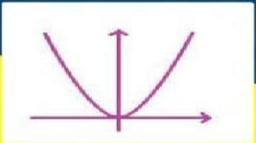
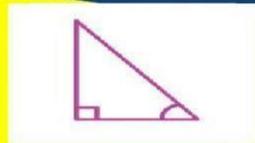
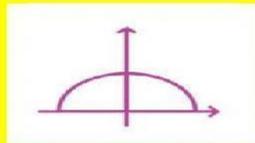
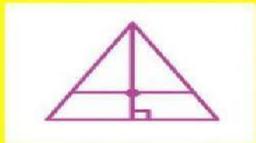
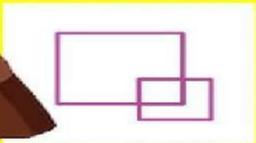
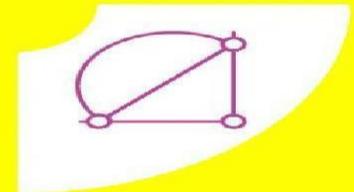
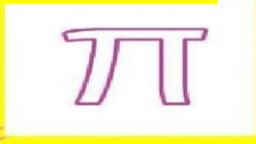
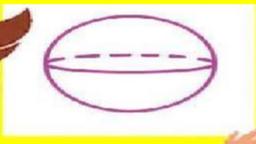


# Trilha de Aprendizagem

## Transformações Geométricas



ALEX ANTONIO DA SILVA  
JOSÉ JOELSON PIMENTEL DE ALMEIDA  
Organizadores



**ALEX ANTONIO DA SILVA  
JOSÉ JOELSON PIMENTEL DE ALMEIDA  
ORGANIZADORES**

PRODUTO EDUCACIONAL

## **TRILHA DE APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586t Silva, Alex Antônio da.  
Trilha de aprendizagem de transformações geométricas  
[manuscrito] / Alex Antônio da Silva. - 2023.  
43 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática - CCT. "

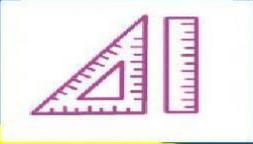
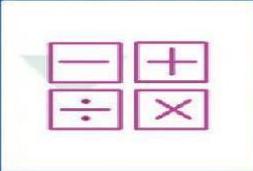
1. Trilha de aprendizagem. 2. Transformações geométricas. 3. Trabalho colaborativo. 4. Produto educacional.  
I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Fernanda M. de A. Silva - CRB - 15/483

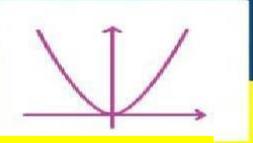
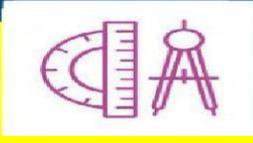
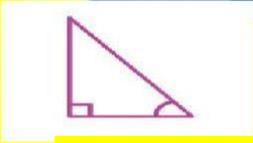
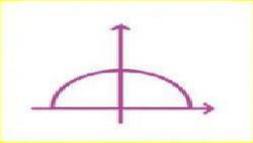
CoBib/UEPB

**Campina Grande-PB, 2023**

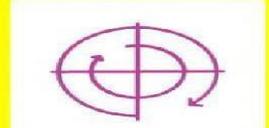
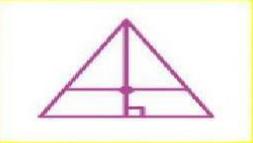
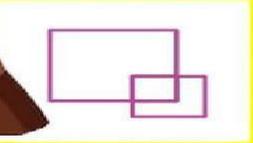
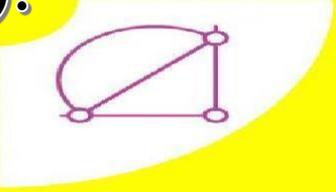
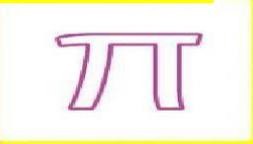
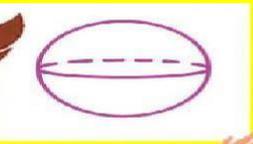


# Trilha de Aprendizagem

## Transformações Geométricas



**SEJAM BEM-VINDOS(AS)!**



## CONVITE A LEITURA

Minha amiga professora, meu amigo professor,

É com tamanha alegria, presteza e responsabilidade que apresentamos esse material de apoio para o processo de ensino e aprendizagem em transformações geométricas, construída por meio de um trabalho colaborativo com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, intitulado como, “Trilha de Aprendizagem de Transformações Geométricas”.

Estruturamos uma sequência de atividades, em forma de trilha com etapas e níveis de saberes postos a partir da teoria do pensamento geométrico de Van Hiele, que poderá ser trabalhada nas salas de aulas, com estudantes executando-a individualmente ou em grupo, com o intuito de proporcionar uma aprendizagem sólida e significativa, atendendo as competências e habilidades a serem desenvolvidas para cada etapa do ensino. Na construção desse material, tivemos a colaboração dos membros do grupo de pesquisa LEEMAT, em que agradecemos rendemos eternos e sinceros agradecimentos.

A trilha de aprendizagem permite que os alunos aprendam sobre transformações geométricas em uma progressão lógica, começando com conceitos básicos e avançando para tópicos mais complexos. Isso ajuda os alunos a construir uma compreensão sólida e sequencial do assunto. Ao ensinar transformações geométricas de forma contextualizada, os estudantes conseguem entender como esses conceitos são aplicados em situações do dia a dia. Uma trilha de aprendizagem bem estruturada ajuda os estudantes a desenvolver essas habilidades, pois são gradualmente introduzidos conceitos mais complexos à medida que avançam na trilha. A trilha de aprendizagem tem sua funcionalidade desafiar os estudantes com problemas progressivamente mais difíceis, incentivando-os a desenvolver habilidades de resolução de problemas ao longo do tempo, compondo atividades práticas e visualizações que ajudam os estudantes a desenvolver essas habilidades essenciais.

Uma trilha de aprendizagem pode ser adaptada para atender às necessidades individuais dos alunos. Alunos com diferentes níveis de habilidade podem progredir em taxas diferentes, garantindo que cada aluno compreenda os conceitos antes de passar para o próximo estágio.

Sendo assim, esperamos que esse trabalho possa contribuir de alguma forma para fortalecer o ensino e aprendizagem de transformações geométrica e que impulse momentos de muita interatividade e colaboração no sucesso das aprendizagens.

## SUMÁRIO

<b>1. OBJETIVOS</b> .....	04
1.1 Objetivo Geral.....	04
1.2 Objetivo Específico .....	04
<b>2. TRILHA DE APRENDIZAGEM</b> .....	05
2.1 Abordagem inicial sobre a Metodologia de Ensino Trilha de Aprendizagem.....	07
2.2 A Trilha de Aprendizagem na Perspectiva da Teoria de Van Hiele .....	08
2.3 Produzindo significados por meio de uma trilha de aprendizagem no ensino das transformações geométricas.....	09
<b>3. O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS</b> .....	10
3.1 Transformações Geométricas: Conceitos e Propriedades .....	10
3.2 O Ensino de Transformações Geométricas: Reflexões e Perspectivas .....	17
3.3 As Transformações Geométricas em diversos contextos artísticos.....	18
<b>4. TRILHA DE APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS</b> .....	21
4.1 Atividade: Etapa 1 – Nível 1 .....	24
4.2 Atividade: Etapa 1 – Nível 1 .....	25
4.3 Atividade: Etapa 1 – Nível 1 .....	26
4.4 Atividade: Etapa 1 – Nível 2.....	27
4.5 Atividade: Etapa 2 – Nível 3.....	30
4.6 Atividade: Etapa 2 – Nível 4.....	34
4.7 Atividade: Etapa 2 – Nível 4.....	35
4.8 Atividade: Etapa 3 – Nível 5.....	38
4.9 Atividade: Etapa 3 – Nível 5.....	39
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	41
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	43

## 1. OBJETIVOS

### 1.1 Objetivo Geral

O ensino de transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem tem por objetivo fornecer aos estudantes uma compreensão sólida desses conceitos, promover habilidades práticas e estimular o pensamento crítico, preparando-os para aplicar esses conhecimentos em várias disciplinas e situações do mundo real.

### 1.2 Objetivo Específico

- Desenvolver uma compreensão profunda dos conceitos fundamentais relacionados às transformações geométricas, como tradução, rotação, reflexão e dilatação;
- Desenvolver a capacidade dos alunos de usar transformações geométricas para resolver problemas complexos relacionados a padrões, simetria e congruência;
- Promover a aprendizagem autodirigida, permitindo que os alunos explorem tópicos relacionados às transformações geométricas de acordo com seus interesses e níveis de proficiência.

## 2. TRILHA DE APRENDIZAGEM:

As trilhas de aprendizagem podem ser definidas como um “conjunto integrado, sistemático e contínuo de desenvolvimento de pessoas e profissionais”. As trilhas pretendem combinar as necessidades dos estudantes com o conteúdo transmitido pelo discente. Para isso, é importante considerar as individualidades de cada aluno e as limitações dos corpos discente e docente.

O método utilizado pela trilha de aprendizagem reforça a ideia de que o aluno precisa protagonizar o estudo, criando autonomia para que a transmissão do conteúdo acadêmico se efetive.

Desse modo, o uso de ferramentas tecnológicas deve se aliar às ferramentas tradicionais. Aulas expositivas, livros, jogos, vídeos e podcasts são alguns exemplos de instrumentos importantes para compor uma trilha de aprendizagem.

A finalidade da utilização do método é transformar o conhecimento técnico em um aprendizado completo, que engloba o desenvolvimento de competências. Assim, as trilhas de aprendizagem são experiências que facilitam a absorção do conhecimento através da combinação de diferentes tipos de atividades durante a formação em uma instituição de ensino superior.

