir propriedades estruturais das operações, que justifiquem cada passagem do transformismo algébrico, capacita o estudante a identificar e aplicar essas estruturas em diferentes contextos.

A terceira concepção é a fundamentalista-analógica, ela tenta sintetizar as duas concepções anteriores. Por um lado, procura recuperar o valor instrumental da Álgebra e, por outro, preservar o caráter fundamentalista, isto é, utilizando modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que facilitam a visualização e a justificação das passagens utilizadas no transformismo algébrico.

Em resumo, para a concepção linguístico-pragmática, o foco do ensino da Álgebra é o domínio das técnicas de manipulação algébrica, mesmo que de forma mecânica, isto é, nem sempre há um significado na aprendizagem algébrica. Já a concepção fundamentalista-estrutural busca justificar e fundamentar os procedimentos algébricos por meio de propriedades estruturais. Por fim, a concepção, fundamentalista-analógica une as duas anteriores, porém, ao buscar justificar os procedimentos algébricos, ela opta pela utilização de elementos visuais que facilitam, de maneira concreta, a visualização.

Ao sintetizar as três concepções de Educação Algébrica, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) deixam claro que, em suma, elas limitam o pensamento algébrico à linguagem algébrica, isto é, se reduzem ao transformismo algébrico, considerado pelos autores como um ponto negativo.

De acordo com Almeida (2016) no início dos anos 1990, começaram a surgir as primeiras publicações que refletiam sobre uma nova maneira de se pensar o Ensino de Álgebra, a qual retirava o foco da manipulação algébrica e passava a ter como destaque o desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem.

No fim do século XX e começo do século XXI, como ressaltam Sousa, Panossian e Cedro (2014) houve grande valorização na perspectiva que considera a Álgebra como uma ferramenta para a resolução de problemas. Esta visão objetiva possibilitar aos alunos resolver problemas típicos da Álgebra, não utilizando necessariamente o transformismo algébrico, podendo recorrer a outras representações, tais como tabelas, planilhas e outros.

Sousa, Panossian e Cedro (2014) destacam que:

> Em outras palavras, em vez de pensar os conceitos e as técnicas separadamente, ou seja, separar a generalização da transformação, um ponto de vista mais interessante é

> perceber que as técnicas envolvem também os conceitos. Logo a aprendizagem de um envolve a aprendizagem do outro. (Sousa; Panossian; Cedro, 2014, p. 36).

Assim, vemos que uma nova maneira de compreender a Álgebra começou a ser pensada e introduzida nos sistemas de ensino. No tópico a seguir, discutiremos sobre essas compreensões e concepções.

4.2 Álgebra e Pensamento Algébrico

Quando discutimos a Álgebra, é comum, mesmo que inconscientemente, relacionarmos letras, símbolos e manipulações algébricas. De acordo com Kaput (1999) essa imagem tradicional é baseada em mais de um século de Álgebra Escolar, em que ela está voltada para simplificar expressões algébricas, resolver equações e aprender as regras para manipular símbolos. Essa perspectiva de Álgebra esteve presente desde os seus primeiros esboços até os dias atuais, tendo sido aprofundada e ampliada para abranger outros aspectos, sendo, inclusive, compreendida como uma forma de expressar pensamentos.

Na tentativa de definir Álgebra, Usiskin (1995) reconhece que não é fácil propor uma definição, uma vez que a Álgebra ensinada na Educação Básica tem uma conotação muito diferente daquela ensinada em cursos superiores de Matemática. Dessa forma, o autor estabelece uma relação entre a Álgebra estudada na Educação Básica e a compreensão do significado das "letras" (variáveis) e das operações que as envolvem. Além disso, o autor considera que os alunos estão estudando Álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez.

No entanto, Usiskin (1995) salienta que o conceito de variável tem diversas facetas, logo, limitar a compreensão do que é Álgebra na Educação Básica ao estudo dela não é o bastante para representá-la. Contudo, o autor defende que “as finalidades do ensino de Álgebra, as concepções que tenhamos dessa matéria e a utilização de variáveis estão intrinsecamente inter-relacionadas” (Usiskin, 1995, p. 11).

Nesse sentido, Usiskin (1995) aponta quatro concepções de Álgebra, cujas suas finalidades são explicadas de acordo com a funcionalidade das variáveis, deixando claro que as variáveis não variam só de valores, variam também de conceitos. O autor denomina essas concepções de: i) Aritmética generalizada; ii) Método para resolver problemas; iii) Estudo das relações entre grandezas; e iv) Estrutura.

Na primeira concepção, a Álgebra é considerada uma aritmética generalizada, em que as variáveis são vistas como generalizadoras de modelos. Dessa forma, os alunos são instruídos a traduzir e generalizar. A segunda concepção compreende a Álgebra como um estudo de procedimentos para lidar com determinados tipos de problemas, em que as variáveis assumem o papel de incógnitas ou constantes. Dessa forma, os alunos são incentivados a simplificar e resolver problemas. A terceira concepção reconhece a Álgebra como o estudo das relações entre grandezas, logo, o que a difere das anteriores é a variação das variáveis. A quarta concepção compreende a Álgebra como o estudo das estruturas, o que é completamente diferente das anteriores, uma vez que não se trata de uma função ou relação, não há uma equação a ser resolvida, nem um modelo aritmético a ser generalizado. Ela trata das variáveis como objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades, em que a variável é utilizada como um símbolo arbitrário.

Essas concepções são sintetizadas no quadro 12 a seguir:

Quadro 12 – O significado das variáveis nas concepções de Álgebra

Concepção de Álgebra	**Uso das Variáveis**
Aritmética generalizada	Generalizadora de modelos (traduzir, generalizar)
Método para resolver problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo das relações entre grandezas	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin (1995, p. 20).

De acordo com Van de Walle (2009, p. 290) “as variáveis são um dispositivo de representação extremamente poderoso que permite a expressão de generalizações”. Nessa perspectiva, o autor aponta para a necessidade de os alunos trabalharem com expressões envolvendo variáveis sem que pensem no valor específico que essas letras possam assumir. Isto é, trabalhar com os próprios símbolos, uma vez que as letras podem ser usadas como valores desconhecidos – incógnitas, ou como quantidades que variam – variáveis.

Dessa forma, é fundamental que o professor tenha clareza sobre as diversas utilizações das variáveis, pois isso favorecerá um ensino de Álgebra que propicie uma compreensão mais ampla da linguagem. Nesse contexto, é relevante que o professor pense sobre “o que é Álgebra”, pois essa compreensão tem um impacto direto na forma como as atividades são planejadas e na forma como esse ensino é concebido.

Muitas pesquisas em Educação Matemática (Miguel; Fiorentini; Miorim, 1992; Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993; Kaput, 1999; Kieran, 2007; Ponte; Branco; Matos, 2009) apontam que a Álgebra vai além da visão estreita que a limita à linguagem e às manipulações simbólicas. De uma forma mais ampla e profunda, esses autores consideram a Álgebra, em sua essência, como uma forma de expressar pensamentos.

Nesse sentido, Kaput (1999) expressa que a Álgebra envolve generalizar e expressar essa generalidade usando linguagens cada vez mais formais, em que a generalização começa na aritmética, nas situações de modelagem, na geometria e, praticamente, em toda a matemática das séries elementares.

Corroborando dessa ideia, Kieran (2007) defende que a álgebra vai além de um conjunto de procedimentos envolvendo a forma simbólica da letra, ela consiste em generalizar a atividade e fornecer uma gama de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras, podendo ser vista não apenas como técnica, mas também como uma forma de expressar pensamentos e sistematizar situações matemáticas.

Nesse contexto, as concepções de Ponte, Branco e Matos (2009) vão ao encontro dessas compreensões, uma vez que eles enfatizam que o trabalho com a Álgebra não se reduz ao simbolismo formal, ao contrário, aprender Álgebra implica ter a habilidade de pensar algebricamente em diversas situações.

A nossa pesquisa corrobora a compreensão desses autores, pois também compreendemos a Álgebra como uma ferramenta para manipulação de símbolos, mas, sobretudo, como uma forma de generalizar e expressar essas generalizações através de diferentes representações. Nesse contexto, consideramos que o pensamento algébrico é fundamental para uma aprendizagem de Álgebra efetiva e com compreensão, bem como para um desempenho satisfatório em outros campos da Matemática e na tomada de decisões diárias.

Nessa pesquisa, o pensamento algébrico é compreendido como um processo de generalização interna que pode ser exteriorizado através da oralidade, da escrita (verbal, aritmética e algébrica), de desenhos, dentre outros meios. No entanto, ele não pode ser ensinado através de memorização, técnicas, repetições, exposições ou outras formas de ensino. Compreendemos que ele pode ser manifestado, desenvolvido, aprofundado e potencializado por meio de atividades e mediações com esse objetivo.

Kaput (1999) apresenta cinco formas de pensamento algébrico, os quais interagem ricamente conceitualmente, bem como na atividade matemática, sendo elas: (i) generalização de padrões e da aritmética; (ii) manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (iii) estudo de estruturas abstratas; (iv) estudo de padrões e funções; e (v) processo de modelagem matemática. De acordo com o autor, essas cinco formas se inter-relacionam, em que os dois primeiros (i e ii) estão subjacentes a todos os outros, os dois seguintes (iii e iv) constituem vertentes tópicas e o último (v) reflete a álgebra como uma teia de linguagens e permeia todos os outros.

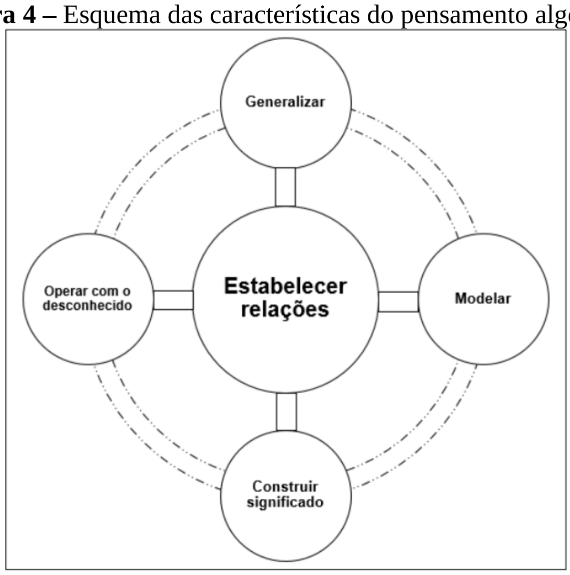
De acordo com Van de Walle (2009) o pensamento algébrico não é composto por uma ideia singular, mas por diferentes formas de pensamento e de compreensão do simbolismo. Para Ponte, Branco e Matos (2009) o pensamento algébrico é algo amplo, que abrange muitas competências, tais como: lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, funções, estruturas matemáticas, que podem ser usadas na interpretação e Resolução de Problemas matemáticos ou de outras áreas.

Sob o mesmo ponto de vista, Van de Walle (2009, p. 287) afirma que "o pensamento algébrico envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativo e explorar os conceitos de padrão e de função". Segundo as definições do autor, o pensamento algébrico está presente em toda a Matemática e é fundamental para torná-la útil na vida cotidiana.

Almeida (2016) define que "o pensar algebricamente é composto pelos seguintes elementos, ou características: estabelecer relações; generalizar; modelar; construir significado; e operar com o desconhecido" (Almeida, 2016, p. 79). O autor aponta que no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, pois acredita que essa é a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito, seguida das demais.

Para melhor caracterizar essa estrutura, Almeida (2016) apresenta o esquema a seguir (figura 4) mostrando como essas características se comunicam e se inter-relacionam.

Figura 4 – Esquema das características do pensamento algébrico



Fonte: Almeida (2016, p. 80).

O processo de estabelecer relações é explicado por Almeida (2016) como um momento em que o aluno estabelece a relação das partes do problema com o todo e, a partir disso, ele tem a possibilidade de criar um modelo matemático para representar o problema em questão.

Esse processo denominado "estabelecer relações" se aproxima com um processo que utilizamos em nossa proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas intitulado de "codificação". Andrade (2017) define que codificar um problema está relacionado a todo trabalho de síntese que é desenvolvido em torno de um problema, como também, significa representá-lo de uma outra forma, outro código, outra linguagem, numa forma mais curta, mais simplificada e mais conveniente.

De acordo com Ferreira, Vieira e Silva (2022) o pensamento algébrico pode ser compreendido como um tipo de raciocínio capaz de levar uma pessoa a generalizar ideias a partir de uma série de situações específicas, podendo inclusive criar condições para que ela possa exprimir essas ideias de maneira abrangente por meio de discurso, gestos ou imagens, e até mesmo por escrito em uma linguagem matemática formal.

Nesse contexto, acreditamos que o pensamento algébrico não pode ser ensinado explicitamente, mas pode ser desenvolvido, aprofundado e potencializado por meio de atividades com esse intuito, em todos os níveis da Educação Básica, isto é, dos anos inicias do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, como também no Ensino Superior.

De acordo com Kaput (1999) e Van de Walle (2009), a Álgebra deve ser introduzida desde o início da Educação Básica, ou seja, nos primeiros anos do Ensino Fundamental, para os alunos serem estimulados a pensar matematicamente desde o início da sua vida escolar. Além disso, o pensamento algébrico pode permitir ao aluno lidar com situações cotidianas que envolvem a matemática, bem como outras que vão muito além da matemática.

A utilização de atividades visando desenvolver o pensamento algébrico desde o início da vida escolar pode contribuir para a diminuição das dificuldades encontradas no ensino formal de Álgebra, posteriormente, nos anos finais do Ensino Fundamental. É comum que, quando o ensino de Álgebra é restrito a este nível de ensino (anos finais do Ensino Fundamental), limitando-se ao uso das letras e à manipulação, o aluno não compreende o motivo pelo qual as "letras" foram introduzidas na matemática.

Essa dificuldade pode ser causada pelo fato de o conceito não ter sido introduzido e/ou compreendido, o que demonstra a ausência de um pensamento algébrico. Sendo assim, ao trabalhar com atividades que possam contribuir para a manifestação desse tipo de pensamento nos anos iniciais do Ensino Fundamental, é provável que, nos anos finais, não encontremos esses obstáculos comuns.

A recomendação para o trabalho com a Álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental está presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que define que a unidade temática Álgebra tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico. De acordo com a BNCC, para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental:

> (...) é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (Brasil, 2018, p. 270).

Ao assegurar a importância de o trabalho com Álgebra estar presente nos processos de ensino e aprendizagem desde os anos iniciais Ensino Fundamental, a BNCC assegura que nessa fase, não se deve utilizar letras para expressar regularidades (Brasil, 2018). Diante dessa recomendação, podemos relembrar as tarefas que envolvem sequências, em que a partir da percepção da regularidade existente, o aluno pode chegar a sua generalização.

De acordo com Kieran (2007) as atividades que envolvem sequências generalizáveis impulsionam o desenvolvimento do pensamento algébrico e possibilitam elevar o pensamento dos alunos de casos particulares, operações particulares e abordagens particulares de resolução de problemas para um nível mais alto que configura variáveis, equações algébricas e métodos de resolução geral.

Uma discussão importante sobre Sequências e Regularidades é realizada por Ponte, Branco e Matos (2009), os quais mencionam que esse tópico percorre todo o ensino básico, tendo como principal objetivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Os autores mencionam que trabalhar com sequências envolve a busca por regularidades e o estabelecimento de generalizações.

Ponte, Branco e Matos (2009) acrescentam uma observação relevante ao destacar que a forma como se expressa essa generalização, inicialmente, em uma linguagem natural já requer uma elevada capacidade de abstração. Dessa forma, o trabalho constante com a análise de sequências permite aos alunos compreenderem a utilização dos símbolos como forma de representação, bem como progredirem no seu raciocínio, passando a compreender as relações funcionais.

Ferreira, Vieira e Silva (2022) discutem que o pensamento algébrico pode ser aprimorado por meio de tarefas que demandam um processo cognitivo específico. Para os autores, essas atividades devem ser cuidadosamente selecionadas e adequadas à escolaridade dos alunos. Além disso, é necessário que os alunos tenham um espaço aberto para resolverem de acordo com à sua maneira e com o seu modo de pensar.

Nesse sentido, consideramos a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas uma metodologia adequada para a abordagem de atividades sob essa perspectiva, de forma que contemplem o trabalho com sequências, como também aprofundem este trabalho de acordo com o nível dos alunos, de forma a colaborar para a manifestação do pensamento algébrico.

Em uma pesquisa realizada com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, Ferreira, Vieira e Silva (2022) investigaram o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de dois aspectos: i) se apenas o envolvimento do estudante na resolução de um problema seria suficiente para que ele manifestasse um pensamento algébrico e ii) se a mediação do professor, poderia interferir para o desenvolvimento desse pensamento.

Como resultado, observou-se que, para despertar o pensamento algébrico nos estudantes, é necessário criar/adaptar problemas adequados aos alunos e ao contexto. É crucial que o professor coloque o aluno como protagonista do processo de ensino-aprendizagem, ao mesmo tempo, em que deve ser um mediador capaz de colocar os alunos como co-construtores de seu próprio conhecimento (Ferreira; Vieira; Silva, 2022).

Além disso, gostaríamos de destacar as atividades que possibilitam a transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra como um aspecto importante para a manifestação do pensamento algébrico. Em nossa pesquisa de mestrado (Martins, 2019), realizada com licenciandos em matemática, verificou-se que a transição entre as representações favorece uma aprendizagem com maior compreensão e, consequentemente, o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ainda foi constatado que a medição/refutação do professor é fundamental para que o aluno possa refletir sobre o seu próprio processo de ensino-aprendizagem e desenvolver habilidades metacognitivas.

Em seus estudos, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) pontuam que o pensamento algébrico pode se manifestar não somente nos diferentes campos da Matemática, mas também em outras áreas de conhecimento. Dessa maneira, existem diferentes formas de expressar o pensamento algébrico, seja pela linguagem natural, linguagem aritmética, linguagem geométrica ou por meio da criação de uma linguagem específica, isto é, por meio de uma linguagem algébrica de natureza estritamente simbólica.

Kaput (1999) destaca que o pensamento algébrico e o uso de representações algébricas como gráficos, tabelas, planilhas e fórmulas tradicionais estão entre as ferramentas intelectuais mais poderosas que nossa civilização desenvolveu e destaca que se não houvesse a álgebra simbólica, não teríamos matemática superior e nenhuma ciência quantitativa, consequentemente, também não teríamos nenhuma tecnologia e vida moderna como temos atualmente.

A seguir, discutiremos as Representações Múltiplas de Álgebra, que são compostas pelas seguintes representações: verbal, numérica, gráfica e algébrica.

4.3 Representações Múltiplas de Álgebra

A utilização das Representações Múltiplas no ensino de Álgebra é recomendada em documentos oficiais, como, por exemplo, os *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Padrões para a Matemática Escolar), organizado pelo NCTM, no ano 2000, nos Estados Unidos da América (EUA).

De acordo com o documento (NCTM, 2000) as formas pelas quais as ideias matemáticas são representadas são fundamentais para como as pessoas podem entender e usar essas ideias. Nesse contexto, o documento ressalta que "o termo representação se refere tanto ao processo quanto ao produto: em outras palavras, a aquisição de um conceito ou relação matemática de alguma forma e à própria forma" (NCTM, 2000, p. 67, tradução nossa).

Tripathi (2008, p. 438, tradução nossa) define a representação matemática como uma construção mental ou física que descreve aspectos da estrutura inerente de um conceito e as inter-relações entre o conceito e outras ideias. Para a autora, uma representação pode incluir componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, contextuais, pictóricos ou simbólicos que descrevem aspectos do conceito.

A compreensão de Representações Múltiplas está relacionada aos diversos conceitos interconectados existentes na Matemática, os quais possuem relações e aspectos em comum. Lorenzato (2010) discute essas relações ao defender a necessidade de ensinar integradamente aritmética, geometria e álgebra, indicando que, se feito dessa forma, os alunos poderão perceber a harmonia, coerência e beleza da matemática.

Para ilustrar a importância desse ensino integrado, o autor conta a seguinte história (adaptada de Braga, 1963, p. 167):

> Cinco cegos costumavam diariamente pedir esmolas no portal de entrada da cidade e nenhum deles, até então, havia conhecido um elefante. Por isto, ao saberem que logo chegaria um elefante à cidade, decidiram pedir ao dono que parasse o animal diante do portal para que eles pudessem "ver com as mãos" o tal elefante. E assim aconteceu: o primeiro cego apalpou a lateral do elefante e disse: ele parece um muro; o segundo apalpou uma orelha do elefante e disse: ele é como uma grande ventarola; o terceiro apalpou uma das pernas do elefante e disse: é como as colunas do templo; o quarto, depois de apalpar umas das presas de marfim, concluiu: é igual a uma lança; o quinto apalpou a tromba e disse: é uma grande cobra. Então o elefante prosseguiu em sua viagem, enquanto os cegos, em meio a grande falatório, não conseguiram concordar

> sobre o que seria o elefante, uma vez que cada um teve uma percepção parcial do animal (Lorenzato, 2010, p. 60).

Com essa história, Lorenzato (2010) discute como é falacioso pensar que conhece o todo, conhecendo apenas partes do todo e faz uma analogia ao ensino de conceitos da aritmética, geometria e álgebra. Para o autor, se o ensino acontece de forma separada, o aluno pode ficar com a impressão de que são assuntos distintos que não se inter-relacionam, enquanto que, se for feito de forma integrada, pode eliminar a fragmentação, valorizar a semelhança entre os diferentes conceitos e ampliar a compreensão da ideia em estudo.

Nessa direção, corroboramos a ideia de Lorenzato (2010) de que é importante conceber um ensino de matemática que permita a integração dos diferentes campos – aritmética, álgebra, geometria, como também salientamos a necessidade do aluno transitar, involuntariamente, entre esses campos e ter a percepção de que se trata do mesmo conceito, visto sob diferentes perspectivas.

Tripathi (2008) aponta que o uso de representações de diferentes naturezas permite ao aluno examinar o conceito sob uma variedade de lentes, cada uma delas fornecendo uma visão distinta, o que torna o conceito mais rico e abrangente. A autora argumenta que essa diversidade de perspectivas é fundamental, pois uma imagem holística do conceito emerge apenas quando ele é olhado sob diferentes panoramas.

Como Kaput (1999) aponta, no ensino de álgebra, temos o desafio de encontrar maneiras de tornar o poder da álgebra acessível para todos os alunos, ou seja, criar ambientes de sala de aula que permitam aos alunos aprender com compreensão. Duas décadas depois, o desafio mencionado pelo autor ainda é relevante, uma vez que o ensino de álgebra ainda mantém a ênfase no simbolismo e transformismo algébrico, não a reconhecendo como uma forma de expressar pensamentos.

Nesta pesquisa, aliamos a nossa proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas à utilização das Representações Múltiplas de Álgebra, uma vez que compreendemos que a Álgebra é algo que transcende a linguagem simbólica e manipulação algébrica. Além disso, acreditamos que as múltiplas representações permitem expressar o pensamento algébrico e que a transição entre elas possibilita o aprofundamento desse pensamento, o que, consequentemente, proporciona uma compreensão mais aprofundada de álgebra.

Nosso entendimento sobre as Representações Múltiplas de Álgebra é fundamentado por Friedlander e Tabach (2001), que apresentam quatro representações: representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. Os autores sustentam que o uso dessas representações pode contribuir para a melhoria da compreensão de Álgebra, tornando o processo de aprendizagem de Álgebra mais significativo e efetivo.

Friedlander e Tabach (2001) destacam os seguintes aspectos de cada representação: i) a representação verbal é, geralmente, usada para apresentar um problema e é necessária para a interpretação final dos resultados alcançados na solução do processo; ii) a representação numérica é familiar para os alunos no início da fase de estudo de Álgebra, sendo importante para adquirir uma primeira compreensão de um problema e para investigar casos particulares; iii) a representação gráfica é eficaz em fornecer uma imagem clara de uma função real; iv) a representação algébrica é concisa, abrangente e eficaz na apresentação de padrões e modelos matemáticos.

As Representações Múltiplas da Álgebra podem ser relacionadas às Representações Semióticas apresentadas por Duval (2003), a saber: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e a língua natural. De acordo com Duval (2003), a compreensão de um saber é demonstrada através da apresentação das diversas formas de representação e a apropriação do seu significado é obtida através das conversões estabelecidas entre as diversas formas de representar o objeto.

De acordo com o autor "as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica" (Duval, 2003, p. 16). Ou seja, a capacidade de apresentar o conceito através de diferentes representações e de transitar entre elas, são indicadores de compreensão do conceito.

No entanto, tradicionalmente, estas representações são utilizadas de maneira isolada, sendo priorizada a representação algébrica e, mais adiante, a representação gráfica, não havendo transições entre as representações. Esta abordagem é limitada para o ensino de álgebra, uma vez que, como aponta Tripathi (2008), uma representação matemática costuma enfatizar apenas um aspecto de um conceito matemático. Dessa forma, ao limitar-se a uma única representação, estamos abordando o conceito de olhos vendados.

Essa problemática também foi mencionada no documento do NCTM (2000), o qual aponta que, infelizmente, muitas vezes as representações são ensinadas e aprendidas como se fossem fins em si mesmas. Nesse sentido, o documento orienta que as representações devem ser consideradas como elementos fundamentais para apoiar a compreensão dos alunos sobre conceitos e relações matemáticas; na comunicação de abordagens matemáticas; na identificação de conexões entre conceitos matemáticos relacionados; e na aplicação da matemática a situações reais por meio de modelagem (NCTM, 2000, p. 67).

De acordo com Friedlander e Tabach (2001), nenhuma das representações, isoladamente, é capaz de abranger a totalidade de um conceito, uma vez que, apesar de apresentarem inúmeras vantagens, elas também apresentam limitações. No quadro 13 a seguir, apresentamos um resumo das ideias dos autores, mencionando as vantagens e desvantagens de cada uma das representações.

Quadro 13 – Vantagens e desvantagens das Representações Múltiplas de Álgebra

Representação	**Vantagens (potencialidades)**	**Desvantagens (limitações)**
Verbal	• Possibilita ambiente natural para entender seu contexto e comunicar sua solução; • Facilita a apresentação e aplicação de padrões gerais; • Possibilita a conexão entre a matemática e outras áreas;	• Pode ser ambígua e provocar associações irrelevantes ou enganosas; • É menos universal; • Sua dependência do estilo pessoal pode ser um obstáculo na comunicação matemática;
Numérica	• Familiar para os estudantes na fase inicial com Álgebra; • Oferece uma ponte eficaz para Álgebra e precede as outras representações; • Importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares;	• Pode não ser eficaz em fornecer um quadro geral; • Alguns aspectos ou soluções importantes de um problema podem ser perdidos; • É uma ferramenta limitada na resolução de problemas;
Gráfica	• Eficaz em fornecer uma imagem clara de uma função real estimada de uma variável real; • Os gráficos são intuitivos e atraentes aos que gostam de uma abordagem visual;	• Pode não ter a precisão necessária, é influenciada por fatores externos (como a escala); • Sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em questão;
Algébrica	• Concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos; • A manipulação de objetos algébricos às vezes é o único método de justificar ou provar declarações gerais.	• O uso exclusivo de símbolos (em qualquer estágio de aprendizagem) pode dificultar o significado matemático ou a natureza dos objetos representados, causando, dificuldades na interpretação dos seus resultados.

Fonte: Elaborado por Martins (2019, p. 50).

Destacamos essas vantagens e desvantagens no sentido de apresentar as potencialidades e limitações de cada representação e de evidenciar a importância e a necessidade da utilização simultânea de várias representações, uma vez que, isoladamente, nenhuma representação pode abranger todas as potencialidades.

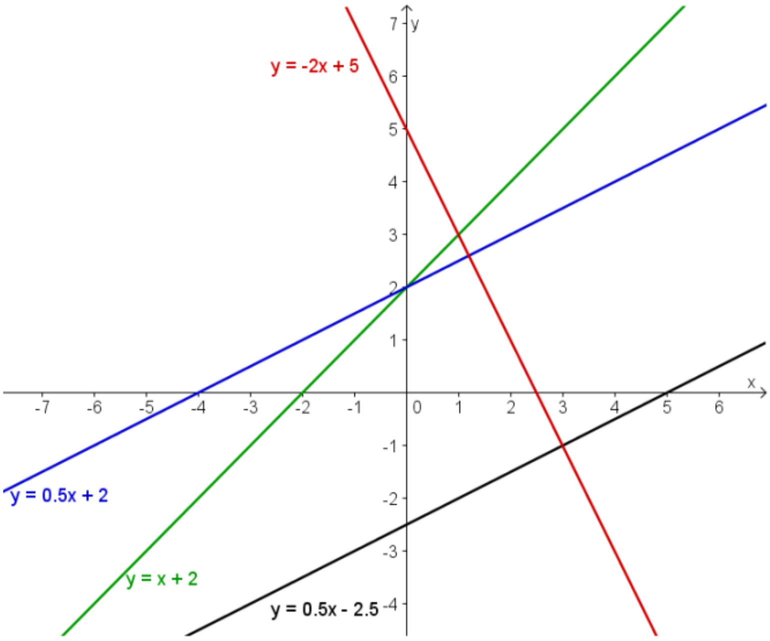
Nesse contexto, Friedlander e Tabach (2001) apontam para a necessidade de os professores e desenvolvedores do currículo estarem conscientes da necessidade de trabalhar em um ambiente de múltiplas representações, isto é, um ambiente que permita a representação de um problema e sua solução de várias maneiras, pois acreditam que esta é uma forma de atender aos estilos individuais de pensamento dos alunos, como também, acreditam que a utilização combinada das múltiplas representações pode cancelar as desvantagens e ser uma ferramenta efetiva no ensino.

Acreditamos que a utilização das diferentes representações e a transição entre elas pode facilitar a compreensão do aluno sobre os conceitos matemáticos, como também, o trabalho do professor, no que diz respeito à avaliação contínua do desenvolvimento do aluno, uma vez que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação" (Duval, 2003, p. 14).

A percepção do autor foi percebida ao longo das atividades desenvolvidas em nossa pesquisa de mestrado (Martins, 2019), nas quais os licenciandos em Matemática demonstraram um maior domínio dos conceitos de Sistemas Lineares ao transitarem constantemente pelas suas múltiplas representações. A seguir, apresentamos um trecho de uma atividade desenvolvida no 6º encontro de nossa pesquisa, cujos objetivos foram: i) Estimular a transição entre as representações de Sistemas Lineares; ii) Promover a aprendizagem de Sistemas Lineares através da proposição de problemas;

Como proposta inicial, os alunos receberam a imagem a seguir (figura 5). A partir daí, propôs-se que se dividissem em três grupos. De acordo com o gráfico recebido, cada grupo representaria três sistemas distintos, os quais deveriam ser: Sistema Possível e Determinado, Sistema Possível e Indeterminado e Sistema Impossível.

Figura 5 – Representação gráfica de diversas retas



Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 163).

Para que os alunos compreendessem a proposta, foi necessário um momento de diálogo e mediação da professora-pesquisadora, uma vez que mesmo havendo tido o contato com as representações múltiplas de álgebra nas atividades anteriores, os alunos ainda não haviam partido, inicialmente, da representação gráfica para a representação algébrica. Após o diálogo, os alunos apresentaram os seguintes sistemas lineares:

Quadro 14 – Sistemas Lineares apresentados pelos alunos

Grupo	SPD	SPI	SI
01 (A6, A7 e A10)	$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}5x - y = 2{,}5 \\ 0{,}5x - y = -2 \end{cases}$
02 (A1, A2, A9 e A13)	$\begin{cases} 0{,}5x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} -0{,}5x + y = 2 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}5x - y = 2{,}5 \\ 0{,}5x - y = -2 \end{cases}$
03 (A3, A5 e A12)	$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 0{,}5y = 2{,}5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}5x - y = 2{,}5 \\ 0{,}5x - y = -2 \end{cases}$

Fonte: Martins (2019, p. 107).

Em seguida, solicitou-se que cada grupo escolhesse um tipo de sistema e criasse um problema. Os grupos, então, apresentaram os seguintes problemas:

Quadro 15 – Problemas propostos pelos alunos

Grupo	Problema	Representação Algébrica
01 (A6, A7 e A10)	Carlos e Joana são um casal que namoram há bastante tempo. Ambos têm filhos, porém, Carlos tem dois filhos a mais que Joana. A soma da quantidade de filhos de Carlos com o dobro da quantidade de filhos de Joana é igual a cinco. Quantos filhos cada um tem?	$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$
02 (A1, A2, A9 e A13)	Numa determinada bomboniere da cidade, a soma do preço de duas cartelas de chiclete mais 1 trufa totaliza R$ 5,00. Sabendo que metade da cartela de chiclete custa R$ 2,00 a menos que a trufa, quanto custa a cartela inteira?	$\begin{cases} 0{,}5x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$
03 (A3, A5 e A12)	Carlos foi à xerox da universidade e fez três impressões, sendo uma colorida e duas preto e branco e pagou um valor de R$ 5,00. Ao perceber que a impressão colorida era R$ 2,00 mais cara que a preto e branco, Carlos se arrependeu amargamente, pois deveria ter imprimido todas as folhas em preto e branco. Quanto custava cada tipo de impressão?	$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + y = 2 \end{cases}$

Fonte: Martins (2019)

A descrição e análise completas dessa atividade estão presentes em nossa dissertação de mestrado (Martins, 2019). Esse trecho foi apresentado para elucidarmos a possibilidade de trabalhar com a Álgebra tendo como ponto de partida as suas múltiplas representações e a possibilidade de transitar entre essas representações através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Nessa pesquisa, Martins (2019) constata que as Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas favorecem uma aprendizagem de Sistemas Lineares com mais compreensão, além disso, identificaram que a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas contribuiu para a construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

A utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no ensino de Álgebra pode contribuir para a compreensão dos conceitos algébricos, possibilitando ao aluno atribuir significado ao uso de símbolos e às manipulações algébricas. A representação algébrica é uma ferramenta que pode auxiliar a expressão do pensamento algébrico de maneira formal e concisa, logo, não deve ser vista pelos alunos como um aspecto dificultoso da matemática.

De acordo com Ferreira, Vieira e Silva (2022) a Resolução de Problemas contribui no desenvolvimento do pensamento algébrico promovendo a aprendizagem de álgebra e diminuindo as dificuldades que o aluno tem para entender os conceitos relacionados. Além disso, os autores mencionam que a Resolução de Problemas pode ser vista como um agente motivador; um campo de possibilidades para ser explorado pelo professor; uma área de investigação da prática do professor e do desenvolvimento cognitivo e conceitual dos alunos; e um método de avaliação formativa, com possibilidades de se fazerem intervenções imediatamente à detecção de eventuais problemas na aprendizagem.

Friedlander e Tabach (2001) salientam as diversas contribuições que o problema apresentado em múltiplas representações pode proporcionar, como: i) incentivar a flexibilidade na escolha de representações dos alunos em seu caminho de solução e aumentar a sua conscientização sobre seu estilo de solução; ii) dar legitimação ao uso das diversas representações no processo de solução; iii) proporcionar transições involuntárias entre as representações, fazendo com que o aluno as perceba como uma necessidade natural e não como um requisito arbitrário.

Nesse contexto, defendemos nessa pesquisa que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, é uma metodologia conveniente no ensino de álgebra, visto que pode colaborar para uma melhor compreensão dos conceitos desse campo.

5 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

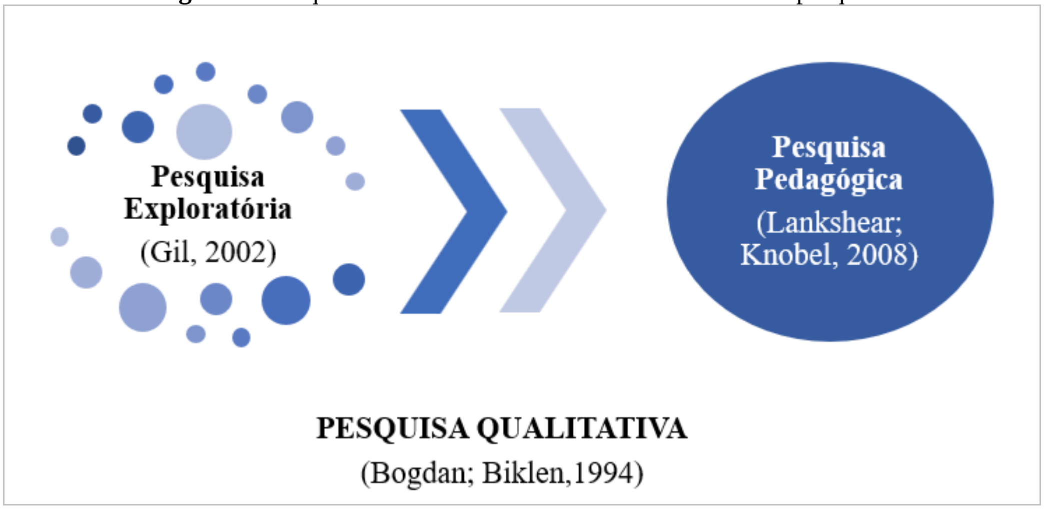
Esta pesquisa teve como objetivo principal identificar em quais aspectos uma Unidade Temática, utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra. Neste capítulo, apresentamos o detalhamento do nosso percurso metodológico, de modo a permitir que o leitor compreenda como foi realizado o levantamento de dados por meio do desenvolvimento de uma Unidade Temática.

5.1 Caminhar metodológico da pesquisa

A presente pesquisa é de abordagem qualitativa, a qual é descrita por Bogdan e Biklen (1994) da seguinte forma: i) o ambiente natural é a fonte direta de dados e o investigador é o instrumento principal; ii) é descritiva; iii) o processo é tão importante quanto os resultados; iv) os dados são analisados de maneira indutiva; v) o significado é de importância essencial na abordagem qualitativa. No decorrer deste capítulo, destacaremos alguns pontos de nossa pesquisa que consideramos contemplar esses aspectos.

Sob uma abordagem qualitativa, a pesquisa foi desenvolvida por meio de duas modalidades de pesquisa: a pesquisa exploratória e a pesquisa pedagógica. O esquema a seguir ilustra a relação entre essas modalidades de pesquisas, no âmbito da pesquisa qualitativa.

Figura 6 – Esquema demonstrativo do desenvolvimento da pesquisa



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

O levantamento de Dados da pesquisa. foi realizado por meio de uma pesquisa pedagógica (Lankshear; Knobel, 2008), tendo como principal instrumento o desenvolvimento da Unidade Temática intitulada "Exploração-Proposição-Resolução de Problemas: implicações para a sala de aula de matemática". Para tanto, antes do levantamento de dados, foi realizada uma pesquisa exploratória (Gil, 2002), visando aperfeiçoar o nosso planejamento.

Nossa compreensão por pesquisa exploratória é embasada em Gil (2002), que a compreende como uma pesquisa que proporciona uma maior familiaridade com o problema, tornando-o mais explícito. Além disso, o autor define que esse tipo de pesquisa tem como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de compreensões.

Realizamos a pesquisa exploratória em 2022, a qual consistiu no estudo de atividades sob a perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. A pesquisa buscou contribuir para a elaboração da Unidade Temática, sendo que algumas atividades foram desenvolvidas novamente na pesquisa pedagógica, enquanto outras foram utilizadas para aprimorar a nossa prática com base nesta metodologia.

Dessa forma, a pesquisa exploratória foi desenvolvida em momentos e âmbitos distintos. Isto é, algumas atividades do estudo foram desenvolvidas durante o Estágio Docência da pesquisadora, o qual foi realizado na disciplina Prática no Ensino de Matemática I do curso de Licenciatura em Matemática da UEPB, Campus Campina Grande – PB, e outras atividades foram desenvolvidas com mestrandos e doutorandos em Ensino de Ciências e Educação Matemática, durante reuniões do GEPEP, grupo de estudos em que a pesquisadora faz parte e é coordenado pelo orientador dessa pesquisa.

Após a pesquisa exploratória, procedemos ao levantamento de dados, que foi realizado por meio de uma pesquisa pedagógica. De acordo com Lankshear e Knobel (2008), essa modalidade de pesquisa não se limita à busca por algo que funcione, ela procura compreender o motivo pelo qual isso funciona, como isso funciona, em quais contextos pode ou não ter sucesso, quais as adaptações necessárias para um bom resultado em outras circunstâncias, dentre outros aspectos.

Lankshear e Knobel (2008) explicam que a pesquisa pedagógica é conduzida com base na experiência profissional do professor, em que os objetivos da pesquisa surgem de questões, problemas existentes ou percebidos, ou das preocupações dos próprios professores. Além disso, os autores salientam que os pesquisadores pedagógicos são profissionais da sala de aula, em todos os níveis de escolaridade, que estão envolvidos em pesquisas que visam aperfeiçoar suas habilidades como educadores profissionais.

Dessa forma, optamos por essa modalidade de pesquisa por compreendermos que ela vai ao encontro do nosso objetivo, pois consideramos que o âmbito da sala de aula do curso de formação inicial de professores de Matemática é um espaço adequado para essa discussão e compreensão acerca da perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Além disso, foi uma oportunidade de não somente levantar dados, mas de colaborar na formação inicial dos futuros professores.

5.2 O âmbito da Pesquisa Pedagógica

A pesquisa pedagógica foi realizada com 24 alunos matriculados na disciplina Introdução à Modelagem em Educação Matemática, no semestre de 2023.1, no período noturno, do curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas (CCEA) da UEPB, Campus Patos – PB. A professora titular da disciplina era a própria pesquisadora. As aulas da disciplina aconteciam nas segundas-feiras das 18h às 20h e nas terças-feiras das 20h às 22h.

A disciplina Introdução à Modelagem em Educação Matemática é obrigatória, a qual integra os componentes básicos específicos do curso, tendo a carga horária de 60 horas, sendo ofertada aos alunos do 7º período do curso de Licenciatura em Matemática. De acordo com o Projeto Pedagógico do Curso (PPC) do curso, essa disciplina visa desenvolver o raciocínio lógico-matemático e introduzir a noção de modelagem matemática no sentido que o aluno possa melhor compreender as ideias e conceitos matemáticos, bem como refletir sobre o processo ensino-aprendizagem.

Dentre outros tópicos relacionados à Modelagem em Educação Matemática, a ementa da disciplina (anexo I) contempla a discussão sobre a relação entre a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas, como também prevê o desenvolvimento de atividades voltadas à sala de aula da Educação Básica, buscando a prática de pesquisa articulada ao ensino. Dessa forma, salientamos que o desenvolvimento da Unidade Temática no âmbito dessa disciplina não comprometeu o cumprimento de sua ementa, pois seus objetivos corroboram com os do nosso projeto.

Dessa forma, acreditamos que, além de cumprir os objetivos dessa disciplina, a Unidade Temática acrescentou e aperfeiçoou as atividades de Modelagem Matemática, integrando-as à perspectiva de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Além disso, como a disciplina é oferecida no 7º período, antes do Estágio Supervisionado I, a Unidade Temática também teve como objetivo auxiliar nas futuras experiências teórico-práticas que serão realizadas nos Estágios Supervisionados I e II.

É importante salientar que este curso de Licenciatura em Matemática, no qual a pesquisa pedagógica foi desenvolvida, é composto por 9 períodos e 2 Estágios Supervisionados de 205h.

O PPC deste curso está em processo de reformulação, no qual, através dos resultados de nossa pesquisa, esperamos contribuir significativamente com esse processo.

Para fins éticos, solicitamos a autorização do coordenador do curso para o desenvolvimento da pesquisa, o qual, mediante a assinatura de um Termo de Autorização Institucional, se mostrou de acordo e disposto a colaborar para o que fosse necessário. Além disso, solicitamos, por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, a autorização dos licenciandos para participar da pesquisa, que requeria a permissão para o uso e divulgação dos dados obtidos, preservando as suas identidades. Os licenciandos demonstraram interesse e entusiasmo para conhecer a proposta.

Vale ressaltar que, para assegurar a preservação da identidade dos licenciandos, em nenhum momento, mencionamos os seus nomes verdadeiros. Essas identidades foram substituídas pelos códigos A1, A2, A3, ..., A24. Essa substituição foi feita de acordo com a ordem alfabética da lista de presença, assim, em todas as atividades foi utilizado o mesmo código para cada aluno.

Os Termos de Autorização Institucional assinado pelo coordenador do curso e de Consentimento Livre e Esclarecido assinado pelos participantes da pesquisa, assim como outros documentos exigidos pelo comitê de ética da UEPB, foram anexados ao projeto de tese e submetidos ao referido comitê, o qual analisou e emitiu o parecer nº 5.987.078, favorável ao desenvolvimento da pesquisa (anexo II).

5.3 Aspectos teóricos e metodológicos da pesquisa

Os dados dessa pesquisa foram levantados a partir do desenvolvimento da Unidade Temática intitulada “Exploração-Proposição-Resolução de Problemas: implicações para a sala de aula de matemática”, que teve como público-alvo alunos do curso Licenciatura em Matemática. As atividades planejadas nessa Unidade Temática foram desenvolvidas utilizando a perspectiva metodológica Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, em que buscamos direcionar o nosso olhar para dois aspectos importantes, sendo eles: (i) a relação dos futuros professores com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas; e (ii) as preocupações conceituais em torno das ideias de Álgebra que os professores em formação apresentam ao explorar, propor e resolver problemas.

Salientamos que, ao longo das atividades, além de contemplarmos conceitos matemáticos, procuramos abranger a dimensão social por meio da Matemática. Dessa forma, nos dois aspectos citados acima, também incluímos a análise das preocupações dos futuros professores em relação ao desenvolvimento de um pensamento crítico-reflexivo dos seus futuros alunos.

Com essas atividades, buscamos contribuir na formação dos futuros professores de matemática participantes da pesquisa, possibilitando o desenvolvimento de suas habilidades de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e potencializando, por meio dessa perspectiva, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, a manifestação do pensamento algébrico.

Todas as atividades foram desenvolvidas sob a perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, mas cada uma delas seguiu uma estratégia metodológica diferente, tendo diferentes momentos e pontos de partida. Dessa forma, conforme o planejamento da atividade, ela teve como ponto de partida a exploração, a proposição ou a resolução de problemas. Desse modo, ao longo de cada atividade, foi natural que se concentrasse mais na exploração, na proposição ou na resolução de problemas, ou que uma emergisse mais que a outra.

Em todos os encontros, ao longo e, sobretudo, ao final de cada atividade, dedicamos um momento para a reflexão e discussão, sendo que em alguns deles, direcionamos questionamentos específicos para que os participantes pudessem refletir e, também, para que pudéssemos receber *feedbacks* e avaliar o projeto ao longo dele, fazendo, quando necessário, alterações e adaptações.

Ao término da Unidade Temática, realizamos uma avaliação formal com os licenciandos sobre suas experiências vivenciadas no decorrer da Unidade Temática. Para isso, utilizamos uma análise-reflexiva composta por seis questionamentos.

O levantamento de dados foi desenvolvido por meio de 17 encontros, compostos pelos seguintes momentos: i) apresentação do projeto de pesquisa (1 encontro); ii) desenvolvimento da Unidade Temática (15 encontros); e iii) avaliação da Unidade Temática (1 encontro).

Nesse contexto, a Unidade Temática foi organizada da seguinte forma:

1ª Parte (8 encontros: 16h):

- Desenvolvimento de atividades mediadas pela professora (7 encontros);
- Discussão teórica sobre a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (1 encontro);

2ª Parte (7 encontros: 14h):

- Desenvolvimento de atividades mediadas pela professora (3 encontros);

- Desenvolvimento de Oficinas mediadas pelos licenciandos em matemática (4 encontros);

A seguir, apresentamos o quadro 16, ilustrando o detalhamento das atividades desenvolvidas na Unidade Temática, destacando o objetivo e a carga horária para cada uma delas.

Quadro 16 – Planejamento da Unidade Temática

Descrição da aula	Objetivo	Carga horária
	PRIMEIRA PARTE	
Atividade 1: A compra de batatas	- Discutir ideias de Álgebra e possibilitar a transição entre as representações múltiplas de Álgebra por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.	2h
Atividade 2: Chocolates e ovos de Páscoa	- Utilizar conceitos matemáticos como uma ferramenta para compreender, analisar e discutir questões do cotidiano, buscando estimular o pensamento crítico-reflexivo.	4h
Atividade 3: Adivinhando pensamentos	- Estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.	4h
Atividade 4: Os degraus da escada	- Potencializar o aprofundamento das ideias de Álgebra por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.	4h
Aula: “Problema: compreensões e discussões”	- Proporcionar discussão teórico-prática sobre as compreensões de problema e aspectos relacionados à coerência didática na proposição de problemas.	2h
	SEGUNDA PARTE	
Atividade 5: Reformulação de Problemas	- Avaliar problemas propostos pelos licenciandos e reformulá-los utilizando as compreensões de problema e os conceitos de coerência didática.	2h
Atividade 6: Propondo problemas	- Refletir sobre as habilidades dos futuros professores em propor e explorar problemas.	4h
Experiências práticas: Oficinas	- Avaliar o desenvolvimento dos alunos e, assim, contribuir para o aprimoramento da utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no ensino de Matemática.	8h

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

A Unidade Temática foi estruturada sob a perspectiva teórica da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, que tem como característica principal, inicialmente, a experiência prática e, somente depois, a formalização do conceito. Dessa forma, consideramos fundamental que os participantes estivessem familiarizados com a proposta a partir das atividades práticas, conhecessem os aspectos teóricos por meio das leituras e discussões, depois, retornassem à discussão dos aspectos práticos e, finalmente, tivessem a possibilidade e a autonomia de experimentar uma atividade prática fundamentada.

Essa organização foi feita visando oferecer, na primeira parte, por meio de quatro atividades, vivências práticas da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, permitindo a discussão, o desenvolvimento e aprofundamento dos conceitos de

Álgebra. A partir dessas experiências, propôs-se um encontro de discussão teórica para debater e aprofundar o conhecimento teórico sobre a utilização desta metodologia, por meio de leituras individuais, realizadas de forma assíncrona, e discussões coletivas, realizadas durante o encontro.

Na segunda parte, foram realizadas mais duas atividades, conduzidas pela professora-pesquisadora, visando incentivar a Proposição e a Exploração de Problemas por parte dos futuros professores após as discussões teóricas, de modo a permitir uma avaliação/autoavaliação e reflexão/autorreflexão sobre as suas capacidades de propor e explorar problemas. Foram realizadas, por fim, quatro oficinas conduzidas pelos alunos do curso para poderem colocar em prática as aprendizagens adquiridas durante a Unidade Temática.

5.4 Processo de elaboração do Produto Educacional

O Produto Educacional elaborado junto a este trabalho tem como objetivo proporcionar aos pesquisadores, professores de matemática, formadores de professores que ensinam matemática e futuros professores de matemática a oportunidade de compreender a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como uma alternativa metodológica que pode contribuir para uma aprendizagem de Álgebra com mais compreensão. Ele consiste em um material didático que discute aspectos teórico-práticos da Unidade Temática desenvolvida em nossa pesquisa pedagógica.

Nosso entendimento por Produto Educacional é fundamento no documento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), da área de Ensino, que o define como o "resultado de um processo criativo gerado a partir de uma atividade de pesquisa, com vistas a responder a uma pergunta ou a um problema ou, ainda, a uma necessidade concreta associados ao campo de prática profissional, podendo ser um artefato real ou virtual, ou ainda, um processo" (Brasil, 2019, p.16).

Destacamos que o Produto Educacional foi apresentado e validado no "I Seminário Internacional em Ensino de Ciências e Matemática em tempos mediados pelas tecnologias digitais" (Martins; Andrade, 2023), realizado em 2023. Este evento foi idealizado por um grupo de consultores da CAPES, que participou da avaliação quadrienal (2017–2020), com representantes de diferentes programas, incluindo o PPGECEM/UEPB. O evento abordou temas emergentes de pesquisa, visando fortalecer o tripé ensino, pesquisa e extensão, tendo como foco os produtos educacionais produzidos por esses programas.

