UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DOUTORADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

Aspectos teóricos e práticos da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na sala de aula de Matemática

Fabíola da Cruz Martins
Silvanio de Andrade

Campina Grande – PB
2024

FABÍOLA DA CRUZ MARTINS

ASPECTOS TEÓRICOS E PRÁTICOS DA EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB
2024

M379a Martins, Fabíola da Cruz.

Aspectos teóricos e práticos da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na sala de aula de matemática [manuscrito] / Fabíola da Cruz Martins. - 2024.

56 p. : il. colorido.

Digitado. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024. "Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Ensino de Matemática. 2. Atividades teórico-práticas. 3. Exploração de problemas. 4. Proposição de problemas. 5. Resolução de problemas. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Lêda C. D. Andrade - CRB - 15/1032 BC/UEPB

FABÍOLA DA CRUZ MARTINS

EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: IMPLICAÇÕES PARA A SALA DE AULA

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Produto Educacional vinculado: *Aspectos teóricos e práticos da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na sala de aula de Matemática*

Área de concentração: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática

Aprovados em: 12/09/2024

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM-UEPB)

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida
Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM-UEPB)

Maria Isabelle Silva

Profa. Dra. Maria Isabelle Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Nilton Cézar Ferreira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG)

Verônica Tavares Santos Batinga

Profa. Dra. Verônica Tavares Santos Batinga
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

[...] talvez devesse ser este um dos pontos primeiros a ser discutido, num curso de formação com jovens que se preparam para ser professores: o que é perguntar. Insistamos, porém, em que o centro da questão não está em fazer com a pergunta "o que é perguntar?" um jogo intelectual, mas viver a pergunta, viver a indagação, viver a curiosidade, testemunhá-la ao estudante. (Freire; Faundez, 2011, p. 70)

RESUMO

Este Produto Educacional tem como objetivo proporcionar aos pesquisadores, professores, futuros professores e formadores de professores que ensinam matemática, uma compreensão teórico-prática sobre a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, visando contribuir para uma aprendizagem de Matemática com maior compreensão. Ele apresenta e discute, de forma didática e replicável, um conjunto de atividades desenvolvidas com essa metodologia, aplicadas em uma Unidade Temática em um Curso de Licenciatura em Matemática. Ressalta-se que o Produto Educacional tomou como referência os critérios de estratificação definidos pelo Grupo de Trabalho de Produção Técnica da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e está vinculado à tese de doutorado, intitulada "Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na Licenciatura em Matemática: implicações para a sala de aula". O estudo, de natureza qualitativa, envolveu 24 alunos do curso de Licenciatura em Matemática e apontou que a metodologia contribui significativamente para a formação do professor em diversos aspetos, dentre os quais estão o aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos, a ampliação das experiências de trabalho com problemas, a integração de contextos sociais com a Matemática, a prática da utilização das diferentes representações de Álgebra e o desenvolvimento de habilidades profissionais para a utilização dessa metodologia.

Palavras-chaves: Ensino de Matemática; Atividades teórico-práticas; Exploração de Problemas; Proposição de Problemas; Resolução de Problemas.

SUMÁRIO

Sobre os autores

Fabíola da Cruz Martins

Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEPB e Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande - UFCG. É Professora do curso de Licenciatura em Matemática da UEPB - Campus Patos-PB e Professora da Educação Básica da Secretaria Estadual da Educação da Paraíba (SEE-PB). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Formação de Professores, Resolução de Problemas, Ensino de Álgebra e Metodologias do ensino de Matemática. Membra da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), com participação como integrante da Comissão Editorial da SBEM-PB (2022-2025).

Silvanio de Andrade

Pós-Doutorado na University of Delaware. Doutorado em Educação (Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de Sãosz Paulo (USP), Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP) e Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe (UFS). É professor da UEPB - Campus Campina Grande-PB, atuando no Curso de Licenciatura em Matemática e na Pós-Graduação. Tem experiência consolidada na área de Educação Matemática, tendo como foco trabalhos que envolvem o cotidiano e a multicontextualidade da sala de aula, olhados em uma perspectiva crítica e pós-crítica. É membro de sociedades científicas profissionais como o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM/USA) e Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), com participação como Diretor da SBEM-PB (2022-2025).

Apresentação

O objetivo deste recurso didático consiste em proporcionar aos pesquisadores, professores, futuros professores e formadores de professores que ensinam matemática, uma compreensão teórico-prática sobre a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, visando contribuir para uma aprendizagem de Matemática com maior compreensão.

Este recurso didático apresenta e discute um conjunto de atividades desenvolvidas com a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, as quais foram realizadas em uma Unidade Temática intitulada "Exploração-Proposição-Resolução de Problemas: implicações para a sala de aula de matemática", em um Curso de Licenciatura em Matemática.

A metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é compreendida como uma metodologia orientadora, que considera o problema como o ponto de partida da atividade matemática e a sala de aula como um espaço aberto e propício à aprendizagem colaborativa.

Os três elementos que compõem esta metodologia estão interligados, cada um auxiliando e complementando o desenvolvimento do outro. Não se trata de uma linha de pesquisa isolada ou de um momento específico trabalhado em sala de aula. A sua utilização é realizada por meio de um desenvolvimento articulado de momentos de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

O trabalho com essa metodologia não pode ser fundamentado em um trabalho puramente teórico. Sua essência consiste em experiências teórico-práticas, vivenciadas e experimentadas intensivamente, na prática de sala de aula.

A sala de aula no trabalho com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

O cenário de uma sala de aula utilizando a metodologia da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é caracterizado pelo compartilhamento da autoridade matemática entre professor e alunos, possibilitando o diálogo entre professor-aluno e aluno-aluno.

Nesse cenário, o professor mantém o papel de mediador, mas deixa o espaço da sala de aula livre para os alunos poderem realizar suas investigações, reflexões, discussões e descobertas.

Nesse contexto de sala de aula, apesar de fazermos o planejamento, muitas ações que ocorrem não podem ser previstas. Os problemas podem ser propostos tanto pelo professor quanto pelos alunos, resultando na abordagem de diversos conteúdos e contextos.

Uma sala de aula utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

A atividade 1 presente neste material apresenta uma situação que diz respeito à aquisição de batatas. Os alunos foram solicitados a explorar a situação apresentada e expor suas descobertas e curiosidades em forma de um ou mais problemas.

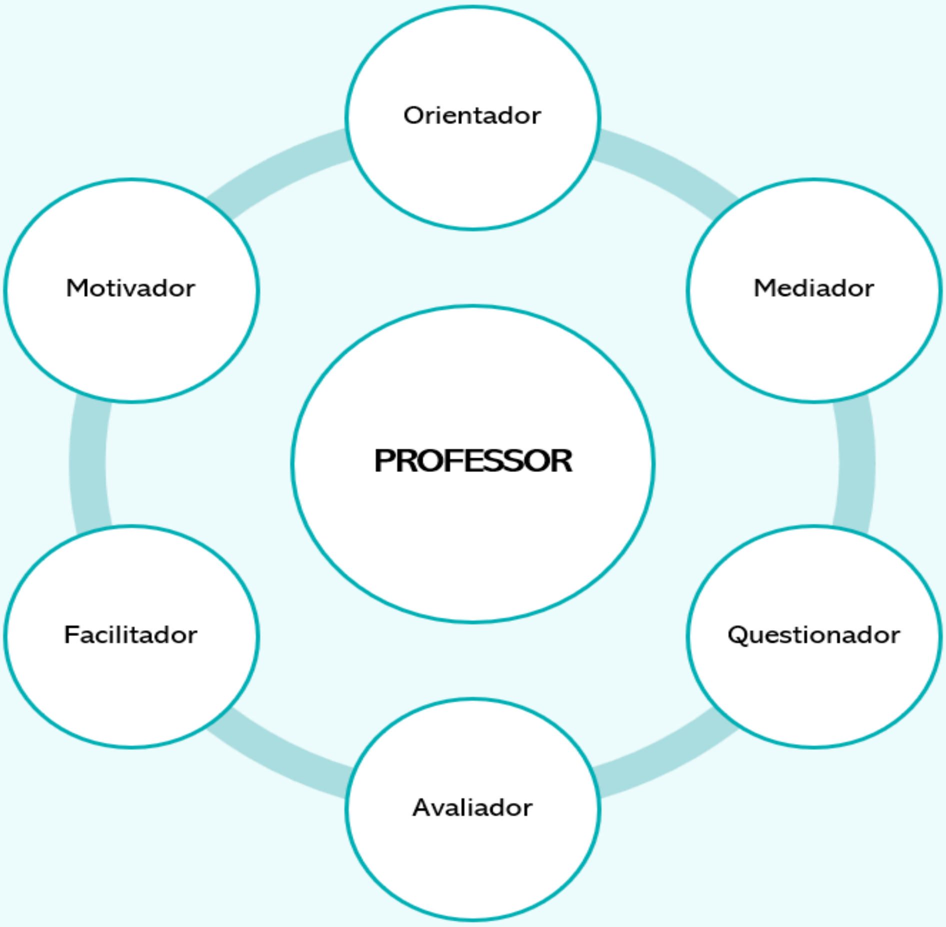
Essa atividade ilustra o cenário de sala de aula utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, em que os alunos são incentivados a explorar, propor e resolver os seus próprios problemas.

Na situação em questão, não foi requisitado a abordagem de nenhum tópico matemático específico. No entanto, a partir da mediação da professora, foram abordados tópicos relacionados à Álgebra, especificamente o conteúdo de Função afim.

Dessa forma, ressaltamos a relevância do professor na utilização desta metodologia, uma vez que ele é o principal mediador da atividade, facilitando o desenvolvimento de ideias e conceitos matemáticos.

O Professor em ação

A atuação do professor no desenvolvimento das atividades utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é um aspecto fundamental, o qual é essencial desenvolver os diferentes papéis:



O Professor utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

No episódio de sala de aula apresentado na atividade 4, apresentamos diversos momentos em que a professora desenvolveu os papéis mencionados acima. A partir da sua atuação, os alunos foram incentivados a aprofundar a compreensão do problema, sendo estimulados a generalizar através da representação algébrica.

O aluno como participante ativo da aula

O cenário de sala de aula que utiliza a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas estimula a autonomia do aluno e possibilita uma aprendizagem colaborativa. Dessa forma, o aluno precisa ser um participante ativo, sendo:

O aluno e a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

Ser um participante ativo na metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas significa não haver uma centralização da atividade matemática no professor. O problema, por exemplo, pode ser proposto pelo aluno, sendo ele o protagonista de todo o processo de ensino-aprendizagem. Ao longo das atividades discutidas nesse material, apresentamos diversos momentos em que os alunos demonstraram conseguir explorar, propor e resolver problemas.

O Problema como ponto de partida

A partir do problema, os conceitos matemáticos são desenvolvidos e aprofundados. Para compreender o significado do problema ou da situação-problema, é importante ter clareza de que é uma atividade que requer uma reflexão inicial e compreensão a respeito, para, assim, encontrar a solução. Além disso, para que a situação se torne um problema, é necessário despertar o interesse do aluno em resolver, de tal forma que este processo de resolução proporcione o desenvolvimento de compreensões, aprendizagens e aprofundamento de ideias matemáticas.

Os diferentes itinerários do problema

Em atividades que utilizam a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, os problemas podem ter diferentes itinerários, tais como:

Atividades 1, 2, 3 e 4 — A atividade pode partir de uma situação aberta e/ou de um contexto matemático, em que os alunos devem propor, explorar e resolver problemas.

Atividade 5 — A atividade pode partir de problemas existentes, em que os alunos devem reformular esses problemas.

Atividade 6 — A atividade pode partir do resultado, em que os alunos devem propor problemas que correspondam a ele.

Reflexões de licenciandos em Matemática sobre a Metodologia Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

Na pesquisa desenvolvida com base nas atividades propostas neste Produto Educacional, os alunos tiveram a oportunidade de realizar atividades práticas, conhecer a perspectiva teórica e ministrar oficinas com a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Ao final da pesquisa, os licenciandos realizaram uma análise reflexiva da Unidade Temática, visando fornecer um feedback construtivo sobre os tópicos abordados. Dessa forma, os alunos foram incentivados a transcender a simples assimilação de informações, podendo refletir e expor aspectos relevantes vividos ao longo do curso.

A seguir, apresentamos um dos questionamentos feitos aos licenciandos:

Como foi a minha experiência com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas enquanto aluno e enquanto futuro professor?

> Os alunos mencionaram que tiveram experiências positivas ao se envolverem com a metodologia, destacando a produtividade e aprendizagem sobre a Resolução de Problemas e a relevância dessa abordagem para o amadurecimento do pensamento matemático. Além disso, mencionaram que a metodologia abre espaço para novas explorações matemáticas, possibilita o estímulo à criatividade e a percepção da beleza da matemática. Em resumo, para os alunos, a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas emergiu como uma prática inovadora, transformando a percepção da resolução de problemas em algo estimulante e significativo.
>
> Ao se referirem sobre o seu papel enquanto professores utilizando a metodologia, os licenciandos destacaram a aprendizagem significativa sobre a Proposição de Problemas e a mediação de problemas matemáticos, reconhecendo a importância de compreender esses desafios para melhor auxiliar os alunos em sala de aula (A1). A relevância pedagógica dessa abordagem foi ressaltada, evidenciando seu papel no aprimoramento das habilidades pedagógicas e matemáticas dos professores (A2). Além disso, a possibilidade de observar o progresso dos alunos, estimular a colaboração e promover a aprendizagem metacognitiva foi destacada como benefícios da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (A3).
>
> Alguns alunos admitiram o desafio inicial, mas reconheceram que essa abordagem representou uma expansão significativa de conhecimentos (A4, A6, A9). A visão diferenciada para a diversidade de soluções foi ressaltada, indicando uma compreensão mais profunda da flexibilidade e criatividade na resolução de problemas (A10, A11, A14). Houve um consenso sobre os benefícios de trabalhar na construção de bons problemas matemáticos, destacando a experiência como inovadora e enriquecedora (A7, A8). Por fim, a importância da mediação do professor e a valorização das etapas do processo foram reconhecidas como aspectos essenciais (A15, A16).

Atividades: Aspectos teórico-práticos da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

Atividade 1 – A compra de batatas

Objetivo: Discutir ideias de função afim e possibilitar a transição entre as representações múltiplas de álgebra por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Duração: 1 encontro (2h)

Atividade 1: A compra de batatas

"Na loja da esquina do meu quarteirão, cada quilo de batata custa 3 reais. No mercado atacadista, que fica no centro da cidade, longe de casa, cada quilo de batata custa 2 reais, mas tenho que gastar 5 reais em passagens de ônibus para ir lá e voltar". Explore a situação apresentada e exponha suas descobertas e curiosidades em forma de um ou mais problemas.

Fonte: Problemas traduzido e adaptado de Malaspina, Torres e Ruvio (2019).

Metodologia

1º momento

- Inicialmente, os alunos devem explorar a situação dada para realizar suas descobertas, que devem ser expostas em forma de problema(s). Após isso, cada aluno deve apresentar os problemas propostos, que devem ser organizados pelo professor na lousa.

2º momento

- Nesse momento, o professor deve mediar a situação, possibilitando a resolução conjunta dos problemas na lousa, explorando os conceitos abordados, aprofundando esses conceitos e sugerindo a proposição de novos problemas.

Compreensão inicial

A compreensão inicial do problema ocorre quando os alunos se familiarizam com a situação apresentada e a exploram com base em seus conhecimentos prévios. Nesse momento, eles apresentam suas primeiras impressões e expressam suas descobertas e curiosidades em forma de um ou mais problemas.