- O objetivo das trilhas de aprendizagem é fazer com que o aluno passe por uma sequência contínua de treinamentos sobre determinado conteúdo e, assim, melhore o seu nível de entendimento sobre o assunto.
- Nesse sentido, as trilhas funcionam com uma junção de conteúdo a serem repassados para o aluno, para que o seu aprendizado possa ser mais rico e de maior qualidade. Isso acontece a partir do envolvimento de diversos materiais sobre um só tema, fazendo com que o estudante tenha contato com várias frentes e não veja o assunto de uma ótica só.
- Esse caminho a ser seguido e os materiais a serem estudados deverão ser selecionados pelo time pedagógico, professores e coordenadores, visando as necessidades de cada disciplina e turma/estudante.
- É importante que uma trilha apresente as seguintes características:

Por se tratar de um método que potencializa o aprendizado e promove o desenvolvimento integral do aluno, as trilhas de aprendizagem mostram-se como vantajosas para a educação superior. A seguir, apresentamos os principais benefícios:

- Proporcionam um aprendizado inclusivo - As trilhas de aprendizagem combinam diversas ferramentas no processo de transmissão do conteúdo. Assim, os estudantes podem optar pelo uso de ferramentas que mais se encaixam em seu perfil pessoal e em suas individualidades. Por exemplo, o estudante que possui maior facilidade em assimilar a matéria lida será contemplado assim como o aluno que tem preferência pelo conteúdo em vídeo.
- Promovem autonomia - A utilização das trilhas de aprendizagem permite que o discente opte pelo melhor caminho para seu desenvolvimento. Desse modo, gera maior autonomia para o estudante e o transforma em protagonista, o que aumenta o engajamento e promove uma postura mais ativa em relação ao aprendizado.
- Incentivam o ensino por competências - A aprendizagem por competências é uma metodologia que se opõe à educação tradicional de ensino por disciplinas. Ela conecta diferentes áreas do saber e combina conhecimentos, recursos, atitudes, valores, estímulos e habilidades.
- Um dos benefícios da utilização das trilhas de aprendizagem é romper com o modelo tradicional de ensino. Nesse sistema, os alunos passam a aprender por combinações de ferramentas que complementam seu aprendizado e desenvolvem novas capacidades, como habilidades práticas, técnicas, cognitivas e socioemocionais.
- Nivelamento do conhecimento - Outro benefício das trilhas de aprendizagem é conseguir **auxiliar no processo de nivelamento da aprendizagem**, fazendo com os estudantes estejam no mesmo lugar em relação ao conteúdo. Não havendo atrasos e desigualdades muito grandes, os alunos ficam mais motivados, pois caminham juntos no assunto estudado, o professor pode seguir com a matéria sem se preocupar com quebras e, assim, a qualidade do ensino.

## 2.1 Abordagem inicial sobre a Metodologia de Ensino Trilha de Aprendizagem

Para tanto, apresentamos em nossa pesquisa as “trilhas de aprendizagem” como uma ferramenta de grande potencialidade para aferir e impulsionar as competências inerentes ao objeto matemático, as transformações geométricas. As trilhas de aprendizagem proporcionam um resultado mais voltado a conhecer no estudante seus saberes relativos às propriedades e conceitos das transformações geométricas e como se pode planejar ações e atividades que produzam no estudante o aprofundamento sobre o objeto matemático.

Segundo Tafner, Tomelin e Müller (2012), as trilhas de aprendizagem são caminhos flexíveis e alternativos para o desenvolvimento intelectual. As trilhas de aprendizagem também são identificadas por sinônimos como “caminhos de aprendizagem”, “percurso de aprendizagem” e, em língua inglesa, “learning path”, “learning route”, “learning itineraries”. É possível perceber que os autores apontam como deve ser uma trilha de aprendizagem, cujo objetivo, além de uma abordagem de cunho cognitivo, impulsiona aspectos que desenvolvem a autonomia do estudante, o senso crítico sobre a sua ação na aprendizagem, com um itinerário que se apresenta por etapa e nível de conhecimento.

As trilhas de aprendizagem têm como base fundamental a teoria de competências, levando em consideração o conhecimento prévio do estudante, agregando atividades práticas e teóricas para atingir o objetivo final, produzindo um pós-aprendizado, ou seja, um alto nível de conhecimento sobre o objeto de estudo. Ainda segundo Filizzola, uma das grandes vantagens das trilhas de aprendizagem é que não é preciso se ater a somente um formato ou recurso de conteúdo. Materiais em vídeos, games, podcasts, infográficos, testes e, até mesmo, fóruns, podem ser utilizados.

Para que uma trilha cumpra com o objetivo proposto e seja eficiente para a aprendizagem, segundo o artigo de Filizzola, deve cumprir três requisitos básicos:

**Flexibilidade:** Onde o estudante deve se sentir motivado a ser protagonista de sua aprendizagem, por isso as trilhas devem ter atividades obrigatórias e outras escolhidas pelo próprio aluno, de forma a complementar sua jornada de conhecimento.

**Experiência:** nessa parte das trilhas, visam o pré e pós-aprendizagem, por isso, a experiência deve ser pensada desde o primeiro contato até a forma como o estudante colocará em prática os conhecimentos adquiridos.

**Diversidade de estímulos:** Nas trilhas, devemos aproveitar todos os recursos para potencializar a aprendizagem.

Dessa forma, adotar trilhas de aprendizagem como recurso que permite a personalização do ensino, respeitando a individualidade de cada pessoa, bem como suas necessidades e motivações, traz na sua praticidade operacional o protagonismo do conhecimento para o estudante, dando mais autonomia e responsabilidade a ele.

Além disso, nesse procedimento metodológico, as trilhas, ao serem aplicadas, podem estimular o compartilhamento de conhecimento, através de caminhos alternativos de aprofundamento sobre o objeto do conhecimento, nesse caso as transformações geométricas, buscando proporcionar o desenvolvimento integral do estudante sobre o campo de estudo.

## **2.2 A Trilha de Aprendizagem na Perspectiva da Teoria de Van Hiele**

O modelo da teoria da aprendizagem geométrica de Van Hiele é dividido em cinco níveis de compreensão, o qual se inicia com o nível básico, ou zero, que está relacionado a competência da percepção visual-geométrica e finaliza com o nível mais elevado desse processo, rigor que poucos estudantes chegam a esse nível, pois o mesmo exige certa compreensão de aplicabilidade formal de maneira abstrata e dedutiva.

A Teoria de Van Hiele se torna um excelente suporte para avaliar o nível de desenvolvimento do raciocínio dos sujeitos e desenvolver uma proposta de ressignificação dos conceitos básicos da geometria plana. Além disso, ainda reforça a crença nas potencialidades da teoria como um caminho teórico e metodológico capaz de sustentar um projeto consistente no ensino de Geometria. No mais, devemos explicar que a teoria do pensamento geométrico, apresenta limitações na sua real relação entre a idade e nível de conhecimento, quando rigorosamente acompanhado a essa aprendizagem.

Essa teoria apresenta uma certa ordem processual da aprendizagem geométrica, pois compreende que a linguagem geométrica, o raciocínio e intuição são obtidos gradualmente pelos estudantes, para que, em situações posteriores, possam identificar figuras e propriedades nos mais diversificados níveis e etapas produzindo outros significados, a partir de um processo de construção própria do estudante.

Portanto, na construção da trilha de aprendizagem das transformações geométricas, buscamos compreender os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico idealizados por Van Hiele, como teoria orientadora, para uma melhor elaboração do material a ser aplicado no processo de coleta de dados dessa pesquisa.

### 2.3 Produzindo significados por meio de uma trilha de aprendizagem no ensino das transformações geométricas

A construção da trilha de aprendizagem se deu a partir de intensa discussão nos encontros colaborativos com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, sobre as dificuldades de aprendizagem voltadas aos conceitos e propriedades das transformações geométricas, nas diversas complexidades de abordagem, percebidas a partir da linguagem não acessível ao estudante e a falta de estímulos associados a suas perspectivas. Sendo assim, a metodologia de ensino trilha de aprendizagem apresenta essa característica oferecer oportunidades aos alunos para produzir significados ao conhecimento teórico das transformações geométricas.

Almeida (2012), de maneira precisa e profunda, remete às diversas formas e relações da linguagem, na perspectiva de produzir significados.

Sabemos que uma poesia pode ser assim considerada apenas quando o poema é lido, interpretado, declamado. Assim ele adquire alma, vira poesia, música, aos ouvidos de quem o ouve, lê, sente. Podemos dizer que assim é com qualquer texto, inclusive matemático. Enquanto escrito, impresso em um suporte qualquer, é apenas um texto, no qual se verificam características sintáticas diversas. Quando lido, aí sim podemos dizer que há uma realização matemática dele. A Matemática se faz presente. Mas isto somente se essa *leitura* for acompanhada de significados por quem a lê, dando-lhe alma, sentido (ALMEIDA, 2012, p.138).

No processo de produção de significados, é fundamental estabelecer uma interação propositiva entre os envolvidos, de um lado o professor orientando e propondo intencionalmente as etapas da trilha, atividades de aplicação e que impulse o estudante relacionar o objeto em estudo, em situações que visualmente se relaciona com seu cotidiano, facilitando a compreensão e a manipulação das formas, em busca de atender um comando e conseqüentemente, se chegar a uma solução ou resposta.

### 3. O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

#### 3.1 Transformações Geométricas: Conceitos e Propriedades

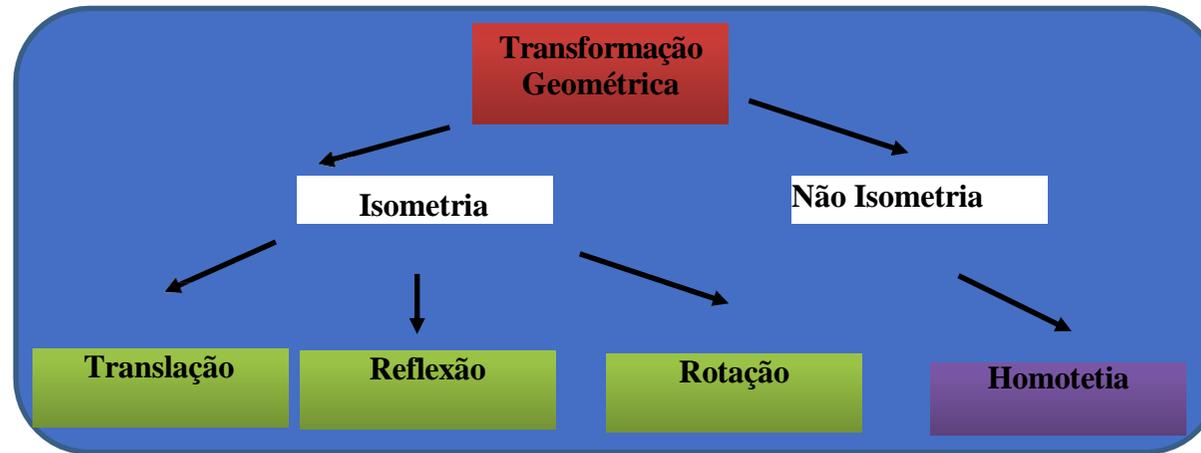
Como objeto de estudo nas escolas, as transformações geométricas permitem a introdução e a visualização de conceitos como números e medidas, percepção de semelhanças e diferenças e de regularidades entre diversas estruturas, sem a necessidade de realizar sua definição formal prévia. Sem uma boa compreensão, o estudante pode apresentar lacunas no entendimento de conceitos posteriores, que são abstratos, se antes não for realizada a apreensão visual. Com isso, podemos perceber que o início do raciocínio matemático se dá pela visualização, e a construção desse raciocínio é fundamental para que o estudante desenvolva a capacidade de elaborar a solução de problemas mais complexos futuramente.