O Produto Educacional é fundamentado em discussões teóricas relevantes na área de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas (por exemplo, Abramovich; Cho, 2015; Andrade, 2017; Cai; Hwang; Melville, 2023; Kilpatrick, 2017; Martins; Andrade, 2022, 2023; Onuchic; Allevato, 2009, 2011, 2014; Silveira; Andrade, 2020; Silver; Ellerton; Cai, 2013) discutidas no capítulo 2, e foi desenvolvido por meio de atividades práticas que contemplam essas discussões. Essas atividades foram desenvolvidas em nossa pesquisa pedagógica, para que assim, o Produto Educacional pudesse trazer aspectos teóricos e práticos que possibilitem reflexões sobre a utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Matemática, sobretudo no ensino-aprendizagem de Álgebra.

Ao elaborarmos esse Produto Educacional e ao considerarmos como um instrumento inerente a nossa atividade de pesquisa, levamos em consideração a discussão de Lankshear e Knobel (2008) os quais mencionam que um instrumento de coleta de dados deve ser rigoroso no sentido de traduzir a teoria original em ferramentas que sejam consistentes com ele, ou seja, esse instrumento deve ser uma interpretação fiel a teoria original.

Dessa forma, podemos afirmar que o nosso Produto Educacional foi elaborado com base teórica consistente sobre a perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o qual buscamos traduzir esses aspectos teóricos na versão materializada do Produto Educacional. Vale salientar que embora o produto seja apresentado em um modelo possível de ser replicável na sala de aula, muitas ações não podem ser previstas. Além disso, a mediação do professor durante o desenvolvimento das atividades é um aspecto fundamental, o qual deve ter uma postura de orientador, mediador, questionador, motivador, facilitador, avaliador, dentre outros.

Sendo assim, é importante salientar que a postura do professor durante a mediação não é algo que se possa descrever por meio de um passo-a-passo, mas sim uma postura que deve ser desenvolvida através de momentos previamente planejados. O ambiente de sala de aula, durante esses momentos, é uma sala de aula aberta e livre, que permite a voz do aluno e de todos os diversos contextos presentes na sala de aula.

Como menciona Andrade (2017) o trabalho na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas não é uma atividade simples, mas complexa e que envolve múltiplas dimensões e contextos, como o contexto do aluno real e não aquele idealizado, o contexto da matemática, da sala de aula, dos professores e da escola como um todo. Assim, essa é uma proposta que a todo instante é construída, reconstruída, pensada e repensada.

Kaplún (2003) apresenta três eixos a serem considerados na elaboração de um material educativo (terminologia utilizada pelo autor a qual compreendemos como Produto Educacional), sendo eles: i) eixo conceitual; ii) eixo pedagógico; iii) eixo comunicacional. O autor define que o eixo conceitual está relacionado aos conteúdos, sua seleção e organização. O eixo pedagógico está relacionado a metodologia de ensino utilizada para alcançar os alunos. O eixo comunicacional, através de um instrumento concreto, é a forma como este produto chega ao aluno.

Analisando o nosso Produto Educacional sob a perspectiva de Kaplún (2003), podemos mencionar que ele contempla o eixo conceitual, à medida que por meio das atividades desenvolvidas na Unidade Temática, contemplamos os seguintes aspectos: i) Concepções de Problemas; ii) Proposição de Problemas: geração e reformulação de problemas; iii) Exploração de Problemas; iv) Coerência Didática na Proposição de Problemas; iv) Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino; v) Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação do professor que ensina matemática. Todos esses tópicos foram trabalhados sob uma perspectiva de Educação Matemática Crítica, tratando conceitos da matemática, como também, temas que vão além dela. Além desses aspectos, nosso produto educacional visou, por meio das atividades desenvolvidas, trazer contribuições para o ensino de álgebra, possibilitando o desenvolvimento e/ou aprofundamento do pensamento algébrico.

O eixo pedagógico, como menciona Kaplún (2003) é o articulador entre os eixos conceitual e comunicacional, ou seja, é a forma como buscaremos atingir o nosso público-alvo. Nesse contexto, salientamos que a metodologia utilizada coincide com o nosso objeto de ensino, uma vez que tratamos dos aspectos teóricos da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas ao mesmo tempo que a utilizamos em nossas atividades práticas. Consideramos este aspecto fundamental, pois os futuros professores tiveram a oportunidade de conhecer os aspectos teóricos da metodologia à medida que a utilizavam na prática.

O eixo comunicacional mencionado por Kaplún (2003) consiste na tipologia do Produto Educacional, no nosso caso, consistiu em um Material Didático contemplando aspectos teóricos e práticos da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na sala de aula de Matemática.

Além desses aspectos, destacamos que o Produto Educacional tomou como referência os critérios de estratificação elencados pelo Grupo de Trabalho de Produção Técnica da CAPES (BRASIL, 2019), a saber: i) aderência; ii) impacto; iii) inovação; iv) aplicabilidade; e v) complexidade.

No que diz respeito à “aderência”, o Produto Educacional está relacionado à Linha de Pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, uma vez que o Produto visa promover uma compreensão teórico-prática da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação do professor, considerando o contexto da sala de aula de matemática. A Unidade Temática desenvolvida nesta pesquisa, que fundamenta o produto, apresenta atividades voltadas à formação do professor que ensina matemática, com vistas às implicações para a sala de aula de matemática.

Nesse contexto, é importante salientar o critério “impacto” deste produto, que foi elaborado em conjunto com a pesquisa realizada com 24 licenciandos de cidades do Sertão Paraibano, bem como de cidades do Pernambuco e Rio Grande do Norte, que fazem fronteira com o estado da Paraíba. Dessa forma, é possível notar o potencial impacto na formação de professores, que pode se estender também às salas de aula da Educação Básica. À medida que o professor reflete, compreende e aplica os aspectos teóricos e práticos da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, isso pode contribuir para uma nova postura em relação ao ensino de matemática, através dessa metodologia, trazendo, sobretudo, contribuições para o ensino-aprendizagem de Álgebra.

O critério “inovação” é ressaltado pelo uso da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na disciplina Introdução à Modelagem em Educação Matemática. Essa utilização possibilita uma mudança de postura e concepções a respeito da integralização da disciplina, que foi desenvolvida consoante a literatura nacional e internacional. Além disso, utilização dessa metodologia na formação desses futuros professores é uma forma de expandir os avanços das pesquisas em Educação Matemática para a formação de professores e, consequentemente, para a Educação Básica, contribuindo para uma aproximação das pesquisas com a sala de aula e para a melhoria do ensino e aprendizagem de Matemática.

Dessa forma, ressaltamos o critério “aplicabilidade”, uma vez que, à medida que os futuros professores têm esses conhecimentos teórico-práticos em sua formação, isso pode ser incorporado às suas práticas futuras. Além disso, o Produto Educacional foi elaborado de forma didática e replicável, apresentando elementos que representam o cenário de uma sala de aula usando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Dessa forma, pesquisadores, professores de matemática, formadores de professores e futuros professores de matemática podem desenvolver suas atividades em sala de aula com base nele, e, sobretudo, desenvolver uma postura de professor mediador, questionador, orientador, facilitador, motivador e avaliador.

O critério “complexidade” do Produto Educacional está relacionado à fundamentação teórica utilizada para sua elaboração, por meio de um amplo levantamento teórico na literatura nacional e internacional. Além disso, fomos ancorados em experiências práticas, considerando o cotidiano e o contexto real, a partir de pesquisas desenvolvidas na sala de aula.

Nos capítulos seguintes, apresentaremos as atividades desenvolvidas na Unidade Temática utilizadas como base para a elaboração do nosso Produto Educacional, enfatizando os seus aspectos teóricos e metodológicos, bem como a análise reflexiva dessas atividades, a partir do desenvolvimento desta pesquisa. No entanto, é importante salientar que, na versão materializada do Produto Educacional, essas atividades e suas discussões estão apresentadas em um formato didático e replicável, de modo a permitir que outros profissionais utilizem esse material como um norteador para a utilização da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

5.5 Análise dos dados

Embasados em Lüdke e André (1986) compreendemos que “analisar os dados qualitativos significa “trabalhar” todo o material obtido durante a pesquisa (...)” (p. 45). Assim, nesta pesquisa, foram analisadas a observação realizada em sala de aula, os registros no caderno de campo da professora-pesquisadora, os registros na lousa, os áudios dos diálogos presentes nas aulas e os materiais produzidos pelos alunos durante os encontros.

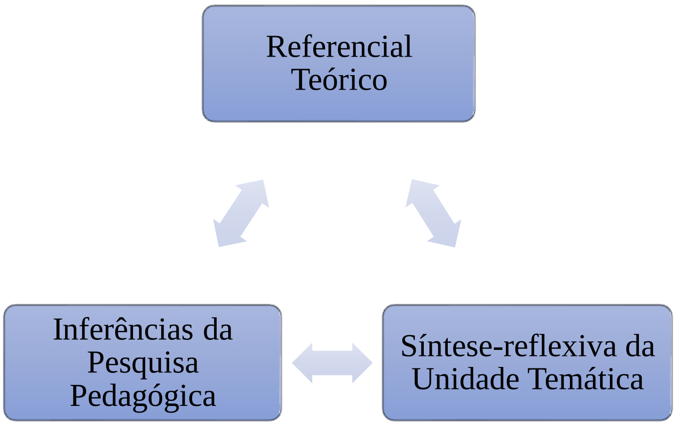
Para uma melhor compreensão e aproveitamento dos dados coletados, a descrição e análise de dados foram realizadas ao mesmo tempo em que o levantamento de dados foi realizado. Entretanto, posteriormente, essas análises foram aprofundadas, como também, foram além ao que estava explícito nos dados coletados, pois, buscamos desvendar aspectos inerentes aos dados, mas que não foram explicitamente mencionados.

A análise de dados foi realizada usando a triangulação de dados, que é definida por Flick (2013) como uma metodologia de análise de dados que analisa um tema de pesquisa sob pelo menos duas perspectivas, as quais podem ser pessoas, momentos ou abordagens diferentes. O autor sustenta que a triangulação é, essencialmente, usada como uma técnica para produzir conhecimento em diferentes níveis, ou seja, expandindo o conhecimento possível se a pesquisa fosse realizada sob uma abordagem única.

Além disso, entendemos que a triangulação de dados é uma estratégia que nos permite compreender o fenômeno de interesse sob diferentes perspectivas. Nosso fenômeno de interesse foi compreendido, inicialmente, a luz do nosso referencial teórico, que possibilitou uma compreensão deste na literatura. Em seguida, a pesquisa pedagógica possibilitou o desenvolvimento estruturado de uma Unidade Temática, a qual possibilitou o alcance do nosso objetivo principal. Por fim, realizamos uma análise reflexiva ao final da Unidade Temática visando obter um *feedback* construtivo dos alunos sobre os tópicos abordados.

A imagem a seguir, ilustra nosso planejamento para a triangulação dos dados utilizando os métodos mencionados:

Figura 7 – Triangulação de dados



Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Lankshear e Knobel (2008) destacam que assim como a elaboração do instrumento de levantamento de dados deve ser feito de modo imaginativo e criativo, a análise de dados também deve, a qual o pesquisador deve ter clareza de como extrair sentido dos próprios dados, ter um ato de interpretação e reflexão, buscando identificar e separá-los em categorias apropriadas ou identificá-los em tipos de padrões que possam ajudar a compreender e explicar algo relevante. Ou seja, essas estratégias de análise de dados precisam ser coerentes com o embasamento teórico da pesquisa, de modo que essas venham contribuir na investigação do problema em questão.

Nesse contexto, baseados em nosso referencial teórico e em nossa pesquisa exploratória, desenvolvemos nossas categorias de análise, com o intuito de avaliar os problemas propostos pelos futuros professores. Assim, as categorias elaboradas têm como foco de análise a escrita dos problemas propostos pelos licenciandos, uma vez que a Proposição de Problemas foi um momento presente em todas as atividades, a qual emergia através da Exploração de Problemas e era potencializado pela Resolução de Problemas.

É importante ressaltar que esta análise se concentra na escrita dos problemas, com o objetivo de aperfeiçoá-los. A alocação dos problemas nas diferentes travessias não leva em consideração seu potencial exploratório nem limita o processo de Exploração e Resolução de Problemas. Os problemas pertencentes às três travessias podem promover investigações profundas e suscitar inúmeras reflexões, contudo, damos destaque a essa análise, pois, ao se tratar de um curso de formação de professores de Matemática, consideramos extremamente necessário que os aspectos relacionados à Coerência Didática dos problemas sejam cuidadosamente analisados.

Essas categorias são compostas por três aspectos, sendo eles: i) estrutura do problema, ii) conteúdo matemático e iii) viabilidade do problema. A partir dessa análise, consideraremos os problemas pertencentes a Travessia I, Travessia II e Travessia III.

Ao analisarmos o aspecto i), objetivamos avaliar a estrutura do problema, investigando:

- Se é um problema simples, semelhante a exercícios padrões, o qual não requer reflexão para compreensão.
- Se é um problema bem estruturado, que requer reflexão para compreensão, mas que apresenta um contexto padrão, semelhante a um problema já trabalhado ou a exercícios padrões.
- Se é um problema bem estruturado, que requer reflexão para compreensão e que apresenta contexto original e criativo.

Ao analisarmos o aspecto ii), objetivamos avaliar o conteúdo matemático necessário para compreensão e resolução do problema, investigando:

- Se o problema traz dados coerentes e que possibilitam a resolução;
- Se é um problema que necessita de conceitos matemáticos básicos para a resolução;
- Se é um problema que necessita de conceitos matemáticos avançados para a resolução;

Ao analisarmos o aspecto iii), objetivamos avaliar a viabilidade do problema, investigando:

- Se o contexto abordado no problema é inviável, irreal e que não desperta o envolvimento do aluno;
- Se é problema com contexto moderadamente viável, realista e envolvente;
- Se é problema com contexto muito viável, realista e envolvente;

Para um melhor entendimento, sintetizamos as categorias apresentadas acima em três Travessias, como podemos ver no quadro 17 a seguir:

Quadro 17 – Categorias para análise de problemas propostos

Problema	**Travessia I**	**Travessia II**	**Travessia III**
Estrutura do problema	Problema simples e/ou contexto padrão.	Problema bem estruturado com contexto padrão.	Problema bem estruturado com originalidade.
Compreensão do problema	Não traz dados que possibilitem a sua resolução.	Necessita de compreensão de conceitos matemáticos básicos para a sua resolução.	Necessita de compreensão de conceitos matemáticos avançados para a sua resolução.
Viabilidade do problema	A situação não é viável, realista e envolvente.	Moderadamente viável, realista e envolvente.	Muito viável, realista e envolvente.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

As Travessias são consideradas momentos da caminhada feita pelo aluno, nos seus diferentes percursos, as quais podem ser compreendidas como segue:

Quadro 18 – Descrição das Travessias

Travessia I	**Travessia II**	**Travessia III**
Momento em que o aluno propõe problemas de estrutura mais simples e/ou com contexto padrão. Nessa travessia, podemos considerar que o aluno se encontra no ponto de partida da Proposição de Problemas, cujo trabalho necessita ser aprimorado no diálogo de sala de aula.	Momento em que o aluno propõe problemas mais estruturados, embora em um contexto padrão. Os problemas dessa categoria utilizam conceitos matemáticos básicos em sua exploração, que fazem sentido no mundo real e engajam o aluno.	Momento em que o aluno propõe problemas bem estruturados, originais e criativos. Os problemas dessa categoria possibilitam avanços na exploração dos conceitos matemáticos desenvolvidos, colaborando no aprofundamento do trabalho realizado, podendo ir cada vez mais além.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Para as análises relacionadas aos conteúdos matemáticos desenvolvidos em cada atividade, não elaboramos categorias específicas, uma vez que as ideias e conceitos matemáticos foram abordados de maneira ampla, com foco no seu desenvolvimento e aprofundamento.

6 ESTUDO EXPLORATÓRIO: DISCUSSÕES E ANÁLISES

Conforme mencionado no capítulo anterior, antes de iniciarmos o levantamento de dados por meio da pesquisa pedagógica, desenvolvemos, em 2022, um estudo exploratório. Esse estudo consistiu numa primeira aplicação de atividades utilizando a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, na qual buscamos uma familiarização e avaliação das atividades a serem desenvolvidas na Unidade Temática por meio da pesquisa pedagógica.

Essas atividades foram realizadas em períodos e âmbitos distintos, mas, nesta pesquisa, não detalharemos todas as atividades desenvolvidas na pesquisa exploratória, uma vez que essa descrição e análise serão realizadas posteriormente, em relação às atividades desenvolvidas na Unidade Temática. No entanto, apresentaremos duas atividades do estudo exploratório, uma em cada âmbito: Curso de Licenciatura em Matemática e Grupo de Estudos: GEPEP, sinalizando os resultados alcançados, os quais contribuíram para a elaboração final do nosso instrumento de levantamento e análise de dados.

Podemos afirmar que o estudo exploratório colaborou em nossa pesquisa em dois aspectos: i) na familiarização teórico-prática com a utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, uma vez que tivemos a possibilidade de avaliar os tipos de atividades que seriam desenvolvidas em nossa Unidade Temática e, assim, realizar as possíveis modificações; e ii) na elaboração de instrumentos de análises, pois esse primeiro momento nos auxiliou na elaboração das primeiras categorias a serem utilizadas na análise de dados.

6.1 Atividade: Contrata-se engenheiro químico[2]

A presente atividade foi adaptada de Carrillo e Cruz (2000, p. 26) e desenvolvida em uma Oficina realizada no primeiro semestre de 2022, com os membros do GEPEP, grupo formado por mestrandos e doutorandos em Ensino de Ciências e Educação Matemática do PPGECEM/UEPB. A oficina teve duração de quatro horas, sendo conduzida pela pesquisadora e pelo professor orientador, líder do grupo.

Nessa atividade, tivemos como objetivo investigar como as Representações Múltiplas de Álgebra potencializam a aprendizagem matemática e como elas impulsionam o trabalho com Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

---

[2] Uma primeira discussão dessa atividade foi publicada em Martins e Andrade (2023).

A Oficina foi desenvolvida na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, tendo a Proposição de Problemas como ponto de partida e como ferramenta que operacionaliza e impulsiona o trabalho com a Exploração e Resolução de Problemas. Nesse sentido, consideramos a Exploração de Problemas como metodologia orientadora de todo o processo.

A oficina iniciou com a apresentação da situação ilustrada a seguir (figura 8), em que os participantes deveriam explorá-la e em seguida, proporem o(s) seu(s) problema(s).

Figura 8 – Situação entregue aos participantes para realização de atividade

EMPRESA BRASILEIRA PROCURA ENGENHEIRO QUÍMICO

REQUISITOS:
- Graduação em Engenharia Química
- Idade até 35 anos
- Bons conhecimentos de Inglês

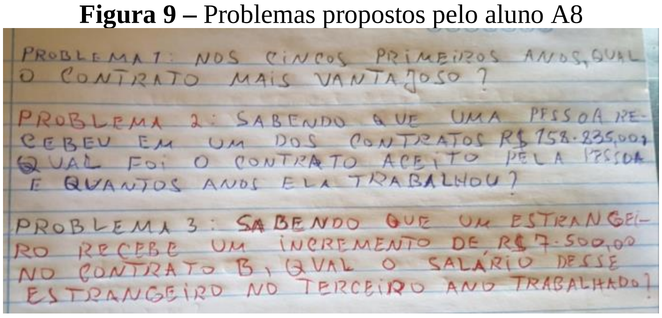
CONDIÇÕES:
Contrato A
- Salário anual no 1º ano de R$ 128.069,00.
- Incremento salarial anual de R$ 15.368,00
Contrato B
- Salário semestral no 1º semestre de R$ 51.227,00
- Incremento semestral de R$ 5.122,00

Enviar CV para vagas n° 1251 nesta revista.

Fonte: Adaptada de Carrillo e Cruz (2000, p. 26).

Os participantes ficaram livres na exploração e proposição, não sendo imposta nenhuma condição a ser contemplada. Diante disso, os problemas propostos pelos participantes estavam no âmbito da Matemática e também em temas além dela. Nesse momento de Proposição de Problemas, percebemos profunda exploração, em que cada participante apresentou mais de um problema, como podemos ver na figura 9.

Figura 9 – Problemas propostos pelo aluno A8



PROBLEMA 1: NOS CINCOS PRIMEIROS ANOS, QUAL O CONTRATO MAIS VANTAJOSO ?

PROBLEMA 2: SABENDO QUE UMA PESSOA RECEBEU EM UM DOS CONTRATOS R$ 158.835,00, QUAL FOI O CONTRATO ACEITO PELA PESSOA E QUANTOS ANOS ELA TRABALHOU?

PROBLEMA 3: SABENDO QUE UM ESTRANGEIRO RECEBE UM INCREMENTO DE R$ 7.500,00 NO CONTRATO B, QUAL O SALÁRIO DESSE ESTRANGEIRO NO TERCEIRO ANO TRABALHADO?

Fonte: Dados do estudo exploratório.

Nesse contexto, evidenciamos o que destaca Andrade (2017) ao tratar da perspectiva de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. O autor aponta que essa proposta além de ser considerada como uma metodologia de ensino, considera não somente os níveis de processos e conceitos matemáticos, mas também a nível de questões de natureza sócio-político-cultural, da educação em geral e da educação matemática em particular, observando a sala de aula em toda sua multicontextualidade.

Além dos problemas apresentados na figura 9, foram apresentados problemas sobre a melhor opção de contrato, a função algébrica que representaria os contratos, vantagens e desvantagens dos contratos, piso do Engenheiro Químico no Brasil, comparação de salários entre as profissões, Imposto de Renda, salário mensal, décimo terceiro, regime de contratação CLT ou CNPJ, carga horária de trabalho, dentre outros.

Após a discussão desses pontos, partimos para a Resolução do Problema. Nesse momento, foi consensual que todos os participantes se concentrassem no problema "Qual é o tipo de contrato mais vantajoso, o contrato A ou o contrato B?", tendo em vista que todos os participantes propuseram este problema ou um problema semelhante. Assim, foi entendido que por meio dessa resolução, teríamos subsídios para discutir outros problemas propostos.

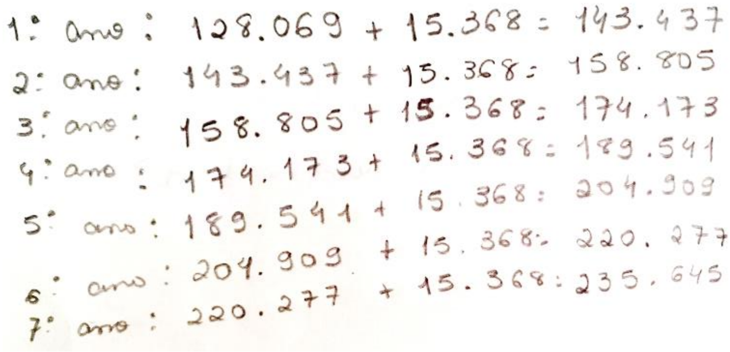
A princípio, os participantes afirmaram que o contrato B jamais superaria o contrato A. Discutiram, inclusive, sobre gênero, afirmando que o contrato B, por ser menos vantajoso, seria utilizado na contratação de mulheres, que, historicamente, tem uma desvantagem salarial comprovada.

Contudo, por meio da mediação/refutação foi percebido que essa conclusão foi obtida por meio de uma interpretação errônea em torno da palavra incremento, em que, inicialmente, foi compreendido que o incremento seria uma espécie de bônus anual ou semestral, mas que não seria incorporado ao salário. Após uma discussão e análise profunda, ficou esclarecido que o incremento seria uma incorporação, e houve a sugestão da alteração da palavra na situação apresentada para evitar essa dupla interpretação em outros momentos.

Após essa discussão, os alunos partiram para a resolução do problema, iniciando fazendo a projeção salarial nos próximos anos dos contratos A e B. Nesse momento, foi percebido uma inquietação por parte dos alunos, que começaram a discutir que teria algo estranho ao passar dos anos, pois os valores dos contratos começaram a se aproximar, o que era, aparentemente, impossível na discussão inicial.

A figura 10 a seguir, mostra o registro do aluno A1 com a projeção salarial dos próximos 7 anos no contrato A. A partir dos registros aritméticos realizados na resolução do problema, os participantes perceberam que se tratava de uma PA de razão r = 15.368 e assim, começaram também a investigar qual o termo geral dessa PA e qual função algébrica representaria a situação. De acordo com a fala dos alunos, essa seria uma forma de fazer a comparação dos contratos ao longo dos anos e uma forma mais eficaz de comprovar em quantos anos cada contrato seria mais vantajoso.

Figura 10 – Registro do aluno A1 da projeção salarial no contrato A nos primeiros 7 anos



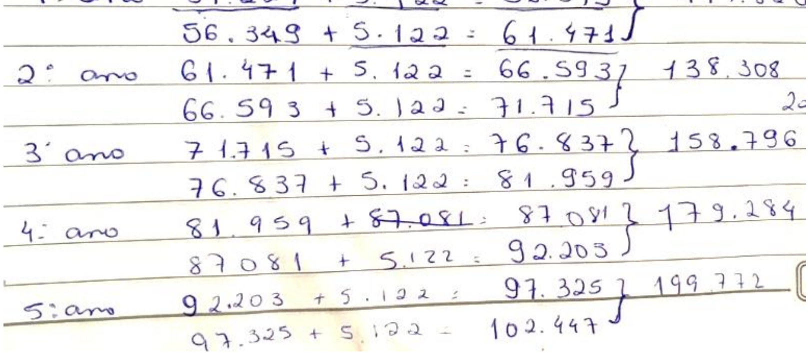
Fonte: Dados do estudo exploratório.

Nesse contexto, ressaltamos que ficou evidente as vantagens da representação numérica destacadas por Friedlander e Tabach (2001), os quais consideram que ela oferece uma ponte eficaz para Álgebra e precede as outras representações, além disso, é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares.

De modo análogo, os participantes fizeram a projeção do contrato B nos próximos anos, e também perceberam que esta é uma PA de razão r = 20.488, assim, concluíram que não necessitaria fazer os 7 anos para comparar, pois, como identificaram a razão, poderiam encontrar o termo geral da PA e fazer o comparativo entre os dois contratos.

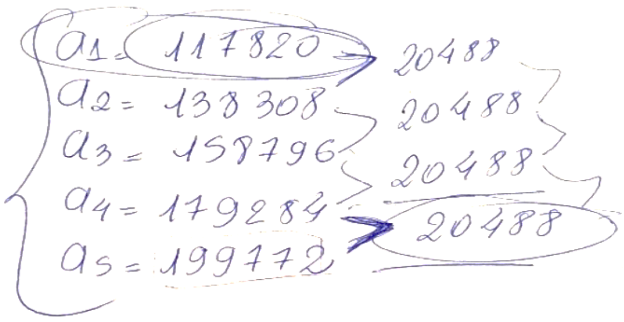
No registro da figura 11, o aluno A2, fez o registro da soma do valor recebido semestralmente e, anualmente no contrato B, para assim, fazer a comparação com o contrato A. Já no registro do aluno A3 (figura 12), o aluno não anexou os valores recebidos semestralmente, apenas os valores recebidos anualmente, chamando de a_1, a_2, a_3, a_4 *e* a_5, e foi registrando a diferença de um ano para o outro, que corresponde ao valor da razão r = 20.488.

Figura 11 – Registro do aluno A2 da projeção salarial semestral e anual no contrato B.



Fonte: Dados do estudo exploratório.

Figura 12 – Registro do aluno A3 da projeção salarial anual no contrato B

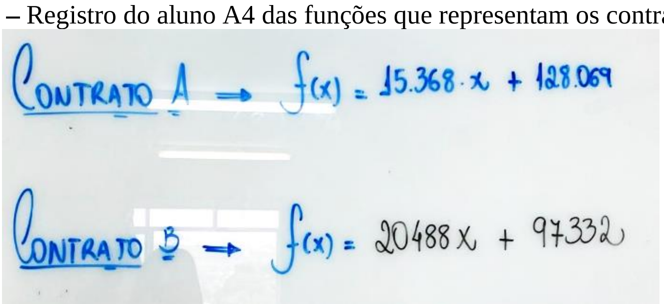


Fonte: Dados do estudo exploratório.

Ao concluírem que os dois tipos de contrato se tratavam de duas PA, sendo uma de r = 15.368 e a outra de r = 20.488, os alunos começaram a investigar qual o termo geral dessas duas PA. Assim, chegaram à conclusão de que a PA, que representaria as condições de contrato A, poderia ser representada pela função $f(x) = 15.368x + 128.069$, $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0 \}$ em que x representa o ano trabalhado. E o contrato B poderia ser representado pela função $f(x) = 20488x + 97.332$, $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$, em que x representa o ano trabalhado.

Essas funções foram registradas na lousa pelo aluno A4, como podemos ver na figura 13 a seguir:

Figura 13 – Registro do aluno A4 das funções que representam os contratos A e B

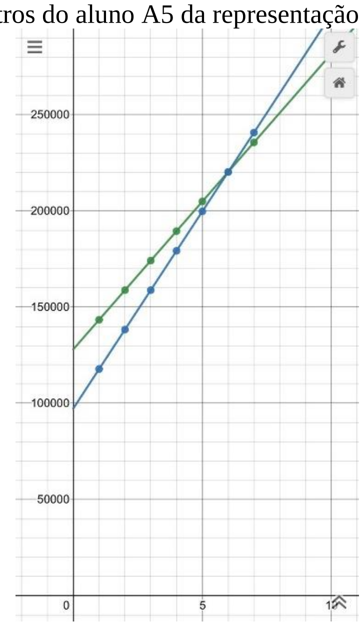


Fonte: Dados do estudo exploratório.

Após essa discussão, um participante, o aluno A5, apresentou sua representação gráfica por meio do aplicativo Desmos, e elucidou em que momento o contrato B passaria a ser mais vantajoso, superando o contrato A, como podemos ver na figura 14.

Essa representação permitiu uma visualização geral em relação à solução do problema, bem como uma discussão sobre a relevância das Representações Múltiplas de Álgebra e o quanto elas favorecem a compreensão geral do problema. Além disso, ficou claro que as representações têm um maior potencial quando são exploradas em conjunto, pois, como discutido por Friedlander e Tabach (2001), elas têm vantagens e desvantagens. Sendo assim, a utilização delas conjuntamente, permite que as vantagens de umas superem às desvantagens das outras.

Figura 14 – Registros do aluno A5 da representação gráfica das funções.



Fonte: Dados do estudo exploratório.

Além dessa discussão, outros problemas propostos foram discutidos, os quais puderam ser resolvidos através das representações apresentadas. Em termos de conteúdo matemático, houve uma discussão sobre a Progressão Aritmética e a Progressão Geométrica, destacando seus elementos (razão, termo geral e propriedades), bem como as funções em questão, esclarecendo sobre domínio, contradomínio e imagem.

6.2 Atividade: Adivinhando pensamentos

Essa atividade foi retirada de um livro didático de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, do autor Edwaldo Bianchini (2018), e desenvolvida no segundo semestre de 2022, com alunos de licenciatura em Matemática da UEPB – Campus Campina Grande – PB, matriculados na disciplina Prática no Ensino de Matemática I, na qual a pesquisadora estava desenvolvendo o seu Estágio Docência.

O objetivo desta atividade foi incentivar a manifestação do pensamento algébrico e possibilitar a transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra (Friedlander; Tabach, 2001), através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. A atividade foi dividida em dois momentos, cada um com um ponto de partida diferente, sendo o primeiro o de Exploração do Problema e o segundo o de Proposição de Problemas.

A atividade inicial consistiu na exploração do problema, com a entrega da atividade seguinte aos alunos. A professora-pesquisadora sugeriu que os alunos refletissem sobre a situação, de forma a compreender e explicar o que acontecia, o que permitia que André adivinhasse os pensamentos.

Quadro 19 – Atividade utilizada no Estudo Exploratório

Atividade – adivinhando pensamentos

André gosta de impressionar as pessoas fazendo adivinhações. Ele consegue descobrir o número pensado por uma pessoa. Observe a conversa entre ele e Fernando no diálogo apresentado na figura abaixo.

Fonte: Adaptada de Bianchini (2018, p. 133).

O primeiro momento finalizou com a discussão sobre o que os alunos descobriram sobre a estratégia de André para adivinhar o número que Fernando pensou. Vale salientar que como o termo exploração de problemas ainda não era algo conhecido pelos licenciandos, não foi mencionado explicitamente que eles explorassem a situação.

Analisando a atividade a luz da discussão de Friedlander e Tabach (2001) podemos perceber como a transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra pode contribuir na interpretação, resolução e reflexão do problema, a qual utilizando-as simultaneamente podemos contemplar as suas vantagens e superar as possíveis desvantagens advindas da limitação de cada representação. Para evidenciar essa discussão sobre as Representações Múltiplas de Álgebra, elucidaremos a seguir:

O problema é apresentado, utilizando, prioritariamente, a representação verbal, a qual possibilita um ambiente natural para entender o contexto. Para a compreensão do problema, é, naturalmente, estimulada a utilização da representação numérica, a qual de acordo com

Friedlander e Tabach (2001) é importante para adquirir uma primeira compreensão de um problema e na investigação de casos particulares, contudo, pode não ser muito eficaz em fornecer um quadro geral.

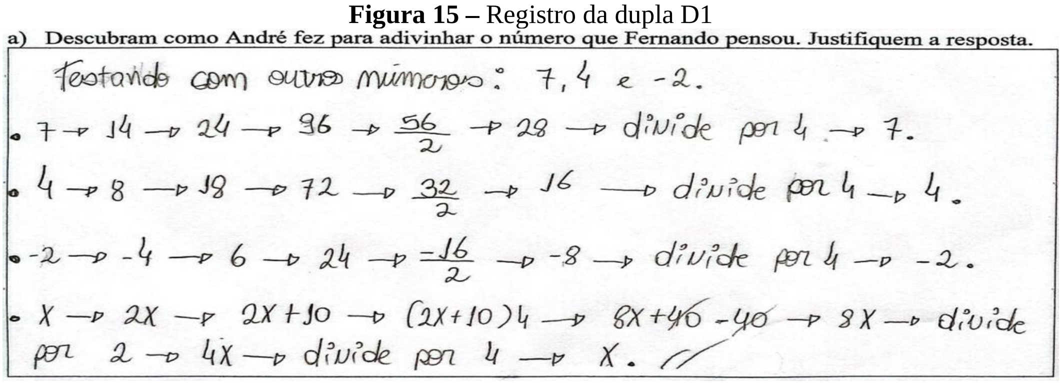
E por fim, chegamos à essência da atividade, em que a situação pode ser representada algebricamente e fornecer um quadro geral com um modelo matemático válido para todo e qualquer número. A representação algébrica é definida por Friedlander e Tabach (2001) como concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões matemáticos, contudo, os autores alertam que o uso exclusivo de símbolos algébricos pode desfocar o significado matemático e causar dificuldades em alguns alunos na interpretação dos seus resultados.

A partir desta discussão, enfatizamos a relevância da transição entre essas diversas representações para uma compreensão mais aprofundada, bem como a necessidade de se ter conhecimento de suas vantagens e desvantagens, de modo a não enfatizar nenhuma das representações, o que poderia prejudicar a compreensão dos conceitos.

Essa discussão pode ser evidenciada na resolução da Dupla 1, exibida na imagem a seguir (figura 15), em que a dupla inicia verificando com alguns números, inclusive com números inteiros, e percebe que existe um modelo matemático que pode ser utilizado para todo e qualquer número.

Chamamos a atenção para a verificação com os números inteiros, pois em muitas outras situações de atividades desenvolvidas nesse estilo de "pense em um número e faça operações com ele", geralmente os alunos pensam em números naturais, raramente incluem, por exemplo, números decimais e/ou negativos.

Figura 15 – Registro da dupla D1


a) Descubram como André fez para adivinhar o número que Fernando pensou. Justifiquem a resposta.

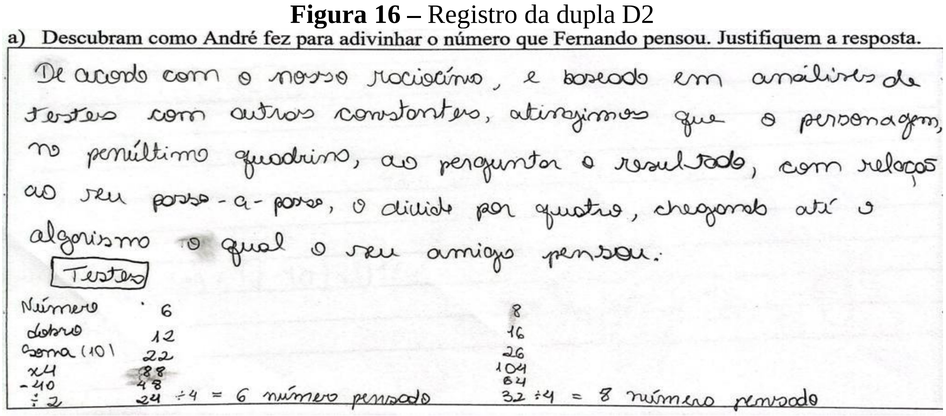
testando com outros números: 7, 4 e -2.

- 7 → 14 → 24 → 96 → $\frac{56}{2}$ → 28 → divide por 4 → 7.
- 4 → 8 → 18 → 72 → $\frac{32}{2}$ → 16 → divide por 4 → 4.
- -2 → -4 → 6 → 24 → $\frac{-16}{2}$ → -8 → divide por 4 → -2.
- X → 2X → 2X+10 → (2X+10)4 → 8X+40 -40 → 8X → divide por 2 → 4X → divide por 4 → X. //

Fonte: Dados da pesquisa.

Contudo, a discussão realizada no momento da Exploração de Problemas nos permitiu perceber que nem todos os alunos conseguiram fazer essa transição entre as representações e perceber o padrão algébrico existente na atividade, como podemos ver na imagem a seguir (figura 16).

Figura 16 – Registro da dupla D2


a) Descubram como André fez para adivinhar o número que Fernando pensou. Justifiquem a resposta.

De acordo com o nosso raciocínio, e baseado em análises de testes com outras constantes, atingimos que o personagem, no penúltimo quadrinho, ao perguntar o resultado, com relação ao seu passo-a-passo, o divide por quatro, chegando até o algarismo o qual o seu amigo pensou.

Testes

Número	6	8
dobro	12	16
soma (10)	22	26
x4	88	104
-40	48	64
÷2	24 ÷4 = 6 número pensado	32 ÷4 = 8 número pensado

Fonte: Dados da pesquisa.

Por ser uma atividade retirada de um livro de 7º ano esperava-se que os licenciandos dominassem, sobretudo, a representação algébrica da atividade. Dado que, se a apresentação fosse feita na linguagem algébrica, através de equações que deveriam ser resolvidas, perceberíamos que não haveria essa dificuldade.

Com essa atividade, percebeu-se que os alunos não apresentam dificuldades em procedimentos algébricos, mas no pensamento algébrico, o que dificulta que eles tenham um domínio sobre as representações.

Conforme discutido por Van de Walle (2009) o desenvolvimento do pensamento algébrico deve ser desenvolvido desde o início escolar, de modo que os alunos aprendam a pensar matematicamente. Contudo, tendo por base a nossa prática docente, essa recomendação, muitas vezes, não acontece nas salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A mesma percepção se estende às salas de aula dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Vale lembrar que essa recomendação foi, recentemente, proposta pela BNCC (Brasil, 2018), a qual orienta que a unidade Álgebra tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico – "essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (Brasil, 2018, p. 270).

Diante disso, destacamos a necessidade do trabalho com atividades e perspectivas metodológicas que possibilitem o desenvolvimento do pensamento algébrico em cursos de formação de professores que ensinam matemática. Pois, o professor precisa ter experiências teórico-práticas para o desenvolvimento desse pensamento e para, futuramente, trabalhar com atividades que possibilitem a manifestação do pensamento algébrico de seus alunos.

É importante que os futuros professores desenvolvam esse tipo de pensamento, para que possam, não somente em atividades matemáticas, mas também em diversas situações do dia a dia, compreender o que é o pensamento algébrico.

Nessa atividade, a utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas evidenciou essa dificuldade e viabilizou que a mediação do professor possibilitasse a vinculação do pensamento aritmético com o algébrico, estimulando, portanto, o desenvolvimento do pensamento algébrico. Diante disso, destacamos a importância da exploração de problemas, pois ela pode revelar essas e outras dificuldades e possibilitar a superação destas.

No segundo momento da atividade, em duplas, os alunos foram estimulados a proporem suas próprias regras para adivinhar números. Após cada dupla fazer a proposição de sua regra, elas apresentaram para as demais duplas, em que cada dupla teria que descobrir as regras elaboradas.

Quadro 20 – Problemas elaborados pelas duplas

Dupla	Desafio	Representação Algébrica	Observações
Dupla 1	1º Pense em um número; 2º Some 10; 3º Multiplique por 2; 4º Some 5; 5º Diminua do resultado duas vezes o número pensado; 6º O resultado é 25.	$y = 2(x + 10) + 5 - 2x$ $y = 2x + 20 + 5 - 2x$ $y = 25$	Para qualquer número pensado, o resultado sempre será igual a 25.
Dupla 2	1º Pensa em um número; 2º Multiplica por 5; 3º Soma 10; 4º Divida por 5; 5º Qual foi o resultado?	$y = \frac{5x + 10}{5}$ $y = \frac{5(x + 2)}{5}$ $y = x + 2$	Para encontrar o número pensado, subtrai-se 2 do valor obtido no 5º passo.
Dupla 3	1º Pense em um número; 2º Divida por 2; 3º Qual foi o resultado?	$y = \frac{x}{2}$	Para encontrar o número pensado, multiplica-se o valor obtido no 3º passo por 2.
Dupla 4	1º Pense em um número; 2º Adicione 10; 3º Divida por 2; 4º Qual foi o resultado?	$y = \frac{x + 10}{2}$	Para encontrar o número pensado, multiplica-se o valor obtido no 4º passo por 2 e subtrai 10.
Dupla 5	1º Pense em um número; 2º Multiplique por 3; 3º Some 15 ao número pensado; 4º Multiplique por 2; 5º Subtraia 30; 6º Qual foi o resultado?	$y = (3x + (x + 15))2 - 30$ $y = (4x + 15)2 - 30$ $y = 8x + 30 - 30$ $y = 8x$	Para encontrar o número pensado, divide-se o valor obtido no 6º passo por 8.
Dupla 6	1º Pense em um número de 1 a 10; 2º Multiplique por 2; 3º Multiplique por 5; 4º Divida o resultado pelo número pensado; 5º Agora subtraia 7 do resultado; 6º O resultado é 3.	$y = \frac{(2x)5}{x} - 7$ $y = \frac{10x}{x} - 7$ $y = 3$	Para todos os números pensados, exceto o número zero, o resultado sempre será igual a 3.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Para analisarmos os problemas propostos pelos alunos, utilizamos as categorias apresentadas no capítulo anterior, as quais são: i) estrutura do problema, ii) conteúdo matemático e iii) viabilidade do problema. Dessa forma, consideraremos os problemas pertencentes a Travessia I, Travessia II e Travessia III.

Considerando as categorias citadas no quadro 17, analisando o aspecto i) estrutura do problema, realizamos as seguintes análises:

As duplas 3 e 4 apresentam problemas situado na Travessia I, uma vez que os problemas propostos por elas, não requerem uma profunda reflexão para chegar à solução. O cálculo para resolução pode ser feito de modo trivial. Já a dupla 2, apresenta um problema situado na Travessia II, a qual requer reflexão para compreensão, mas que apresenta um contexto muito semelhante ao do problema utilizado como ponto de partida desta atividade.

As duplas 1, 5 e 6 apresentam problemas situados na Travessia III, as quais requerem reflexão para compreensão e apresentam contexto original e criativo. As duplas 1 e 6 apresentam problemas semelhantes, que tratam de equações, que independentemente do valor que a outra pessoa possa pensar, o resultado para o valor de x será único. Já o problema proposto pela dupla 5, apresenta originalidade e criatividade quando no passo 3 acrescenta “Some mais 15 ao número pensado”. Essa foi a única dupla que em seu “passo-a-passo” não propôs uma operação que utilize o resultado dos passos anteriores. Pois, à medida que ela sugere somar 15 ao número pensado, há a necessidade de somar 15 somente ao x, e não ao resultado que o operante teria naquele momento.

Quanto ao aspecto ii) Compreensão do problema, consideramos que os problemas de todas as duplas estão situados na Travessia II, pois trazem situações que podem ser resolvidas utilizando conceitos matemáticos, contudo, não requerem uma compreensão avançada.

Quanto ao aspecto iii) Viabilidade do problema, realizamos as seguintes análises:

Os problemas apresentados pelas duplas 3 e 4, estão situados na Travessia II, pois entendemos que eles são moderadamente viáveis e realistas, mas não geraram um envolvimento. Já os problemas propostos pelas outras duplas, consideramos situados na Travessia III, pois são muito viáveis, realistas e envolventes, capaz de gerar um maior envolvimento na resolução.

Para uma visualização mais geral de nossas análises, situaremos os problemas propostos pelas duplas no quadro abaixo.

Quadro 21 – Análise dos problemas propostos na atividade 1

Problema	Travessia I	Travessia II	Travessia III
Estrutura do problema	Dupla 3 Dupla 4	Dupla 2	Dupla 1 Dupla 5 Dupla 6
Compreensão do problema		Dupla 1 Dupla 2	

		Dupla 3 Dupla 4 Dupla 5 Dupla 6	
Viabilidade do problema		Dupla 3 Dupla 4	Dupla 1 Dupla 2 Dupla 5 Dupla 6

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme nos mostra o quadro 21, os problemas propostos, estão divididos entre as categorias, estando em sua maioria situados na Travessia II. Contudo, por ser uma atividade destinada ao 7º ano do Ensino Fundamental, era esperado que todas as duplas apresentassem problemas situados na Travessia III, sobretudo no que diz respeito ao conteúdo matemático, os quais poderiam abordar conteúdo com uma maior complexidade.

Um exemplo desse tipo de problema, foi o proposto pelo professor titular da turma, orientador da pesquisa, que dentro de uma série de problemas propostos aos alunos no momento da discussão da atividade, propôs o seguinte problema:

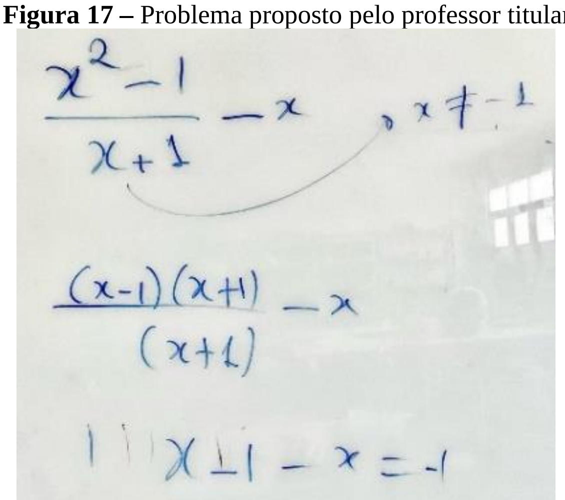
Quadro 22 – Apresentação de problema pelo professor titular

Professor titular:
1º Pense em um número diferente de -1;
2º Eleve ele ao quadrado;
3º Diminua 1 do resultado;
4º Divida tudo pelo número pensado mais um;
5º Diminua o número pensado do resultado.
6º O resultado deu – 1.

Fonte: Dados da pesquisa.

Algebricamente, o problema pode ser escrito como podemos ver na imagem a seguir:

Figura 17 – Problema proposto pelo professor titular



Fonte: Dados do estudo exploratório.

Ao propor esse desafio aos alunos, o professor sugeriu alguns questionamentos para a discussão, tais como: “Por que o número pensado deve ser diferente de -1?” e “Quais conceitos matemáticos podemos observar nesse problema?”

Nesse momento, houve uma discussão sobre esses questionamentos, em que, inicialmente, os alunos perceberam que o resultado sempre seria o número -1, o que talvez fosse o motivo que justificasse a condição dada de que o número pensado tivesse que ser diferente de 1. Ao explorarem o problema algebricamente, como podemos ver na figura 17, os alunos perceberam que como se tratava de uma divisão por x + 1, e o denominador precisa ser diferente de zero, o x não poderia assumir o valor – 1.

Além disso, ao representarem o desafio algebricamente, ficou perceptível o conceito do produto da soma pela diferença de dois termos, que é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo, que ao operarem esse conceito na expressão exposta na figura 17, resultaria no valor -1.

Com esse problema, foi evidenciado a necessidade do professor que trabalha na perspectiva de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas ter um domínio de conteúdos que o possibilite operar com diferentes conceitos em diferentes problemas. Quando nos referimos ao domínio de conteúdo, não nos referimos somente ao domínio de técnicas e procedimentos, mas a compreensão de conceitos que possibilite a vinculação com outros conceitos.

7 DISCUSSÕES E ANÁLISES DA PESQUISA PEDAGÓGICA

Neste capítulo, apresentamos as discussões e análises das atividades desenvolvidas em nossa pesquisa pedagógica, com 24 licenciandos em matemática, a qual foi realizada por meio do desenvolvimento de uma Unidade Temática, que teve uma carga horária de 30 horas, composta por 15 encontros de 2 horas.

A Unidade Temática foi organizada em duas partes, sendo a primeira parte composta por quatro atividades (sete encontros) e seguida por um encontro destinado a uma discussão teórica sobre a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. A segunda parte da Unidade Temática foi composta por duas atividades (três encontros) e quatro oficinas mediadas pelos participantes do curso (quatro encontros).

Essa organização é exibida no quadro abaixo:

Quadro 23 – Organização da Unidade Temática

Encontros	UNIDADE TEMÁTICA	Carga horária
	PRIMEIRA PARTE	
1	Atividade 1: A compra de batatas	2h
2	Atividade 2: Chocolates e ovos de páscoa	2h
2	Atividade 3: Adivinhando pensamentos	4h
2	Atividade 4: Os degraus da escada	4h
1	Discussão teórica: “Problema: compreensões e discussões”	2h
	SEGUNDA PARTE	
1	Atividade 5: Reformulação de Problemas	2h
2	Atividade 6: Propondo problemas	4h
4	Experiências práticas – Oficinas	8h

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Ao discutir cada atividade, procuramos, ao final de cada uma, demonstrar um conjunto de inferências que nos apoiem no alcance do nosso objetivo da pesquisa, que consiste em identificar em quais aspectos uma Unidade Temática, utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra.

Vale salientar que o encontro, voltado para a discussão teórica sobre problemas, terá apenas o caráter de descrição, e não de discussão, uma vez que os elementos teóricos apresentados foram utilizados como fundamento para as atividades que já foram desenvolvidas na primeira parte, elucidando a teoria nos aspectos práticos. Além disso, esse encontro também foi desenvolvido no intuito de subsidiar as atividades da segunda parte, que requeria um maior domínio teórico-prático por parte dos alunos.

1ª PARTE DA UNIDADE TEMÁTICA

7.1 Atividade 1 – Comprando batatas[3]

A seguir, apresentaremos as análises e as discussões da atividade "A compra de batatas", desenvolvida no primeiro encontro da Unidade Temática, que contou com a presença de 21 alunos, e teve duração de 2 horas. O objetivo dessa atividade foi discutir ideias de Álgebra e possibilitar a transição entre as representações múltiplas por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Quadro 24 – Atividade utilizada na pesquisa

Atividade 1 – Comprando batatas
Na loja da esquina do meu quarteirão, cada quilo de batata custa 3 reais. No mercado atacadista, que fica no centro da cidade, longe de casa, cada quilo de batata custa 2 reais, mas tenho que gastar 5 reais em passagens de ônibus para chegar e voltar. Explore a situação apresentada e exponha suas descobertas e curiosidades em forma de um ou mais problemas.

