



UEPB

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

ALEX ANTONIO DA SILVA

**O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DE UMA
TRILHA DE APRENDIZAGEM EM UMA ESCOLA ESTADUAL DO MUNICÍPIO
DE QUIPAPÁ-PE A PARTIR DE UM TRABALHO COLABORATIVO**

**CAMPINA GRANDE – PB
2023**

ALEX ANTONIO DA SILVA

**O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DE UMA
TRILHA DE APRENDIZAGEM EM UMA ESCOLA ESTADUAL DO MUNICÍPIO
DE QUIPAPÁ-PE A PARTIR DE UM TRABALHO COLABORATIVO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

**CAMPINA GRANDE – PB
2023**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586e Silva, Alex Antônio da.

O ensino de transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem em uma escola estadual do município de Quipapá - PE a partir de um trabalho colaborativo [manuscrito] / Alex Antônio da Silva. - 2023.

108 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida , Departamento de Matemática - CCT. "

1. Transformações geométricas. 2. Trilha de aprendizagem. 3. Trabalho colaborativo. 4. Processo educacional. I. Título

21. ed. CDD 372.7

ALEX ANTONIO DA SILVA

**O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DE UMA
TRILHA DE APRENDIZAGEM EM UMA ESCOLA ESTADUAL DO MUNICÍPIO
DE QUIPAPÁ-PE A PARTIR DE UM TRABALHO COLABORATIVO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

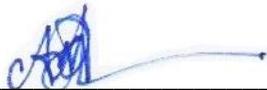
Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovada em: 22/11/2023

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (PPGECM-UEPB)



Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Profa. Dra. Sheila Valéria Pereira da Silva
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Aos meus pais, Antônio Cândido da Silva (*in memoriam*), Iraci Edna de Sales, pelos valiosos ensinamentos da vida, minha primeira formação. Aos meus irmãos, Evângela Maria, Angela Edna, Emanuel Antônio e Ailton Antônio, pelo incentivo e parceria. À minha querida esposa, Elaine da Silva, pelo companheirismo diário e incentivo. Ao meu amado filho, Álexys Anthony, minha maior inspiração.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois até aqui o Senhor me ajudou!

Aos meus pais, Antônio Cândido da Silva (*in memoriam*) e Iraci Edna de Sales, me passaram os ensinamentos mais valiosos que o ser humano pode receber, princípios e valores que proporcionam dignidade, mesmo nas ausências materiais básicas. Sou muito grato por serem os meus primeiros mestres.

Aos meus irmãos, Evângela Maria da Silva, Ângela Edna da Silva, Emanuel Antônio da Silva e Ailton Antônio da Silva, pelo incentivo e apoio.

Aos demais familiares, por acreditarem junto comigo na possibilidade deste sonho. Aos amigos, que se fazem sempre presentes na minha vida, motivando, compreendendo as ausências e contribuindo das mais variadas formas para a concretização desta pesquisa.

Aos colegas de trabalho, a senhora Aline Ruthênia de Siqueira, pelo incentivo e parceria; à assistente de gestão, pelas orações e motivação; a secretária da escola, pela ajuda e auxílio e disponibilidade na sua função; a Educadora de apoio e colega de função, como também minha professora e inspiradora no zelo e dedicação pela educação; à analista de gestão, que em vários momentos contribuiu com suas orações, orientações e parcerias; à coordenadora de biblioteca, pelo incentivo e oração; e por meio desses estendo meus agradecimentos a todos os professores e funcionários da escola.

Ao professor Dr. José Joelson Pimentel de Almeida que, com paciência e sabedoria, vem conduzindo as orientações de forma extraordinária e significativa, pois, nos momentos mais obscuros do processo, com suas palavras dóceis e sábias, nos tranquilizou e fortaleceu nossa caminhada, dando direcionamento que muitas vezes não conseguimos notar outras formas diferentes de caminhar. Queria poder expressar, nesse momento, por diversas formas de agradecimento por tudo que fez e vem fazendo como orientador, como pai acadêmico. Não sei ao certo como fazer isso através das palavras. Com isso deixo aqui, minha eterna gratidão!

Minha gratidão à professora Dr^a Sheila Valéria e ao professor Dr. Arlandson Matheus, pelo tempo dedicado a leitura do nosso trabalho, sempre com um olhar atento e generoso, proporcionando contribuições assertivas para amplitude da nossa pesquisa. Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pelo privilégio de conhecer os ilustres e renomados pesquisadores da educação matemática e receber formação acadêmica essencial para o meu desenvolvimento

na pesquisa. São nossos exemplos pela luta e resistência de uma educação de qualidade e para todos!

Agradeço gentilmente aos sujeitos participantes da pesquisa na referida escola, os colegas professores de matemática, que abraçaram a ideia e contribuíram, colaborativamente, para o alcance dos objetivos da nossa pesquisa. Minha admiração e respeito.

Aos colegas do Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de Pesquisa Político-Pedagógico (LEEMAT), pelos ensinamentos, partilhas, contribuições, parcerias, escuta, compreensão, por fazer do grupo um espaço de fortalecimento do pesquisador e da pesquisa, com ideais de identidade e finalidade do grupo e seus membros.

Farei que a minha instrução resplandeça como aurora, para que ilumine os lugares mais distantes. [...] Derramarei o ensinamento como profecia e o transmitirei para as gerações futuras. [...] Vejam: Não trabalhei apenas para mim, mas para todos os que procuram a sabedoria (Eclesiastes 24, 30-32).

RESUMO

A presente pesquisa constituiu em relacionar o ensino de transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem, construída através de um trabalho colaborativo entre os professores de matemática de uma escola estadual no município de Quipapá-PE. Uma abordagem inovadora para ensinar transformações geométricas, utilizando uma trilha de aprendizagem baseada em um trabalho colaborativo entre professores de matemática da escola campo de pesquisa. Nesse contexto, a trilha de aprendizagem foi projetada de forma a envolver os estudantes em atividades práticas e interativas, que estimulam o pensamento crítico e a resolução de problemas. Além disso, o trabalho colaborativo entre professores teve um papel fundamental nesse processo, incentivando a troca de ideias, o debate e a construção coletiva do conhecimento. O ensino de transformações geométricas é um tema crucial no ensino de matemática, pois ajuda os estudantes a desenvolverem habilidades espaciais e visuais, além de promover o raciocínio lógico e a compreensão de conceitos fundamentais. Durante a construção das atividades da trilha de aprendizagem, os professores puderam explorar essas transformações geométricas por meio de exemplos do cotidiano, jogos interativos, simulações computacionais e outras atividades práticas. Além disso, os professores foram encorajados a criar problemas relacionados às transformações geométricas, com o intuito de consolidar o entendimento dos conceitos. Esse tipo de abordagem prática e contextualizada ajudou os estudantes a compreenderem a relevância e a aplicabilidade das transformações geométricas em suas vidas diárias. Como resultado desse processo educacional inovador, os alunos não apenas adquiriram um entendimento sólido das transformações geométricas, mas, também, desenvolveram habilidades de trabalho em equipe, comunicação e pensamento criativo. Além disso, a trilha de aprendizagem e o trabalho colaborativo desenvolvido para um ambiente de aprendizagem dinâmico e estimulante na escola estadual em Quipapá-PE, demonstra o impacto positivo de abordagens pedagógicas inovadoras e colaborativas no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: transformações geométricas; trilha de aprendizagem; trabalho colaborativo; processo educacional.

ABSTRACT

The present research consisted of relating the teaching of geometric transformations through a learning trail, built through collaborative work between mathematics teachers at a state school in the municipality of Quipapá-PE. An innovative approach to teaching geometric transformations, using a learning path based on collaborative work between school mathematics teachers in the research field. In this context, the learning path was designed to involve students in practical and interactive activities, which encourage critical thinking and problem solving. Furthermore, collaborative work between teachers played a fundamental role in this process, encouraging the exchange of ideas, debate and the collective construction of knowledge. Teaching geometric transformations is a crucial topic in mathematics teaching, as it helps students develop spatial and visual skills, in addition to promoting logical reasoning and understanding fundamental concepts. During the construction of the learning trail activities, teachers were able to explore these geometric transformations through everyday examples, interactive games, computer simulations and other practical activities. Furthermore, teachers were encouraged to create problems related to geometric transformations, in order to consolidate their understanding of the concepts. This type of practical and contextualized approach helped students understand the relevance and applicability of geometric transformations in their daily lives. As a result of this innovative educational process, students not only gained a solid understanding of geometric transformations, but also developed teamwork, communication and creative thinking skills. Furthermore, the learning trail and collaborative work developed for a dynamic and stimulating learning environment at the state school in Quipapá-PE, demonstrates the positive impact of innovative and collaborative pedagogical approaches in the teaching and learning process.

Keywords: geometric transformations; learning trail; collaborative work; educational process.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Primeiro encontro colaborativa com os professores de matemática da escola campode pesquisa.....	21
Figura 2 –	Três Mundos, Litografia, 1955.....	26
Figura 3 –	Metamorfose 1, Xilogravura, 1937.....	27
Figura 4 –	Passarinhandando – Aves de Escher.....	30
Figura 5 –	Jogo Americano <i>Sousplat</i>	31
Figura 6 –	Casaco de crochê.....	32
Figura 7 –	Varal de Fotos.....	33
Figura 8 –	Kit Tábuas de Frios.....	34
Figura 9 –	Foxicos de tecido: Replicação de figuras em formato de flores por meio de Rotação e Reflexão.....	35
Figura 10 –	Isometria do polígono ABCDEF em um polígono A'B'C'D'E'F'.....	38
Figura 11 –	Translação, transporte do quadrilátero ABCD em um quadrilátero A'B'C'D'.....	38
Figura 12 –	Reflexão Eixo central do plano, transforma a imagem do quadrilátero ABCD em quadrilátero A'B'C'D'.....	39
Figura 13 –	Rotação de centro D, transforma o hexágono ABCDEF em um hexágono A'B'C'D'E'F'.....	40
Figura 14 –	Homotetia do hexágono ABCDEF transformando-o em figuras semelhantes.....	41
Figura 15 –	Diagrama representativo sobre os níveis de compreensão do modelo de Van Hiele.....	47

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C	Antes de Cristo
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEP	Código de Endereçamento Postal
CPE	Currículo de Pernambuco
EMEJA	Ensino Médio de Educação de Jovens e Adultos
ESI	Ensino Médio Integral
LEEMAT	Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de Pesquisa Político-Pedagógico
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
NEM	Novo Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPE	Produto ou Processo Educacional
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Cronograma dos Encontros Colaborativos.....	18
Quadro 2 – Mapa Mental descrição das principais ideias da pesquisa.....	24
Quadro 3 – Organograma das Transformação Geométrica.....	37
Quadro 4 – Teses e dissertações.....	52
Quadro 5 – Sinótico de estudantes matriculados no Novo Ensino Médio - NEM – ano letivo: 2022.....	55
Quadro 6 – Sinótico de estudantes matriculados no Ensino Médio Semi-Integral – ano letivo: 2022.....	56
Quadro 7 – Sinótico de estudantes matriculados na EMEJA – ano letivo: 2022.....	56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Problemática	15
1.2	Justificativa	15
1.3	Delimitação do objeto de estudo	17
1.4	Objetivos	17
1.5	Idealização do produto educacional	16
1.6	Organograma da dissertação	21
2	O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	24
2.1	Contexto Histórico	25
2.2	O Ensino de Transformações Geométricas pelo mundo	27
2.3	O Ensino de Transformações Geométricas no Brasil	29
2.4	As Transformações Geométricas em diversos contextos artísticos	29
2.5	Transformações Geométricas: Conceitos e Propriedades	36
2.5.1	<i>Isometria de Reflexão</i>	39
2.5.2	<i>Isometria de Rotação</i>	39
2.5.3	<i>Breve Estudo sobre Semelhança</i>	40
3	TRILHA DE APRENDIZAGEM	43
3.1	Abordagem inicial sobre a Metodologia de Ensino Trilha de Aprendizagem	43
3.2	A Metodologia de Ensino Trilha de Aprendizagem construída a partir de um Trabalho Colaborativo	44
3.3	A Trilha de Aprendizagem na Perspectiva da Teoria de Van Hiele	46
3.4	Produzindo significados por meio de uma trilha de aprendizagem no ensino das transformações geométricas	49
4	PERCURSO METODOLÓGICO DA INVESTIGAÇÃO	51
4.1	Fundamentos teórico-metodológicos	51
4.2	Escola Campo da Pesquisa	53
4.3	Análises epistemológica, didática e cognitiva	56
4.4	Análise a priori de experiências	58
5	CONSIDERAÇÕES E REFLEXÕES FINAIS	59
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61

1 INTRODUÇÃO

Se, na verdade, não estou no mundo para simplesmente a ele me adaptar, mas para transformá-lo; se não é possível mudá-lo sem um certo sonho ou projeto de mundo, devo usar toda possibilidade que tenha para não apenas falar de minha utopia, mas participar de práticas com ela coerentes (Freire, 2000, p.33).