Para tanto, nessa seção buscamos apresentar, de maneira mais detalhada e objetiva, os conceitos e propriedades das transformações geométricas, como também, a partir de alguns exemplos, formalizar o objeto matemático em estudo. Assim, se faz necessário inicialmente, apresentar uma breve definição sobre transformações geométricas, segundo o que diz Wagner, (2007)

[...] Transformações geométricas, consiste em um tópico específico da geometria que trata de alterações no posicionamento (transformações isométricas: translações, reflexões, e rotações, que podem ocorrer em relação a um ponto ou a um eixo de simetria) ou nas dimensões (homotetias) de uma dada figura, em relação a uma figura inicial (Wagner, 2007, p.71).

Adotamos essa definição, como princípio norteador do campo de atuação da nossa pesquisa, pois compreendemos que os processos de ensino voltados para as transformações geométricas devem transcender a compreensão dos conceitos e propriedades ensinadas no espaço da sala de aula.

A seguir apresentamos os tipos de transformações geométricas baseada em Wagner (2007), que são objetos de estudo da nossa pesquisa e que direcionam nossa ação investigativa, como também os conceitos e propriedades exemplificadas nas imagens construídas pelo autor, com o intuito de compreender o seu processo de ensino. As transformações geométricas são divididas em isometrias e homotetias e cada uma delas trata de específicas propriedades. O quadro a seguir apresenta os tipos de transformações geométricas e suas dimensões.

**Quadro 3 – Organograma das Transformações Geométricas**

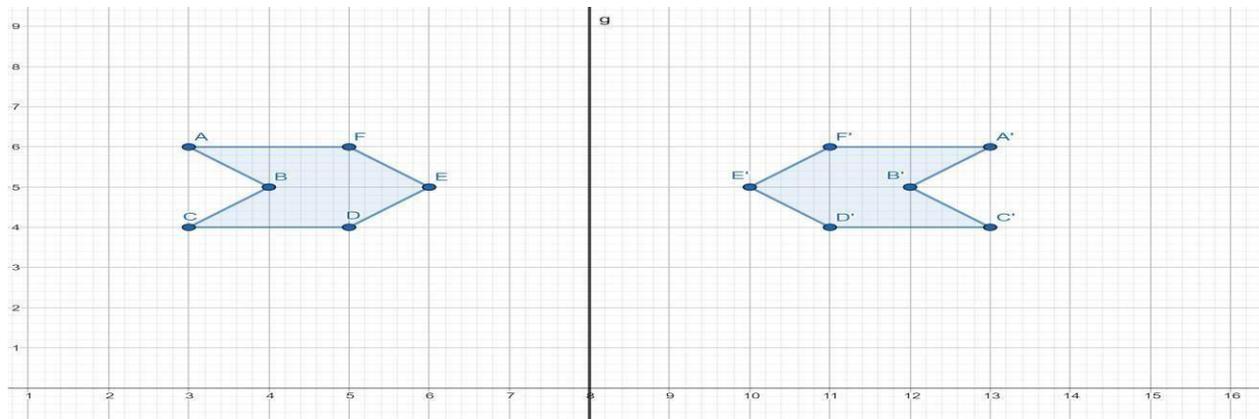
Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Sendo assim, temos que as **Transformações Geométricas de Isometria:** por definição, são aquelas que *preservam distâncias e ângulos*, apresentando as seguintes propriedades:

- A imagem de uma reta por uma isometria é uma reta;
- Uma isometria preserva paralelismo;
- Uma isometria preserva ângulos.

Como consequência da definição, suponho que uma imagem  $I$  por uma isometria é uma figura  $I'$  *congruente* à imagem  $I$ .

**Figura 10** – Isometria do polígono ABCDEF em um polígono A'B'C'D'E'F'



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Podemos notar, a partir da figura acima, que a imagem do polígono formado pelos pontos A, B, C, D, E e F é a imagem denominada I, e o polígono formado pelos pontos A', B', C', D', E' e F' é a imagem I', congruente à imagem I.

Dando sequência, apresentamos os tipos de transformações geométricas de isometria, sendo os seguintes:

### Isometria de Translação

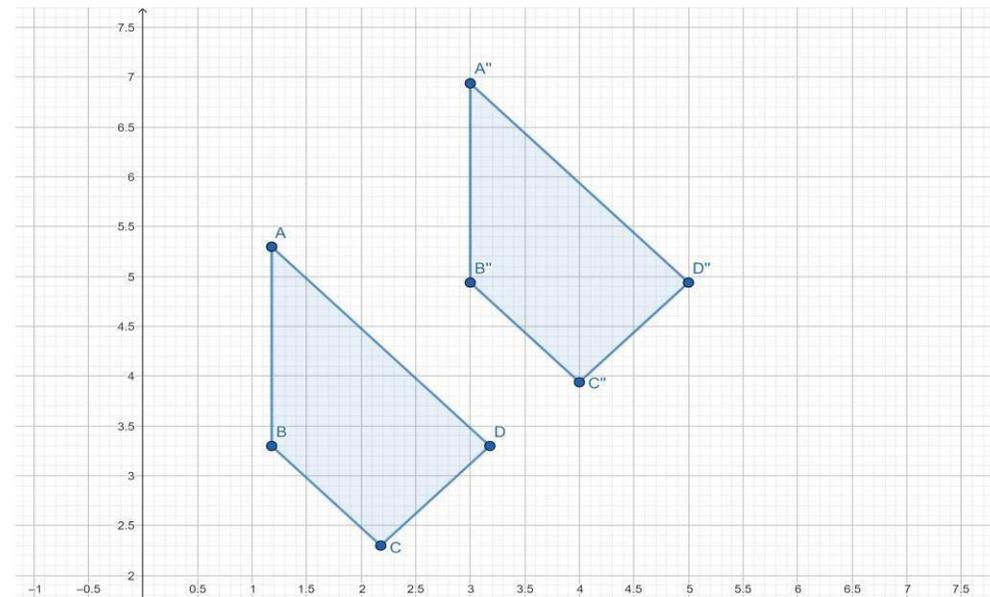
A translação transforma qualquer figura em outra, rigorosamente congruente, conservando assim as distâncias entre os pontos. Sejam A e B pontos distintos do plano. A translação  $T_{AB}$  é a isometria que leva um ponto X do plano ao ponto  $T_{AB}(X) = X'$ , tal que  $ABX'X$  é um paralelogramo, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X são colineares, então  $T_{AB}$  é tal que  $XX'$  está na reta AB e os segmentos  $AX'$  e  $BX$  têm o mesmo ponto médio.

<sup>1</sup>Por definição livre remete a ideia de manter, conservar, evitar mudar suas medidas dimensionais e de ângulos.

<sup>2</sup>Definições de Oxford Languages: 2. idêntico ou correspondente na constituição, forma ou estrutura.

Vejamos um exemplo a seguir.

**Figura 11** – Translação, transporte do quadrilátero ABCD em um quadrilátero A'B'C'D'



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

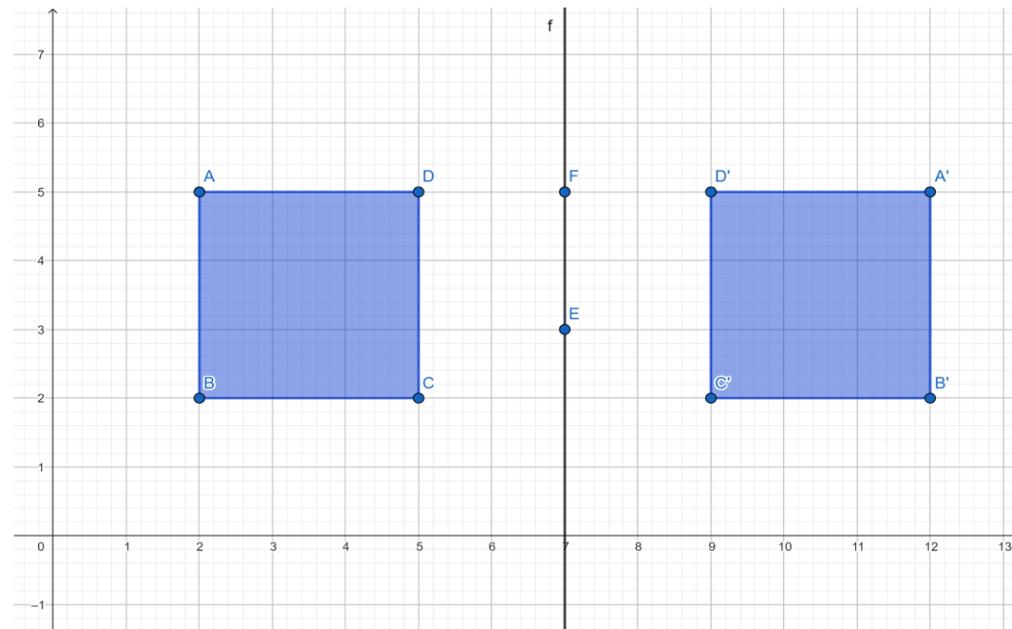
Observando a imagem acima, percebemos que o quadrilátero ABCD possui uma imagem congruente, denominada de quadrilátero A'B'C'D'. Nesse exemplo podemos notar a presença das propriedades da isometria. O quadrilátero muda de localização no plano, conservando o paralelismo e as medidas dos ângulos.

### Isometria de Reflexão

A isometria de reflexão permite transformar cada imagem I em uma outra imagem I', congruente a I. Entretanto, a reflexão inverte a orientação do plano. Por definição para reflexão consideremos uma reta r, a isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano

em seu simétrico  $P'$  em relação à reta  $r$ , é chamada reflexão na reta  $r$ , ou simetria de reflexão na reta  $r$ , a qual vamos indicar por  $R_r$ . A reta  $r$  é chamada eixo da reflexão de  $R_r$ . Observe a figura abaixo.

**Figura 12** – Reflexão Eixo central do plano, transforma a imagem do quadrilátero ABCD em um quadrilátero A'B'C'D'



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

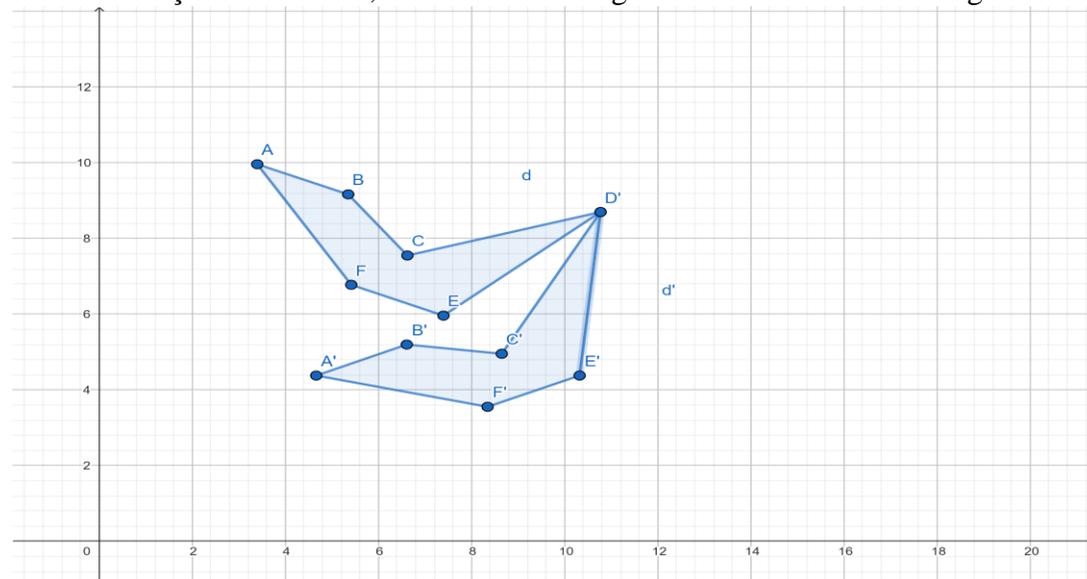
### Isometria de Rotação

A rotação é o movimento giratório de uma figura geométrica em torno de um determinado ponto fixo dessa figura. A figura não mudará de tamanho ou forma, mas mudará de direção.

