



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**CAMPUS I – CAMPINA GRANDE**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA PROGRAMA DE**  
**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**PRODUTO EDUCACIONAL**

**MARIA IANE DE ARAÚJO GONÇALVES**  
**MARCUS BESSA DE MENEZES**

**CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA DISCUSSÃO A PARTIR DE**  
**SITUAÇÕES-PROBLEMA**

**CAMPINA GRANDE – PB**

**2024**

**MARIA IANE DE ARAÚJO GONÇALVES**  
**MARCUS BESSA DE MENEZES**

**CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA DISCUSSÃO A PARTIR DE  
SITUAÇÕES-PROBLEMA**

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

**Área de concentração:** Educação Matemática.

**Linha de Pesquisa:** Metodologia, Didática e Formação de professores

**CAMPINA GRANDE – PB**

**2024**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

G635c Gonçalves, Maria lane de Araújo.  
Cálculo diferencial [manuscrito] : uma discussão a partir de situações-problema / Maria lane de Araújo Gonçalves. - 2024.  
13 p.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes, Coordenação do Curso de Matemática - CCT. "

1. Cálculo diferencial. 2. Sequencia didática. 3. Ensino de matemática. I. Título

21. ed. CDD 510

**CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA  
DISCUSSÃO A PARTIR DE  
SITUAÇÕES-PROBLEMA.**

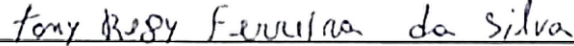
Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

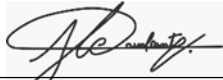
**Área de concentração:** Educação Matemática.


Aprovada em: 29/02/2024

**BANCA EXAMINADORA**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE); PPGCEM – UEPB

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Tony Regy Ferreira da Silva  
PPGCEM – UEPB

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Luiz Cavalcante  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida  
Instituto Federal de Pernambuco (IFPE)

## LISTA DE FIGURAS

|   |   |
|---|---|
| <b>Figura 1</b> – Esboço do problema proposto na Situação 1 ..... | 8 |
|---|---|

## SUMÁRIO

|              |   |           |
|--------------|---|-----------|
| <b>1</b>     | <b>APRESENTAÇÃO</b> .....   | <b>5</b>  |
| <b>2</b>     | <b>PRODUTO EDUCACIONAL</b> .....  | <b>6</b>  |
| <b>2.1</b>   | <b>Sequência de Ensino</b> .....  | <b>6</b>  |
| <b>2.1.1</b> | <i>Situação 1 – Situações-problemas envolvendo Taxas Relacionadas</i> ..... | <b>6</b>  |
| <b>2.2</b>   | <b>Situação Proposta</b> .....  | <b>7</b>  |
| <b>2.2.1</b> | <i>Dialética de Ação</i> .....  | <b>7</b>  |
| <b>2.2.2</b> | <i>Dialética de Formulação</i> .....  | <b>8</b>  |
| <b>2.2.3</b> | <i>Dialética de Validação</i> .....   | <b>10</b> |
| <b>2.2.4</b> | <i>Dialética de Institucionalização</i> .....                               | <b>10</b> |
| <b>2.3</b>   | <b>Discussão dos níveis de atividade na construção da Sequência</b> .....   | <b>10</b> |
| <b>3</b>     | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....   | <b>12</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS</b> .....  | <b>13</b> |

## 1 APRESENTAÇÃO

Caros professores!!

A seguir temos a proposição de uma sequência didática para o ensino de Cálculo Diferencial a partir de situações-problemas de taxas relacionadas amparadas nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas e, desta maneira, descrevemos as etapas de como aconteceria a atividade em cada uma das dialéticas.

Destacamos ainda que a situação proposta é fruto da pesquisa de mestrado intitulada “DECISÕES DIDÁTICAS E O CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA CATEGORIZAÇÃO DAS ATIVIDADES DE UM PROFESSOR” que buscou discutir as Decisões Didáticas de um professor ao longo da construção e execução de uma situação de ensino. Assim, categorizamos as DD que foram tomadas por ele e discutimos a partir da categorização de Bessot (2019).

A partir disso surgiu a ideia de propor uma situação didática para o ensino de Cálculo Diferencial para que fosse aplicada, replicada, reestruturada e adaptada para as diversas realidades do ambiente acadêmico. Por isso, propomos de forma estruturada como aconteceria essa situação em cada uma das fases da TSD e apontamos possíveis dificuldades, como também sugestão de diálogos entre professor-estudante. Desejamos boa leitura e aplicação nas suas aulas de Cálculo Diferencial, pois acreditamos que a maneira proposta gera também uma aprendizagem com mais significados.