Diversas pesquisas ao longo dos últimos anos estão sendo realizadas com finalidade de investigar e produzir ferramentas educacionais sobre processos de ensino e de aprendizagem da geometria das transformações. Desde as propostas curriculares da década de 1970, quando surge o Movimento da Matemática Moderna, são apresentadas como uma área interessante e rica para orientar os diversos estudos das transformações geométricas, ainda pouco conhecidas, e conseqüentemente, pouco ensinadas.

Assim, apresentamos esta pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática, intitulada “O ensino de transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem em uma escola estadual do município de Quipapá-PE, a partir de um trabalho colaborativo”, inserida na linha de pesquisa “Formação de professores e construção de práticas docentes no ensino de Ciências e Matemática”, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM/UEPB), com a finalidade de apresentar a relação no ensino de Transformações Geométricas por meio de Trilha de Aprendizagem. Saliento a valiosa importância do grupo de pesquisa político pedagógico leitura e escrita em educação matemática – LEEMAT, durante todo o processo de construção e organização da pesquisa. O grupo de pesquisa sempre foi um ambiente para colaboração e compartilhamento de ideias, conhecimento e experiências gerando conexões mais amplas entre seus membros no intuito de oportunizar o desenvolvimento de habilidades necessárias em cada etapa que da pesquisa. Recebemos pontuais contribuições, de cada membro, referente a leituras para complementação da fundamentação teórica, sugestões de procedimentos metodológicos, além de indicações de escrita e estruturas na produção textual. Cada uma dessas contribuições foram bemacompanhadas e direcionadas pelo nosso líder do grupo de pesquisa e orientador, professor Dr. José Joelson Pimentel de Almeida. Além do mais que a filosofia do grupo de pesquisa é baseada na filosofia Bakhtiniana, com ênfase na leitura e escrita na educação matemática a favor de uma educação transformadora e de qualidade.

Dessa forma, agregando as contribuições do grupo de pesquisa e os direcionamentos do orientador, focamos no nosso interesse de observar os indícios de (re)construção do

pensamento geométrico relacionados às transformações geométricas ensinadas propondo por meio de uma trilha de aprendizagem, que proporcione ao estudante exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas e de maneira colaborativa.

O procedimento de desenvolvimento desta pesquisa tem em sua essência, explorar o espírito investigativo do estudante e sua participação em grupo, com problemas provocadores e intrigantes, que desenvolvem o raciocínio lógico (o pensar), o espírito investigativo (conjecturar, produzir hipóteses), e a capacidade de construir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo, de maneira autônoma.

1.1 Problemática

Ao abordar essa temática, buscamos responder a seguinte questão norteadora: Como a Trilha de Aprendizagem se relaciona com o ensino das transformações geométricas no ensino médio? Como ocorre o ensino das transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem com estudantes do ensino médio?

A partir desse norte, produzimos um recurso pedagógico para auxiliar professor e o estudante no processo de ensino, tendo como objeto matemático a geometria, e que provoque novas descobertas, e ainda possibilite o estudante aperfeiçoar seus conhecimentos prévios, em direção a um conhecimento mais formal, sólido, gerando uma aprendizagem exitosa.

1.2 Justificativa

A inclusão das Transformações Geométricas no estudo de conceitos geométricos vem sendo abordada por orientações curriculares tanto no Brasil como em outros países. As isometrias, transformações geométricas que preservam distâncias, e as homotetias, transformações geométricas que preservam o paralelismo e a razão entre segmentos correspondentes, permitem dar um tratamento geral à noção de congruência e semelhança e fornecem um novo método para resolver certas classes de problemas geométricos.

Desse modo, as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas

também para a compreensão destas propriedades. As transformações geométricas se apresentam como um processo/metodologia de ensino de geometria, com uma abordagem dinâmica e formalidade acessível para compreensão e posterior aplicação.

Sendo assim, esta proposta de pesquisa tem duas vertentes teóricas, uma direcionada ao objeto matemático transformações geométricas, visto que para investigarmos a construção de um conteúdo matemático é preciso descrever os aspectos relevantes do mesmo, sua evolução histórica, inclusão no currículo, formular hipóteses sobre possíveis dificuldades do seu ensino e da aprendizagem. A outra vertente está voltada para a trilha de aprendizagem, como um recurso metodológico, com o propósito de buscar impulsionar os estudantes a desenvolver a capacidade de se envolver efetivamente em um processo pelo qual dois ou mais agentes buscam resolver um problema compartilhando a compreensão e o esforço necessário para chegar a uma solução, reunindo seus conhecimentos, habilidades e competências cognitivas. Agregando esse recurso metodológico, em meio à aprendizagem, onde os estudantes, de forma integrada, colaborativa e autêntica, constroem com propriedade e relevância uma experiência de aprendizagem duradoura.

No ensino de matemática, com ênfase em geometria, por meio da resolução colaborativa de problemas, as aulas são iniciadas utilizando situações que não possuem respostas prontas e imediatas, e que não necessariamente precisam ser muito sofisticadas, para não se constituir em um obstáculo para os estudantes.

Segundo Azevedo (2006, p.19), “as atividades investigativas na busca de resolução de problemas, um recurso importante para o desenvolvimento de habilidades e capacidades, como: raciocínio lógico, argumentação, ação e astúcia”. A resolução colaborativa de problemas tem inúmeras vantagens em relação à resolução individual, em razão da soma de conhecimentos, perspectivas e experiências dos envolvidos. Também se pode destacar a importância da competência para o mercado de trabalho e para a vida em sociedade como um todo, já que inúmeras atividades são feitas em grupo.

Nesse sentido, a resolução colaborativa de problemas se torna adequada para a construção do conhecimento, pois, para resolver uma determinada situação-problema os estudantes precisam organizar as ideias iniciais para clarificar e identificar quais conceitos matemáticos serão utilizados, assim como traçar e testar as estratégias para solucioná-la, sempre monitorando cada etapa da ação.

A intenção em utilizar a resolução colaborativa de problemas em sala de aula é “levar os estudantes a pensar, debater, justificar suas ideias coletivamente e aplicar seus conhecimentos em situações novas, usando os conhecimentos teóricos e matemáticos”

(Azevedo, 2006, p.20). As atividades matemáticas investigativas baseadas na resolução de problemas de forma coletiva por si só não influenciam a aprendizagem do aluno, se faz necessário a mediação pedagógica, e um conjunto de procedimentos e recursos educacionais para a efetivação da conexão dessas duas vertentes, a trilha de aprendizagem no ensino das transformações geométricas, é uma delas.

1.3 Delimitação do objeto de estudo

Para delimitar nossa pesquisa, buscamos identificar, analisar e compreender a relação no processo de ensino das transformações geométricas por meio da metodologia de ensino trilha de aprendizagem.

1.4 Objetivos

Objetivo Geral

O objetivo dessa pesquisa é desenvolver um processo de ensino das transformações geométricas, por meio de uma trilha de aprendizagem em uma escola de ensino médio do município de Quipapá-PE, a partir de um trabalho colaborativo.

Objetivos Específicos

- a) Analisar como se relaciona o ensino das transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem;
- b) Evidenciar as transformações geométricas como um campo rico de conexões entre diversas áreas do conhecimento;
- c) Externar as contribuições do ensino das transformações geométricas, por meio de uma trilha de aprendizagem para a formação/desenvolvimento dos professores.

1.5 Idealização do produto educacional

O produto ou processo educacional (PPE) da pesquisa, busca apresentar a essência do nosso objeto investigativo, motivado pela problemática da pesquisa, e que se deu a partir de indagações e reflexões ao processo de ensino das transformações geométricas nas aulas de matemática e na compreensão de se ter uma metodologia de ensino que produza significados e potencialize o conhecimento matemático específico, materializando-o em atividades

desafiadoras agregado ao cotidiano do estudante. Sendo assim, apresentamos a trilha de aprendizagem como metodologia de ensino com o intuito de contribuir para a aprendizagem dos conceitos e propriedades mais elementares das transformações geométricas.

Para tanto, todo processo de construção e validação se dá através de um trabalho colaborativo com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, com encontros programados a partir do cronograma descrito no quadro abaixo, que especifica data, temática, seguindo uma pauta específica para cada encontro e uma das imagens registradas em um dos encontros.

Quadro 1 – Cronograma dos Encontros Colaborativos

Data	Duração do encontro	Temática	Local / Público
11/10/2022	2 horas	Apresentação do projeto, estudo sobre o texto de Ana Cristina Ferreira, sobre trabalho colaborativo e organização da pauta e temática dos próximos encontros.	Biblioteca da escola com a participação dos professores com formação e que ensinam matemática.
25/10/2022	2 horas	Estudo sobre o ensino das transformações geométricas no ensino médio.	Biblioteca da escola com a participação dos professores com formação e que ensinam matemática.
08/11/2022	1 hora	Estudo sobre a metodologia de ensino Trilha de Aprendizagem e estudo sobre a Teoria de Van Hiele.	Biblioteca da escola com a participação dos professores com formação e que ensinam matemática.
14/02/2023	2 horas	Oficina de construção das atividades/desafios sobre as transformações geométricas para a trilha de aprendizagem.	Biblioteca da escola com a participação dos professores com formação e que ensinam matemática.

28/02/2023	2 horas	Análise dos dados e sua validação.	Biblioteca da escola com a participação dos professores com formação e que ensinam matemática.
------------	---------	------------------------------------	--

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Os encontros colaborativos com professores de matemática da escola campo de pesquisa são uma parte vital do desenvolvimento educacional. Nesses encontros, foi proporcionado oportunidades para compartilhar conhecimento, discutir estratégias de ensino, analisar dados, identificar desafios e explorar soluções inovadoras. Aqui está uma descrição geral dos encontros colaborativos com os professores de matemática:

- 1 **Propósito e Objetivos:** Os encontros colaborativos tiveram o propósito principal de aprimorar o ensino da matemática, em particular o ensino das transformações geométricas. A maneira como se desenvolvia os encontros, conteve na sua maioria das pautas, a revisão e alinhamento do ensino de transformações geométricas a partir dos documentos oficiais, a criação de materiais de ensino, o desenvolvimento de estratégias de ensino, a análise de resultados de avaliações e a resolução de desafios específicos ao objeto matemático em discussão.
- 2 **Frequência:** A frequência dos encontros sofreu algumas variações, dependendo das necessidades da escola e dos professores, pois os dias dos encontros coincidiam com os momentos formativos da Gerência Regional de Educação e/ou atividades e eventos da agenda pedagógica da escola, fazendo com que ocorresse um reagendamento.
- 3 **Formato:** Os encontros ocorreram na sua maior parte, presencialmente com algumas atividades propostas para serem estudadas em casa e retomadas nos encontros posteriores.
- 4 **Colaboração e Compartilhamento:** Durante os encontros, os professores tiveram a oportunidade de compartilhar suas experiências, ideias, materiais e práticas de ensino bem-sucedidas. Isso promoveu a colaboração e o aprendizado mútuo.
- 5 **Discussões Pedagógicas:** Uma parte significativa dos encontros foi dedicada a discussões pedagógicas, nas quais os professores analisaram abordagens de ensino,

estratégias de aprendizagem, desafios dos estudantes e métodos de avaliação e os fatores que impactam nessas dimensões pedagógicas.

- 6 **Desenvolvimento Profissional:** Os encontros colaborativos foram oportunidades para o desenvolvimento profissional dos professores. Eles puderam discutir novas abordagens, estratégias e recursos para melhorar a qualidade do ensino das transformações geométricas.
- 7 **Planejamento Conjunto:** Os professores frequentemente colaboraram para planejar sequências didáticas e atividades que estivessem alinhadas às necessidades específicas dos estudantes.
- 8 **Avaliação e *Feedback*:** Os encontros também puderam incluir momentos de avaliação e feedback construtivo. Os professores analisaram o impacto de suas práticas e propuseram fazer ajustes com base em evidências e resultados.
- 9 **Resolução de Problemas:** Os encontros colaborativos foram espaços para a identificação e discussão de problemas e desafios que os professores enfrentam no ensino da matemática, com ênfase no ensino das transformações geométricas. Isso pôde levar à soluções conjuntas e inovadoras.
- 10 **Foco no Aluno:** O principal objetivo dos encontros foi melhorar o aprendizado dos alunos. Os professores trabalharam juntos para encontrar maneiras de tornar a matemática mais acessível, envolvente e significativa para os estudantes.

Os encontros colaborativos como esses não apenas melhoram as práticas de ensino dos professores, mas também criam uma comunidade de aprendizado sólida, beneficiando tanto os educadores quanto os estudantes. Eles promovem a inovação, resolução de problemas e um ambiente de ensino mais eficaz e envolvente.