Fonte: Problemas traduzido e adaptado de Malaspina, Torres e Ruvio (2019).

Após realizar a leitura conjunta da atividade, os alunos foram convidados a explorar a situação apresentada e expor suas descobertas e curiosidades na forma de um ou mais problemas. Essa fase de exploração durou aproximadamente 50 minutos. Nesse momento, os alunos demonstraram certo estranhamento, pois ainda não tinham participado de uma atividade nesse formato, e fizeram alguns questionamentos, tais como: "Como assim, explorar?"; "A gente que deve escrever o problema?"; "Pode ser qualquer problema?"; "Precisamos resolver o problema proposto?"; entre outros. Então, a professora-pesquisadora explicou que eles deveriam refletir sobre a situação dada, analisar, investigar e tentar explicá-la, mas todas as descobertas feitas deveriam ser expostas na forma de um ou mais problemas.

Destacamos que a Proposição de Problemas teve como ponto de partida uma atividade de Exploração de Problemas. Em geral, como apontam Cai *et al.* (2015), no trabalho com a Proposição de Problemas, os pesquisadores indicam uma situação-problema e pedem aos alunos que proponham questões que possam ser resolvidas com base nas informações fornecidas na situação. Essas situações-problema podem variar, apresentando ideias estruturadas ou contextos mais abertos, como aconteceu em outras atividades que foram trabalhadas em nossa Unidade Temática e que são discutidas a seguir.

[3] Uma primeira discussão dessa atividade foi publicada em Martins e Andrade (2024).

Os alunos foram solicitados a enviar os problemas criados para o e-mail da professora-pesquisadora, os quais foram organizados no quadro 25 a seguir:

Quadro 25 – Problemas propostos pelos alunos na atividade 1

Aluno(a)	Problema(s)
A1	Ausente
A2	Ausente
A3	1. Quanto eu vou pagar se comprar em ambos os mercados: a) 2kg de batata? b) 5kg de batata? c) Acima de 5kg de batata? d) E se você fosse comprar, em qual seria? Porquê?
A4	1. Se fosse para comprar apenas 2 kg de batatas, onde seria mais vantajoso? 2. E se fosse 20 kg de batatas, seria mais vantajoso em que local?
A5	1. A partir de quantos quilos de batata, é mais vantajoso comprar no centro do que na esquina? 2. Represente cada situação de forma algébrica. Que tipo de função você encontrou?
A6	1- Financeiramente falando, até que ponto seria ideal comprar na esquina? E no centro? E se a passagem fosse 50% mais barato?
A7	1. Em qual lugar compensa comprar? 2. Caso a batata no mercado fosse 2 reais mais cara, onde seria mais vantajoso fazer a compra? 3. É possível representar essa ocasião de forma algébrica? Se sim, qual?
A8	1. Quanto pagarei ao comprar 4 quilos de batata em cada mercado? 2. Como podemos expressar o valor a pagar em função do número de quilos de batata comprados em cada mercado?
A9	1. Qual lugar mais barato para comprar batatas? 2. Quanto custa comprar 3kg de batata na esquina do quarteirão e no atacadista? 3. Fosse passagem só de ida para o atacadista, quanto ficaria comprar batatas nele?
A10	Ausente
A11	1. No caso se tivemos dois indivíduos, no qual o indivíduo *A* possui um carro, logo pode ir com seu próprio veículo até o mercado atacadista. Enquanto, o indivíduo *B* não dispõe de tempo para pode ir até o centro, então deve comprar na esquina. Caso ambos desejem comprar 7 quilos, quem gasta menos? <u>Obs.:</u> Suponha que o gasto de combustível até o mercado é de 8 reais. 2. Caso você receba uma carona até o mercado, valeria a pena comprar 5 quilos lá, ou é preferível a loja da esquina? 3. Na compra de quantos quilos que a loja da esquina se torna inviável em comparação ao mercado no centro, isto é, seria mais vantajoso comprar na loja ou no mercado?
A12	Se você tem R$30,00 em qual lugar será possível comprar mais batatas?
A13	A partir de quantos quilos vale a pena comprar no mercado atacadista no centro?
A14	1. Quantos quilos de batatas seriam mais vantajosos comprar no quarteirão? E no mercado? Por quê? 2. E se a passagem custasse a metade do valor atual?
A15	1. Comprando apenas um quilo de batata, em qual situação é mais vantajoso? 2. Comprando apenas um quilo de batata com mais algum produto, que custa o dobro do valor da batata em seu respectivo comércio, em qual situação é mais vantajoso? 3. A partir de quantos quilos de batata, a segunda opção será mais vantajosa?
A16	1. A partir de quantos quilos fica mais vantajoso comprar no mercado atacadista? 2. Com relação ao mercado atacadista, crie uma expressão algébrica que relacione a quantidade de quilos com o preço e a passagem de ônibus.
A17	1. Cite até que ponto seria mais vantajoso ir ao quarteirão ou ao centro.
A18	1- Onde eu conseguiria economizar? E por quê? 2- A partir de quantos quilos de batata eu conseguiria pagar mais barato na esquina ou no mercado? 3- Faça uma tabela de comparação de preços para uma quantidade X de batatas e debata com os colegas sobre.
A19	Analise o valor do quilo de batata no bairro (R$ 3,00). No centro (R$2, 00). Lembrando que ir até o centro paga a passagem no valor de (R$5,00). E veja até quantos quilos é mais favorável você comprar no bairro ou no centro.
A20	1. Se eu comprar 1 kg de batatas na loja da esquina todos os dias durante uma semana, quanto eu gastarei em uma semana? 2. Qual é a quantidade mínima de quilos de batata que eu preciso comprar no mercado atacadista para que a economia nas compras cubra o gasto com as passagens de ônibus?

	3. Em quanto tempo devo começar a comprar batatas no mercado atacadista para que a economia com as passagens de ônibus compense o preço mais barato do mercado? Se eu comprar 5 kg de batatas por semana durante um ano, qual seria minha economia total se eu comprasse no mercado atacadista em vez da loja da esquina?
A21	Em qual é mais barato? Qual tenho mais lucro?
A22	1. Suponhamos que o centro seja a 1km de distância de sua residência, sairia mais vantajoso a compra no centro ou em seu quarteirão? Indo ao centro quanto você gastaria para comprar 10 quilos de batata? E no seu bairro? Faça o comparativo. 2. Com R$25,00 quantos kg de batata compraria no seu quarteirão? E no centro?
A23	Se sua casa for a uma hora do mercado, ela indo a pé ao atacadão. Quanto economizaria se comprasse 4 quilos de batata? Sendo que para ir até a loja da esquina gasta 30 minutos.
A24	1. Quanto se gastaria para comprar: a) 2 kg de batata no centro e no bairro? b) 5 kg de batata no centro e no bairro? c) 6 kg de batata no centro e no bairro? 2. A partir de quantos kg de batata vale a pena comprar no centro? Como você chegou a essa conclusão?

Fonte: Dados da pesquisa.

Após isso, cada aluno fez a apresentação de seus problemas. A professora-pesquisadora os organizou na lousa em forma de categorias, como podemos ver no quadro 26, a seguir. De maneira geral, as categorias foram criadas no decorrer da apresentação dos problemas propostos pelos alunos. Cada vez que um problema apresentava uma nova variável a ser explorada, uma nova categoria era criada.

Essa organização foi uma estratégia utilizada na tentativa de minimizar uma dificuldade comum no trabalho com a Exploração de Problemas, que é, precisamente, considerar todos os problemas apresentados pelos alunos. Em muitos casos, essa tarefa torna-se inviável devido à limitação de tempo e à quantidade de problemas propostos. Sendo assim, organizar os problemas que abordavam temas semelhantes em categorias, nos permitiu considerar o maior número possível de problemas ao longo da exploração. Isso foi possível porque, ao categorizar, conseguimos contemplar um ou mais problemas ao resolver somente um, o que também nos permitiu aprofundar a discussão e aumentar a participação de todos os alunos.

Os problemas apresentados foram organizados na lousa através das seguintes categorias:

Quadro 26 – Categorias utilizadas na Exploração de Problemas

- Até que ponto seria mais vantajoso comprar no quarteirão ou no centro da cidade;
- Quanto economizaria em cada lugar comprando 2kg, 4kg, 5kg, acima de 5kg e 20 kg;
- Se não houvesse a necessidade de pagar a passagem, ou se ela custasse a metade do preço;
- A representação algébrica de cada opção;
- Comprando a batata e um segundo produto;
- Se no mercado a batata passasse a custar R$ 4,00;
- Tendo o valor de R$ 25,00, onde seria mais vantajoso.

Fonte: Dados da pesquisa.

Cai *et al.* (2015) destacam a importância desse momento de Exploração de Problemas, uma vez que, embora alunos e professores sejam capazes de propor problemas matematicamente corretos, eles nem sempre são de alta qualidade. Assim, o momento de Exploração de Problemas pode colaborar no desenvolvimento das habilidades de proposição de problemas dos alunos.

Isso se tornou evidente ao longo do momento em que, ao apresentarem os problemas propostos, muitos alunos mencionaram a necessidade de realizar alterações em seus problemas, sejam elas relacionados à escrita ou à incógnita do problema. Dessa forma, enfatizamos a relevância de socializar os problemas propostos, por ser uma forma dos alunos refletirem sobre suas criações e refletirem se é necessário um aperfeiçoamento. Considerando que esta foi a primeira experiência dos futuros professores com a Proposição de Problemas no âmbito da nossa Unidade Temática, não focamos na análise detalhada da escrita desses problemas, mas sim em utilizá-los como ponto de partida para a Exploração de Problemas.

Na maioria dos problemas propostos, os licenciandos destacaram uma questão que considerada intrínseca à situação: “Até que ponto seria mais vantajoso comprar no quarteirão ou no centro da cidade?”. A leitura da situação original, de fato, desperta a curiosidade de investigar e comparar os valores para descobrir até que ponto seria vantajoso comprar em cada estabelecimento.

Dessa forma, a Resolução de Problemas via Exploração de Problemas foi iniciada por esse problema. A professora-pesquisadora solicitou que um licenciado ou licencianda fosse até a lousa para responder o problema em questão. Uma licencianda se dispôs a iniciar a resolução e, para isso, propôs a elaboração de uma tabela de valores, para que fosse possível acompanhar e comparar em qual lugar seria mais vantajoso comprar. Ela organizou os dados em uma tabela, como podemos ver a seguir (Tabela 1).

Tabela 1 – Valores das batatas no mercado da esquina e no atacadão

Quantidade em quilos	**Esquina**	**Atacadão**
1 kg	3,00	7,00
2 kg	6,00	9,00
3 kg	9,00	11,00
4 kg	12,00	13,00
5 kg	15,00	15,00
6 kg	18,00	17,00

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados apresentados na tabela demonstram que, matematicamente, se comprar menos de 5 kg de batatas seria vantajoso na esquina do quarteirão. Para 5 kg, não teria diferença, uma vez que seria o mesmo valor nos dois locais. Já se comprasse uma quantidade acima de 5 kg, seria vantajoso adquirir no mercado atacadista. A Tabela 1 foi elaborada pela pesquisadora como uma forma de transcrever a tabela organizada na lousa.

A partir dessa resolução, surgiram diversos questionamentos e caminhos de exploração, possibilitando uma discussão mais aprofundada em termos matemáticos, mas também em questões sociais. Andrade (2017) ressalta essa possibilidade ao mencionar que, além de conceitos matemáticos, a Exploração de Problemas abrange questões socioculturais, educacionais e matemáticas, considerando a sala de aula em sua multicontextualidade.

Em termos de conceitos matemáticos, dois licenciandos mencionaram a importância de representar a situação algebricamente, de modo a permitir uma representação concisa da situação, sem a necessidade de calcular cada caso individualmente. Nesse contexto, A3 afirmou que poderia comparar as duas funções e encontrar o ponto de interseção entre elas, pois, traduzindo a situação para a representação algébrica, era exatamente o que estariam investigando.

Nessa discussão, os licenciandos mencionaram que poderiam representar as situações por meio de duas funções. Para representar a venda de batatas na esquina do quarteirão, poderiam utilizar a função $f(x) = 3x$, na qual x representa a quantidade de quilos de batatas e f(x) o valor a ser pago. Já para representar a venda de batatas no mercado atacadista, poderiam utilizar a função $g(x) = 2x + 5$, em que x representa a quantidade de quilos de batatas, a constante 5 o valor gasto em passagens e g(x) o valor a ser pago.

Igualando as duas funções apresentadas, temos:

$$3x = 2x + 5$$

$$x = 5$$

Logo, 5 é o ponto de interseção entre as duas funções.

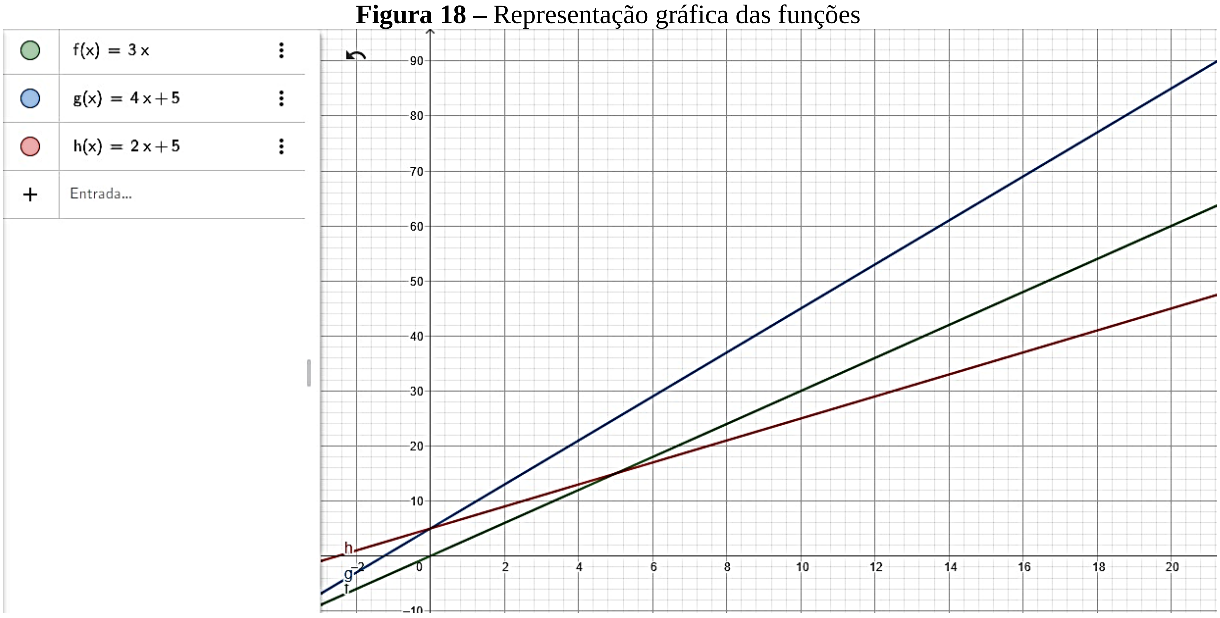
Essa discussão sobre igualar as duas funções foi retomada na discussão final da atividade, na qual os licenciandos mencionaram que, se buscassem um problema da vida real para representar a interseção de duas funções, seria improvável encontrar uma situação tão clara e coerente para expressar a igualdade, como a que o problema proporcionou. A análise dessa observação dos licenciandos demonstra que o trabalho com a Exploração de Problemas na formação de professores pode enriquecer suas experiências com problemas, permitindo que aprimorem o seu conhecimento sobre as ideias matemáticas em cada problema abordado.

Além disso, destacamos a importância da utilização das Representações Múltiplas de Álgebra para possibilitar uma maior compreensão das ideias algébricas. Salientamos que transitar por essas representações é fundamental, pois, como destacam Friedlander e Tabach (2001), nenhuma delas, isoladamente, é capaz de abranger a totalidade de um conceito, uma vez que, apesar de suas inúmeras vantagens, elas também apresentam limitações.

Na utilização dessa representação algébrica, podemos destacar as potencialidades apontadas por Friedlander e Tabach (2001), que a consideram concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos. Contudo, também podemos ressaltar a limitação apresentada pelos autores, os quais afirmam que o uso exclusivo de símbolos (em qualquer estágio de aprendizagem) pode dificultar o significado matemático ou a natureza dos objetos representados, causando dificuldades na interpretação dos seus resultados.

Baseado nisso, para aprofundar essa discussão, a professora-pesquisadora questionou: “Se no mercado atacadista o quilo da batata custasse R$ 4,00, em algum momento, a compra compensaria?” Enquanto os licenciandos investigavam a situação proposta, a pesquisadora também questionou se haveria outra forma de representar essa interseção, de modo que ficasse mais claro em qual local seria vantajoso realizar a compra das batatas. Assim, diante dessa pergunta, A8 mencionou que poderia elaborar uma representação gráfica, que, na sua opinião, permitiria uma visualização mais completa da situação, como podemos ver na Figura 18, a seguir:

Figura 18 – Representação gráfica das funções



Fonte: Dados da pesquisa.

Como destacado por Friedlander e Tabach (2001), a representação gráfica é eficaz em fornecer uma imagem clara de uma função real estimada de uma variável real. Além disso, os gráficos são intuitivos e atraentes para aqueles que preferem uma abordagem visual. Contudo, essa representação não foi algo imediato para todos os licenciandos da turma, tanto que apenas dois deles conseguiram realizar a representação sem nenhuma interferência. À medida que os licenciandos foram elaborando suas representações gráficas e a professora-pesquisadora fazendo suas provocações, os outros alunos compreenderam a proposta e buscaram meios para elaborar sua representação gráfica.

Salientamos que nem sempre a representação gráfica é um recurso indispensável. Como mencionam Friedlander e Tabach (2001), uma das suas limitações é que a sua utilidade como ferramenta matemática pode variar conforme a tarefa em questão. Contudo, nessa atividade, a representação gráfica foi fundamental para que os alunos pudessem se concentrar mais no domínio, contradomínio e imagem das funções representadas.

Assim, ao apresentar a representação gráfica exposta na Figura 18, sucedeu o seguinte diálogo:

Quadro 27 – Diálogo registrado durante a atividade

PP: Esse gráfico representa, de fato, a situação da venda de batatas?" **A8:** Na minha opinião, sim. Pois representei as três funções encontradas. **PP:** Isso mesmo. Ao analisar o gráfico, quais conclusões podemos retirar do problema? **A15:** Podemos perceber que a reta da função y=4x+5 jamais interceptará as outras duas retas. Ou seja, em nenhum momento compensará comprar a batata a 4,00 reais o quilo. **PP:** O que mais podemos observar? **A8:** Podemos observar as retas se interceptando no 5, que foi o que discutimos, que era quando tanto fazia comprar em um lugar ou em outro. **PP:** O que mais podemos observar? (silêncio) **PP:** Eu tenho uma observação! Temos duas retas que interceptam o eixo y no ponto 5 e uma reta que passa pela origem. O que isso significa? **A22:** Significa que se eu for no atacadão e não gostar das batatas que têm lá ou se elas estiverem em falta, mesmo assim eu vou sair no prejuízo, porque vou precisar pagar a passagem (risos). **PP:** Ótima observação, então isso quer dizer que faz sentido considerarmos x= 0, né isso? Mas, agora eu questiono pra vocês, faz sentido eu considerar x= -1? **A8:** Ahhh! Eu não me toquei nisso antes. Não faz sentido, não tem como eu comprar -1 quilo de batata.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com esse diálogo, a professora-pesquisadora buscou direcionar o questionamento para a discussão das ideias de funções relacionadas a domínio, contradomínio e imagem de uma função. Foi discutido que as funções encontradas para modelar os três casos de aquisição de batatas não estavam definidas para os valores x < 0, uma vez que não faria sentido representar quantidades negativas de quilos de batatas. Assim, as funções foram representadas da seguinte forma:

- $f(x) = 3x, em\ que\ D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}\ e\ Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
- $g(x) = 2x + 5\ em\ que\ D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}\ e\ Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 5\}$
- $h(x) = 4x + 5\ em\ que\ D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}\ e\ Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 5\}$

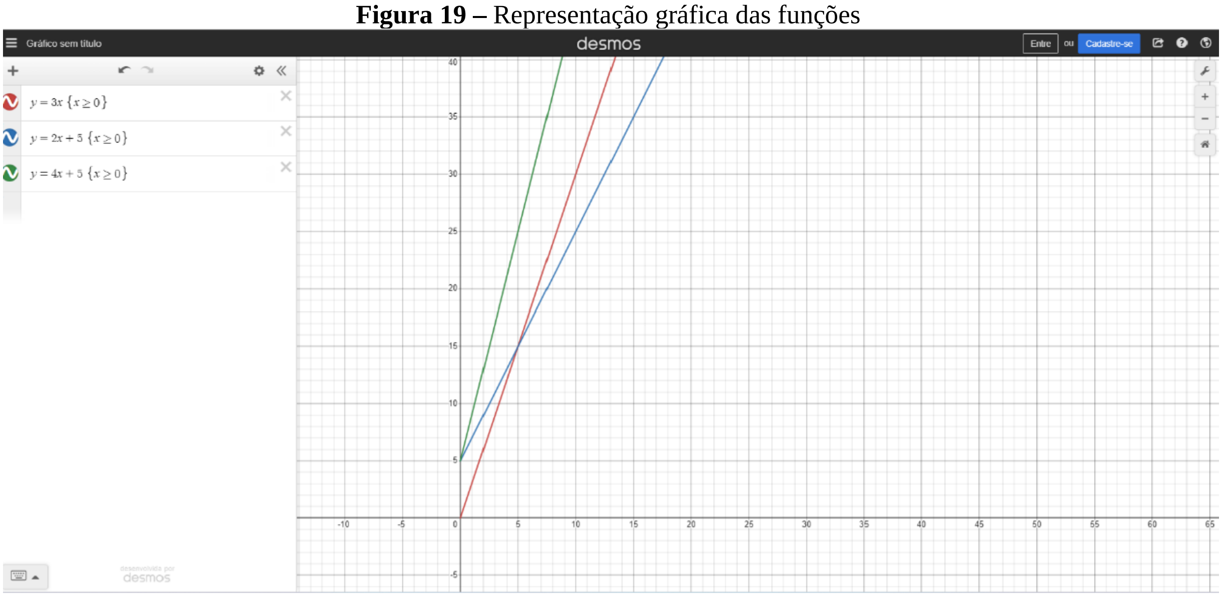
Com esse diálogo, percebemos o quanto as representações verbal, numérica e gráfica colaboraram para uma representação algébrica concisa e coerente com a situação apresentada.

A transição entre essas representações é de suma importância, pois, como aponta Martins (2019), ela favorece uma aprendizagem mais aprofundada e, consequentemente, a manifestação do pensamento algébrico.

Trabalhar a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e suas diversas possibilidades de aprofundamento matemático é um aspecto essencial a ser discutido, fundamentado e experimentado na formação inicial de professores de matemática. Como apontam Felmer e Díaz (2016) mesmo que um problema possa ter boas características para permitir ao aluno vivenciar a matemática, a forma como esse problema é trabalhado na sala de aula pode mudar completamente a sua natureza.

A partir dessa discussão, a professora-pesquisadora propôs a elaboração da representação gráfica das funções, levando em consideração os valores para os quais as funções estavam definidas. Diante disso, A19 utilizou a calculadora gráfica Desmos e representou as funções da seguinte forma (figura 19):

Figura 19 – Representação gráfica das funções

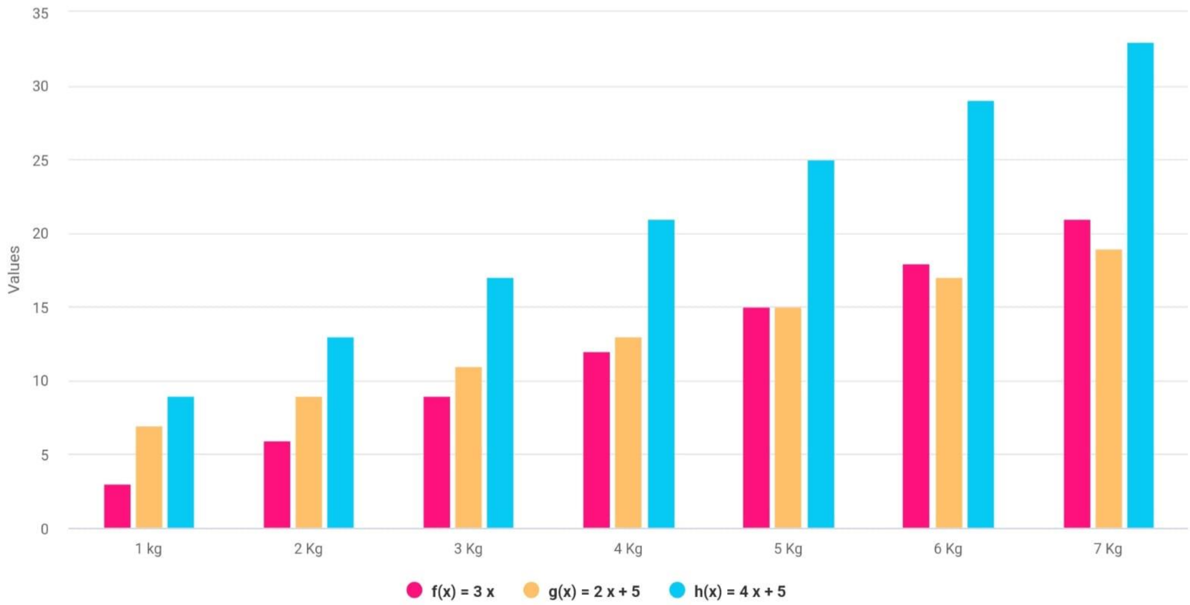


Fonte: Dados da pesquisa.

Grande parte dos licenciandos representou as funções utilizando o *software* Geogebra e a calculadora gráfica Desmos, como apresentado nas figuras 18 e 19. Entretanto, o aluno A17 abordou o problema de maneira diferente, analisando os três casos de compra de batatas separadamente, com base no quilo comprado, e representando-os em um gráfico de barras (figura 20).

Ao apresentar o gráfico da figura 20, o aluno A17 esclareceu que não estava representando as funções dadas, mas agrupando-as para ilustrar a diferença de preços por quilo comprado. Embora o gráfico apresentado não corresponda ao gráfico de uma função linear, essa multiplicidade de representações enriquece a exploração, evidenciando um aprofundamento na compreensão do problema.

Figura 20 – Representação dos três casos de compra de batatas em um gráfico de barras



Fonte: Dados da pesquisa.

Como mencionado anteriormente, a Exploração de Problemas possibilitou uma discussão com aprofundamento matemático, além de permitir adentrar em questões de natureza social. Trazendo essa discussão à baila, mencionamos alguns pontos importantes que foram destacados pelos alunos, como ressaltado no diálogo a seguir:

Quadro 28 – Diálogo registrado durante a atividade

A12: Estamos olhando muito para os números, mas não podemos esquecer que é uma situação da vida real. Embora comprando 6 kg seja mais vantajoso comprar no atacadão, podemos pensar até que ponto isso é mais vantajoso? Mesmo economizando 1 real, tem o tempo, que provavelmente será maior e o desgaste físico do deslocamento. Será que é mesmo mais vantajoso? **A13:** Além disso, comprando no quarteirão, estamos valorizando o comércio local e essa valorização pode nos trazer um retorno. **A20:** Outra coisa importante é pensar o seguinte: se for pra uma ocasião em que necessite uma quantidade maior de batatas, seria mais interessante ir ao atacadão, pois lá, poderia também comprar outros itens necessários. Mas, pra o consumo diário, talvez não tivesse a necessidade de comprar tanta batata, pois elas podem estragar com o tempo.

Fonte: Dados da pesquisa.

No contexto dessa discussão, foram mencionadas questões importantes, como a geração de emprego e de renda no bairro e ações para minimizar as pessoas em situação de vulnerabilidade social causada pelo desemprego. Esse foi um ponto muito tocante durante a pandemia, quando as pessoas ficaram, muitas vezes, impedidas de se deslocar para a aquisição de materiais e recorriam aos locais mais próximos que adotaram a opção de delivery.

Além disso, discutiu-se sobre a relevância de ser um consumidor consciente, capaz de analisar todas as vertentes que influenciam no preço final, julgar a quantidade ideal a ser comprada e o valor justo a ser pago. Também foi abordada a agricultura familiar, questionando: “Por quanto o pequeno agricultor vende as batatas para o mercado atacadista?”; “Quem ganha mais com a venda: o mercado atacadista, o produtor rural ou o mercado do quarteirão?”

Após o momento da Exploração de Problemas, foi realizada uma discussão sobre a atividade desenvolvida. A pesquisadora buscava um feedback, para compreender como a atividade da compra de batatas, desenvolvida na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, contribuiu para a formação dos futuros professores.

De acordo com a discussão, foi perceptível o envolvimento dos licenciandos com a metodologia. Foi citado, por exemplo, o quanto o contexto de um problema possibilita a compreensão dos conceitos, como aconteceu no caso da intersecção das duas retas, que representava o momento em que 5 quilos de batatas custavam o mesmo valor, tanto no mercado no quarteirão quanto no mercado atacadista. Além disso, outros aspectos foram mencionados, como a importância de discutir contextos reais a partir da Matemática.

As explorações proporcionadas pela atividade corroboram a discussão de Felmer e Díaz (2016), que destaca a necessidade de os futuros professores vivenciarem experiências reais com a matemática durante sua formação, assim como os matemáticos fazem. No debate, os autores enfatizam que o foco não está apenas em saber matemática básica ou avançada, dominar técnicas de ensino de matemática ou ter uma formação especializada para resolver problemas em sala de aula, mas consiste na experiência de vivenciar o papel de ser um matemático.

Com essa atividade, pôde-se concluir que a apresentação de uma situação para que os alunos formulassem problemas permitiu que cada um utilizasse as suas experiências e seus conhecimentos prévios para fundamentar sua Proposição de Problemas. A socialização desses problemas permite que todos os licenciandos presentes na discussão adentrassem no contexto do outro e aprendessem aspectos que, somente com as suas experiências, não seriam possíveis de perceber.

Além disso, foi notável como a criatividade é algo particular e surpreendente. A cada problema proposto, abordando uma variável diferente, os licenciandos esboçaram reações questionando “Como eu não pensei nisso?”. Isso ficou evidente quando A22, de acordo com a organização das cadeiras da sala, foi o último aluno a apresentar o problema proposto: “Com R$ 25,00, quantos kg de batata compraria no seu quarteirão? E no centro?”. Em muitos dos problemas, os licenciandos focaram em encontrar o f(x), mas não pensaram na função inversa, que foi o caso desse problema.

Por meio dessa atividade, destacamos que outras ideias matemáticas podem ser trabalhadas, como: frações, proporções, equações lineares, funções lineares, sistemas lineares, entre outras. Contudo, nosso objetivo foi discutir ideias de função afim e possibilitar a transição entre as representações múltiplas de Álgebra a partir da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

7.1.1 Inferências

A atividade 1 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. Contribui no desenvolvimento de habilidades de Proposição de Problemas dos futuros professores.
ii. Possibilita um aumento nas experiências de trabalho com problemas, permitindo que os futuros professores aprimorem o seu conhecimento sobre as ideias matemáticas abordadas em cada problema.
iii. Demonstra que a utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, favorece uma compreensão aprofundada das ideias de Álgebra;
iv. Oferece aos futuros professores a oportunidade de integrar contextos sociais nas aulas, utilizando a matemática como ferramenta.
v. Contribui para a compreensão da importância da transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra para a manifestação do pensamento algébrico.
vi. Colabora para que os futuros professores não apenas apresentem e reconheçam bons problemas, mas também dominem o uso dessa metodologia.

7.2 Atividade 2 – Os chocolates na Páscoa

A segunda atividade da nossa Unidade Temática, intitulada “Os chocolates na Páscoa”, teve a duração de dois encontros de duas horas, realizados em dois dias consecutivos, tendo a participação de 20 alunos no 1º dia e 22 alunos no 2º dia.

A motivação para o desenvolvimento desta atividade decorreu do contexto em que o curso iniciou, uma vez que começou na semana que antecedeu o Domingo de Páscoa. É perceptível que, durante a época de Páscoa, os ovos de chocolate são comuns nas prateleiras dos supermercados, nas propagandas televisivas, na internet e nas redes sociais. Além disso, o alto valor a ser pago por eles é debatido a cada ano. Dessa forma, a atividade foi planejada a partir da utilização de uma imagem divulgada na internet desde 2013 (figura 21), que compara o valor a ser pago por diversos chocolates em sua forma tradicional e no formato de um ovo de Páscoa.

Figura 21 – Comparativo entre preço de chocolates tradicionais e ovos de páscoa

Fonte: Blog Maria Vitrine (2014). Disponível em: <http://www.mariavitrine.com.br/2014/03/comprar-ovo-de-pascoa-ou-barra-de.html>. Acesso em 27 de março de 2023.

Como é possível notar, a imagem apresentada exibe preços defasados, uma vez que são referentes ao ano de 2013. No entanto, a discussão em relação ao valor a ser pago por grama no item no formato de bombom ou barra de chocolate em comparação ao formato ovo de páscoa permanece pertinente atualmente.

É importante salientar que existem diversos fatores que podem influenciar na diferença entre o preço do ovo de chocolate em relação ao chocolate no formato tradicional, como, por exemplo, o aumento da mão de obra para a produção, a embalagem, o armazenamento, o transporte, dentre outros. Nesse contexto, destacamos que essa atividade objetivou utilizar conceitos matemáticos como uma ferramenta para compreender, analisar e discutir questões do cotidiano, buscando estimular o pensamento crítico-reflexivo.

Dessa forma, preparamos a atividade para ser desenvolvida em 3 momentos, sendo eles: primeiro momento: Exploração, Proposição e Resolução de Problemas; segundo momento: Reformulação e Resolução de Problemas; e terceiro momento: pesquisa de preços atuais dos chocolates, elaboração de uma nova versão da imagem original e discussão.

No primeiro momento da atividade, os alunos foram organizados em duplas e trios e receberam a Parte 1, que tinha o seguinte enunciado: "Explore a situação e coloque suas observações em forma de problema(s)". Os alunos foram orientados que deveriam refletir sobre a situação dada, analisar, investigar e tentar explicá-la, contudo, todas as descobertas realizadas deveriam ser expostas em forma de um ou mais problemas.

Tanto na atividade 1, quanto nesta atividade, elucidamos a nossa compreensão de situação-problema, fundamentada em Cai, Hwang e Melville (2023), que mencionam que ela pode envolver contextos do mundo real ou puramente matemático. De acordo com os autores, as situações-problema podem representar informações dadas de múltiplas formas, incluindo palavras, números, tabelas e figuras, aproveitando, assim, a capacidade de os alunos interpretarem e usarem essas representações. Assim, essa atividade consiste em uma situação-problema que envolve o contexto do mundo real, apresentada em forma de imagem.

Uma pergunta muito frequente colocada pelos alunos, tanto na atividade 1, quanto nesta atividade, foi a seguinte: "é só pra propor ou é pra responder também?" Neste momento, a professora-pesquisadora salientou a importância de os alunos não somente proporem, mas também resolverem o problema proposto, pois, dessa forma, eles teriam a possibilidade de fazer uma análise e uma avaliação desse problema, verificando se era um problema coerente e/ou se era necessária uma reformulação.

Ao final deste momento, todos os grupos apresentaram os problemas propostos e foi realizada a discussão da atividade. Ao todo, tivemos 9 grupos, os quais propuseram os seguintes problemas:

Quadro 29 – Problemas propostos pelos alunos na atividade 2

Grupos	**Problemas**
A4 e A6	1. Tomando como exemplo o BIS, quanto economizaríamos se comprássemos 2 caixas de BIS, ao invés do Ovo? Sabendo que 2 caixas de BIS já contêm maior quantidade de gramas que o peso de um Ovo.
A17, A19 e A24	1. Uma cliente deseja gastar com um ovo de Páscoa e outros chocolates presentes no catálogo. De quantas maneiras distintas a cliente pode obter seus chocolates sem que haja repetições de marca ou unidades?
A7, A12 e A20	1. Um casal tem dois filhos, eles pretendem presentear cada filho com um ovo de Páscoa e com o máximo de chocolates que o orçamento do casal permitir. Eles desejam gastar R$70,00 no total. Qual a melhor opção de compra para que cada filho coma o máximo de diversos chocolates?

A9 e A10	1. Em uma escola no interior da Paraíba, um professor quer distribuir uma lembrancinha de páscoa para uma turma com 40 alunos. Ele tem um valor estipulado de R$85,00. a) Com o valor estipulado o que daria para comprar para cada um dos seus alunos que não ultrapassasse o valor? b) Se ele fosse distribuir barras de chocolate, quanto ele gastaria? Ultrapassaria o valor?
A5 e A11	1. Em cada produto de mesmo tipo de chocolate, relacione e descubra o preço dos produtos com o preço pago por cada grama. Em qual tipo de chocolate você está pagando mais caro o preço por grama?
A14, A15 e A16	1. Quantos vezes poderia comprar todos os produtos (caixa, barra, bombom, unidade) para equivaler a compra dos 5 ovos disponíveis em relação ao peso e ao preço? 2. Calcule a equivalência entre a unidade do batom e o ovo Prestígio em relação ao preço e ao peso.
A13, A18 e A23	1- Aparecida tem R$ 200,00 para comprar de chocolates ou ovos para seus 30 alunos. a) Quantos chocolates de cada sabor no formato tradicional ela conseguiria comprar? b) Quantos ovos de cada sabor ela conseguiria comprar? c) Em algum caso irá sobrar dinheiro? Se sim, em qual caso e quanto? d) Em qual(is) casos a quantidade será suficiente/necessário para os alunos? e) Em algum dos casos irá sobrar chocolates ou ovos? Em quais e quantos?
A2 e A13	1. Se formos buscar custo benefício, qual valor das gramas dos chocolates? E dos ovos que tem o mesmo sabor? Qual vale mais a pena?
A8 e A22	1. Suponha que um confeiteiro deseja derreter barras de chocolate de 170g para produzir e vender ovos de chocolate de 250g cada. As opções de barra de chocolate são: Diamante Negro, por R$3,79 e Alpino, por R$3,99 cada. Considere também que as barras estejam na seguinte promoção: pague R$10,00 comprando 3 unidades do Diamante Negro ou 4 unidades do Alpino. Agora responda: a) Ao comprar sete barras de cada sabor, quanto o confeiteiro pagará? Em qual dos casos será mais lucrativo? Qual o lucro? b) Supondo que o confeiteiro deseja produzir e vender 340 ovos de páscoa escolhendo apenas uma das opções de barra de chocolate, qual será mais lucrativo? Qual o lucro?

Fonte: Dados da pesquisa.

Os grupos apresentaram esses problemas e, a partir deles, iniciamos a discussão a respeito da situação apresentada na atividade. É importante salientar que, neste primeiro momento, não houve uma resolução de problemas coletivamente, mas, sim, uma resolução individualizada por cada grupo durante a Exploração e Proposição de Problemas. Após a apresentação dos problemas, a professora-pesquisadora questionou cada grupo sobre os conceitos matemáticos que pretendiam abordar ao propor esses problemas.

Foi notório que grande parte dos grupos havia pensado na situação a qual iria abordar em seu problema, mas não havia refletido sobre os conceitos que poderiam contemplar com o problema proposto. Contudo, essa é uma reflexão importante, pois, no ensino de matemática através da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, tem-se uma preocupação constante com o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Assim, foi um momento em que os outros grupos colaboraram e mencionaram sobre conceitos que poderiam ser abordados, como podemos ver no quadro 30 a seguir.

Quadro 30 – Conceitos matemáticos abordados nos problemas propostos

Grupos	Conceitos matemáticos
A4 e A6	Regra de três; matemática financeira; equações de 1º grau.
A17, A19 e A24	Arranjo;
A7, A12 e A20	Operações aritméticas; equações e sistemas lineares;
A9 e A10	Divisão; multiplicação;
A5 e A11	Regra de três;
A14, A15 e A16	Operações aritméticas; equações de 1º grau; regra de três;
A13, A18 e A23	Divisão; subtração;

A2 e A13	Proporção de grandezas; fração e comparação.
A8 e A22	Operações aritméticas; matemática financeira

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Dando continuidade à discussão, a professora-pesquisadora questionou: vocês considerariam adequado levar essa atividade para o contexto da sala de aula, na Educação Básica? E seguiu, então, uma discussão de concordância, como podemos observar nas falas que destacamos a seguir:

Quadro 31 – Diálogo entre alunos

A24: É uma atividade adequada para a Educação Básica, que podemos trabalhar nos diversos anos, uma vez que é uma situação que nos deparamos no cotidiano, mas que pode ser abordada em diversos níveis de complexidade.
A14: Eu diria que é uma atividade necessária que pode se constituir um símbolo de desconstrução de padrões, em que as pessoas alimentam uma cultura de que a páscoa deve ser comemorada com ovo de páscoa, esquecendo o verdadeiro sentido, e o que está por trás disso. Podemos nos perguntar, quem ganha com essa cultura? É a mesma coisa do Natal, em que temos o panetone como símbolo principal. Quem ganha com essa cultura?
A17: Eu acho que vai muito das condições financeiras da pessoa, há pessoas muito ricas que pouco importa o preço a pagar pelo ovo de páscoa, por outro lado, há pessoas muito pobres que não tem condições de comprar o alimento do dia a dia, imagina ovo de páscoa. Então, se a pessoa tem condições financeiras mediana, ela pode comprar o chocolate tradicional para os seus filhos e mostra-los que essa é uma opção mais vantajosa.
A20: Uma alternativa para não pagar tão caro por um ovo de chocolate, é você aderir aos ovos feitos pelas pessoas da própria cidade. São ovos de valores acessíveis e, muitas vezes, usam produtos de excelente qualidade na produção.
A9: O problema é que muitas pessoas pensam na postagem nas redes sociais, então acha que será mais elegante presentear com um ovo mais caro, mesmo que a pessoa divida a compra em 6 vezes.
A3: Eu concordo que por meio dessa atividade podemos possibilitar uma reflexão no aluno e desenvolver um pensamento crítico, para que ele entenda que não é obrigado ter como objeto de desejo um item que por estar em formato de ovo, ele paga, por exemplo, cinco vezes a mais do que se comprasse no seu formato original. O sabor é o mesmo!
A19: É importante trabalhar isso com crianças, que as vezes criam até traumas por nunca terem ganhado ovo de páscoa.

Fonte: Dados da pesquisa.

Esses pontos destacados na discussão são importantes para refletirmos sobre o papel da matemática como ferramenta para compreender, analisar e discutir questões do cotidiano, buscando estimular o pensamento crítico-reflexivo. Além disso, a discussão também possibilitou uma reflexão sobre o consumo consciente e sobre uma cultura que vem se disseminando, em que as pessoas tem a necessidade de alimentar uma aparência, na maioria das vezes, nas redes sociais, para atender padrões e/ou demonstrar participar de classes sociais as quais não fazem parte.

Voltando o nosso olhar para a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, destacamos a importância da realização das discussões entre aluno-aluno e professor-aluno, as quais são fundamentais no desencadear dessa proposta. Como menciona Andrade (2017), a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas não é olhada apenas no nível de processos e conceitos matemáticos, mas também no que tange a questões de natureza sócio-político-cultural.

Fazemos esse destaque, pois acreditamos que, se a atividade estivesse sido finalizada no problema proposto, não teríamos conseguido perpassar por temas que vão além da matemática, e, assim, não teríamos subsídios para evidenciar que alcançamos o objetivo da atividade. Além disso, destacamos que o momento de discussão possibilitado durante a Exploração de Problemas foi importante para proporcionar uma maior reflexão sobre o processo realizado, buscando, também, despertar o pensamento crítico-reflexivo em outros alunos que, inicialmente, não haviam pensado por essa vertente.

Crespo (2015) discute que o ensino de matemática por meio da Proposição de Problemas incentiva os alunos a usarem a matemática para propor e responder problemas que são profundamente pessoais e socialmente relevantes. No entanto, esse incentivo não é natural, ele requer a estimulação do professor. Isso ficou evidente nessa atividade, uma vez que, inicialmente, não identificamos a presença de elementos sociais nos problemas propostos. Contudo, após o momento de discussão, notou-se uma atenção especial por parte dos alunos a essas questões, que foram consideradas quando reformularam os problemas, como veremos a seguir.

Acreditamos que esses aspectos não foram considerados inicialmente, pois, embora a Proposição de Problemas colabore na abordagem de questões sociais, essa abordagem não é habitual. Como menciona Andrade (2017), ao longo da história e na atualidade, as pesquisas e práticas de Resolução de Problemas não se detiveram/detém em questões de natureza sócio-política e cultural, elas mantiveram/mantém o foco principal em questões de natureza cognitiva, conceitual e processual, sem adequação à perspectiva de Educação Crítica.

Isso também foi percebido por Crespo (2015), ao desenvolver uma pesquisa com um grupo de futuros professores de matemática. A autora afirma que, quando questionou se os alunos já haviam discutido ou considerado que o estudo da matemática também poderia incluir tópicos que são relevantes para o mundo social dos alunos, a resposta de todos foi que eles não vivenciaram isso como alunos da Educação Básica, nem durante o curso de Licenciatura em Matemática que estavam cursando.

No segundo momento da atividade, realizamos a atividade de Reformulação e Resolução de Problemas. Na ocasião, cada grupo escolheu um problema proposto pelos outros grupos e buscou contribuir para o refinamento desse problema, apresentando uma nova redação, em um nível que julgasse mais adequado e/ou aprofundado e que considerasse os aspectos sociais discutidos. Ao realizarem essa tarefa, os alunos apresentaram o problema reformulado e a sua resolução. Dentre os problemas reformulados pelas duplas, destacamos os seguintes:

Quadro 32 – Problema original e problema reformulado pelos licenciandos

Problema Original	
A2 e A13	Se formos buscar custo benefício, qual valor das gramas dos chocolates? E dos ovos que tem o mesmo sabor? Qual vale mais a pena?
Problema Reformulado	
A9 e A10	Uma mãe que recebe um salário mínimo deseja presentear suas três filhas nesta páscoa, tendo em vista o custo benefício entre os chocolates tradicionais e os ovos de páscoa que tem o mesmo sabor, qual vale mais a pena ela realizar a compra? Explique.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao reformular o problema proposto pelos alunos A2 e A13, os alunos A9 e A10 explicaram que, diante da discussão, procuraram trazer o problema proposto para um contexto real, buscando despertar no aluno uma visão crítica voltada para o custo benefício dos chocolates em questão. De acordo com os alunos, esse tipo de problemática é importante ser discutida pela sociedade como um todo, de modo a descontruir padrões impostos pela mídia.

O problema elaborado pelo trio A14, A15 e A16 foi escolhido para ser reformulado por dois grupos, sendo que cada grupo reformulou um problema, como podemos ver a seguir:

Quadro 33 – Problemas originais e problemas reformulados pelos licenciandos

Problemas Originais	
A14, A15 e A16	1. Quantos vezes poderia comprar todos os produtos (caixa, barra, bombom) para equivaler a compra dos 5 ovos disponíveis em relação ao peso e ao preço? 2. Calcule a equivalência entre a unidade do batom e o ovo Prestígio em relação ao preço e ao peso.
Problemas Reformulados	
A4 e A6	1. Levando em consideração os preços e pesos informados na imagem, responda: a) Quantas vezes de cada produto (caixa, barra, bombom) poderia comprar para que equivalha ao mesmo valor da soma de todos os ovos disponíveis na tabela?
A17, A19 e A24	2. Uma família que vive com um salário mínimo deseja comprar chocolate para seus três filhos. No supermercado, fazendo uma análise entre o batom e o ovo prestígio, observou-se que com o preço cobrado, teria mais vantagens comprar o batom. Por quais motivos eles chegaram a essa conclusão? Construa um gráfico com a análise dos dados.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos A4 e A6 reformularam o problema buscando tornar a redação mais clara, uma vez que, inicialmente, o problema apresentava diversas interpretações. Esse ponto observado pelos alunos A4 e A6 foi relevante para enfatizarmos que o problema precisa ser claro, objetivo e conciso, e que, mesmo que ele possa ter diferentes caminhos para a solução, não é relevante que o enunciado propicie uma compreensão dúbia.

Dante (2000) já trazia essa discussão, apontando quais as características que devemos evitar ao propor um problema, dentre elas, estão: i) Duplicidade de interpretação; ii) Questões com a intenção de induzir ao erro; iii) Textos muito longos e cansativos, desnecessários ou irrelevantes na construção da questão; iv) Repetição de comandos ou estilo; v) Sensação de interrogatório ou preenchimento de cadastro.

Os alunos A17, A19 e A24 reformularam o problema de modo semelhante aos alunos A9 e A10, buscando trazer o problema para um contexto real, o qual, segundo eles, seria uma forma de inserir os alunos na ação matemática. Um aspecto interessante que esses alunos apresentaram é que eles próprios retiram a conclusão, mas pedem que os alunos expliquem o motivo pelo qual chegaram a essa conclusão. Outro aspeto relevante deste problema é a solicitação de que esta análise seja apresentada de forma gráfica. De acordo com os alunos A17, A19 e A24, essa representação pode contribuir para uma melhor compreensão sobre as vantagens e desvantagens dessa aquisição.

O problema a seguir, elaborado pelos alunos A7, A12 e A20, foi escolhido para ser reformulado por dois grupos, como podemos ver:

Quadro 34 – Problema original e problemas reformulados pelos licenciandos

Problema Original	
A7, A12 e A20	1. Um casal tem dois filhos, eles pretendem presentear cada filho com um ovo de Páscoa e com o máximo de chocolates que o orçamento do casal permitir. Eles desejam gastar R$70,00 no total. Qual a melhor opção de compra para que cada filho coma o máximo de diversos chocolates? Observação: A resposta será com base no preço da grama de cada chocolate e de seu respectivo ovo de páscoa.
Problemas Reformulados	
A13, A18 e A23	1. Um casal tem dois filhos e para aproveitar a chegada da páscoa e das avaliações bimestrais, decidiram presenteá-los a depender das notas em Matemática. Se atingirem a média 7,0, ganharão ovos de diamante negro. Se a média for 10,0, terão direito a escolher o sabor. Se a média for menor que 7,0, só ganharão 3 chocolates batom. Quanto os pais gastarão em cada um dos casos possíveis?
A5 e A11	1. Um casal tem dois filhos, eles pretendem presentear cada filho com um ovo de Páscoa e com o máximo de chocolates que o orçamento do casal permitir. Visto que eles recebem apenas R$ 600,00 do auxílio Brasil, eles pretendem gastar R$ 80,00. Qual a melhor opção de compra para que cada filho coma o máximo de diversos chocolates?

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com os alunos A13, A18 e A23, o problema original apresentava uma diversidade de possibilidades, o que poderia tornar a resolução cansativa. Diante disso, resolveram reformular o problema, adicionando algumas condições, o que minimizaria a quantidade de possibilidades e poderia tornar o problema mais real.

A observação apresentada pelos alunos A13, A18 e A23 nos remete à discussão sobre coerência didática (Abramovich; Cho, 2015), mais especificamente, sobre a coerência pedagógica. Os autores enfatizam que esse tipo de problema deve ser evitado, uma vez que, dependendo do nível, um problema com diversas soluções pode facilmente desmotivar o aluno, pois torna a atividade cansativa.

A reformulação realizada pelos alunos A5 e A11 buscou acrescentar uma informação que situasse o leitor do problema no contexto social ao qual o casal pertence. O problema original apresentava um valor disponível no orçamento para ser utilizado na Páscoa, mas não permitia a compreensão de quanto percentual desse orçamento disponível corresponde à renda máxima do casal. Na reformulação, essa informação ficou mais clara e proporcionou uma melhor visualização.

Com essas reformulações e com as outras que não foram citadas no corpo do texto deste trabalho, podemos perceber o envolvimento dos alunos na atividade, buscando lapidar o problema o máximo possível. Nesse contexto, percebemos que a Exploração de Problemas potencializou a Proposição de Problemas, já a Resolução de Problemas foi uma ferramenta que operacionalizou todo o trabalho.