## 2 PRODUTO EDUCACIONAL

A partir do nosso estudo sobre a análise das Decisões Didáticas do professor na construção de um meio didático para o ensino de Cálculo Diferencial, surgiu a necessidade de, como produto e resultado desta pesquisa, propor uma sequência didática para uma aula específica de Cálculo Diferencial. Contudo, salientamos que, pelo curto prazo do mestrado, não houve uma aplicação da proposta, ficando para uma pesquisa futura.

### 2.1 Sequência de Ensino

Amparados nos pressupostos da Teoria das Situações Didática (TSD), trazemos um olhar para o ensino de matemática em que o estudante é responsável pela sua aprendizagem e age ativamente nesse processo. Portanto, buscamos, na nossa proposta de sequência didática, a situação de uma aula de Cálculo Diferencial específica, baseada em discussões segundo situações-problemas de Taxas Relacionadas. E, para isso, seguiremos os pressupostos da TSD por meio das quatro dialéticas, que são as situações de: Ação, Formulação, Validação e Institucionalização.

#### 2.1.1 Situação 1 – Situações-problemas envolvendo Taxas Relacionadas

Nossa situação didática parte de discussões baseadas em situações-problemas de Taxas relacionadas, para, por meio delas, aplicar os conceitos de Cálculo Diferencial com uma variável, objeto matemático que foi escolhido para o nosso estudo. Dessa maneira, o foco da situação didática é discutir “Derivadas” ou melhores “regras de derivação” a partir de problemas Taxas Relacionadas e assim fugir um pouco da prática de “resolva” como é proposto nos “exercícios”. Sendo assim, o objetivo da atividade é: Analisar, propor e discutir regras de derivação a partir de situações-problemas sobre Taxas Relacionadas. Acreditamos, hipoteticamente, que os alunos envolvidos serão capazes de identificar, dentro das situações-problemas, a relação existente entre as variáveis, montar uma função ou equação que as relacione, derivar e por fim substituir dados que lhes foram fornecidos.

Apontamos que nosso objetivo central é atingido a partir do momento em que o aluno deriva a função que montou com as variáveis fornecidas, todavia, com o intuito de finalizar o proposto nos problemas de Taxas Relacionadas, a última etapa será sempre caracterizada pela substituição dos dados fornecidos na função derivada. A seguir, faremos



uma breve contextualização da nossa proposta de situação didática e em seguida apontaremos as dialéticas para essa situação específica.

## 2.2 Situação Proposta

Entendendo que já aconteceram as primeiras discussões sobre diferenciabilidade – e aqui não nos referimos a todas as provas e demonstrações, mas sim que o estudante participante desta situação já conhece a derivada de uma função –, então, selecionamos uma situação-problema de taxas relacionadas para descrever nossa proposta. A seguir temos o problema selecionado do livro *O cálculo com geometria analítica*, de Leithold (1994).

Uma lâmpada está pendurada a  $4,5\text{ m}$  do piso horizontal. Se um homem com  $1,8\text{ m}$  de altura caminha afastando-se da luz, com uma velocidade de  $1,5\text{ m/s}$ , qual a velocidade de crescimento da sombra? (Leithold, 1994, p. 204).

Observe que, ao ler de imediato a situação-problema, o estudante pode vir a não reconhecer a resolução através da derivação quando não se trata de demonstrações, pois está mais habituado com “exercícios” que não exigem uma leitura cuidadosa e reflexiva. Neste caso, parte-se para resoluções de questões e a situação requer do aluno o entendimento de semelhanças de triângulos e regras de derivação. Como a situação é proposta para uma turma de Cálculo I que já tenha visto as regras de derivação, então consideremos aqui que o aluno participante está incluído nessa amostra.