Esses encontros aconteceram dentro do quadro de horário de aula de estudo e formação dos professores de matemática da rede estadual de educação de Pernambuco. Nesses encontros, aos quais foram chamados de encontros colaborativos, os participantes refletiram sobre pontos temáticos, oriundos do tema de pesquisa e que conceitos proporcionam a estruturação do produto educacional da pesquisa. O produto educacional, atrelado a dissertação, foi construído em forma de uma trilha de aprendizagem, contendo níveis de conhecimento, organizado a partir dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, com o intuito de conhecer e consolidar o conhecimento do estudante trilheiro.

Figura 1 – Primeiro encontro colaborativa com os professores de matemática da escola campo de pesquisa



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

A trilha é composta por cinco níveis de conhecimento sobre as propriedades e conceitos das transformações geométricas e, em cada nível, são apresentadas atividades ou desafios por etapas que buscam produzir ou comprovar o conhecimento sobre o objeto matemático em estudo. Ao longo do percurso, foram apresentados, antes e depois das respostas do estudante trilheiro, comentários, orientações e mensagens motivacionais que contribuíram para uma melhor participação do estudante. A trilha contém variadas formas de recursos, como imagens, textos, quadros, tabelas e mídias audiovisuais, como também instrumentos manipuláveis que proporcionaram significados para uma melhor compreensão do objeto matemático em estudo.

1.6 Organograma da Dissertação

A dissertação está estruturada em cinco capítulos que tratam das etapas da pesquisa e que dialogam sobre o objeto matemático (as transformações geométricas), e o objeto metodológico de ensino que é a trilha de aprendizagem, na perspectiva de se perceber a relação de ensino entre essas duas vertentes, e o quanto são cheios de potencialidades para

produzir significados que dialogam com o cotidiano do estudante.

No primeiro capítulo apresentamos um cenário que vislumbra as mudanças de ensino da matemática, a partir do Movimento da Matemática Moderna, gerado pelo anseio de ruptura de como era o ensino da matemática até então. Analisando essas mudanças apontadas e previstas nos documentos orientadores curriculares, buscando compreender melhor o ensino das transformações geométricas, a partir de observações, reflexões e experiências na sala de aula, considerando a problemática da pesquisa, traçamos os objetivos a serem alcançados ao fim do processo investigativo, produzindo um material de apoio ao processo de ensino relativo ao objeto matemático pesquisado.

No segundo capítulo, apresentamos reflexões, embasadas por pesquisadores que investigam as transformações geométricas, em seu contexto histórico, diversas atuações de aplicabilidade, percorrendo um caminho analítico sobre o ensino em diferentes países, apresentando as dificuldades e avanços no âmbito escolar, e, em seguida, buscamos compreender os aspectos de ensino no Brasil e o que orientam os documentos curriculares.

Ainda nesse capítulo, fizemos uma rápida apresentação da relação do ensino das transformações geométricas por meio de obras artísticas, apresentando algumas obras, principalmente de artistas do município que, no seu fazer artístico, utilizam os conceitos e propriedades da geometria nas suas expressões. Ao final do capítulo, buscamos apresentar, de maneira mais específica, os conceitos e propriedades das transformações geométricas.

Já no capítulo três, apresentamos justificativas sobre a importância da metodologia de ensino denominada Trilha de Aprendizagem. Através de uma abordagem inicial, apresentamos algumas definições e características da trilha de aprendizagem e suas finalidades no processo de ensino e formação dos estudantes. Ainda no mesmo capítulo, apresentamos uma breve discussão sobre o formato da trilha, como sua construção, que na nossa proposta se dá através de um processo colaborativo em que os professores de matemática, em encontros agendados, conversam e refletem sobre o ensino das transformações geométricas e seus procedimentos de ensino, apresentando propostas que venham contribuir para a prática de ensino desses professores, a partir de elaborações de metodologias e procedimentos. Nessa construção, todos os participantes desses encontros apresentaram suas contribuições e, de maneira colaborativa, geraram procedimentos e recursos para a prática de ensino de matemática, em nosso caso, voltado às transformações geométricas.

Na sequência deste capítulo, trazemos para a discussão a teoria de Van Hiele, na perspectiva de fundamentação teórica na elaboração e aplicação da trilha de aprendizagem, contemplando os níveis e etapas de conhecimento abordados ao longo da trilha, sobre os

conceitos e propriedades das transformações geométricas, a partir das orientações que os documentos curriculares propõem como expectativas de aprendizagem.

O nosso percurso metodológico é apresentado no quarto capítulo, com uma breve apresentação da metodologia a ser aplicada. Em seguida, trazemos uma descrição detalhada da escola campo de pesquisa, através de uma análise do perfil da escola que engloba a sua cultura organizacional, de gestão pedagógica e financeira, quadro de funcionários, espaço físico, recursos humanos e materiais e os principais indicadores que pautam as dimensões da escola.

No subcapítulo “instrumentos de investigação” do capítulo 4, detalhamos os instrumentos utilizados na metodologia da pesquisa e suas etapas investigativas, justificando suas aplicações para análise e validação dos dados para o alcance dos objetivos da pesquisa. Apresentando algumas percepções trazidas por cada instrumento aplicado e etapa percorrida, seguidas de considerações reflexivas e apontamentos sobre o que conseguimos detectar.

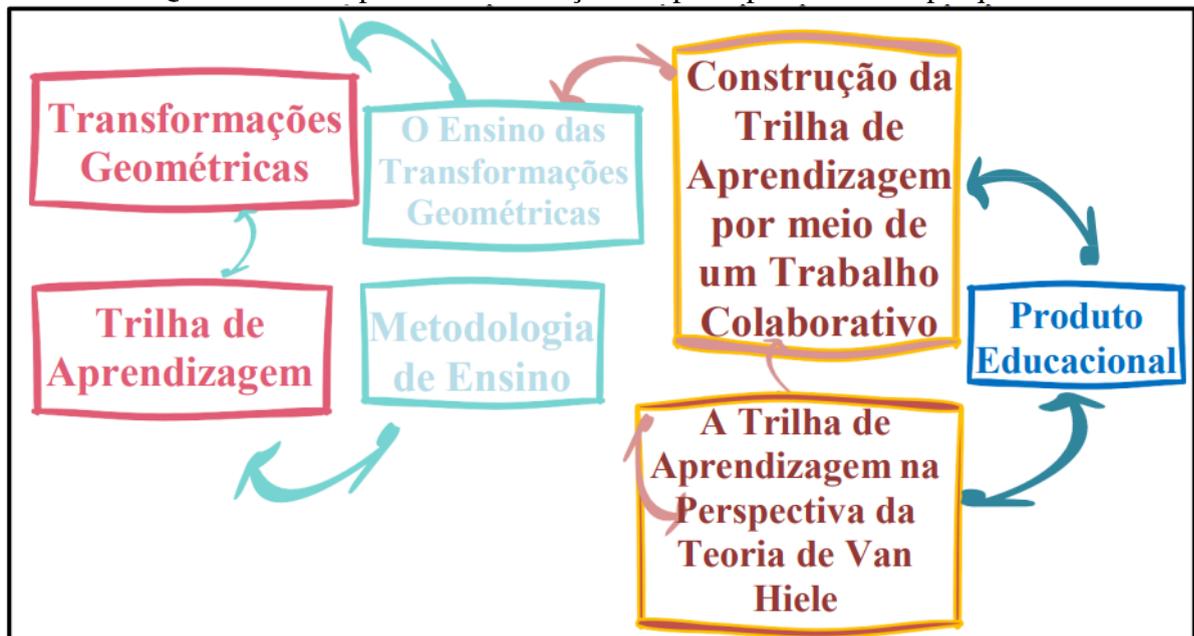
Por fim, em nossas considerações finais, pontuamos as nossas descobertas e conquistas durante todo o processo da pesquisa, apresentando, como resultado de toda a ação investigativa, nosso produto educacional, contribuindo com a academia e disponibilizando, como material de apoio pedagógico sobre as transformações geométricas, a trilha de aprendizagem.

2 O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la” (Kepler, 2006, p.23).

Este capítulo foi construído através de uma revisão da literatura com o intuito de um melhor embasamento teórico sobre cada tópico apresentado, em que há um diálogo constante entre as vertentes que identificamos no objeto de pesquisa. Inicialmente, buscamos abordar o contexto histórico do ensino das transformações geométricas, suas abordagens metodológicas em diversos países, inclusive no Brasil, como também algumas obras artísticas de âmbito internacional e local, que apresentam traços que retratam propriedades geométricas relativas as suas transformações. Também apresentamos os principais conceitos e propriedades elementares do objeto matemático, relacionando-os com a metodologia de ensino trilha de aprendizagem.

Quadro 2 – Mapa Mental descrição das principais ideias da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Nesse processo de fundamentação teórica, apresentaremos abordagens oriundas de algumas dissertações e teses que trazem para o debate as nossas vertentes de interesse da pesquisa, sendo elas, o ensino das transformações geométricas, como um dos conteúdos/elementos de ensino da geometria e suas interfaces; a trilha de aprendizagem, como um instrumento de ensino-aprendizagem, proporcionando um aprender voltado para as habilidades e competências específicas, nesse caso, para o objeto do conhecimento, as

transformações geométricas. Ainda ao longo do capítulo, discutimos sobre o trabalho colaborativo como processo metodológico na coleta de dados, para ser realizado nos encontros entre os professores de matemática da escola campo de pesquisa, direcionada pelos instrumentos e etapas previstas, como subsídio de aplicação e validação dos instrumentos adotados. Trazemos para a base teórica da pesquisa, a teoria de Van Hiele para auxílio teórico no processo de análise e construção dos desafios e problemas que irão compor a trilha de aprendizagem.

Para uma melhor sintetização sobre nosso objeto de pesquisa, apresentamos um breve relato histórico sobre os primeiros registros envolvendo as primitivas concepções das transformações geométricas; seu contexto de ensino em algumas redes de educação internacional e nacional, como uma maneira de buscar aproximações do seu ensino; sua relação com a arte, a partir de obras de artistas internacionalmente conhecidos, e a arte de artistas da localidade onde a pesquisa de campo acontece. Em seguida, finalizando o capítulo, apresentamos os conceitos e propriedades das transformações geométricas, as quais são de interesse como objeto matemático da pesquisa, exemplificando por meio da descrição das definições formais e ilustrando com as imagens, construídas por meio de software de geometria dinâmica.

2.1 Contexto Histórico

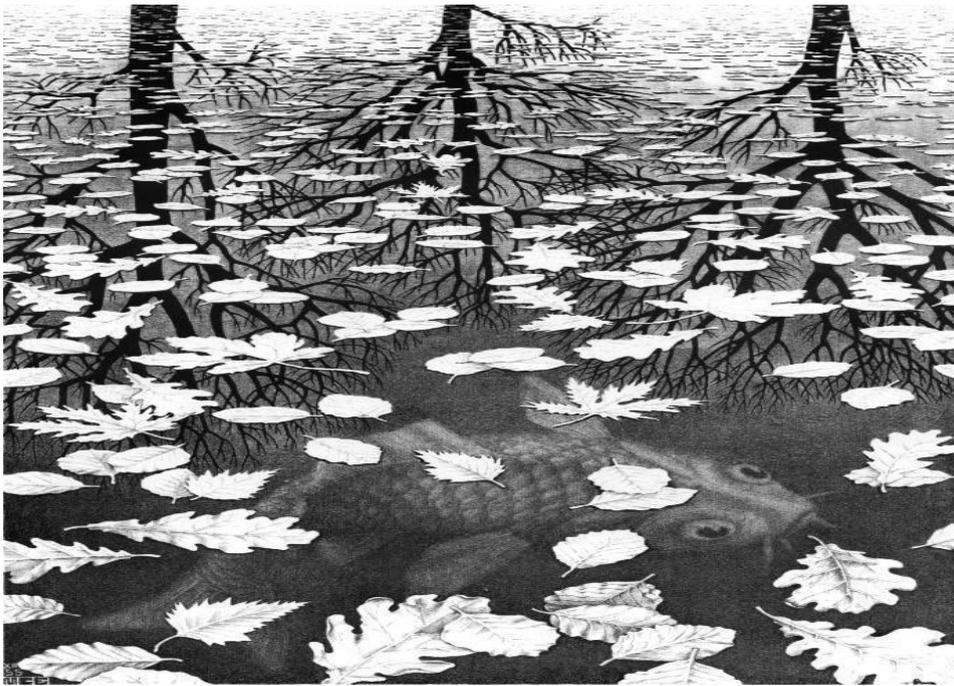
No período Neolítico, próximo a 3000 a.C., são encontrados os primeiros registros da utilização das transformações geométricas pelos povos egípcios e gregos, mesmo que de maneira inconsciente, traços de diversas manifestações que retratavam o cotidiano desses povos antigos.