Em grande parte dos problemas reformulados, ficou perceptível que os alunos buscaram trazer a dimensão social para os problemas. Acreditamos que isso se deu dada a discussão realizada anteriormente. Essa consideração é importante, pois, como menciona Andrade (2017), o professor de matemática deve ser pensado como um pesquisador e intelectual crítico/pós crítico, capaz de problematizar e de produzir conhecimentos sobre suas práticas, considerando as condições sociais, culturais, históricas e políticas do contexto em que estiver inserido.

Analisando os aspectos metodológicos, podemos afirmar que, durante o primeiro e o segundo momento da atividade, ficou notória a inseparabilidade da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, uma vez que o trabalho com uma complementa, colabora e potencializa o trabalho da outra. Mesmo que no primeiro momento o objetivo tenha sido a Proposição de Problemas, esse trabalho não seria possível sem a Exploração de Problemas. Da mesma forma, a Resolução de Problemas esteve presente em todo o processo, pois, como menciona Crespo (2015), não podemos falar em propor problemas sem buscar resolvê-los.

Ao final desse encontro, demos início ao terceiro momento da atividade, que foi realizado fora da escola. Na ocasião, os alunos foram convidados a fazer uma pesquisa dos preços atuais dos chocolates e ovos de Páscoa, podendo ser aqueles que estavam na imagem ou outros chocolates da preferência deles. Essa pesquisa de preços poderia ser realizada por meio da internet, ou através de uma visita aos supermercados. A partir dos dados obtidos nessa pesquisa, sugeriu-se que elaborassem uma nova versão da imagem original apresentada no início da atividade para ser apresentada no encontro seguinte.

No terceiro momento, que aconteceu no encontro seguinte, os alunos apresentaram a imagem 22, a seguir, com a atualização da imagem original apresentada no início da atividade, na qual fizeram o comparativo dos chocolates utilizando os preços do ano 2023. Salientamos que a pesquisa de preço foi elaborada por toda a turma, em que cada grupo ficou responsável por um tipo de chocolate. Ao final dessa pesquisa, os alunos se reuniram e elaboraram a imagem final.

Figura 22 – Comparativo do preço dos chocolates tradicionais e ovos de páscoa

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao projetarem a imagem, a professora-pesquisadora questionou: “sabendo que, em abril de 2013, o salário-mínimo era de 678,00 e, em abril deste ano, 2023, o salário-mínimo é de 1.302,00, o que vocês podem concluir com essa atualização de preços dos chocolates?”

Quadro 35 – Diálogo entre alunos

A18: Se analisarmos, nesses 10 anos, o salário mínimo praticamente dobrou, e se olharmos para o BIS por exemplo, ele mais que dobrou. Então não teve um aumento proporcional. **A9:** Isso só mostra o quanto o brasileiro tem perdido o seu poder de compra ao longo dos últimos anos, pois o salário mínimo não tem acompanhado a inflação.

Fonte: Dados da pesquisa.

Neste momento, prosseguiu-se o diálogo relacionado à qualidade de vida dos brasileiros, que tem sido impactada, diretamente, nos últimos anos. Foi mencionado que tem sido observado que o setor de alimentação vem sendo o mais afetado com o aumento dos preços, e é, justamente, o setor que mais necessitamos para a nossa sobrevivência.

Em meio a essa discussão, a professora-pesquisadora questionou aos alunos quanto cada ovo de Páscoa equivalia do salário-mínimo, em 2013, e, em 2010, o que resultou na seguinte tabela:

Tabela 2 – Comparativo de preço dos ovos de Páscoa nos anos 2013 e 2010

Ovo de Páscoa	Bis		Baton		Alpino		Prestígio		Sonho de valsa	
2013	19,99	2,94%	22,99	3,39%	29,99	4,42%	32,99	4,86%	29,99	4,42%
2023	49,99	3,84%	49,99	3,84%	49,99	3,84%	39,99	3,07%	39,99	3,07%

Fonte: Dados da pesquisa.

Os valores do diamante negro foram os mesmos do valor do Bis, por esse motivo, não foi inserido na tabela. Além disso, outros ovos de páscoa que estavam na imagem atualizada, como KitKat, Lacreme e Laka, não foram inseridos na tabela comparativa de preços, pois, na imagem original, não tínhamos a presença desses ovos, assim, não tínhamos uma informação segura do preço cobrado por esses produtos no ano 2013.

De acordo com a tabela, a turma pôde retirar as seguintes conclusões: i) em 2013, o ovo que equivalia a um menor percentual do salário-mínimo era o Bis, o que não se repetiu em 2023, pois ele teve um aumento de 150 %; ii) ainda em 2013, o ovo Prestígio era o ovo que equivalia a um maior percentual do salário-mínimo, o que também não se repetiu em 2023, quando passou a equivaler 3,07% do salário mínimo; iii) essa queda também se repetiu no ovo Alpino, que, em 2013, equivalia 4,42 % do salário-mínimo e, em 2023, passou a equivaler 3,84 %; iv) tanto a queda quanto o aumento está relacionada à procura pelos ovos e à quantidade de vendas realizadas.

A partir dessa discussão, foi mencionado sobre métodos conhecidos pelos alunos, chamados de "método 60 20 20" e "método 50 30 20", que consistem em dividir o salário de acordo com esses percentuais para uma melhor organização financeira. A maior parte do método é destinado para despesas essenciais, as outras duas partes são divididas em prioridades financeiras e gastos com diversão e lazer. Nesse caso, ovo de páscoa entraria em gastos com diversão e lazer. A aula foi finalizada com a seguinte reflexão deixada pelos alunos: "será que, com o valor cobrado por um ovo de Páscoa, não teríamos uma outra opção de alimentação/sobremesa/doce que seja mais saborosa/prazerosa e/ou que cobrasse um preço mais justo?"

7.2.1 Inferências

A atividade 2 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. Possibilita utilizar a matemática como uma ferramenta para abordar e discutir questões sociais, de modo a despertar o pensamento crítico-reflexivo dos alunos.
ii. Evidencia que a mediação do professor é indispensável para atingir os objetivos propostos em uma atividade, esclarecendo que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é uma metodologia aberta, mas não solta.
iii. Proporciona experiências com a reformulação de problemas, o que nos faz refletir sobre as características que devemos considerar e evitar ao propor um problema, colaborando também para a elaboração e/ou seleção de problemas a serem trabalhados na sala de aula.

7.3 Atividade 3 – Adivinhando Pensamentos

A atividade descrita a seguir foi realizada, inicialmente, em nossa pesquisa exploratória e discutida no tópico 6.2. Em nossa pesquisa pedagógica, a desenvolvemos novamente, objetivando estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. De modo específico, essa atividade nos permitiu analisar as habilidades dos futuros professores em propor problemas.

Quadro 36 – Atividade utilizada na pesquisa

Atividade 3

André gosta de impressionar as pessoas fazendo adivinhações. Ele consegue descobrir o número pensado por uma pessoa. Observe a conversa entre ele e Fernando no diálogo apresentado na figura abaixo.

Fonte: Bianchini (2018, p. 133).

Consoante os mesmos princípios metodológicos utilizados na pesquisa exploratória, realizamos essa atividade em nossa pesquisa pedagógica em dois encontros de 2 horas, em dias consecutivos. A atividade foi dividida em dois momentos: o primeiro, realizado no primeiro encontro, tendo como ponto de partida a Exploração de Problemas; o segundo, realizado no segundo encontro, tendo como ponto de partida a Proposição de Problemas.

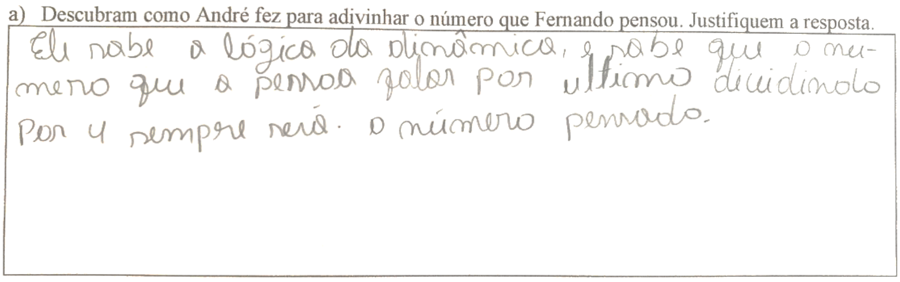
Assim como nas atividades 1 e 2, esta atividade consiste em uma situação-problema que envolve um contexto da vida real. Contudo, embora seja um diálogo da vida real, ela pode ser representada em um contexto puramente matemático. Assim como destacam Cai, Hwang e Melville (2023), o contexto puramente matemático pode fornecer uma oportunidade para os alunos explorarem as características abstratas da matemática e relacioná-las ao seu conhecimento já existente.

No primeiro momento da atividade, a professora-pesquisadora apresentou a atividade 3 (quadro 36) aos 22 alunos presentes. A leitura conjunta sugeriu que os alunos, em trios, refletissem sobre a situação-problema, a fim de compreender e explicar o que estava acontecendo que permitia que André adivinhasse os pensamentos. Os alunos começaram a explorar a atividade e a perceber as relações matemáticas presentes no diálogo, o que possibilitava que André encontrasse o número pensado.

Os alunos compreenderam que não se tratava de uma adivinhação baseada em pensamentos, uma vez que bastava dividir o último resultado pelo número 4 para obter o número desejado. Diante dessa descoberta, a professora-pesquisadora questionou aos alunos: "se basta dividir o resultado final pelo número 4, qual o papel de todos os comandos dados por André no decorrer do diálogo?" A professora-pesquisadora fez esse questionamento, pois percebeu que muitos trios ainda não tinham compreendido a essência do problema, estavam se limitando ao resultado final.

Essa percepção pode ser exposta no registro do trio 1, como podemos ver na imagem a seguir. Para eles, a "lógica da dinâmica" consistia em dividir o último resultado do diálogo por 4 e, assim, chegariam ao número pensado.

Figura 23 – Registros da resolução do trio 1


a) Descubram como André fez para adivinhar o número que Fernando pensou. Justifiquem a resposta.

Ele sabe a lógica da dinâmica, e sabe que o nu-mero que a pessoa falar por ultimo dividindo-lo por 4 sempre será. o número pensado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse registro, não podemos afirmar que houve uma expressão de um pensamento algébrico, uma vez que não estava explícita uma relação entre todas as partes do problema. Assim, a professora-pesquisadora repetiu o questionamento: "se basta dividir o resultado final pelo número 4, qual o papel de todos os comandos dados por André no decorrer do diálogo?".

Diante disso, o trio 1 mencionou a presença das operações inversas no diálogo, em que, quando ele pede para dobrar o número pensado, adicionar 10 e multiplicar por 4, encontra-se o número 80. Quando ele pede para subtrair 40 e dividir por 2, ele anula as operações realizadas, ficando apenas o número pensado multiplicado por 4. A partir dessa segunda explicação, podemos evidenciar a manifestação do pensamento algébrico, uma vez que, a partir da oralidade, o trio expressa as diferentes relações entre as partes do problema (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993; Almeida, 2016).

Essa observação também foi colocada pelo trio 2, que explica sua descoberta no registro a seguir:

Figura 24 – Registros da resolução do trio 1

a) ·Descubram como André fez para adivinhar o número que Fernando pensou. Justifiquem a resposta.

Quando ele manda o amigo dobrar e dividir por dois, eles se anulam, quando ele adiciona e 10 e faz a multiplicação por 4, 10.4 = 40, e quando ele subtrai 40 eles se anulam, mas como houve a multiplicação por 4, para anular é necessário dividir por 4.

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir desses registros, podemos evidenciar indícios da manifestação do pensamento algébrico desses alunos, uma vez que eles estabeleceram relações entre as partes do problema e expressaram por meio da oralidade, representações verbais e aritméticas. De acordo com Almeida (2016), a capacidade de estabelecer relações está no centro das características do pensamento algébrico, sendo ela a primeira característica desenvolvida e revelada por um sujeito.

Outros trios também tiveram essa percepção, contudo, a professora-pesquisadora percebeu que muitos alunos estavam limitados às operações aritméticas, não abrangendo a situação para um caso geral. Diante disso, ela realizou o seguinte questionamento: “o fato de o diálogo expor que o número pensado por Fernando foi 5 facilitou as descobertas de vocês? Caso vocês não soubessem qual foi o número pensado, seria possível descobrir como André faz para adivinhar números?”

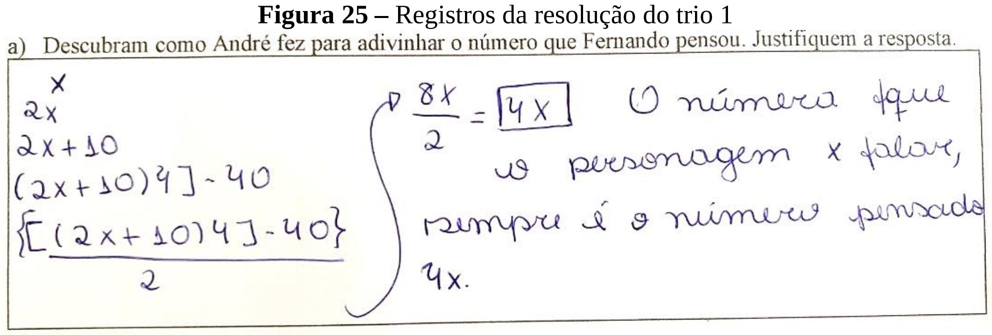
A partir desse questionamento, a professora-pesquisadora estimulava a generalização do problema, incentivando que os alunos modelassem o problema algebricamente. Dessa forma, seria possível afirmar que os alunos contemplaram os outros elementos do pensamento algébrico, definidos por Almeida (2016), sendo eles: generalizar, modelar, construir significado e operar com o desconhecido.

Esses questionamentos provocaram uma divisão entre a turma, uma vez que os alunos que estavam limitados ao caso particular, representando apenas numericamente, demoraram a perceber o que estava acontecendo, o que demandou mais tempo para uma análise aprofundada. Nesse contexto, podemos afirmar a presença da limitação da Representação Numérica mencionada por Friedlander e Tabach (2001), os quais destacam que, nessa representação, alguns aspectos ou soluções importantes de um problema podem ser perdidos.

Salientamos que a menção a essa desvantagem não desmerece o seu uso, uma vez que, como os autores discutem, todas as representações apresentam vantagens e limitações. Nessa resolução, por exemplo, também consideramos a vantagem da Representação Numérica mencionada por Friedlander e Tabach (2001), que a consideram relevante para a compreensão inicial de um problema e para a investigação de casos particulares. Outra vantagem que pode ser mencionada nessa resolução é que ela é vista como uma ponte eficiente para Álgebra (Friedlander; Tabach, 2001). Todavia, é importante notar que nem sempre essa ponte é algo natural para todos os alunos. Nessa atividade, por exemplo, ela foi fundamental para alguns alunos, já outros, não fizeram a associação entre a representação numérica e algébrica.

Após a mediação da professora-pesquisadora, outros grupos compreenderam a estrutura algébrica do problema e o modelaram, expressando, dessa forma, o motivo pelo qual André conseguiria adivinhar números, como podemos observar no registro a seguir:

Figura 25 – Registros da resolução do trio 1



Fonte: Dados da pesquisa.

O trio foi convidado para ir ao quadro, pois seria uma forma de toda a turma acompanhar o raciocínio deles. Durante a apresentação, foi percebido que outros trios também seguiram raciocínio semelhante, representando a situação algebricamente.

Finalizado o primeiro momento, partimos para a proposta do segundo momento, a ser apresentada no encontro seguinte. Assim, os alunos ficaram encarregados de elaborar uma regra que possibilitasse "adivinhar números".

No encontro seguinte, cada trio trouxe a sua regra e a aula deu início com as apresentações desses desafios (quadro 37). Nesse encontro, estiveram presentes 6 trios.

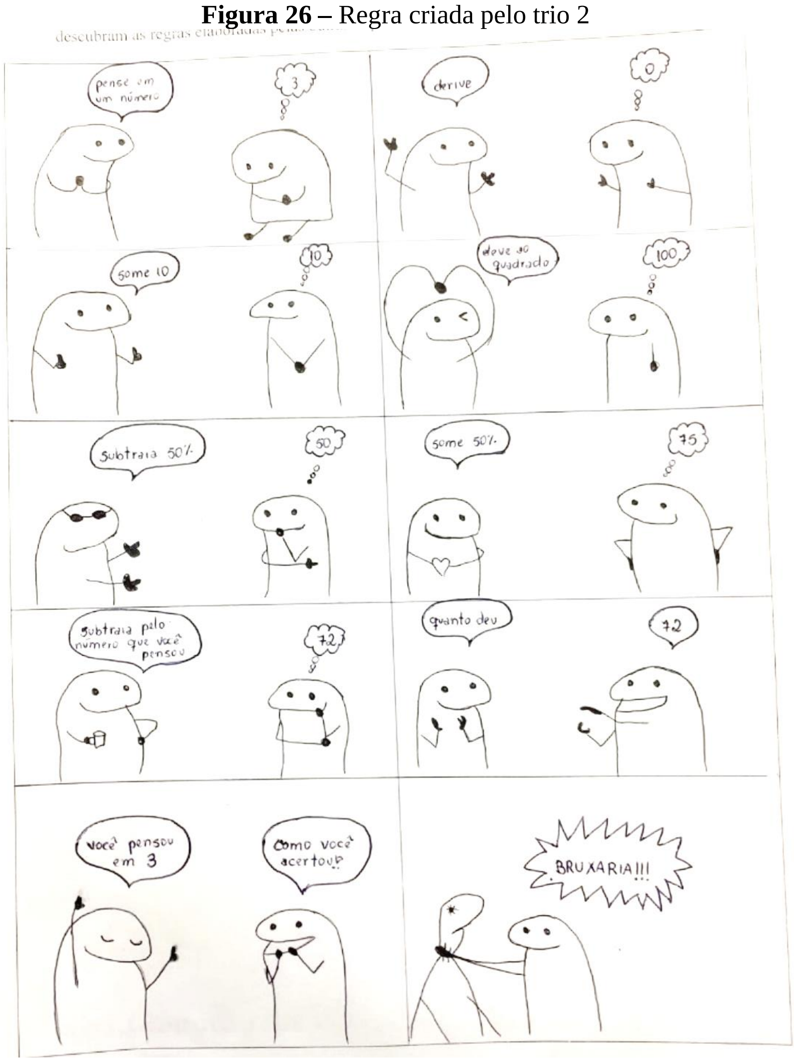
Quadro 37 – Problemas elaborados pelas duplas

Trio	Desafio	Representação algébrica	Observações da pesquisadora
Trio 1	1º Pense em um número natural 2º Adicione 1 3º Multiplique por 10 4º Divida por 5 5º Subtraia pelo sucessor do número pensado 6º Qual o valor encontrado?	$y = \frac{(x+1)10}{5} - (x+1)$ $y = \frac{10x}{5} + \frac{10}{5} - x - 1$ $y = 2x + 2 - x - 1$ $y = x - 1$	O número pensado será o resultado encontrado somando mais 1.
Trio 2	1º Pense em um número 2º Derive ele 3º Some 10 4º Eleve ao quadrado 5º Subtraia 50 % 6º Some 50 % 7º Subtraia pelo número que você pensou 8º Quanto deu?	$y = (0 + 10)^2 - 50 + 25 - x$ $y = 100 - 50 + 25 - x$ $y = -x + 75$	Ao derivar qualquer constante, o valor é zero. Assim, o cálculo inicia-se com 0. Seguindo a sequência de passos, o resultado sempre será 75 menos o número pensado. Portanto, para descobrir o número pensado, basta diminuir o resultado de 75.
Trio 3	1º Pense em um número maior ou igual a 1 2º Multiplique por 2 3º Some 5 4º Multiplique por 10 5º Some 50 6º Subtraia 100 7º Qual o resultado?	$y = (2x + 5)10 + 50 - 100$ $y = 20x + 50 + 50 - 100$ $y = 20x$	Para descobrir o número pensado, basta dividir o resultado por 20.
Trio 4	1º Pense em um número de 1 a 10 2º Multiplique por 9 3º Some o primeiro e o segundo algarismo do resultado (se o número tiver só um algarismo, como o 9, seve-se somar com o 0. 4º Adicione 4 ao resultado 5º O resultado deu 13	Não há representação algébrica. Temos as seguintes possibilidades de resolução: a) 1.9 = 9 b) 2.9 = 18 c) 3.9 = 27 d) 4. 9 = 36 e) 5. 9 = 45 f) 6.9 = 54 g) 7.9 = 63 h) 8.9 = 72 i) 9.9 = 81 j) 10.9 = 90	O conjunto de números pensados foi limitado de 1 a 10. Sendo assim, se multiplicarmos qualquer número por 9, teremos os seguintes múltiplos: M (9) = {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90}. Como a soma dos dois algarismos desses múltiplos é igual a 9, somando-se 4, teremos o resultado igual a 13.
Trio 5	1º Pense em um número natural n 2º Derive em relação a x, na expressão nx² + k 3º Some com √100 4º Multiplique por 2² e por 2º 5º Subtraia 40 6º Divida por √4 7º Qual o resultado?	$y = \frac{[\left((2nx) + \sqrt{100}\right) 4.1] - 40}{2}$ $y = \frac{8nx + 40 - 40}{2}$ $y = 4nx$	Ao derivar a expressão dada, iniciamos o cálculo com 2nx. A partir dos comandos dados, teremos a equação y= 4nx. Portanto, para descobrir o número pensado n, basta dividir o resultado por 4x.
Trio 6	1º Pense em um número 2º Eleve ele ao quadrado 3º Some com √4 4º Subtraia 2 5º Multiplique por √9 6º Divida por √9 7º Qual o resultado?	$y = \frac{(x^2 + \sqrt{4} - 2)\sqrt{9}}{\sqrt{9}}$ $y = x^2$	O número pensado será a raiz do resultado encontrado.

Fonte: Dados da pesquisa.

É importante salientar que, além da criatividade empregada na criação de regras para adivinhação de números, alguns trios se inspiraram no diálogo original e demonstraram criatividade na apresentação de suas regras para a turma, como podemos ver nas imagens a seguir:

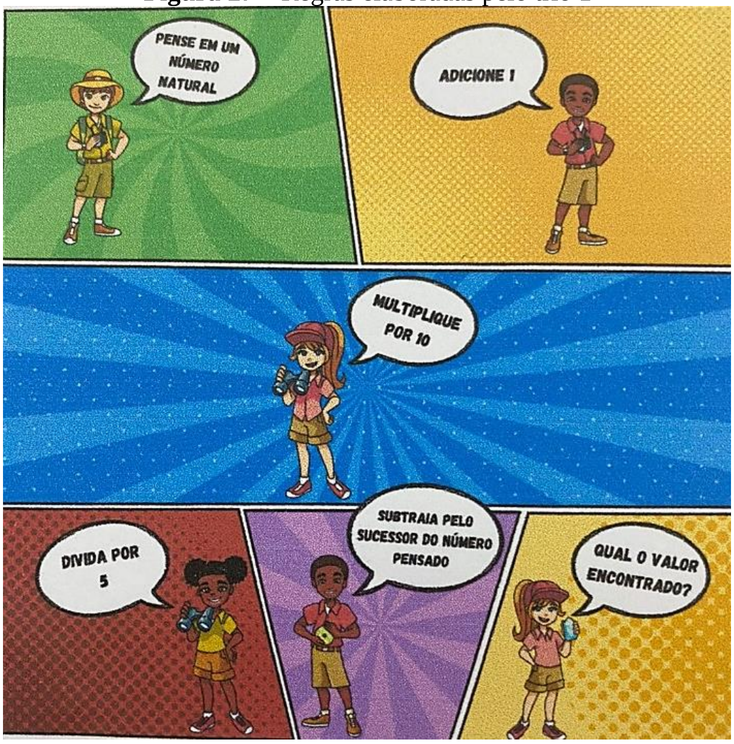
Figura 26 – Regra criada pelo trio 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Na imagem que ilustra o desafio do trio 2, os alunos mencionaram a escolha de uma imagem bastante popular na internet, uma vez que o público-alvo da educação básica é composto por jovens, os quais estão constantemente antenados nas redes sociais. Dessa forma, é importante que essas imagens sejam usadas também em sala de aula.

Figura 27 – Regras elaboradas pelo trio 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao apresentarem esta imagem, o trio 1 destacou que se tratava de um diálogo em que cada personagem mencionava um comando para a atividade de adivinhação de pensamentos. O trio frisou que os personagens que compõem essa imagem são compostos por diferentes representações, incluindo indivíduos brancos, pretos, pardos e afrodescendentes, o que, raramente, ocorre nas imagens apresentadas em materiais didáticos.

Essa foi uma observação relevante e que permitiu uma discussão sobre as questões de representatividade nos livros didáticos e a importância do aluno se sentir reconhecido no material utilizado. Nesse contexto, foi discutido que o professor é o responsável pela seleção do livro didático. Dessa forma, dentre os critérios utilizados para a seleção, esse deve ser um critério relevante a ser considerado na escolha das obras analisadas.

Além disso, é importante que o professor esteja familiarizado com a Lei 10.639/03 que obriga a discussão da temática "História e Cultura Afro-Brasileira" no currículo da Educação Básica. Dessa forma, em sala de aula, será possível ter uma abordagem que trate de uma representação real da população negra, e não apenas associada à escravidão. Essa representatividade real pode permitir que o aluno negro conheça a sua história e que outros alunos também a conheçam, reforçando, assim, uma cultura de valorização da História e Cultura Afro-Brasileira.

Além dessas questões, também foi mencionada a necessidade de os materiais didáticos estarem consoantes às questões sociais, representando as diferentes culturas, classes sociais e regiões, tendo em vista a diversidade cultural do nosso país.

Para analisarmos os problemas propostos pelos alunos, utilizamos as mesmas categorias de análise da pesquisa exploratória, as quais foram apresentadas no capítulo anterior, sendo elas: i) estrutura do problema, ii) conteúdo matemático e iii) viabilidade do problema. Dessa forma, a partir das análises, consideraremos os problemas pertencentes a Travessia I, Travessia II ou Travessia III, como podemos ver no quadro abaixo:

Quadro 38 – Análise dos problemas propostos

Problema	**Travessia I**	**Travessia II**	**Travessia III**
Estrutura do problema	Trios 3 e 6		Trios 1, 2, 4 e 5
Compreensão do problema		Trios 1, 2, 3, 4, 5 e 6	
Viabilidade do problema		Trio 6	

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Analisando o aspecto i) estrutura do problema, percebemos que o trio 1 apresentou um problema original, de estrutura considerada pertencente a Travessia III. O classificamos dessa forma por compreendermos que foram utilizados aspectos matemáticos que não haviam sido mencionados no problema original, tais como: sucessor e restrição de domínio. Os problemas apresentados pelos trios 2 e 5 também pertencem a Travessia III, pois utilizaram conceitos importantes no cerne da elaboração do seu problema, como o de derivada. O trio 2 utilizou o teorema que afirma que a derivada de uma função constante é zero. O trio 5, por sua vez, forneceu uma função e utilizou a conhecida regra de derivação, denominada regra da potência. Além disso, o trio 5 também utilizou as propriedades de potenciação e radiciação, o que trouxe um diferencial do problema apresentado originalmente.

Contudo, fazemos uma ressalva aos problemas apresentados pelos trios 1 e 5, ao solicitarem que o número pensado pertencesse aos números naturais. No momento da discussão, foi mencionado e exemplificado que não haveria problemas de indefinição, caso o número pensado pertencesse aos números reais, portanto, não seria necessário restringir o domínio. No entanto, os dois trios mencionaram que essa condição foi uma forma de simplificar o cálculo mental.

Ao fazerem essa afirmação, interviemos sobre a necessidade de o professor apresentar aos alunos problemas desafiadores, uma vez que restringir o domínio para diminuir a dificuldade do problema proposto pode ser uma limitação da curiosidade do aluno. Nesse contexto, lembramos que, mesmo que os alunos não pensassem em um número que pertencesse a conjuntos, como números racionais ou números inteiros, o professor poderia fazer essa pergunta e, dessa forma, aprofundar a discussão através da exploração de problemas.

O problema apresentado pelo trio 4 também foi alocado a Travessia III, por apresentar um caso de investigação matemática. Embora o problema não traga, em sua essência, conceitos algébricos, ele apresenta um aprofundamento da aritmética. O trio utilizou como argumento que a soma dos algarismos dos dez primeiros múltiplos de 9 é igual a 9. Nesse caso, a restrição apresentada no problema é válida, uma vez que, se o número pensado fosse 11, a soma dos algarismos do resultado da operação 9.11=99 seria 18. Dessa forma, não satisfaria ao problema proposto.

Os problemas dos trios 3 e 6 são considerados pertencentes a Travessia I, pois, apesar de apresentarem problemas estruturados, eles possuem um contexto padrão, trivial e semelhante ao problema apresentado originalmente. Os dois problemas apresentados não requerem complexas manipulações algébricas, eles são problemas que se limitam às operações aritméticas.

Nesse sentido, os problemas pertencem a Travessia I, pois, nesse tipo de atividade, não é relevante empregar comandos aritméticos básicos, como, por exemplo, o uso das operações inversas, soma 100 e diminui 100, uma vez que o leitor do problema perceberá, imediatamente, a essência do problema. Em outras palavras, será possível identificar, instantaneamente, quais as operações que fundamentam a regra utilizada para descobrir o número pensado.

Quanto ao aspecto ii) Compreensão do problema, consideramos que o problema de todos os trios está situado na Travessia II, pois trazem situações que podem ser resolvidas utilizando conceitos matemáticos considerados básicos para alunos de licenciatura em Matemática. Caso o público-alvo fosse alunos da Educação Básica, os problemas que envolvem, por exemplo, conceitos de derivada necessitariam de uma compreensão avançada.

Quanto ao aspecto iii) Viabilidade do problema, consideramos que os problemas dos trios 1, 2, 3, 4 e 5 estão alocados na Travessia III, pois todos são viáveis, realistas e envolventes. Já o problema apresentado pelo trio 6 está situado na Travessia II, pois, apesar de ser um problema envolvente, ele não é viável para os números negativos, uma vez que, para descobrir o número desejado, é necessário calcular a raiz quadrada do resultado da equação, que pode ser positivo ou negativo. Dessa forma, não é possível que o propositor do problema acerte o número pensado, pois há duas possibilidades. Uma sugestão para esse problema seria restringir o domínio ao conjunto dos números reais positivos.

A partir da análise dos problemas apresentados pelos licenciandos, salientamos a relevância da nossa pesquisa para a formação destes. Como destacam Cai, Hwang e Melville (2023), as tarefas matemáticas com as quais os alunos se engajam nas aulas moldam as oportunidades de aprendizagem que são disponibilizadas, por esse motivo, a escolha de tais tarefas é um aspecto crítico do trabalho dos professores.

Nesse contexto, a análise dos problemas propostos pelos futuros professores nos deu um norte para o desenvolvimento das próximas atividades, dando uma ênfase na Proposição de Problemas, uma vez que, sem a clareza do papel do problema, a utilização da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas torna-se inviável. Desse modo, não nos limitamos somente a preparar os futuros professores para utilizar essa metodologia, nossa principal preocupação consistiu em prepará-los para selecionar criticamente problemas a serem trabalhados em sala de aula e para propor os seus próprios problemas.

7.3.1 Inferências

A atividade 3 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. Possibilita a compreensão de que mediação do professor é indispensável para facilitar a expressão do pensamento algébrico pelos alunos, seja por meio da oralidade ou da escrita (numérica, algébrica, gráfica, dentre outras).

ii. Elucida que a Exploração de Problemas é essencial na compreensão, resolução e proposição de novos problemas, pois é uma atividade que potencializa a compreensão da estrutura matemática que modela o problema.

iii. Demonstra que o incentivo à transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra na Resolução de Problemas é fundamental para os alunos compreenderem conceitos com maior profundidade e desenvolverem os diversos elementos do pensamento algébrico.

iv. Evidencia que a Proposição de Problemas potencializa a criatividade do aluno e propicia discussões relevantes, como a abordagem da matemática em temas do contexto dos alunos, bem como a discussão de questões sociais relevantes, como a representatividade.

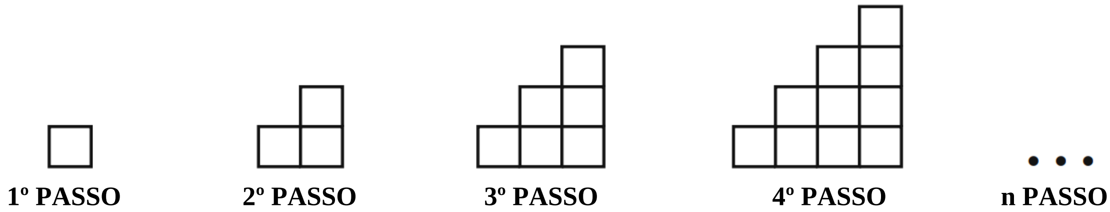
7.4 Atividade 4 – Os degraus da escada

Essa atividade teve como objetivo potencializar o aprofundamento das ideias de álgebra por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. A atividade foi realizada em dois encontros de duas horas. No primeiro encontro, 18 alunos estiveram presentes. No segundo, 22 alunos.

Quadro 39 – Quarta atividade da pesquisa

Atividade 4: Os degraus da escada

Observe a figura abaixo que representa uma escada com degraus:



Com base na figura, proponha um ou mais problemas que você considera apropriados para alunos do Ensino Médio. Use sua criatividade e originalidade ao apresentar seus problemas.

Fonte: Retirado e adaptado de Rosli *et al.* (2015, p. 350).

No primeiro encontro, a atividade foi entregue aos alunos, os quais deveriam explorar a situação e propor os seus problemas. Após isso, como uma forma de avaliar a sua escrita e os conceitos matemáticos utilizados, cada aluno deveria responder o seu problema. Nesse momento, os alunos poderiam modificar o problema original, caso achassem necessário.

Além disso, com o intuito de proporcionar uma reflexão sobre os problemas que os licenciandos estavam propondo, a professora-pesquisadora incluiu as seguintes questões na atividade: a) O que você levou em consideração ao propor o(s) problema(s)? b) Quais as suas preocupações, a nível de conceito matemático, você levou em consideração ao propor o(s) problema(s)?

O encontro foi finalizado após cada aluno fazer uma rápida apresentação do seu problema proposto. Nesse primeiro encontro, a exploração e resolução de problemas foi feita individualmente, não havendo uma discussão grupal. A professora-pesquisadora recolheu todos os problemas propostos e, para uma melhor organização da discussão, os problemas foram divididos em duas categorias: i) Problemas que dizem respeito à soma de quadrados; ii) Problemas que dizem respeito aos conceitos de geometria.

Essa estratégia foi utilizada para que, no próximo encontro, discutíssemos o maior número possível de problemas, de forma que todos os alunos se sentissem contemplados. Além disso, a estratégia utilizada também nos permitiu explorar o problema por diversas perspectivas, aumentando a possibilidade de alcance do nosso objetivo.

No quadro 40 abaixo, apresentamos os problemas propostos pelos alunos envolvendo a soma de quadrados e as discussões e análises. Mais adiante (quadro 41), apresentaremos os problemas propostos envolvendo os conceitos de geometria.

Quadro 40 – Problemas propostos pelos alunos envolvendo a soma de quadrados

Aluno	**Problemas envolvendo a soma de quadrados**
A1	Fabíola está concluindo a escada que dar acesso ao 5º andar de sua casa, para isso, precisa de 15 degraus. a) Considerando que são necessários 15 degraus, quantos blocos serão necessários para concluir a obra? b) Agora que já sabe a quantidade de blocos necessários para construir a escada, faça uma pesquisa em pelo menos 3 lojas da sua cidade para descobrir os preços desses blocos. Sabendo que o bloco tem que medir 60x30x15 cm. Em seguida, construa uma tabela comparando os valores de cada loja e discuta com seus colegas de sala qual delas seria mais vantajosa para Fabíola.
A5	Seguindo a lógica, qual será a quantidade de quadrados que terá o 12º degrau?
A8	Você consegue observar algum padrão nessa sequência? Se sim, quantos quadradinhos há no quinto termo dessa sequência?
A9	Quantos cubos terá no 11º degrau da escada, observando a sequência dos degraus na figura?
A12	Com base nas figuras, considere uma figura de 25 degraus, quantos quadrados haverá nessa figura?
A15	Sabendo que no 10º degrau há 55 quadrados, quantos quadrados há no 9º degrau?
A18	Observando a figura, note que a quantidade de quadradinhos vai aumentando, com isso, mostre a sequência e desenhe a próxima figura. Tomando o mesmo raciocínio, se nossa sequência tivesse 20 figuras, quantos quadradinhos ela teria?
A21	Com base nas figuras apresentadas, responda: quantos quadrados terão na figura de número 15? Utilizando o método da resposta da questão anterior, responda, qual figura tem 55 quadradinhos?

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando a estrutura dos problemas propostos na categoria i) "Problemas que dizem respeito à soma de quadrados", consideramos que grande parte deles (A15; A21; A18; A5; A12) estão situados na Travessia II, pois são problemas bem estruturados, que abordam um contexto padrão. Já o problema apresentado por A8, embora seja semelhante aos demais problemas, está situado na Travessia I, pois traz um questionamento trivial, que, a depender do nível de ensino, não requer uma reflexão para chegar à solução. Em nossa análise, somente o problema apresentado pelo aluno A1, está situado na Travessia III, pois apresenta um contexto original e criativo, diferente do que é comumente questionado nesse tipo de atividade.

Quanto ao aspecto "compreensão do problema", consideramos que todos os problemas estão situados na Travessia II, pois necessitam da compreensão de conceitos básicos para a sua resolução. Além disso, no aspecto viabilidade do problema, consideramos que todos são problemas estão situados na Travessia III, pois são problemas viáveis, realistas e envolventes.

A análise dos problemas propostos pelos futuros professores é relevante no âmbito dessa pesquisa para avaliarmos a qualidade desses problemas, uma vez que compreendemos que, para utilizar a Proposição de Problemas em suas futuras aulas, é fundamental que esses professores estejam preparados para propor problemas. Como apontado por Cai e Hwang (2020), os professores devem conseguir propor problemas matemáticos relevantes e valiosos para poderem utilizar a Proposição de Problemas eficazmente como uma ferramenta pedagógica para compreender o pensamento matemático dos seus alunos.

Cai e Hwang (2020) argumentam que um dos principais benefícios da Proposição de Problemas é a capacidade de as atividades de Proposição de Problemas revelarem informações úteis sobre o pensamento matemático dos alunos. Os autores ressaltam que isso tem um grande impacto no ensino em sala de aula, pois, quanto mais informações os professores tiverem sobre o que os alunos sabem e pensam, mais chances terão para criar oportunidades de aprendizagem eficazes para todos os seus alunos.

Além do benefício voltado para os seus futuros alunos, outros benefícios podem ser destacados de forma específica na formação do futuro professor. As pesquisas discutidas ao longo deste trabalho (Abramovich; Cho, 2015; Cai; Hwang; Melville, 2023; Crespo, 2015; Ellerton, 2015; Grundmeier, 2015; Milinkovic, 2015; Rosli *et al.*, 2015) apontam esses benefícios. Em geral, elas enfatizam que a Proposição de Problemas na formação de professores pode contribuir para que os docentes tenham uma compreensão mais aprofundada da estrutura matemática, aprendam a conceber problemas que considerem questões didáticas, percam a dependência do livro didático, aprendam habilidades para serem mais produtivos e criativos e se tornem propositores de problemas competentes e consistentes.

A partir dos problemas apresentados na categoria i) "Problemas que dizem respeito à soma de quadrados", corroboramos com os estudos que apontam que os futuros professores têm capacidade de propor problemas matemáticos interessantes e relevantes (Grundmeier, 2015; Cai; Hwang, 2020). No entanto, em nossa pesquisa, serão necessárias algumas intervenções para aperfeiçoar esses problemas, como é possível notar através das análises dos problemas organizados na categoria ii) "Problemas que dizem respeito aos conceitos de Geometria", que serão abordados posteriormente.

No quadro abaixo, apresentamos os problemas organizados na categoria ii. Por serem problemas que envolvem, em sua maioria, particularidades, trazendo uma aplicação utilizando conceitos de geometria, apresentamos uma análise individual de cada problema.

Quadro 41 – Problemas propostos pelos alunos envolvendo conceitos de geometria

Aluno	**Problemas envolvendo conceitos de geometria**
A5	Supondo que cada lado do quadrado do 1º degrau tem aproximadamente 2mm de comprimento, calcule a área total em cada degrau.
Análise: O problema está situado na Travessia I, pois não permite uma ampliação e/ou aprofundamento da situação original. Isso pode ser evidenciado ao observarmos que o problema proposto limita o questionamento ao 1º degrau, além disso, menciona que cada quadrado do degrau teria 2mm de comprimento, o que não seria viável em um contexto real.	

<table>
<tr><td>A8</td><td>Considere a medida do lado de cada quadradinho igual a 1u, responda: a) Qual a medida do perímetro dos quatro primeiros termos dessa sequência? b) A partir dos dados encontrados no item anterior, determine a medida do perímetro do 8º termo dessa sequência.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: O problema está situado na Travessia III, pois apresenta um contexto viável, original e criativo, que permite reflexão e envolvimento na resolução.</td></tr>
<tr><td>A16</td><td>Sabendo que a área de cada quadrado que compõe os degraus vale 4 cm, qual será a área do triângulo retângulo formado na figura do 4º degrau?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: O problema está situado na Travessia I. Podemos destacar diversos pontos, tais como a unidade de medida para a representação da área, que foi utilizado cm, quando deveria ter sido cm². Além disso, o tamanho da área dada só seria possível se estivéssemos nos referindo a uma escada de brinquedo, contudo, o problema não trouxe esse contexto. Mencionamos também que o 4º degrau não forma um triângulo retângulo, pois, no lado que deveria ser a hipotenusa, temos uma irregularidade formada por 4 triângulos.</td></tr>
<tr><td>A6</td><td>Quanto vale a hipotenusa do triângulo traçado na escada de um local de voo de Asa Delta com 500 degraus, sendo que a escada tem 4m de largura e cada degrau tem 20 cm de altura?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: O problema está situado na Travessia I. O problema não foi escrito com uma estrutura que permita compreensão clara do contexto utilizado.</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>Em um prédio, cada degrau de uma escada tem 15 cm de altura. Quantos metros a escada terá quando tiver 60 degraus?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: O problema está situado na Travessia II. Sua escrita está estruturada e traz um contexto adequado. Embora ele esteja próximo de um exercício matemático, a depender do nível que ele for utilizado, pode necessitar de uma reflexão para chegar à solução.</td></tr>
<tr><td>A10</td><td>Sabendo que cada degrau tem 50 cm de altura, calcule a altura da escada com 8 degraus em metros. Sabendo também que a distância da base para a parede é de 3 metros. Calcule o comprimento do corrimão da escada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: O problema está situado na Travessia II, pois apresenta um contexto original e criativo. Além disso, possibilita a utilização do Teorema de Pitágoras de maneira coerente, pois é pedido para calcular o corrimão da escada, que pode ser entendido como a hipotenusa. Contudo, o problema traz uma incoerência contextual, uma vez que é inviável uma escada ter um degrau com 50 cm de altura.</td></tr>
<tr><td>A20</td><td>Paulo é um pedreiro que está construindo uma casa para Ana. Ela escolheu um modelo específico de escada que vai da sala até o seu quarto. Para que Paulo possa calcular a quantidade necessária de cerâmica para cobrir a escada, ele percebeu que será fundamental utilizar o teorema de Pitágoras. Cada cerâmica tem 3 cm de largura e 3 cm de comprimento. Portanto, qual é o comprimento da hipotenusa do 15º degrau?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: O problema está situado na Travessia I. A informação sobre a utilização do teorema de Pitágoras não é coerente, pois não há a possibilidade de revestir a hipotenusa do 15º degrau.</td></tr>
<tr><td>A19</td><td>Se agrupar o primeiro com o segundo degrau, qual figura geométrica consegue obter? É possível agrupar o terceiro e o quarto degrau e conseguir uma figura geométrica? Qual a posição dos degraus para que isso seja possível?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: O problema está situado na Travessia II. Sua escrita está estruturada e envolve a utilização do pensamento geométrico.</td></tr>
<tr><td>A11</td><td>O rapaz Jeremy deseja subir na escada do monte cristo, em nova esperança, no entanto, tem medo por causa da quantidade de degraus que ela possui. Muitos dos seus amigos já subiram ao monte, então para não ser o que único que não subiu, assim ele decidiu fazer perguntas as pessoas da redondeza sobre características da escada. Dentre elas, destaca-se – A escada tem 32 cubinhos; O degrau é dividido por 8; Sua raiz quadrada é igual a $4\sqrt{2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: O problema está situado na Travessia I, pois não apresenta dados suficientes para a resolução. Embora o problema traga um contexto, ele não explicita qual é o problema.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Os problemas que, em nossa análise, estão situados na Travessia I, apresentam algumas falhas na coerência didática, o que ocasiona dificuldades para a sua compreensão e resolução. O conceito de coerência didática que utilizamos é fundamento em Abramovich e Cho (2015), os quais se referem à resolubilidade formal do problema, adequação e outras características pedagógicas, bem como relevância sociocultural.

Nesse contexto, é importante salientar que, além das limitações na escrita, alguns desses problemas abordam situações que estão distantes da realidade. Essa problemática nos sugere a intensificação do nosso trabalho de reformulação de problemas, uma vez que os futuros professores devem trabalhar com questões relevantes para o mundo real, de forma que o aluno possa estabelecer uma ligação entre a matemática e a realidade.

Nos problemas apresentados pelos alunos A6 e A20, é possível notar uma incoerência com o teorema de Pitágoras, pois, apesar de parecermos estar lidando com um triângulo retângulo, os degraus da escada não formam uma hipotenusa. No entanto, no problema proposto por A10, há uma correlação coerente, uma vez que o aluno fez uma associação da hipotenusa com o corrimão da escada. Contudo, esse problema apresenta uma incoerência contextual, quando menciona que a escada possui 50 cm de altura.

Além disso, alguns problemas não apresentavam dados suficientes para permitir uma resolução, como é possível ver a seguir:

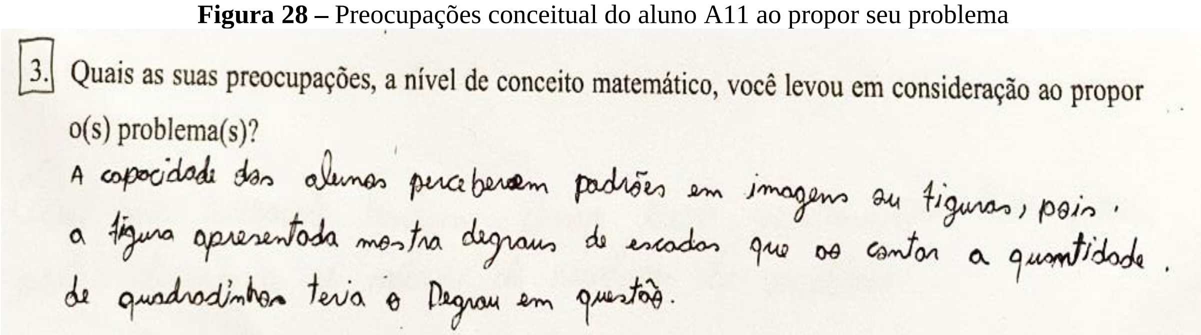
Quadro 42 – Exemplo de problema que necessita reformulação

A11	O rapaz Jeremy deseja subir na escada do monte cristo, em nova esperança, no entanto, tem medo por causa da quantidade de degraus que ela possui. Muitos dos seus amigos já subiram ao monte, então para não ser o que único que não subiu, assim ele decidiu fazer perguntas as pessoas da redondeza sobre características da escada. Dentre elas, destaca-se: i) A escada tem 32 cubinhos; ii) O degrau é dividido por 8; ii) Sua raiz quadrada é igual a $4\sqrt{2}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Como mencionado no início da atividade, ao proporem problemas, os alunos deveriam responder acerca da preocupação conceitual levada em consideração ao propor este problema. Diante desse questionamento, o aluno A11 mencionou:

Figura 28 – Preocupações conceitual do aluno A11 ao propor seu problema



3. Quais as suas preocupações, a nível de conceito matemático, você levou em consideração ao propor o(s) problema(s)?

A capacidade dos alunos perceberem padrões em imagens ou figuras, pois a figura apresentada mostra degraus de escadas que ao contar a quantidade de quadradinhos teria o Degrau em questão.

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando a fala do aluno, percebemos a preocupação em propor um problema que possibilitasse encontrar o padrão existente na imagem. Contudo, a dificuldade na escrita do problema não possibilitou esse entendimento, tornando o problema incompleto. Esta constatação corrobora a necessidade de trabalhar com a Proposição de Problemas na formação de professores, uma vez que estes demonstram criatividade e compreensão da estrutura matemática, mas apresentam dificuldades na escrita do problema.

Os problemas apresentados por A2, A10 e A19 estão situados na Travessia II, pois corroboram com nossa concepção de problema (Allevato; Onuchic, 2014; Andrade, 2017; Lester; Cai, 2016; Van de Walle, 2009). Esses problemas apresentam uma escrita estruturada, trazendo um contexto adequado e, a depender do nível de ensino, são problemas que demandam um trabalho efetivo para encontrar a solução, possibilitando, inclusive, a manifestação do pensamento geométrico.

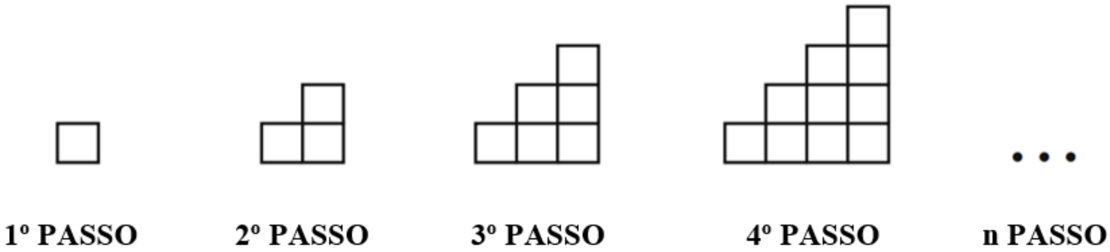
Por fim, o problema situado na Travessia III (A8) também contempla nossa concepção de problema, e, além disso, ressalta a percepção de Ellerton (2015), a qual menciona que a Pedagogia da Proposição de Problemas representa uma oportunidade para transformar atividades rotineiras em descobertas excitantes e revigorantes para alunos e professores.

A análise dos problemas apresentados pelos licenciandos reforçou nossa preocupação em trabalhar alguns conceitos relevantes e necessários na metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, tais como: compreensão das concepções de problemas e Coerência Didática de Problemas (coerência numérica, coerência contextual e coerência pedagógica). A discussão teórica sobre esses aspectos já estava prevista no nosso planejamento, sendo discutida após a realização de atividades práticas, uma vez que essas experiências subsidiaram a discussão teórica.

No primeiro momento do segundo encontro dessa atividade, foram exibidos todos os problemas propostos pelos alunos, agrupados nas duas categorias. Foi realizada uma leitura inicial, para que, assim, todos conhecessem os problemas propostos pelos colegas. Como a atividade tinha o objetivo de potencializar o aprofundamento das ideias de álgebra por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, iniciamos a exploração do problema através dos problemas propostos na categoria 1, pois, a partir deles, tínhamos o intuito de investigar o termo geral da sequência e explorar outras ideias de álgebra.

Antes de iniciar a resolução dos problemas, a professora-pesquisadora retomou a atividade, apresentando a figura a seguir (figura 29).