Por definição, seja  $O$  um ponto do plano e  $\theta$  um número real com  $0 < \theta \leq 360$ . A rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$  é a isometria  $R_{O,\theta}$  que deixa fixo o ponto  $O$  e leva o ponto  $X$ ,  $X \neq O$ , no ponto  $X' = R_{O,\theta}(X)$ , tal que  $OX = OX'$  e a medida do ângulo orientado  $(OX, OX')$  é igual a  $\theta$ , se  $\theta \neq 0$  e  $\theta \neq 180$ . Além disso,  $OX' = OX$ , sendo  $O$  o ponto médio de  $XX'$ , se  $\theta = 180$ ; e  $X' = X$  se  $\theta = 0$ .

Observamos o exemplo a seguir.

**Figura 13** – Rotação de centro D, transforma o hexágono ABCDEF em um hexágono A'B'C'D'E'F'



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

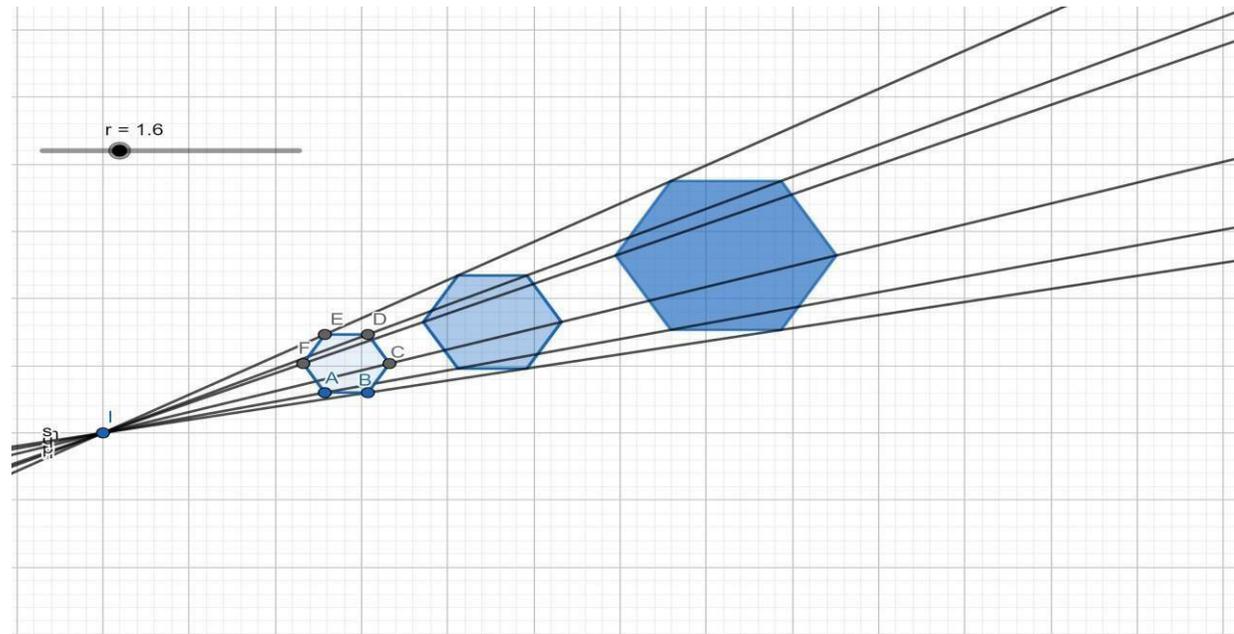
Podemos observar que o hexágono ABCDEF, sendo a figura principal, realiza um movimento giratório sobre o ponto fixo D, deslocando o hexágono sobre o plano, produzindo o hexágono A'B'C'D'E'F' congruente à figura principal. Assim, a partir do movimento ocorrido, se caracteriza como uma transformação geométrica de isometria de rotação.

Antes de prosseguirmos para o estudo sobre a homotetia, porém, é necessário formalizarmos a transformação geométrica semelhança no plano, uma vez que ela vai auxiliar no desenvolvimento do estudo das homotetias. Portanto, segue um estudo sobre semelhança no plano.

**Transformações Geométricas de Homotetia:** Homotetias são transformações geométricas que “ampliam” ou “reduzem” de forma contínua qualquer imagem geométrica. Observemos a ilustração da definição na figura abaixo.

Por definição uma homotetia  $\phi$  de centro  $O$  e razão  $k$  é uma transformação geométrica que satisfaz:  $\phi(O)=O$  e, para  $A \neq O$ , temos que:  $\phi(A)=A' \Leftrightarrow O, A, A'$  são colineares e  $OA' = k \cdot OA$ .

**Figura 14** – Homotetia do hexágono ABCDEF transformando-o em figuras semelhantes



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

A partir da ilustração e os conceitos que foram apresentados ao longo deste capítulo, enfatizamos sobre o quanto o conhecimento geométrico está presente em nosso dia a dia, basta olharmos à nossa volta. Logo, aprender seus conceitos e suas propriedades e tê-las como recursos fundamentais ao conhecimento matemático, e até de mundo, tornando-se imprescindível para o desenvolvimento intelectual do estudante. Contudo, muitos estudos afirmam que a geometria não vem sendo abordada de forma satisfatória, de modo a garantir um ensino significativo em relação aos conceitos geométricos na educação básica, em particular nos anos finais do Ensino Fundamental.

Por esse motivo, esta linha de pesquisa tem a perspectiva de contribuir para transformar a prática pedagógica do professor de Matemática no que se refere ao ensino de geometria, nas diversas etapas de ensino, como também na formação de conceitos bem definidos e estabelecidos, como base para apropriação mais complexa e profunda de estudos posteriores.

### **3.2 O Ensino de Transformações Geométricas: Reflexões e Perspectivas**

O ensino de transformações geométricas é uma parte fundamental do currículo de matemática em muitos sistemas educacionais ao redor do mundo. As transformações incluem reflexões, rotações, transformações e a homotetia, e são importantes não apenas no contexto matemático, mas também em várias disciplinas contextos do conhecimento.

Aqui estão algumas reflexões e perspectivas sobre o ensino de transformações geométricas:

#### **Reflexões:**

##### **1. Conceitualização Clara:**

- É crucial que os alunos compreendam o conceito por trás de cada transformação. Não deve ser apenas um processo mecânico, mas sim algo entendido de forma intuitiva.

##### **2. Aplicações no Mundo Real:**

- Conectar as transformações geométricas com situações do mundo real pode ajudar os alunos a visualizar melhores esses conceitos. Isso pode incluir mapeamento de terrenos, design gráfico, animação, entre outros.

##### **3. Uso de Tecnologia:**

- Ferramentas digitais e softwares de geometria dinâmica podem ser usados para demonstrar visualmente as transformações. Isso não apenas torna o aprendizado mais interativo, mas também permite a experimentação, o que pode aprofundar a compreensão.

##### **4. Abordagem Interdisciplinar:**

- Integrar conceitos de transformações geométricas com outras disciplinas, como física e biologia, pode mostrar aos alunos como essas ideias são universais e aplicáveis em diversas áreas.

## **Perspectivas:**

### **1. Avaliação Formativa:**

- Em vez de depender apenas de exames tradicionais, o uso de avaliação formativa, como projetos e atividades práticas, pode ajudar a entender realmente se os alunos internalizaram os conceitos das transformações geométricas.

### **2. Personalização do Ensino:**

- Cada aluno tem um ritmo de aprendizagem diferente. Ferramentas educacionais adaptativas podem personalizar o ensino, fornecendo a cada aluno os recursos certos no momento certo.

### **3. Inclusividade:**

- Considerar diferentes estilos de aprendizagem e adaptar as estratégias de ensino pode garantir que todos os alunos, independentemente de suas habilidades ou desafios, tenham acesso ao conhecimento das transformações geométricas.

### **4. Fase de Resolução de Problemas:**

- Enfocar problemas do mundo real que podem ser resolvidos usando transformações geométricas não apenas contextualiza o aprendizado, mas também desenvolve habilidades de resolução de problemas nos alunos.

Em suma, o ensino de transformações geométricas deve ir além da memorização de fórmulas e procedimentos. Deve ser uma experiência envolvente e aplicável, onde os alunos compreendem profundamente os conceitos e veem a relevância dessas transformações no mundo ao seu redor.

## **3.3 Transformações Geométricas e as expressões artísticas, suas conexões**

Para uma melhor sintetização sobre nosso objeto de pesquisa, apresentamos um breve relato histórico sobre os primeiros registros envolvendo as primitivas concepções das transformações geométricas, seu contexto de ensino em algumas redes de educação internacional e nacional, como uma maneira de buscar aproximações do seu ensino, sua relação com a arte, a partir de obras de artistas internacionalmente conhecidos, e a arte de artistas da localidade onde a pesquisa de campo acontece.

Nesse espaço, aproveitamos para apresentar algumas dessas expressões artísticas, que combinam traços específicos das transformações

geométricas e da arte, para representar a visão de mundo do artista e buscar dar significados a sua criatividade, usando de maneira brilhante as dimensões das formas geométricas, com o intuito de caracterizar os seus feitos. A seguir apresentaremos uma sequência de imagens que retratam em seus traços artísticos, a materialização de conceitos e propriedades das transformações geométricas.

Podemos notar essa característica na imagem abaixo, que é um jogo americano de sousplat, utensílio que tem por finalidade, ser posto sobre a mesa de refeição. Observamos que a artista usa e abusa de pontos de crochê que produzem padrões e que fazem destaque ao formato triangular com uma de suas bordas sendo de formato de arco e essa mesma figura é reproduzida de maneira rotacional com o ponto central fixo, reproduzindo outros triângulos congruentes. Dessa forma, notamos que está presente no feito artístico acima propriedades das transformações geométricas de isometria.

**Figura 5** – Jogo Americano *Sousplat*



**Fonte:** Lala's Ateliê – Dona Fátima.

Outra obra está representada na foto abaixo, que é a construção de peças de madeira no formato de coração e de circunferência, e que são produzidos em diferentes tamanhos, conservando os padrões característicos de semelhança entre eles. Ou seja, nessas peças de madeira estão

implícitas no seu feito propriedades da homotetia das transformações geométricas. Nessa arte é possível notar, a partir dos formatos geométricos, figuras que apresentam propriedade da congruência (homotetia).