A concepção histórica da matemática retrata diversas mudanças de paradigmas, desde sua primitiva compreensão, produzidas empiricamente pelas antigas civilizações, percorrendo os tempos em que se observa e busca dar um trato formal nos conceitos sobre o que versa o conhecimento matemático, chegando aos nossos tempos em que estritamente é apresentado e permanece constantemente em inteiramente evolução.

Em Constantinopla foram encontrados traços que remetem às propriedades das transformações geométricas em obras artísticas da época do Renascimento. Ainda, e de uma época mais recente, podemos mencionar as obras do artista plástico Maurits Cornelis Escher, que apresenta traços marcantes e específicos das transformações geométricas, através da conservação dos conceitos e suas propriedades. Escher é considerado um dos maiores

representantes do uso das transformações geométricas em obras de arte, sendo o pioneiro, que combinava as transformações geométricas e a arte para representar sua visão de mundo. A seguir podemos notar essa expressividade, através de algumas das suas obras abaixo.

Figura 2 – Três Mundos, Litografia, 1955



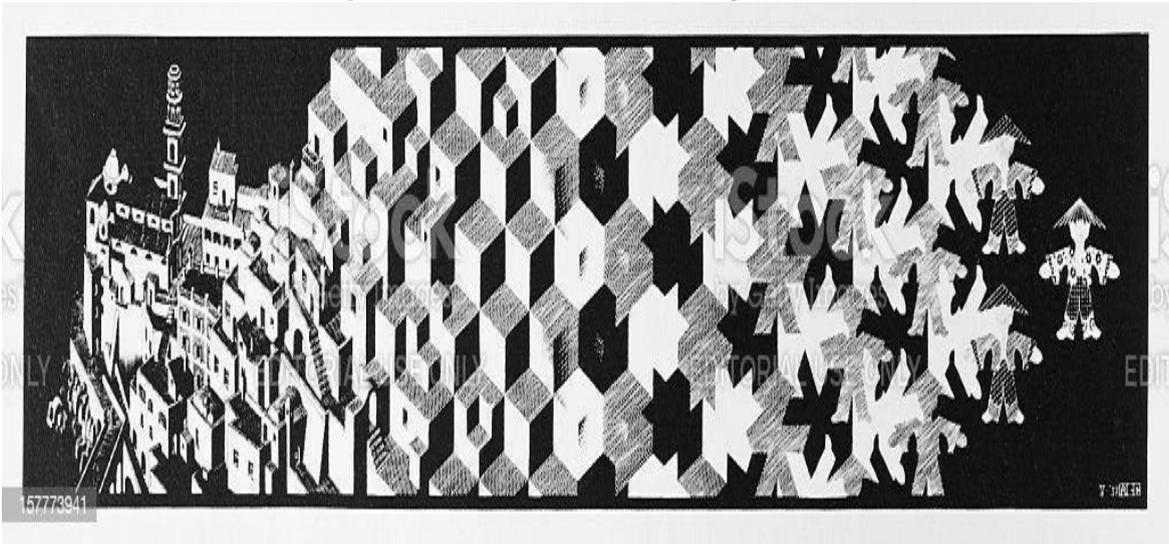
Fonte: Wahooart¹.

Através da sua arte, o artista holandês, Escher, imprime traços ideológicos de visão de mundo e seu olhar sobre diferentes perspectivas. E assim, durante um longo período, a preocupação do ensino da matemática, em especial, a da geometria, perpassa por diversas mudanças em cada marco histórico da educação matemática. No período que compreende o Movimento da Matemática Moderna, se percebe o anseio da academia sobre mudanças rigorosas nos documentos orientadores do ensino de matemática no Brasil.

Assim, foi possível se pensar e pôr em prática a construção curricular, na qual a geometria se tornaria um campo de grande importância na compreensão e disseminação do conhecimento sobre o mundo.

¹ Ver em: <https://pt.wahooart.com/@/5ZKD77-Maurits-Cornelis-Escher-tr%C3%AAs-mundos-,1955>.

Figura 3 – Metamorfose 1, Xilogravura, 1937



Fonte: Hiperbook².

Dessa forma, o ensino da matemática permitiria a interdisciplinaridade, possibilitando relações de conhecimentos entre diversas áreas e suas aplicabilidades em situações de diversos contextos sociais. Com essa abertura, os traços puramente matemáticos começam a ser vistos em campos de diversas ciências como suporte na aplicação e compreensão de problemas específicos dessas áreas do conhecimento. Podemos notar essa relação na arte com as obras de Escher, em que busca se expressar utilizando recursos envolvendo matemáticos, por meio de formas geométricas, da reprodução de padrões, distorções das formas como uma maneira de comunicar as mudanças pelo seu mundo imaginário.

Por fim, todo esse início contribuiu para o conhecimento sobre as transformações geométricas, e, que atualmente, se apresenta como um campo rico de possibilidades de descrição e compreensão do mundo.

2.2 O Ensino das Transformações Geométricas pelo mundo

De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), o Conselho Nacional de Professores de Matemática, comissão de normatização dos Estados Unidos, no documento *curriculum and evaluation standards for school mathematics*, que estabelece um ensino das transformações por etapas e níveis de escolaridade, em que o estudante tenha contato de maneira lúdica, manipulando materiais, a partir de experiências reais, envolvendo os conceitos e propriedades das transformações geométricas, seguindo procedimentos (etapas)

² Ver em: http://www.avaad.ufsc.br/moodle/mod/hiperbook/popup.php?id=1163&target_navigation_chapter=2006&groupid=

em que se apresenta por meio de abstrações, para que, em seguida, possa produzir modelos matemáticos e, posteriormente, ter um contato mais amplo e profundo com a resolução de problemas.

Sendo assim, como essa possibilidade para o ensino de geometria, ser apresentado com essa característica pedagógica, segundo a comissão de normatização dos Estados Unidos, provoque uma profunda mudança, fazendo com que a geometria deixasse de ser um campo mais estático para se tornar mais dinâmico, a partir de aplicações ao mundo real. Dessa forma, o currículo estadunidense propõe um ensino pautado no fazer, no aplicar e deixando de lado a concepção de ensinar para o “conhecer”, para o “saber”, sem nenhum aspecto prático do objeto estudado.

Já os documentos curriculares da Espanha, a partir de sua reformulação na década de 1980, segundo Mabuchi (2000),

[...] propõem metodologias inovadoras, desenvolvidas nos cursos de graduação com o intuito de uma prática educativa pautada em uma aprendizagem construtivista, agregando os conhecimentos prévios do estudante e relacionando com métodos mais concretos e de fácil compreensão (Mabuchi, 2000, pp.89-92).

A proposta é que as abordagens em sala de aula aproxime o conhecimento já adquirido com situações que possa produzir significados para o cotidiano do estudante.

Na França, as transformações geométricas foram trazidas para o currículo em 1925, através de uma resolução do ministério da educação francês que recomendava como um procedimento fundamental para uma melhor compreensão da geometria. Assim, as transformações geométricas apresentam algumas vantagens, na dimensão didático-pedagógica para o ensino de matemática. Para a dimensão didático-matemático, pode-se perceber como vantagem a transformação geométrica como uma ferramenta atuante aos aspectos puramente geométricos, além de produzir modelos concretos de sua aplicação real. Já no aspecto pedagógico, se pode notar uma ação mais direta do estudante no processo de escolha e aplicação das ferramentas geométricas em transformações.

Conhecendo um pouco do contexto do ensino das transformações em alguns países, percebemos que as rupturas oriundas de uma proposta de mudança de paradigma, relativamente ao ensino da geometria, na qual se apresentava como uma mera conceituação de procedimentos geométricos, passando para um campo meramente prático nas mais diversas formas e abordagens, trazidas pela transformação de figuras geométricas, com o intuito de aproximar e mobilizar conhecimentos espaciais.

2.3 O Ensino das Transformações Geométricas no Brasil

A inclusão das transformações geométricas no estudo de conceitos geométricos vem sendo enfatizada por orientações curriculares tanto no Brasil como em outros países. As isometrias, transformações geométricas que preservam distâncias, e as homotéticas, transformações geométricas que preservam o paralelismo e a razão entre segmentos correspondentes, permitem dar um tratamento mais geral à noção de congruência e semelhança e fornecem um novo método para resolver certas classes de problemas geométricos.

Desse modo, segundo Mabuchi (2000, p.99) “[...] as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas”. Nos anos de 1997 e 1998 novas recomendações curriculares surgiram, orientando e reformulando os livros didáticos, uma abordagem das transformações geométricas mais próximas e adequadas à realidade na qual o professor e estudante possam se aprofundar e sanar certas lacunas sobre o objeto matemático.

2.4 As Transformações Geométricas em diversos contextos artísticos

As transformações geométricas, suas propriedades e variações de representações, estão presentes em diversas manifestações artísticas e em diferentes contextos e expressões. Os artistas buscam comunicar-se usando diversas linguagens, dando formas e sentidos através de suas obras, refletindo suas percepções de mundo, sua cultura e costumes sociais, muitas vezes, expressam sua maneira ímpar de observar e descrever o mundo por meio de sua arte. Nas obras de Maurits Cornelis Escher podemos notar a beleza de retratar o real com o imaginário, tendo como característica no seu fazer artístico, propriedades geométricas que aparentemente dão vida e movimento a suas pinturas, através de traços de reflexão, rotação, translação e recobrimento de regiões planas.

Figura 4 – Passarinhando – Aves de Escher



Fonte: Passarinhando³.

Podemos também citar diversas formas de manifestação artística da cultura brasileira, onde é possível encontrar composições dos mais variados gêneros artísticos, a conservação, em suas obras, de traços que são específicos das propriedades das transformações geométricas.

Nesse espaço, aproveitamos para apresentar algumas dessas expressões artísticas, que combinam traços específicos das transformações geométricas e da arte, para representar a visão de mundo do artista e buscar dar significados a sua criatividade, usando de maneira brilhante as dimensões das formas geométricas, com o intuito de caracterizar os seus feitos.

Assim, apresentamos algumas imagens de obras artísticas de personalidades do município de Quipapá-PE, que buscam representar e descrever a cultura, os costumes, a religiosidade, a história em todos os seus aspectos e contextos de um povo hospitaleiro e viril.

A seguir apresentaremos uma sequência de imagens que retratam em seus traços artísticos, a materialização de conceitos e propriedades das transformações geométricas. Esses trabalhos são feitos por artistas locais, ou seja, são cidadãos quipapaenses, que na sua arte apresentam habilidosas mãos e geniais cabeças, produzindo a beleza cultural da nossa região, através de artes que remetem a conhecimentos geométricos.

³ Ver em: <http://passarinhando.com.br/index.php/component/k2/item/717-as-aves-de-escher>.

Figura 5 – Jogo Americano *Sousplat*

Fonte: Lala's Ateliê – Dona Fátima.

Essa primeira imagem, apresenta a propriedade da Rotação das Transformações Geométricas a partir de um ponto fixo que é o centro do jogo americano *sousplat*, é composta pela artista Maria de Fátima Silva, conhecida como dona Fátima. Maria de Fátima Silva é professora da rede estadual de Pernambuco há mais de trinta anos, atualmente é educadora de apoio, função de coordenadora pedagógica, e professora aposentada da rede municipal de ensino de Quipapá-PE. Nos tempos livres desenvolve a arte de crochê, produzindo diversas peças de utensílios domésticos e vestimentas, com pontos de costura que têm como característica, formas geométricas e produção de padrões com essas formas.

Podemos notar essa característica na imagem acima, que é um jogo americano de *sousplat*, utensílio que tem por finalidade, ser posto sobre a mesa de refeição. Observamos que a artista usa e abusa de pontos de crochê que produzem padrões e que fazem destaque ao formato triangular com uma de suas bordas sendo de formato de arco e essa mesma figura é reproduzida de maneira rotacional com o ponto central fixo, reproduzindo outros triângulos congruentes.

Dessa forma, notamos que está presente no feito artístico acima, propriedades das transformações geométricas de isometria.

Como podemos ver na imagem abaixo, a artista produz uma vestimenta com apenas pontos de costura de crochê, onde é predominante a forma geométrica de quadriláteros, que são replicados em todo o espaço do formato da vestimenta. Os quadriláteros são feitos produzindo um certo padrão, percebido pelas cores e posições que são projetadas na vestimenta. Podemos notar, nessa obra, traços de propriedades e conceitos das transformações geométricas por meio de reflexão, translação, rotação dos quadriláteros e o surgimento de padrões geométricos.

Figura 6 – Casaco de crochê



Fonte: Lala's Ateliê – Dona Fátima.

Ainda apresentando obras de artes com característica e traços das transformações geométricas, mostraremos esse feito em outra categoria artística, através da manipulação em madeira, carpintaria.