Ao explorar a situação apresentada nesta atividade, é inevitável que os alunos investiguem qual é a vantagem de comprar no mercado do quarteirão em relação ao mercado atacadista. Para auxiliar nessa visualização, durante a exploração na lousa, pode ser sugerido aos alunos que organizem os dados por meio de uma tabela, conforme mostrado a seguir:

Tabela 1 – Valores das batatas no mercado da esquina e no atacadão

Esquina	Valor	Atacadão	Valor
1 kg	3,00	**1 kg**	7,00
2 kg	6,00	**2 kg**	9,00
3 kg	9,00	**3 kg**	11,00
4 kg	12,00	**4 kg**	13,00
5 kg	15,00	**5 kg**	15,00
6 kg	18,00	**6 kg**	17,00
X	$f(x) = 3x$	**X**	$g(x) = 2x + 5$

Fonte: Dados da Pesquisa

A partir dessa resolução, podem surgir diversos questionamentos e caminhos de exploração, possibilitando uma discussão mais aprofundada em termos matemáticos, mas também em questões sociais. Como ressalta Andrade (2017), além de conceitos matemáticos, a Exploração de Problemas abrange questões socioculturais, educacionais e matemáticas, considerando a sala de aula em sua multicontextualidade.

Aprofundamento: Possíveis explorações

Nesta atividade, é possível discutir ideias relacionadas a frações, proporções, equações lineares, funções lineares e sistemas lineares. No entanto, é importante que o aluno não seja orientado quanto ao conteúdo a ser utilizado, de modo que ele proponha o problema com base em seu conhecimento prévio. Após a exploração, o professor deve formalizar o conteúdo conforme o objetivo estabelecido para aquela aula.

Possíveis pontos para exploração do problema:

- Até que ponto seria mais vantajoso comprar no quarteirão ou no centro da cidade;
- Quanto economizaria em cada lugar comprando 2kg, 4kg, 5kg, acima de 5kg e 20 kg;
- Se não houvesse a necessidade de pagar a passagem, ou se ela custasse a metade do preço;
- A representação algébrica de cada opção;
- Comprando a batata e um segundo produto;
- Se no mercado a batata passasse a custar R$ 4,00;
- Onde seria mais vantajoso gastar R$ 30,00.

Os pontos destacados acima foram organizados em categorias com base nos problemas propostos pelos alunos participantes de nossa pesquisa. Essa estratégia visa minimizar uma dificuldade encontrada no trabalho com a Exploração de Problemas, que é precisamente considerar todos os problemas apresentados pelos alunos. Em muitos casos, essa tarefa é inviável devido à limitação de tempo e à quantidade de problemas propostos. Portanto, categorizar os problemas que abordam temas semelhantes é uma estratégia que nos permite considerar o maior número possível de problemas ao longo da exploração, além de facilitar o aprofundamento da discussão e promover um maior envolvimento de todos os alunos.

Aprofundamento matemático do problema

Conforme elucidado na tabela 1, podemos obter as seguintes representações algébricas para cada situação:

Representação algébrica da venda de batatas no quarteirão:

- $f(x) = 3x$, em que x representa a quantidade de quilos de batatas e $f(x)$ o valor a ser pago.

Representação algébrica da venda de batatas no mercado atacadista:

- $g(x) = 2x + 5$, em que x representa a quantidade de quilos de batatas, a constante 5 o valor gasto em passagens e $g(x)$ o valor a ser pago.

Utilizando o conceito de interseção de retas, podemos igualar as duas funções, assim, obtemos:

$$3x = 2x + 5$$

$$x = 5$$

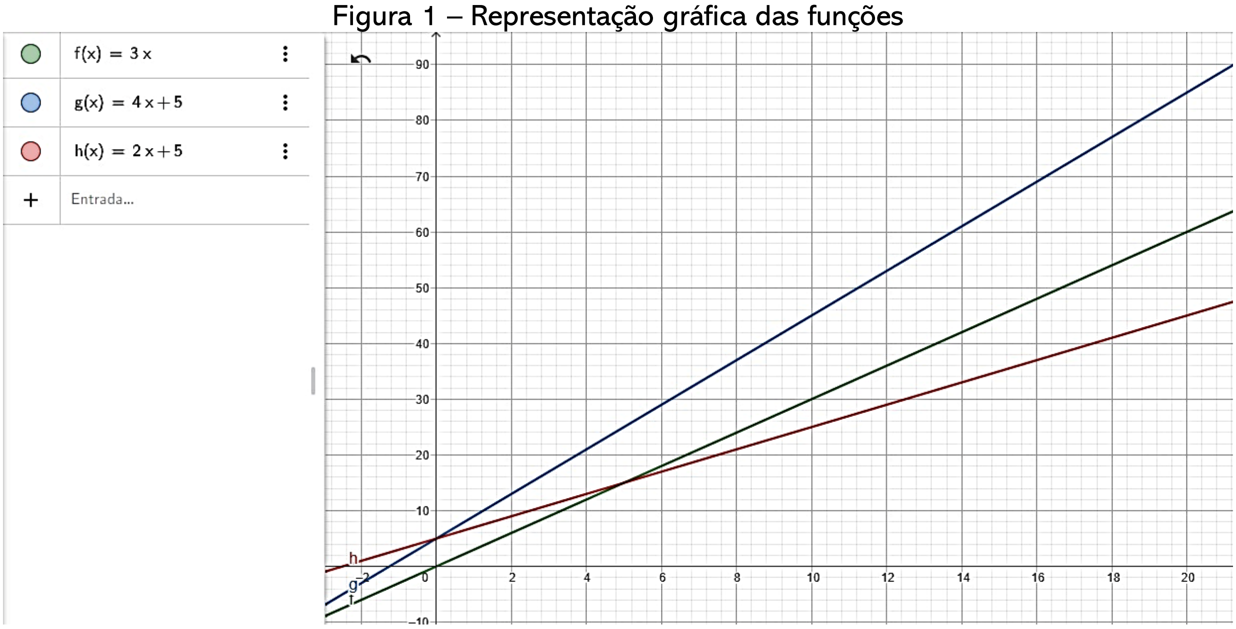
Logo, 5 é o ponto de interseção entre as duas funções.

Fazendo uma interpretação do problema por meio do ponto de interseção, temos que 5 é a quantidade de quilos de batatas em que custaria o mesmo valor a pagar tanto na esquina do quarteirão, quanto no mercado atacadista.

Além desse aprofundamento, pode-se acrescentar uma nova condição de compra, como por exemplo: "Se no mercado atacadista o quilo da batata custasse R$ 4,00, em algum momento, a compra compensaria?"

A representação algébrica a seguir pode auxiliar na visualização e discussão desse problema:

Figura 1 – Representação gráfica das funções



Fonte: Dados da pesquisa

Para aprofundarmos essa discussão, vejamos, a seguir, um episódio de sala de aula real, composta por licenciandos em matemática.

Episódio de sala de aula

Ao expor a representação gráfica ilustrada na figura 1, a professora levantou o seguinte questionamento: “Esse gráfico, representa, de fato, a situação da venda de batatas?” A partir desse ponto, iniciou-se o seguinte diálogo:

A8: Na minha opinião, sim. Pois representei as três funções encontradas.

PP: Isso mesmo. Ao analisar o gráfico, quais conclusões podemos retirar do problema?

A15: Podemos perceber que a reta da função y=4x+5 jamais interceptará as outras duas retas. Ou seja, em nenhum momento compensará comprar a batata a 4,00 reais o quilo.

PP: O que mais podemos observar?

A8: Podemos observar as retas se interceptando no 5, que foi o que discutimos, que era quando tanto fazia comprar em um lugar ou em outro.

PP: O que mais podemos observar?

(silêncio)

PP: Eu tenho uma observação! Temos duas retas que interceptam o eixo y no ponto 5 e uma reta que passa pela origem. O que isso significa?

A22: Significa que se eu for no atacadão e não gostar das batatas que têm lá ou se elas estiverem em falta, mesmo assim eu vou sair no prejuízo, porque vou precisar pagar a passagem (risos).

PP: Ótima observação, então isso quer dizer que faz sentido considerarmos x= 0, né isso? Mas, agora eu questiono pra vocês, faz sentido eu considerar x= -1?

A8: Ahhh! Eu não me toquei nisso antes. Não faz sentido, não tem como eu comprar -1 quilo de batata.

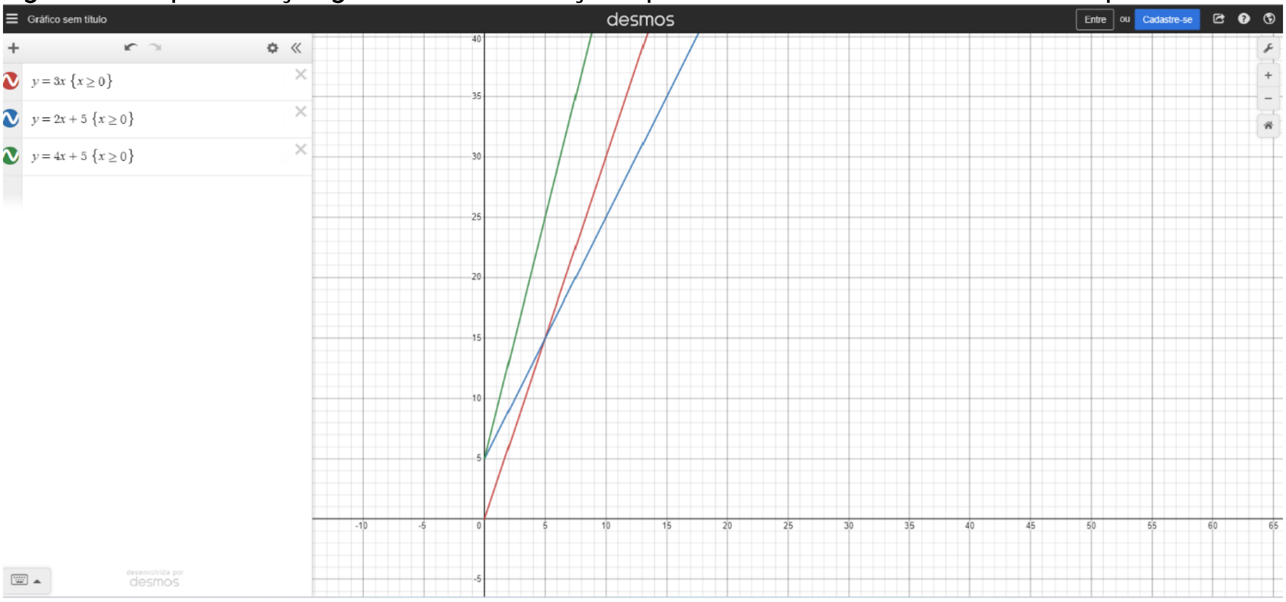
Com esse diálogo, a professora-pesquisadora buscou direcionar o questionamento para a discussão das ideias de funções relacionadas a domínio, contradomínio e imagem de uma função. Foi discutido que as funções encontradas para modelar os três casos de aquisição de batatas não estavam definidas para os valores x < 0, uma vez que não faria sentido representar quantidades negativas de quilos de batatas. Assim, as funções foram representadas da seguinte forma:

- $f(x) = 3x, em\ que\ D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}\ e\ Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $g(x) = 2x + 5\ em\ que\ D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}\ e\ Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$
- $h(x) = 4x + 5\ em\ que\ D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}\ e\ Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

Com esse diálogo, destacamos o quanto as representações verbal, numérica e gráfica colaboraram para uma representação algébrica concisa e coerente com a situação apresentada. A transição entre essas representações é fundamental, pois, conforme mencionado em Martins (2019), ela favorece uma aprendizagem mais aprofundada e, consequentemente, a manifestação do pensamento algébrico.

A partir da discussão sobre Domínio, Contradomínio e Imagem das funções, a professora-pesquisadora propôs a elaboração da representação gráfica das funções representadas, de modo a levar em consideração os valores para os quais as funções estavam definidas. Utilizando a calculadora gráfica Desmos, as funções foram representadas da seguinte forma:

Figura 2 – Representação gráfica das três funções que simbolizam os três casos da compra de batatas



Fonte: Dados da pesquisa

Outros aprofundamentos

No contexto dessa discussão, podem ser mencionadas questões importantes envolvendo a dimensão social, como: geração de emprego e renda no bairro, ações para minimizar as pessoas em situação de vulnerabilidade social, desemprego, consumo consciente, valorização do comércio local, agricultura familiar, dentre outros temas.

A atividade 1 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. Contribui no desenvolvimento de habilidades de Proposição de Problemas dos futuros professores.
ii. Possibilita um aumento nas experiências de trabalho com problemas, permitindo que os futuros professores aprimorem o seu conhecimento sobre as ideias matemáticas abordadas em cada problema.
iii. Demonstra que a utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, favorece uma compreensão aprofundada das ideias de Álgebra;
iv. Oferece aos futuros professores a oportunidade de integrar contextos sociais nas aulas, utilizando a matemática como ferramenta.
v. Contribui para a compreensão da importância da transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra para a manifestação do pensamento algébrico.
vi. Colabora para que os futuros professores não apenas apresentem e reconheçam bons problemas, mas também dominem o uso dessa metodologia.

Atividade 2 – Chocolates e ovos de Páscoa

Objetivo: Utilizar conceitos matemáticos como uma ferramenta para compreender, analisar e discutir questões do cotidiano, buscando estimular o pensamento crítico-reflexivo.

Duração: 2 encontros (4h)

Atividade 2: Chocolates e ovos de Páscoa

Observe a imagem abaixo, explore a situação e coloque suas observações em forma de problema(s). (*Observação: Os dados apresentados são referentes aos preços de 2013).*

Disponível em: <http://www.mariavitrine.com.br/2014/03/comprar-ovo-de-pascoa-ou-barra-de.html>. Acesso em 27 de março de 2023.

Metodologia

1º momento	• Os alunos devem ser organizados em duplas e/ou trios e iniciar a atividade. Ao final desse momento, todos os grupos devem apresentar os problemas propostos e, assim, realizar a discussão da atividade.
2º momento	• Cada grupo deve escolher um problema proposto pelos outros grupos e contribuir para o refinamento desse problema, dando uma nova redação, em um nível que considere mais adequado e/ou mais aprofundado.
3º momento	• Os grupos realizarão uma pesquisa de preços atuais dos chocolates e elaborarão uma nova versão da imagem original, com os preços atualizados. Após isso, deve-se fazer a apresentação e discussão.

Compreensão inicial

A imagem inicial, com a comparação de preços, traz uma análise comparativa de cada tipo de chocolate. Assim, o aluno já tem esses dados como ponto de partida para sua reflexão. É importante salientar que existem diversos fatores que podem influenciar na diferença entre preço do ovo de chocolate em relação ao chocolate no formato tradicional, como, por exemplo, o aumento da mão de obra para a produção, a embalagem, o armazenamento, o transporte, dentre outros. Nesse contexto, destacamos que essa atividade permite refletir sobre o papel da matemática como ferramenta para compreender, analisar e discutir questões do cotidiano, buscando estimular o pensamento crítico-reflexivo.

Aprofundamento: Possíveis explorações

Nessa atividade, espera-se abordar conceitos relacionados as operações fundamentais da aritmética, frações, razão, proporção, regra de três, equações lineares, matemática financeira e outros conceitos elementares da matemática. Além disso, o problema também oportuniza abranger a discussão de questões que envolvam uma dimensão social.

A seguir, serão apresentados alguns problemas propostos no primeiro momento dessa atividade e que podem ser explorados pelo professor em sala de aula, nos diferentes níveis de ensino.