Figura 29 – Imagem utilizada na atividade 4

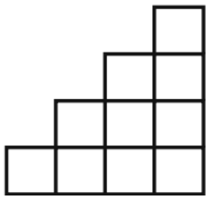


Fonte: Rosli *et al*. (2015, p. 350, tradução nossa).

Após apresentá-la, questionou: “pelos problemas propostos, podemos perceber que a figura trata de uma sequência, mas podemos afirmar que essa sequência representa uma Progressão Aritmética (PA)?”

Esse questionamento foi levantado, pois alguns alunos mencionaram que estavam considerando que o somatório de blocos ao subir cada degrau (1º passo, 2º passo, 3º passo, 4º passo, n passo) era considerado uma PA, sendo formada pelos seguintes números: (1, 3, 6, ...). No entanto, entre uma imagem e outra, há uma sequência numérica, mas não há uma PA. Contudo, se considerarmos a quantidade de blocos por coluna, teremos a PA = (1, 2, 3, 4, ...) de razão r = 1, como podemos ver no bloco abaixo, que representa o 4º passo:

Figura 30 – Representação do 4º passo nos degraus da escada



Fonte: Recortado da imagem original de Rosli *et al*. (2015, p. 350).

Com isso esclarecido, começamos a resolução dos problemas da categoria 1, os quais questionavam a quantidade de blocos por passo, ou de passos quando tivesse determinada quantidade de blocos. Desse modo, elaboramos na lousa um quadro com essa relação, o qual ficou organizado da seguinte forma:

Quadro 43 – Relação entre passos e blocos na escada

Passos	Blocos
5	15
9	45
10	55
11	66
12	78
15	120
20	210
25	325

Fonte: Dados da pesquisa.

Após essa resolução, a professora-pesquisadora questionou aos alunos o que eles puderam perceber, então, eles disseram:

Quadro 44 – Diálogo entre professora-pesquisadora e alunos

A12: Eu percebi que usando a permutação podemos resolver o problema. Professora: Poderia dar um exemplo? **A12:** Pegando o número do degrau que é 25 e permutando, mas em vez de multiplicar, vamos somar 25+24+23+...+1=325 **PP:** Ótima percepção, A12, é isso mesmo. Mas, nesse cálculo que você realizou, foi utilizado a permutação? **A12:** Eu utilizei a ideia, só que não multipliquei. **A14:** Isso aí que você utilizou lembra a descoberta que Gauss fez, quando ele percebeu que somando todos os pares 1+100; 2+99; 3+98; e assim, sucessivamente, sempre totalizava 101. Foi quando ele percebeu que a soma de todos os pares seria 50x101=5050. **PP:** Muito bem lembrado, inclusive, essa soma de Gauss está relacionada com o que? **A11:** Com a soma dos n primeiros termos de uma PA. **A12:** Eu acertei a ideia, vocês ajudaram a descobrir o conteúdo.

Fonte: Dados da pesquisa.

A professora-pesquisadora ao analisar os registros da resolução de problemas (figura 31) previamente, já havia notado essa concepção errônea no conceito de permutação. Esse foi, inclusive, um ponto destacado para ser discutido.

Figura 31 – Registros do aluno A12

$$25! = 25+24+23+22+21+20+19+18+17+16+15+14+13+12+11+10$$
$$+9+8+7+6+5+4+3+2+1=325$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na discussão, a professora-pesquisadora não pretendia identificar o aluno, mas iria abordar a situação para que essa concepção errônea pudesse ser desconstruída. Contudo, como o próprio aluno mencionou a ideia que utilizou, a professora-pesquisadora buscou levar o diálogo de uma maneira leve, para que não houvesse constrangimento e para que pudesse mostrar para o aluno que, no erro, havia, em sua essência, um acerto.

Nesse contexto, chamamos a atenção para o erro dos alunos, o qual é comum na aprendizagem de matemática, mas, muitas vezes, não recebe a devida atenção. Salientamos que o erro nem sempre é uma falta de conhecimento, há muitos fatores que colaboram para o seu aparecimento. Pinto (1998), em sua tese de doutorado, traz uma discussão sobre o erro como objeto de estudo em Educação Matemática, e destaca que ele é uma possibilidade e uma realidade na construção do conhecimento. Para a autora, considerar os erros requer uma análise sobre eles, de modo a compreender como os alunos pensaram no momento de aprendizagem e o que os levou a produzi-los.

A discussão sobre as estratégias utilizadas possibilitou ao aluno verbalizar o que o levou a produzir esse erro. Além disso, outros alunos poderiam ter tido o mesmo entendimento e a discussão permitiu esclarecer essa concepção errônea. Nesse sentido, Pinto (1998) destaca que o erro pode ser causado por um obstáculo epistemológico, constituindo-se em um conhecimento falso ou incompleto. Assim, o erro pode ser uma oportunidade de o professor ajudar o aluno a adquirir o conhecimento adicional que lhe falta ou a reconhecer o porquê de ter errado.

Continuando a exploração, a professora-pesquisadora questionou: “o que mais vocês perceberam?”

Quadro 45 – Diálogo entre professora-pesquisadora e aluno

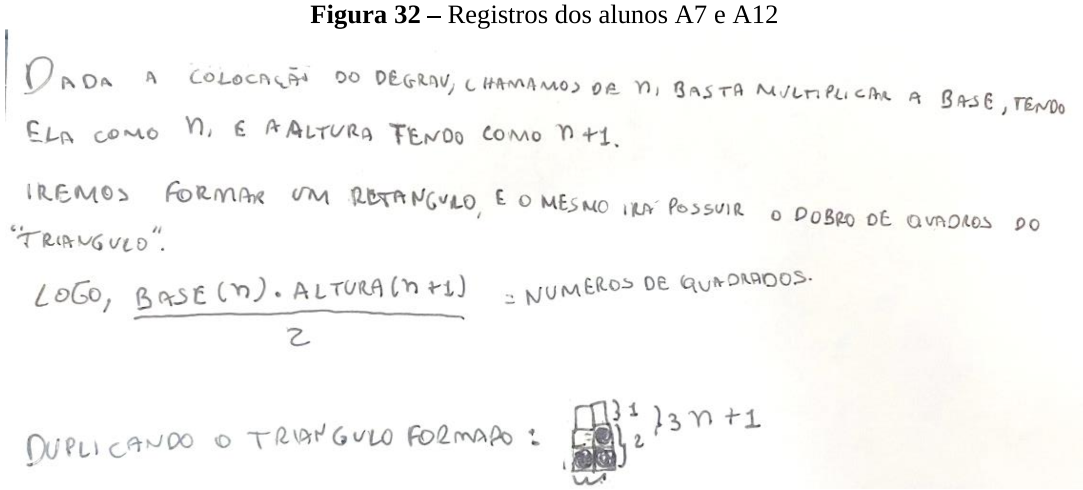
A1: Eu percebi que a quantidade de blocos sempre será a soma da quantidade de blocos do passo anterior com o passo atual.
A18: Não entendi.
A1: Veja no quadro, temos que a quantidade de blocos no passo 10 é 55, que é a soma de 45 blocos do passo 11 mais 10, que representa o 10º passo. Isso se repete em todos os passos.
Professora: Então, sempre temos que saber quantos blocos tinham no passo anterior?
A23: Foi isso que percebi, então tive que fazer passo por passo, para ir descobrindo.
A1: Não, essa minha descoberta me ajudou a encontrar um termo geral que me permite descobrir para qualquer quantidade de passos, sem necessitar fazer de um em um.
PP: Parabéns pela descoberta, A1. Antes de você nos contar, mais alguém conseguiu encontrar?
(...)
Silêncio
(...)
PP: Alguém além de A1, conseguiu encontrar? Então vamos investigar!!

Fonte: Dados da pesquisa.

Após cerca de 30 minutos, alguns alunos se aproximaram de encontrar o termo geral, mas não conseguiram representar algebricamente. A representação mais próxima obtida foi a de que a quantidade de blocos no passo n sempre seria n, somado com a quantidade de blocos do passo $n - 1$, ou seja, a soma dos blocos do passo atual sempre seria somada à quantidade de blocos do passo anterior. No entanto, considerando esse raciocínio, sempre precisaríamos ter conhecimento da quantidade de blocos do passo anterior, o que não atende, portanto, à lei de formação da sequência.

Nessa investigação, os alunos A7 e A12 começaram a trabalhar em duplas, buscando unir suas ideias para encontrar esse termo geral. Assim, eles buscaram ir pelo caminho geométrico, como podemos ver no registro a seguir (figura 32). Para ilustrar o raciocínio empregado, os alunos A7 e A12 utilizaram como exemplo a figura formada por 3 quadrados e o duplicaram, formando, desse modo, um retângulo de lados 2u e 3u. Eles notaram, portanto, que isso se aplicaria para todos as figuras. Dessa forma, eles utilizaram o conceito de área de um retângulo e chamaram a base de n e a altura de n+1. Como eles só estavam interessados em metade dessa área, eles a dividiram por dois e, assim, encontraram a lei de formação da sequência.

Figura 32 – Registros dos alunos A7 e A12



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao explicarem esse raciocínio para a turma, a professora-pesquisadora questionou aos outros alunos sobre quais outras percepções geométricas eles poderiam visualizar. Registramos o seguinte diálogo:

Quadro 46 – Diálogo entre professora-pesquisadora e alunos

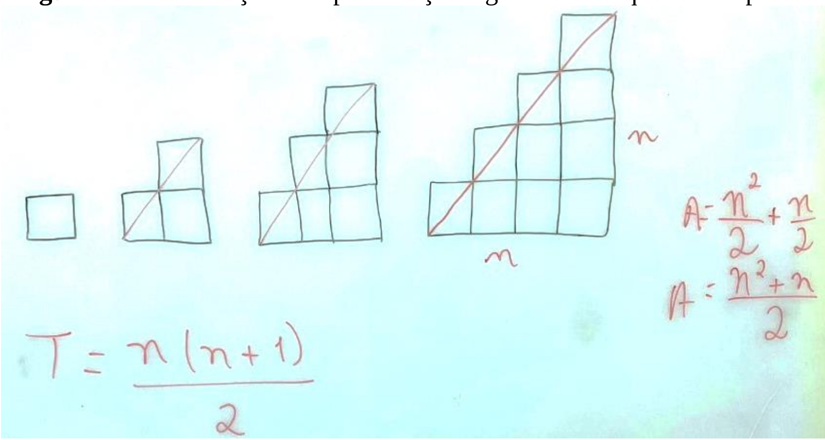
A20: Eu havia pensado na fórmula do triângulo retângulo, pois traçarmos uma linha da diagonal do primeiro quadrado a do último, teríamos a hipotenusa desse triângulo. Porém, fica faltando as metades dos triângulos que ficam pra fora do triângulo retângulo, por isso não consegui.
PP: Muito bem observado, então isso quer dizer que nós temos um polígono que não é convexo, certo? Como podemos fazer para calcular a área dele?
A5: Podemos calcular a área separada e somar com a área do triângulo retângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir desse diálogo, foi se construindo a imagem a seguir, que resultou na representação algébrica da lei de formação da sequência apresentada, a qual foi encontrada a partir dos conceitos geométricos. Nessa construção, partimos da ideia de que, inicialmente, temos um quadrado grande Q de lados $n \, x \, n$, formado por x blocos quadrados. Traçando a diagonal desse quadrado, obtemos parte do degrau, que é composto pela metade do quadrado Q, somado pela metade da quantidade de blocos quadrados x que compõem o lado n.

Compreendemos desta forma por observarmos que todos os degraus possuem a mesma quantidade de blocos quadrados na altura e na largura.

Figura 33 – Construção da representação algébrica da sequência de passos

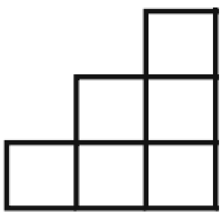
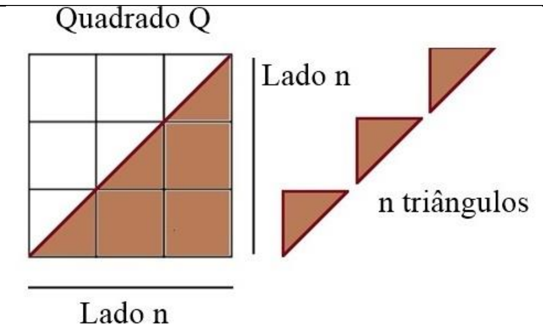


Fonte: Dados da pesquisa.

A partir dessa construção, ressaltamos a discussão de Lorenzato (2010) sobre a necessidade de ensinar integradamente aritmética, geometria e álgebra. Nessa atividade, foi perceptível que, ao integrar essas áreas, é possível notar a harmonia, coerência e beleza da matemática apresentada pelo autor. Além disso, ressaltamos que a abordagem do problema sob diferentes perspectivas foi fundamental para a construção de uma imagem holística da representação encontrada (Tripathi, 2008).

Para uma melhor compreensão da construção realizada na lousa, apresentamos as representações no quadro 47 a seguir.

Quadro 47 – Representação da generalização da sequência de passos

<table>
<tr><th colspan="4">Termo geral da sequência: $A = \frac{n^2+n}{2}$</th></tr>
<tr><th>Imagem original</th><th>Decomposição da imagem original</th><th colspan="2">Representação</th></tr>
<tr><td rowspan="4">3º Passo
</td><td rowspan="4">
</td><td>n</td><td>Lado de Q</td></tr>
<tr><td>n^2</td><td>Área de Q</td></tr>
<tr><td>$\frac{n^2}{2}$</td><td>Metade da área de Q</td></tr>
<tr><td>$\frac{n}{2}$</td><td>Metade do lado n que forma n triângulos</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Essas representações foram feitas por compreendermos que a figura que representa n passos do degrau é composta por $n.n$ blocos divididos por dois, somado com n blocos divididos por dois – que resulta em n triângulos. Dessa forma, temos que o termo geral da sequência é dado por $A = \frac{n^2+n}{2}$, sendo n a quantidade de passos e A a quantidade de blocos quadrados que compõe o degrau com n passos.

A expressão $T = \frac{n(n+1)}{2}$ foi o termo geral da sequência encontrado por A1, mencionado no início desta discussão, o qual foi descoberto, segundo A1, a partir da utilização da fórmula da soma dos termos de uma PA, dada por $S_n = \frac{(a_1+a_n)\,n}{2}$. Na ocasião, A1 considerou que $a_1 = 1$, pois essa é a quantidade de blocos do 1º passo e $a_n = n$, pois observou que, no passo n, aumenta-se n quadrados. Assim, substituindo, temos:

$$T = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para finalizar, foi feita uma discussão acerca da atividade, na qual alguns pontos foram destacados pela professora-pesquisadora. Dentre eles, destacamos, inicialmente, a importância da transição entre as representações múltiplas de álgebra, em que, por meio dessa atividade, ficou notório o quanto a representação geométrica contribuiu no entendimento da lei de formação da sequência, possibilitando sua representação algébrica.

Durante a investigação da lei de formação em questão, verificou-se o apontamento de Friedlander e Tabach (2001) de que o uso exclusivo de símbolos pode dificultar o entendimento matemático ou a natureza dos objetos representados, dificultando na interpretação dos resultados. Nesse sentido, a associação da sequência à representação geométrica e a outros conhecimentos anteriores, como as fórmulas de área, contribuiu significativamente para a compreensão e formalização da representação algébrica.

Essa é uma discussão importante na formação inicial, pois são essas vivências que podem colaborar para que os futuros professores tenham, futuramente, uma prática corporificada na teoria. Como mencionam Friedlander e Tabach (2001), não se pode esperar que a capacidade de trabalhar com uma variedade de representações se desenvolva espontaneamente, ao aprender álgebra, a consciência do aluno e a capacidade de usar várias representações devem ser promovidas de modo ativo e sistemático.

Além disso, foi mencionado sobre a importância da exploração individual de problemas e da socialização dessa exploração, pois, à medida que cada aluno faz a exploração individual, ele tira suas percepções e adentra no problema, assim, no momento da socialização, a fala de um colega pode possibilitar o avanço da exploração realizada, ou mesmo permitir a exploração por outras óticas.

É por meio da socialização das explorações que podemos compreender o trabalho da Exploração de Problemas mencionado por Andrade (2017), o qual a compreende como um trabalho inacabado no contexto da sala de aula, que vai além da busca da solução do problema e refere-se a tudo que se faz nele a partir do movimento P-T-RS (Problema – Trabalho – Reflexões e Sínteses).

Finalizada a exploração dos problemas expostos na categoria 1, foi feita uma discussão sintética sobre os problemas pertencentes à categoria 2 “Problemas envolvendo conceitos de geometria”, mencionando sobre os conceitos que poderiam ser abordados e discutindo o nível de dificuldade de cada problema. Contudo, dado o tempo da aula, não foi possível explorar os problemas dessa categoria, os quais ficaram para ser retomados na atividade 5.

7.4.1 Inferências

A atividade 4 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. As experiências na utilização dessa metodologia permitem que os futuros professores tenham experiências teórico-práticas que os conduzem a desenvolver uma prática corporificada na teoria.
ii. O futuro professor pode compreender a necessidade de promover de modo ativo e sistemático a capacidade do aluno de usar as várias representações de um conceito.
iii. A exploração individual de problemas e a socialização dessa exploração permite que cada aluno tire suas percepções e adentrem no problema, assim, essas considerações podem colaborar no avanço da exploração realizada pelos outros colegas, ou mesmo, permitir a exploração por outras óticas.
iv. Possibilita a identificação de erros e a compreensão do seu papel na aprendizagem do aluno, o qual pode ser considerado como ponto de partida para uma construção sólida de conceitos, minimizando a presença de concepções matemáticas errôneas.
v. Elucida a perspectiva de que ensinar integradamente aritmética, geometria e álgebra evidencia a harmonia, coerência e beleza da matemática, possibilitando construir uma imagem não linear, mas holística de um conceito.

7.5 Encontro de discussão teórica: "Problema: compreensões e discussões"

Neste encontro, não desenvolvemos atividades práticas, nosso objetivo consistiu em proporcionar discussões teórico-práticas a respeito das compreensões de problema e aspectos relacionados à Coerência Didática na Proposição de Problemas. A discussão teórico-prática foi planejada para o fim da primeira parte da Unidade Temática, uma vez que consideramos que as atividades práticas desenvolvidas até o presente momento permitiriam uma compreensão mais aprofundada da teoria.

Nesse contexto, buscamos, nesta aula, discutir sobre o contexto histórico da Resolução de Problema, contextualizando a sua utilização desde os antigos povos, os primeiros interesses em contemplá-la na sala de aula, sua utilização como metodologia de ensino e a perspectiva atual de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Além disso, discutimos as compreensões de Problema apresentadas na literatura, utilizando como embasamento teórico os autores Van de Walle (2009), Allevato e Onuchic (2014) e Andrade (2017). Por fim, discutimos sobre os conceitos de Coerência Didática (Abramovich; Cho, 2015) e a importância de considerar estes aspectos ao propor problemas.

Para fundamentar esta discussão teórica, foram disponibilizados aos participantes da pesquisa, previamente, os seguintes materiais:

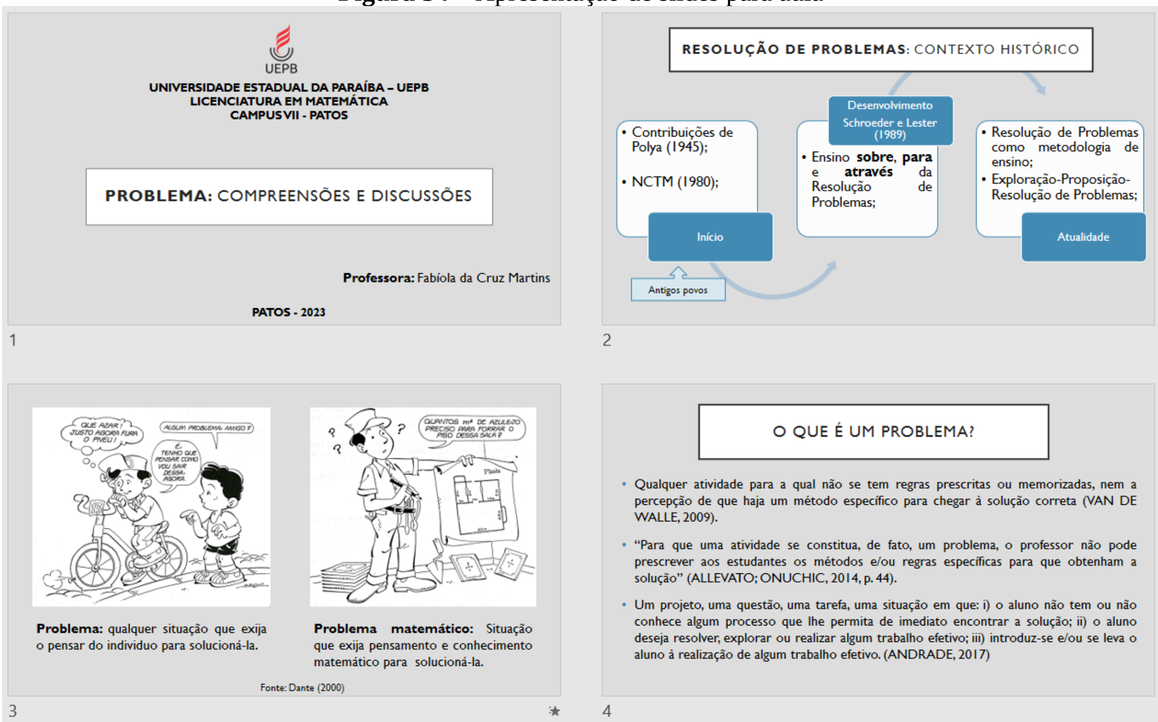
- Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores em sala de aula (Van de Walle, 2009);
- Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? (Allevato; Onuchic, 2014);
- Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing (Abramovich; Cho, 2015);
- Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula (Andrade, 2017);

A discussão teórica realizada nesta aula, estava relacionada à discussão realizada no segundo capítulo deste trabalho, com o objetivo de situar os licenciandos nas discussões da literatura sobre Problemas, Resolução de Problemas e Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Na figura 34, temos a apresentação dos quatro primeiros slides da apresentação. Neles, buscamos discutir sobre a compreensão de problema dos licenciandos e apresentamos as diferentes compreensões de problemas que os autores apresentam. Além disso, buscamos expor o contexto histórico da Resolução de Problemas no âmbito pedagógico, desde a sua utilização pelos antigos povos até a sua perspectiva atual como metodologia de ensino, conforme discutido no capítulo 2 deste trabalho.

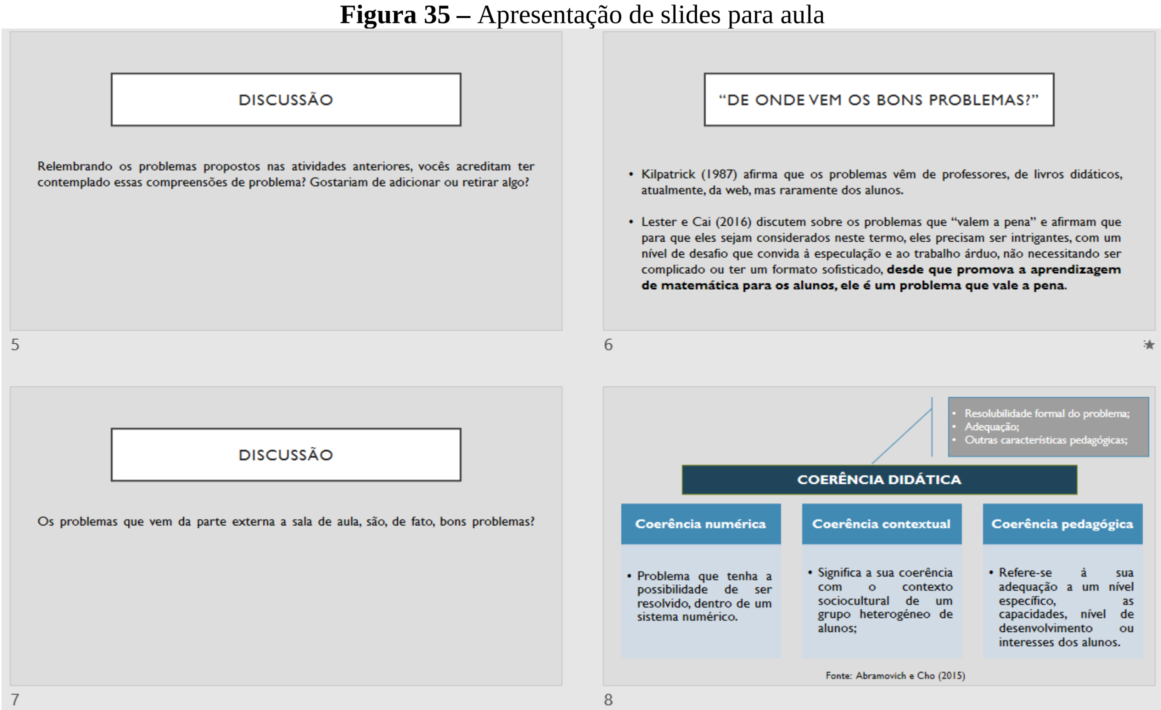
Para nortear nossa discussão teórica nesta aula, utilizamos a seguinte apresentação de slides:

Figura 34 – Apresentação de slides para aula



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Figura 35 – Apresentação de slides para aula



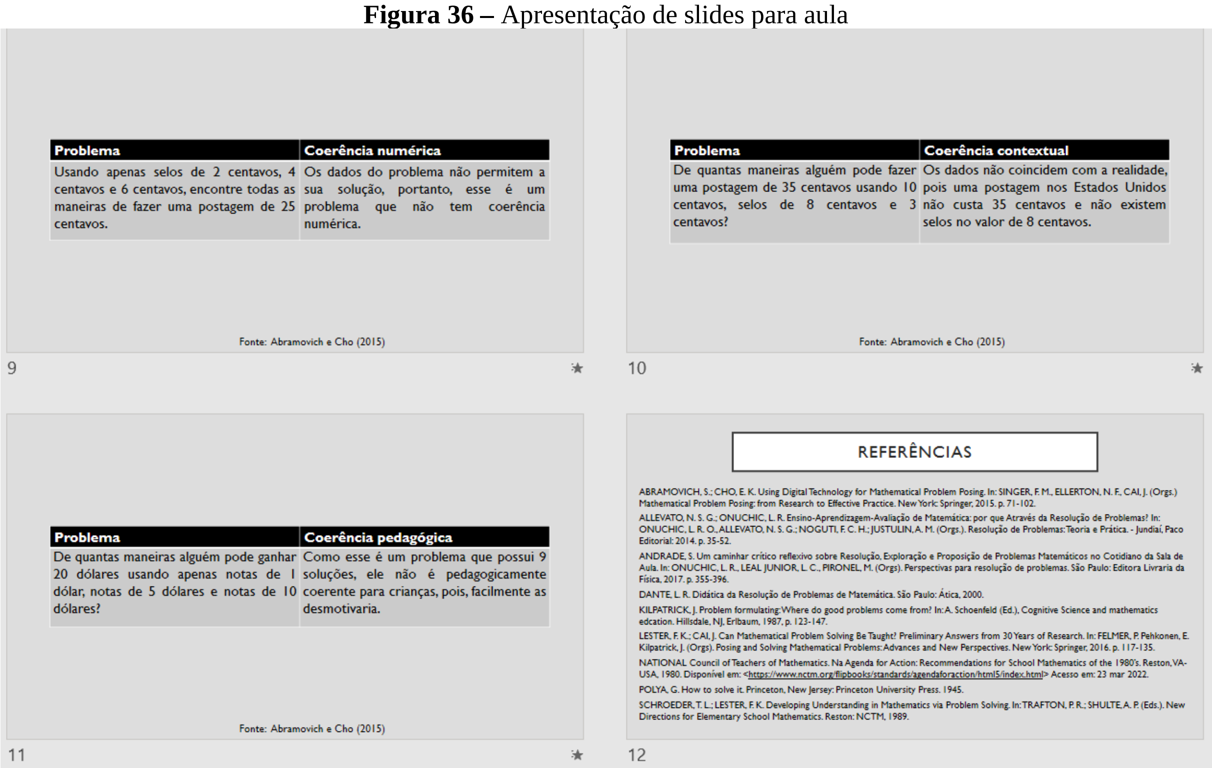
Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Na figura 34, temos a apresentação dos quatro primeiros slides da apresentação. Neles, buscamos discutir sobre a compreensão de problema dos licenciandos e apresentamos as diferentes compreensões de problemas que os autores apresentam. Além disso, buscamos apresentar o contexto histórico da Resolução de Problemas no contexto pedagógico, desde a sua utilização pelos antigos povos até a sua perspectiva atual como metodologia de ensino, conforme discutido no capítulo 2 desse trabalho.

Nas apresentações de slides da figura 35 buscamos contemplar a discussão “de onde vem os bons problemas”, com o intuito de problematizar o fato de que, raramente, os problemas vêm dos alunos. Em seguida, figuras 35 e 36, introduzimos a discussão sobre coerência didática de um problema e apresentamos um problema relacionado a cada tipo de coerência, pois consideramos que é importante o aluno refletir, por meio de um embasamento teórico consistente, sobre os problemas que eles propõem.

Durante essa apresentação, era trazido, inicialmente, o problema e questionado aos alunos qual tipo de incoerência era notado naquele problema apresentado. Após essa investigação, era apresentado aos alunos qual tipo de incoerência era mencionada pelos autores.

Figura 36 – Apresentação de slides para aula



Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Salientamos que essa apresentação de slides foi utilizada como uma ferramenta de apoio para nortear nossa discussão teórica da aula, a qual foi realizada numa perspectiva participativa e dialogada.

2ª PARTE DA UNIDADE TEMÁTICA

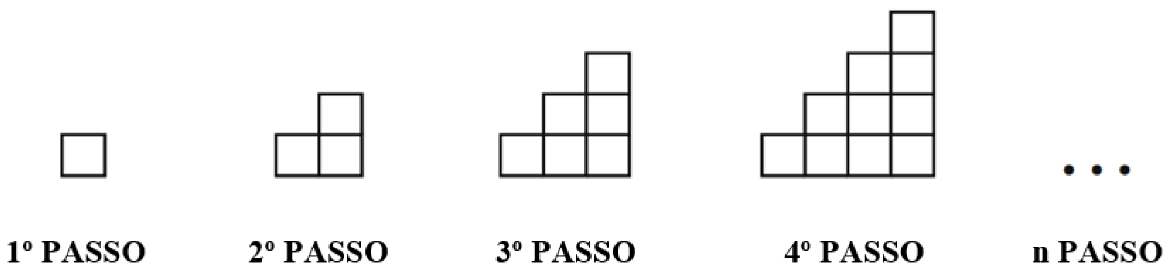
Nesta segunda parte da Unidade Temática, os alunos já tinham conhecimento teórico sobre as concepções de Problemas, Resolução de Problemas como metodologia de ensino, Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, Coerência Didática na Proposição de Problemas. Além disso, os alunos também tinham experiências práticas utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, assim como conhecimento teórico-prático dessa metodologia.

7.5 Atividade 5 – Reformulação de Problemas

Neste encontro, a Proposição de Problemas foi trabalhada por meio da Reformulação de Problemas. Como discutido por Silver (1994), a Proposição de Problemas consiste tanto na geração de novos problemas, quanto na reformulação de problemas dados. Assim, essa atividade objetivou avaliar os problemas propostos pelos licenciandos e reformulá-los utilizando as compreensões de problema e os conceitos de coerência didática. Para tanto, foram utilizados os problemas propostos pelos alunos na atividade 4, em que os alunos, divididos em grupos, analisaram e reformularam esses problemas. Essa atividade foi realizada em um encontro de 2h.

A atividade retomada nesta atividade, era composta por uma discussão com base na figura a seguir:

Figura 37 – Imagem utilizada na atividade 4



Fonte: Rosli *et al*. (2015, p. 350, tradução nossa).

Ao trabalharmos com a Reformulação de Problemas, visamos proporcionar aos licenciandos novas experiências com a Proposição de Problemas. Grundmeier (2015) aponta a Reformulação de Problemas como uma das maneiras de trabalhar a Proposição de Problemas, sendo considerada uma estratégia que pode desenvolver nos futuros professores a capacidade de Proposição de Problemas e a criatividade. Dessa forma, a diversidade de experiências para os futuros professores é fundamental, uma vez que, de acordo com Crespo (2015), as experiências ao longo da formação aumentam os tipos de problemas que os futuros professores considerarão e os capacitam a identificar, classificar e reformular problemas.

Na proposta da atividade anterior, os problemas foram divididos em duas categorias, mas, devido ao curto espaço de tempo, não foi possível discutir todos os problemas. Assim, nesta atividade, para valorizar as produções dos alunos, visamos contemplar os problemas que ainda não foram explorados, isto é, os problemas da categoria ii) "Problemas que dizem respeito aos conceitos de Geometria". Dessa forma, dividimos a turma em quatro grupos, sendo que cada um recebeu dois problemas propostos pelos colegas para análise.

Essa divisão foi feita aleatoriamente, preservando a identidade da pessoa que propôs o problema. Cada grupo analisou dois problemas, levando em consideração as compreensões de problema discutidas na aula anterior e os conceitos de coerência didática apresentados por Abramovich e Cho (2015). Após isso, o grupo escolheu um dos problemas para reformular, atendendo aos aspectos que julgaram convenientes.

A seguir, apresentamos, individualmente, os problemas recebidos por cada grupo, as suas análises e reformulações.

O grupo 1, formado pelos alunos A9, A14, A19 e A23 recebeu os seguintes problemas:

Quadro 48 – Problemas para reformulação

Problemas originais
1. Supondo que cada lado do quadrado de 1º degrau tem aproximadamente 2mm de comprimento, calcule a área total em cada degrau.
2. Considere a medida do lado de cada quadradinho igual a 1u e responda: a) Qual a medida do perímetro dos quatro primeiros termos dessa sequência? b) A partir dos dados encontrados no item anterior, determine a medida do perímetro do 8º termo dessa sequência.

Fonte: Dados da pesquisa.

Como discutido e apresentado na atividade quatro, em nossas análises, o problema 1 está situado na Travessia I, pois não permite uma ampliação ou aprofundamento da situação original, assim como não faz sentido em um contexto real. Enquanto o problema 2 está situado na Travessia III, ao apresentar um contexto viável, original e criativo, que permite reflexão e envolvimento na resolução. Vale destacar que essas análises não foram expostas para os licenciandos.

Para avaliar a coerência didática desses dois problemas, o grupo 1 realizou a seguinte análise:

Quadro 49 – Análise da coerência didática feita pelo grupo 1

Problema	**Coerência numérica**	**Coerência contextual**	**Coerência Pedagógica**
	O problema apresenta coerência numérica, pois,	O problema não apresenta coerência contextual, pois os	O problema não é pedagogicamente coerente, pois

1	informa o comprimento do lado do quadrado que compõe o degrau que está sendo formado pelos quadradinhos.	dados não coincidem com a realidade. Não existe degrau com 2 mm de altura.	não possui um nível de adequação para alunos do Ensino Médio.
2	Os dados do problema permitem a sua solução matemática, logo, ele possui coerência numérica.	O problema apresenta coerência contextual, pois atende ao contexto matemático.	O problema não é pedagogicamente coerente, pois se baseia em cálculos repetitivos e fáceis, ocasionando uma desmotivação didática.

Fonte: Dados da pesquisa.

A análise do problema 1 feita pelos licenciandos coincide com as nossas impressões, a qual aponta uma incoerência contextual e pedagógica. Por outro lado, a análise do problema 2 dos licenciandos difere de nossas análises, uma vez que os alunos consideraram uma falha na coerência pedagógica, ao acreditarem que os cálculos seriam repetitivos e ocasionariam uma desmotivação didática.

Ao discutirmos o problema 2, questionamos: “Como podemos usar a matemática como aliada para diminuir essa desmotivação didática?”; “Seria possível utilizar alguma ferramenta matemática para generalizar esse cálculo a fim de não ser necessário calcular cada degrau separadamente?”. A partir desses questionamentos, os alunos começaram a investigação da seguinte maneira:

Quadro 50 – Investigação matemática do problema 2

- Passo 1 – Perímetro = 4 u
- Passo 2 – Perímetro = 8 u
- Passo 3 – Perímetro = 12 u
- Passo 4 – Perímetro = 16 u
- Passo 5 – Perímetro = 20 u
- Passo 6 – Perímetro = 24 u
- Passo 7 – Perímetro = 28 u
- Passo 8 – Perímetro = 32 u
- Passo x – Perímetro = 4.x u

Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio da investigação matemática, os alunos perceberam que o perímetro era 4 vezes o número de passos. Dessa forma, concluiu-se que o problema não apresentava falhas na coerência pedagógica, mas que a mediação do professor seria necessária para que ele fosse abordado adequadamente em sala de aula. Diante disso, o problema foi considerado potencial, possibilitando a investigação matemática e a manifestação do pensamento algébrico.

Nesse contexto, salientamos um aspecto fundamental que viemos discutindo ao longo deste trabalho e que já foi apresentado em diversas pesquisas (por exemplo, Andrade, 2017; Martins, 2019):a mediação do professor é fundamental para possibilitar no aluno o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Diante da análise realizada, os alunos mencionaram que o problema 1 tinha uma maior necessidade de reformulação e o reescreveram da seguinte forma:

Quadro 51 – Reformulação de Problemas

Problema original
Supondo que cada lado do quadrado de 1º degrau tem aproximadamente 2mm de comprimento, calcule a área total em cada degrau.
Problema reformulado
Supondo que cada lado do quadrado do 1º degrau tem aproximadamente 0,30 m de comprimento, calcule a área total em cada degrau. Calcule no 10º degrau a área da figura que se formou.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta reformulação, os alunos mencionaram que mantiveram a ideia original, adequaram ao contexto real e, em seguida, aprofundaram o problema. Consideramos que o problema está situado na Travessia III, o qual apresentou uma boa estrutura e originalidade, de modo que requer a compreensão de diversos conceitos matemáticos para a sua resolução e é um problema viável, realista e envolvente.

O grupo 2, formado pelos alunos A5, A11, A15, A16 e A17, recebeu os seguintes problemas:

Quadro 52 – Problemas para análise

Problemas originais
1. Sabendo que a área de cada quadrado que compõe os degraus vale 4 cm, qual será a área do triângulo retângulo formado na figura do 4º degrau?
2. Quanto vale a hipotenusa do triângulo traçado na escada de um local de voo de Asa Delta com 500 degraus, sendo que a escada tem 4m de largura e cada degrau tem 20 cm de altura?

Fonte: Dados da pesquisa.

Como discutido e apresentado na atividade quatro, em nossas análises, o problema 1 está situado na Travessia I. A categorização foi fundamentada em diversos fatores, tais como: a unidade de medida utilizada não corresponde à unidade de área, a área apresentada não fazia sentido no contexto real e ocorreu uma associação equivocada dos degraus com a hipotenusa de um triângulo. Da mesma forma, o problema 2 também está situado na Travessia I, pois não apresentou uma escrita com estrutura que permita compreensão clara do contexto utilizado.

Os licenciandos analisaram a coerência didática desses problemas da seguinte forma:

Quadro 53 – Análise da coerência didática feita pelo grupo 2

Problema	Coerência numérica	Coerência contextual	Coerência Pedagógica
1	É observado que esse problema atende aos critérios da coerência numérica, pois é possível responde-lo através de um sistema numérico.	Os dados disponibilizados no problema possuem um erro na escrita matemática e não possibilitam que os alunos associem a questão com seu cotidiano, pois os dados são irreais.	O problema possibilita sua solução, porém, não é uma questão desafiadora que motive ou chame a atenção do aluno.
	Apesar dos dados serem sem fundamentos, o	Os dados não coincidem com a realidade, pois no contexto	O problema não é pedagogicamente coerente,

2	problema é possível encontrar a solução.	sociocultural, a maioria dos indivíduos não possui acesso ao voo de asa delta.	pois já deixa claro o conteúdo que o aluno deve utilizar, não possibilitando uma reflexão para chegar à solução.

Fonte: Dados da pesquisa.

As análises realizadas pelos licenciandos coincidiram com as nossas análises, as quais, de modo geral, também consideraram os problemas situados na Travessia I, apresentando, sobretudo, uma incoerência contextual e pedagógica. Diante da análise realizada, os alunos mencionaram que o problema 2 tinha uma maior necessidade de reformulação e reescreveram da seguinte forma:

Quadro 54 – Reformulação de Problemas

Problema original
Quanto vale a hipotenusa do triângulo traçado na escada de um local de voo de Asa Delta com 500 degraus, sendo que a escada tem 4m de largura e cada degrau tem 20 cm de altura?
Problema reformulado
Supondo que uma pessoa joga um objeto do alto de um prédio com 100 m de altura e que esse objeto caiu em linha reta, do topo do prédio até o chão, a 4 m a frente do edifício. Qual a distância percorrida por esse objeto?

Fonte: Dados da pesquisa.

Para facilitar a compreensão do problema reformulado, os alunos sugeriram que, ao ser aplicado na Educação Básica, o problema deveria ser associado a uma imagem, de modo a evitar que os alunos compreendam a “linha reta” como uma linha vertical.

Consideramos que o problema reformulado pode ser situado na Travessia II, pois é um problema que apresenta um contexto padrão, mas que necessitaria de uma redação mais estruturada, de modo que requer conceitos matemáticos básicos para a sua resolução e é moderadamente viável, realista e envolvente.

O grupo 3, formado pelos alunos A6, A7, A12, A20 e A24, recebeu os seguintes problemas:

Quadro 55 – Problemas para análise

Problemas originais
1. Em um prédio cada degrau de uma escada tem 15 cm de altura. Quantos metros a escada terá quando tiver 60 degraus?
2. Sabendo que cada degrau tem 50 cm de altura, calcule a altura da escada com 8 degraus em metros. Sabendo também que a distância da base para a parede é de 3 metros, calcule o comprimento do corrimão da escada.

Fonte: Dados da pesquisa.

Como discutido e apresentado na atividade quatro, o problema 1 está situado na Travessia II, uma vez que apresenta uma escrita estruturada e um contexto adequado. Embora esteja próximo de um exercício matemático, dependendo do nível utilizado, pode ser necessária uma reflexão para chegar à solução. O problema 2 também está situado na Travessia II, ao apresentar um contexto viável, original e criativo, permitindo que o Teorema de Pitágoras seja usado coerentemente, uma vez que é solicitado o cálculo do corrimão da escada, que pode ser entendido como a hipotenusa. No entanto, este problema apresenta uma inconsistência contextual, uma vez que menciona que o degrau da escada tem 50 cm.

Quanto à coerência didática desses problemas, o grupo 3 realizou a seguinte análise:

Quadro 56 – Análise da coerência didática feita pelo grupo 3

Problema	Coerência numérica	Coerência contextual	Coerência Pedagógica
1	O problema tem coerência numérica, podendo ser resolvido dentro de um sistema numérico.	O problema apresenta coerência, com medidas de um contexto real.	É coerente pedagogicamente, uma vez que instiga o aluno a ter o conhecimento de grandezas e medidas.
2	Possui coerência numérica, pois há a possibilidade de o problema ser resolvido com os dados apresentados.	O problema não apresenta coerência contextual, pois a informação sobre a altura do degrau equivalente a 50 cm de altura não está de acordo com a realidade e padrões comuns de construção de escadas.	O problema apresenta coerência pedagógica, pois pode ser resolvido utilizando o teorema de Pitágoras, um conceito comumente ensinado no Ensino Médio.

Fonte: Dados da pesquisa.

Diante da análise realizada, os alunos mencionaram que o problema 2 tinha uma maior necessidade de reformulação e reescreveram da seguinte forma:

Quadro 57 – Reformulação de Problemas

Problema original
Sabendo que cada degrau tem 50 cm de altura, calcule a altura da escada com 8 degraus em metros. Sabendo também que a distância da base para a parede é de 3 metros, calcule o comprimento do corrimão da escada.
Problema reformulado
Sabendo que a escada possui 20 degraus, sendo que cada degrau possui 20 cm de altura, calcule a altura total da escada. Além disso, sabendo que a distância da base da escada para a parede é de 6,92 metros, calcule o comprimento do corrimão dessa escada.

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a reformulação realizada pelo grupo 3, consideramos que o problema está situado na Travessia III, uma vez que passa a ser um problema com coerência contextual e mantém o contexto viável, original e criativo.

O grupo 4, formado pelos alunos A1, A3, A8, A18 e A21, recebeu os seguintes problemas:

Quadro 58 – Problemas para análise

Problemas originais
1. Se agrupar o 2º com o segundo degrau, qual figura geométrica consegue obter? É possível agrupar o 3º e o 4º degrau e conseguir uma figura geométrica? Qual a posição dos degraus para que isso seja possível?
2. O rapaz Jeremy deseja subir na escada do monte cristo, em nova esperança, no entanto, tem medo por causa da quantidade de degraus que ela possui. Muitos dos seus amigos já subiram ao monte, então para não ser o que único que não subiu, assim ele decidiu fazer perguntas as pessoas da redondeza sobre características da escada. Dentre elas, destaca-se – A escada tem 32 cubinhos; O degrau é dividido por 8;: Sua raiz quadrada é igual a $4\sqrt{2}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em nossas análises, o problema 1 está situado na Travessia II, uma vez que apresenta uma escrita estruturada e envolve a utilização do pensamento geométrico. O problema 2 está situado na Travessia I, pois não apresenta dados suficientes para a resolução. Embora o problema traga um contexto, ele não explicita qual é o problema.

Quanto à coerência didática desses problemas, o grupo 4 realizou a seguinte análise:

Quadro 59 – Análise da coerência didática feita pelo grupo 4

Problema	Coerência numérica	Coerência contextual	Coerência Pedagógica
1	Há coerência numérica, pois é possível responder as perguntas com os dados numéricos do problema.	O contexto do problema está coerente com a realidade.	Há coerência pedagógica, pois está adequado ao nível dos alunos, sendo provável que eles se interessem em resolver o problema proposto.
2	Não há coerência numérica, pois as informações fornecidas não permitem determinar o número de degraus da escada.	No contexto sociocultural de um aluno de Nova Esperança, o problema é coerente. Para os alunos que não conhecem a cidade, ficaria difícil a visualização da escada.	Fazendo os ajustes necessários, há coerência pedagógica.

Fonte: Dados da pesquisa.

Como podemos observar, as análises do grupo 4 coincidiram com nossas análises. Diante disso, os alunos mencionaram que o problema 2 tinha uma maior necessidade de reformulação e reescreveram da seguinte forma:

Quadro 60 – Reformulação de Problemas

Problema original
O rapaz Jeremy deseja subir na escada do monte cristo, em nova esperança, no entanto, tem medo por causa da quantidade de degraus que ela possui. Muitos dos seus amigos já subiram ao monte, então para não ser o que único que não subiu, assim ele decidiu fazer perguntas as pessoas da redondeza sobre características da escada. Dentre elas, destaca-se – A escada tem 32 cubinhos; O degrau é dividido por 8; Sua raiz quadrada é igual a $4\sqrt{2}$.
Problema reformulado
O rapaz Jeremy deseja subir na escada do Monte Cristo, em Nova Esperança. No entanto, tem medo por causa da quantidade de degraus que ela possui. Assim, decidiu buscar informações, e percebeu que: i) a escada possui 36 cubinhos e o último degrau tem 8 cubinhos de altura. Quantos degraus tem a escada?

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir do trabalho dos alunos na Reformulação de Problemas, é possível notar um envolvimento significativo dos licenciandos nesse tipo de atividade, em que ficou perceptível o interesse em propor problemas cada vez mais reais e coerentes.

Ao analisarmos as avaliações dos alunos em relação à Coerência Didática dos problemas propostos, constatamos que eles compreenderam os conceitos de coerência numérica, contextual e pedagógica, uma vez que identificaram nos problemas aspectos didáticos fundamentais, o que resultou em avaliações coerentes. Ao reformularem esses problemas, os licenciandos compartilharam suas ideias e preocupações quanto à relevância de criar problemas que sejam coerentes didaticamente, buscando corrigir os aspectos considerados incoerentes.

Nesse contexto, destacamos a observação de Ellerton (2015), que ressalta a importância de os professores em formação inicial não apenas entenderem o que está envolvido na Proposição de Problemas, mas, também, serem capazes de criar problemas competentes e consistentes. O ato de reformular permite uma avaliação e uma autoavaliação dos problemas propostos, o que colabora diretamente com a capacidade de propor problemas competentes e consistentes. Assim, acreditamos que envolver os licenciandos em atividades de Reformulação de Problemas auxilia no aprimoramento de suas análises críticas e reflexivas sobre os problemas a serem levados para trabalhar em suas futuras salas de aulas.

7.5.1 Inferências

A atividade 5 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. A Reformulação de Problemas é uma estratégia eficiente para possibilitar o envolvimento dos alunos na atividade de Proposição de Problemas, colaborando no desenvolvimento de habilidades de proposição de problemas coerentes didaticamente.

ii. A atividade de reformulação de problemas permite que o futuro professor avalie problemas propostos por outras pessoas, assim como faça sua própria autoavaliação, estimulando habilidades crítico-reflexivas para analisar materiais recebidos, problemas dispostos em livros didáticos, na web, dentre outros.

iii. A mediação do professor é fundamental na atividade de Proposição de Problemas, pois um problema aparentemente rotineiro pode ser uma oportunidade de aprofundamento matemático e de manifestação do pensamento algébrico.

iv. À medida que os participantes adquirem experiência na Proposição de Problemas, eles tornam-se mais eficientes ao propor problemas e mais criativos ao reformulá-los.

v. Assegura que ao propor problemas, o professor deve orientar que eles sejam desafiadores e potencializadores, capazes de possibilitar a construção do conhecimento e/ou aprofundar o aprendizado dos alunos, evitando as simplificações de conceitos no processo de aprendizagem.

7.6 Atividade 6 – Propondo Problemas

Esta atividade teve como objetivo refletir sobre as habilidades dos futuros professores em propor e explorar problemas e foi realizada em dois encontros de 2h cada. Nesta atividade, a turma foi dividida em seis grupos, sendo que cada grupo recebeu, de forma aleatória, uma das seis atividades a seguir:

Quadro 61 – Atividades de Proposição de Problemas

Atividades
1. Elabore um problema que tenha como resultado o número $2\sqrt{3}$.
2. Elabore um problema que tenha como resultado o número 0,75.
3. Elabore um problema que tenha como resultado o número $\frac{2}{3}$.
4. Elabore um problema que tenha como resultado o número -17.
5. Elabore um problema que tenha como resultado o número $3\frac{2}{3}$.
6. Elabore um problema que tenha como resultado o número 0.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

No início da atividade, os alunos foram orientados a propor um problema que resultasse no número dado. Os alunos tiveram dificuldades com essa proposta de atividade, uma vez que, de acordo com eles, propor um problema já não é uma tarefa simples, logo, ao se limitar a um resultado, essa tarefa torna-se ainda mais complexa. Dessa forma, os alunos tiveram um tempo considerável para propor o problema, uma vez que, inicialmente, apresentaram problemas, mas, ao analisarem, descobriram que estes poderiam não ser, de fato, problemas. Por esse motivo, esta etapa requereu um tempo considerável para o grupo poder aprimorar o seu próprio problema proposto.

A presente atividade corrobora o que Ellerton (2015) menciona em relação à relevância de os professores em formação compreenderem o processo de Proposição de Problemas, mas, sobretudo, se tornarem propositores de problemas competentes e consistentes. Assim, consideramos este momento fundamental, uma vez que, baseados nas discussões realizadas nos encontros anteriores, durante o processo de Proposição de Problemas, os alunos refletiam e se questionavam sobre o problema proposto, avaliando se configurava ou não um problema e se este problema apresentava ou não uma Coerência Didática.