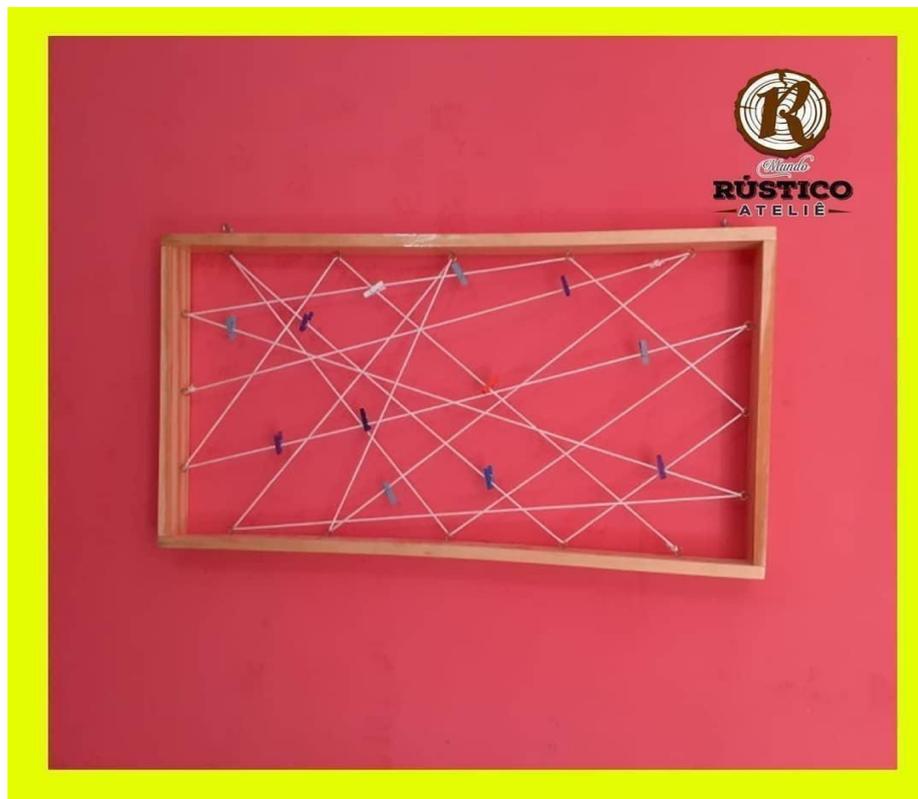
As obras em madeira que apresentaremos a seguir são do artista Alexander de Lima Timm, conhecido por Freddy Timm. Para tanto, inicialmente faremos também sua apresentação biográfica. Essas informações foram levantadas a partir da ficha funcional da secretaria da escola onde ele trabalha e através de uma rápida conversa abordando aspectos da sua vida artística. O artista é funcionário público da rede estadual de Pernambuco como assistente administrativo educacional, tem formação em Educação Física, diversas

especializações na sua área de formação e especialização em gestão educacional, já desempenhou a função de gestor escolar na rede municipal de ensino de Quipapá-PE. Nas suas horas vagas, desenvolve arte em variadas linguagens.

Além da arte em madeira, construindo diversos utensílios de ornamentação de casa, escritório, móveis planejados, também é um excelente desenhista e pintor, com obras admiradas adquiridas pelos admiradores de sua arte, por diversas regiões do país.

Apresentamos nas imagens a seguir algumas de suas obras que, para nosso interesse de estudo, apresenta traços característicos das transformações geométricas. A foto abaixo nos chama a atenção, pela simplicidade dos recursos usados e mais ainda pela engenhosidade do artista em produzir um material com intuito de pôr fotos para recordação e, ainda, para a ornamentação em variados espaços, produzindo formas geométricas semelhantes pelo percurso que o cordão realiza no quadro de madeira. Nessa arte é possível notar, a partir dos formatos geométricos pelo cordão, figuras que apresentam propriedade da congruência (homotetia).

Figura 7 – Varal de Fotos



Fonte: Mundo Rústico Ateliê – Alexander de Lima Timm – Freddy Timm.

Outra obra está representada na foto abaixo, que é a construção de peças de madeira no formato de coração e de circunferência, e que são produzidos em diferentes tamanhos,

conservando os padrões característicos de semelhança entre eles. Ou seja, nessas peças de madeira estão implícitas no seu feito propriedades da homotetia das transformações geométricas. Nessa arte é possível notar, a partir dos formatos geométricos, figuras que apresentam propriedade da congruência (homotetia).

Figura 8 – Kit Tábuas de Frios



Fonte: Mundo Rústico Ateliê – Alexander de Lima Timm – Freddy Timm.

Ainda dando continuidade à apresentação de várias obras de artes com traços característicos das transformações geométricas, ainda por meio de imagens, utensílios de ornamentação de ambientes, feito pela artista local, Maria Luzinete Soares, conhecida por Nete. A mesma desempenha sua arte através de costura, pintura de tecidos e ornamentação de objetos de uso caseiro. Nete é uma senhora com formação em ensino médio, pelo Projeto Travessia, atualmente é funcionária pública por contrato temporário da prefeitura municipal de Quipapá, desempenha várias outras atividades, como cabeleireira, culinárias de doces, produz peças artesanais e é comerciante na feira livre do município.

A seguir, apresentamos uma de suas obras, que retrata os seus feitos artísticos e que tem laços característicos com nosso objeto de estudo.

Figura 9 – Fuxicos de tecido: Replicação de figuras em formato de flores por meio de Rotação e Reflexão



Fonte: Arquivo pessoal de Maria Luzinete Soares (Nete).

A artista utiliza materiais de costura, como tecidos de diversas cores, botões, fita adesiva colorida, palitos de churrasco e cola quente. Com esses materiais, foram criados os arranjos de fuxicos, que apresentam características de flores e que com formas semelhantes são colocadas próximas umas das outras, com intuito de ornamentar o ambiente. Essa maneira de produção das flores de fuxico apresenta traços de isometria, onde suas formas são conservadas, com mudanças apenas nas suas posições.

Portanto, reservamos uma seção da presente dissertação para apresentar diversas formas e meios em que a geometria e a arte se misturam com o intuito de contribuição aos seus ilustres artistas, que buscam, nas suas obras, expressar suas emoções, sua visão de mundo, sua crítica social, suas experiências e sua perspectiva de mundo. E esses traços encontramos nos mais variados instrumentos de comunicação, pois a arte é uma maneira diferente e única em que o artista dialoga com seu mundo, produz significado, e gera significado para o seu público.

Buscaremos utilizar várias outras obras dos artistas que aqui apresentamos, como também a possibilidade de inclusão de outros, que até então não foram citados, na produção da trilha de aprendizagem, na composição das atividades e desafios dos diferentes níveis e

etapas do seu percurso formativo, como instrumentos de estudo, em relação às propriedades das transformações geométricas que nelas são identificadas.

Enfatizamos ainda que os artistas e suas obras aqui apresentados foram escolhidos pelo fato de que sua arte tem significado peculiar ao objetivo que buscamos alcançar em nossa pesquisa.

2.5 Transformações Geométricas: Conceitos e Propriedades

Como objeto de estudo nas escolas, as transformações geométricas permitem a introdução e a visualização de conceitos como números e medidas, percepção de semelhanças e diferenças e de regularidades entre diversas estruturas, sem a necessidade de realizar sua definição formal prévia. Sem uma boa compreensão, o estudante pode apresentar lacunas no entendimento de conceitos posteriores, que são abstratos, se antes não for realizada a apreensão visual. Com isso, podemos perceber que o início do raciocínio matemático se dá pela visualização, e a construção desse raciocínio é fundamental para que o estudante desenvolva a capacidade de elaborar a solução de problemas mais complexos futuramente.

Para tanto, nessa seção buscamos apresentar, de maneira mais detalhada e objetiva, os conceitos e propriedades das transformações geométricas, como também, a partir de alguns exemplos, formalizar o objeto matemático em estudo. Assim, se faz necessário inicialmente, apresentar uma breve definição sobre transformações geométricas, segundo o que diz Wagner, (2007),

[...] transformações geométricas, consiste em um tópico específico da geometria que trata de alterações no posicionamento (transformações isométricas: translações, reflexões, e rotações, que podem ocorrer em relação a um ponto ou a um eixo de simetria) ou nas dimensões (homotetias) de uma dada figura, em relação a uma figura inicial (Wagner, 2007, p.71).

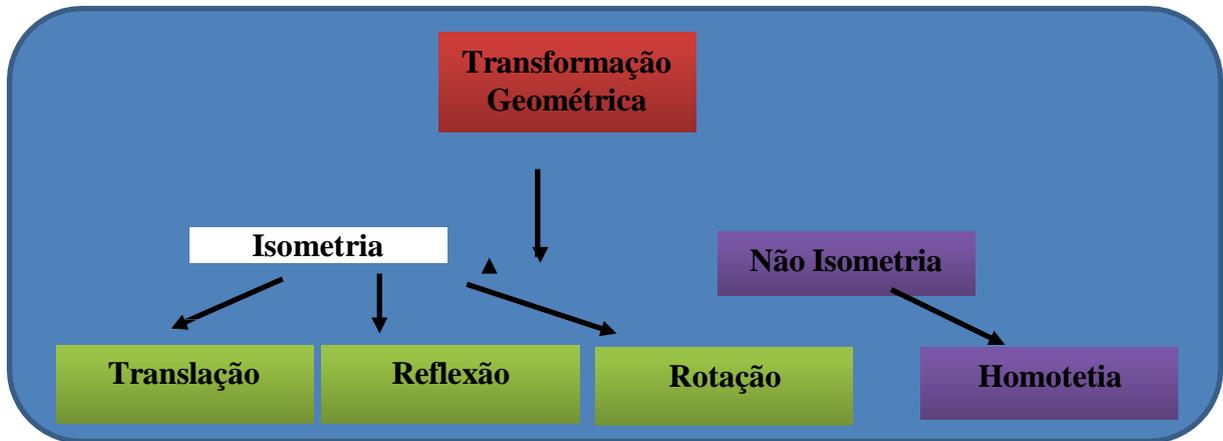
Adotamos essa apresentação característica de Wagner (2007) como princípio norteador do campo de atuação da nossa pesquisa, pois compreendemos que os processos de ensino voltados para as transformações geométricas devem transcender a compreensão dos conceitos e propriedades ensinadas no espaço da sala de aula.

A seguir apresentamos os tipos de transformações geométricas baseada em Wagner (2007), que são objetos de estudo da nossa pesquisa e que direcionam nossa ação investigativa, como também os conceitos e propriedades exemplificadas nas imagens construídas pelo autor, com o intuito de compreender o seu processo de ensino.

As transformações geométricas são divididas em isometrias e homotetias e cada uma

delas trata de específicas propriedades. O quadro a seguir apresenta os tipos de transformações geométricas e suas dimensões.

Quadro 3 – Organograma das Transformações Geométricas



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Sendo assim, temos as **Transformações Geométricas de Isometria**: por definição, são aquelas que *preservam distâncias e ângulos*⁴, apresentando as seguintes propriedades:

- A imagem de uma reta por uma isometria é uma reta;
- Uma isometria preserva paralelismo;
- Uma isometria preserva ângulos.

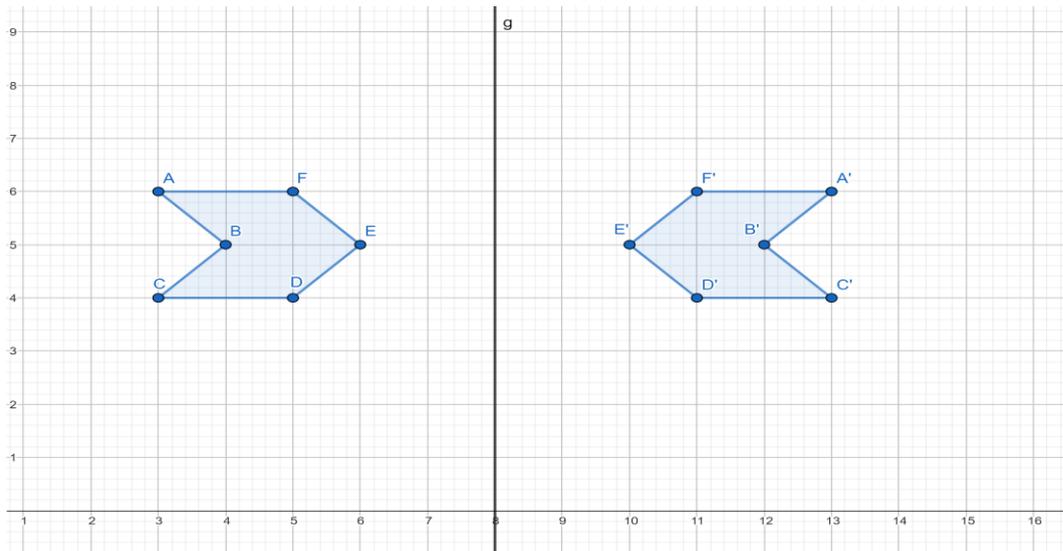
Em consequência da definição, suponho que uma imagem I por uma isometria é uma figura I' *congruente*⁵ à imagem I .