Quadro 1 - Problemas propostos pelos participantes da pesquisa

Grupos	**Problemas**
A7, A12 e A20	Um casal tem dois filhos, eles pretendem presentear cada filho com um ovo de Páscoa e com o máximo de chocolates que o orçamento do casal permitir. Eles desejam gastar R$70,00 no total. Qual a melhor opção de compra para que cada filho coma o máximo de diversos chocolates?
A5 e A11	Em cada produto de mesmo tipo de chocolate, relacione e descubra o preço dos produtos com o preço pago por cada grama. Em qual tipo de chocolate você está pagando mais caro o preço por grama?
A13, A18 e A23	Aparecida tem R$ 200,00 para comprar de chocolates ou ovos para seus 30 alunos. a) Quantos chocolates de cada sabor no formato tradicional ela conseguiria comprar? b) Quantos ovos de cada sabor ela conseguiria comprar? c) Em algum caso irá sobrar dinheiro? Se sim, em qual caso e quanto? d) Em qual(is) casos a quantidade será suficiente/necessário para os alunos? e) Em algum dos casos irá sobrar chocolates ou ovos? Em quais e quantos?
A2 e A13	Se formos buscar custo benefício, qual valor das gramas dos chocolates? E dos ovos que tem o mesmo sabor? Qual vale mais a pena?
A8 e A22	Suponha que um confeiteiro deseja derreter barras de chocolate de 170g para produzir e vender ovos de chocolate de 250g cada. As opções de barra de chocolate são: Diamante Negro, por R$3,79 e Alpino, por R$3,99 cada. Considere também que as barras estejam na seguinte promoção: pague R$10,00 comprando 3 unidades do Diamante Negro ou 4 unidades do Alpino. Agora responda: a) Ao comprar sete barras de cada sabor, quanto o confeiteiro pagará? Em qual dos casos será mais lucrativo? Qual o lucro? b) Supondo que o confeiteiro deseja produzir e vender 340 ovos de páscoa escolhendo apenas uma das opções de barra de chocolate, qual será mais lucrativo? Qual o lucro?

Fonte: Dados da Pesquisa

Episódio de sala de aula

Após a apresentação dos problemas propostos pelos alunos no 1º momento da atividade, a professora-pesquisadora questionou: vocês considerariam adequado levar essa atividade para o contexto da sala de aula, na Educação Básica? E seguiu, então, uma discussão de concordância, com as falas que destacamos a seguir:

A24: É uma atividade adequada para a Educação Básica, que podemos trabalhar nos diversos anos, uma vez que é uma situação que nos deparamos no cotidiano, mas que pode ser abordada em diversos níveis de complexidade.
A14: Eu diria que é uma atividade necessária que pode se constituir um símbolo de desconstrução de padrões, em que as pessoas alimentam uma cultura de que a páscoa deve ser comemorada com ovo de páscoa, esquecendo o verdadeiro sentido, e o que está por trás disso. Podemos nos perguntar, quem ganha com essa cultura? É a mesma coisa do Natal, em que temos o panetone como símbolo principal. Quem ganha com essa cultura?
A17: Eu acho que vai muito das condições financeiras da pessoa, há pessoas muito ricas que pouco importa o preço a pagar pelo ovo de páscoa, por outro lado, há pessoas muito pobres que não tem condições de comprar o alimento do dia a dia, imagina um ovo de páscoa. Então, se a pessoa tem condições financeiras mediana, ela pode comprar o chocolate tradicional para os seus filhos e mostra-los que essa é uma opção mais vantajosa.
A20: Uma alternativa para não pagar tão caro por um ovo de chocolate, é você aderir aos ovos feitos pelas pessoas da própria cidade. São ovos de valores acessíveis e, muitas vezes, usam produtos de excelente qualidade na produção.
A9: O problema é que muitas pessoas pensam na postagem nas redes sociais, então acha que será mais elegante presentear com um ovo mais caro, mesmo que a pessoa divida a compra em 6 vezes.
A3: Eu concordo que por meio dessa atividade podemos possibilitar uma reflexão no aluno e desenvolver um pensamento crítico, para que ele entenda que não é obrigado ter como objeto de desejo um item que por estar em formato de ovo, ele paga, por exemplo, cinco vezes a mais do que se comprasse no seu formato original. O sabor é o mesmo!
A19: É importante trabalhar isso com crianças, que as vezes criam até traumas por nunca terem ganhado ovo de páscoa.

Esses pontos destacados na discussão são importantes para refletirmos sobre o papel da matemática como ferramenta para compreender, analisar e discutir questões do cotidiano, buscando estimular o pensamento crítico-reflexivo. Além disso, a discussão também possibilitou uma reflexão sobre o consumo consciente e sobre uma cultura que vem se disseminando, em que as pessoas tem a necessidade de alimentar uma aparência, na maioria das vezes, nas redes sociais, para atender padrões e/ou demonstrar participar de classes sociais as quais não fazem parte.

Voltando o nosso olhar para a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, destacamos a importância da realização das discussões entre aluno-aluno e professor-aluno, as quais são fundamentais no desencadear dessa proposta. Como menciona Andrade (2017), a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas não é olhada apenas no nível de processos e conceitos matemáticos, mas também no que tange a questões de natureza sócio-político-cultural.

Fazemos esse destaque, pois acreditamos que, se a atividade estivesse sido finalizada na resolução do problema proposto, não teríamos conseguido perpassar por temas que vão além da matemática. Além disso, destacamos que o momento de discussão possibilitado pela Exploração de Problemas é importante para proporcionar uma maior reflexão sobre o processo realizado, buscando, também, despertar o pensamento crítico-reflexivo em outros alunos que, inicialmente, não haviam pensado por essa vertente.

Crespo (2015) discute que o ensino de matemática por meio da Proposição de Problemas incentiva os alunos a usarem a matemática para propor e responder problemas que são profundamente pessoais e socialmente relevantes. No entanto, esse incentivo não é natural, ele requer a estimulação do professor. Isso ficou evidente nessa atividade, uma vez que, inicialmente, não identificamos a presença de elementos sociais nos problemas propostos. Contudo, após o momento de discussão, notou-se uma atenção especial por parte dos alunos a essas questões, que foram consideradas quando reformularam os problemas, como veremos a seguir.

Acreditamos que esses aspectos não foram considerados inicialmente, pois, embora a Proposição de Problemas colabore na discussão de questões sociais, essa abordagem não é habitual. Como menciona Andrade (2017), ao longo da história e na atualidade, as pesquisas e práticas de Resolução de Problemas não se detiveram/detém em questões de natureza sócio-política e cultural, elas mantiveram/mantém o foco principal em questões de natureza cognitiva, conceitual e processual, sem adequação à perspectiva de Educação Crítica.

Reformulação de Problemas

No momento da Reformulação de Problemas, cada grupo pôde escolher um problema proposto pelos outros grupos e contribuir para o refinamento desse problema, apresentando uma nova redação, em um nível que considere mais adequado e/ou aprofundado. Apresentamos a seguir alguns problemas reformulados:

Problema Original	
A2 e A13	Se formos buscar custo benefício, qual valor das gramas dos chocolates? E dos ovos que tem o mesmo sabor? Qual vale mais a pena?
Problema Reformulado	
A9 e A10	Uma mãe que recebe um salário mínimo deseja presentear suas três filhas nesta páscoa, tendo em vista o custo benefício entre os chocolates tradicionais e os ovos de páscoa que tem o mesmo sabor, qual vale mais a pena ela realizar a compra? Explique.

Ao reformular o problema proposto pelos alunos A2 e A13, os alunos A9 e A10 explicaram que, diante da discussão, procuraram trazer o problema proposto para um contexto real, buscando despertar no aluno uma visão crítica voltada para o custo benefício dos chocolates em questão. De acordo com os alunos, esse tipo de problemática é importante ser discutida pela sociedade como um todo, de modo a descontruir padrões impostos pela mídia.

O problema elaborado pelo trio A14, A15 e A16 foi escolhido para ser reformulado por dois grupos, sendo que cada grupo reformulou um problema, como podemos ver a seguir:

Problemas Originais	
A14, A15 e A16	1. Quantos vezes poderia comprar todos os produtos (caixa, barra, bombom) para equivaler a compra dos 5 ovos disponíveis em relação ao peso e ao preço? 2. Calcule a equivalência entre a unidade do batom e o ovo Prestígio em relação ao preço e ao peso.
Problemas Reformulados	
A4 e A6	1. Levando em consideração os preços e pesos informados na imagem, responda: a) Quantas vezes de cada produto (caixa, barra, bombom) poderia comprar para que equivalha ao mesmo valor da soma de todos os ovos disponíveis na tabela?
A17, A19 e A24	1. Uma família que vive com um salário mínimo deseja comprar chocolate para seus três filhos. No supermercado, fazendo uma análise entre o batom e o ovo prestígio, observou-se que com o preço cobrado, teria mais vantagens comprar o batom. Por quais motivos eles chegaram a essa conclusão? Construa um gráfico com a análise dos dados.

Os alunos A4 e A6 reformularam o problema buscando tornar a redação mais clara, uma vez que, inicialmente, o problema apresentava diversas interpretações. Esse ponto observado foi relevante para enfatizarmos que o problema precisa ser claro, objetivo e conciso, e que, mesmo que ele possa ter diferentes caminhos para a solução, não é relevante que o enunciado propicie uma compreensão dúbia.

Os alunos A17, A19 e A24 reformularam o problema de modo semelhante aos alunos A9 e A10, buscando trazer o problema para um contexto real, o qual, segundo eles, seria uma forma de inserir os alunos na ação matemática. Um aspecto interessante que esses alunos apresentaram é que eles próprios retiram a conclusão, mas pedem que os alunos expliquem o motivo pelo qual chegaram a essa conclusão. Outro aspeto relevante deste problema é a solicitação de que esta análise seja apresentada de forma gráfica. De acordo com os alunos A17, A19 e A24, essa representação pode contribuir para uma melhor compreensão sobre as vantagens e desvantagens dessa aquisição.

Com essas reformulações e com as outras que não foram citadas, destacamos o envolvimento dos alunos na atividade, buscando lapidar o problema o máximo possível. Nesse contexto, percebemos que a Exploração de Problemas potencializou a Proposição de Problemas, já a Resolução de Problemas foi uma ferramenta que operacionalizou todo o trabalho. Em grande parte dos problemas reformulados, ficou perceptível que os alunos buscaram trazer a dimensão social para os problemas. Acreditamos que isso se deu dada a discussão realizada anteriormente. Essa consideração é importante, pois, como menciona Andrade (2017), o professor de matemática deve ser pensado como um pesquisador e intelectual crítico/pós crítico, capaz de problematizar e de produzir conhecimentos sobre suas práticas, considerando as condições sociais, culturais, históricas e políticas do contexto em que estiver inserido.

Aprofundamento matemático do problema

O aprofundamento matemático desse problema deve ser realizado nas três etapas da atividade. Contudo, gostaríamos de enfatizar a imagem com os preços atualizados na análise comparativa desses chocolates e o aprofundamento matemático feito nessa etapa.

Figura 3 – Comparativo dos chocolates tradicionais e ovos de páscoa em abril de 2023

Fonte: Dados da pesquisa

Ao projetarem a imagem, a professora-pesquisadora questionou: "sabendo que, em abril de 2013, o salário-mínimo era de 678,00 e, em abril deste ano, 2023, o salário-mínimo é de 1.302,00, o que vocês podem concluir com essa atualização de preços dos chocolates?"

A18: Se analisarmos, nesses 10 anos, o salário mínimo praticamente dobrou, e se olharmos para o BIS por exemplo, ele mais que dobrou. Então não teve um aumento proporcional.
A9: Isso só mostra o quanto o brasileiro tem perdido o seu poder de compra ao longo dos últimos anos, pois o salário mínimo não tem acompanhado a inflação.

Neste momento, prosseguiu-se o diálogo relacionado à qualidade de vida dos brasileiros, que tem sido impactada, diretamente, nos últimos anos. Foi mencionado que tem sido observado que o setor de alimentação vem sendo o mais afetado com o aumento dos preços, e é, justamente, o setor que mais necessitamos para a nossa sobrevivência.

Em meio a essa discussão, a professora-pesquisadora questionou aos alunos quanto cada ovo de Páscoa equivalia do salário-mínimo, em 2013, e, em 2010, o que resultou na seguinte tabela:

Tabela 2 – Comparativo de preço dos ovos de Páscoa nos anos 2013 e 2010

Ovo de Páscoa	Bis		Baton		Alpino		Prestígio		Sonho de valsa	
2013	19,99	2,94%	22,99	3,39%	29,99	4,42%	32,99	4,86%	29,99	4,42%
2023	49,99	3,84%	49,99	3,84%	49,99	3,84%	39,99	3,07%	39,99	3,07%

Fonte: Dados da Pesquisa

De acordo com a tabela, a turma pôde retirar as seguintes conclusões: i) em 2013, o ovo que equivalia a um menor percentual do salário-mínimo era o Bis, o que não se repetiu em 2023, pois ele teve um aumento de 150 %; ii) ainda em 2013, o ovo Prestígio era o ovo que equivalia a um maior percentual do salário-mínimo, o que também não se repetiu em 2023, quando passou a equivaler 3,07% do salário mínimo; iii) essa queda também se repetiu no ovo Alpino, que, em 2013, equivalia 4,42 % do salário-mínimo e, em 2023, passou a equivaler 3,84 %; iv) tanto a queda quanto o aumento está relacionada à procura pelos ovos e à quantidade de vendas realizadas.

Outros aprofundamentos

Por meio da discussão apresentada no episódio de sala de aula, podemos pensar em outros aprofundamentos dessa atividade, refletindo sobre o papel da matemática como ferramenta para compreender, analisar e discutir questões do cotidiano, buscando estimular o pensamento crítico-reflexivo. Além disso, a discussão também possibilita uma reflexão sobre o consumo consciente e sobre uma cultura que vem se disseminando, em que as pessoas tem a necessidade de alimentar uma aparência, na maioria das vezes, nas redes sociais, para atender padrões e/ou demonstrar participar de classes sociais as quais não fazem parte.

A atividade 2 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. Possibilita utilizar a matemática como uma ferramenta para abordar e discutir questões sociais, de modo a despertar o pensamento crítico-reflexivo dos alunos.
ii. Evidencia que a mediação do professor é indispensável para atingir os objetivos propostos em uma atividade, esclarecendo que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é uma metodologia aberta, mas não solta.
iii. Proporciona experiências com a reformulação de problemas, o que nos faz refletir sobre as características que devemos considerar e evitar ao propor um problema, colaborando também para a elaboração e/ou seleção de problemas a serem trabalhados na sala de aula.

Atividade 3 – Adivinhando pensamentos

Objetivo: Analisar as habilidades dos futuros professores de explorar, resolver e propor problemas envolvendo as Representações Múltiplas de Álgebra.

Duração: 02 encontros (4h)

Atividade 3: Adivinhando pensamentos

André gosta de impressionar as pessoas fazendo adivinhações. Ele consegue descobrir o número pensado por uma pessoa. Observe a conversa entre ele e Fernando no diálogo apresentado na figura abaixo.

Fonte: Bianchini (2018, p. 133)

Metodologia

1° momento	• Os alunos devem receber a atividade e participar de uma leitura conjunta. Em seguida, eles devem ser divididos em duplas ou trios e refletir sobre a situação apresentada, buscando compreender e explicar como André consegue adivinhar pensamentos.
2° momento	• Nesse momento, os alunos devem elaborar uma nova regra que permita "adivinhar o número pensado".