**Figura 8** – Kit Tábuas de Frios



**Fonte:** Mundo Rústico Ateliê – Alexander de Lima Timm – Freddy Timm.

Os artistas buscam comunicar-se usando diversas linguagens, dando formas e sentidos através de suas obras, refletindo suas percepções de mundo, sua cultura e costumes sociais, muitas vezes, expressam sua maneira ímpar de observar e descrever o mundo por meio de sua arte.

#### 4. TRILHA DE APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS TG's

A trilha de aprendizagem de transformações geométricas foi construída de maneira colaborativa com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, em encontros de estudo.

A trilha está estruturada a partir de um percurso formativo que desenvolva no estudante seu protagonismo, dando-lhe autonomia no processo de aprendizagem, com o apoio das suas aprendizagens prévias, compreendendo suas potencialidades e fragilidades sobre o objeto matemático em estudo. Assim, a trilha é composta por etapas e níveis de complexidade, posta a partir da estrutura posta pela teoria de Van Hiele, na qual tomamos como subsídio para as aprendizagens a serem testadas e adquiridas.

A seguir, apresentamos as atividades da trilha seguindo essa padronização e característica das trilhas de aprendizagem.

As etapas e níveis dos itens da trilha segue uma lógica fundamentada na teoria do pensamento geométrico de Van Hiele, adaptada aos conceitos e propriedades específicas e inerentes ao conhecimento sobre as transformações geométricas, e estão postos da seguinte maneira:

##### **Etapas 1 / Nível 1 → Reconhecimento**

Os estudantes identificam, reconhecem, descrevem, comparam e classificam as mudanças de posição das representações geométricas, visualmente, mas não identificam as propriedades existentes.

##### **Etapas 1 / Nível 2 → Análise**

Os estudantes começam a analisar as propriedades das transformações geométricas através da análise da orientação de mudança de posição no plano e aprendem a simbologia adequada para descrevê-las, através de uma análise informal a partir da observação e experiência.

##### **Etapas 2 / Nível 3 → Ordenação**

Os estudantes estabelecem uma ordenação lógica das propriedades das transformações geométricas por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações os tipos de transformações geométricas. O estudante neste nível não compreende o significado de uma dedução ou dos axiomas.

##### **Etapas 2 / Nível 4 → Dedução**

Os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas

e provas. A realização de conjecturas e esforços iniciados é espontânea. Um aluno neste nível pode construir provas, não apenas memorizá-las.

### **Etapa 3 / Nível 5 → Rigor**

Os estudantes apresentam a capacidade de compreender demonstrações formais. São capazes de entender axiomas, mesmo na ausência de modelos concretos. Além da descrição característica de cada nível de conhecimento do pensamento geométrico, apresentamos também as fundamentações técnicas que dimensiona a teoria como uma proposta orientativa que o estudante precisa se direcionar nas suas escolhas durante a trilha. Então a teoria tem nas suas características, sua dimensão,

**Hierárquica** - Onde os níveis obedecem a uma hierarquia, isto é, para atingir certo nível é necessário passar antes por todos os níveis inferiores.

**Linguística** - Em que cada nível tem uma linguagem, conjunto de símbolos e sistemas de relações próprios.

**Conhecimentos intrínsecos** - Que em cada nível, o estudante tem conhecimentos que estão intrínsecos e eles não conseguem explicar. No nível seguinte é que esses conhecimentos serão explicados.

**Nivelamento** - Não há entendimento entre duas pessoas que raciocinam em níveis diferentes, ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno.

**Avanço** - O progresso entre os níveis depende da instrução oferecida, isto é, o estudante só progride para o nível seguinte depois de passar por atividades específicas, que o preparem para esse avanço.

Para construir a trilha de aprendizagem usamos o *Google Forms*, seguindo a proposta da trilha em uma série de atividades que os estudantes devem concluir sequencialmente para aprender ou adquirir conhecimento sobre o objeto matemático. A seguir, apresentamos o passo a passo da organização e criação da trilha de aprendizagem de transformação geométrica na plataforma do google forms.

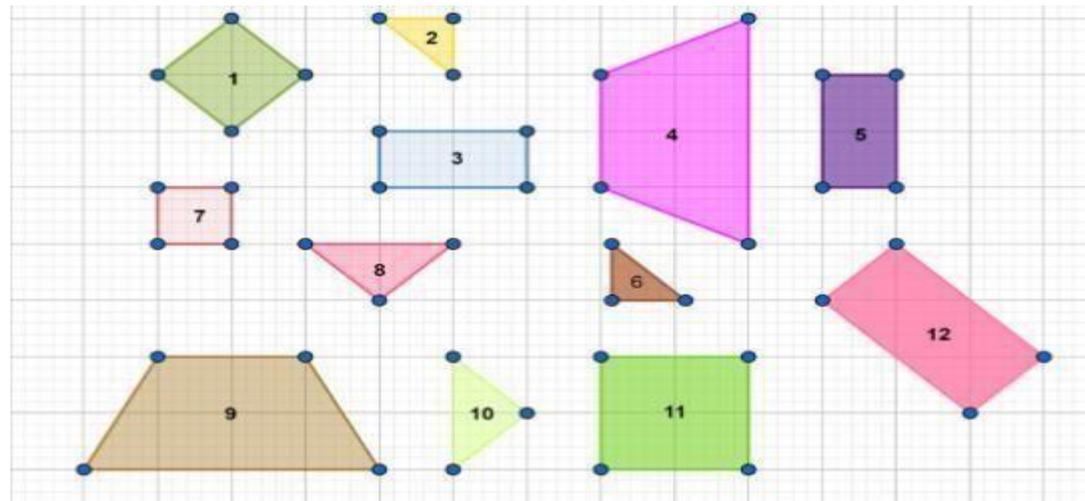
1. **Planejamento:** Antes de começar, definimos claramente o objetivo da trilha de aprendizagem e o objeto matemático que será abordado, que também estão elencados nos objetivos descritos no produto educacional. Assim, pensamos no quantitativo de atividades que serão necessários para atingir o objetivo. Organizamos a trilha de forma lógica e sequencial.
2. **Criar um Formulário no *Google Forms*:** Acessamos o *Google Forms* em <https://forms.google.com/> e fizemos o *login* em nossa conta do *Google*, para criar o formulário em que será feita a trilha de aprendizagem de transformações geométrica.

3. **Criar a Primeira Atividade:** Criamos uma pergunta para a primeira atividade da trilha de aprendizagem, sendo uma pergunta de múltipla escolha, com alternativas que a partir da resposta do estudante o leva para uma próxima pergunta que poderá ser da mesma etapa e/ou nível de complexidade ou para uma seção que lhe apresente um momento de estudo e revisão como suporte para uma melhor performance na trilha.
4. **Configurar a Navegação:** Na sequência, pós criação das atividades, configuramos o formulário selecionando a opção “Navegação” ou “Lógica de ramificação”, com o intuito de programar a sequência de etapas da trilha com base na resposta. Isso, garantindo que os estudantes prossigam para a próxima atividade após concluir a atual ou que seja direcionado para uma seção que revise o conteúdo para um melhor aproveitamento na sequência da trilha.
5. **Adicionar Seções:** Criamos uma seção para cada atividade subsequente da trilha de aprendizagem. Dentro de cada seção, adicionamos as perguntas ou seções de revisão.
6. **Configurar a Lógica de Ramificação:** Configuramos a lógica de ramificação para cada seção, direcionando os estudantes para a próxima seção após a conclusão da seção atual. Certificando de que a trilha de aprendizagem siga a ordem correta.
7. **Personalizar a Aparência (Opcional):** Personalizamos o formulário de acordo com a proposta metodológica da trilha, adicionando imagens, cores e outros elementos de design que tornem a trilha de aprendizagem mais atraente.
8. **Configurar Configurações de Compartilhamento:** Definimos o público participante da trilha, para o livre acesso ao formulário.
9. **Testar a Trilha de Aprendizagem:** Fizemos um teste completo da trilha de aprendizagem para garantir que todas as perguntas, lógica de ramificação e instruções funcionem conforme o esperado.
10. **Compartilhar a Trilha de Aprendizagem:** Após testar e ajustar a trilha de aprendizagem, deixamos disponível o link do formulário para possível aplicação aos estudantes.
11. **Acompanhar o Progresso:** Assim, acompanhamos o progresso dos estudantes, verificando as respostas coletadas no Google Forms ou usando as análises fornecidas pela plataforma.
12. **Fornecer *Feedback* e Avaliação (Opcional):** Por último, teremos a oportunidade de fornecer feedback e avaliação com base em suas respostas.

Dessa forma, apresentamos a sequência de atividade que estão postas na trilha de aprendizagem na plataforma do google forms, atendendo a ordem de etapas e níveis de complexidade de cada atividade.

#### 4.1. Atividade: Etapa 1 – Nível 1

1. Sobre um plano em malha quadriculado, a professora de matemática Alcilene, da escola de Referência em Ensino Médio Dr. Fernando Pessoa de Mélo, do município de Quipapá-PE, colocou a disposição as seguintes representações geométricas, solicitando ao grupo A, que selecione as figuras organizando-os a partir de critérios estabelecidos pelos próprios estudantes. Dessa forma, a partir das possíveis formas de organização, qual seria o conjunto de figuras que representam os trapézios?



- a) Figuras 1, 7 e 11.
- b) Figuras 2, 6, 8 e 10.
- c) Figuras 3, 5 e 12.
- d) Figuras 4 e 9.

#### 4.2. Atividade: Etapa 1 – Nível 1

2. Na aula de matemática sobre transformações geométricas, a professora Alcilene apresentou em slides a imagem abaixo. A partir da imagem a professora propõe a análise da imagem com os seguintes questionamentos:

- O que podemos observar na composição da imagem?
  - O que se pode dizer sobre os componentes da figura?
  - Há relação entre esses componentes?
  - Existe alguma congruência entre os componentes? Se sim, de que forma?
  - Escolha um dos componentes da imagem e indique como ocorre sua construção.
- A partir dos direcionamentos da professora os estudantes foram impulsionados a perceber que:

- a) Que a imagem não tem nenhuma relação com os tipos de transformações geométricas.
- b) Que a imagem apresenta propriedades de homotetia (aumento e redução das representações geométricas)
- c) A isometria de reflexão predomina nas representações geométricas na imagem, a partir da observação dedutiva com o reflexo na água.



### 4.3. Atividade: Etapa 1 – Nível 1

3. A senhora Fátima Silva, artista de crochê no município de Quipapá-PE, ao produzir um casaco, ela sempre colocar as peças uma ao lado da outra para observar suas semelhanças dimensões. Dessa maneira que dona Fátima faz essas observações, acaba realizando um procedimento que usa propriedades de transformações geométricas. Que tipo de transformação geométrica é possível perceber com essa ação de dona Fátima?