Após todos os grupos elaborarem o seu problema, tivemos o momento da apresentação, em que cada grupo fez a leitura do seu problema, como podemos ver a seguir:

Quadro 62 – Problemas propostos pelos alunos

Atividade	**Problema Proposto**	**Resultado esperado**
Grupo 1: A3, A18 e A21	João tem aproximadamente 1,73 metros de altura. Ao olhar para o chão reparou que sua sombra tinha um comprimento que parecia ser maior que o seu comprimento. Então, pediu ao seu amigo Pedro para mediar a sua sombra, esta mede 3 metros. Depois disso, João ficou curioso para saber a distância da sua cabeça para a cabeça de sua sombra. Ajude João a descobrir essa distância. Para facilitar os cálculos, troque 1,73 por √3 e responda qual a nova distância, analise se há diferenças e expresse sua opinião a respeito.	$2\sqrt{3}$
Grupo 2: A5, A11 e A13	Em um açougue, temos entradas e saídas de muitos kg de carne todos os dias. Numa sexta-feira o entregador deveria descarregar no açougue o equivalente a 2 mil kg. Por engano, ele descarregou apenas 62,5 % do que seria descarregado. Quantas toneladas de carne o entregador deixou de entregar?	0,75
Grupo 3: A7, A12 e A20	Um tanque de água está com a metade de sua capacidade total. Se retirarmos um terço da água do tanque, qual será a quantidade de água restante em relação a capacidade total do tanque?	$\frac{2}{3}$
Grupo 4: A9, A10, A19, A23 e A24	Janiele tem uma conta corrente no banco MM, sem rendimento e só cobra taxa de saque de 11,00 reais. Ela deposita todo mês 125,00 reais, isso pensando em retirar em 2 anos. Durante o mês de maio, no 5º mês, ela precisou pagar uma conta e fez um saque da sua conta corrente no valor de 285,00 reais. No próximo mês, ela não depositou nada, só depositou no 13º mês. Mas, no 14º mês ela resolveu sacar todo seu dinheiro que tinha depositado. Qual foi seu saldo final?	-17
Grupo 5: A14, A15 e A16	Ana participou de uma corrida juntamente com outros 9 alunos. A pista possui 600 metros. Vencerá quem atingir 4 voltas completas. Ao final da corrida, Ana ficou em 2º lugar, pois ela percorreu 2,2 km antes que o vencedor chegasse à linha de chegada. Represente em forma de fração mista o circuito em que Ana percorreu antes de perder.	$3\frac{2}{3}$
Grupo 6: A4, A15 e A17	Artur pretende realizar uma viagem utilizando um veículo cujo consumo médio de combustível é de 10 Km/L, ele abasteceu 30 L. Sabendo que percorrerá 300.000 m, ao final da viagem com quantos litros o carro irá ficar?	0

Fonte: Dados da pesquisa.

Cada grupo apresentou o seu problema, mas não mencionou qual o resultado esperado que a atividade pedia. Salientamos que, até esse momento, os alunos ainda não tinham percebido que cada grupo recebeu uma atividade diferente. Após isso, passamos para a próxima etapa da atividade, em que cada grupo escolheu um outro grupo para resolver e fazer a análise de seu problema.

A atividade 1, que apresentou o problema a seguir, foi respondida e analisada pelos alunos do grupo 6, composto pelos discentes A4, A15 e A17.

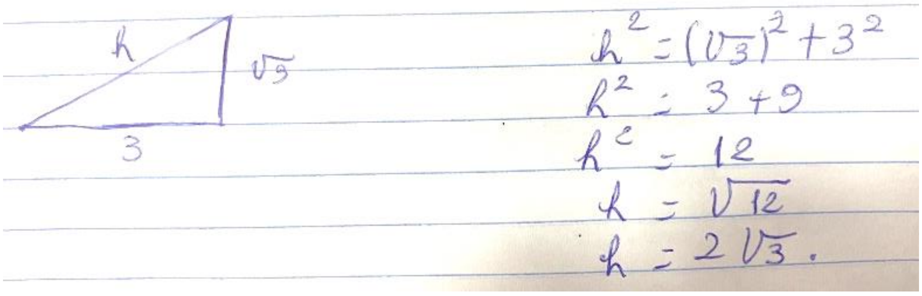
Quadro 63 – Problema proposto em resposta a atividade 1

João tem aproximadamente 1,73 metros de altura. Ao olhar para o chão reparou que sua sombra tinha um comprimento que parecia ser maior que o seu comprimento. Então, pediu ao seu amigo Pedro para mediar a sua sombra, esta mede 3 metros. Depois disso, João ficou curioso para saber a distância da sua cabeça para a cabeça de sua sombra. Ajude João a descobrir essa distância. Para facilitar os cálculos, troque 1,73 por √3 e responda qual a nova distância, analise se há diferenças e expresse sua opinião a respeito.

Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo 6 respondeu o problema utilizando o Teorema de Pitágoras da seguinte forma:

Figura 38 – Resolução da atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com a análise dos alunos, o problema apresentado é desafiador e apresenta uma coerência didática. Em nossas análises, o problema está situado na Travessia III, pois apresenta uma escrita estruturada, contexto original e criativo, possibilitando a utilização adequada de relações matemáticas. Além disso, os alunos alcançaram o objetivo da atividade 1, propondo um problema que resultasse em $2\sqrt{3}$.

Para a atividade 2, foi apresentado o seguinte problema:

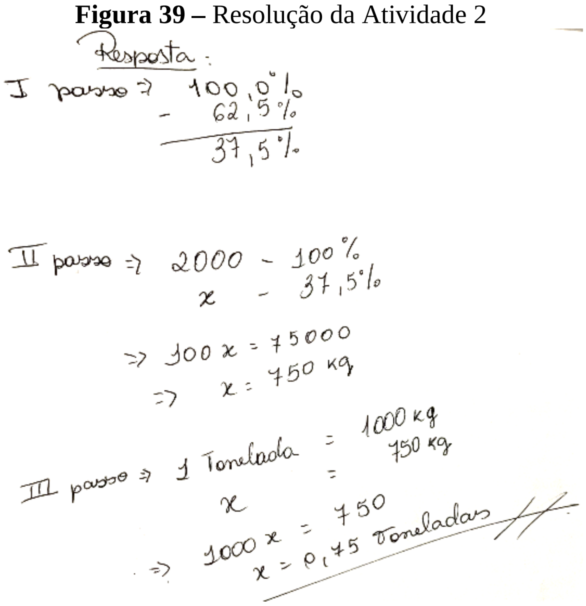
Quadro 64 – Problema proposto em resposta a atividade 2

Em um açougue, temos entradas e saídas de muitos kg de carne todos os dias. Numa sexta-feira o entregador deveria descarregar no açougue o equivalente a 2 mil kg. Por engano, ele descarregou apenas 62,5 % do que seria descarregado. Quantas toneladas de carne o entregador deixou de entregar?

Fonte: Dados da pesquisa.

Essa atividade foi analisada pelo grupo 1, formado pelos alunos A3, A18 e A21, que responderam o problema utilizando Regra de Três Simples da seguinte forma:

Figura 39 – Resolução da Atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos analisaram o problema e o consideram com coerência didática, mencionando que, mesmo utilizando conceitos básicos da matemática fundamental, é um problema desafiador e que requer uma reflexão para chegar à solução. Em nossas análises, o problema está situado na Travessia III, sobretudo pelo seu contexto original e criativo. Além disso, é um problema viável, realista e envolvente. Como pudemos ver, o grupo 2 alcançou o objetivo da atividade, propondo um problema que resultasse em 0,75.

Para a atividade 3, foi apresentado o seguinte problema:

Quadro 65 – Problema proposto em resposta a atividade 3

Um tanque de água está com a metade de sua capacidade total. Se retirarmos um terço da água do tanque, qual será a quantidade de água restante em relação a capacidade total do tanque?

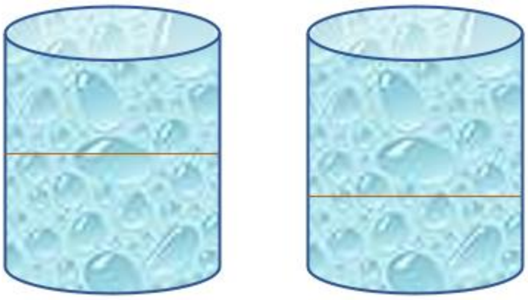
Fonte: Dados da pesquisa.

Em nossas análises, o problema está situado na Travessia II, uma vez que ele estava coerente com os dados que foram apresentados e exibia um contexto moderadamente viável, realista e envolvente. Contudo, percebemos que o problema não correspondeu ao objetivo da atividade, que consistia em propor um problema que resultasse em $\frac{2}{3}$.

No entanto, o grupo 4, composto pelos alunos A9, A10, A19, A23 e A24, analisou essa atividade e apresentou algumas dificuldades iniciais no problema, sugerindo uma reformulação na escrita. Conforme o grupo, o fato de o problema iniciar mencionando uma fração na qual a capacidade da água existente no tanque seria o todo e, em seguida, esse todo passar a ser a capacidade total do tanque dificultou a compreensão.

A partir dessas observações, ampliamos a discussão, apresentando na lousa uma ilustração semelhante à mostrada na imagem a seguir:

Figura 40 – Ilustração da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa.

A linha vermelha no primeiro tanque indica que a metade da sua capacidade está preenchida com água. No segundo tanque, indica a água pertencente ao tanque após ter sido retirado $\frac{1}{3}$ da água que havia no primeiro tanque. Dado que o problema apresentado pelos alunos questiona a quantidade de água que sobrou em relação à capacidade total do tanque, através da imagem, é possível notar que o tanque ficou com $\frac{1}{3}$ de água. No entanto, se o problema tivesse questionado em relação à água que existia no tanque, a água que sobra representa $\frac{2}{3}$.

Analisando esse problema, percebemos que ele traz a necessidade da compreensão de fração como parte e todo, sendo que, inicialmente, o todo é a água existente no tanque e, em seguida, o todo é a capacidade total do tanque. Traduzindo o problema para a linguagem matemática, percebemos que, em síntese, os alunos questionaram quanto é $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$, que equivale a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Contudo, salientamos que, embora seja um problema interessante que possibilita um desafio e uma compreensão de conceitos, ele não corresponde à proposta inicial da atividade, que pedia a proposição de um problema que tivesse como resultado o número $\frac{2}{3}$. Diante disso, no decorrer da discussão, o próprio grupo que elaborou o problema percebeu o equívoco e mencionou que a pergunta do problema deveria ser modificada pela seguinte pergunta: "Ao retirar $\frac{1}{3}$ dessa água, qual a capacidade vazia do tanque em relação à sua capacidade total?"

O grupo explicou que também poderia perguntar: "qual a quantidade de água restante no tanque em relação à água inicial?". Entretanto, seria um questionamento evidente, pois, como foi retirado $\frac{1}{3}$ da água, seria óbvio que restaria $\frac{2}{3}$ da água.

Para a atividade 4, foi apresentado o seguinte problema:

Quadro 66 – Problema proposto em resposta a atividade 4

Janiele tem uma conta corrente no banco MM, sem rendimento e só cobra taxa de saque de 11,00 reais. Ela deposita todo mês 125,00 reais, isso pensando em retirar em 2 anos. Durante o mês de maio, no 5º mês, ela precisou pagar uma conta e fez um saque da sua conta corrente no valor de 285,00 reais. No próximo mês, ela não depositou nada, só depositou no 13º mês. Mas, no 14º mês ela resolveu sacar todo seu dinheiro que tinha depositado. Qual foi seu saldo final?

Fonte: Dados da pesquisa.

Em nossas análises, o problema está situado na Travessia I, pois apresentou uma falha na coerência numérica e contextual. Além disso, o problema não atende ao objetivo da atividade, que consistia em propor um problema que resultasse em – 17.

A atividade 4 foi analisada pelo grupo 2, composto pelos alunos A5, A11 e A13, que demonstraram certa dificuldade na resolução. Para eles, o problema não apresentava dados suficientes para ser resolvido. Além disso, não havia uma coerência contextual, uma vez que o valor da taxa cobrada pelo banco não correspondia à realidade.

Discutindo o problema por partes, os alunos fizeram as seguintes observações:

Quadro 67 – Análise do problema proposto na atividade 4

Partes do Problema	**Observações do grupo 2**
Janiele tem uma conta corrente no banco MM, sem rendimento e só cobra taxa de saque de 11,00 reais.	É de conhecimento geral que os bancos só podem cobrar a tarifa de saque se for excedido o número de saques realizados por mês. Contudo, no banco apresentado no problema, fica parecendo que independentemente da quantidade, o valor é cobrado. Assim, falta uma coerência contextual.
Ela deposita todo mês 125,00 reais, isso pensando em retirar em 2 anos.	Com essa informação, temos que a meta dela é juntar R$ 3.000,00 em 24 meses.
Durante o mês de maio, no 5º mês, ela precisou pagar uma conta e fez um saque da sua conta corrente no valor de 285,00 reais.	Como todo mês ela deposita R$ 125,00, no 5º mês ela depositou R$ 625,00. Ao fazer o saque de R$ 285,00 e ao pagar a taxa de saque, ela ficou com R$ 329,00 na conta.
No próximo mês, ela não depositou nada, só depositou no 13º mês.	Com a última informação foi do 5º mês, o próximo é o 6º mês. Porém, quando eles colocam que só depositou no 13º mês, percebemos uma falha na escrita da informação, pois no início fala que ela deposita todos os meses. Mas, considerando a informação do 13º mês, temos que ela ficou com R$ 454,00.
Mas, no 14º mês ela resolveu sacar todo seu dinheiro que tinha depositado. Qual foi seu saldo final?	Se ela sacou tudo, logo, ficou com R$ 0,00 de saldo. Assim, nem precisaria fazer todos os cálculos, a própria pergunta responde o problema. Talvez seria interessante eles questionarem: "quanto ela sacou ao final do 14º mês?" Ou ter questionado algo referente a meta inicial, que seria juntar R$ 3.000,00 em dois anos. Da forma que está, é como se os dados do problema não estivessem conectados entre si.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ponderamos que a análise do grupo foi bem realizada, os quais detalharam todas as partes do problema, enquanto resolviam, buscando dar sentido ao desencadeamento das informações apresentadas no problema. Além disso, o grupo apontou um aspecto relevante de um problema: a conexão entre os dados apresentados, o que, neste caso, não ocorreu.

O grupo que propôs o problema concordou com as observações dos colegas e frisou que, devido à responsabilidade de criar um problema com um objetivo específico, eles se concentraram na situação, buscando algo inovador e que atendesse ao objetivo proposto. Por isso, não conseguiram estruturar a ideia de maneira lógica. Nesse sentido, a professora-pesquisadora sugeriu uma reformulação colaborativa do problema, em que, a partir das sugestões dos colegas, seriam feitas alterações necessárias.

Assim, o grupo modificou algumas informações, trazendo para o contexto de uma situação real e reformulou o problema da seguinte forma:

Quadro 68 – Problema reformulado

Problema reformulado
Janiele tem uma conta corrente no banco MM, sem rendimento e que se exceder quatro saques mensais, cobra uma tarifa de R$ 3,50 por saque realizado. Ela criou uma meta para que no período de 2 anos depositasse R$ 125,00 todos os meses. Durante o mês de maio, no 5º mês, ela fez o seu depósito da sua meta, como de costume, mas esqueceu de depositar o valor R$ 608,00 referente a sua fatura de cartão de crédito, que era debitada no

débito automático. Em decorrência disso, no mês seguinte Janiele tomou um susto com o saldo da sua conta, qual o valor ela visualizou?

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a reformulação, o problema proposto ficou coerente contextualmente, conectou os dados apresentados e atendeu à atividade proposta, resultando no valor -17.

Para a atividade 5, foi apresentado o seguinte problema:

Quadro 69 – Problema proposto em resposta a atividade 5

Ana participou de uma corrida juntamente com outros 9 alunos. A pista possui 600 metros. Vencerá quem atingir 4 voltas completas. Ao final da corrida, Ana ficou em 2º lugar, pois ela percorreu 2,2 km antes que o vencedor chegasse à linha de chegada. Represente em forma de fração mista o circuito em que Ana percorreu antes de perder.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em nossas análises, o problema está situado na Travessia III, o qual consiste em um problema original e muito criativo, com uma escrita bem estruturada e, de modo geral, considerado coerente didaticamente. Além disso, o grupo alcançou o objetivo da atividade, propondo um problema que tivesse como resultado $3\frac{2}{3}$.

A atividade 5 foi analisada pelo grupo 3, formado pelos alunos A7, A12 e A20. O grupo mencionou que os dados dos problemas foram bem apresentados e articulados, apresentando, portanto, uma coerência didática. Os alunos mencionaram que responderam o problema fazendo uma analogia à representação de frações, visto que o problema pedia a resposta em fração.

Assim, explicaram:

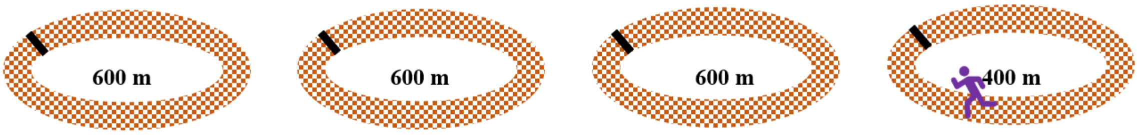
Quadro 70 – Explicação da resolução do problema feita pelo grupo 3

Sabendo que o vencedor era aquele que completasse 4 voltas completas e que Ana ficou não foi a vencedora, pois ficou em 2º lugar, entendemos que ela não completou as 4 voltas. Assim, fizemos a conversão de quilômetro para metros, para saber quantas voltas equivaliam aos 2,2 km percorridos por Ana e obtivemos que ela percorreu 2200 metros. Como cada volta equivale a 600 metros, percebemos que ela percorreu 3 voltas completas e $\frac{2}{3}$ de uma volta completa. Representando em fração mista, ela percorreu $3\frac{2}{3}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

A explicação do grupo foi coerente com as informações sobre o problema, mas os alunos não conseguiram acompanhar a discussão. De antemão, o grupo propôs que cada aluno representasse a situação por meio de uma pista de 600 m, o que facilitaria a compreensão do raciocínio explicado. A partir da sugestão dos alunos, elaboramos a ilustração seguinte, usando os recursos de “inserir formas” do Word.

Figura 41 – Ilustração da resolução da Atividade 5



Fonte: Dados da pesquisa.

É importante salientar que esta ilustração aborda uma nova compreensão de fração, a qual, na maioria das vezes, é compreendida somente como "parte e todo". Além disso, este problema também propõe uma representação feminina para os corredores profissionais, que, muitas vezes, é voltada para a imagem masculina.

Para a atividade 6, foi apresentado o seguinte problema:

Quadro 71 – Problema proposto em resposta a atividade 6

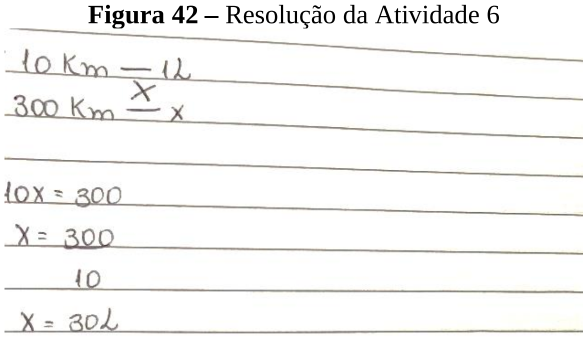
Artur pretende realizar uma viagem utilizando um veículo cujo consumo médio de combustível é de 10 Km/L, ele abasteceu 30 L. Sabendo que percorrerá 300.000 m, ao final da viagem com quantos litros o carro irá ficar?

Fonte: Dados da pesquisa.

A atividade 6 foi analisada pelo grupo 5, composto pelos alunos A14, A15 e A16, os quais consideraram a atividade coerente didaticamente, pois tem resolução possível, condiz com a realidade e é um problema que conduz o aluno a pensar, antes de resolvê-lo. Em nossas análises, o problema está situado na Travessia II, pois apresenta um contexto padrão, sua solução é viável e, moderadamente, envolvente. É um problema com uma escrita simples, mas estruturada, contemplando todos os aspectos da coerência didática. Com esse problema, os alunos atingiram o objetivo da atividade que consistiu em propor um problema que resultasse no número 0.

Os alunos do grupo 5 responderam o problema por meio de uma regra de três, como podemos ver a seguir:

Figura 42 – Resolução da Atividade 6



Fonte: Dados da pesquisa.

De modo geral, os problemas propostos pelos alunos estão situados nas Travessias II e III. Essa análise se deu a partir da observação da estrutura, categoria e viabilidade do problema. A partir dos problemas propostos pelos alunos e da análise desses problemas feita pelos demais alunos, podemos notar a incorporação da teoria na prática, uma vez que ficou perceptível a preocupação dos alunos em proporem/avaliarem problemas que atendam às concepções atuais de problema e que sejam coerentes didaticamente (Abramovich; Cho, 2015; Allevato; Onuchic, 2014; Andrade, 2017; Van de Walle, 2009).

Dessa forma, podemos concluir que as diferentes estratégias no trabalho com a Proposição de Problemas e a prática de Proposição de Problemas auxiliam no aperfeiçoamento dos problemas propostos. Neste trabalho, utilizamos as seguintes estratégias: i) Propor problemas partindo de uma situação aberta; ii) Propor problemas partindo de um contexto matemático; iii) Reformulação de Problemas; iv) Considerar um resultado como ponto de partida para propor um problema.

7.6.1 Inferências

A atividade 6 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. Os futuros professores conseguem propor problemas coerentes didaticamente, apresentando uma escrita estruturada, um contexto original e criativo, permitindo a utilização adequada de relações matemáticas, sendo viável, realista e envolvente.
ii. As diferentes estratégias no trabalho com a Proposição de Problemas e a prática de Proposição de Problemas auxiliam no aperfeiçoamento dos problemas propostos.
iii. Trabalhar com a Proposição de Problemas na formação de professores nos permite analisar como esses futuros professores propõem problemas, de modo que possamos colaborar para o desenvolvimento de habilidades de Proposição de Problemas. Além disso, permite ao futuro professor aprimorar a sua compreensão da estrutura matemática de um problema, capacita-o para contemplar questões didáticas ao propor problemas, estimula a sua independência quanto aos recursos utilizados.

7.7 Oficinas

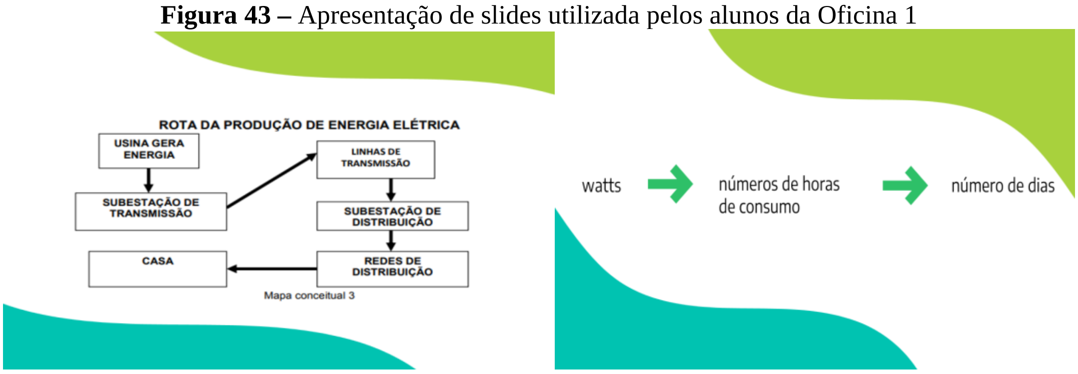
Como parte final do nosso levantamento de dados, dividimos a turma em quatro grupos de seis pessoas, nos quais cada grupo deveria ministrar uma oficina, utilizando a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. A escolha do tema e do conteúdo da oficina ficou a critério de cada grupo, devendo ser abordada ao nível de Ensino Médio. Cada oficina foi apresentada em um encontro de duas horas.

7.7.1 Oficina 1: Calculando a energia elétrica

A primeira oficina, composta pelos alunos A5, A11, A14, A15, A16 e A17, intitulada “Calculando a energia elétrica”, teve como objetivo geral possibilitar o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas por meio da abordagem de uma questão social relevante. Para tanto, o grupo definiu os seguintes objetivos específicos: i) Interpretar o contexto da utilização de energia elétrica através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas; ii) Instigar os alunos a pensarem em maneiras de reduzir os custos de energia elétrica; iii) Analisar o problema e propor ações e estratégias para atingir a meta de redução de 20% no consumo de energia elétrica; iv) Utilizar a matemática para discutir a importância da redução de energia elétrica.

Ao iniciar a oficina, por meio de uma apresentação de slides, os alunos discutiram aspectos relacionados ao Consumo de Energia Elétrica. Na ocasião, iniciou-se a apresentação da rota de produção de energia elétrica, como mostra a imagem a seguir. Os alunos discutiram, através da rota apresentada, que a energia elétrica é gerada na usina hidrelétrica, passando pelas subestações e redes de distribuição até chegar às nossas residências. Em seguida, discutiu-se que o valor a ser pago pelo consumo de energia elétrica é calculado com base nos watts, considerando os números de horas gastas e o número de dias consumidos.

Figura 43 – Apresentação de slides utilizada pelos alunos da Oficina 1



Fonte: Dados da pesquisa.

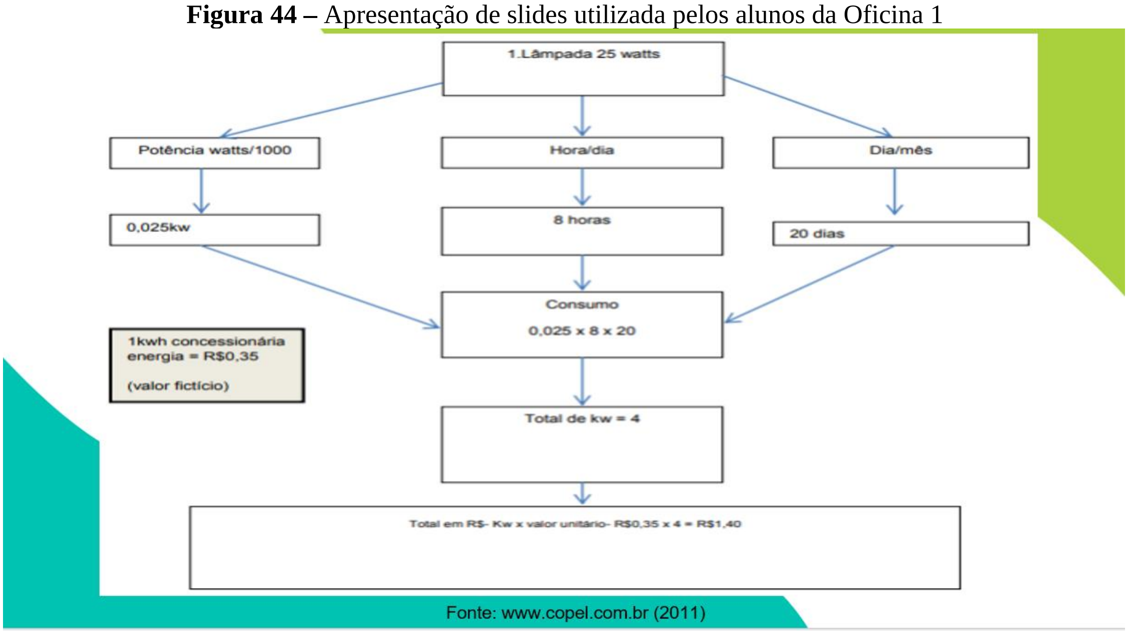
Após essa discussão, de forma didática e para ilustrar o que estava sendo discutido, o grupo apresentou o seguinte questionamento: “uma lâmpada com potência de 25 watts, ligada por 8 horas, durante 20 dias, irá consumir quantos watts?”

Antes de iniciar a resolução do questionamento proposto, foi explicado que o quilowatt-hora (kWh) é a unidade de energia usualmente utilizada, sendo que um kWh é a potência necessária para abastecer uma carga de 1.000 watts durante uma hora. Além disso, o grupo mencionou que a potência que aparece em cada aparelho indica a sua potência durante uma hora.

Sendo assim, considerando que a potência deve ser dividida por 1000, o cálculo do consumo final foi de $0{,}025 \,.\, 8 \,.\, 20 \;=\; 4\,kWh$. Para supor o valor a ser pago, eles utilizaram um valor fictício para o kWh, no qual uma concessionária de energia cobraria R$ 0,35 por kWh. Dessa forma, o valor a ser pago pelo uso dessa lâmpada seria de $0{,}35 \,.\, 4 \;=\; R\$1{,}40$.

Para ilustrar o exemplo apresentado, o grupo utilizou a imagem a seguir:

Figura 44 – Apresentação de slides utilizada pelos alunos da Oficina 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Dando continuidade à discussão, o grupo mediador apresentou a imagem a seguir, que mostra o consumo médio de alguns aparelhos, como uma geladeira, um chuveiro, uma lâmpada, uma máquina de lavar roupas, um ferro elétrico e uma televisão, bem como algumas dicas para economia de energia.

Figura 45 – Apresentação de slides utilizada pelos alunos da Oficina 1

ELETRO	CONSUMO MÉDIO EM %	DICA DE ECONOMIA DE ENERGIA
GELADEIRA/ FREEZER	12,1	-manter a porta fechada; -verificar borrachas da porta; -evitar roupas molhadas na parte traseira.
CHUVEIRO	44,51	-Posição verão podeeconomizar até 30%; -Reduzir o tempo do banho; -Ensaboar-se no verão com o chuveiro desligado.
ILUMINAÇÃO	21,04	-Desligar luzes dos ambientes desocupados; -Substituir lâmpadas incandescentes por fluorescentes.
MÁQUINA DE LAVAR ROUPA	0,82	-Juntar o maior número de peças até a capacidade máxima da máquina;
FERRO ELÉTRICO	1,11	-Desligar o ferro após o uso; -Não ligue o ferro em benjamins e Ts e quando a rede estiver sobrecarregada.
TELEVISÃO	9,99	-Programe sua tv para desligá-la com timer; -Tire o plug da tomada quando estiver desligada.
OUTROS	10,39	- Aqui incluem-se os demais eletros não citados

Fonte: Dados da pesquisa.

Uma questão relevante nessa discussão foi quando o grupo mediador apontou a coerência didática dos eletros apresentados, questionando a turma se, caso fossem propor um problema para os seus futuros alunos, quais desses eletros não estariam coerentes contextualmente. A turma respondeu que seria o chuveiro elétrico, uma vez que, na cidade de Patos – PB, onde está o campus VII da UEPB, esse tipo de aparelho não é usado com frequência.

Isso se deve ao fato de a cidade estar localizada no sertão paraibano, sendo considerada uma das cidades mais quentes da Paraíba. A cidade é conhecida como Morada do Sol. No ano, a temperatura em Patos-PB varia de 19 °C a 38 °C. Em certos períodos, como entre setembro e março (primavera e verão), ocorrem ondas de calor, com temperaturas que podem ultrapassar os 40°C.

Após essa discussão, os alunos passaram para a segunda parte da oficina, que teve como ponto de partida a seguinte atividade:

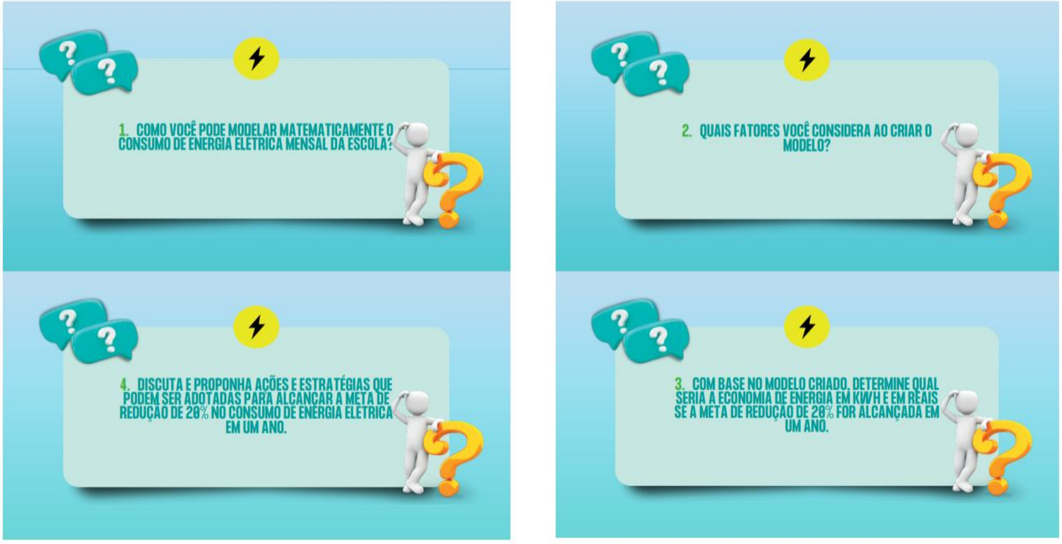
Quadro 72 – Atividade utilizada na oficina

Atividade
A escola consome, em média, 7000 kWh de energia elétrica por mês. O custo do kWh é R$1,04. A direção estabeleceu como meta reduzir o consumo em pelo menos 20% em um período de um ano.

Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo apresentou a atividade e solicitou que a turma fosse dividida em grupos. Para dinamizar, os alunos elaboraram as quatro fichas a seguir. A primeira foi entregue e, à medida que cada pergunta era respondida, era entregue a ficha seguinte.

Figura 46 – Fichas utilizadas na atividade da Oficina 1



Fonte: Dados da pesquisa.

O primeiro questionamento, “como você pode modelar matematicamente o consumo de energia elétrica mensal da escola?”, questionava quais as variáveis que compõem o modelo matemático para o cálculo da energia elétrica mensal. Assim, os alunos responderam que bastava utilizar o seguinte modelo matemático:

$$W = P.T$$

Onde:

W – Energia mensal consumida (Wh)

P: Potência do eletrodoméstico (Watts)

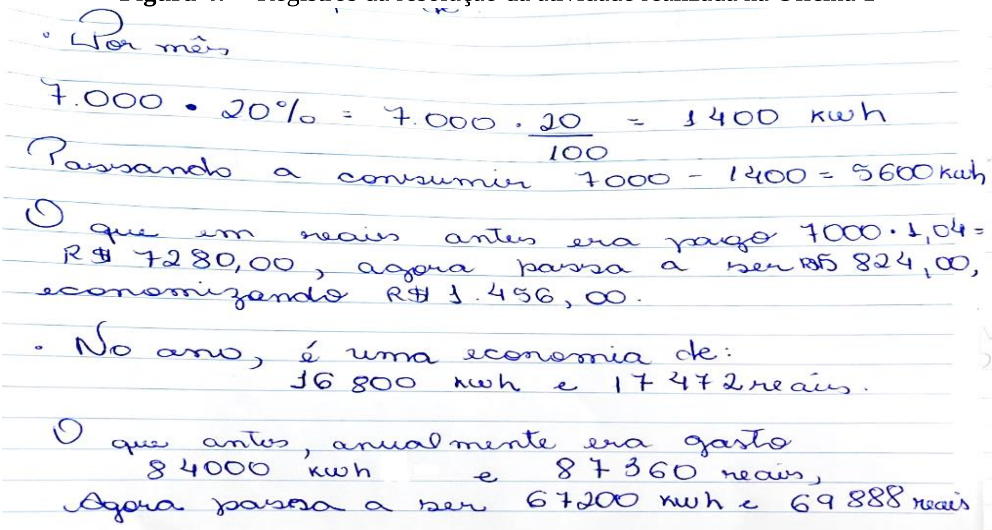
T: Tempo de utilização (hora)

Assim, a tarifa de energia elétrica é calculada em função do número de Kwh gasto por mês. Como já se sabe que a escola gasta 7000 kWh por mês, concluiu-se que $W = P.T = 7000\ kWh$.

Para o segundo questionamento, “quais fatores você considera ao criar o modelo?”, os alunos mencionaram os diversos fatores que influenciavam, tais como: os eletros que estavam sendo utilizados, a potência desses eletros, o tipo de lâmpadas e eletrodomésticos, dias de eventos na escola, número de alunos, número de aparelhos eletrônicos, o acesso à internet, a quantidade de salas, a quantidade de horas utilizando energia elétrica por dia e a quantidade de dia por mês.

Após a exploração inicial, os alunos entregaram o terceiro questionamento: “com base no modelo criado, determine qual seria a economia de energia em kWh e em reais se a meta de redução de 20% for alcançada em um ano”. Para essa questão, os alunos utilizaram o conceito de porcentagem e chegaram à conclusão de que, se reduzirem 20% o consumo mensal, eles consumiriam 5.600 kWh. Diante do valor apresentado inicialmente, os alunos multiplicaram esse valor por R$ 1,04 e concluíram que a escola pagaria R$ 5.824,00 de energia. A seguir, podemos ver como alguns aspectos dessa discussão podem ser elucidados.

Figura 47 – Registros da resolução da atividade realizada na Oficina 1



• Por mês
7.000 • 20% = 7.000 · $\frac{20}{100}$ = 1400 kwh
Passando a consumir 7000 − 1400 = 5600 kwh
O que em reais antes era pago 7000 · 1,04 =
R$ 7280,00, agora passa a ser R$5 824,00,
economizando R$ 1.456,00.
• No ano, é uma economia de:
16 800 kwh e 17 472 reais.
O que antes, anualmente era gasto
84000 kwh e 87 360 reais,
Agora passa a ser 67200 kwh e 69 888 reais

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, os alunos apresentaram o quarto questionamento: “discuta e proponha ações e estratégias que podem ser adotadas para alcançar a meta de redução de 20 % no consumo de energia elétrica em um ano”. Para esse questionamento, foram discutidas ações importantes, tais como: i) utilizar iluminação natural advinda de janelas; ii) realizar aulas de campo; iii) investir em energia solar; iv) nos dias frios, não ligar o ar-condicionado; v) utilizar lâmpadas com sensor de presença; vi) utilizar lâmpadas LED; vii) utilizar eletrodomésticos da classe A; viii) evitar deixar aparelhos na tomada quando não estiverem em utilização.

Em linhas gerais, consideramos esta oficina relevante, uma vez que os futuros professores utilizaram a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para discutir o consumo de energia elétrica nas aulas de matemática. A seguir, apresentamos alguns pontos importantes que pudemos observar na oficina:

i) Aplicação prática dos conceitos matemáticos: os problemas relacionados ao consumo de energia elétrica oferecem situações práticas para a aplicação de conceitos matemáticos, tais como operações matemáticas, proporção, porcentagem, média e funções. Apesar da oficina ter abordado apenas conceitos de operações matemáticas e porcentagem, podemos perceber que esses outros conceitos também podem ser usados.

ii) Conscientização sobre sustentabilidade: ao abordar o consumo de energia elétrica, os alunos podem compreender de forma mais aprofundada a importância da eficiência energética e do uso responsável dos recursos naturais. Isso pode contribuir para a formação de cidadãos conscientes e comprometidos com questões relacionadas à sustentabilidade.

iii) Proposta de interdisciplinaridade: a partir desse tema, os futuros professores podem propor em seus futuros campos de atuação a utilização de projetos interdisciplinares, pois o tema permite a integração com outras disciplinas, como Física, Química, Geografia e Biologia. Isso proporciona uma visão mais abrangente e contextualizada para os alunos.

iv) Desenvolvimento de habilidades para utilização prática: os alunos podem analisar suas próprias contas de energia, calcular o consumo médio, identificar dispositivos que consomem mais energia e colaborar na sua casa, propondo maneiras de reduzir o consumo. Isso envolve a aplicação prática de conceitos matemáticos no contexto do cotidiano.

i) Estímulo ao desenvolvimento do pensamento crítico: ao discutir o consumo de energia elétrica, os alunos podem ser desafiados a pensar de forma crítica sobre diferentes temas, como eficiência energética, fontes renováveis de energia, economia financeira, políticas públicas, dentre outros.

Portanto, incluir o tema do consumo de energia elétrica nas aulas de matemática não apenas fortalece o entendimento dos conceitos matemáticos, mas proporciona aos alunos uma compreensão mais profunda das questões sociais e ambientais contemporâneas. Assim, podemos identificar que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, além de permitir adentrar em questões sociais tendo como ponto de partida a atividade matemática, permite adentrar em questões matemáticas por meio da abordagem de temas transversais.

Para enriquecer oficina, sugerimos que, em uma próxima oportunidade, os alunos possam trabalhar com dados reais, apresentando contas de energia elétrica, de modo a permitir uma interpretação dos dados contidos na fatura e, dessa forma, sugerir a investigação de um modelo matemático. Além disso, é importante salientar a relevância da coerência contextual, uma vez que, apesar de os alunos terem se atentado a isso, citando o exemplo do chuveiro elétrico, em outras ocasiões, eles não trabalharam com dados coerentes contextualmente, como, por exemplo, na atividade em que não usaram o valor real da tarifa de energia elétrica.

7.7.2 *Oficina 2: O custo de combustíveis: observando a utilização da matemática em situações do cotidiano*

A segunda oficina, intitulada "O custo de combustíveis: observando a utilização da matemática em situações do cotidiano", teve como objetivo geral possibilitar a articulação entre conceitos matemáticos na resolução de problemas práticos, referentes ao consumo de combustível no cotidiano. Essa oficina foi ministrada pelos alunos A6, A9, A10, A19, A23 e A24.

Para iniciar a atividade, o grupo dividiu a turma participante em duplas e entregou a atividade a seguir:

Figura 48 – Atividade utilizada na oficina do grupo 2

Atividade

João mora na cidade "A" e trabalha na cidade "B", ele faz este trajeto entre as cidades de carro de segunda a sexta. A distância entre as cidades é de 41,3 km e dos quilômetros ida e volta percorrido 15% são tráfego em área urbana.

Modelo do carro	Ford Ka Se 2019
Cilindrada do motor	1.0
Tipo de combustível usado	Gasolina
Valor gasolina	R$ 5,25
Km/l	Estrada: 16,7 km/l; Cidade:14,2 km/l
Distância entre as cidades	41,3 km

fonte:https://seminovos.unidas.com.br/blog/ficha-tecnica-ford-ka-se-1-0-2019/. Preço gasolina: R$5,25 do posto de Juazeirinho - PB.

1. Desconsiderando eventuais ocorrências no trajeto como aceleradas, frenagens e paradas, calcule o gasto diário e semanal com o combustível.
2. Utilizando o que já sabe do problema, dê sugestões sobre uma forma que ele pudesse economizar no combustível.

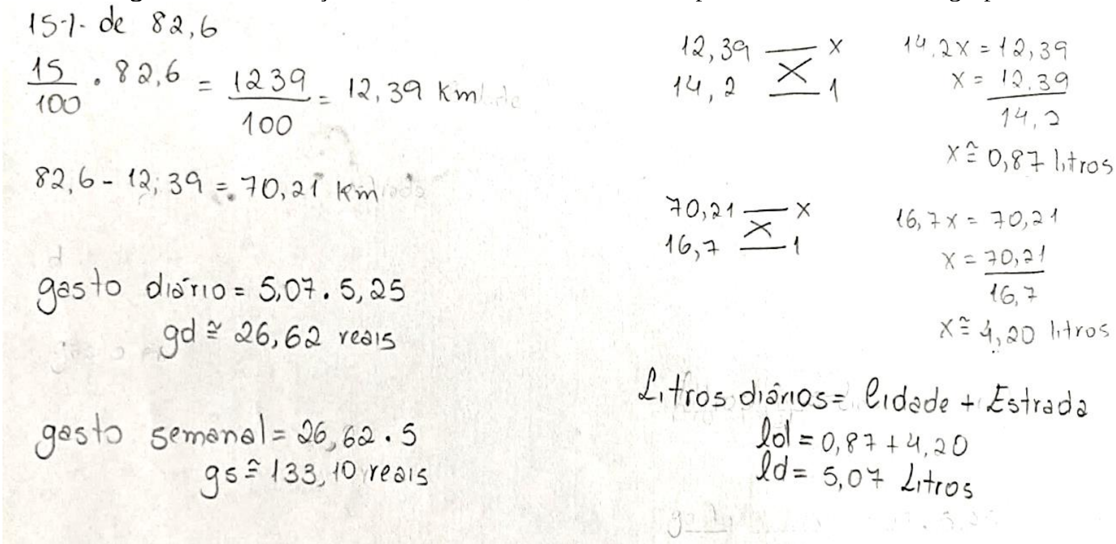
Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução do problema iniciou com a primeira questão, quando os alunos começaram a calcular o consumo diário e semanal de João em relação ao combustível. Para esta resolução, foram realizadas algumas explorações, tais como: i) determinar o valor de 15% do tráfego, uma vez que este é realizado em áreas urbanas; ii) calcular o consumo na área urbana, uma vez que este é maior que o consumo na estrada. Também foi discutido que era um cálculo médio de consumo, que não considerava as possíveis ocorrências no trajeto, como acelerações, frenagens, paradas, trânsito e ladeiras.

Após essa discussão, cada grupo apresentou sua resolução para o problema. Todos os grupos mencionaram ter iniciado a resolução calculando o trajeto percorrido na estrada e na área urbana, observando que, diariamente, João percorria 70,21 km na estrada e 12,39 km na área urbana. Assim, sabendo que na estrada o carro de João consome 16,7 km/l e na cidade 14,2 km/l, ele tinha um consumo na estrada de 4,2 l e na cidade de 0,87 l, totalizando 5,07 l diários de gasolina. Como naquele momento a gasolina custava R$ 5,25, o gasto diário de João com gasolina era de, aproximadamente, R$ 26,63 e seu gasto semanal era de, aproximadamente, R$ 133,15.

Para ilustrar a resolução acima, apresentamos, a seguir, o registro do grupo formado pelos alunos A15, A16 e A20.

Figura 49 – Resolução dos alunos A15, A16 e A20 ao problema da oficina do grupo 2



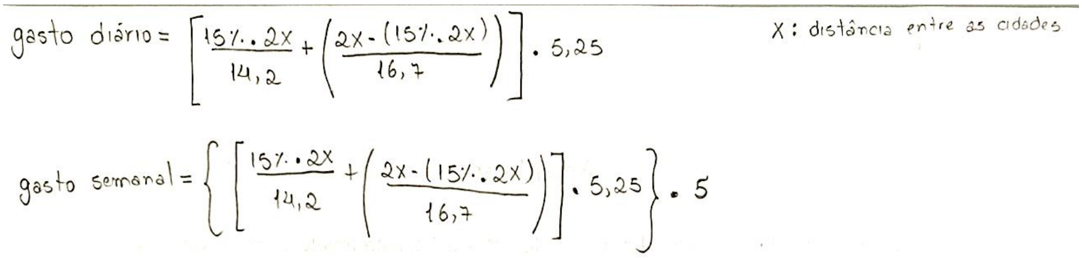
Fonte: Dados da pesquisa.

Com o intuito de aprofundar essa discussão, o grupo mediador questionou aos participantes como eles poderiam expressar algebricamente essa situação, de modo que qualquer condutor do modelo de carro apresentado também pudesse calcular o seu consumo diário e semanal de combustível.

Apesar de alguns grupos terem representado algebricamente, não podemos mencionar que essa representação foi algo imediato para todos os participantes. Alguns chegaram muito próximo, mas não conseguiram estruturar a sua representação. Um exemplo disso foi a representação dos alunos A15, A16 e A20 (figura 49), que, embora tenham estruturado muito bem a resposta aritmeticamente, como podemos ver no registro da figura 49 acima, não conseguiram transitar entre as representações aritmética e algébrica.

O grupo tentou representar da seguinte forma:

Figura 50 – Resolução dos alunos A15, A16 e A20 ao problema da oficina do grupo 2



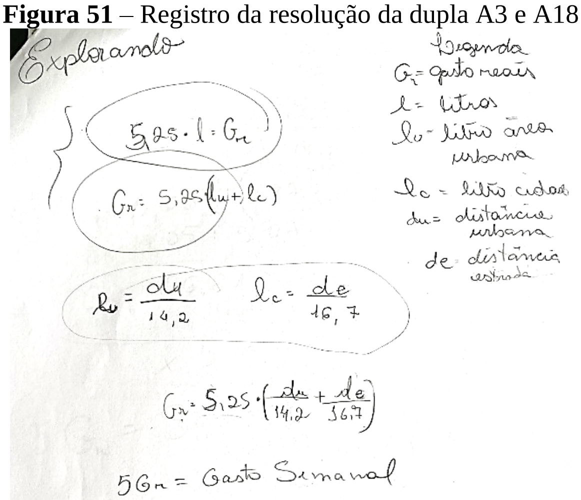
Fonte: Dados da pesquisa.

Essa representação algébrica condiz com a situação apresentada, em que 15% do percurso é feito em área urbana, contudo, não é uma representação adequada para qualquer percurso utilizando o modelo de carro apresentado. Nessa representação, a incógnita x representa a distância entre as cidades, porém, ela não é um termo desconhecido, visto que o problema expõe que essa distância é de 41,3 km.

Já a dupla formada pelas alunas A3 e A18 conseguiram resolver o problema proposto, uma vez que elas representaram a situação algebricamente, de modo que correspondesse a qualquer percurso realizado por um condutor, utilizando o modelo de carro apresentado. A dupla representou através da expressão: $Gr = 5{,}25.\frac{du}{14{,}2} + \frac{de}{16{,}7}$, em que Gr = gasto em reais diário; du = distância percorrida na área urbana e de = distância percorrida na estrada. Além disso, a dupla representou o gasto semanal através da expressão: $5Gr$.

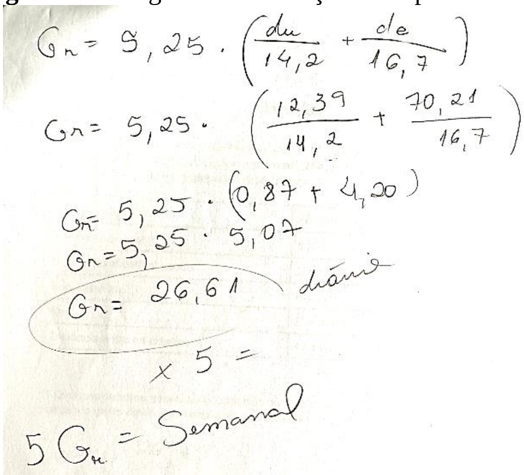
Podemos analisar a construção dessa representação por meio do registro ilustrado na figura 51 a seguir. Na imagem 51 abaixo, a dupla A3 e A18 faz as substituições, utilizando os valores dados no problema, para confirmar que a representação algébrica está coerente com a situação apresentada.

Figura 51 – Registro da resolução da dupla A3 e A18



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 52 – Registro da resolução da dupla A3 e A18



Fonte: Dados da pesquisa.

Após cada grupo apresentar a sua representação algébrica, o grupo mediador da oficina procedeu ao segundo questionamento: “utilizando o que já sabe do problema, dê sugestões sobre uma forma para que ele pudesse economizar combustível”. Para responder a essa pergunta, houve uma ampla discussão, na qual os grupos apresentaram as seguintes sugestões: reduzir a velocidade, evitar o uso de ar-condicionado, utilizar atalhos, dividir a gasolina com outra pessoa, procurar postos de gasolina mais acessíveis, mudar de cidade, trocar o modelo do carro por um mais econômico, andar de bicicleta, utilizar o álcool, evitar acelerações bruscas, manter a velocidade constante e considerar outras opções de veículos, como carros elétricos.

Em termos gerais, consideramos que a oficina mediada pelo grupo 2 trouxe um tema relevante, que tem sido de grande destaque nos últimos anos, sobretudo no que diz respeito à oscilação do preço da gasolina. A discussão sobre aspectos relacionados à economia de combustível abrange diversos tópicos, como o custo financeiro, o impacto ambiental, a sustentabilidade, a eficiência do veículo, a importação e exportação de recursos, a composição do preço da gasolina, entre outros.

Nesse sentido, destacamos a importância da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como uma metodologia que permite utilizar a matemática para discutir temas transversais. O incentivo à discussão sobre a redução do consumo de combustível pode não somente aumentar a economia financeira, mas, também, diminuir os impactos ambientais, uma vez que o consumo de gasolina contribui para a emissão de gases de efeito estufa e outros poluentes. Dessa forma, a redução do consumo de gasolina contribui para a sustentabilidade a longo prazo.