Compreensão inicial

A leitura conjunta deve possibilitar que os alunos reflitam sobre a situação, a fim de compreender e explicar o que está acontecendo, que permite a André adivinhar os pensamentos. Espera-se que os alunos compreendam que não se trata de uma adivinhação baseada em pensamentos, mas uma sequência de operações matemáticas que ao final do diálogo basta dividir o último resultado pelo número 4 para obter o número pensado.

Aprofundamento matemático do problema

As frases do diálogo podem ser expressas algebricamente substituindo o número pensado pela incógnita *x*. Dessa forma, temos as seguintes representações:

Tabela 3 – Representações do diálogo exposto na atividade 3

Frases do diálogo	Representação Numérica	Representação Algébrica
Pense em um número	5	x
Dobre	10	$2x$
Adicione 10	20	$2x + 10$
Multiplique por 4	80	$4(2x + 10) \ = \ 8x + 40$
Subtraia 40	40	$8x$
Divida por 2	20	$4x$
Quanto deu?	20	$4x$
Você pensou no número 5	$\frac{20}{4} = 5$	$\frac{4x}{4} = x$

Fonte: Dados da pesquisa

Como ilustrado acima, esse problema pode ser abordado usando as Representações Múltiplas de Álgebra, podendo colaborar na manifestação do pensamento algébrico do aluno. Contudo, o professor precisa atentar-se às percepções dos alunos, estimulando que eles transitem pelas diferentes representações, pois pode acontecer do aluno considerar apenas a fala final, desconsiderando todo o processo de operações inversas que o permite chegar a solução do problema, como veremos no episódio de sala de aula a seguir.

Episódio de Sala de Aula

Os alunos compreenderam que não se tratava de uma adivinhação baseada em pensamentos, uma vez que bastava dividir o último resultado pelo número 4 para obter o número desejado. Diante dessa descoberta, a professora-pesquisadora questionou aos alunos: "se basta dividir o resultado final pelo número 4, qual o papel de todos os comandos dados por André no decorrer do diálogo?" Esse questionamento foi feito, pois muitos trios ainda não haviam compreendido a essência do problema, estavam se limitando ao resultado final.

Diante disso, o trio 1 mencionou a presença das operações inversas no diálogo, em que, quando ele pede para dobrar o número pensado, adicionar 10 e multiplicar por 4, encontra-se o número 80. Quando ele pede para subtrair 40 e dividir por 2, ele anula as operações realizadas, ficando apenas o número pensado multiplicado por 4. A partir dessa explicação, podemos evidenciar a manifestação do pensamento algébrico, uma vez que, a partir da oralidade, o trio expressa as diferentes relações entre as partes do problema (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993; Almeida, 2016).

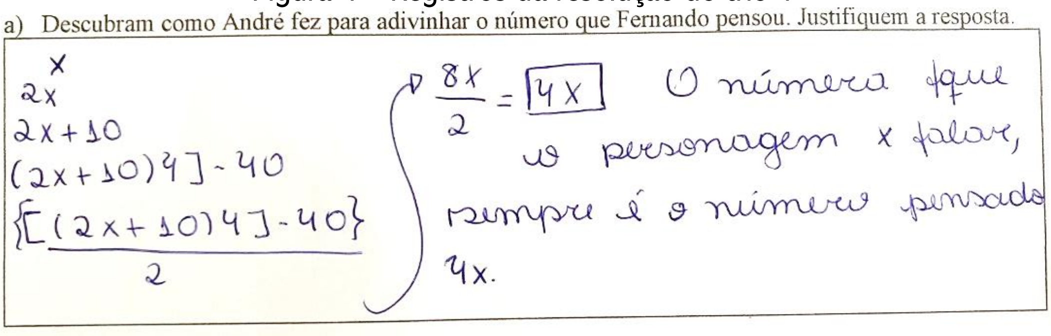
Buscando estimular a generalização do problema, incentivando que os alunos modelassem o problema algebricamente, a professora-pesquisadora questionou: "o fato de o diálogo expor que o número pensado por Fernando foi 5 facilitou as descobertas de vocês? Caso vocês não soubessem qual foi o número pensado, seria possível descobrir como André faz para adivinhar números?"

Esses questionamentos provocaram uma divisão entre a turma, uma vez que os alunos que estavam limitados ao caso particular, representando apenas numericamente, demoraram a perceber o que estava acontecendo, o que demandou mais tempo para uma análise aprofundada. Nesse contexto, podemos afirmar a presença da limitação da Representação Numérica mencionada por Friedlander e Tabach (2001), os quais destacam que, nessa representação, alguns aspectos ou soluções importantes de um problema podem ser perdidos.

Salientamos que a menção a essa desvantagem não desmerece o seu uso, uma vez que, como os autores discutem, todas as representações apresentam vantagens e limitações. Nessa resolução, por exemplo, também consideramos duas vantagens da Representação Numérica: i) relevante para a compreensão inicial de um problema e para a investigação de casos particulares e ii) uma ponte eficiente para Álgebra (Friedlander e Tabach, 2001). Todavia, é importante notar que nem sempre essa ponte é algo natural para todos os alunos. Nessa atividade, por exemplo, ela foi fundamental para alguns alunos, já outros, não fizeram uma associação natural entre a representação numérica e algébrica.

Após a mediação da professora-pesquisadora, outros grupos compreenderam a estrutura algébrica do problema e o modelaram, expressando, dessa forma, o motivo pelo qual André conseguiria adivinhar números, como podemos observar no registro a seguir:

Figura 4 – Registros da resolução do trio 1


a) Descubram como André fez para adivinhar o número que Fernando pensou. Justifiquem a resposta.

x

$2x$

$2x+10$

$(2x+10)4]-40$

$\dfrac{\{[(2x+10)4]-40\}}{2}$

$\dfrac{8x}{2} = \boxed{4x}$ O número que o personagem x falar, sempre é o número pensado 4x.

Fonte: Dados da Pesquisa

No segundo momento da atividade, os alunos foram estimulados a criarem suas próprias regras para "adivinhar números", como podemos ver a seguir:

Quadro 2 - Problemas elaborados pelas duplas

Trio	Desafio	Representação algébrica	Observações da pesquisadora
1	1° Pense em um número natural 2° Adicione 1 3° Multiplique por 10 4° Divida por 5 5° Subtraia pelo sucessor do número pensado 6° Qual o valor encontrado?	$y = \frac{(x+1)10}{5} - (x+1)$ $y = \frac{10x}{5} + \frac{10}{5} - x - 1$ $y = 2x + 2 - x - 1$ $y = x - 1$	O número pensado será o resultado encontrado somando mais 1.
2	1° Pense em um número 2° Derive ele 3° Some 10 4° Eleve ao quadrado 5° Subtraia 50 % 6° Some 50 % 7° Subtraia pelo número que você pensou 8° Quanto deu?	$y = (0 + 10)^2 - 50 + 25 - x$ $y = 100 - 50 + 25 - x$ $y = -x + 75$	Ao derivar qualquer constante, o valor é zero. Assim, o cálculo inicia-se com 0. Seguindo a sequência de passos, o resultado sempre será 75 menos o número pensado. Portanto, para descobrir o número pensado, basta diminuir o resultado de 75.
3	1° Pense em um número maior ou igual a 1 2° Multiplique por 2 3° Some 5 4° Multiplique por 10 5° Some 50 6° Subtraia 100 7° Qual o resultado?	$y = (2x + 5)10 + 50 - 100$ $y = 20x + 50 + 50 - 100$ $y = 20x$	Para descobrir o número pensado, basta dividir o resultado por 20.
4	1° Pense em um número de 1 a 10 2° Multiplique por 9 3° Some o primeiro e o segundo algarismo do resultado (se o número tiver só um algarismo, como o 9, seve-se somar com o 0. 4° Adicione 4 ao resultado 5° O resultado deu 13	Não há representação algébrica. Temos as seguintes possibilidades de resolução: a) 1.9 = 9 b) 2.9 = 18 c) 3.9 = 27 d) 4. 9 = 36 e) 5. 9 = 45 f) 6.9 = 54 g) 7.9 = 63 h) 8.9 = 72 i) 9.9 = 81 j) 10.9 = 90	O conjunto de números pensados foi limitado de 1 a 10. Sendo assim, se multiplicarmos qualquer número por 9, teremos os seguintes múltiplos: M (9) = {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90}. Como a soma dos dois algarismos desses múltiplos é igual a 9, somando-se 4, teremos o resultado igual a 13.

5	1º Pense em um número natural n 2º Derive em relação a x, na expressão $nx^2 + k$ 3º Some com $\sqrt{100}$ 4º Multiplique por 2^2 e por 2º 5º Subtraia 40 6º Divida por $\sqrt{4}$ 7º Qual o resultado?	$y = \frac{[((2nx) + \sqrt{100})4.1] - 40}{2}$ $y = \frac{8nx + 40 - 40}{2}$ $y = 4nx$	Ao derivar a expressão dada, iniciamos o cálculo com 2nx. A partir dos comandos dados, teremos a equação y= 4nx. Portanto, para descobrir o número pensado n, basta dividir o resultado por 4x.
6	1º Pense em um número 2º Eleve ele ao quadrado 3º Some com $\sqrt{4}$ 4º Subtraia 2 5º Multiplique por $\sqrt{9}$ 6º Divida por $\sqrt{9}$ 7º Qual o resultado?	$y = \frac{(x^2 + \sqrt{4} - 2)\sqrt{9}}{\sqrt{9}}$ $y = x^2$	O número pensado será a raiz do resultado encontrado.

Fonte: Dados da Pesquisa

Aprofundamento: Possíveis explorações

Além da criatividade empregada na criação de regras para adivinhação de números, os alunos podem utilizar de suas vivências e conhecimentos e implementar isso na apresentação de suas regras para a turma, abordando, inclusive, aspectos sócio-político-culturais, como podemos ver na imagem a seguir:

Figura 5: Diálogo proposto pelos licenciandos

Fonte: Dados da pesquisa

O diálogo ao lado é composto por personagens que compõem as diferentes representações, incluindo indivíduos brancos, pretos, pardos e afrodescendentes, o que, raramente, ocorre nas imagens apresentadas em materiais didáticos.

Esse é um aspecto relevante e que permite uma discussão sobre as questões de representatividade nos livros didáticos e a importância do aluno se sentir reconhecido no material utilizado. Essa imagem pode proporcionar uma reflexão, pois ao considerar que o professor é o responsável pela seleção do livro didático, esse pode ser um dos critérios utilizados na escolha das obras analisadas.

Além disso, é importante que o professor esteja familiarizado com a Lei 10.639/03, que obriga a discussão da temática "História e Cultura Afro-Brasileira" no currículo da Educação Básica. Dessa forma, em sala de aula, será possível ter uma abordagem que trate de uma representação real da população negra, e não apenas associada à escravidão. Essa representatividade real pode permitir que o aluno negro conheça a sua história e que outros alunos também a conheçam, reforçando, assim, uma cultura de valorização da História e Cultura Afro-Brasileira.

A atividade 3 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. Possibilita a compreensão de que mediação do professor é indispensável para facilitar a expressão do pensamento algébrico pelos alunos, seja por meio da oralidade ou da escrita (numérica, algébrica, gráfica, dentre outras).
ii. Elucida que a Exploração de Problemas é essencial na compreensão, resolução e proposição de novos problemas, pois é uma atividade que potencializa a compreensão da estrutura matemática que modela o problema.
iii. Demonstra que o incentivo à transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra na Resolução de Problemas é fundamental para os alunos compreenderem conceitos com maior profundidade e desenvolverem os diversos elementos do pensamento algébrico.
iv. Evidencia que a Proposição de Problemas potencializa a criatividade do aluno e propicia discussões relevantes, como a abordagem da matemática em temas do contexto dos alunos, bem como a discussão de questões sociais relevantes, como a representatividade.

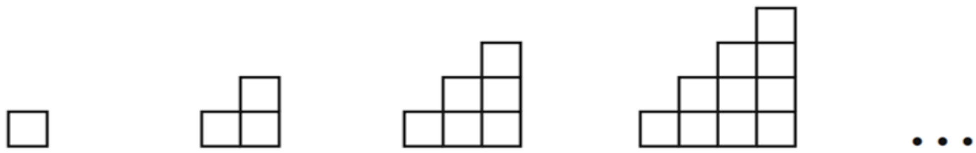
Atividade 4 – Os degraus da escada

Objetivo: Potencializar o aprofundamento das ideias de álgebra por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Duração: 02 encontros (4h)

Atividade 4: Os degraus da escada

Observe a figura abaixo que representa uma escada com degraus:



1º PASSO 2º PASSO 3º PASSO 4º PASSO n PASSO

Com base na figura, proponha um ou mais problemas que você considera apropriados para alunos do ensino médio. Use sua criatividade e originalidade ao apresentar seus problemas.

Fonte: (Rosli *et al.*, 2015, p. 350, tradução nossa)

Metodologia

1º momento	• Inicialmente, os alunos devem receber a atividade, explorar e propor problemas.
2º momento	• Nesse momento, os alunos devem responder o seu problema proposto. Em seguida, devem apresentá-lo para a turma.
3º momento	• Exploração dos problemas propostos.

Compreensão inicial

Na situação apresentada temos uma sequência de passos ao subir os degraus da escada. Essa sequência pode ser representada verbalmente, numericamente, geometricamente e, de uma forma geral, algebricamente.

Verbalmente, podemos expressar:

- No 1º passo, uma pessoa sobe 1 bloco.
- No 2º passo, 3 blocos.
- No 3º passo, 6 blocos.

Numericamente, essa relação pode ser representada por meio do seguinte quadro:

Quadro 3 – Relação entre número de passos e número de blocos

Número de passos	Número de blocos
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28

Fonte: Dados da Pesquisa

Aprofundamento: Possíveis explorações

Os problemas propostos pelos alunos podem ser organizados em categorias, por exemplo:

- **Problemas que dizem respeito à soma de quadrados**

Quadro 4 - Problemas propostos pelos alunos envolvendo a soma de quadrados

Aluno	Problemas envolvendo a soma de quadrados
A1	Fabíola está concluindo a escada que dar acesso ao 5º andar de sua casa, para isso, precisa de 15 degraus. a) Considerando que são necessários 15 degraus, quantos blocos serão necessários para concluir a obra? b) Agora que já sabe a quantidade de blocos necessários para construir a escada, faça uma pesquisa em pelo menos 3 lojas da sua cidade para descobrir os preços desses blocos. Sabendo que o bloco tem que medir 60x30x15 cm. Em seguida, construa uma tabela comparando os valores de cada loja e discuta com seus colegas de sala qual delas seria mais vantajosa para Fabíola.
A8	Você consegue observar algum padrão nessa sequência? Se sim, quantos quadradinhos há no quinto termo dessa sequência?
A12	Com base nas figuras, considere uma figura de 25 degraus, quantos quadrados haverá nessa figura?
A15	Sabendo que no 10º degrau há 55 quadrados, quantos quadrados há no 9º degrau?
A18	Observando a figura, note que a quantidade de quadradinhos vai aumentando, com isso, mostre a sequência e desenhe a próxima figura. Tomando o mesmo raciocínio, se nossa sequência tivesse 20 figuras, quantos quadradinhos ela teria?
A21	Com base nas figuras apresentadas, responda: quantos quadrados terão na figura de número 15? Utilizando o método da resposta da questão anterior, responda, qual figura tem 55 quadradinhos?