- a) Rotação.
- b) Reflexão.
- c) Translação.
- d) Homotetia.

Essas atividades têm o intuito de verificar e desenvolver noções básicas de espaço, forma e orientação. É a fase inicial desse processo, em que os estudantes estão começando a explorar conceitos básicos e desenvolver suas habilidades de pensamento geométrico, como, exploração de formas, classificando objetos do ambiente de diferentes formas de posicionamento e alteração.

Essas atividades são projetadas para ajudar os estudantes a desenvolver uma base sólida em transformação geométrica, familiarizando-se com os

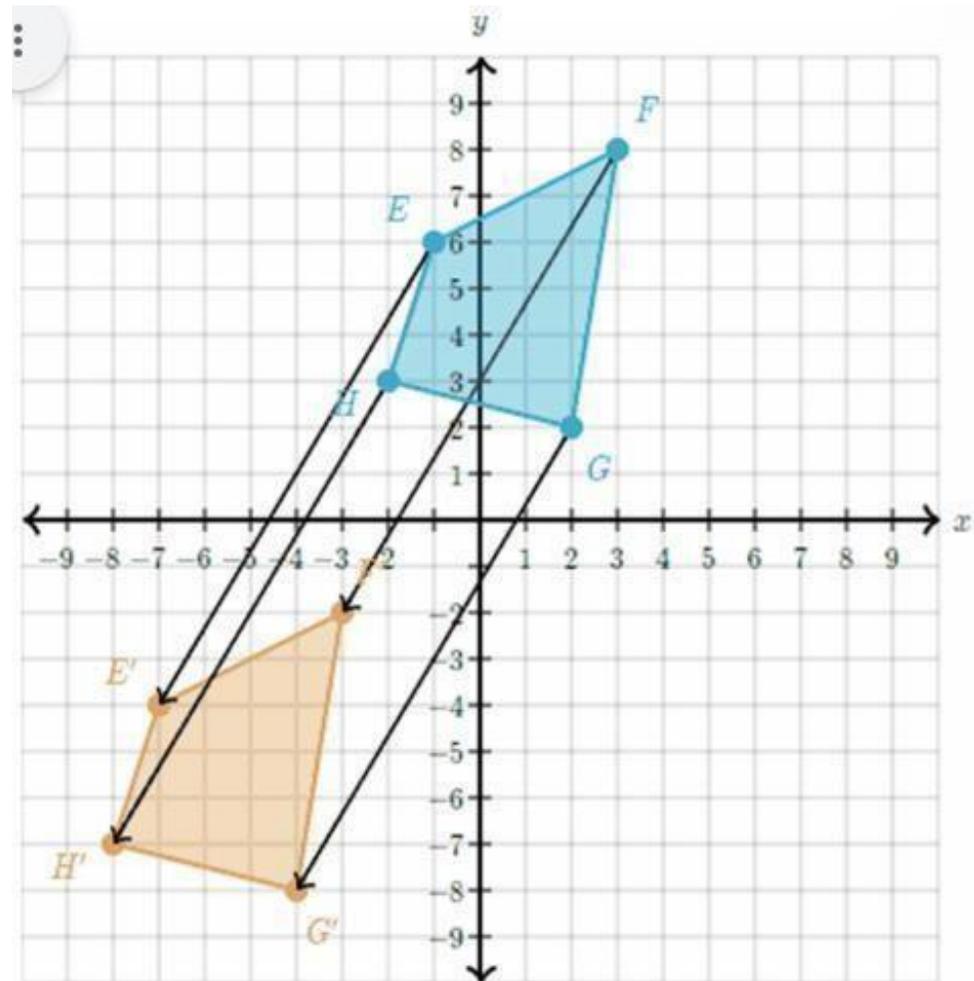
conceitos e as linguagens relacionadas à geometria desde cedo. Conforme os estudantes progredem em seus estudos, eles passarão para níveis mais avançados, explorando tópicos mais complexos, alcançando os níveis mais elevados gradualmente.

#### 4.4. Etapa 1 / Nível 2 → Análise

Os estudantes começam a analisar as propriedades das transformações geométricas através da análise da orientação de mudança de posição no plano e aprendem a simbologia adequada para descrevê-las, através de uma análise informal a partir da observação e experiência.

5. Em uma aula sobre transformação geométrica, a professora Luana, fez algumas abordagens no software dinâmico Geogebra, para facilitar a compreensão dos conceitos e propriedades de cada tipo de transformação geométrica no plano. Assim, em um dado momento foi construído e apresentado a seguinte imagem na interface do geogebra. A professora orientou os estudantes que observe os polígonos EFGH e E'F'G'H' no plano cartesiano. Em seguida a professora induziu os estudantes a partir da observação produzisse uma sequência lógica de deduções sobre a imagem produzida para que eles possam identificar, que tipo de transformação geométrica foi produzida do polígono EFGH no polígono E'F'G'H'. Assim, qual será a resposta correta sobre o tipo de transformação geométrica que ocorreu no polígono, a partir das observações lógicas dedutivas?

- Reflexão em relação ao eixo x.
- Reflexão em torno da origem do sistema de coordenadas.
- Translação.
- Rotação em relação ao ponto F.



## Etapa 1 / Nível 2

No contexto da teoria do pensamento geométrico, o nível 2 refere-se a um estágio em que os estudantes estão desenvolvendo uma compreensão mais abrangente das transformações geométricas. Eles começam a entender as propriedades das transformações e como elas podem ser usadas para analisar e resolver problemas geométricos. Aqui estão alguns itens das atividades que podem ser percebidas e exploradas para estudantes no nível 2 da teoria do pensamento geométrico sobre as transformações geométricas: Os estudantes buscam identificar nas diferentes figuras geométricas que as identifique os tipos de transformação eles estão sofrendo observando o efeito resultante na figura. Isso ajuda os estudantes a entender como as transformações interagem umas com as outras. Desenhar a mesma figura após uma determinada transformação. Isso ajuda a fortalecer a compreensão prática das transformações. Explorar as propriedades das transformações, como a invariância de forma e tamanho em algumas transformações, em que os estudantes identifiquem e especifiquem as propriedades em exemplos específicos.

Outra maneira que pode ser abordada são a apresentação de problemas que podem ser resolvidos usando conceitos de transformação es geométricas, como por exemplo, problemas que envolvem encontrar a rotação necessária para que uma figura se sobreponha a outra.

A exploração de padrões e sequências que envolvem transformações geométricas, os estudantes identificam o próximo passo em uma sequência de transformações ou padrões que emergem de uma série de transformações.

A introdução de transformações geométricas usando coordenadas ajuda os estudantes a entender como as coordenadas dos pontos mudam após diferentes tipos de transformações.

Usando jogos interativos que envolvem transformações geométricas ajuda os estudantes a praticar e reforçar conceitos de transformações de maneira divertida. E ainda, discutir exemplos do mundo real que envolvem transformações geométricas, como mapeamento de terrenos, design de objetos e animações por computador, tem a intenção de aproximar os conceitos e propriedades das transformações geométricas na prática.

Ao projetar essas atividades para o nível 2 da teoria do pensamento geométrico sobre transformações geométricas, foi pensado em garantir que os estudantes tenham a oportunidade de aplicar conceitos de maneira prática, resolver problemas do mundo real e desenvolver uma sólida das propriedades das transformações geométricas.

## Etapa 2 – Nível 3

No nível 3, os estudantes são capazes de entender e aplicar transformações geométricas de forma mais avançadas. Isso inclui a compreensão de conceitos como reflexão, rotação, tradução e simetria, bem como a capacidade de aplicar essas transformações em diferentes contextos geométricos. Esse nível envolve maior abstração e compreensão das transformações geométricas em comparação com os níveis anteriores.

Os estudantes são capazes de identificar padrões em transformações geométricas. Eles podem considerar regularidades e regras subjacentes nas transformações, como reflexões, rotações e translações. Os estudantes no nível 3 são capazes de aplicar transformações geométricas a objetos específicos. Eles podem, por exemplo, refletir uma figura em relação a uma linha ou girar em torno de um ponto de rotação.

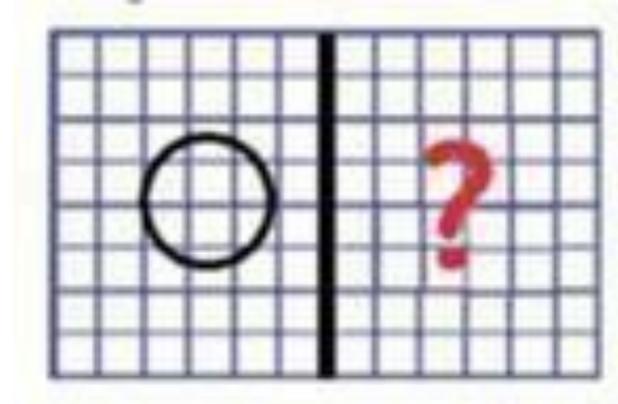
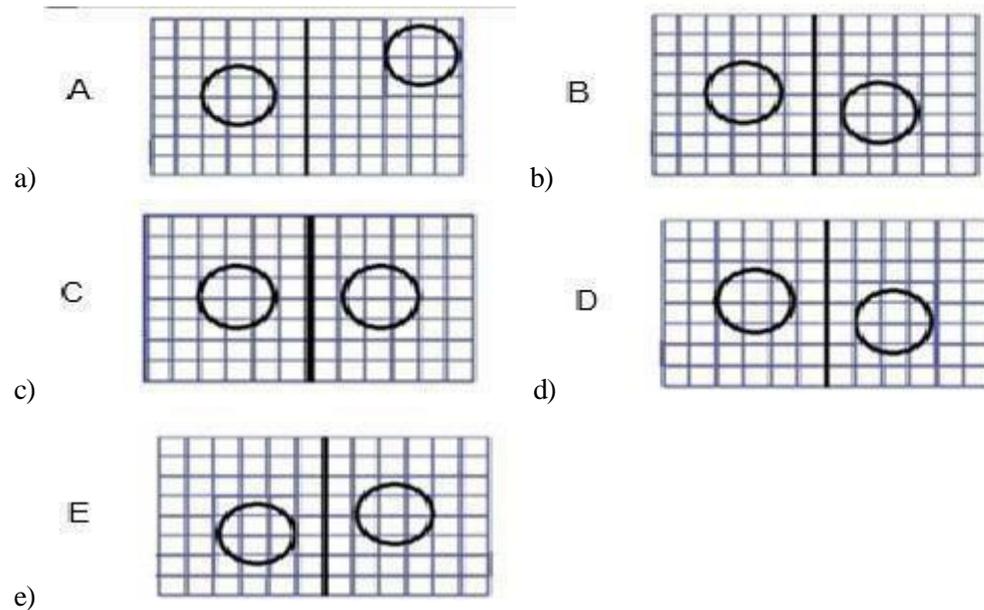
nesse estágio, os estudantes podem começar a usar representações simbólicas para descrever transformações, como notações matriciais para rotações ou sistemas de coordenadas para translações. Os estudantes podem entender como as composições de várias transformações impactando um objeto geométrico. Eles podem realizar sequências de transformações e prever o resultado final. As atividades envolvem a resolução de problemas mais complexos que requerem a aplicação de transformações geométricas para encontrar soluções. Isso pode incluir problemas de simetria, congruência ou transformações em geometria euclidiana.