Podemos notar, a partir da figura acima, que a imagem do poliedro formado pelos pontos A, B, C, D, E e F é a imagem denominada I , e o poliedro formado pelos pontos A', B', C', D', E' e F' é a imagem I' , congruente à imagem I .

⁴ Por definição livre remete a ideia de manter, conservar, evitar mudar suas medidas dimensionais e de ângulos.

⁵ Definições de Oxford Languages: 2. idêntico ou correspondente na constituição, forma ou estrutura.

Figura 10 – Isometria do polígono ABCDEF em um polígono A'B'C'D'E'F'

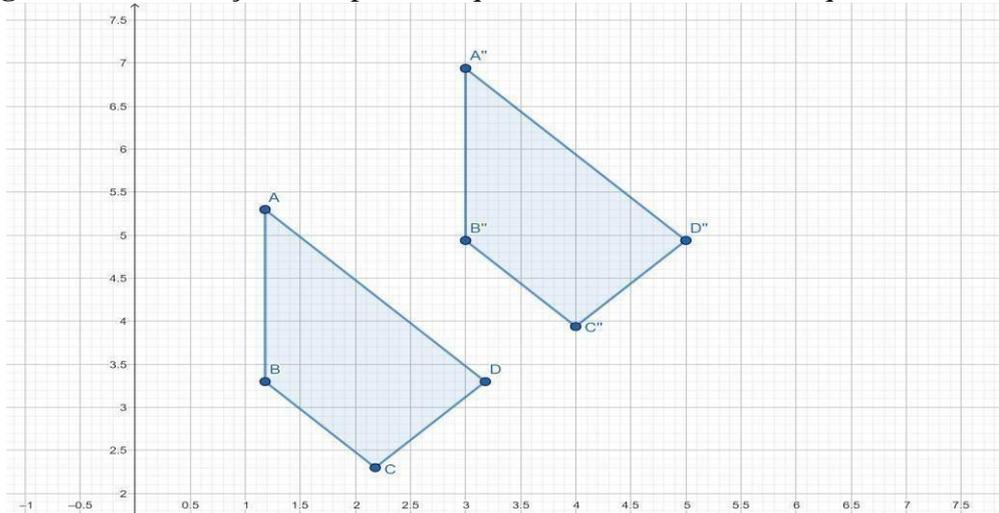


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Dando sequência, apresentamos os tipos de transformações geométricas de isometria, sendo os seguintes: Isometria de Translação: A translação transforma qualquer figura em outra, rigorosamente congruente, conservando assim as distâncias entre os pontos.

Vejam um exemplo a seguir.

Figura 11 – Translação, transporte do quadrilátero ABCD em um quadrilátero A'B'C'D'



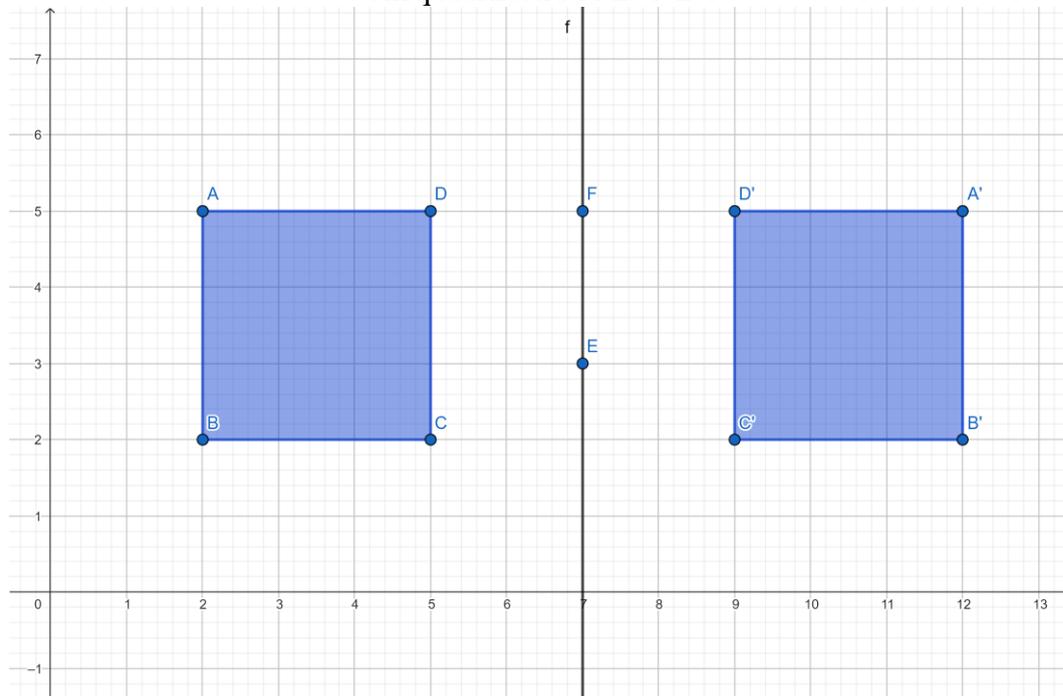
Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Observando a imagem acima, percebemos que o quadrilátero ABCD possui uma imagem congruente, denominada de quadrilátero A'B'C'D'. Nesse exemplo podemos notar a presença das propriedades da isometria. O quadrilátero muda de localização no plano, conservando o paralelismo e as medidas dos ângulos.

2.5.1 Isometria de Reflexão

A isometria de reflexão permite transformar cada imagem I em uma outra imagem I' , congruente a I . Entretanto, a reflexão inverte a orientação do plano. Por definição para reflexão consideremos uma reta r , a isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P' em relação à reta r , é chamada reflexão na reta r , ou simetria de reflexão na reta r , a qual vamos indicar por R_r . A reta r é chamada eixo da reflexão de R_r . Observe a figura abaixo.

Figura 12 – Reflexão Eixo central do plano, transforma a imagem do quadrilátero $ABCD$ em um quadrilátero $A'B'C'D'$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

2.5.2 Isometria de Rotação

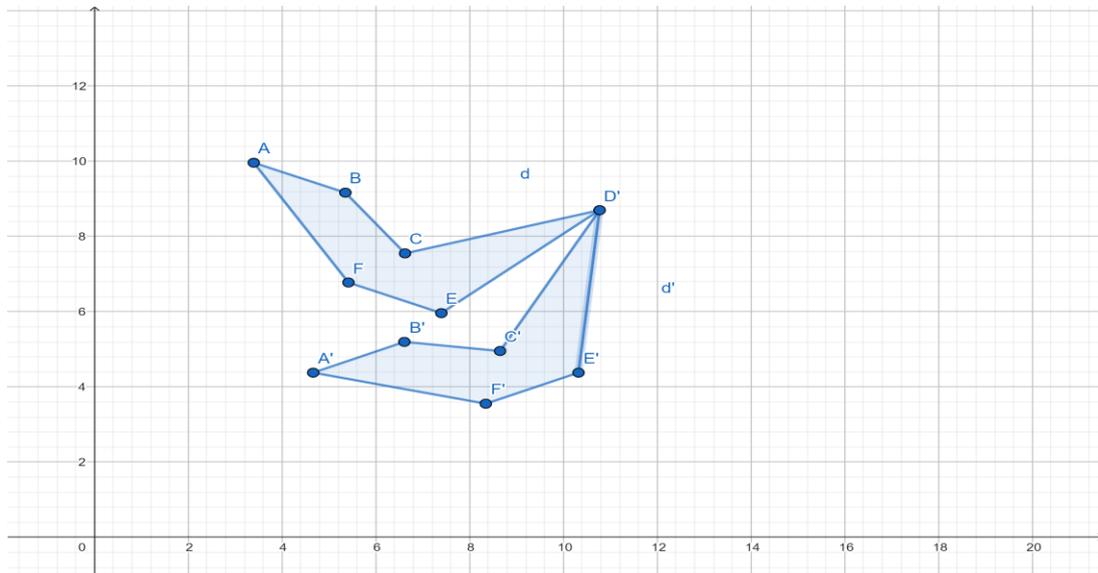
A rotação é o movimento giratório de uma figura geométrica em torno de um determinado ponto fixo dessa figura. A figura não mudará de tamanho ou forma, mas mudará de direção.

Por definição, seja O um ponto do plano e θ um número real com $0 < \theta \leq 360$. A rotação de centro O e ângulo θ é a isometria $R_{O,\theta}$ que deixa fixo o ponto O e leva o ponto X , $X \neq O$, no ponto $X' = R_{O,\theta}(X)$, tal que $OX = OX'$ e a medida do ângulo orientado (OX, OX') é igual a θ , se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq 180$. Além disso, $OX' = OX$, sendo O o ponto médio de XX' .

se $\theta = 180$; e $X' = X$ se $\theta = 0$.

Observamos o exemplo a seguir.

Figura 13 – Rotação de centro D, transforma o hexágono ABCDEF em um hexágono A'B'C'D'E'F'



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Podemos observar que o hexágono ABCDEF, sendo a figura principal, realiza um movimento giratório sobre o ponto fixo D, deslocando o hexágono sobre o plano, produzindo o hexágono A'B'C'D'E'F' congruente à figura principal. Assim, a partir do movimento ocorrido, se caracteriza como uma transformação geométrica de isometria de rotação.

Antes de prosseguirmos para o estudo sobre a homotetia, porém, é necessário formalizarmos a transformação geométrica semelhança no plano, uma vez que ela vai auxiliar no desenvolvimento do estudo das homotetias. Portanto, segue um estudo sobre semelhança no plano.

2.5.3 Breve Estudo sobre Semelhança

De maneira simplificada podemos ter uma ligeira noção de semelhança quando fazemos uma comparação entre objetos, a partir das suas dimensões e aspectos que lhes são comuns. Esse tipo de noção, é uma maneira primitiva e simplificada de se classificar os objetos por traços que lhes são comuns, e não necessariamente, fiel em todos os seus aspectos próprios dos objetos. Um bom exemplo é quando as crianças ao brincarem com carrinhos ou bonecos(as) podem comparar seu tamanho, e os meninos podem comparar com os carros vistos na rua e com as pessoas.

Assim, dois objetos que possuem as mesmas formas, mas tamanhos diferentes, são ditos semelhantes. Essa ideia está relacionada à percepção e compreensão de redução e ampliação, conservando suas proporções.

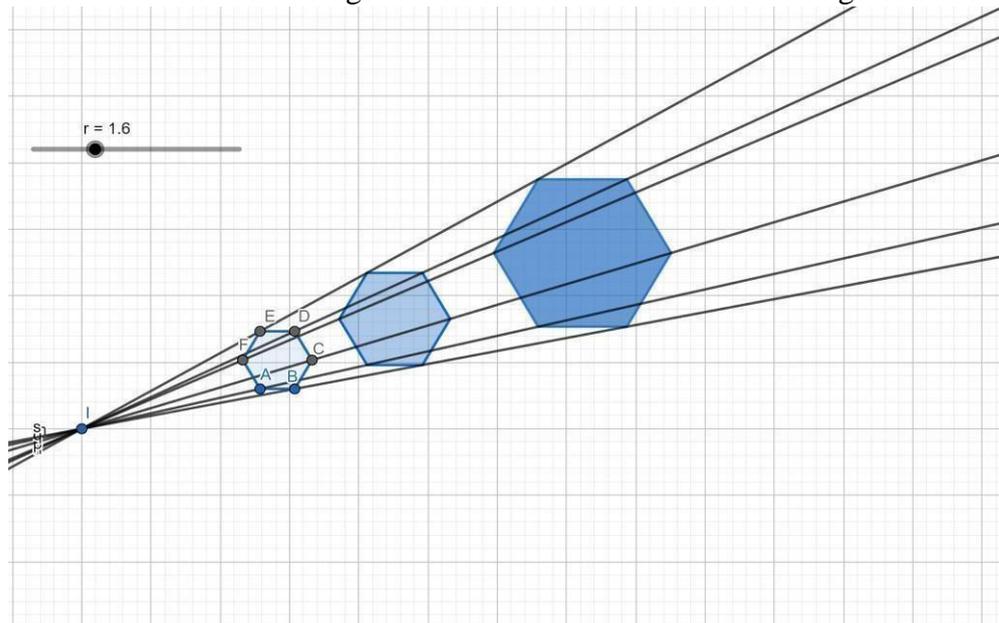
Formalizando esse conceito, temos que, a relação entre coisas, seres ou ideias que apresentam entre si elementos análogos ou parecidos, são chamados de semelhantes. Ainda, uma definição formal, matematicamente, segundo Giovanni e Giovanni Jr (2000). Dois polígonos com o mesmo número de lados são *semelhantes* quando possuem ângulos respectivamente congruentes e lados correspondentes proporcionais. A razão entre qualquer lado de um polígono e o lado correspondente de outro chama-se *razão de semelhança* (Giovanni; Giovanni Jr, 2000).