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Problemas que dizem respeito aos conceitos de geometria**

Quadro 5 - Problemas propostos pelos alunos envolvendo conceitos de geometria

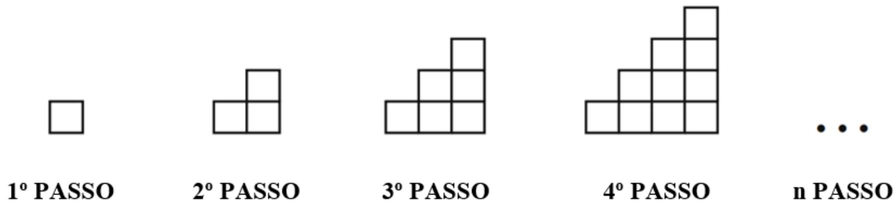
Aluno	Problemas envolvendo conceitos de geometria
A8	Considere a medida do lado de cada quadradinho igual a 1u, responda: a) Qual a medida do perímetro dos quatro primeiros termos dessa sequência? b) A partir dos dados encontrados no item anterior, determine a medida do perímetro do 8º termo dessa sequência.
A2	Em um prédio, cada degrau de uma escada tem 15 cm de altura. Quantos metros a escada terá quando tiver 60 degraus?
A10	Sabendo que cada degrau tem 50 cm de altura, calcule a altura da escada com 8 degraus em metros. Sabendo também que a distância da base para a parede é de 3 metros. Calcule o comprimento do corrimão da escada.
A19	Se agrupar o primeiro com o segundo degrau, qual figura geométrica consegue obter? É possível agrupar o terceiro e o quarto degrau e conseguir uma figura geométrica? Qual a posição dos degraus para que isso seja possível?

Fonte: Dados da Pesquisa

Episódio de Sala de Aula

Antes de iniciar a resolução dos problemas, a professora-pesquisadora retomou a figura exposta na atividade:

Figura 6 – Imagem utilizada na atividade 4

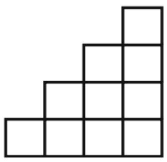


Fonte: (Rosli *et al.*, 2015, p. 350, tradução nossa)

Após apresentá-la, questionou: “pelos problemas propostos, podemos perceber que a figura trata de uma sequência. Mas, podemos afirmar que essa sequência, representa uma Progressão Aritmética (PA)?”

Esse questionamento foi levantado, pois alguns alunos mencionaram que estavam considerando que o somatório de blocos ao subir cada degrau (1º passo, 2º passo, 3º passo, 4º passo, n passo) era considerado uma PA, sendo formada pelos seguintes números: (1, 3, 6, 10, ...). No entanto, entre uma imagem e outra, há uma sequência numérica, mas não há uma PA. Contudo, se considerarmos a quantidade de blocos por coluna, teremos a PA = (1, 2, 3, 4, ...) de razão r = 1, como podemos ver no bloco abaixo, que representa o 4º passo:

Figura 7 – Representação do 4º passo nos degraus da escada



Fonte: Recortado da imagem original de Rosli *et al.* (2015, p. 350)

Com isso esclarecido, começamos a resolução dos problemas da categoria 1, os quais questionavam a quantidade de blocos por passo, ou de passos, quando tivesse determinada quantidade de blocos. Desse modo, elaboramos, na lousa, um quadro com essa relação, o qual ficou organizado da seguinte forma:

Quadro 6 - Relação entre passos e blocos na escada

Passos	Blocos
5	15
10	55
12	78
15	120
20	210
25	325

Fonte: Dados da pesquisa

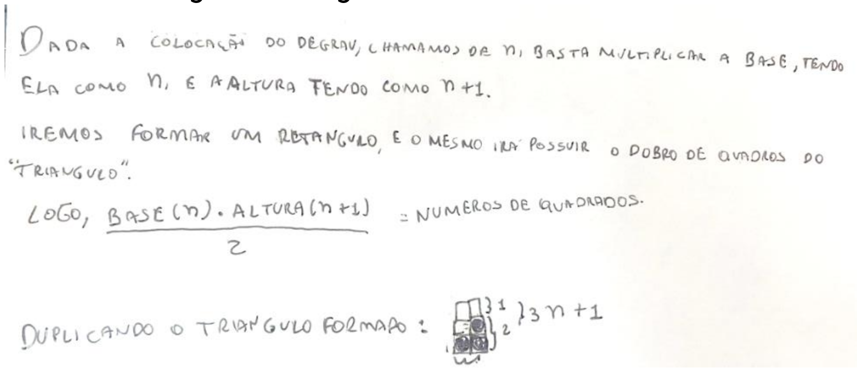
Continuando a exploração, a professora-pesquisadora questionou “o que mais vocês perceberam?”

A1: Eu percebi que a quantidade de blocos sempre será a soma da quantidade de blocos do passo anterior com o passo atual.
A18: Não entendi.
A1: Veja no quadro, temos que a quantidade de blocos no passo 10 é 55, que é a soma de 45 blocos do passo 11 mais 10, que representa o 10º passo. Isso se repete em todos os passos.
Professora: Então, sempre temos que saber quantos blocos tinham no passo anterior?
A23: Foi isso que percebi, então tive que fazer passo por passo, para ir descobrindo.
A1: Não, essa minha descoberta me ajudou a encontrar um termo geral que me permite descobrir para qualquer quantidade de passos, sem necessitar fazer de um em um.
PP: Parabéns pela descoberta, A1. Antes de você nos contar, mais alguém conseguiu encontrar?
(...)
Silêncio
(...)
PP: Alguém além de A1, conseguiu encontrar? Então vamos investigar!!

Alguns alunos se aproximaram de encontrar o termo geral, mas não conseguiram representar algebricamente. A representação mais próxima obtida foi a de que a quantidade de blocos no passo n sempre seria n, somado com a quantidade de blocos do passo $n - 1$, ou seja, a soma dos blocos do passo atual sempre seria somada à quantidade de blocos do passo anterior. No entanto, considerando esse raciocínio, sempre precisaríamos ter conhecimento da quantidade de blocos do passo anterior, o que não atende, portanto, à lei de formação da sequência.

Nessa investigação, os alunos A7 e A12 começaram a trabalhar em duplas, buscando unir suas ideias para encontrar esse termo geral. Assim, eles buscaram ir pelo caminho geométrico, como podemos ver no registro a seguir (figura 8). Para ilustrar o raciocínio empregado, os alunos A7 e A12 utilizaram como exemplo a figura formada por 3 quadrados e o duplicaram, formando, desse modo, um retângulo de lados 2u e 3u. Eles notaram, portanto, que isso se aplicaria para todos as figuras. Dessa forma, eles utilizaram o conceito de área de um retângulo e chamaram a base de n e a altura de n+1. Como eles só estavam interessados em metade dessa área, eles a dividiram por dois e, assim, encontraram a lei de formação da sequência.

Figura 8 – Registros dos alunos A7 e A12


DADA A COLOCAÇÃO DO DEGRAU, CHAMAMOS DE n, BASTA MULTIPLICAR A BASE, TENDO ELA COMO n, E A ALTURA TENDO COMO n+1.
IREMOS FORMAR UM RETANGULO, E O MESMO IRÁ POSSUIR O DOBRO DE QUADROS DO "TRIANGULO".
LOGO, $\frac{\text{BASE}(n) \cdot \text{ALTURA}(n+1)}{2}$ = NUMEROS DE QUADRADOS.
DUPLICANDO O TRIANGULO FORMADO :

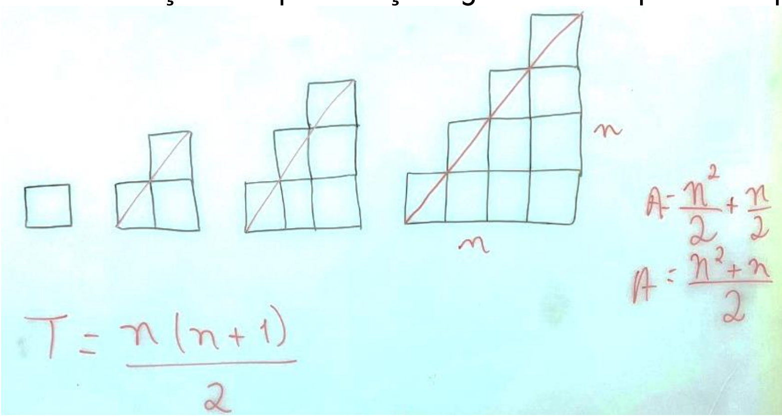
Fonte: Dados da pesquisa

Ao explicarem esse raciocínio para a turma, a professora-pesquisadora questionou aos outros alunos sobre quais outras percepções geométricas eles poderiam visualizar. Registramos o seguinte diálogo:

A20: Eu havia pensado na fórmula do triângulo retângulo, pois traçarmos uma linha da diagonal do primeiro quadrado a do último, teríamos a hipotenusa desse triângulo. Porém, fica faltando as metades dos triângulos que ficam pra fora do triângulo retângulo, por isso não consegui.
PP: Muito bem observado, então isso quer dizer que nós temos um polígono que não é convexo, certo? Como podemos fazer para calcular a área dele?
A5: Podemos calcular a área separada e somar com a área do triângulo retângulo.

A partir desse diálogo, foi se construindo a imagem a seguir, que resultou na representação algébrica da lei de formação da sequência apresentada, a qual foi encontrada a partir dos conceitos geométricos.

Figura 9 – Construção da representação algébrica da sequência de passos



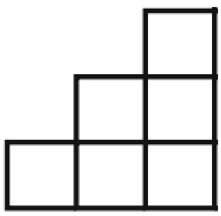
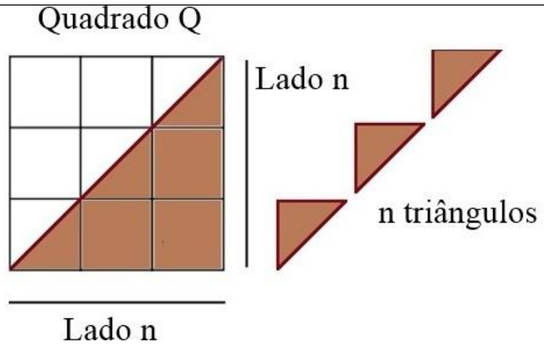
Fonte: Dados da Pesquisa

Na figura 9 acima, partimos da ideia de que, inicialmente, temos um quadrado grande Q de lados $n\ x\ n$, formado por x blocos quadrados. Traçando a diagonal desse quadrado, obtemos parte do degrau, que é composto pela metade do quadrado Q, somado pela metade da quantidade de blocos quadrados x que compõem o lado n. Compreendemos desta forma por observarmos que todos os degraus possuem a mesma quantidade de blocos quadrados na altura e na largura.

Aprofundamento matemático do problema

Para uma melhor compreensão da construção da representação algébrica, apresentamos as representações no quadro 7 a seguir. Essas representações foram feitas por compreendermos que a figura que representa n passos do degrau é composta por $n.n$ blocos divididos por dois, somado com n blocos divididos por dois – que resulta em n triângulos. Dessa forma, temos que o termo geral da sequência é dado por $A = \frac{n^2+n}{2}$, sendo n a quantidade de passos e A a quantidade de blocos quadrados que compõe o degrau com n passos.

Quadro 7 - Representação da generalização da sequência de passos

Termo geral da sequência: $A = \frac{n^2+n}{2}$			
Imagem original	**Decomposição da imagem original**	**Representação**	
3º Passo 		n	Lado de Q
		n^2	Área de Q
		$\frac{n^2}{2}$	Metade da área de Q
		$\frac{n}{2}$	Metade do lado n que forma n triângulos

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

A expressão $T = \frac{n(n+1)}{2}$ foi o termo geral da sequência encontrado por A1, mencionado no início desta discussão, o qual foi descoberto, segundo A1, a partir da utilização da fórmula da soma dos termos de uma PA, dada por $S_n = \frac{(a_1+a_n)\,n}{2}$. Na ocasião, A1 considerou que $a_1 = 1$, pois essa é a quantidade de blocos do 1º passo e $a_n = n$, pois observou que, no passo n, aumenta-se n quadrados. Assim, substituindo, temos:

$$T = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

A atividade 4 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. As experiências na utilização dessa metodologia permitem que os futuros professores tenham experiências teórico-práticas que os conduzem a desenvolver uma prática corporificada na teoria.
ii. O futuro professor pode compreender a necessidade de promover de modo ativo e sistemático a capacidade do aluno de usar as várias representações de um conceito.
iii. A exploração individual de problemas e a socialização dessa exploração permite que cada aluno tire suas percepções e adentrem no problema, assim, essas considerações podem colaborar no avanço da exploração realizada pelos outros colegas, ou mesmo, permitir a exploração por outras óticas.
iv. Possibilita a identificação de erros e a compreensão do seu papel na aprendizagem do aluno, o qual pode ser considerado como ponto de partida para uma construção sólida de conceitos, minimizando a presença de concepções matemáticas errôneas.
v. Elucida a perspectiva de que ensinar integradamente aritmética, geometria e álgebra evidencia a harmonia, coerência e beleza da matemática, possibilitando construir uma imagem não linear, mas holística de um conceito.

Atividade 5 – Reformulação de Problemas

Objetivo: Analisar os problemas apresentados pelos licenciandos e reformulá-los, usando as compreensões de problema e os conceitos de coerência didática.

Duração: 01 encontros (2h)

Atividade 5 – Reformulação de Problemas

Considerando as compreensões de problema (Van de Walle, 2009; Allevato e Onuchic, 2014; Andrade, 2017) e os conceitos de Coerência Didática (Abramovich e Cho, 2015), analise dois problemas propostos pelos colegas e faça a reformulação de um deles.

Metodologia

1° momento	• A turma será dividida em grupos e cada grupo deve receber dois problemas propostos pelos colegas no encontro anterior.
2° momento	• Os grupos deverão fazer a análise da Coerência Didática desses problemas e reformular um deles. Em seguida, será feita a apresentação das análises e da nova escrita do problema.

Compreensão inicial

Ao trabalharmos com a Reformulação de Problemas, visamos proporcionar novas experiências com a Proposição de Problemas. Grundmeier (2015) aponta a Reformulação de Problemas como uma das maneiras de trabalhar a Proposição de Problemas, sendo considerada uma estratégia que pode desenvolver nos futuros professores a capacidade de Proposição de Problemas e a criatividade. Dessa forma, a diversidade de experiências aos futuros professores é crucial, uma vez que, de acordo com Crespo (2015), as experiências ao longo da formação aumentam os tipos de problemas que os futuros professores considerarão e os capacitam para identificar, classificar e reformular problemas.

A Proposição de Problemas proposta nessa atividade sugere que os participantes tenham conhecimento sobre as compreensões teóricas de problema e de Coerência Didática. Assim, como material de apoio sugerimos o estudo dos seguintes materiais:

- Livro: Matemática no ensino fundamental: formação de professores em sala de aula (Van de Walle, 2009);
- Artigo: Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? (Allevato; Onuchic, 2014);
- Artigo: Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing (Abramovich; Cho, 2015);
- Artigo: Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. (Andrade, 2017);

Episódio de Sala de Aula

Na proposta da atividade quatro, os problemas foram divididos em duas categorias, mas, devido ao curto espaço de tempo, não foi possível discutir todos os problemas. Assim, nessa atividade, para valorizar as produções dos alunos, visamos contemplar os problemas que ainda não foram explorados, isto é, os problemas da categoria ii) "Problemas que dizem respeito aos conceitos de Geometria". Dessa forma, dividimos a turma em quatro grupos, sendo que cada um recebeu dois problemas propostos pelos colegas para análise.