Nesse estágio, os estudantes podem começar a abstrair conceitos geométricos e aplicá-los a diferentes contextos. Eles podem compreender as relações entre transformações e outras áreas da matemática, como a álgebra linear. Os estudantes podem identificar invariantes, ou seja, propriedades que permaneceram inalteradas sob transformações. Isso requer um nível avançado de compreensão das transformações e das geometrias geométricas. Dessa forma, os estudantes podem começar a generalizar resultados sobre transformações geométricas e desenvolver argumentos lógicos para provar teoremas relacionados a transformações.

Lembrando que o desenvolvimento do pensamento geométrico pode variar de pessoa para pessoa, e nem todos alcançarão o nível 3 da teoria do pensamento geométrico. Além disso, o ensino e a prática desempenham um papel crucial no desenvolvimento desse tipo de pensamento. As atividades e exemplos acima são apenas indicativos do que pode ser esperado em um estágio de pensamento geométrico de nível 3 sobre transformações geométricas.

#### 4.5. Atividade: Etapa 2 – Nível 3

6. Qual das figuras a seguir representa a reflexão da circunferência em relação ao eixo demarcado?



#### Etapa 2 – Nível 4

O nível 4 é o nível de dedução informal. Neste nível, os alunos são capazes de realizar atividades que envolvem transformações geométricas de forma mais avançada. Aqui estão algumas atividades que os estudantes do nível 4 podem realizar:

##### 1. Compreensão Profunda de Transformações:

- **Raciocínio Dedutivo:** Resolver problemas desativados que algoritmo dedutivo para realizar transformações geométricas complexas, como provar teoremas usando transformações.

- **Identificação de Propriedades:** identificar e utilizar propriedades invariantes sob diferentes transformações (reflexões, rotações, translações, etc.).
- **Transformações Combinadas:** Realizar múltiplas transformações em sequência e compreender o resultado final.

## 2. Problemas de Construção:

- **Construções Complexas:** Criar figuras geométricas complexas usando uma combinação de transformações geométricas.
- **Problemas de Construção Invertida:** Dada uma figura transformada, construa uma figura original usando transformações geométricas.

## 3. Exploração de Simetrias:

- **Simetrias Avançadas:** identificar e explorar diferentes tipos de simetrias em figuras geométricas complexas.
- **Padrões Simétricos:** Criar padrões simétricos usando transformações e identificar as regras que governam esses padrões.

## 4. Coordenadas e Transformações:

- **Transformações no Plano Cartesiano:** Compreender como as transformações internas as coordenadas dos pontos no plano cartesiano.
- **Representação Matricial:** Representar transformações geométricas como matrizes e realizar operações de multiplicação de matriz para combinação de transformações.

## 5. Exploração de Teoremas:

- **Teoremas de Transformação:** Investigar teoremas que envolvem transformações geométricas e entender as implicações desses teoremas.
- **Provas com Transformações:** Criar e tentar entender que envolvem transformações geométricas, mostrando como as transformações preservam propriedades específicas das figuras.

## 6. Aplicações em Contextos do Mundo Real:

- **Aplicações Práticas:** Aplicar transformações geométricas em contextos do mundo real, como design gráfico, engenharia, e ciências da computação para modelar e resolver problemas do mundo real.

### 7. Aprofundamento em Transformações 3D (Opcional):

- **Transformações Tridimensionais:** Explorar transformações no espaço tridimensional, incluindo rotações, reflexões e translações em figuras tridimensionais.

Neste nível, os estudantes não apenas aplicam transformações, mas também compreendem profundamente os princípios subjacentes e podem raciocinar de forma dedutiva sobre problemas geométricos complexos envolvendo transformações. As atividades são desafiadoras e incentivam os estudantes a pensar criticamente sobre as propriedades geométricas das figuras sob diferentes transformações.

Nesse nível, os estudantes estão envolvidos em atividades que envolvem transformações geométricas mais complexas e abstratas. Como, por exemplo:

1. **Composição de Transformações:** Os estudantes exploram como diferentes transformações geométricas (como rotações, reflexões, translações e dilatações) podem ser combinadas em uma única transformação. Eles podem criar sequências de transformações para alcançar um resultado específico.
2. **Transformações Isométricas e Transformações Afins:** Os alunos distinguem entre transformações isométricas (aquelas que preservam distâncias e ângulos) e transformações afins (aquelas que preservam ângulos, mas não necessariamente distâncias). Eles podem trabalhar com exemplos de ambas as categorias.
3. **Transformações em Coordenadas:** As aulas envolvem transformações geométricas a objetos representados em sistemas de coordenadas cartesianas. Isso envolve a manipulação de pontos, vetores e matrizes para realizar transformações.
4. **Simetria e Invariância:** Os estudantes investigam objetos e figuras que mantêm a aparência após uma ou mais transformações. Eles podem estudar figuras simétricas e entender como diferentes transformações envolvem a simetria.

5. **Grupos de Transformações:** Os estudantes podem explorar grupos matemáticos que descrevem conjuntos de transformações geométricas. Eles podem aprender sobre as propriedades desses grupos, como identidade, inversos e fechamento sob composição.
6. **Transformações Projetivas:** Em níveis mais avançados, os alunos podem começar a estudar transformações projetivas, que incluem perspectivas e outras transformações que preservam relações de colinearidade.
7. **Aplicações em Computação Gráfica e Engenharia:** Os alunos podem aplicar suas habilidades de transformação geométrica em campos práticos, como design gráfico, animação 3D, processamento de imagens e modelagem de objetos tridimensionais.

Essas atividades representam um conjunto avançado de conceitos e aplicações dentro do Nível 4 da teoria do pensamento geométrico, voltado especificamente para as transformações geométricas. Os estudantes que alcançam esse nível estão preparados para abordar problemas geométricos mais solicitados e aplicar seu conhecimento em contextos mais complexos.

#### 4.6. Etapa 2 – Nível 4

8. Quais características das propriedades das transformações geométricas podemos identificar com maior ênfase na arte de croche da artista Fátima Silva.

- a) Rotação.
- b) Reflexão.
- c) Translação.
- d) Homotetia.



#### 4.7. Etapa 2 – Nível 4

9.(ENEM) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B (figura 1). Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu e girou rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura 2, formando um ângulo de  $45^\circ$  com a linha do horizonte. Para recolocar a tela na posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a  $360^\circ$ . A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

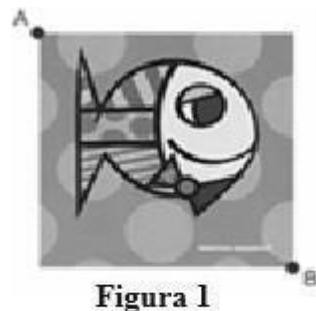


Figura 1

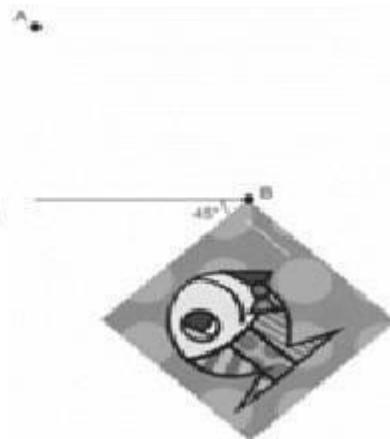


Figura 2

- a)  $90^\circ$  no sentido horário.
- b)  $135^\circ$  no sentido horário.
- c)  $180^\circ$  no sentido anti-horário.
- d)  $270^\circ$  no sentido anti-horário.
- e)  $315^\circ$  no sentido horário.

### Etapa 3 – Nível 5

A Teoria do Pensamento Geométrico, descreve como as pessoas desenvolvem a capacidade de visualizar, analisar e transformar formas mentais geométricas. No nível 5 dessa teoria, os alunos são capazes de compreender e executar transformações geométricas complexas. As atividades nesse nível podem incluir:

1. **Rotações Complexas:** Os alunos podem ser desafiados a realizar rotações em torno de pontos específicos ou realizar rotações múltiplas para transformar uma figura em outra.
2. **Reflexões em Linhas Arbitrárias:** Pedir aos alunos para realizar reflexões em relação a linhas que não são necessariamente horizontais ou verticais. Isso exige um entendimento mais profundo das propriedades das reflexões.
3. **Traduções em Direções Diferentes:** As atividades podem envolver translações em direções não apenas horizontais e verticais, mas também em flexíveis diagonais ou inclinadas.
4. **Composição de Transformações:** Os alunos podem aprender a combinar diferentes transformações, como rotações seguidas de reflexões ou translações seguidas de rotações. Isso ajuda a desenvolver a compreensão de como as transformações interagem umas com as outras.
5. **Transformações Isométricas e Não Isométricas:** Explorar transformações que preservam ou não preservam as medidas e os ângulos. Isso pode incluir atividades com dilatações ou contrações.
6. **Transformações em Figuras Tridimensionais:** Introduzir transformações em objetos tridimensionais, como cubos ou pirâmides. Isso pode envolver rotações, reflexões e translações em três dimensões.
7. **Problemas do Mundo Real:** Apresentar problemas do mundo real que podem ser resolvidos usando transformações geométricas, como mapeamento de terrenos, projeto de objetos ou planejamento de layout.
8. **Problemas de Quebra-Cabeça:** Criar quebra-cabeças geométricos que requerem uma série específica de transformações para serem resolvidos. Isso ajuda os alunos a desenvolver habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.

9. **Atividades de Software Interativo:** Utilização de software interativo de geometria que permite aos alunos experimentar diferentes transformações geométricas de forma visual e intuitiva.

O nível 5 dessa teoria é o mais avançado e indica um alto grau de habilidade e compreensão em relação a transformações geométricas. Aqui estão algumas das atividades e características associadas ao nível 5 da teoria do pensamento geométrico sobre transformações geométricas:

**Compreensão profunda de transformações:** Os estudantes têm uma compreensão profunda e abstrata das transformações geométricas, incluindo reflexões, rotações e translações. Eles não apenas conhecem as regras e procedimentos, mas também entendem a essência das transformações.

Ainda, os estudantes são capazes de usar o cálculo formal para explicar suas ações e decisões ao aplicar transformações geométricas. Eles podem demonstrar teoremas e propriedades associadas a essas transformações. São ainda capazes de generalizar seus conhecimentos sobre transformações geométricas aplicando os princípios aprendidos em uma ampla variedade de situações geométricas e entender como essas transformações estão relacionadas. Eles podem ver como as transformações se relacionam com álgebra, trigonometria, física e outras disciplinas. Os estudantes são capazes de resolver problemas geométricos complexos que envolvem múltiplas etapas e transformações. Eles podem usar sua compreensão profunda para abordar problemas desafiadores de maneira sistemática. Eles têm uma compreensão sofisticada de simetria e podem identificar padrões simétricos em objetos e figuras geométricas. Eles também podem aplicar transformações para criar simetria.