### 2.2.1 Dialética de Ação

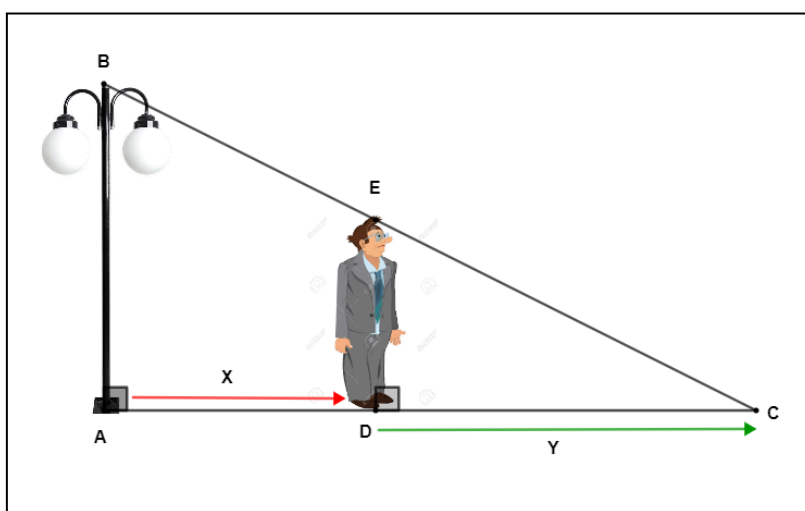
Caracterizado pelo momento em que o aluno assume a responsabilidade de sua aprendizagem e tenta propor, de imediato, resoluções para a situação-problema que lhe foi proposta. Como Meier (2022) diz, na dialética de ação, os estudantes buscam estratégias resolutivas para a situação que lhes foi proposta, mas sem a preocupação com o rigor matemático. Ainda sobre essa dialética, entendemos que é o momento em que acontece a *devolução*, pois o professor passa a responsabilidade da aprendizagem para o estudante. Para Brousseau (1986), nesse processo dialético, o professor propõe situações-problemas e estas originam situações adidáticas, então temos uma situação de devolução. Dessa maneira, ao serem envolvidos no processo, os alunos tendem a buscar, a partir das leituras, quais elementos já conhecidos por eles podem vir a ajudar na resolução (conhecimentos prévios).

Então, na nossa situação-problema, espera-se que, antes das conjecturas matemáticas, nessa fase de ação, o estudante perceba que o afastamento do homem gera duas figuras geométricas semelhantes. Só depois dessa percepção deve começar a conjecturar resoluções algébricas para a situação proposta e encontrar a velocidade do crescimento dessa sombra. Caso o estudante não reaja a essa situação como o esperado, o professor mediador da situação pode intervir e sugerir: E se fizéssemos um esboço para tentar entender o que está acontecendo? Para assim abrir a possibilidade de o estudante construir a situação e começar a refletir sobre o que está acontecendo, reconectando-o assim ao meio didático construído.

### 2.2.2 Dialética de Formulação

Nesse momento, o estudante já consegue argumentar e fazer afirmações sobre o processo resolutivo, mesmo que ainda não tenha havido a validação da situação. Para Brousseau (2008), também nessa fase o estudante que participa da ação busca formular as situações. Deve-se então levar à participação de outro sujeito para que o estudante comunique as suas percepções. Aqui é o momento em que o estudante constrói a situação para tentar explicar o que acontece com a sombra que é gerada. (Figura 1).

**Figura 1** – Esboço do problema proposto na Situação 1



**Fonte:** Elaborado pela autora no software GeoGebra, 2024.

Observe que, tendo a construção da situação-problema, é possível despertar nos estudantes conjecturas analíticas e algébricas, pois, com o esboço feito, os discentes tentarão encontrar a relação entre as variáveis, além de ficar explícito que se formam dois triângulos

semelhantes a partir da posição em que o homem se encontra em relação com a lâmpada pendurada. A partir daqui eles poderão criar denominações para as variáveis e suas relações, entendendo que  $x$  representa a distância do homem com relação à lâmpada e  $y$  a sombra que é gerada. Então, percebida essa semelhança, encontra-se uma relação entre essas variáveis, sendo ela:  $\frac{x+y}{4,5} = \frac{y}{1,8} \rightarrow y = \frac{1,8x}{2,7}$ . Além disso, ainda nessa dialética, os estudantes se questionam qual a relação de  $y$  com a velocidade de crescimento da sombra, aqui eles já percebem que não podem simplesmente usar os valores fornecidos na relação encontrada.

Daí, surge a necessidade de diferenciação e, como citado no início da nossa sequência, os estudantes participantes dessa situação já estão no curso de cálculo e tiveram as primeiras discussões sobre regras de derivação, portanto, o intuito aqui é discutir essas regras sob uma ótica de situações-problemas, valendo-se de uma maior reflexão para resolução e promovendo uma aprendizagem mais significativa dos conteúdos. Então, retornando à nossa proposta, quando o estudante percebe que os dados fornecidos são: velocidade com que o homem se afasta da luz e a velocidade do crescimento da sombra, entende que precisa derivar essa equação em função do tempo, então, teremos:  $y = \frac{1,8x}{2,7} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1,8}{2,7} \cdot \frac{dx}{dt}$ , onde  $\frac{dy}{dt}$  é a velocidade do crescimento da sombra, o que buscamos no problema, e  $\frac{dx}{dt}$  a velocidade com que ele se afasta, que é  $1,5m/s$ .