O grupo 1, formado pelos alunos A9, A14, A19 e A23 recebeu os seguintes problemas:

Problemas originais
1. Supondo que cada lado do quadrado de 1° degrau tem aproximadamente 2mm de comprimento, calcule a área total em cada degrau.
2. Considere a medida do lado de cada quadradinho igual a 1u e responda: a) Qual a medida do perímetro dos quatro primeiros termos dessa sequência? b) A partir dos dados encontrados no item anterior, determine a medida do perímetro do 8° termo dessa sequência.

Em nossas análises, o problema 1 foi considerado "limitado", pois não permite uma ampliação ou aprofundamento da situação original, assim como não faz sentido em um contexto real. Enquanto o problema 2 foi considerado "excelente", ao apresentar um contexto viável, original e criativo, que permite reflexão e envolvimento na resolução. Vale destacar que essas análises não foram expostas para os licenciandos.

Para avaliar a coerência didática desses dois problemas, o grupo 1 realizou a seguinte análise:

Problema	**Coerência numérica**	**Coerência contextual**	**Coerência Pedagógica**
1	O problema apresenta coerência numérica, pois, informa o comprimento do lado do quadrado que compõe o degrau que está sendo formado pelos quadradinhos.	O problema não apresenta coerência contextual, pois os dados não coincidem com a realidade. Não existe degrau com 2 mm de altura.	O problema não é pedagogicamente coerente, pois não possui um nível de adequação para alunos do ensino médio.
2	Os dados do problema permitem a sua solução matemática, logo, ele possui coerência numérica.	O problema apresenta coerência contextual, pois atende ao contexto matemático.	O problema não é pedagogicamente coerente, pois se baseia em cálculos repetitivos e fáceis, ocasionando uma desmotivação didática.

A análise do problema 1 feita pelos licenciandos coincide com as nossas impressões, a qual aponta uma incoerência contextual e pedagógica. Por outro lado, a análise do problema 2 dos licenciandos difere de nossas análises, uma vez que os alunos consideraram uma falha na coerência pedagógica, ao acreditarem que os cálculos seriam repetitivos e ocasionariam uma desmotivação didática.

Para compreendermos a falha identificada, mediamos a discussão como o seguinte questionamento: "como podemos usar a matemática como aliada para diminuir essa desmotivação didática?", "seria possível utilizar alguma ferramenta matemática para generalizar esse cálculo a fim de não ser necessário calcular cada degrau separadamente?". A partir desses questionamentos, os alunos começaram a investigação da seguinte maneira:

- Passo 1 – Perímetro = 4 u
- Passo 2 – Perímetro = 8 u
- Passo 3 – Perímetro = 12 u
- Passo 4 – Perímetro = 16 u
- Passo 5 – Perímetro = 20 u
- Passo 6 – Perímetro = 24 u
- Passo 7 – Perímetro = 28 u
- Passo 8 – Perímetro = 32 u
- Passo x – Perímetro = 4.x u

Por meio da investigação matemática, os alunos perceberam que o perímetro era 4 vezes o número de passos. Dessa forma, concluiu-se que o problema não apresentava falhas na coerência pedagógica, mas que a mediação do professor seria necessária para que ele fosse abordado adequadamente em sala de aula. Diante disso, o problema foi considerado potencial, possibilitando a investigação matemática e a manifestação do pensamento algébrico.

Nesse contexto, salientamos um aspecto fundamental que viemos discutindo ao longo deste trabalho e que já foi apresentado em diversas pesquisas (por exemplo, Andrade, 2017; Martins, 2018): a mediação do professor é fundamental para possibilitar no aluno o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Diante da análise realizada, os alunos mencionaram que o problema 1 tinha uma maior necessidade de reformulação e o reescreveram da seguinte forma:

Problema original
Supondo que cada lado do quadrado de 1° degrau tem aproximadamente 2mm de comprimento, calcule a área total em cada degrau.
Problema reformulado
Supondo que cada lado do quadrado do 1° degrau tem aproximadamente 0,30 m de comprimento, calcule a área total em cada degrau. Calcule no 10° degrau a área da figura que se formou.

Nesta reformulação, os alunos mencionaram que mantiveram a ideia original, adequaram ao contexto real e em seguida, aprofundaram o problema. Consideramos que ficou um problema de nível “aprimorado”, o qual apresentou uma boa estrutura e originalidade, de modo que requer a compreensão de diversos conceitos matemáticos para a sua resolução e é um problema viável, realista e envolvente.

O grupo 2, formado pelos alunos A5, A11, A15, A16 e A17 recebeu os seguintes problemas:

Problemas originais
1. Sabendo que a área de cada quadrado que compõe os degraus vale 4 cm, qual será a área do triângulo retângulo formado na figura do 4º degrau?
2. Quanto vale a hipotenusa do triângulo traçado na escada de um local de voo de Asa Delta com 500 degraus, sendo que a escada tem 4m de largura e cada degrau tem 20 cm de altura?

Em nossas análises, o problema 1 foi considerado limitado. A categorização foi fundamentada em diversos fatores, tais como: a unidade de medida utilizada não corresponde à unidade de área, a área apresentada não fazia sentido no contexto real e ocorreu uma associação equivocada dos degraus com a hipotenusa de um triângulo. Da mesma forma, o problema 2 também foi considerado limitado, pois não apresentou uma escrita com estrutura que permita compreensão clara do contexto utilizado.

Os licenciandos analisaram a coerência didática desses problemas da seguinte forma:

Problema	Coerência numérica	Coerência contextual	Coerência Pedagógica
1	É observado que esse problema atende aos critérios da coerência numérica, pois é possível responde-lo através de um sistema numérico.	Os dados disponibilizados no problema possuem um erro na escrita matemática e não possibilitam que os alunos associem a questão com seu cotidiano, pois os dados são irreais.	O problema possibilita sua solução, porém, não é uma questão desafiadora que motive ou chame a atenção do aluno.
2	Apesar dos dados serem sem fundamentos, o problema é possível encontrar a solução.	Os dados não coincidem com a realidade, pois no contexto sociocultural, a maioria dos indivíduos não possui acesso ao voo de asa delta.	O problema não é pedagogicamente coerente, pois já deixa claro o conteúdo que o aluno deve utilizar, não possibilitando uma reflexão para chegar à solução.

As análises realizadas pelos licenciandos coincidiram com as nossas análises, as quais, de modo geral, também consideraram os problemas limitados, apresentando, sobretudo, uma incoerência contextual e pedagógica. Diante da análise realizada, os alunos mencionaram que o problema 2 tinha uma maior necessidade de reformulação e reescreveram da seguinte forma:

Problema original
Quanto vale a hipotenusa do triângulo traçado na escada de um local de voo de Asa Delta com 500 degraus, sendo que a escada tem 4m de largura e cada degrau tem 20 cm de altura?
Problema reformulado
Supondo que uma pessoa joga um objeto do alto de um prédio com 100 m de altura e que esse objeto caiu em linha reta, do topo do prédio até o chão, a 4 m a frente do edifício. Qual a distância percorrida por esse objeto?

Para facilitar a compreensão do problema reformulado, os alunos sugeriram que, ao ser aplicado na Educação Básica, o problema deveria ser associado a uma imagem, de modo a evitar que os alunos compreendam a "linha reta" como uma linha vertical.

Consideramos que o problema reformulado pode ser categorizado como "satisfatório", pois é um problema que apresenta um contexto padrão, mas que necessitaria de uma redação mais estruturada, de modo que requer conceitos matemáticos básicos para a sua resolução e é moderadamente viável, realista e envolvente.

O grupo 3, formado pelos alunos A6, A7, A12, A20 e A24, recebeu os seguintes problemas:

Problemas originais
1. Em um prédio cada degrau de uma escada tem 15 cm de altura. Quantos metros a escada terá quando tiver 60 degraus?
2. Sabendo que cada degrau tem 50 cm de altura, calcule a altura da escada com 8 degraus em metros. Sabendo também que a distância da base para a parede é de 3 metros, calcule o comprimento do corrimão da escada.

O problema 1 foi considerado satisfatório, uma vez que apresenta uma escrita estruturada e um contexto adequado. Embora esteja próximo de um exercício matemático, dependendo do nível utilizado, pode ser necessária uma reflexão para chegar à solução. O problema 2 também foi considerado satisfatório, ao apresentar um contexto viável, original e criativo, permitindo que o Teorema de Pitágoras seja usado coerentemente, uma vez que é solicitado o cálculo do corrimão da escada, que pode ser entendido como a hipotenusa. No entanto, este problema apresenta uma inconsistência contextual, uma vez que menciona que o degrau da escada tem 50 cm.

Quanto à coerência didática desses problemas, o grupo 3 realizou a seguinte análise:

Problema	**Coerência numérica**	**Coerência contextual**	**Coerência Pedagógica**
1	O problema tem coerência numérica, podendo ser resolvido dentro de um sistema numérico.	O problema apresenta coerência, com medidas de um contexto real.	É coerente pedagogicamente, uma vez que instiga o aluno a ter o conhecimento de grandezas e medidas.
2	Possui coerência numérica, pois há a possibilidade de o problema ser resolvido com os dados apresentados.	O problema não apresenta coerência contextual, pois a informação sobre a altura do degrau equivalente a 50 cm de altura não está de acordo com a realidade e padrões comuns de construção de escadas.	O problema apresenta coerência pedagógica, pois pode ser resolvido utilizando o teorema de Pitágoras, um conceito comumente ensinado no ensino médio.

Diante da análise realizada, os alunos mencionaram que o problema 2 tinha uma maior necessidade de reformulação e reescreveram da seguinte forma:

Problema original
Sabendo que cada degrau tem 50 cm de altura, calcule a altura da escada com 8 degraus em metros. Sabendo também que a distância da base para a parede é de 3 metros, calcule o comprimento do corrimão da escada.
Problema reformulado
Sabendo que a escada possui 20 degraus, sendo que cada degrau possui 20 cm de altura, calcule a altura total da escada. Além disso, sabendo que a distância da base da escada para a parede é de 6,92 metros, calcule o comprimento do corrimão dessa escada.

Após a reformulação realizada pelo grupo 3, consideramos o problema como “excelente”, uma vez que passa a ser um problema com coerência contextual e mantém o contexto viável, original e criativo.

O grupo 4, formado pelos alunos A1, A3, A8, A18 e A21, recebeu os seguintes problemas:

Problemas originais
1. Se agrupar o 2º com o segundo degrau, qual figura geométrica consegue obter? É possível agrupar o 3º e o 4º degrau e conseguir uma figura geométrica? Qual a posição dos degraus para que isso seja possível?
2. O rapaz Jeremy deseja subir na escada do monte cristo, em nova esperança, no entanto, tem medo por causa da quantidade de degraus que ela possui. Muitos dos seus amigos já subiram ao monte, então para não ser o que único que não subiu, assim ele decidiu fazer perguntas as pessoas da redondeza sobre características da escada. Dentre elas, destaca-se – A escada tem 32 cubinhos; O degrau é dividido por 8; - Sua raiz quadrada é igual a $4\sqrt{2}$.

Em nossas análises, o problema 1 foi considerado “satisfatório”, uma vez que apresenta uma escrita estruturada e envolve a utilização do pensamento geométrico. O problema 2 foi considerado “limitado”, pois não apresenta dados suficientes para a resolução. Embora o problema traga um contexto, ele não explicita qual é o problema.

Quanto à coerência didática desses problemas, o grupo 4 realizou a seguinte análise:

Problema	Coerência numérica	Coerência contextual	Coerência Pedagógica
1	Há coerência numérica, pois é possível responder as perguntas com os dados numéricos do problema.	O contexto do problema está coerente com a realidade.	Há coerência pedagógica, pois está adequado ao nível dos alunos, sendo provável que eles se interessem em resolver o problema proposto.
2	Não há coerência numérica, pois as informações fornecidas não permitem determinar o número de degraus da escada.	No contexto sociocultural de um aluno de Nova Esperança, o problema é coerente. Para os alunos que não conhecem a cidade, ficaria difícil a visualização da escada.	Fazendo os ajustes necessários, há coerência pedagógica.

As análises do grupo 4 coincidiram com nossas análises. Diante disso, os alunos mencionaram que o problema 2 tinha uma maior necessidade de reformulação e reescreveram da seguinte forma:

Problema original
O rapaz Jeremy deseja subir na escada do monte cristo, em nova esperança, no entanto, tem medo por causa da quantidade de degraus que ela possui. Muitos dos seus amigos já subiram ao monte, então para não ser o que único que não subiu, assim ele decidiu fazer perguntas as pessoas da redondeza sobre características da escada. Dentre elas, destaca-se – A escada tem 32 cubinhos; O degrau é dividido por 8; - Sua raiz quadrada é igual a $4\sqrt{2}$.
Problema reformulado
O rapaz Jeremy deseja subir na escada do Monte Cristo, em Nova Esperança. No entanto, tem medo por causa da quantidade de degraus que ela possui. Assim, decidiu buscar informações, e percebeu que: i) a escada possui 36 cubinhos e o último degrau tem 8 cubinhos de altura. Quantos degraus tem a escada?

Considerações sobre a atividade de Reformulação de Problemas

A partir do trabalho dos alunos na Reformulação de Problemas, é possível notar um envolvimento significativo dos licenciandos nesse tipo de atividade, em que ficou perceptível o interesse em propor problemas cada vez mais reais e coerentes.

Ao analisarmos as avaliações dos alunos em relação à Coerência Didática dos problemas propostos, constatamos que eles compreenderam os conceitos de coerência numérica, contextual e pedagógica, uma vez que identificaram nos problemas aspectos didáticos fundamentais, o que resultou em avaliações coerentes. Ao reformularem esses problemas, os licenciandos compartilharam suas ideias e preocupações quanto à relevância de criar problemas que sejam coerentes didaticamente, buscando corrigir os aspectos considerados incoerentes.

Nesse contexto, destacamos a observação de Ellerton (2015), que ressalta a importância de os professores em formação inicial não apenas entenderem o que está envolvido na Proposição de Problemas, mas, também, serem capazes de criar problemas competentes e consistentes. O ato de reformular permite uma avaliação e uma autoavaliação dos problemas propostos, o que colabora diretamente com a capacidade de propor problemas competentes e consistentes.

A atividade 5 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. A Reformulação de Problemas é uma estratégia eficiente para possibilitar o envolvimento dos alunos na atividade de Proposição de Problemas, colaborando no desenvolvimento de habilidades de proposição de problemas coerentes didaticamente.
ii. A atividade de reformulação de problemas permite que o futuro professor avalie problemas propostos por outras pessoas, assim como faça sua própria autoavaliação, estimulando habilidades crítico-reflexivas para analisar materiais recebidos, problemas dispostos em livros didáticos, na web, dentre outros.
iii. A mediação do professor é fundamental na atividade de Proposição de Problemas, pois um problema aparentemente rotineiro pode ser uma oportunidade de aprofundamento matemático e de manifestação do pensamento algébrico.
iv. À medida que os participantes adquirem experiência na Proposição de Problemas, eles tornam-se mais eficientes ao propor problemas e mais criativos ao reformulá-los.
v. Assegura que ao propor problemas, o professor deve orientar que eles sejam desafiadores e potencializadores, capazes de possibilitar a construção do conhecimento e/ou aprofundar o aprendizado dos alunos, evitando as simplificações de conceitos no processo de aprendizagem.

Atividade 6 – Propondo Problemas

Objetivo: Refletir sobre as habilidades dos futuros professores em propor e explorar problemas.