Apesar de toda essa discussão ser relevante, é importante salientar que a oficina também proporcionou um aprofundamento matemático por meio da exploração do problema em busca da representação algébrica da situação. Consideramos essa estratégia benéfica, uma vez que demonstrou que os alunos compreenderam a proposta da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, que permite ir além da solução do problema. A atividade de investigar a representação algébrica permitiu um maior aprofundamento da resolução do problema, possibilitando que os alunos expressassem o seu pensamento algébrico.

Como foi discutido ao longo deste trabalho, a álgebra não se limita à manipulação de símbolos, mas, também, proporciona a comunicação de ideias matemáticas de forma clara e precisa. Portanto, estimular o trabalho com atividades que envolvam diferentes representações permite aprofundar ideias e conceitos matemáticos, assim como o desenvolvimento de habilidades de comunicação matemática.

7.7.3 Oficina 3: Consumo de Água de uma Residência

A terceira oficina, composta pelos alunos A2, A4, A7, A12, A13 e A20, foi intitulada "Consumo de Água de uma Residência", tendo como objetivo principal promover o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos por meio de uma situação-problema contextualizada e relevante, oportunizando o desenvolvimento de habilidades matemáticas e reflexões sobre a importância do consumo consciente e da sustentabilidade.

Para tanto, o grupo buscou atingir os seguintes objetivos específicos: i) Praticar operações matemáticas básicas, como multiplicação, divisão, porcentagem e conversão de unidades de medidas; ii) Analisar e comparar quantidades, relacionando o consumo da família com a capacidade máxima de fornecimento de água; iii) Utilizar o raciocínio lógico e a resolução de problemas para tomar decisões e buscar soluções para a questão da falta de água na cidade; e iv) Refletir sobre a importância da conservação dos recursos hídricos, promovendo discussões sobre o consumo consciente, o impacto ambiental e a necessidade de adoção de medidas sustentáveis.

Para iniciar a oficina, o grupo mediador solicitou que a turma se dividisse em grupos e entregou a atividade abaixo. Após isso, iniciou-se a exploração do problema por meio do primeiro questionamento. À medida que cada questão ia sendo solucionada, os licenciandos partiam para a questão seguinte.

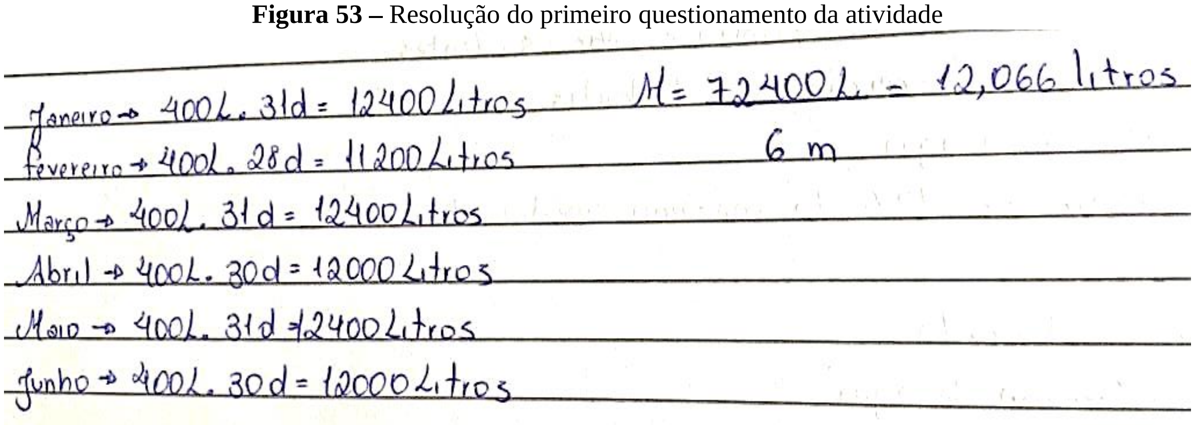
Quadro 73 – Atividade utilizada na pesquisa

Atividade
Em uma cidade, uma família de quatro pessoas consome, em média, 400 litros de água por dia em sua residência. Sabendo que o abastecimento de água na cidade é fornecido por uma única fonte, que possui uma capacidade máxima de fornecer 20.000 m^3 de água por dia, deseja-se analisar a situação em que a família consome água em excesso e a possibilidade de falta de água para outros moradores da cidade.
Questões para exploração: 1. Calcule o consumo mensal de água dessa família e a média mensal dos seis primeiros meses do ano. 2. Verifique se o consumo dessa família representa um percentual significativo da capacidade máxima de fornecimento de água da cidade. 3. Suponha que a cidade tenha uma população de 10.000 pessoas e todas consumam água em uma média diária de 350 litros por pessoa. Determine se a capacidade de abastecimento de água é suficiente para atender a demanda diária da população. 4. Proponha maneiras de economizar água para que não falte água na cidade. 5. Em quais situações pode ocorrer um erro na contagem de água para mais em uma residência?

Fonte: Dados da pesquisa.

Para o primeiro questionamento, os participantes começaram a investigar qual era o consumo de água por mês daquela residência, de acordo com o número de dias por mês, como podemos ver na figura 53 a seguir. Dessa forma, encontraram que o consumo médio de 6 meses era de 12.066 litros de água.

Figura 53 – Resolução do primeiro questionamento da atividade



Janeiro → 400L . 31d = 12400 Litros
Fevereiro → 400L . 28d = 11200 Litros
Março → 400L . 31d = 12400 Litros
Abril → 400L . 30d = 12000 Litros
Maio → 400L . 31d = 12400 Litros
Junho → 400L . 30d = 12000 Litros

$M = \frac{72400L}{6\,m} = 12,066$ litros

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, os alunos passaram para o segundo questionamento, afirmando que esse consumo não representava um percentual significativo nessa cidade, pois ele era equivalente a 0,002% da água da cidade fornecida por dia. Para chegar a essa solução, todos os grupos fizeram uma regra de três simples, como podemos ver a seguir:

Figura 54 – Resolução do segundo questionamento da atividade

2 $20\,000$ —— 100%

$0{,}4$ —— $x\,\%$

$$20000x = 40$$

$$x = \frac{40}{20000}$$

$$x = 0{,}002\,\%$$

Fonte: Dados da pesquisa.

No terceiro questionamento, foi trazido uma informação diferente do enunciado, em que as pessoas consumiam diariamente 350 litros de água por dia, o que equivale a 0,35 m³ por pessoa. Porém, mesmo assim a capacidade de abastecimento era suficiente, pois, como a cidade tem uma população de 10.000 pessoas, isso equivaleria a 3500 m³ de água por dia, sobrando 16.500 m³ da água fornecida.

Como uma forma de aprofundamento, os alunos questionaram: até que ponto a quantidade de água fornecida diariamente é suficiente para a população? Para responder a esse questionamento, foi calculado que, como a cidade fornece 20.000 m³ por dia, em uma cidade de 10.000 habitantes, cada pessoa poderia consumir em média 2 m³ por dia. Assim, a família com 4 pessoas, poderia consumir 8m³ por dia, o que equivale a 8000 litros por dia.

Para iniciar a discussão sobre a economia de água, o grupo entregou o quarto questionamento, perguntando quais as maneiras de economizar água no cotidiano. Para este questionamento, os alunos mencionaram as seguintes maneiras de economizar água: aproveitar água que lavou as roupas para jogar em calçadas, tomar banhos curtos, evitar deixar o chuveiro ligado por muito tempo, fechar a torneira enquanto escova os dentes, juntar água do banho para dar descargas, manter torneiras bem fechadas e reutilizar água.

Por fim, o grupo questionou quais outros fatores colaboram para um aumento de consumo indevido de água em uma residência. Diante desse questionamento, os alunos mencionaram: cano estourado, erro no relógio contador, infiltração, esquecer torneira ligada, receber visita e dias quentes.

A oficina, em geral, tratou de um tema relevante, que permite diversas abordagens matemáticas, o que possibilita integrar conceitos matemáticos de forma prática e relevante para os alunos, além de desenvolver outras habilidades por meio da matemática. A seguir, destacamos alguns pontos que consideramos potenciais para a abordagem deste tema na sala de aula de matemática:

i. Aplicação dos conceitos matemáticos: ao utilizar dados reais sobre o consumo de água, os alunos podem aplicar conceitos matemáticos de forma prática e concreta. Isso ajuda a tornar os conceitos mais visíveis e pertinentes para o dia a dia. Além disso, os alunos também podem compreender questões relacionadas à análise e interpretação de dados, como análise estatística e interpretação de gráficos e tabelas.

ii. Conscientização ambiental: ao abordar o consumo de água, os alunos também podem ser sensibilizados para questões ambientais e de sustentabilidade. Eles podem compreender como as suas escolhas e comportamentos em relação ao consumo de água têm um impacto no meio ambiente e na vida em sociedade, incentivando a responsabilidade social e ambiental.

iii. Resolução de problemas do mundo real: ao se depararem com problemas matemáticos relacionados ao consumo de água, os alunos podem aplicar suas habilidades matemáticas na resolução de problemas reais.

iv. Proposta interdisciplinar: a partir dessa abordagem, a matemática pode integrar-se a outras disciplinas, como Ciências, Biologia e Geografia. Isso proporciona uma abordagem interdisciplinar, enriquecendo a compreensão dos alunos sobre o tema.

Portanto, abordar o consumo de água na Licenciatura em Matemática foi uma oportunidade de discutir conceitos matemáticos, como também de despertar nos futuros professores a conscientização sobre a possibilidade e importância de discutir temas relacionados ao meu ambiente em suas aulas.

Analisando a oficina de um ponto de vista matemático, podemos avaliar que o problema poderia ter sido aprofundado, trazendo dados reais que pudessem demonstrar o impacto do uso indevido de água. No problema apresentado inicialmente, por exemplo, tínhamos uma família composta por quatro pessoas que consumiam, em média, 400 litros por dia. Já nas questões apresentadas para discussão, cada pessoa consumia 350 litros por dia. Ao analisarmos a situação de distribuição de água na cidade, percebemos uma grande discrepância entre esses números, o que nos levaria a entender que a família apresentada inicialmente consumia uma média aceitável de água por dia e a apresentada na questão 3 consumia em excesso. No entanto, por meio dos dados fornecidos, mesmo com o consumo excessivo de água, isso aparentava estar dentro da média prevista no abastecimento, isto é, ainda seria suficiente de acordo com a demanda da população.

Nesse contexto, consideramos que abordar um problema dessa maneira pode despertar no aluno a compreensão de que o consumo excessivo de água não terá consequências para a sociedade. Assim, a matemática estaria sendo utilizada para um desserviço à população, o que não é o nosso objetivo. É importante promover o uso responsável da matemática, incentivando a transparência, o pensamento crítico e a aplicação ética dos princípios matemáticos, de modo a contribuir para uma sociedade mais justa.

7.7.4 Oficina 4: Em busca do tesouro perdido: uma aventura matemática

A quarta oficina, intitulada "Em busca do tesouro perdido: uma aventura matemática", teve como objetivo promover a revisão e aprofundamento dos conceitos matemáticos por meio do jogo de tabuleiro "Tesouro Numérico", estimulando o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a reflexão crítica. O jogo foi elaborado pelo grupo mediador, que foi formado pelos alunos A1, A3, A8, A18, A21 e A22.

Figura 55 – Jogo de tabuleiro "Tesouro Numérico" utilizado pelo grupo 4

Fonte: Dados da pesquisa.

O jogo Tesouro Numérico tinha como objetivo coletar os dois tesouros perdidos, enfrentando desafios e resolvendo problemas matemáticos ao longo do jogo. Para iniciar a oficina, o grupo fez a apresentação do jogo, dos personagens fictícios e do contexto geral da oficina. Todos os integrantes estavam caracterizados de acordo com seus personagens, vestidos de piratas e utilizando espadas. Em seguida, foi exposto o seguinte situação-problema:

Quadro 74 – Situação-problema apresentada pelos licenciandos

Os piratas Morgana, Selene, Azaleia, Jasmine, Valentine, junto com seu capitão Jasper e o seu papagaio Espadarte, embarcaram em uma jornada para encontrar dois tesouros perdidos, entretanto, eles precisam decifrar enigmas para chegar aos tesouros.

Fonte: Dados da pesquisa.

Após isso, houve a divisão da turma em grupos e apresentação do jogo. Cada grupo escolheu um representante para participar no tabuleiro, enquanto os demais membros ficaram reunidos em grupos para responder ao desafio que ia sendo proposto, o representante também poderia participar do momento de resolução do desafio. Para um melhor entendimento, apresentamos, a seguir, as regras do jogo:

Quadro 75 – Regras do Jogo

Regras do jogo:

Preparação do Jogo: Cada jogador deve escolher suas peças e determinar a ordem de jogada. Todas as peças devem ser posicionadas no início do tabuleiro.
Progressão no tabuleiro: Cada jogador rola dois dados: um com números de 1 a 6 e outro com sinais + ou -. Os jogadores realizam esse procedimento duas vezes e operam com os resultados encontrados. Se o resultado de uma operação for positivo, o jogador avança um número específico de casas em direção ao deserto. Se o resultado for negativo, o jogador avança um número específico de casas em direção à neve.
Pergaminhos: Existem 4 casas no tabuleiro com pergaminhos. Quando um jogador cair em uma casa de pergaminho, ele deve tirar uma carta e enfrentar uma consequência positiva ou negativa.
Canhões: Existem 4 casas no tabuleiro com canhões. Quando um jogador cair em uma casa de canhão, ele deve tirar uma carta com consequência e entregá-la a outro jogador. A consequência pode ser favorável ou desfavorável.
Problemas Matemáticos: Existem 6 casas no tabuleiro com problemas matemáticos. Quando um jogador cair em uma casa de problema matemático, ele deve resolver o problema apresentado para avançar no jogo.
Coleta de Tesouros: Quando um jogador alcançar um dos tesouros, ele volta ao início e tem o direito de tentar coletar o segundo tesouro. O jogo pode ter dois vencedores se cada jogador coletar um tesouro ou um único vencedor se um jogador coletar ambos os tesouros.
Fim do Jogo: O jogo termina quando os dois tesouros forem coletados. Se houver um único jogador que coletou ambos os tesouros, ele é declarado o vencedor absoluto. Caso contrário, os jogadores que coletaram um tesouro cada são considerados vencedores.

Fonte: Dados da pesquisa.

As regras do jogo mostraram que o jogador se locomovia no tabuleiro por meio de operações aritméticas (adição e subtração) que eram realizadas a partir do lançamento de dados. Essa locomoção poderia ser tanto para a direita, quanto para a esquerda. Em ambos os lados, havia um tesouro, o que não causava problemas ao voltar casas, como acontece nos jogos de tabuleiro comuns.

Salientamos ser interessante utilizar esse tipo de tabuleiro com o início no centro, o que pode ser associado à reta numérica. Além disso, os participantes também associaram às temperaturas. À medida que se deslocavam para as casas à direita do ponto de partida, eles se aproximavam do deserto. À medida que se deslocavam para as casas à esquerda, eles se aproximavam da neve.

Ao longo do caminho percorrido no tabuleiro, os jogadores se deparavam com alguns pergaminhos. Na imagem 56 a seguir, apresentamos alguns desses pergaminhos:

Figura 56 – Pergaminhos do jogo Tesouro Numérico

Fonte: Dados da pesquisa.

Além dos pergaminhos, o jogo tinha outras fichas com problemas matemáticos, os quais abordavam conceitos relacionados a: raciocínio lógico, probabilidade, análise combinatória, teorema de Pitágoras, sistema de inequações, equação do 2º grau, grandezas e medidas, escala, cálculos aritméticos simples, função afim, plano cartesiano e trigonometria.

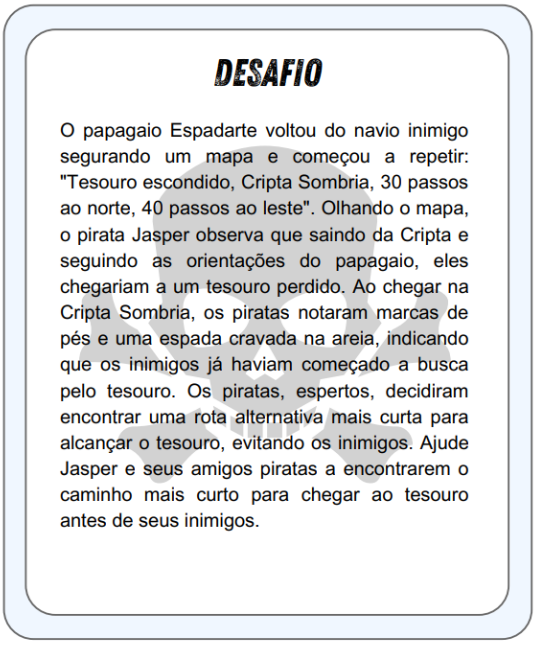
Figura 57 – Exemplo de desafios do jogo Tesouro Numérico

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, o jogo foi mediado no período de 1h20 min, momento em que os licenciandos puderam participar de forma ativa em meio à brincadeira e à resolução dos problemas propostos. Após dois dos grupos participantes encontrarem os tesouros, o grupo mediador realizou um momento de reflexão e aprofundamento matemático sobre as resoluções de alguns problemas que não foram respondidos pelos alunos no tempo proposto. Nesse momento, os alunos puderam refletir sobre os problemas, propor novas resoluções, discutir modelos matemáticos e propor novos problemas acerca do tema trabalhado.

Um problema que chamou muita atenção dos participantes foi o problema a seguir:

Figura 58 – Desafio do jogo Tesouro Numérico



DESAFIO

O papagaio Espadarte voltou do navio inimigo segurando um mapa e começou a repetir: "Tesouro escondido, Cripta Sombria, 30 passos ao norte, 40 passos ao leste". Olhando o mapa, o pirata Jasper observa que saindo da Cripta e seguindo as orientações do papagaio, eles chegariam a um tesouro perdido. Ao chegar na Cripta Sombria, os piratas notaram marcas de pés e uma espada cravada na areia, indicando que os inimigos já haviam começado a busca pelo tesouro. Os piratas, espertos, decidiram encontrar uma rota alternativa mais curta para alcançar o tesouro, evitando os inimigos. Ajude Jasper e seus amigos piratas a encontrarem o caminho mais curto para chegar ao tesouro antes de seus inimigos.

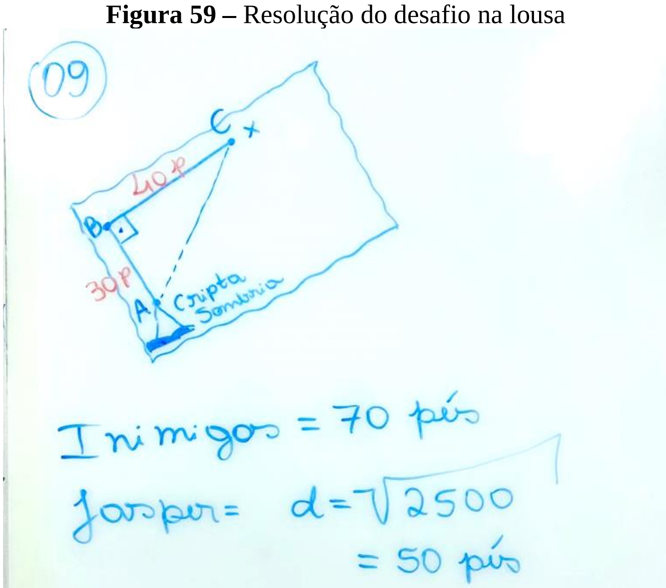
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao explorar esse problema, foi questionado, inicialmente, como seria possível representar essa situação, imaginando que a turma estivesse no navio. Então, se indagou qual seria o sentido do Norte e qual seria o sentido do Leste. Prontamente, a turma respondeu que o Norte seria a direção acima e o Leste seria à direita. Dito isso, foi questionado qual seria o ponto de partida, então, todos compreenderam que seria o local intitulado Cripta Sombria.

Estando todos cientes dessa informação, foi questionado qual seria a distância que eles deveriam percorrer da Cripta Sombria até o tesouro perdido. A partir desse questionamento, muitos mencionaram que seria uma distância de 70 passos, a qual corresponde à soma de passos ao norte e ao Leste. Contudo, o grupo afirmou existir uma rota alternativa e questionou: “Qual é essa rota?”

Para auxiliar nessa discussão, o grupo solicitou que representassem a situação por meio de um desenho, para uma melhor visualização da rota alternativa. Diante disso, o grupo expôs no quadro o desenho ilustrado na figura 59 a seguir, exibindo que, seguindo as coordenadas AB e BC, os inimigos alcançariam o tesouro após 70 passos, enquanto eles poderiam utilizar os conhecimentos do Teorema de Pitágoras e seguir a rota alternativa AC, a qual possibilitaria que eles alcançassem o tesouro após 50 passos.

Figura 59 – Resolução do desafio na lousa



Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a discussão desse problema, os alunos mencionaram o conceito utilizado “a menor distância entre dois pontos é uma reta”, contudo, questionaram: isso é possível em todas as situações? Diante desse questionamento, discutiu-se que, para a situação apresentada, foi uma ideia coerente, mas, na cidade, por exemplo, existem diversos fatores que não permitem utilizar esse conceito para chegar com mais rapidez a um determinado ponto.

A oficina apresentada pelo grupo 4 trouxe um diferencial das três oficinas apresentadas anteriormente. Enquanto as três primeiras oficinas buscaram abordar um tema transversal por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, essa fez uma associação da metodologia ao uso de Jogos Matemáticos, demonstrando que a utilização dessa metodologia não precisa ser isolada, e que, se associada a uma Tendência em Educação Matemática, ela pode possibilitar um enriquecimento no que se refere à proposta, como também na aprendizagem matemática.

Este trabalho associado pode oferecer uma variedade de benefícios significativos para o ensino e aprendizado da matemática. A seguir, apresentamos alguns aspectos que observamos durante a apresentação da oficina:

i. Envolvimento dos alunos: jogos matemáticos são, naturalmente, envolventes e podem despertar o interesse dos alunos. Eles proporcionam um ambiente lúdico que motiva os alunos a se envolverem ativamente nas atividades matemáticas, tornando o processo de aprendizagem mais agradável.
ii. Engajamento na atividade de Resolução de Problemas: os jogos matemáticos exigem que os jogadores resolvam problemas para progredir no jogo.
iii. Aprendizagem colaborativa: por meio da atividade em grupo, há um espaço de colaboração e comunicação entre os alunos.
iv. Contextualização dos conceitos: os jogos matemáticos, muitas vezes, proporcionam um contexto para os conceitos matemáticos, tornando mais fácil para os alunos compreenderem a aplicação prática de tais definições.

Assim, podemos perceber que a integração de jogos matemáticos à Exploração-Proposição-Resolução de Problemas oferece uma abordagem dinâmica para o ensino da matemática, promovendo um ambiente de aprendizado estimulante e formativo. Contudo, não podemos deixar de mencionar que essa integração também pode proporcionar alguns pontos negativos ou desafios que podem surgir ao implementar essa abordagem. Dentre eles, podemos mencionar:

i. Tempo de aula limitado: em muitas situações, o tempo de aula é limitado, e pode ser desafiador encontrar espaço para atividades lúdicas. Isso pode levar a uma escolha difícil entre cumprir o conteúdo programático e dedicar tempo a jogos matemáticos.
ii. Foco exclusivo na diversão: se não for estruturado corretamente, o uso de jogos matemáticos pode levar os alunos a se concentrarem mais na diversão do que nos objetivos educacionais. É importante garantir que os jogos estejam alinhados aos objetivos de aprendizado e não se tornem uma distração.
iii. Preparação de materiais e planejamento: a criação de jogos matemáticos pode exigir tempo e esforço significativos na preparação de materiais e no planejamento da aula.

Apesar dos desafios mencionados acima, consideramos que os benefícios do uso de jogos matemáticos superam os pontos negativos, desde que os jogos sejam integrados de maneira cuidadosa e intencional no contexto do currículo matemático. Porém, é importante encontrar um equilíbrio que atenda às necessidades específicas da turma e aos objetivos de aprendizagem.

7.7.5 *Avaliação das Oficinas*

Fazendo uma avaliação das oficinas apresentadas, pudemos identificar que os licenciandos compreenderam a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, mediando as oficinas de acordo com a postura que essa metodologia sugere.

Para uma melhor análise, organizamos a nossa avaliação no quadro 76 a seguir:

Quadro 76 – Análise das oficinas mediadas pelos licenciandos

Aspectos analisados	Oficina 1	Oficina 2	Oficina 3	Oficina 4
Planejamento da oficina - Clareza dos objetivos propostos - Relevância da proposta utilizada - Originalidade da proposta	Atendeu com excelência aos critérios analisados.	Atendeu com excelência aos critérios analisados.	Proposta com tema relevante, contudo, não atendeu inteiramente aos objetivos.	Atendeu com excelência aos critérios analisados.
Utilização da metodologia Exploração-Proposição-Resolução de Problemas - Adequação a proposta - Postura dos mediadores - Interação com os participantes	Atendeu com excelência aos critérios analisados.	Atendeu com excelência aos critérios analisados.	Atendeu com excelência aos critérios analisados.	Os problemas foram abordados de acordo com a proposta, porém, era destinado um tempo curto para os problemas.
Conteúdo matemático - Nível do conteúdo - Aprofundamento matemático	Os problemas abordaram conteúdo de nível médio, não sugerindo um aprofundamento.	Atendeu com excelência aos critérios analisados.	Os problemas abordaram conteúdo de nível médio, não sugerindo um aprofundamento.	Problemas com níveis variados, porém, não havia ênfase na compreensão da resolução.

Fonte: Dados da pesquisa.

No primeiro critério, “Planejamento da oficina”, todos os grupos apresentaram uma proposta original, que não se limitou ao problema, buscou utilizá-lo como um ponto de partida para a atividade matemática. As três primeiras oficinas tiveram como objetivo abordar, através da matemática, um tema transversal, incentivando a associação da matemática com temas que vão além dela. A quarta oficina integrou a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas com o uso de jogos matemáticos, o que foi muito positivo.

Das quatro oficinas, apenas a Oficina 3 não contemplou nossas expectativas, pois, como discutido ao longo de sua descrição, os questionamentos apresentados não permitiam o desenvolvimento de uma cidadania crítica em relação ao consumo excessivo de água. Apesar de este ser um dos objetivos da Oficina, o seu desenvolvimento não permitia essa reflexão, uma vez que não possibilitava a compreensão do impacto do consumo excessivo de água no abastecimento público da cidade.

No segundo critério, “Utilização da metodologia Exploração-Proposição-Resolução de Problemas”, as três primeiras oficinas atenderam à proposta da oficina, desde a mediação até a interação com os participantes. A quarta oficina, apesar de ter apresentado uma boa seleção de problemas a serem abordados, com níveis de dificuldade variados, delimitou pouco tempo destinado para a resolução de problemas, o que, muitas vezes, impediu que os alunos refletissem sobre o processo de resolução.

No terceiro critério, “Conteúdo matemático”, constatamos que apenas a segunda oficina atingiu os objetivos propostos, uma vez que possibilitou o aprofundamento matemático. A primeira, terceira e quarta oficina foram avaliadas como satisfatórias, uma vez que abordaram conteúdos de nível médio, mas não possibilitaram o aprofundamento matemático, nem o desenvolvimento de novos conceitos e novas sínteses. Nesse critério, somente a segunda oficina contemplou todas as nossas expectativas no que tange o conhecimento matemático, uma vez que ela possibilitou o aprofundamento matemático, solicitando que os alunos representassem a situação algebricamente.

7.8 Avaliação da Unidade Temática

Sugerimos esta análise reflexiva ao final da Unidade Temática visando obter um *feedback* construtivo dos alunos sobre os tópicos abordados. Dessa forma, os alunos foram estimulados a transcender a simples assimilação de informações, podendo refletir e expor aspectos relevantes vividos ao longo do curso. Compreendemos que esta atividade nos forneceu informações valiosas sobre o impacto do curso na aprendizagem e no desenvolvimento das habilidades dos licenciandos, o que nos forneceu informações confiáveis para análise de dados. Nesta atividade, compareceram 17 alunos.

Quadro 77 – Atividade utilizada para avaliação da Unidade Temática

Atividade: Produção de texto reflexivo
Escreva uma análise reflexiva sobre as experiências vivenciadas no decorrer deste curso. As seguintes perguntas podem ajudar a orientar sua reflexão: (1) O que aprendi sobre mim como aluno de matemática? (2) O que aprendi sobre mim como futuro professor de matemática? (3) Qual é a minha concepção de problema? (4) O que devo levar em consideração ao propor um problema? (5) Como foi a minha experiência com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas enquanto aluno – no decorrer do curso e enquanto professor – ao mediar uma oficina? (6) Quais aprendizagens levarei para as minhas futuras práticas docentes?

Fonte: Dados da pesquisa.

Os questionamentos estavam divididos em três eixos. O primeiro eixo (perguntas 1 e 2) relacionado à aprendizagem individual do licenciando enquanto aluno do curso de Matemática e enquanto futuro professor de Matemática. O segundo eixo (perguntas 3 e 4) tratava, especificamente, sobre o problema envolvendo a concepção do licenciando acerca do problema e dos aspectos importantes que ele considera que devem constituir um problema. E o terceiro eixo (perguntas 5 e 6) questionava a respeito da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, bem como refletia sobre as aprendizagens adquiridas a partir das experiências utilizando essa metodologia.

A primeira pergunta, “o que aprendi sobre mim como aluno de matemática?”, tinha como objetivo despertar a autoconsciência e a reflexão do licenciando sobre a sua própria trajetória de aprendizagem em matemática. Essa pergunta buscou explorar não somente o conhecimento adquirido em termos de conceitos matemáticos, mas também aspectos mais amplos de seu processo de aprendizagem e crescimento pessoal.

A seguir, apresentamos as respostas dos alunos à questão mencionada acima, as quais organizamos em quatro categorias: i) o papel do professor de matemática; ii) o desenvolvimento de conhecimentos; iii) a amplitude e aplicação da Matemática; e iv) a autorreflexão.

Quadro 78 – Respostas dos alunos a pergunta 1

Categorias	Respostas dos alunos
O papel do professor de matemática	A1: Eu aprendi que para ser um aluno de matemática não é apenas resolver atividades de forma robotizada, agora eu entendo essa postura e adotei ela. A postura que me refiro é do aluno questionador, que questiona todos os passos para entender toda a resolução. A3: Aprendi que não é preciso se prender apenas ao método de ensino do professor, o aluno pode ir além, explorando os seus conhecimentos. A10: Aprendi quais métodos me fazem ter interesse no assunto ensinado e isso pode refletir nos meus futuros alunos. A12: Aprendi que posso melhorar a forma do ensino e da aprendizagem matemática. A13: Eu aprendi sobre mim mesmo, que sempre posso aprender algo novo, não existe uma forma única ou caminho, há diversas possibilidades para se trabalhar com a matemática e poder levar isso para sua vida profissional vai toda diferença.
O desenvolvimento de conhecimentos	A2: No decorrer da disciplina, aprendi e potencializei muitos conhecimentos, destaca-se o raciocínio lógico, o pensar-ação e ser capaz de criar e /ou desenvolver atividades que incentivem o pensamento matemático do aluno, especialmente levando em consideração as vivências e cotidiano do aluno. A11: Aprendi coisas diferentes para as situações problemas, aprendi que um problema não é simplesmente uma atividade para resolver, mas uma oportunidade de despertar a criatividade. A15: Aprendi que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas estimula o raciocínio lógico, a criatividade e a resolução de problemas. Aprendi que o conhecimento matemático não se limita apenas ao conteúdo formal visto em sala de aula, mas também envolve a capacidade de conectar esse conteúdo com situações reais. A16: Percebi a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como uma ferramenta valiosa para aprimorar minhas habilidades e compreensões. Ela permite aguçar minha capacidade de identificar um problema, fórmulas, modelos matemáticos apropriados e interpretar os resultados obtidos. Além disso, a Modelagem Matemática amplia a compreensão sobre a aplicabilidade da matemática em diferentes contextos e intensifica uma abordagem analítica da Resolução de Problemas no mundo real. A19: Aprendi que há diversos caminhos para chegar a uma solução e que preciso adquirir o conhecimento em algumas áreas da matemática de maneira permanente.
A amplitude e aplicação da matemática	A4: Pude perceber um novo mundo matemático, em que situações diárias podem ser abordadas de diversas formas por um olhar matemático, e pude aprender um pouco sobre como devo enxergar as situações matematicamente. A6: Aprendi que a matemática vai além de números, fórmulas e códigos. A7: Aprendi que a matemática abrange muito mais do que a própria área da matemática, aprendi que a aplicação dela em outros campos enriquece mais o que se está ensinando. A8: Aprendi que a matemática vai muito além do que eu pensava enquanto estudante do Ensino Médio, pude realmente perceber minhas vantagens dentro da disciplina e também minhas limitações e dificuldades.
A autorreflexão	A9: Percebi que preciso evoluir muito e que tenho muito a aprender. A14: Percebo que tenho muito a aprender. A24: Me vejo como uma pessoa mais segura e mais forte, apesar das incertezas do futuro.

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao mencionarem que aprenderam aspectos relacionados à categoria i) o papel do professor de matemática, os licenciandos enfatizaram aspectos fundamentais que, quando estiverem atuando como professores, permitirão aperfeiçoar as suas práticas, se adequar às mudanças na educação, usar metodologias adequadas às necessidades dos alunos e proporcionar experiências de aprendizagem mais ricas e significativas para seus alunos.

A identificação dessa categoria nas falas dos licenciandos foi algo positivo, uma vez que demonstra que, no papel de alunos de Matemática, eles se veem como futuros professores e, desde então, já refletem sobre o compromisso com a prática futura. Ressaltamos esse aspecto positivo, pois, de acordo com Onuchic e Huanca (2013), é notório que muitos alunos do curso de Licenciatura em Matemática não têm consciência ou não reconhecem que o objetivo principal do curso é a formação de professores.

No que diz respeito à categoria ii) desenvolvimento de conhecimentos, os alunos mencionaram sobre o desenvolvimento do raciocínio lógico, a capacidade de criar atividades que estimulem o pensamento matemático dos alunos, a compreensão da diversidade de abordagens para solucionar problemas e a importância de adquirir conhecimentos matemáticos de forma contínua, reconhecendo que um problema é uma oportunidade para despertar a criatividade. Além disso, reconheceram a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como uma metodologia que permite estimular o raciocínio lógico, a criatividade e a resolução de problemas, proporcionando uma visão ampliada do conhecimento matemático, indo além do conteúdo formal da sala de aula.

O desenvolvimento dos conhecimentos mencionados durante a formação inicial de professores é fundamental, uma vez que eles podem representar uma importante mudança nas concepções de ensino de matemática do futuro professor. À medida que o professor de matemática compreende a matemática numa perspectiva aberta e como uma ferramenta que pode ser utilizada para explorar temas que estão além da sala de aula e permite que os alunos apreciem essa compreensão, uma mudança no ensino de matemática pode ocorrer. Nesse contexto, os alunos demonstraram ter uma boa compreensão da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e fizeram uma associação entre ela e a aproximação da matemática com o mundo real.

Na categoria iii) amplitude e aplicação da Matemática, agrupamos as falas em que os licenciandos mencionaram que as experiências no curso desmistificaram a visão limitada que eles tinham da matemática. Ressaltamos que esse é um dos aspectos principais da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, a qual visa o ensino de matemática, como também permite abordar temas que vão além dela. Essa percepção é de grande relevância, pois, como Martins e Andrade (2023) observaram numa atividade utilizando essa metodologia, os alunos buscam compreender o problema sob uma perspectiva que envolve temas de seu interesse e que vão além da matemática.

Por fim, na categoria iv) autorreflexão, alocamos as falas relacionadas à necessidade de aprofundar nos conhecimentos matemáticos. As falas nessa categoria nos permitem identificar que o desenvolvimento dessa Unidade Temática despertou nos licenciandos o interesse em revisar e/ou aprofundar os conteúdos da Educação Básica e os relembrou sobre seus compromissos com este público.

Refletir sobre a matemática e a respeito do seu ensino é algo fundamental na formação do professor de matemática, pois, como mencionam Fiorentini e Oliveira (2013):

> Não basta o professor dominar procedimentos matemáticos e saber utilizá-los em demonstrações ou na resolução de exercícios e problemas. Para a docência em matemática é importante que o professor saiba justificar esses procedimentos, conheça outros procedimentos histórico culturalmente produzidos, conheça os conceitos e ideias atuais, bem como a evolução histórica dos mesmos. (Fiorentini; Oliveira, 2013, p. 924-925).

Compreendemos que o futuro professor de matemática deve estar envolvido em situações que o levem a pensar e compreender a matemática como um campo de conhecimento, para, assim, aprimorar sua visão e, futuramente, proporcionar práticas em sala de aula que favoreçam o ensino e a aprendizagem de matemática. Como mencionam Onuchic e Huanca (2013), o futuro professor precisa ter uma formação sólida em matemática, conhecendo bem o que ensina, e, principalmente, sabendo justificar o que faz. Assim, essa autorreflexão é de grande importância, pois o futuro professor precisar reconhecer essa necessidade e buscar aprimorar o conhecimento acerca do que está estudando.

Com base nas reflexões dos alunos, podemos identificar algumas características comuns nos perfis desses licenciandos:

Quadro 79 – Características dos alunos baseado nas respostas da pergunta 1

Características dos licenciandos	**Alunos**	**Esclarecimento**
Alunos questionadores	A1, A3, A11	Demonstram uma postura questionadora em relação aos problemas matemáticos, buscando entender todos os passos e explorando além do método de ensino tradicional.
Desenvolvimento de habilidades e competências	A2, A4, A10, A15, A16, A19	Apresentam interesse em desenvolver habilidades como raciocínio lógico, pensar-ação e a capacidade de criar atividades que estimulem o pensamento matemático.
Visão ampliada da Matemática	A6, A7, A15, A16	Reconhecem que a matemática vai além de números e fórmulas, compreendendo sua aplicação em diversos campos e situações do cotidiano.
Autoconhecimento	A8, A9, A13, A14, A24	Demonstram autoconhecimento ao reconhecerem suas vantagens e limitações na disciplina, além de expressarem a vontade de evoluir e aprender continuamente.
Criatividade e Resolução de Problemas	A11, A15, A16	Valorizam a abordagem criativa na resolução de problemas, percebendo as situações-problema como oportunidades de despertar a criatividade.
Utilização de recursos	A15, A16	Reconhecem e valorizam o uso de recursos e a abordagem da resolução de problemas no mundo real.

Fonte: Dados da pesquisa.

Essas características destacam alunos motivados, questionadores, criativos, conscientes de suas habilidades e dispostos a explorar diferentes abordagens matemáticas, revelando uma postura proativa em relação à aprendizagem da disciplina.

O segundo questionamento, “o que aprendi sobre mim como futuro professor de matemática?”, visa incentivar os futuros professores a refletirem sobre suas próprias capacidades, buscando aperfeiçoá-las, e a desenvolverem uma compreensão mais aprofundada de como lidam com o ensino e os desafios. Além disso, questionar-se sobre o que aprendeu como futuro professor de matemática é uma atividade que busca o crescimento pessoal e profissional, além de contribuir para a melhoria contínua das práticas de ensino.

Os alunos apresentaram as seguintes respostas:

Quadro 80 – Respostas dos alunos à segunda pergunta

Respostas dos alunos à segunda pergunta da síntese-reflexiva
A1: Utilizando um olhar mais profissional para analisar os aprendizados, pude absorver ideias e métodos de ensino muito interessantes, como problematizar situações do cotidiano, ou até mesmo problematizar situações do cotidiano, ou até mesmo cria-las, para que os alunos sejam atraídos pela curiosidade e desenvolverem um olhar mais crítico e reflexivo sobre o mundo. A2: Aprendi a importância de relacionar a matemática com o cotidiano dos alunos, assim, eles se sentirão capazes de aprender e serão motivados a saber mais, logo afastará o pensamento que a matemática é para gênios. A3: É de extrema importância que os docentes descontruam a ideia de que a matemática é um bicho de 7 cabeças, eles precisam conhecerem os alunos para utilizar diversos métodos de ensino, não utilizar apenas a forma tradicional, melhorando assim, o interesse dos discentes das aulas e dos ensino-aprendizagem. A4: Aprendi como planejar uma aula melhor, utilizar a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como ferramenta para aproximar a matemática do aluno e a adotar atividades que busquem a aprendizagem dos alunos e seguir os passos sem dar as soluções para entender a metodologia adotada. A6: Que tenho uma visão de como vou ensinar matemática de maneirar a tornar minhas aulas mais criativas. A7: Aprendi que vários campos da matemática que desconheço e que preciso cada vez mais me adaptar e pesquisar sobre estes diferentes campos, para que assim, me torne um professor melhor e com muitas possibilidades ao meu alcance. A8: Aprendi como agir em situações complexas e o quanto é prazeroso ser professor e trabalhar dentro da sala de aula. A9: Que preciso me adequar ao lugar que ensino e a realidade dos meus alunos, que não há apenas um caminho certo para chegar à solução de um problema. A10: Pude perceber que o uso da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode fazer muita diferença no aprendizado dos alunos, tanto a curto quanto a longo prazo. Antes, pouco sabia sobre a MM e RP, não sabia como utilizar, agora pretendo usá-las para agregar o máximo de conhecimento para os meus alunos. A11: Aprendi que devo me atentar em levar o conteúdo de uma forma real e divertida, utilizando situações do cotidiano. A12: Que o ensino de matemática pode se tornar mais fácil tanto para o professor quanto para o aluno, através das metodologias de ensino. A13: Aprendi que quero ser uma professora que possa contribuir ao máximo para a aprendizagem do aluno, ter um estilo diferente do tradicional, apesar de ser complicado, mas que fuja dessa linha padrão de sempre. A14: Aprendi que devo sempre buscar me especializar e se qualificar para que tenha novas metodologias e recursos didáticos em minhas aulas. A15: Aprendi que existe a necessidade sempre de se adaptar para cada situação. Compreendi que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas tem de fornecer um ambiente de aprendizagem colaborativa, onde os alunos podem discutir e compartilhar suas ideias. A16: A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é essencial para melhorar a eficácia do ensino e promover o desenvolvimento dos alunos. Esta abordagem permite que o docente faça ajustes necessários sob sua prática pedagógica. A19: Aprendi que há diversas maneiras de modelar um conteúdo como futuro professor e isso poderá me ajudar muito no processo de ensino-aprendizagem, não só a ensinar, mas também aprender com meus alunos. A24: Vejo que é necessário ter momentos de aprendizagem colaborativa, pois o apoio dos colegas foi fundamental em meio desenvolvimento.

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com as respostas dos licenciandos, identificamos algumas aprendizagens comuns, as quais foram organizadas nas seguintes categorias:

Quadro 81 – Aprendizagens comuns dos licenciandos

Categorias	**Alunos**	**Esclarecimento**
Problematização e contextualização	A1, A2, A11	Reconhecem a importância de problematizar e contextualizar situações do cotidiano para atrair a curiosidade dos alunos, relacionando a matemática com suas experiências.
Relação da matemática com a realidade	A2, A3, A7, A9, A11, A13	Entendem a importância de relacionar e adequar a matemática à realidade dos alunos para combater estereótipos e tornar o ensino mais atraente, mostrando que a matemática é real e pode ser divertida, não sendo uma atividade exclusiva para "gênios".
Variedade de métodos de ensino	A3, A9, A19	Valorizam a utilização de diferentes métodos de ensino, indo além da abordagem tradicional, buscando melhorar o interesse e o processo de ensino-aprendizagem.
Planejamento de aulas e metodologias de ensino	A4, A8, A10, A12, A14, A15	Ressaltam as habilidades adquiridas para o planejamento de aulas, utilizando metodologias como a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para promover a aprendizagem, mantendo a flexibilidade para diferentes contextos.
Desenvolvimento pessoal e profissional	A6, A8, A13, A14, A16, A24	Destacam o valor do desenvolvimento pessoal e profissional, buscando especialização, qualificação, adaptação constante e aprendizagem colaborativa.
Exploração-Proposição-Resolução de Problemas	A4, A10, A15, A16	Reconhecem a importância da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como uma metodologia importante para promover um ensino com mais compreensão e o desenvolvimento dos alunos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Essas aprendizagens revelam um grupo de futuros professores comprometidos em proporcionar um ensino de matemática mais contextualizado, engajado e alinhado às necessidades dos alunos, adotando metodologias que possibilitem uma aprendizagem de matemática com mais compreensão. Esses aspectos corroboram com a discussão de Onuchic e Huanca (2013) sobre a necessidade de novas posturas e atitudes na sala de aula de matemática, quando mencionam que o professor deve planejar atividades adequadas ao conteúdo ou ao conceito que se planeja construir, deixando de ser o centro da aula e transferindo para o aluno a responsabilidade pela aprendizagem.

A terceira pergunta, “Qual é a minha concepção de problema?”, situada no segundo eixo, objetivava identificar o que os alunos entendiam por “problema” após as experiências teórico-práticas vivenciadas na Unidade Temática. Essas concepções são importantes, pois impactam diretamente na qualidade do ensino e na experiência de aprendizagem dos alunos. Bons problemas matemáticos desafiam os alunos a pensar criticamente, a raciocinar e a desenvolver estratégias para resolver questões complexas.

Os alunos apresentaram as seguintes concepções de problemas:

Quadro 82 – Respostas dos alunos a terceira pergunta

Respostas dos alunos à terceira pergunta da síntese-reflexiva
A1: Problema é uma situação que há um questionamento e que tenha uma solução. A2: O problema, diferentemente do exercício, é algo que não sabemos fazer ou é mais difícil naquele momento. A3: Um problema é uma situação ou questão que requer a aplicação de princípios matemáticos para encontrar uma solução. A4: Problema é algo que te faz pensar, que te arrasta para fora de sua zona de conforto e te impulsiona a questionar e buscar formas para resolvê-lo. A6: O problema vai além de uma questão que envolve um texto, ele consiste nas aprendizagens que surgem a partir dele. A7: Um problema é algo que nos leva a pensar em uma solução, algo que tenha uma lógica e uma coerência, partindo do mundo real, um problema não pode ser considerado bom se não levar o aluno a pensar. A8: Problema é algo a ser explorado de diversas maneiras que possa chegar a uma conclusão. A9: Algo que tem mais de um caminho de resolução, que faça a pessoa sair da zona de conforto e pensar em várias formas de resolver o problema. A10: Problema é tudo aquilo que não se tenha resposta ou resultado imediato, ou seja, que demande um tempo para solucionar. A11: Um problema pode ser considerado tudo aquilo que precisa de solução. A12: O problema pode ser encarado como um modelo de ensino e avaliação do aluno. A13: Que um problema não precisa ser necessariamente uma pergunta pronta com uma estrutura para resolver, ele pode ser uma pergunta ou imagem que leva a uma reflexão. A14: Problema é qualquer situação que precisa de um resultado, resposta, solução. A15: Os problemas não devem ser vistos como meros exercícios de aplicação de formula, mas sim a oportunidade de explorar. A16: O problema envolve a seleção de um contexto significativo, a identificação de variáveis e a formulação de questões que estimulem o pensamento crítico. A19: O problema é uma forma de desafiar o aluno em razão do conteúdo proposto. A24: Problema é algo que não sabemos a resposta e que precisamos resolver.

Fonte: Dados da pesquisa.

Essas concepções destacam as diferentes perspectivas dos futuros professores sobre o que constitui um problema em matemática, incluindo não apenas a dimensão matemática, mas, também, aspectos desafiadores de aprendizagem, reflexão e variedade de abordagens. Para uma melhor análise, organizamos as concepções apresentadas nas três categorias a seguir:

Quadro 83 – Categorias com as concepções de problemas dos licenciandos

Categoria	**Alunos**	**Concepção**
Natureza do problema	A1, A3, A10, A14, A24	Problema é uma situação ou questão que demanda uma solução, pode ter mais de um caminho de resolução, envolve diversas maneiras de exploração e não tem resposta ou resultado imediato.
Aspecto desafiador	A2, A4, A7, A9, A16, A19	Problema é algo desafiador, estimula o pensamento, faz o aluno sair da zona de conforto, requer pensar em uma solução lógica e coerente, e envolve a seleção de um contexto significativo.
Amplitude de aprendizagem	A6, A8, A11, A12, A13, A15	Problema vai além de uma questão matemática, não tendo, necessariamente, uma pergunta pronta com estrutura fixa, consiste nas aprendizagens que surgem a partir dele.

Fonte: Dados da pesquisa.

Cada categoria aborda uma faceta específica do conceito de problema, desde sua natureza até a contextualização e relevância. Essas categorias ajudam a compreender as diversas perspectivas dos licenciandos sobre o que constitui um problema. Analisamos que essas concepções corroboram com as concepções de problema apresentadas neste trabalho (Allevato;

Onuchic, 2014; Andrade, 2017; Lester; Cai, 2016; Martins, 2019; Van de Walle, 2009), estando alinhadas à metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Em complemento a esse questionamento, também questionamos: "o que devo levar em consideração ao propor um problema?". Essa pergunta é fundamental, uma vez que, na metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o trabalho é realizado por meio de problemas que podem ser propostos pelo professor e pelo aluno, advindo não somente de livros didáticos ou de outros recursos. Compreendemos que propor problemas permite ao professor adaptar o ensino de matemática para atender às necessidades individuais dos alunos, oferecendo desafios adequados para todos.

A essa pergunta, os alunos responderam:

Quadro 84 – Respostas dos alunos à quarta pergunta

Respostas dos alunos à quarta pergunta da síntese-reflexiva
A1: Ele tem que ter coerência, tem que fazer sentido matematicamente e contextualmente. A2: O deve ter clareza, coesão e coerência na formulação dos enunciados, não permitindo ambiguidade. A3: O problema deve ter coerência numérica, pedagógica e contextual. A4: Deve considerar todo o contexto em que os alunos se encontram, pois se o problem não estiver dentro do contexto social deles, não vai despertar o interesse. Além do mais, o problema deve apresentar coerência didática. A6: Tem que se levar em consideração o público para qual se vai criar o problema, conhecendo seu contexto, seu nível escolar, seus conhecimentos prévios e deve também ter coerência didática. A7: Deve considerar a situação e o meio onde os alunos vivem, pois englobar o contexto vivenciado pelos alunos é algo fundamental para a maior aprendizagem do conteúdo trabalhado em sala de aula. Também deve ser considerado a importância da coerência, tanto matemática, quanto pedagógica. A8: O problema deve ser desafiador, para que a turma tenha interesse em participar e interagir. A9: Deve-se levar em consideração quem é a turma, o seu nível de dificuldade e o ambiente em que se encontra quem vai receber aquele problema. A10: Deve se atentar a coerência, se o problema aborda algo relevante para os alunos e se eles estão inseridos no meio. A11: Deve-se levar em consideração o nível para quem vai propor e deve ter coerência didática. A12: O problema deve ter resolução e coerência contextual e pedagógica. A13: O problema deve ser coerente, ter preocupação sociocultural, além disso, o contexto do aluno e o seu nível de aprendizagem também deve ser considerado. A14: Na proposição de um problema é importante ter como base o contexto social, a coerência e as informações que possa caracterizar este problema. A15: É importante que o problema seja desafiador e que desperte a curiosidade do aluno. A16: O problema deve ser um desafio apropriado que enriquece a experiencia pedagógica. A19: O problema deve levar em consideração os meios possíveis de solucioná-lo, o provável interesse do aluno e deve considerar a realidade em que o aluno está inserido. A24: O problema deve despertar no aluno o interesse de se debruçar sobre ele e responder. Como também se vai proporcionar alguma aprendizagem.

Fonte: Dados da pesquisa.