Todavia, nessa fase, o estudante pode não ter todas as percepções citadas acima, logo, cabe a nós professores interferirmos nessa situação ou ainda reformular o meio didático construído, identificando quais os obstáculos enfrentados pelos estudantes. Por exemplo, o estudante pode até esboçar a situação, mas ter dúvidas com relação a semelhanças de triângulos e não usar proporção para identificar a relação existente entre as variáveis. Outra situação muito comum é, após encontrar a relação existente entre essas variáveis, o estudante substituir os dados e achar que já foi resolvido.

Então, o professor, que é mediador da situação, nesse momento, pode entrar na situação e fazer questionamentos relacionados ao esboço, como: O que você vê nesse desenho? Você consegue perceber algo em comum entre os triângulos formados? Se fossem dois triângulos separados e um deles eu conhecesse todos os lados, enquanto o segundo tivesse apenas dois conhecidos, o que eu poderia fazer para descobrir o terceiro lado? Essas intervenções podem fazer os estudantes virem a refletir sobre suas próprias construções e pensar mesmo em possibilidades de saídas para resolução da situação-problema, podendo ser em uma linguagem natural e/ou matemática.

### ***2.2.3 Dialética de Validação***

Essa fase é caracterizada pelo momento em que o estudante busca comprovar as suas conjecturas a partir de uma linguagem matemática e argumentativa. Levando em consideração a situação da fase anterior, em que “supomos a interação com outros sujeitos”, como proposto por Brousseau (1986), dessa vez é o momento em que eles apresentam as suas resoluções para a turma e esta pode pedir explicações, fazer questionamentos, comparar resultados e até mesmo não concordar com a resolução apresentada. Nesse momento, o estudante se apoia nos conceitos matemáticos usados para resolução, apresenta qual caso de semelhança ocorre na situação, justifica porquê serem semelhantes, usa proporção para relacionar as variáveis fornecidas no problema, deriva para chegar nas velocidades de “afastamento” e “crescimento da sombra” e, por fim, substitui os dados.

### ***2.2.4 Dialética de Institucionalização***

Nesse momento, o professor retoma sua atividade e assume a situação de ensino, aqui ele apresenta o conteúdo formalmente e com um cunho de generalidade matemática. Para Brousseau (2008), é o momento em que o professor consegue garantir a veracidade dos fatos e argumentos dados pelos estudantes e, assim, eliminar os equívocos cometidos ao longo desse processo. Por isso, surgiu a necessidade dessa dialética, uma vez que o professor observava muitos entraves nas fases anteriores, que podiam assim construir conceitos com falhas matemáticas nas situações adidáticas (Meier, 2022).

## **2.3 Discussão dos níveis de atividade na construção da Sequência**

Este estudo teve a preocupação em analisar, categorizar e discutir os níveis de atividade do professor e quais os fatores que influenciam essa atividade, então, nesta proposta de situação didática para uma aula de Cálculo Diferencial, gostaríamos de discutir os níveis macrodidáticos que influenciaram esta construção. Destacamos que não houve a oportunidade para que os níveis microdidáticos (0 e - 1) aparecessem nesta discussão, uma vez que não aplicamos a sequência, mas a deixamos aqui como sugestão de aula e possibilidade de aplicação em uma pesquisa futura.

Dessa maneira, no nível + 3, caracterizado como o nível sobredidático noosferiano que contém nossas visões gerais em relação ao ensino de matemática, à

pedagogia e ao saber em jogo, como já apontado, têm influências do tipo epistêmicas e história didática. Quanto à primeira, foi a forma como enxerguei o ensino de Cálculo, assim aprendi ainda na graduação, na disciplina de Cálculo I, em que tivemos abordagens corriqueiras, aquelas das aulas de matemática que são necessárias: discussão de teoremas, demonstrações e definições. Todavia, o professor teve o cuidado de trazer situações-problemas em que nos colocasse para refletir durante a resolução. E, por mais que nos sentíssemos desafiados, achamos interessante discutir as regras de derivação a partir de situações significativas, como problemas de taxas relacionadas, máximos e mínimos, problemas de otimização e as aplicações de derivadas.

Já aquelas decisões relacionadas à história didática são trazidas das experiências vividas pela professora a partir da *história interaluno de uma turma genérica*, pois, ao lecionar a disciplina de Cálculo Diferencial na Universidade Regional do Cariri, busquei trabalhar situações-problemas na disciplina a fim de despertar o interesse pela investigação, reflexão das atividades e promover interação na turma para conjecturar soluções para as situações que eram apresentadas. Nessa turma, tivemos um retorno positivo desde as discussões, aprendizagens e até mesmo o interesse em seguir na licenciatura em matemática após finalizar o curso de ciências interdisciplinar.