Sendo assim, a semelhança é um conceito matemático que estuda a ampliação ou redução de imagens. E, para este fim, existem algumas técnicas de ampliação e redução como a homotetia.

Portanto, concluindo o resumo que trata sobre a ideia de semelhança, buscaremos adentrar nos conceitos e propriedades das transformações geométricas de homotetia.

Transformações Geométricas de Homotetia: Homotetias são transformações geométricas que “ampliam” ou “reduzem” de forma contínua qualquer imagem geométrica. Observemos a ilustração da definição na figura abaixo.

Figura 14 – Homotetia do hexágono ABCDEF transformando-o em figuras semelhantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A partir da ilustração e os conceitos que foram apresentados ao longo deste capítulo,

enfatizamos sobre o quanto o conhecimento geométrico está presente em nosso dia a dia, basta olharmos à nossa volta. Logo, aprender seus conceitos e suas propriedades e tê-las como recursos fundamentais ao conhecimento matemático, e até de mundo, tornando-se imprescindível para o desenvolvimento intelectual do estudante.

Contudo, muitos estudos afirmam que a geometria não vem sendo abordada de forma satisfatória, de modo a garantir um ensino significativo em relação aos conceitos geométricos na educação básica, em particular nos anos finais do Ensino Fundamental. Por esse motivo, esta linha de pesquisa tem a perspectiva de contribuir para transformar a prática pedagógica do professor de Matemática no que se refere ao ensino de geometria, nas diversas etapas de ensino, como também na formação de conceitos bem definidos e estabelecidos, como base para apropriação mais complexa e profunda de estudos posteriores.

3 TRILHA DE APRENDIZAGEM

A educação ao longo de gerações tem passado por inúmeras mudanças, provenientes da adaptação e perspectivas de tendências de ensino e de aprendizagem e na formação de professores. Assim, surgiu a necessidade de se construir novas tecnologias que, dentro e fora da sala de aula, contribuíssem para uma melhor performance educacional, com foco em metodologias de aprendizagem ativas e significativas. Para tanto, apresentamos em nossa pesquisa as “trilhas de aprendizagem” como uma ferramenta de grande potencialidade para aferir e impulsionar as competências inerentes ao objeto matemático, as transformações geométricas. As trilhas de aprendizagem proporcionam um resultado mais voltado a conhecer no estudante seus saberes relativos às propriedades e conceitos das transformações geométricas e como se pode planejar ações e atividades que produzam no estudante o aprofundamento sobre o objeto matemático.

3.1 Abordagem inicial sobre a Metodologia de Ensino Trilha de Aprendizagem

Segundo Tafner, Tomelin e Müller (2012), as trilhas de aprendizagem são caminhos flexíveis e alternativos para o desenvolvimento intelectual. As trilhas de aprendizagem também são identificadas por sinônimos como “caminhos de aprendizagem”, “percurso de aprendizagem” e, em língua inglesa, *learning path*, *learning route*, *learning itineraries*. É possível perceber que os autores apontam como deve ser uma trilha de aprendizagem, cujo objetivo, além de uma abordagem de cunho cognitivo, impulsiona aspectos que desenvolvem a autonomia do estudante, o senso crítico sobre a sua ação na aprendizagem, com um itinerário que se apresenta por etapa e nível de conhecimento.

Segundo o artigo escrito por Pedro Filizzola, intitulado de “O que são Trilhas de Aprendizagens? Aprenda a montar a sua!”, no qual traz uma breve conceituação de trilha de aprendizagem, apresentando-a como um conjunto de atividades em sequência, que deve conter todos os requisitos necessários para que o estudante se desenvolva dentro de uma temática específica.

As trilhas de aprendizagem têm como base fundamental a teoria de competências, levando em consideração o conhecimento prévio do estudante, agregando atividades práticas e teóricas para atingir o objetivo final, produzindo um pós-aprendizado, ou seja, um alto nível de conhecimento sobre o objeto de estudo. Ainda segundo Filizzola, uma das grandes vantagens das trilhas de aprendizagem é que não é preciso se ater a somente um formato ou

recurso de conteúdo. Materiais em vídeos, games, *podcasts*, infográficos, testes, e, até mesmo, fóruns, podem ser utilizados.

Sendo assim, notamos essas variedades de instrumentos pedagógicos para a elaboração e aplicação da aprendizagem em trilhas, torna um processo dinâmico, empolgante e atraente, impulsionando o estudante, ao protagonismo da sua aprendizagem, a partir de etapas e níveis de atividades desafiadoras relacionadas às transformações geométricas.

Para que uma trilha cumpra com o objetivo proposto e seja eficiente para a aprendizagem, segundo o artigo de Filizzola, deve cumprir três requisitos básicos:

Flexibilidade: Onde o estudante deve se sentir motivado a ser protagonista de sua aprendizagem, por isso as trilhas devem ter atividades obrigatórias e outras escolhidas pelo próprio aluno, de forma a complementar sua jornada de conhecimento.

Experiência: nessa parte das trilhas, visam o pré e pós-aprendizagem, por isso, a experiência deve ser pensada desde o primeiro contato até a forma como o estudante colocará em prática os conhecimentos adquiridos.

Diversidade de estímulos: Nas trilhas, devemos aproveitar todos os recursos para potencializar a aprendizagem.

Dessa forma, adotar trilhas de aprendizagem como recurso que permite a personalização do ensino, respeitando a individualidade de cada pessoa, bem como suas necessidades e motivações, traz na sua praticidade operacional o protagonismo do conhecimento para o estudante, dando mais autonomia e responsabilidade a ele.

Além disso, nesse procedimento metodológico, as trilhas, ao serem aplicadas, podem estimular o compartilhamento de conhecimento, através de caminhos alternativos de aprofundamento sobre o objeto do conhecimento, nesse caso as transformações geométricas, buscando proporcionar o desenvolvimento integral do estudante sobre o campo de estudo.

3.2 A Metodologia de Ensino Trilha de Aprendizagem construída a partir de um Trabalho Colaborativo

Através da literatura buscamos subsídios para conceituar e apresentar aspectos sobre trabalho colaborativo nas mais diversas dimensões e, em seguida, concebê-lo como parâmetro

para um trabalho colaborativo entre professores de matemática. Sendo assim, se faz necessário compreender o verdadeiro aspecto conceitual e prático do trabalho colaborativo, trazido por Ferreira (2003), que diz,

Há algum tempo, os conceitos de trabalhos em grupo, aprendizagem cooperativa e colaboração, dentre outros, começaram a ser aplicados de forma mais significativa no contexto da pesquisa educacional. No entanto, tais conceitos têm sido utilizados e entendidos de várias formas, muitas vezes como sinônimos, o que dificulta a comunicação (Ferreira, 2003, p.79).

Ter uma compreensão adequada sobre o modo de organização e os procedimentos teóricos de um trabalho colaborativo, facilitará a forma de trabalho colaborativo com que o grupo de professores de matemática da Escola de Referência em Ensino Médio Dr. Fernando Pessoa de Mello, atuam, buscando considerar a troca de experiências, o diálogo e a parceria como elementos essenciais para o desenvolvimento das ações comuns do grupo que proporcionará o atingimento de suas metas. Para isso, a participação de seus membros precisa ser de maneira voluntária, com responsabilidade e compromisso com os ideais pré-estabelecidos pelo grupo, sempre oportunizando e valorizando a vez e a voz, para que assim seja possível a construção do caminho e o caminhar do grupo.

Segundo Johnston e Kirschner (1996), a colaboração não é um fim em si mesmo, mas uma forma de se relacionar e de trabalhar junto. Assim, trazendo essa descrição de Johnston e Kirschner (1996) como uma maneira de afirmar que o trabalho colaborativo se constrói como uma filosofia relacional com o foco em metas, objetivos e ideais comuns do grupo.

Ferreira (2003) ainda traz duas formas de relacionamento grupal que muitas vezes se confundem por ter práticas de atuação bem semelhantes, porém, com ideais bem distintos na sua essência. Por definição são elas: a cooperação e a colaboração.

- A **cooperação** dos membros do grupo trabalha por uma meta que não necessariamente é de todos, ou ainda, os participantes estão envolvidos por um motivo externo.
- A **colaboração** envolve a reciprocidade e equidade a partir do projeto pensado pelo grupo, com tomadas de decisões conjuntas.

A partir desses esclarecimentos, Ferreira (2003) ainda enfatiza o trabalho colaborativo como uma ferramenta de alto grau de potencialidade para o alcance das metas estabelecidas pelo pesquisador a partir do que se busca atingir, desenvolver ou mudar no processo da pesquisa ou do trabalho. A autora também enfatiza como o trabalho colaborativo contribui para a ação

docente, na perspectiva de que em grupo, os professores possam refletir sobre as práticas docentes, criando alternativas para alcançar as metas propostas.

3.3 A Trilha de Aprendizagem na Perspectiva da Teoria de Van Hiele

Para a construção da trilha de aprendizagem das transformações geométricas, buscamos compreender os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico idealizados por Van Hiele, como teoria orientadora, para uma melhor elaboração do material a ser aplicado no processo de coleta de dados dessa pesquisa. Para Lorenzato (1995):

O Modelo de Van Hiele, que concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica (ou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico) com as seguintes características: nonível inicial (visualização), as figuras são avaliadas apenas pela sua aparência, a ele pertencem os estudantes que só conseguem reconhecer ou reproduzir figuras (através das formas e não pelas propriedades); no nível seguinte (análise) os estudantes conseguem perceber características das figuras e descrever algumas propriedades delas; no outro nível (ordenação), as propriedades das figuras são ordenadas logicamente (inclusão) e a construção das definições se baseia na percepção do necessário e do suficiente. As demonstrações podem ser acompanhadas, memorizadas, mas dificilmente elaboradas. Nos dois níveis seguintes estão aqueles que constroem demonstrações e que comparam sistemas axiomáticos (Lorenzato, 1995, p.3).

A fundamentação do processo de aprendizagem da geometria, que valoriza uma aprendizagem de maneira gradual, global e construtiva, é a essência da teoria proposta por Van Hiele. Essa teoria apresenta uma certa ordem processual da aprendizagem geométrica, pois compreende que a linguagem geométrica, o raciocínio e a intuição são obtidos gradualmente pelos estudantes, para que, em situações posteriores, possam identificar figuras e propriedades nos mais diversificados níveis e etapas produzindo outros significados, a partir de um processo de construção própria do estudante.

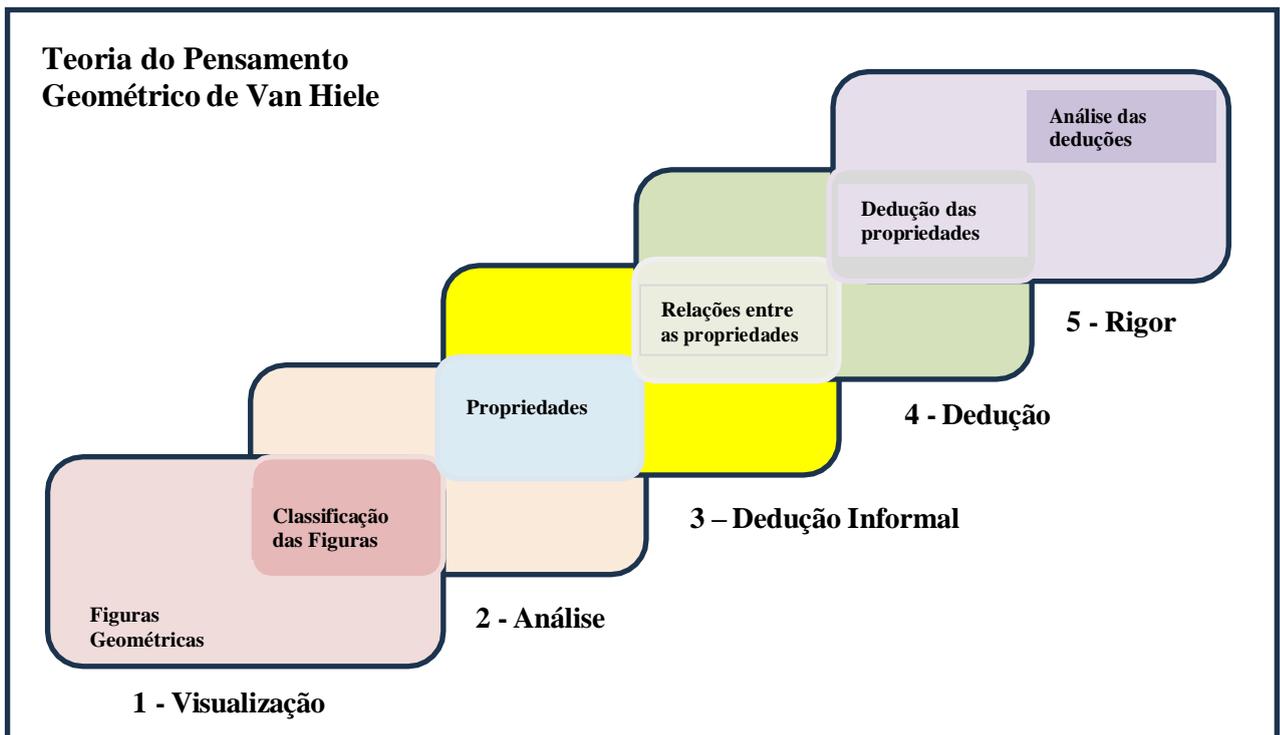
É interessante e, ao mesmo tempo, se torna prático ao professor verificar, a partir dos princípios teóricos trazidos pela teoria de Van Hiele, o nível de saber geométrico que o estudante já construiu, como também, podendo conduzi-lo para níveis de conhecimento seguintes, induzidos por etapas de verificação da aprendizagem.