Duração: 01 encontro (2h)

Atividades
1. Elabore um problema que tenha como resultado o número $2\sqrt{3}$.
2. Elabore um problema que tenha como resultado o número 0,75.
3. Elabore um problema que tenha como resultado o número $\frac{2}{3}$.
4. Elabore um problema que tenha como resultado o número -17.
5. Elabore um problema que tenha como resultado o número $3\frac{2}{3}$.
6. Elabore um problema que tenha como resultado o número 0.

Fonte: Dados da pesquisa

Metodologia

1º momento	• Os alunos devem ser divididos em seis grupos. Cada grupo deve receber uma atividade e elaborar um problema que tenha como resultado o número dado.
2º momento	• Cada grupo deve fazer a apresentação do seu problema e dispor a atividade para que outro grupo faça a resolução. Em seguida, os grupos devem apresentar as resoluções.

Compreensão inicial

A presente atividade corrobora o que Ellerton (2015) menciona em relação à relevância de os professores em formação compreenderem o processo de Proposição de Problemas, mas, sobretudo, se tornarem propositores de problemas competentes e consistentes. Assim, consideramos este momento fundamental, uma vez que, baseados nas discussões realizadas nos encontros anteriores, os alunos refletiam e se questionavam sobre o problema proposto, avaliando se configurava ou não um problema e se este problema apresentava ou não uma Coerência Didática.

Episódio de Sala de Aula

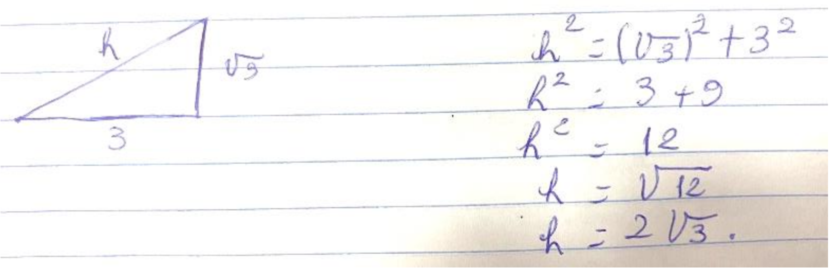
Após todos os grupos elaborarem o seu problema, tivemos o momento da apresentação, em que cada grupo fez a leitura do seu problema, como podemos ver a seguir:

Atividade	Problema Proposto	Resultado esperado
Grupo 1: A3, A18 e A21	João tem aproximadamente 1,73 metros de altura. Ao olhar para o chão reparou que sua sombra tinha um comprimento que parecia ser maior que o seu comprimento. Então, pediu ao seu amigo Pedro para mediar a sua sombra, esta mede 3 metros. Depois disso, João ficou curioso para saber a distância da sua cabeça para a cabeça de sua sombra. Ajude João a descobrir essa distância. Para facilitar os cálculos, troque 1,73 por $\sqrt{3}$ e responda qual a nova distância, analise se há diferenças e expresse sua opinião a respeito.	$2\sqrt{3}$
Grupo 2: A5, A11 e A13	Em um açougue, temos entradas e saídas de muitos kg de carne todos os dias. Numa sexta-feira o entregador deveria descarregar no açougue o equivalente a 2 mil kg. Por engano, ele descarregou apenas 62,5 % do que seria descarregado. Quantas toneladas de carne o entregador deixou de entregar?	0,75
Grupo 3: A7, A12 e A20	Um tanque de água está com a metade de sua capacidade total. Se retirarmos um terço da água do tanque, qual será a quantidade de água restante em relação a capacidade total do tanque?	$\frac{2}{3}$
Grupo 4: A9, A10, A19, A23 e A24	Janiele tem uma conta corrente no banco MM, sem rendimento e só cobra taxa de saque de 11,00 reais. Ela deposita todo mês 125,00 reais, isso pensando em retirar em 2 anos. Durante o mês de maio, no 5º mês, ela precisou pagar uma conta e fez um saque da sua conta corrente no valor de 285,00 reais. No próximo mês, ela não depositou nada, só depositou no 13º mês. Mas, no 14º mês ela resolveu sacar todo seu dinheiro que tinha depositado. Qual foi seu saldo final?	-17
Grupo 5: A14, A15 e A16	Ana participou de uma corrida juntamente com outros 9 alunos. A pista possui 600 metros. Vencerá quem atingir 4 voltas completas. Ao final da corrida, Ana ficou em 2º lugar, pois ela percorreu 2,2 km antes que o vencedor chegasse à linha de chegada. Represente em forma de fração mista o circuito em que Ana percorreu antes de perder.	$3\frac{2}{3}$
Grupo 6: A4, A15 e A17	Artur pretende realizar uma viagem utilizando um veículo cujo consumo médio de combustível é de 10 Km/L, ele abasteceu 30 L. Sabendo que percorrerá 300.000 m, ao final da viagem com quantos litros o carro irá ficar?	0

Cada grupo apresentou o seu problema, mas não mencionou qual o resultado esperado que a atividade pedia. Salientamos que, até esse momento, os alunos ainda não tinham percebido que cada grupo recebeu uma atividade diferente. Após isso, passamos para a próxima etapa da atividade, em que cada grupo escolheu um outro grupo para resolver e fazer a análise de seu problema.

A atividade 1, que apresentou o problema apresentado no quadro acima, foi respondida e analisada pelos alunos do grupo 6, composto pelos alunos A4, A15 e A17. O grupo respondeu o problema utilizando o Teorema de Pitágoras, da seguinte forma:

Figura 10 – Resolução da atividade 1

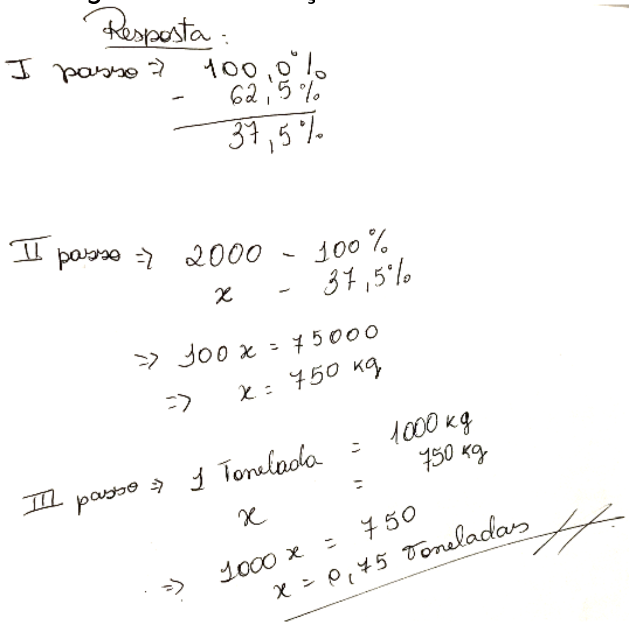


Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com a análise dos alunos, o problema apresentado é desafiador e apresenta uma coerência didática. Em nossas análises, esse é um problema considerado “excelente”, pois apresenta uma escrita estruturada, contexto original e criativo, possibilitando a utilização adequada de relações matemáticas. Além disso, os alunos alcançaram o objetivo da atividade 1, propondo um problema que resultasse em $2\sqrt{3}$.

A atividade 2 foi analisada pelo grupo 1, formado pelos alunos A3, A18 e A21, que responderam o problema utilizando Regra de Três Simples, da seguinte forma:

Figura 11 – Resolução da Atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa

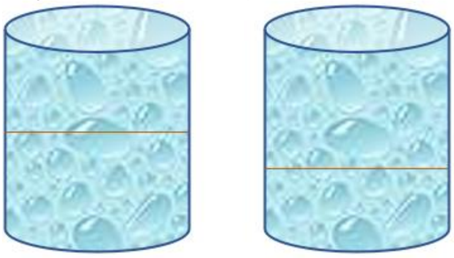
Os alunos analisaram o problema e o consideram com coerência didática, mencionando que, mesmo utilizando conceitos básicos da matemática fundamental, é um problema desafiador e que requer uma reflexão para chegar à solução. Em nossas análises, o problema foi considerado “excelente”, sobretudo pelo seu contexto original e criativo. Além disso, é um problema viável, realista e envolvente. Como pudemos ver, o grupo 2 alcançou o objetivo da atividade, propondo um problema que resultasse em 0,75.

A atividade 3 traz uma particularidade. Em nossas análises, o problema foi considerado “satisfatório”, uma vez que ele estava coerente com os dados que foram apresentados e exibia um contexto moderadamente viável, realista e envolvente. Contudo, percebemos que o problema não correspondeu ao objetivo da atividade, que consistia em propor um problema que resultasse em $\frac{2}{3}$.

No entanto, o grupo 4, composto pelos alunos A9, A10, A19, A23 e A24, analisou essa atividade e apresentou algumas dificuldades iniciais no problema, sugerindo uma reformulação na escrita. Conforme o grupo, o fato de o problema iniciar mencionado uma fração na qual a capacidade da água existente no tanque seria o todo e, em seguida, esse todo passar a ser a capacidade total do tanque dificultou a compreensão.

A partir dessas observações, ampliamos a discussão, apresentando na lousa uma ilustração semelhante à mostrada na imagem a seguir:

Figura 12 – Ilustração da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

A linha vermelha no primeiro tanque indica que a metade da sua capacidade está preenchida com água. No segundo tanque, indica a água pertencente ao tanque após ter sido retirado $\frac{1}{3}$ da água que havia no primeiro tanque. Dado que o problema apresentado pelos alunos questiona a quantidade de água que sobrou em relação à capacidade total do tanque, através da imagem, é possível notar que o tanque ficou com $\frac{1}{3}$ de água. No entanto, se o problema tivesse questionado em relação à água que existia no tanque, a água que sobra representa $\frac{2}{3}$.

Analisando esse problema, percebemos que ele traz a necessidade da compreensão de fração como parte e todo, sendo que, inicialmente, o todo é a água existente no tanque e, em seguida, o todo é a capacidade total do tanque. Traduzindo o problema para a linguagem matemática, percebemos que, em síntese, os alunos questionaram quanto é $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$, que equivale a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Contudo, salientamos que, embora seja um problema interessante que possibilita um desafio e uma compreensão de conceitos, ele não corresponde à proposta inicial da atividade, que pedia a proposição de um problema que tivesse como resultado o número $\frac{2}{3}$. Diante disso, no decorrer da discussão, o próprio grupo que elaborou o problema percebeu o equívoco e mencionou que a pergunta do problema deveria ser modificada pela seguinte pergunta: "Ao retirar $\mathbf{\frac{1}{3}}$ dessa água, qual a capacidade vazia do tanque em relação à sua capacidade total?"

O grupo explicou que também poderia perguntar, "qual a quantidade de água restante no tanque em relação a água inicial?". Contudo, seria um questionamento evidente, pois como foi retirado $\frac{1}{3}$ da água, seria óbvio que restaria $\frac{2}{3}$ da água.

O problema apresentado na atividade 4 foi considerado em nossas análises como "limitado", pois apresentou uma falha na coerência numérica e contextual. Além disso, o problema não atende ao objetivo da atividade que consistia em propor um problema que resultasse em – 17. Essa atividade foi analisada pelo grupo 2, composto pelos alunos A5, A11 e A13, que demonstraram certa dificuldade na resolução. Para eles, o problema não apresentava dados suficientes para ser resolvido. Além disso, não havia uma coerência contextual, uma vez que o valor da taxa cobrada pelo banco não correspondia à realidade.

Discutindo o problema por partes, os alunos fizeram as seguintes observações:

Quadro 8 – Análise do problema proposto na atividade 4

Partes do Problema	**Observações do grupo 2**
Janiele tem uma conta corrente no banco MM, sem rendimento e só cobra taxa de saque de 11,00 reais.	É de conhecimento geral que os bancos só podem cobrar a tarifa de saque se for excedido o número de saques realizados por mês. Contudo, no banco apresentado no problema, fica parecendo que independentemente da quantidade, o valor é cobrado. Assim, falta uma coerência contextual.
Ela deposita todo mês 125,00 reais, isso pensando em retirar em 2 anos.	Com essa informação, temos que a meta dela é juntar R$ 3.000,00 em 24 meses.
Durante o mês de maio, no 5º mês, ela precisou pagar uma conta e fez um saque da sua conta corrente no valor de 285,00 reais.	Como todo mês ela deposita R$ 125,00, no 5º mês ela depositou R$ 625,00. Ao fazer o saque de R$ 285,00 e ao pagar a taxa de saque, ela ficou com R$ 329,00 na conta.
No próximo mês, ela não depositou nada, só depositou no 13º mês.	Com a última informação foi do 5º mês, o próximo é o 6º mês. Porém, quando eles colocam que só depositou no 13º mês, percebemos uma falha na escrita da informação, pois no início fala que ela deposita todos os meses. Mas, considerando a informação do 13º mês, temos que ela ficou com R$ 454,00.
Mas, no 14º mês ela resolveu sacar todo seu dinheiro que tinha depositado. Qual foi seu saldo final?	Se ela sacou tudo, logo, ficou com R$ 0,00 de saldo. Assim, nem precisaria fazer todos os cálculos, a própria pergunta responde o problema. Talvez seria interessante eles questionarem: "quanto ela sacou ao final do 14º mês?" Ou ter questionado algo referente a meta inicial, que seria juntar R$ 3.000,00 em dois anos. Da forma que está, é como se os dados do problema não estivessem conectados entre si.

Fonte: Dados da Pesquisa

Ponderamos que a análise do grupo foi bem realizada, os quais detalharam todas as partes do problema, enquanto resolviam, buscando dar sentido ao desencadeamento das informações apresentadas no problema. Além disso, o grupo apontou um aspecto relevante de um problema: a conexão entre os dados apresentados, o que, neste caso, não ocorreu.

O grupo que propôs o problema concordou com as observações dos colegas e frisou que, devido à responsabilidade de criar um problema com um objetivo específico, eles se concentraram na situação, buscando algo inovador e que atendesse ao objetivo proposto. Por isso, não conseguiram estruturar a ideia de maneira lógica. Nesse sentido, a professora-pesquisadora sugeriu uma reformulação colaborativa do problema, em que, a partir das sugestões dos colegas, seriam feitas alterações necessárias.

Assim, o grupo modificou algumas informações, trazendo para o contexto de uma situação real e reformulou o problema da seguinte forma:

Problema reformulado
Janiele tem uma conta corrente no banco MM, sem rendimento e que se exceder quatro saques mensais, cobra uma tarifa de R$ 3,50 por saque realizado. Ela criou uma meta para que no período de 2 anos depositasse R$ 125,00 todos os meses. Durante o mês de maio, no 5º mês, ela fez o seu depósito da sua meta, como de costume, mas esqueceu de depositar o valor R$ 608,00 referente a sua fatura de cartão de crédito, que era debitada no débito automático. Em decorrência disso, no mês seguinte Janiele tomou um susto com o saldo da sua conta, qual o valor ela visualizou?

Após a reformulação, o problema proposto ficou coerente contextualmente, conectou os dados apresentados e atendeu à atividade proposta, resultando no valor -17.

O problema apresentado na atividade 5 foi considerado em nossas análises como “excelente”, uma vez que consiste em um problema original e muito criativo, com uma escrita bem estruturada e, de modo geral, considerado coerente didaticamente. Além disso, o grupo alcançou o objetivo da atividade, propondo um problema que tivesse como resultado $3\frac{2}{3}$.