No nível 2, caracterizado pelo nível construtor, é onde o professor descreve os pontos que julga pertinentes discutir ao longo do curso e constrói a situação didática mais global na qual se inscreve uma aula específica, ou seja, aqui levanta todos os assuntos e abordagens que acha pertinente fazer no curso. (Margolinas, 2004). Aqui apontamos que nosso plano de curso está amparado nos documentos oficiais, como ementa do curso, e buscamos discutir desde limite e continuidade até derivadas e suas aplicações. Um curso também formado por teoremas e demonstrações, mas priorizando também aquelas discussões das aplicabilidades e situações-problemas que promovam reflexão, discussão e aprendizagem significativa.

No nível + 1, caracterizado como projeto de uma aula específica, buscamos colocar o estudante como ser autônomo no processo de ensino e aprendizagem, continuando com a fidelidade na discussão matemática a partir da institucionalização e promovendo interações entre os estudantes nesse processo.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso produto educacional busca mostrar uma possibilidade de discussão para o ensino de cálculo diferencial, baseada em situações-problemas envolvendo taxas relacionadas. E, assim, visa propor discussões que vão além daquelas relacionadas à repetição e à memorização das regras de derivação a partir de exercícios. Diante da nossa pesquisa bibliográfica e do aprofundamento nas Decisões Didáticas, entendemos que a forma como dispomos nosso produto orienta professores na construção de seus meios didáticos para uma aula de matemática.

Por isso, na apresentação da nossa sequência didática apontamos os passos de como aconteceria uma aula segundo nossa proposta, que está amparada nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, também imaginamos alguns obstáculos e como o professor poderia resolvê-los. A partir do nosso produto, visamos orientar a aplicação da nossa proposta e distinguir o que acontece em cada uma das dialéticas sugeridas pela TSD.

Destacamos também que assim como discutido ao longo da nossa pesquisa de mestrado o professor sofre influências de fatores do tipo externo, epistêmica e história didática nas suas escolhas antes, durante e depois uma situação de ensino. Aqui não foi diferente, pois nossa proposta se baseia em como acreditamos serem possíveis discussões mais significativas com relação ao ensino de matemática. Essas decisões tem raízes epistêmicas e também de vivências trazidas de aulas vividas anteriormente.

Portanto, deixamos aqui uma sugestão de situação didática para uma aula de cálculo diferencial para que seja aplicada, replicada e proposta reorganização das atividades diante das experiências vividas em cada turma. Além disso, acreditamos que a partir da mesma nós professores conseguiremos construir novas propostas de situação didática amparados nos pressupostos da TSD e por sua vez seguir as dialéticas de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização.

## REFERÊNCIAS

- BESSOT, A. Les décisions didactiques de l'enseignant: un modèle pour tenter de les comprendre. **Educação Matemática e Pesquisa**. São Paulo, v. 21, n. 5, p. 001-020, 2019.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, n. 7, v. 2, p. 33-115, 1986.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. v. 1. 5. ed. 6. Reimp. Rio de Janeiro: Livros técnicos e Científicos Editora S.A., 2008.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v. 1. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- MARGOLINAS, C. La situation du professeur eu les connaissances en jeu au de l'activité mathématique en cours. *In*: SIMMIT, E.; DAVIS, B. (org.). **Actes 2004 de la rencontre annuelle du groupe canadien d'étude en didactique en mathématique**. Edmonton: CMESCG/GCEDM, 2005.
- MARGOLINAS, C. **Points de vue de l'élève et du professeur**: essai de développement de la théorie des situations didactiques. Education. Marseille: Université de Provence; Aix-Marseille I, 2004. Disponível em: <https://theses.hal.science/tel-00429580v2>. Acesso em: 14 nov. 2023.
- MARGOLINAS, C. Situation, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. *In*: DORIER, J.-L. *et al.* (org.). **Acte de la 11e École d'Été de didactique de mathématique** – Cours, août, 2001. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002.
- MEIER, W. M. B. **Contribuições da Teoria das Situações Didáticas para o desenvolvimento profissional de professores de Matemática**. 2022. 195 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECM, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, Cascavel, 2022. Disponível em: <https://tede.unioeste.br/handle/tede/5989>. Acesso em: 17 fev. 2023.
- STEWART, J. **Cálculo**. v. 1. 7. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2013.