Para uma melhor sistematização, organizamos as considerações dos licenciandos para propor um problema nas seguintes categorias:

Quadro 85 – Considerações dos licenciandos ao propor um problema

Categoria	**Alunos**	**Concepção**
Coerência didática	A1, A2, A3, A4, A6, A7,	O problema deve levar em consideração a coerência didática, sendo composta pela coerência numérica, contextual e pedagógica. De modo que o enunciado

	A10, A11, A12, A13, A14	faça sentido e traga um contexto relevante, para que assim, seja despertado no aluno o interesse em resolver o problema.
Contexto social do aluno	A4, A6, A7, A9, A10, A13, A14, A19	Ao propor um problema deve-se considerar o contexto dos alunos, levando em conta seus meios possíveis de resolução, nível escolar e conhecimentos prévios. Além disso, a proposta deve ser sensível à situação e meio dos alunos, incorporando o contexto vivenciado para melhor aprendizagem.
Interessante e desafiador	A8, A11, A15, A16, A19, A24	Ao propor um problema deve-se considerar diversos aspectos, como os meios possíveis de solucioná-lo, o provável interesse dos alunos e a realidade em que estão inseridos. Além disso, a proposta deve ser desafiadora para incentivar a participação e interação da turma.

Fonte: Dados da pesquisa.

Essas categorias refletem as diferentes dimensões que os futuros professores consideram importante levar em consideração ao elaborar problemas matemáticos para seus alunos. De um modo geral, eles consideram que o problema deve ter clareza na escrita, contemplando uma coerência didática, até a preocupação com o contexto sociocultural. Além disso, o problema deve promover um desafio apropriado ao contexto social e ao nível de aprendizagem do aluno, para, assim, instigar o seu interesse e promover a aprendizagem.

Ressaltamos que o destaque à necessidade de os problemas terem uma coerência didática é advindo das atividades desenvolvidas na Unidade Temática, a qual trabalhamos com os conceitos apresentados por Abramovich e Cho (2015). O destaque para esse aspecto é importante, pois diz respeito à resolubilidade formal do problema, compreensão da escrita, adequação e outras características pedagógicas, bem como relevância sociocultural.

Além disso, notamos que os alunos também enfatizaram a importância de considerar no problema o contexto social do aluno, demonstrando bastante sensibilidade a essa adequação. Este é um dos aspectos fundamentais da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, que, de acordo com Andrade (2017), apesar de não ser uma tarefa simples, a multicontextualidade da sala de aula é um referencial, um mapa que nos ajuda a pensar e repensar diariamente a utilização dessa metodologia.

E, por fim, o destaque à necessidade de o problema ser interessante e desafiador é algo que já vem sendo imensamente discutido na literatura. Esse aspecto está intimamente ligado ao interesse do aluno em resolver o problema. Como mencionam Allevato e Onuchic (2014, p. 44), “um problema se configura na relação com o resolvedor, de tal modo que, se ele já conhece ou tem memorizados métodos de resolução ou não está interessado na atividade, não será para ele um problema”.

No entanto, diante dos múltiplos contextos e outros elementos que compõem uma sala de aula, por mais interessante e desafiador que o problema seja, nem todos os alunos demonstram interesse em resolvê-lo. Dessa forma, é relevante que os alunos tenham mencionado aspectos que estão relacionados a essa categoria, pois, de acordo com Andrade

(2017), quando isso ocorre, cabe ao professor iniciar um trabalho de problematização que desperte o interesse do aluno pelo problema.

No terceiro eixo, analisamos as experiências dos alunos com a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Salientamos que, ao longo da Unidade Temática, os licenciandos tiveram a oportunidade de realizar atividades mediadas por essa metodologia, discutir aspectos teóricos relacionados a essa metodologia e, também, mediar Oficinas usando essa metodologia. Dessa forma, compreendemos que, uma vez que os licenciandos tiveram uma experiência completa, os seus *feedbacks* nos permitem tirar conclusões sobre o nosso objetivo de pesquisa.

Os questionamentos nesse eixo buscaram avaliar a utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas enquanto metodologia de ensino, como também identificar os desafios enfrentados pelos futuros professores durante a utilização da metodologia, possibilitando a busca por soluções e estratégias para superação desses desafios. Essas análises nos permitiram uma validação prática da metodologia de ensino, fornecendo percepções sobre como ela é percebida pelos professores em formação e se está alinhada às suas expectativas.

Assim, questionamos, inicialmente: "como foi a minha experiência com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas enquanto aluno – no decorrer do curso e enquanto professor – ao mediar uma oficina?" Para esse questionamento, os alunos responderam:

Quadro 86 – Respostas dos alunos à quinta pergunta

Respostas dos alunos à quinta pergunta da síntese-reflexiva
A1: Tive uma experiencia produtiva, aprendi como resolver problemas. Como professor, aprendi a entender esses problemas, como desenvolver problemas e entendi a construção de um problema. Ao mediar a oficina, aprendi mais sobre a matemática e como poder auxiliar o aluno na sala de aula. A2: A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é relevante para a formação e amadurecimento do pensamento matemático dos alunos. Enquanto para os professores ela promove um aperfeiçoamento das suas habilidades e competências pedagógicas e matemáticas, pois o discente pode identificar uma solução diferente da imaginada pelo docente, logo este não poderá considerar errado a resposta do aluno, só porque o caminho foi diferente do que ele imaginou. A3: A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas incentiva os alunos a se envolverem ativamente no processo de aprendizagem, proporciona a oportunidade do aluno formular seus próprios problemas e tomar decisões, assim como, desenvolver habilidades de uma boa experiencia. Como professor, a experiência envolve observar o progresso dos alunos ao longo do processo, estimular a colaboração e discussão, promover a reflexão e a aprendizagem metacognitiva. A4: Admito que foi algo novo, sinto que pude expandir os meus conhecimentos como aluna e como professora. A6: No início eu tive dificuldade em compreender, mas no decorrer do curso eu conseguir assimilar bem a proposta. Como professora na oficina, foi um desafio, pois quando se tem o problema pronto temos uma ideia que é fácil de criar e também sua resolução, porém quando vamos criar um problema vemos que não é algo tão simples. A7: Minha experiência enquanto aluno foi das melhores possíveis, pois abriu minha mente para novas possibilidades, novas formas de enxergar as resoluções e novos meios. Minha experiencia enquanto professor também foi muito boa, pois trabalhar na construção de um bom problema matemático, apesar de não ter sido um trabalho fácil, é muito gratificante.

A8: Uma experiencia legal e inovadora, pois esta prática me fez enxergar que a Resolução de Problemas não é só uma coisa cansativa e ao usar ferramenta como professor tenha certeza que a turma irá interagir durante as atividades e que esta prática será bastante positiva para melhoria da qualidade do ensino. A9: Boa, aprendi várias técnicas de resolver o mesmo problema. Como professora foi uma experiência desafiadora, vários pontos a se pensar que poderia dar errado, que nem sempre as coisas saem como planejamos. A10: Pude perceber que um mesmo problema pode conter várias formas de chegar ao resultado, porém todas chegando na resolução correta. Além disso, enquanto aluno foi uma experiência muito boa, pois embora tenham sido problemas matemáticos básicos, pude perceber o empenho que os alunos tem para explorá-los e aprofundá-los. A11: Foi surpreendente, pois percebi essa criatividade de diferentes maneiras e aplicações e também pude notar a quão rica é a matemática, tanto quanto aluno como professor. É incrível como a matemática é linda e podemos levar essas diferentes representações dela na solução de um problema. A12: Como aluno fui incentivado a procurar e pensar mais diferente para resolver um problema, enquanto professora foi percebido que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas vai além de criar um problema matemático, mas saber em qual contexto de sala de aula o professor está inserido para poder elaborar um problema que não fuja daquele contexto. A13: Aprendi sobre o que seria a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e como propor, além das práticas em aulas que ajudaram a compreender ainda mais, foi uma experiência boa. A14: Eu pude ter uma visão diferenciada para os problemas propostos, consegui ter um aprendizado desenvolvimento. A15: Minha experiência com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas foi enriquecedora, pude perceber a importância da mediação do professor, estimulando a participação ativa dos alunos. A16: A experiencia discente-docente foi muito valiosa, pois me permitiu vivenciar como as etapas são necessárias e indispensáveis tanto numa ótica aluno como para aquele que ensina. A19: Como aluno, vi a importância da coleta de dados do problema e as formas ou a forma de solucioná-lo. Ao mediar a oficina no papel de professor, pude ajudar os alunos a solucionar o problema até um certo ponto e saber trabalhar o interesse e a curiosidade que irá leva-los a solução por conta própria. A24: A matemática não é fácil, a experiencia de estar à frente de uma turma e ter que criar problemas, criar enredos, interagir e tornar a aula divertida foi uma capacitação cheia de conhecimentos.

Fonte: Dados da pesquisa.

As falas dos licenciandos sobre as suas experiências enquanto alunos utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas demonstraram que eles tiveram experiências positivas ao se envolverem com a metodologia. Alguns alunos destacaram a produtividade e a aprendizagem sobre a Resolução de Problemas, enquanto outros reconheceram a relevância dessa abordagem para o amadurecimento do pensamento matemático. A ênfase na participação ativa dos alunos foi ressaltada, proporcionando oportunidades para formular problemas próprios, tomar decisões e desenvolver habilidades enriquecedoras.

Além disso, os alunos mencionaram que a metodologia abre espaço para novas explorações matemáticas, possibilita o estímulo à criatividade e a percepção da beleza da matemática. Mesmo se referindo às suas experiências enquanto alunos, também foi destacado o papel fundamental do professor na mediação e no enriquecimento da experiência. Em resumo, para os alunos, a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas emergiu como uma prática inovadora e valiosa, transformando a percepção da resolução de problemas em algo estimulante e significativo para os discentes.

Ainda nesse questionamento, as falas dos licenciandos enquanto professores utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas mediando as Oficinas trouxeram aspectos relevantes da metodologia. Inicialmente, destacaram a aprendizagem significativa sobre a Proposição e mediação de problemas matemáticos, reconhecendo a importância de compreender esses desafios para melhor auxiliar os alunos em sala de aula (A1). A relevância pedagógica dessa abordagem foi ressaltada, evidenciando seu papel no aprimoramento das habilidades pedagógicas e matemáticas dos professores (A2). Além disso, a possibilidade de observar o progresso dos alunos, estimular a colaboração e promover a aprendizagem metacognitiva foi destacada como benefícios da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (A3).

Alguns alunos admitiram o desafio inicial, mas reconheceram que essa abordagem representou uma expansão significativa de conhecimentos (A4, A6, A9). A visão diferenciada para a diversidade de soluções foi ressaltada, indicando uma compreensão mais profunda da flexibilidade e criatividade na resolução de problemas (A10, A11, A14). Houve um consenso sobre a gratificação de trabalhar na construção de bons problemas matemáticos, destacando a experiência como inovadora e enriquecedora (A7, A8). Por fim, a importância da mediação do professor e a valorização das etapas do processo foram reconhecidas como aspectos essenciais (A15, A16).

Ainda nesse eixo, questionamos aos futuros professores: "quais aprendizagens levarei para as minhas futuras práticas docentes?". Consideramos esse um questionamento fundamental para compreendermos como essa experiência pode favorecer a integração entre a teoria estudada no curso e a aplicação prática na sala de aula. Para esse questionamento, os alunos responderam:

Quadro 87 – Respostas dos alunos à sexta pergunta

Respostas dos alunos à sexta pergunta da síntese-reflexiva
A1: Aprendi a ter uma conduta firme, como domínio de conteúdo e aprendi a trabalhar com a resolução de problemas, buscar problemas e planejar aulas que estejam de acordo com o contexto sociocultural do aluno. A2: Levarei as práticas de RP, principalmente levando em consideração as vivencias dos alunos, a MM a qual motivara os estudantes a perceberem a importância da matemática, além disso, as demais tendências matemáticas, sobretudo a etnomatemática e a História da Matemática. A3: Seleção cuidadosa de problemas; introdução do contexto; experimentação e análise; reflexão; aprendizagem colaborativa, tornando a matemática menos abstrata. A4: Vou levar para a minha vida docente as ideias adquiridas com as resoluções de problemas e as oficinas voltadas para a mesma temática. A6: Quando for para sala de aula pretendo levar o máximo que conseguir aprender na disciplina. Eu considero que essa disciplina foi muito importante, pois me fez pensar em muitas possibilidades para quando eu for professora. A7: Um aprendizado que me marcou muito é que levarei para a sala de aula é a postura de professor questionador, pois, por meio dele, conseguimos achar novos resultados, não só no sentido matemático, mas também no sentido social. Questionar nos possibilita abrir um leque de novos problemas e resoluções e isso nos proporciona um englobamento do conteúdo. A8: A maneira que o professor deve se comportar ou propor um problema e acima de tudo, buscar sempre trazer a realidade social dos estudantes para dentro da sala de aula, dando voz crítica para que eles possam participar na elaboração de problemas também.

A9: Que brincando também se aprende, já tinha isso pra mim, pois o meu TCC será parecido com o tem, aprendi a formar para colocar em prática. A10: Levarei comigo toda a questão de estruturação de um problema, como usar em sala de aula de modo a promover uma aprendizagem efetiva. A11: Com certeza levarei para as minhas futuras práticas docentes, todos os tipos de coerência e a delicadeza de lidar com diferentes realidades dos alunos, sejam culturais ou a nível de aprendizagem. A12: Que o ensino de matemática vai além de transmitir conhecimentos; que podemos avaliar um aluno de diversas formas; que é necessário se adequar a sala de aula na qual está inserido como professor; Que as metodologias de ensino são fundamentais no ensino de matemática. A13: É preciso olhar se é um problema coerente e também o nível da turma além de explorar praticas para ensinar a matemática e ter resultados positivos, saber levar em consideração meios pra resolução que alunos tomaram nem sempre é o errado, analisando como o aluno resolveu. A14: Tentarei utilizar a EPRP nas minhas aulas. A15: Quanto as minhas aprendizagens que levarei é que meu dever como futuro professor é buscar novas metodologias recursos e abordagem que possibilite o enriquecimento durante o processo de ensino e aprendizagem. A16: Em resumo, ofereceu uma abordagem holística e envolvente para o ensino, pois me permitiu uma relação pedagógica prazerosa que contribui para a práxis geral de qualquer professor. A19: A forma de lidar com o aluno e de como trazer os conteúdos para a sala de aula. A24: Que a utilização de metodologias podem ser o divisor de águas na aprendizagem matemática dos nossos alunos.

Fonte: Dados da pesquisa.

As aprendizagens dos alunos corroboram com a nossa perspectiva de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, a qual “há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da matemática, da escola...” (Andrade, 2017, p. 366).

Para uma melhor sistematização das respostas dos alunos, organizamos o quadro 88 a seguir com as seguintes categorias:

Quadro 88 – Aprendizagens dos alunos com a utilização da metodologia

Categorias	**Alunos**
Postura do professor	A1, A7, A8, A11, A19
Adequação ao contexto social do aluno	A1, A2, A3, A8, A11, A12, A19
Utilização de metodologias de ensino	A2, A12, A15, A24
Aspectos gerais aprendidos na disciplina	A4, A6, A9
Trabalho com problemas	A1, A3, A4, A7, A8, A10, A13, A14, A16

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas dos alunos mencionam pontos relacionados à postura do professor, uma vez que eles destacam que aprenderam sobre ter uma conduta firme e domínio de conteúdo, como também habilidades para abordar a resolução de problemas, incorporando uma perspectiva contextualizada alinhada ao contexto sociocultural dos alunos. Além disso, ressaltaram a importância da forma de lidar com os alunos, reconhecendo o papel fundamental de ser um professor questionador.

Nessas respostas, com ênfase na postura do professor, a sua capacidade de propor problemas e integrar a realidade social dos alunos nas aulas foi apontada como um elemento valioso para o sucesso na prática docente. A coerência e a sensibilidade ao lidar com diversas realidades culturais e de aprendizagem foram destacadas como aprendizagens fundamentais que serão levadas para as futuras práticas docentes.

As respostas relacionadas à importância da utilização de metodologias de ensino de matemática sugerem a possibilidade de integração da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas com outras tendências em Educação Matemática, como, por exemplo, a História da Matemática, a Modelagem Matemática e a Etnomatemática. Além disso, destacam a importância das metodologias para superar a tradicional transmissão de conhecimentos, possibilitando uma abordagem matemática holística e envolvente.

Na categoria aspectos gerais, alocamos as falas que sugerem as aprendizagens relacionadas à importância de um enfoque prático e aplicado no ensino, valorizando o aprendizado através da resolução de problemas, visando enriquecer suas práticas pedagógicas. Além disso, as falas também sugerem uma perspectiva consciente da integração entre teoria e prática, reconhecendo a relevância de metodologias de ensino mais dinâmicas e participativas.

Por fim, grande parte dos alunos mencionaram aspectos relacionados ao trabalho com problemas, seja no trabalho com a Proposição de Problemas, na seleção de problemas, no trabalho com o problema em sala de aula, na estruturação de um problema, na Resolução de Problemas, na Exploração de Problemas, dentre outros. De um modo geral, todos os aspectos relacionados ao trabalho com problemas demonstravam uma preocupação em adequar o problema à realidade sócio-político-cultural dos alunos, de modo que eles tenham interesse na aprendizagem matemática e que ela seja significativa para o aluno.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo identificar em quais aspectos uma Unidade Temática, utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra. Concluímos que essa metodologia pode desempenhar um papel fundamental na formação inicial de professores de Matemática, especialmente no ensino de Álgebra, a qual promove uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e colabora no desenvolvimento de habilidades essenciais para o futuro professor.

Inicialmente, é importante salientar a relevância do trabalho com essa metodologia na formação inicial, uma vez que, como discutido ao longo deste estudo, é fundamental que os futuros professores vivenciem experiências que forneçam subsídios teórico-práticos para as suas futuras práticas docentes. Nessa perspectiva, é importante ter clareza do papel da Exploração de Problemas, da Proposição de Problemas e da Resolução de Problemas no âmbito da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Embora esses três elementos sejam interdependentes, devemos refletir sobre o papel de cada um deles no processo de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

A Exploração de Problemas é uma ferramenta teórica que orienta todo o processo, compreendendo a Proposição e a Resolução de Problemas. A Exploração de Problemas nos permite abordar e aprofundar diversos conceitos da matemática, bem como outras áreas, sempre permitindo ir mais além. A Proposição de Problemas é uma ferramenta de problematização que permite expressar as explorações, curiosidades e descobertas em forma de problemas, bem como partir de problemas para reformulá-los ou elaborar problemas abertamente. A Resolução de Problemas assegura o desenvolvimento dos conceitos, permitindo a compreensão da matemática que está sendo utilizada, bem como a avaliação do processo de Exploração e Proposição de Problemas.

Os três elementos que compõem a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas têm papéis específicos, mas estão interrelacionados, de forma que um potencializa o desenvolvimento do outro, como podemos ver a seguir.

Quando a Proposição de Problemas tem como ponto de partida uma situação aberta, ela precisa ser entendida e explorada sob diversas perspectivas. Sendo assim, a Exploração de Problemas é fundamental na análise minuciosa para compreender a situação com mais profundidade e propor problemas criativos e relevantes. Quando se trata da Proposição de Problemas sob a perspectiva da Reformulação de Problemas, é necessário realizar uma exploração e resolução para identificar os elementos necessários para a reformulação, a fim de garantir um novo problema bem reformulado. Portanto, a Exploração e a Resolução de Problemas potencializam a Proposição de Problemas.

Por outro lado, a Exploração de Problemas é potencializada pela Proposição e Resolução de Problemas, uma vez que a problematização possibilita o aprofundamento do problema e o processo de resolução colabora para a retirada de conclusões acerca do problema explorado e para o desenvolvimento de novos conceitos.

Nesse contexto, torna-se evidente a relevância da Resolução de Problemas em todas as etapas de Proposição e Exploração de Problemas, uma vez que, à medida que o problema é explorado e/ou proposto, a resolução norteia todo o processo. No entanto, é importante ressaltar que, embora a Resolução de Problemas seja norteadora do processo de exploração e proposição, o resultado nunca é concebido como o único objetivo da Resolução de Problemas.

A utilização contínua da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas proporciona um melhor desempenho dos alunos no ato de explorar, propor e resolver problemas, bem como no desenvolvimento e aprofundamento de conceitos matemáticos. Isso ficou evidente na atividade realizada com os membros do GEPEP, que já tinham certa experiência com atividades nessa perspectiva. Eles tiveram menos dificuldades ao longo das ações propostas com base nessa metodologia. A mesma percepção foi demonstrada nas atividades desenvolvidas na segunda parte da Unidade Temática, nas quais os licenciandos já tinham experiências práticas e conhecimentos teóricos sobre a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o que os levou a propor problemas mais criativos, desafiadores e coerentes didaticamente.

A metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas oportuniza aos futuros professores de matemática trabalhar com uma variedade de problemas, aprimorando seu conhecimento sobre as ideias matemáticas associadas a cada problema. Esse contato com diferentes problemas aumenta a experiência desses futuros professores, o que pode tornar as suas futuras práticas de ensino mais fundamentadas e diversificadas.

Pudemos observar que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas incentiva os futuros professores a desenvolverem a capacidade de propor problemas matemáticos originais, concisos e desafiadores. Essa metodologia não apenas os beneficia na compreensão sobre a estrutura matemática dos problemas, mas estimula a criatividade e a capacidade de pensar criticamente. Ao propor problemas coerentes do ponto de vista didático, os futuros professores aprimoram suas habilidades de ensino e se preparam para criar experiências significativas para seus alunos.

Como discutido por Abramovich e Cho (2015), é fundamental que os professores tenham uma compreensão conceitual das questões didáticas que dizem respeito à Proposição de Problemas, para poderem participar ativamente do processo de construção do conhecimento e se apropriarem dessas experiências de aprendizagem, compreendendo o que significa o aluno como um produtor de conhecimento.

Fundamentados em autores de referência (por exemplo, Abramovich; Cho, 2015; Andrade, 2017; Cai; Hwang; Melville, 2023, Crespo, 2015; Ellerton, 2015; Grundmeier, 2015; Milinković, 2015; Rosli *et al.*, 2015; Silver, 1994; Singer; Ellerton; Cai, 2013), desenvolvemos, neste trabalho, diversas atividades no âmbito da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas que incluem diferentes estratégias e pontos de partida, tais como: i) Propor problemas a partir de uma situação aberta; ii) Propor problemas a partir de um contexto matemático; iii) Reformular de Problemas; iv) Considerar um resultado como ponto de partida para propor um problema. Pudemos perceber que essas diferentes estratégias e pontos de partida aumentaram e diversificaram as experiências dos futuros professores, os auxiliando no aperfeiçoamento dos problemas propostos.

A partir das atividades desenvolvidas neste estudo, pudemos realizar algumas inferências sobre a utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, evidenciando em quais aspectos ela pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra, como veremos a seguir. Destacamos que apresentar esses aspectos é considerado como um dos diferenciais de nossa pesquisa.

O primeiro aspecto importante a ser destacado é que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas possibilita um ambiente colaborativo, o qual estimula a troca de ideias e construções originais, possibilitando discussões que vão além da Matemática. Esse aspecto foi inicialmente destacado por Andrade (1998), o qual apresenta uma proposta de Resolução de Problemas que incorpora questões de natureza sócio-político-culturais comumente tratadas no âmbito da Educação Matemática, à luz de uma perspectiva de educação progressista.

Em nosso trabalho, algumas das atividades desenvolvidas também possibilitaram abranger essas discussões mencionadas por Andrade (1998), envolvendo o contexto socio-político-cultural. Essas discussões incentivaram os alunos a utilizar a matemática como uma ferramenta para abordar e discutir temas sociais relevantes, estimulando o desenvolvimento do pensamento crítico-reflexivo.

Na atividade 1, por exemplo, foram discutidas questões relacionadas à geração de emprego e de renda no bairro, ações para minimizar as pessoas em situação de vulnerabilidade social causada pelo desemprego, valorização do comércio local e agricultura familiar. Além disso, discutiu-se sobre a relevância de ser um consumidor consciente, capaz de analisar todas as vertentes que influenciam no preço final, julgar a quantidade ideal a ser comprada e o valor justo a ser pago. Na atividade 2, a discussão sobre o consumo consciente foi retomada, abordando temas relacionados à consciência de classe, em que foi discutido sobre a necessidade de romper uma cultura que vem se disseminando, na qual as pessoas buscam alimentar uma aparência para atender padrões e/ou demonstrar participar de classes sociais as quais não fazem parte.

Na atividade 3, a discussão envolvendo o contexto socio-político-cultural foi ainda mais incisiva. Os alunos propuseram uma situação-problema por meio de um diálogo, em que a imagem tinha diferentes representações, incluindo indivíduos brancos, pretos, pardos e afrodescendentes. Essa foi uma observação relevante e que permitiu uma discussão sobre as questões de representatividade nos livros didáticos e a importância do aluno se sentir reconhecido no material utilizado. Ressaltamos a importância dessa discussão na formação inicial, pois ela pode servir como um instrumento reflexivo e de conscientização que contribui para a formação da identidade profissional do professor.

Outro momento em que a matemática foi utilizada para discutir questões além de seu campo tradicional ocorreu nas Oficinas ministradas pelos licenciandos, nas quais foram abordados temas, como o consumo de água, o cálculo da energia elétrica e o gasto de combustível. Destacamos a importância de explorar esses temas por meio da matemática, pois essa pode ser uma alternativa eficiente para os professores promoverem a responsabilidade social e ambiental entre seus alunos, utilizando a matemática como um meio de conscientização.

Outro aspecto importante a ser destacado é que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, incentiva a manifestação do pensamento algébrico e o aprofundamento das ideias de Álgebra. Como discutido ao longo deste trabalho, as Representações Múltiplas de Álgebra permitem compreender a situação-problema de forma mais ampla, sob diferentes perspectivas, contribuindo para evidenciar a harmonia e a coerência da matemática (Friedlander; Tabach, 2001; Lorenzato, 2010; Tripathi, 2008). Dessa forma, utilizá-las aliadas à essa metodologia pode fomentar a formação de professores de matemática, auxiliando-os a incentivarem os seus alunos a construírem uma visão integrada dos conceitos algébricos.

Na atividade 1, por exemplo, percebemos o quanto as representações verbal, numérica e gráfica colaboraram para uma representação algébrica concisa e coerente com a situação apresentada. A discussão das ideias de funções relacionadas a domínio, contradomínio e imagem de uma função emergiu mediante o diálogo realizado a partir das representações verbal e numérica, contudo, só ficou mais evidente a partir da representação gráfica. A transição entre essas representações é de suma importância, pois, como aponta Martins (2019), ela favorece uma aprendizagem mais aprofundada e, consequentemente, a manifestação do pensamento algébrico.

Isso ficou ainda mais evidente nas atividades 3 e 4, em que, a partir da oralidade, da escrita numérica e algébrica podemos evidenciar indícios da manifestação do pensamento algébrico. Essa percepção advém através das observações dos registros dos alunos, os quais expressaram as diferentes relações entre as partes dos problemas explorados, podendo generalizar, modelar, construir significado e operar com o desconhecido (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993; Almeida, 2016).

No entanto, é importante salientar que somente desenvolver uma atividade utilizando essa metodologia não é suficiente para permitir que o aluno transite naturalmente entre as representações. Dessa forma, destacamos que a mediação do professor é fundamental para auxiliar os alunos a expressarem seu pensamento algébrico por meio da oralidade ou da escrita, bem como para fomentar a discussão sobre as diferentes ideias de Álgebra que podem ser abordadas. Como mencionam Friedlander e Tabach (2001), a habilidade de trabalhar com várias representações não se desenvolve espontaneamente. Para os autores, na aprendizagem de Álgebra, é essencial promover, de modo ativo e sistemático, a capacidade de usar várias representações.

Portanto, destacamos outro aspecto importante, que consiste na colaboração da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para o desenvolvimento de uma postura de professor-mediador. Em todos os momentos, a mediação do professor é essencial para alcançar os objetivos propostos na atividade. É uma metodologia caracterizada como aberta, porém, ela não é solta (Andrade, 2017), ela requer uma orientação cuidadosa para garantir que os alunos não se dispersem e para garantir que os objetivos educacionais sejam alcançados.

O cenário de uma sala de aula utilizando a metodologia da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas tem como característica o compartilhamento da autoridade matemática entre professor e alunos, possibilitando o diálogo professor-aluno e aluno-aluno. Nesse cenário, o professor deixa o espaço de sala de aula livre para que o aluno possa realizar suas investigações, reflexões, discussões e descobertas. Assim, pensar na postura do professor durante o desenvolvimento das atividades utilizando essa metodologia é um aspecto fundamental, o qual é essencial desenvolver os diferentes papéis: mediador, orientador, avaliador, motivador, questionador e facilitador.

Por fim, destacamos que a Unidade Temática utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pôde auxiliar, fomentar e colaborar na formação dos licenciandos em diversos aspectos, mas, sobretudo, no desenvolvimento de habilidades profissionais para utilizar essa metodologia. Como apontado por Cai, Hwang e Melville (2023), a aprendizagem profissional do professor tem um papel fundamental, uma vez que, apesar de conseguirem propor problemas, é preciso dominar a arte de engajar os alunos em atividades de proposição de problemas que atendam aos objetivos de aprendizagem de uma aula de matemática.

Nas atividades da primeira parte dessa Unidade Temática, destacamos o desenvolvimento de habilidades dos licenciandos para explorar problemas, abordando e aprofundando conceitos matemáticos e abrangendo temas que vão além deles, como também destacamos o desenvolvimento de habilidades para propor problemas de maneira clara, coerente e concisa, de modo que sejam desafiadores e potencializadores, capazes de possibilitar a construção do conhecimento e/ou aprofundar o aprendizado dos alunos, evitando as simplificações de conceitos no processo de aprendizagem.

Na segunda parte da Unidade Temática, destacamos o desenvolvimento de habilidades voltadas para a proposição de problemas, por meio de situações abertas e de reformulação, utilizando compreensões teóricas de problema e de coerência didática. Nas atividades 4, 5 e 6, por exemplo, os futuros professores puderam aprimorar a sua compreensão da estrutura matemática de um problema, sendo incentivados a contemplar questões didáticas ao propor problemas, estimulando a sua independência quanto aos recursos a serem utilizados em sala de aula. Nessa observação, pudemos notar um trabalho consciente e reflexivo dos futuros professores para propor e explorar problemas. Além disso, pudemos observar, por meio das oficinas ministradas pelos licenciandos, o desenvolvimento de experiências teórico-práticas que os conduziram a desenvolver uma prática corporificada na teoria.

Em síntese, concluímos que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas potencializa a formação docente, colaborando em diversos aspectos, como: no aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos, na ampliação das experiências de trabalho com problemas, na integração de contextos sociais com a Matemática, na prática da utilização das diferentes representações de Álgebra e no desenvolvimento de habilidades profissionais para a utilização dessa metodologia. Além disso, essa metodologia evidencia a importância da mediação do professor, estimula o pensamento crítico e promove a colaboração entre os futuros professores e seus alunos.

Andrade (2017) define que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é uma metodologia aberta e foi isso que consideramos neste trabalho. Ao retomarmos essa menção, esclarecemos que, apesar de planejarmos as atividades em momentos, não podemos estabelecer um modelo definitivo de trabalho com uma sequência de ações. Os momentos são divididos conforme o formato da atividade de modo específico, ficando essa divisão a cargo do planejamento, da criatividade do professor e de sua experiência com a proposta.

Dessa forma, com esta pesquisa, não planejávamos estabelecer um modelo para o trabalho com essa metodologia, mas demonstrar as diversas possibilidades de seu uso, enfatizando aspectos relevantes que devem ser considerados na utilização dessa proposta. Dentre eles, podemos destacar: i) a atividade com a Proposição de Problemas não finaliza com o problema, ele é o ponto de partida da atividade matemática; ii) os conteúdos são desenvolvidos a partir de problemas ou situações-problema; iii) a autonomia do aluno é estimulada, assim, a avaliação do professor é feita de modo mais amplo; iv) toda a atividade deve possibilitar um ou mais momentos de discussões, possibilitando a aprendizagem colaborativa.

Assim, enfatizamos que o trabalho com a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, especialmente na formação inicial de professores, demanda uma clara compreensão dos diferentes papéis envolvidos nesse processo: do professor, do aluno e do próprio problema.

Diante disso, ressaltamos a relevância do trabalho com a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores. Essa abordagem não apenas proporciona uma base teórica, mas uma prática corporificada na teoria, que pode auxiliar os futuros professores em suas futuras experiências profissionais. Notou-se que a proposta de atividades que se baseiam na Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é uma forma de desenvolver o conhecimento relacionado ao conteúdo matemático, ao conhecimento pedagógico do conteúdo, ao ensino de matemática, à educação, aos contextos sociais, à educação matemática crítica, dentre outros.

Contudo, ao ressaltarmos sobre o trabalho com essa proposta metodológica, não nos referimos a um trabalho puramente teórico. É fundamental que os futuros professores tenham a oportunidade de vivenciar e experimentar intensivamente essa metodologia em situações reais de sala de aula, embasando sua prática nos fundamentos teóricos.

Reafirmamos, portanto, a importância dos diferenciais apresentados nesta pesquisa. A metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas mostrou-se importante na formação inicial de professores de Matemática, como evidenciado pelos resultados obtidos com os licenciandos. A potencial replicabilidade desta metodologia em diferentes contextos educacionais sugere que ela pode ser adotada amplamente, contribuindo para a melhoria da prática docente.

Ao validar e discutir esses diferenciais, acredita-se que esta pesquisa avança no que tange ao conhecimento teórico na área de Educação Matemática e, sobretudo, oferece reflexões teórico-práticas sobre uma perspectiva metodológica que pode ser implementada em cursos de formação de professores e na Educação Básica. Assim, este trabalho estabelece uma ponte entre a pesquisa acadêmica e a prática pedagógica, promovendo uma educação matemática mais crítica, reflexiva e criativa em todos os níveis de escolaridade.

Como destacado ao longo do nosso referencial teórico, ainda existem alguns campos inexplorados na pesquisa em Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Portanto, como sugestão para estudos futuros, propomos a realização de pesquisas que empreguem essa metodologia em cursos de formação continuada de professores em exercício, bem como com alunos da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ABRAMOVICH, S.; CHO, E. K. Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 71-102.

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da Resolução de Problemas: Possibilidades em dois diferentes contextos. **VIDYA**, v. 34, n. 1, p. 209-232, 2014.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM,** n. 55, p 1-19, 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? *In:* ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Recife, PE, UFRPE, 2016.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In:* ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M**. Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-396.

BIANCHINI, E. **Matemática**: Bianchini: manual do professor. 9º ed. – São Paulo: Moderna, 2018.

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Editora Porto, v.12, 1994.

BRADY, C; RAMÍREZ, P; LESH, R. Problem Posing and Modeling: Confronting the Dilemma of Rigor or Relevance. *In*: TOH, T. L. *et al*. **Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education,** 2023. p. 33-50.

BRASIL, CAPES. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Documento de Área.** Área 46. Ensino. https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/ENSINO.pdf. Acesso em abril de 2022.

BRASIL, CAPES. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Grupo de trabalho Produção Técnica.** Brasília, 2019. Disponível em: < https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/10062019-producao-tecnica-pdf>. Acesso em abril de 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998.

BROWN, S. I.; WALTER, M. I. **The art of problem posing.** Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1983.

CAI, J.; HWANG, S. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. **International Journal of Educational Research,** 102, p. 1-8, 2020.

CAI, J.; HWANG, S.; JIANG, C.; SILBER, S. Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 03-34.

CAI, J.; HWANG, S.; MELVILLE, M. Mathematical Problem-Posing Research: Thirty Years of Advances Building on the Publication of "On Mathematical Problem Posing". *In:* CAI, J.; STYLIANIDES, G. J.; KENNEY, P. A. **Research Studies on Learning and Teaching of Mathematics, Research in Mathematics Education.** Springer, 2023. p. 01-25.

CARRILLO, J.; CRUZ, J. Problem-Posing and Questioning: Two Tools to Help Solve Problems. *In:* FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. **Posing and Solving Mathematical Problems:** Advances and New Perspectives. Springer, 2016. p. 23-36.

CRESPO, S. A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 493-511.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

ELLERTON, N. F. Problem Posing as an Integral Component of the Mathematics Curriculum: A Study with Prospective and Practicing Middle-School Teachers. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 513-546.

ELLERTON, N. F.; SINGER, F. M.; CAI, J. Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 547-556.

FELMER, P.; DÍAZ, J. P. Novice Chilean Secondary Mathematics Teachers as Problem Solvers. *In:* FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. **Posing and Solving Mathematical Problems:** Advances and New Perspectives. Springer, 2016. p. 287-308.

FERREIRA, N. C. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática.** 2017. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

FERREIRA, N. C.; VIEIRA, W. M.; SILVA, L. D. Pensamento Algébrico: possiblidades de manifestação a partir de resolução de problemas. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, p. 01-25, 2022.

FIORENTINI, D**. Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção cientifica em cursos de pós-graduação.** Tese (Doutorado em Educação). São Paulo, SP, UNICAMP, 1994.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos / Dario Fiorentini, Sérgio Lorenzato. – 3 ed. Ver. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições,** v. 4, n. 1, 1993.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Boletim de Educação Matemática,** v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013

FLICK, U. **Introdução à metodologia de pesquisa: um guia para iniciantes** / Uwe Flick; tradução: Magda Lopes; revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2013.

FREIRE, P.; FAUNDEZ, A. **Por uma pedagogia da pergunta**. 7. Ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011 [1985].

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting Multiple Representations in Álgebra. *In:* CUOCO, A. A. **The roles of representation in school mathematics.** Reston, Virginia: The Council, 2001, p.173-185.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed.: São Paulo: Atlas, 2002

GRUNDMEIER, T. A. Developing the Problem-Posing Abilities of Prospective Elementary and Middle School Teachers. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 411-432.

JIA, S.; YAO, Y. 70 Years of problem posing in Chinese primary mathematics textbooks. **ZDM: Mathematics Education**, v. 53, 2021.

JURADO, U. M. **La Creación de Problemas de Matemáticas en la Formación de Profesores.** Actas del VII CIBEM ISSN 2301-0797. Montevideo, Uruguay, 2013. p. 129-140.

KAPLÚN, G. Material educativo: a experiência de aprendizado. **Comunicação & Educação**, São Paulo, 2003. p. 46-60. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/comueduc/article/view/37491/40205. Acesso em julho de 2023.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. *In*: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. ROMBERG. **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999. p. 133-155.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: Th e role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**. v. 16, n. 1, 2007.

KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from? *In:* SCHOENFELD, A. **Cognitive Science and mathematics education.** Hillsdale, NJ, Erlbaum, 1987. p. 123-147.

KILPATRICK, J. Reformulando: abordando a resolução de problemas matemáticos como investigação. *In:* ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M**. Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 163-188.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica: do projeto à implementação.** Porto Alegre: Artmed, 2008.

LESTER, F. K.; CAI, J. Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. *In:* FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. **Posing and Solving Mathematical Problems:** Advances and New Perspectives. Springer, 2016. p. 117-135.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3º. Ed. Ver – Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MALASPINA, U. TORRES, C. RUBIO, N. How to Stimulate In-Service Teachers' Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing. *In*: LILJEDAHL, P.; TRIGO, M. S. **Mathematical Problem Solving, ICME-13.** Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7. Springer, 2019.

MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.** 2019, 138 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

MARTINS, F. C. Proposição de Problemas: possibilidades de aprendizagem no Ensino Médio. **Educação Matemática em Revista – RS,** v. 2, n. 21, p. 161-169, 2020.

MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na Sala de Aula de Matemática. *In:* **Anais do I Seminário Internacional em Ensino de Ciências e Matemática em tempos mediados pelas tecnologias digitais**. Irati – PR, 2023. Disponível em: https://evento.unicentro.br/anais/siecm.

MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Ensino de Sistemas Lineares: uma Proposta Metodológica Utilizando a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas. **Educação Matemática em Revista,** v. 27, n. 77, p. 166-179, 2022.

MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na licenciatura através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, v.20, n. 01, p.1-19, 2023.

MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Implicações da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. No prelo.

MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Proposição de Problemas no âmbito da Resolução de Problemas: implicações para a sala de aula de Matemática. *In:* MANRIQUE, A. L., GROENWALD, C. L. O. **Anais do IX Congresso Iberoamericano de Educação Matemática**. São Paulo: Editora Akademy, 2023.

MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Representações Múltiplas no ensino de Álgebra e Resolução de Problemas: aspectos teóricos e práticos. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura,** v. 16, p. 277-294, 2021.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo. **Pro-Posições**, v. 3, n. 1, 1992.

MILINKOVIĆ, J. Conceptualizing Problem Posing via Transformation. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 47-70.

NASCIMENTO, M. A. **Ensino-Aprendizagem de Trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano da sala de aula.** 2014, 218 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2014.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Na Agenda for Action:** Recommendations for School Mathematics of the 1980's. Reston, VA-USA, 1980. Disponível em: < https://www.nctm.org/flipbooks/standards/agendaforaction/html5/index.html> Acesso em março de 2022.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics: An overview.** Reston, VA, 2000. Disponível em: < https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17719/Principles%20and%20Standards%20for%20School%20Mathematics.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em julho de 2022.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Professionais standards for teaching mathematics.** Reston, 1991.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. *In:* BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática,** v. 25, n.41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; HUANCA, R. A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. *In:* FROTA, C. R., CARVALHO, A. M. F. T, BIANCHINI, B. L. **Marcas da Educação Matemática no ensino superior**. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 307-331.

OSANA, H. P.; PELCZER, I. A Review on Problem Posing in Teacher Education. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 469-492.

PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de Matemática. *In:* PENTEADO, M. G.; BORBA, M. B. **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão**. São Paulo: Olho d'Água, 2000. p. 23-34.

PIRONEL, M. **Avaliação para a aprendizagem: a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas em ação.** 2019. 296 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019.

POLYA, G. **How to solve it.** Princeton, New Jersey: Princeton University Press. 1945.

PONTE, J. P.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC, 2009.

ROSLI, R.; CAPRARO, M. M.; GOLDSBY, D.; GONZALEZ, E. G.; ONWUEGBUZIE, A. J.; CAPRARO, R. M. Middle Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 333-354.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. *In:* TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

SHULMAN, L. S. **Knowledge and teaching:** foundations of a new reform. Harvard Educational Review, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SILVA, C. F. **Ensino aprendizagem de função afim via exploração, resolução e proposição de problemas com o uso do aplicativo Desmos em contexto remoto.** 2021, 149 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2021.

SILVA, V. S. **Proposição e exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de matemática**. 2015, 132 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2015.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, 2020, p. 1-21.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Proposição de problema de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista de Educação Matemática**, v.19, n.01, 2022, p. 01-23.

SILVEIRA, A. **Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas**. 2016, 235 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2016.

SILVEIRA, A. A.; NASCIMENTO, M. A.; ANDRADE, S. Análise Combinatória via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e Justiça Social. *In:* PANOSSIAN, M. L.; AMARAL, R. B.; SÁ, L. C. **Perspectivas plurais em educação matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.** 1ed.Vitória - ES: Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo - Edifes, 2023, v. 1, p. 131-153.

SILVER, E. A. **On Mathematical Problem Posing.** For the Learning of Mathematics. New Westminster, v. 14, n. 1, 1994, p. 19-28.

SINGER, F. M; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Problem-posing research in mathematics education**: new questions and directions. Educational Studies in Mathematics An International Journal. New York, v. 82, n. 3, p. 1-7, mar. 2013.

SOUSA, A. B. A. **Pesquisas em Proposição de Problemas: convergências e potencialidades.** 2021, 88 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2021.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014.

TRIPATHI, P**.** Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the Middle School,** v. 13, n. 8, p. 438-445, 2008.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. *In:* COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores em sala de aula / Tradução Paulo Henrique Colonese. 6º ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIRGENS, W. P.; MORETTI, V. D. Relações entre significados de problema em documentos curriculares e compreensões sobre seu papel no ensino de matemática. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** v. 12, p. 182-199, 2022.

ANEXO A – EMENTA DA DISCIPLINA INTRODUÇÃO À MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CAMPUS VII - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
UEPB

CURSO(S)			
84 - MATEMÁTICA			

CÓDIGO	COMPONENTE CURRICULAR	TURMA
MAT0704	INTRODUÇÃO À MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	001

TURNO	C.H.	PERÍODO	PROFESSOR
Noturno	60	20231	

PLANO DE CURSO

EMENTA

Processo histórico da Modelagem em Educação Matemática. Perspectivas de Modelagem na Educação Matemática no âmbito educacional. Caracterização da Modelagem Matemática como método de pesquisa científico. A Modelagem em várias ciências. Modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática. Modelagem Matemática como método de ensino de Matemática. Técnicas de modelagem. Evolução de modelos. A relação da Modelagem Matemática com a Resolução de Problemas, com a Etnomatemática e com a interdisciplinaridade. O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática voltadas à sala de aula da Educação Básica, buscando a prática de pesquisa articulada ao ensino.

OBJETIVO GERAL

Oferecer aos alunos experiências teóricas e práticas de pesquisa articulada ao ensino, possibilitando o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática voltadas à sala de aula de matemática da Educação Básica.

OBJETIVO ESPECÍFICO

- Realizar discussões teóricas sobre a perspectiva da Modelagem Matemática em Educação Matemática;
- Compreender a modelagem matemática como uma estratégia de ensino e aprendizagem de matemática;
- Discutir técnicas de Modelagem Matemática e suas aplicações em outras ciências;
- Relacionar a Modelagem Matemática com as Tendências em Educação Matemática;
- Desenvolver atividades práticas, embasadas teoricamente, voltadas para a sala de aula da Educação Básica;

UNIDADE TEMÁTICA 1

Processo histórico da Modelagem em Educação Matemática. Perspectivas de Modelagem na Educação Matemática no âmbito educacional. Caracterização da Modelagem Matemática como método de pesquisa científico. A Modelagem em várias ciências. Modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática. Modelagem Matemática como método de ensino de Matemática.

UNIDADE TEMÁTICA 2

Técnicas de modelagem. Evolução de modelos. A relação da Modelagem Matemática com a Resolução de Problemas, com a Etnomatemática e com a interdisciplinaridade. O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática voltadas à sala de aula da Educação Básica, buscando a prática de pesquisa articulada ao ensino.

AVALIAÇÃO

- Atividades práticas em sala de aula;

Para validar a autenticidade deste plano de curso acesse:
Chave: 2573627048

Anexo II

ANEXO B – PARECER DE APROVAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA EMITIDO PELO COMITÊ DE ÉTICA DA UEPB

Resolução de Problemas: implicações para a sala de aula de matemática", composto por 12 encontros de 2 horas, sendo dois encontros semanais que acontecerão nas segundas e terças, no turno noite, estando previsto para acontecer em um período de dois meses. Para auxiliar nossa análise de dados, utilizaremos a observação em sala de aula, os registros no caderno de campo da professora-pesquisadora, os áudios das aulas, questionários e os materiais produzidos pelos alunos durante os encontros. Quanto a análise dos dados coletados, será utilizada a metodologia da análise de conteúdo, em que serão desenvolvidas categorias de análise diante dos dados obtidos na pesquisa pedagógica. Acreditamos que realizar atividades na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução pode desenvolver o conhecimento relacionado ao conteúdo matemático, ao conhecimento pedagógico do conteúdo matemático, a educação, contextos sócio-políticos-culturais, dentre outros. Dessa forma, podemos considerar essa como uma oportunidade produtiva para uma formação sólida."

Objetivo da Pesquisa:
O Projeto de Pesquisa apresenta os seguintes objetivos:

Objetivo geral:
- Compreender em que aspectos a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas podem contribuir na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra.

Objetivos específicos:
- Identificar as habilidades dos futuros professores em explorar e propor problemas;
- Compreender quais as preocupações conceituais dos futuros professores ao propor problemas;
- Estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da transição entre as representações múltiplas de Álgebra através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas;
- Utilizar a matemática como ferramenta para compreender, analisar e discutir questões de natureza sócio-político-cultural, buscando construir um pensamento crítico capaz de investigar e

Endereço: Av. das Baraúnas, 351- Campus Universitário
Bairro: Bodocongó **CEP:** 58.109-753
UF: PB **Município:** CAMPINA GRANDE
Telefone: (83)3315-3373 **Fax:** (83)3315-3373 **E-mail:** cep@setor.uepb.edu.br

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA - UEPB / PRPGP

Continuação do Parecer: 5.987.078

agir em questões de justiça social no mundo;
- Acompanhar o desenvolvimento dos alunos, e assim, identificar as potencialidades da utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no ensino de matemática.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
Os riscos e benefícios da pesquisa são apresentados de forma clara e de acordo com a Resolução nº 466, de 12 de dezembro de 2012.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:
É um projeto de pesquisa com condições de realização, claramente definido em termos éticos, metodológicos e logísticos, tal como determina a Resolução nº 466, de 12 de dezembro de 2012, caracterizando exequibilidade na proposta.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:
Todos os documentos obrigatórios estão adequados e contemplam as exigências do Anexo II da Norma Operacional CNS nº 001 de 2013 e da Resolução nº 466, de 12 de dezembro de 2012.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:
Não há pendências e/ou inadequações.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2104978.pdf	21/03/2023 10:01:16		Aceito
Folha de Rosto	FOLHA_DE_ROSTO.pdf	21/03/2023 10:00:38	FABIOLA DA CRUZ MARTINS	Aceito
Outros	TAGV.pdf	17/03/2023 22:58:15	FABIOLA DA CRUZ MARTINS	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO.pdf	17/03/2023 22:56:45	FABIOLA DA CRUZ MARTINS	Aceito
Declaração de Pesquisadores	TERMO_DE_COMPROMISSO_DO_PESQUISADOR.pdf	17/03/2023 22:55:23	FABIOLA DA CRUZ MARTINS	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	TAI.pdf	17/03/2023 22:53:57	FABIOLA DA CRUZ MARTINS	Aceito
Declaração de concordância	CONCORDANCIA.pdf	17/03/2023 22:53:13	FABIOLA DA CRUZ MARTINS	Aceito

Endereço: Av. das Baraúnas, 351- Campus Universitário
Bairro: Bodocongó **CEP:** 58.109-753
UF: PB **Município:** CAMPINA GRANDE
Telefone: (83)3315-3373 **Fax:** (83)3315-3373 **E-mail:** cep@setor.uepb.edu.br

TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	15/03/2023 21:04:59	FABIOLA DA CRUZ MARTINS	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

CAMPINA GRANDE, 05 de Abril de 2023

Assinado por:
Gabriela Maria Cavalcanti Costa
(Coordenador(a))

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA - UEPB / PRPGP

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: IMPLICAÇÕES PARA A SALA DE AULA

Pesquisador: FABIOLA DA CRUZ MARTINS

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 68153123.5.0000.5187

Instituição Proponente: Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.987.078

Apresentação do Projeto:
Trata-se de um Projeto de Pesquisa vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). A apresentação resumida do projeto reside nos seguintes termos: "O trabalho com alternativas metodológicas para o ensino de matemática na formação inicial de professores de matemática é considerado fundamental para que esses futuros professores vivenciem em sua formação experiências que os possibilitem subsídios teórico-prático que os auxiliem em suas futuras práticas docentes. Nesse sentido, o principal objetivo desta pesquisa consiste em compreender em que aspectos a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas podem contribuir na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra. Nesse sentido, a Exploração-Proposição-Resolução será utilizada como metodologia orientadora de todo o processo, em que buscaremos trabalhar com futuros professores ideias e compreensões de álgebra, por meio de atividades que estimulem a transição entre as representações múltiplas de álgebra e promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Dessa forma, essa pesquisa caracteriza-se como qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), na modalidade de pesquisa pedagógica (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008), a qual será desenvolvida no âmbito da prática profissional da professora pesquisadora, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Nosso principal instrumento de coleta de dados consiste em um Projeto de Ensino, intitulado "Exploração-Proposição-