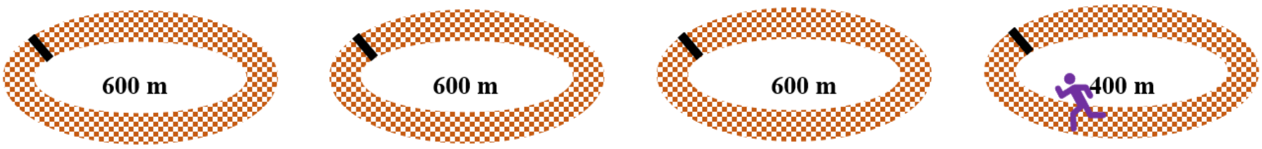
A atividade 5 foi analisada pelo grupo 3, formado pelos alunos A7, A12 e A20. O grupo mencionou que os dados dos problemas foram bem apresentados e articulados, apresentando, portanto, uma coerência didática. Os alunos mencionaram que responderam o problema fazendo uma analogia a representação de frações, visto que o problema pedia a resposta em fração.

Assim, explicaram:

Sabendo que o vencedor era aquele que completasse 4 voltas completas e que Ana ficou não foi a vencedora, pois ficou em 2° lugar, entendemos que ela não completou as 4 voltas. Assim, fizemos a conversão de quilômetro para metros, para saber quantas voltas equivaliam aos 2,2 km percorridos por Ana e obtivemos que ela percorreu 2200 metros. Como cada volta equivale a 600 metros, percebemos que ela percorreu 3 voltas completas e $\frac{2}{3}$ de uma volta completa. Representando em fração mista, ela percorreu $3\frac{2}{3}$.

A explicação do grupo foi coerente com as informações sobre o problema, mas os alunos não conseguiram acompanhar a discussão. De antemão, o grupo propôs que cada aluno representasse a situação por meio de uma pista de 600 m, o que facilitaria a compreensão do raciocínio explicado. A partir da sugestão dos alunos, elaboramos a ilustração seguinte, usando os recursos de “inserir formas" do Word.

Figura 13 – Ilustração da resolução da Atividade 5



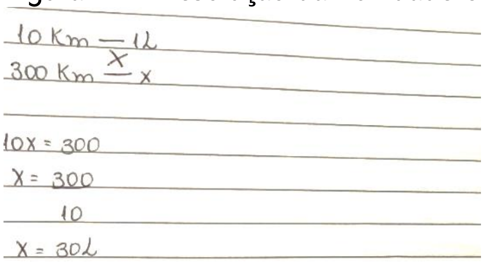
Fonte: Dados da pesquisa

É importante salientar que esta ilustração aborda uma nova compreensão de fração, a qual, na maioria das vezes, é compreendida somente como "parte e todo". Além disso, este problema também propõe uma representação feminina para os corredores profissionais, que, muitas vezes, é voltada para a imagem masculina.

O problema apresentado na atividade 6, foi analisado pelo grupo 5, composto pelos alunos A14, A15 e A16, os quais consideraram a atividade coerente didaticamente, pois tem resolução possível, condiz com a realidade e é um problema que conduz o aluno a pensar, antes de resolvê-lo. Em nossas análises, o problema foi considerado “satisfatório”, pois apresenta um contexto padrão, sua solução é viável e, moderadamente, envolvente. É um problema com uma escrita simples, mas estruturada, contemplando todos os aspectos da coerência didática. Com esse problema, os alunos atingiram o objetivo da atividade que consistiu em propor um problema que resultasse no número 0.

Os alunos do grupo 5 responderam o problema por meio de uma regra de três, como podemos ver a seguir:

Figura 14 – Resolução da Atividade 6



Fonte: Dados da pesquisa

Considerações sobre a atividade de Reformulação de Problemas

Os problemas propostos pelos alunos foram avaliados entre satisfatório e aprimorado. Essa análise se deu a partir da observação da estrutura, categoria e viabilidade do problema. A partir dos problemas propostos e da análise desses problemas feita pelos alunos, podemos notar a incorporação da teoria na prática, uma vez que ficou perceptível a preocupação dos alunos em proporem/avaliarem problemas que atendam às concepções atuais e que sejam coerentes didaticamente (Van de Walle, 2009; Abramovich; Cho, 2015; Allevato; Onuchic, 2014; Andrade, 2017).

Dessa forma, podemos concluir que as diferentes estratégias no trabalho com a Proposição de Problemas e a prática de Proposição de Problemas auxiliam no aperfeiçoamento dos problemas propostos. Neste trabalho, utilizamos as seguintes estratégias: i) Reformulação de Problemas, ii) Propor um problema partindo de uma situação aberta e iii) Considerar um resultado como ponto de partida para propor um problema.

A atividade 6 revelou as seguintes inferências em relação à utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática:

i. Os futuros professores conseguem propor problemas coerentes didaticamente, apresentando uma escrita estruturada, um contexto original e criativo, permitindo a utilização adequada de relações matemáticas, sendo viável, realista e envolvente.
ii. As diferentes estratégias no trabalho com a Proposição de Problemas e a prática de Proposição de Problemas auxiliam no aperfeiçoamento dos problemas propostos.
iii. Trabalhar com a Proposição de Problemas na formação de professores nos permite analisar como esses futuros professores propõem problemas, de modo que possamos colaborar para o desenvolvimento de habilidades de Proposição de Problemas. Além disso, permite ao futuro professor aprimorar a sua compreensão da estrutura matemática de um problema, capacita-o para contemplar questões didáticas ao propor problemas, estimula a sua independência quanto aos recursos utilizados.

Proposta de atividade prática: oficinas

Como atividade final do nosso levantamento de dados, dividimos a turma em quatro grupos de seis pessoas, nos quais cada grupo deveria ministrar uma oficina, utilizando a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. A escolha do tema e do conteúdo da oficina ficou a critério de cada grupo, devendo ser abordada ao nível de Ensino Médio. Cada oficina foi apresentada em um encontro de duas horas.

Apresentamos no quadro a seguir os títulos e objetivo geral de cada oficina:

Quadro 9: Oficinas ministradas pelos licenciandos

Grupo	Título da Oficina	Objetivo Geral
1	Calculando a energia elétrica	Possibilitar o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas por meio da abordagem de uma questão social relevante.
2	O custo de combustíveis: observando a utilização da matemática em situações do cotidiano	Possibilitar a articulação entre conceitos matemáticos na resolução de problemas práticos, referentes ao consumo de combustível no cotidiano.
3	Consumo de Água de uma Residência	Promover o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos por meio de uma situação-problema contextualizada e relevante, oportunizando o desenvolvimento de habilidades matemáticas e reflexões sobre a importância do consumo consciente e da sustentabilidade.
4	Em busca do tesouro perdido: uma aventura matemática	Promover a revisão e aprofundamento dos conceitos matemáticos por meio do jogo de tabuleiro "Tesouro Numérico", estimulando o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a reflexão crítica.

Fonte: Dados da pesquisa

Contribuições das Oficinas

Oficina 1

Nessa oficina os futuros professores utilizaram a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para discutir o consumo de energia elétrica nas aulas de matemática. A seguir, apresentamos alguns pontos importantes que pudemos observar na oficina:

i. Aplicação prática dos conceitos matemáticos;
ii. Conscientização sobre sustentabilidade;
iii. Proposta de interdisciplinaridade;
iv. Desenvolvimento de habilidades para utilização prática da Matemática;
v. Estímulo ao desenvolvimento do pensamento crítico.

Oficina 2

O tema abordado pela oficina mediada pelo grupo 2 tem sido de grande destaque nos últimos anos, sobretudo no que diz respeito à oscilação do preço da gasolina. A discussão sobre aspectos relacionados à economia de combustível abrange diversos tópicos, tais como:

i. Custo financeiro;

ii. Impacto ambiental;
iii. Sustentabilidade;
iv. Eficiência do veículo;
v. Importação e exportação de recursos;
vi. Composição do preço da gasolina.

Além desses temas transversais, destacamos que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia possibilitou o aprofundamento matemático e investigação da representação algébrica e a compreensão da proposta pelos alunos, indo além da solução do problema.

Oficina 3

O tema abordado na oficina permite diversas abordagens matemáticas, o que possibilita integrar conceitos matemáticos de forma prática e relevante para os alunos, além de desenvolver outras habilidades por meio da matemática. A seguir, destacamos alguns pontos que consideramos potenciais para a abordagem deste tema na sala de aula de matemática:

i. Aplicação dos conceitos matemáticos;
ii. Desenvolvimento de habilidades de análise e interpretação de dados;
iii. Conscientização ambiental;
iv. Resolução de problemas do mundo real;
v. Proposta interdisciplinar;

Oficina 4

A oficina apresentada pelo grupo 4, trouxe um diferencial das três oficinas apresentadas anteriormente. Enquanto as três primeiras oficinas buscaram abordar um tema transversal por meio da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, essa fez uma associação da metodologia ao uso de Jogos Matemáticos, demonstrando que a utilização dessa metodologia não precisa ser isolada, e que, se associada a uma Tendência em Educação Matemática pode possibilitar um enriquecimento a proposta, como também na aprendizagem matemática.

Esse trabalho associado pode oferecer uma variedade de benefícios significativos para o ensino e aprendizado da matemática. A seguir, apresentamos alguns aspectos que observamos durante a apresentação da oficina:

i. Engajamento dos alunos;
ii. Desenvolvimento de habilidades de Resolução de Problemas;
iii. Aprendizagem colaborativa;
iv. Contextualização dos conceitos;

Considerações Finais

Este Produto Educacional está atrelado a nossa pesquisa de doutorado que teve como objetivo identificar em quais aspectos uma Unidade Temática, utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra.

A Exploração de Problemas é uma ferramenta teórica que orienta todo o processo, compreendendo a Proposição e a Resolução de Problemas. A Exploração de Problemas nos permite abordar e aprofundar diversos conceitos da matemática, bem como outras áreas, sempre permitindo ir mais além. A Proposição de Problemas é uma ferramenta de problematização que permite expressar as explorações, curiosidades e descobertas em forma de problemas, bem como partir de problemas para reformulá-los ou elaborar problemas abertamente. A Resolução de Problemas assegura o desenvolvimento dos conceitos, permitindo a compreensão da matemática que está sendo utilizada, bem como a avaliação do processo de Exploração e Proposição de Problemas.

A partir das atividades desenvolvidas neste estudo, pudemos realizar algumas inferências sobre a utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, evidenciando em quais aspectos ela pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática, especificamente no ensino de Álgebra, como veremos a seguir.

O primeiro aspecto importante a ser destacado é que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas possibilita um ambiente colaborativo, o qual estimula a troca de ideias e construções originais, possibilitando discussões que vão além da Matemática. Esse aspecto foi inicialmente destacado por Andrade (1998), o qual apresenta uma proposta de Resolução de Problemas que incorpora questões de natureza sócio-político-culturais comumente tratadas no âmbito da Educação Matemática, à luz de uma perspectiva de educação progressista.

Em nosso trabalho, algumas das atividades desenvolvidas também possibilitaram abranger essas discussões mencionadas por Andrade (1998), envolvendo o contexto socio-político-cultural. Essas discussões incentivaram os alunos a utilizar a matemática como uma ferramenta para abordar e discutir temas sociais relevantes, estimulando o desenvolvimento do pensamento crítico-reflexivo.

Outro aspecto importante a ser destacado é que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, incentiva a manifestação do pensamento algébrico e o aprofundamento das ideias de Álgebra. Como discutido ao longo deste trabalho, as Representações Múltiplas de Álgebra permitem compreender a situação-problema de forma mais ampla, sob diferentes perspectivas, contribuindo para evidenciar a harmonia e a coerência da matemática (Friedlander; Tabach, 2001; Lorenzato, 2010; Tripathi, 2008). Dessa forma, utilizá-las aliadas à essa metodologia pode fomentar a formação de professores de matemática, auxiliando-os a incentivarem os seus alunos a construírem uma visão integrada dos conceitos algébricos.

No entanto, é importante salientar que somente desenvolver uma atividade utilizando essa metodologia não é suficiente para permitir que o aluno transite naturalmente entre as representações. Dessa forma, destacamos que a mediação do professor é fundamental para auxiliar os alunos a expressarem seu pensamento algébrico por meio da oralidade ou da escrita, bem como para fomentar a discussão sobre as diferentes ideias de Álgebra que podem ser abordadas. Como mencionam Friedlander e Tabach (2001), a habilidade de trabalhar com várias representações não se desenvolve espontaneamente. Para os autores, na aprendizagem de Álgebra, é essencial promover, de modo ativo e sistemático, a capacidade de usar várias representações.

Portanto, destacamos outro aspecto importante, que consiste na colaboração da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para o desenvolvimento de uma postura de professor-mediador. Em todos os momentos, a mediação do professor é essencial para alcançar os objetivos propostos na atividade. É uma metodologia caracterizada como aberta, porém, ela não é solta (Andrade, 2017), ela requer uma orientação cuidadosa para garantir que os alunos não se dispersem e para garantir que os objetivos educacionais sejam alcançados.

Em síntese, concluímos que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas potencializa a formação docente, colaborando em diversos aspectos, como: no aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos, na ampliação das experiências de trabalho com problemas, na integração de contextos sociais com a Matemática, na prática da utilização das diferentes representações de Álgebra e no desenvolvimento de habilidades profissionais para a utilização dessa metodologia. Além disso, essa metodologia evidencia a importância da mediação do professor, estimula o pensamento crítico e promove a colaboração entre os futuros professores e seus alunos.

Andrade (2017) define que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é uma metodologia aberta e foi isso que consideramos neste trabalho. Ao retomarmos essa menção, esclarecemos que, apesar de planejarmos as atividades em momentos, não podemos estabelecer um modelo definitivo de trabalho com uma sequência de ações. Os momentos são divididos conforme o formato da atividade de modo específico, ficando essa divisão a cargo do planejamento, da criatividade do professor e de sua experiência com a proposta.

Dessa forma, com esta pesquisa, não planejávamos estabelecer um modelo para o trabalho com essa metodologia, mas demonstrar as diversas possibilidades de seu uso, enfatizando aspectos relevantes que devem ser considerados na utilização dessa proposta. Dentre eles, podemos destacar: i) a atividade com a Proposição de Problemas não finaliza com o problema, ele é o ponto de partida da atividade matemática; ii) os conteúdos são desenvolvidos a partir de problemas ou situações-problema; iii) a autonomia do aluno é estimulada, assim, a avaliação do professor é feita de modo mais amplo; iv) toda a atividade deve possibilitar um ou mais momentos de discussões, possibilitando a aprendizagem colaborativa.

Referências Bibliográficas

ABRAMOVICH, S.; CHO, E. K. Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice.** New York: Springer, 2015. p. 71-102.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? *In:* ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Recife, PE, UFRPE, 2016.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In:* ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-396.

BIANCHINI, E. **Matemática: Bianchini: manual do professor**. 9° ed. – São Paulo: Moderna, 2018.

CRESPO, S. A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice.** New York: Springer, 2015. p. 493-511.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições,** v. 4, n. 1, 1993.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. **Promoting Multiple Representations in Álgebra**. In: Cuoco, Albert A. The roles of representation in school mathematics. (p.173-185), Reston, Virginia: The Council.

MALASPINA, U. TORRES, C. RUBIO, N. **How to Stimulate In-Service Teachers' Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing**. In: © Springer Nature Switzerland AG 2019 P. Liljedahl and M. Santos-Trigo (eds.), Mathematical Problem Solving, ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7.

MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.** 2019, 138 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

ROSLI, R.; CAPRARO, M. M.; GOLDSBY, D.; GONZALEZ, E. G.; ONWUEGBUZIE, A. J.; CAPRARO, R. M. Middle Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *In:* SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice.** New York: Springer, 2015. p. 333-354.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores em sala de aula** / Tradução Paulo Henrique Colonese. 6° ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.