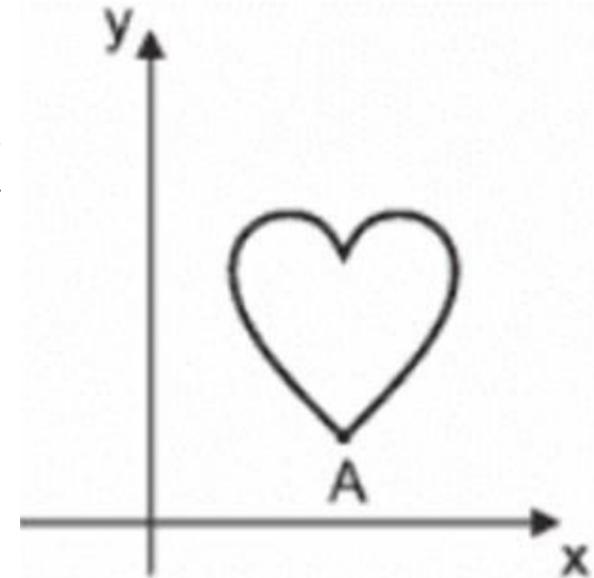
Os estudantes desse nível podem usar transformações geométricas de maneira criativa para criar arte, design e modelos matemáticos complexos. Eles têm a capacidade de visualizar como as transformações afetam a forma e a estrutura dos objetos.

Em resumo, o nível 5 da teoria do pensamento geométrico sobre transformações geométricas representa um estágio avançado de compreensão e habilidade nessa área, onde os indivíduos são capazes de aplicar seu conhecimento de maneira profunda, generalizada e criativa para resolver problemas complexos e fazer conexões interdisciplinares.

#### 4.8. Etapa 3 – Nível 5

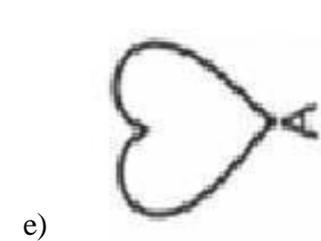
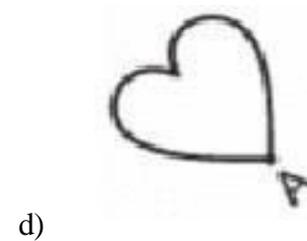
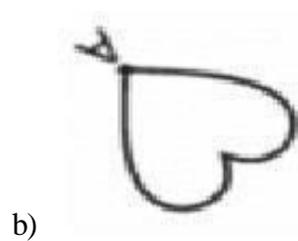
10. (ENEM) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre os pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, e a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o “giro” de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:

- 1º) Reflexão no eixo  $x$ ;
- 2º) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto  $A$ ;
- 3º) Reflexão no eixo  $y$ ;
- 4º) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto  $A$ ;
- 5º) Reflexão no eixo  $x$ .



Disponível em: [www.pucsp.br](http://www.pucsp.br). Acesso em: 2 ago. 2012.

Após as cinco transformações, qual é a posição final da figura?



#### 4.9. Etapa 3 – Nível 5

10. A senhora Maria Luzinete, "Dona Nete", faz arte em tecidos, em particular em toalhas de pratos, mesas entre outros utensílios de cozinha. Na imagem abaixo, um registro de uma das suas obras, podemos observar alguns traços de transformação geométrica. Na região em destaque é possível reconhecer de maneira dedutiva a transformação de reflexão, onde a imagem I, muda de posição conservando suas características dimensionais.

A partir dessa dedução, quais das propriedades abaixo se relaciona com a transformação geométrica em destaque na imagem?

a) Isometria de Translação - A translação transforma qualquer figura em outra, rigorosamente congruente, conservando assim as distâncias entre os pontos. Sejam A e B pontos distintos do

plano. A translação  $T_{AB}$  é a isometria que leva um ponto X do plano ao ponto  $T_{AB}(X) = X'$ , tal que  $ABX'X$  é um paralelogramo, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X são colineares, então  $T_{AB}$  é tal que  $XX'$  está na reta AB e os segmentos  $AX'$  e  $BX$  têm o mesmo ponto médio.

b) A isometria de reflexão permite transformar cada imagem I em uma outra imagem I', congruente a I. Entretanto, a reflexão inverte a orientação do plano. Por definição para reflexão consideremos uma reta r, a isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P' em relação à reta r, é chamada reflexão na reta r, ou simetria de reflexão na reta r, a qual vamos indicar por  $R_r$ . A reta r



é chamada eixo da reflexão de  $R_r$ .

c) A rotação é o movimento giratório de uma figura geométrica em torno de um determinado ponto fixo dessa figura. A figura não mudará de tamanho ou forma, mas mudará de direção. Por definição, seja  $O$  um ponto do plano e  $\alpha$  um número real com  $0 < \alpha \leq 360$ . A rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  é a isometria  $R_{O,\alpha}$ , que deixa fixo o ponto  $O$  e leva o ponto  $X, X \neq O$ , no ponto  $X' = R_{O,\alpha}(X)$ , tal que  $OX = OX'$  e a medida do ângulo orientado  $(OX, OX')$  é igual a  $\alpha$ , se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq 180$ . Além disso,  $OX' = OX$ , sendo  $O$  o ponto médio de  $XX'$ , se  $\alpha = 180$ ; e  $X' = X$  se  $\alpha = 0$ .  $\square$

d) Homotetias são transformações geométricas que “ampliam” ou “reduzem” de forma contínua qualquer imagem geométrica. Observemos a ilustração da definição na figura abaixo. Por definição uma homotetia  $\phi$  de centro  $O$  e razão  $k$  é uma transformação geométrica que satisfaz:  $\phi(O) = O$  e, para  $A \neq O$ , temos que:  $\phi(A) = A' \Leftrightarrow O, A, A'$  são colineares e  $OA' / OA = k$ .

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de transformações geométricas é um tema crucial na educação matemática, pois ajuda os alunos a desenvolver habilidades espaciais e visuais, além de promover o raciocínio lógico e a compreensão de conceitos fundamentais.

O ensino das transformações geométricas sendo fundamental por várias razões, desempenha um papel essencial no currículo de matemática nas escolas em todo o mundo. Estudar transformações geométricas ajuda os estudantes a desenvolver habilidades visuais, espaciais e de percepção. Eles aprendem a visualizar objetos em diferentes posições e orientações no espaço, além de resolver problemas que requerem raciocínio lógico e habilidades de resolução de problemas. Isso ajuda os estudantes a desenvolver habilidades analíticas que são úteis em diversas áreas.

O estudo das transformações geométricas pode ajudar a contextualizar outros conceitos matemáticos, como trigonometria, coordenadas cartesianas e vetores. Isso ajuda os estudantes a ver a interconexão entre diferentes áreas da matemática, não apenas fortalece as habilidades matemáticas, mas também prepara para aplicar esses conhecimentos em diversas áreas do conhecimento, estimulando a criatividade e o pensamento analítico. Além disso, fornece uma base sólida para futuros estudos em campos relacionados à matemática, ciência e tecnologia.

Nesse contexto, uma trilha de aprendizagem foi projetada de forma a, com o objetivo de sua futura aplicação, envolver os estudantes em atividades práticas e interativas, que estimulam o pensamento crítico e a resolução de problemas. Além disso, o trabalho colaborativo entre professores teve um papel fundamental nesse processo, incentivando a troca de ideias, o debate e a construção coletiva da proposta.

Durante as atividades da trilha de aprendizagem, o grupo de trabalho colaborativo construiu uma proposta com diferentes tipos de transformações geométricas, como rotações, reflexões e translações e a homotetia. Eles puderam elaborar essas atividades que compõem a trilha de aprendizagem por meio de exemplos do cotidiano, jogos interativos, simulações computacionais do Geogebra e outras atividades práticas envolvendo imagens de objetos de arte de manifestação de artistas do próprio município, com o intuito de ajudar a consolidar o entendimento dos conceitos.

O ambiente colaborativo também permitiu que trabalhássemos juntos em atividades práticas, nos quais aplicássemos as transformações geométricas em situações do mundo real. Esse tipo de abordagem prática e contextualizada, surgiu a partir das diversas reflexões ao longo dos encontros colaborativos com os professores de matemática da escola campo da pesquisa, para ajudar a compreender a relevância e a aplicabilidade

das transformações geométricas no cotidiano dos estudantes.

Como resultado desse processo educacional inovador, os alunos não apenas adquiriram um entendimento sólido das transformações geométricas, mas também desenvolveram habilidades de trabalho em equipe, comunicação e pensamento criativo. Além disso, uma trilha de aprendizagem e o trabalho colaborativo desenvolvido para um ambiente de aprendizagem dinâmico e estimulante na escola estadual em Quipapá-PE, demonstrando o impacto positivo de abordagens pedagógicas inovadoras e colaborativas no processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, o ensino das transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem não apenas ajuda os estudantes a entender conceitos matemáticos complexos, mas também desenvolve habilidades cognitivas e prepará-los para aplicar esse conhecimento em diversas áreas da vida e do trabalho.



## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, José Joelson Pimentel de. **Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de matemática**. 2012. 257f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador 2012. Disponível em: [https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/jose\\_joelson.pdf](https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/jose_joelson.pdf). Acesso em: 3 mai 2023.
- BASTOS, R. **Transformações geométricas**. Grupo de trabalho de geometria da APM. Set/ 2021.
- CHIRÉIA, José Vagner. **Transformações geométricas e a simetria: uma proposta para o ensino médio**. Londrina, 2013. 89 f.
- FILIZZOLA, Pedro. O que são trilhas de aprendizagem? Aprenda a montar a sua! In: Blog sambatech, junho de 2021. Disponível em: <https://sambatech.com/blog/insights/trilhas-de-aprendizagem/>. Acesso em: 15 set. 2021.
- GUERREIRO, Antônio. Concepções e práticas na formação inicial de professores sobre transformações geométricas. **Revista Interações**, [S. l.], v. 15, n. 50, pp.23-45, 2019. DOI: 10.25755/int.18787. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/18787>. Acesso em: 4 mai. 2023.
- LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? A educação matemática em revista. Geometria. **Blumenau**, número 04, pp.03-13, 1995. Edição especial.
- MABUCHI, S. T. **Transformações Geométricas - A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. PUC – São Paulo, 2000. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11217>. Acesso em: 20 mai. 2021.
- SOUSA, Ivan Bezerra de. **Produção de significados a partir de investigações matemáticas: Função afim e contextos cotidianos**. 2018. 288f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande 2018. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3339>. Acesso em: 4 mai. 2023.
- TAFNER, E. P.; TOMELIN, J. F. E; MÜLLER, R. B. Trilhas de aprendizagem: uma nova concepção nos ambientes virtuais de aprendizagem – AVA. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 18. São Luís, 2012.
- WAGNER, E. **Construções geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.