A Teoria de Van Hiele se torna um excelente suporte para avaliar o nível de desenvolvimento do raciocínio dos sujeitos e desenvolver uma proposta de ressignificação dos conceitos básicos da geometria plana. Além disso, ainda reforça a crença nas potencialidades da teoria como um caminho teórico e metodológico capaz de sustentar um projeto consistente no ensino de Geometria. Dessa forma, é fundamental que o professor proponha atividades

que desenvolvam o pensamento geométrico de seus estudantes. Além disso, é importante que o professor proponha atividades que se encontrem no nível de pensamento do estudante, o que irá contribuir para que ele consiga avançar de nível como é proposto pela teoria.

Para isso, é importante proporcionar aos estudantes atividades para manipular, colorir, dobrar, construir figuras geométricas, identificar uma figura ou uma relação geométrica, criar figuras, descrever figuras geométricas e construções usando uma linguagem adequada e trabalhar com problemas que podem ser resolvidos manipulando figuras, medindo e contando. O modelo da teoria da aprendizagem geométrica de Van Hiele é dividido em cinco níveis de compreensão, o qual se inicia com o nível básico, ou zero, que está relacionado a competência da percepção visual-geométrica e finaliza com o nível mais elevado desse processo, rigor que poucos estudantes chegam a esse nível, pois ele exige certa compreensão de aplicabilidade formal de maneira abstrata e dedutiva.

Figura 15 – Diagrama representativo sobre os níveis de compreensão do modelo de Van Hiele



Fonte: O Conhecimento Sobre Volumes Mediante a Teoria De Van Hiele e a Base Nacional Comum Curricular.

Os níveis de organização do modelo da aprendizagem geométrica se ordenam da seguinte maneira: a visualização, a análise, a parte de dedução informal, a da dedução formal e a etapa que exige um maior rigor de compreensão e aplicação sobre o conhecimento alcançado.

No nível 1, ou de análise, deseja-se que os estudantes percebam as propriedades existentes nas figuras. Dessa forma, é necessário proporcionar aos estudantes a oportunidade para medir, colorir, dobrar, recortar, modelar e ladrilhar a fim de identificar propriedades de figuras e outras relações geométricas, além de descrever uma classe de figuras a partir de suas propriedades, comparar figuras seguindo suas características, classificar e reclassificar figuras, identificar e desenhar figuras, levando em consideração suas propriedades, comparar diferentes classes de figuras, descobrir propriedades de classes, encontrar e usar vocabulário apropriado e resolver problemas geométricos que necessitam das propriedades das figuras.

O nível 2 ou de dedução formal é o nível em que os estudantes começam a formar uma rede de relações. Nessa etapa é fundamental proporcionar aos estudantes a oportunidade de estudar relações desenvolvidas no nível anterior, buscando inclusões e implicações, identificar conjuntos mínimos de propriedades para descrever uma figura, desenvolver e usar definições, acompanhar argumentos informais e dedutivos, tentar fornecer mais do que uma explicação, trabalhar e discutir situações que focalizam uma afirmação e resolver problemas em que as propriedades das figuras e as suas inter-relações sejam importantes.

No nível 3 ou de dedução formal, momento em que os estudantes compreendem a natureza da dedução, é importante proporcionar a oportunidade de identificar aquilo que é dado e o que deve ser provado num problema, apontar informações implícitas nas figuras, demonstrar compreensão de conceitos, provar relações não familiares, comparar demonstrações, identificar estratégias gerais para demonstração e refletir sobre o raciocínio geométrico.

E, no último nível, nível 4 ou de rigor, os estudantes já têm capacidade de organizar seus conceitos geométricos, estudar e comparar diferentes sistemas. É importante salientar que as sugestões de atividades propostas pelo modelo de Van Hiele visam a auxiliar o professor na elaboração de suas atividades para que ele possa contribuir com a aprendizagem dos estudantes, verificar em qual nível os estudantes se encontram e ajudá-los a passar para o próximo nível.

Sendo assim, vislumbramos esse modelo teórico como enorme potencial para ser implementado na elaboração e construção da trilha de aprendizagem das transformações geométricas, pois a própria metodologia e estrutura da trilha de aprendizagem remete a uma organização posta em etapas e níveis de aprendizagem a ser aplicada ao estudante, como instrumento de verificação, ao mesmo tempo que impulsiona o estudante a desenvolver novos conhecimentos de aprendizagem geométrica, em particular, conceitos e propriedades das transformações geométricas.

Outro instrumento fundamental para enfatizar essa observação são os instrumentos oficiais norteadores da educação, os parâmetros curriculares nacional – PCNs (1997), a matriz de referência para elaborar as propostas de atividades como instrumento de coleta e análise de dados conteudistas, para uma melhor apropriação e fundamentação da aplicabilidade das metodologias de ensino impulsionadas pelas teorias da aprendizagem com foco na pesquisa e sua relação para melhoria da aprendizagem sobre geometria. Importante salientar que a teoria de Van Hiele não relaciona de maneira tão precisa as aprendizagens de geometria, ao se relacionar, idade, nível de conhecimento e sua escolaridade, visto que é bem relativo essa relação para diversos casos.

3.4 Produzindo significados por meio de uma trilha de aprendizagem no ensino das transformações geométricas

Queremos, inicialmente, enfatizar que a trilha de aprendizagem tem como propósito para o processo de ensino que pode possibilitar a constante interação entre o conhecimento e experiências prévias do estudante, com possibilidades de expansão desse conhecimento, a partir das indagações e descobertas que naturalmente surgem ao longo do percurso no qual o estudante vivencia as experiências. Sendo assim, a metodologia de ensino trilha de aprendizagem apresenta essa característica oferecer oportunidades aos alunos para produzir significados ao conhecimento teórico das transformações geométricas.

Ainda se faz necessário enfatizar que o ensino da matemática, e para ser mais preciso, o ensino da geometria, possibilita um leque de opções de abordagens e relações, inerentes a sua linguagem natural, que a utiliza dos mais diversos signos e simbologias que representam ideias puramente da ciência matemática e suas aplicações.

Apresentamos a seguir uma breve e poética fala de Almeida (2012), que de maneira precisa e profunda, remete às diversas formas e relações da linguagem, na perspectiva de produzir significados nos mais variados espaços de produção de conhecimento, sobretudo, a sala de aula e seus propositores.

Sabemos que uma poesia pode ser assim considerada apenas quando o poema é lido, interpretado, declamado. Assim ele adquire alma, vira poesia, música, aos ouvidos de quem ouve, lê, sente. Podemos dizer que assim é com qualquer texto, inclusive matemático. Enquanto escrito, impresso em um suporte qualquer, é apenas um texto, no qual se verificam características sintáticas diversas. Quando lido, aí sim podemos dizer que há uma realização matemática dele. A Matemática se faz presente. Mas isto somente se essa leitura for acompanhada de significados por quem a lê, dando-lhe alma, sentido. Dizendo de outra forma, “se houver uma atitude responsiva por parte

de quem a lê, comunica, ouve, dialoga, usa. De quem a faz, ou refaz. Esse fazer, dialogar, é sempre acompanhado de relações com outros objetos, outras pessoas, outras leituras, outros pensamentos (Almeida, 2012, p.138).

No processo de produção de significados, é fundamental estabelecer uma interação propositiva entre os envolvidos, de um lado o professor orientando e propondo intencionalmente as etapas da trilha, atividades de aplicação e que impulse o estudante relacionar o objeto em estudo, em situações que visualmente se relaciona com seu cotidiano, facilitando a compreensão e a manipulação das formas, em busca de atender um comando e conseqüentemente, se chegar a uma solução ou resposta.

Lembrando que a construção da trilha de aprendizagem se deu a partir de intensa discussão nos encontros colaborativos com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, sobre as dificuldades de aprendizagem voltadas aos conceitos e propriedades das transformações geométricas, nas diversas complexidades de abordagem, percebidas a partir da linguagem não acessível ao estudante e a falta de estímulos associados a suas perspectivas.

Sousa (2018) comenta que os discentes na maioria das vezes não veem relação nenhuma entre a matemática escolar e a matemática do cotidiano, e dessa forma são condenadas ao fracasso nessa área, principalmente quando não há motivação para aprender e quando o professor não aborda as conexões de outros contextos com os contextos da sala de aula (Sousa, 2018, p.83).

Quando o professor propõe atividades desafiadoras e instigantes, ele se dispõe a provocar o estudante a produção de diversos significados sobre o objeto em estudo, entre si e entre os outros, produzindo um efeito colaborativo entre os diferentes saberes.

Por fim, as ideias aqui apresentadas comungam com os ideais da pesquisa e contribuem com a finalidade em que a trilha de aprendizagem está sendo construída, para identificar o conhecimento matemático, fortalecer a aprendizagem e consolidar o saber.

4 PERCURSO METODOLÓGICO DA INVESTIGAÇÃO

A presente pesquisa seguirá o cunho qualitativo, que segundo Bogdan e Biklen (2003), envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes.

Buscaremos seguir, sequencialmente, as etapas metodológicas da pesquisa: Análises prévias epistemológica, didática e cognitiva da geometria das transformações, em um trabalho colaborativo com o grupo de professores de matemática da escola campo de pesquisa, na produção e aplicação de questionários, testes de verificação prévios, instrumento de verificação da aprendizagem em forma de trilha de aprendizagem.

Esse trabalho que envolve experimentação, etapa de ajustes e construção de materiais sequenciais e lúdicos, apartir do trabalho colaborativo dos professores de matemática, onde nessa construção buscaremos compor o produto educacional.

A sequência deste capítulo, apresentamos, de maneira detalhada, todo o percurso metodológico da pesquisa, desde os fundamentos teóricos-metodológicos.

4.1 Fundamentos teórico-metodológicos

Após observar que alguns estudantes têm dificuldade de aprendizagem e compreensão dos conteúdos em geometria, colocamos como recurso didático pedagógico uma trilha de aprendizagem que auxiliasse esses alunos.

Contudo, apesar de compreender que a trilha de aprendizagem é uma metodologia de ensino, resolvemos interagir com a pesquisa, de forma participante e ativa. Nesse sentido, buscamos compreender e interagir de forma profícua com os professores, participantes da pesquisa.

Para melhor compreender a problemática da pesquisa realizamos esse estado do conhecimento que reúne doze pesquisas, sendo dez dissertações e duas teses, que utilizaram trilhas de aprendizagem como modelo de interação. Para atualização do estado da arte, apresentaremos aqui um quadro com os trabalhos desenvolvidos, encontrados no banco de dissertações e teses da Capes.

Quadro 4 – Teses e dissertações

Título da pesquisa	Nome do autor	Ano de publicação	Nível de pesquisa
Gestão do conhecimento: trilhas de aprendizagens na educação de Jovens e adultos	Ana Rita Marques de Andrade	08/08/2022	DISSERTAÇÃO
Trilhas de aprendizagem para formação continuada de docentes em Competências Digitais para o ensino a partir de moocs da rede de Institutos Federais	Simone Costa dos andrade Santos	23/02/2022	TESE
Trilhas de aprendizagem e o desenvolvimento de competências gerenciais: um estudo de caso no Instituto Federal Catarinense-IFC	Fabiana Aparecida MafraReisch	17/04/2019	DISSERTAÇÃO
Trilhas de aprendizagem de matemática: uma análise hermenêutica de materiais do 7º ano do ensino fundamental	Alvaro Henrique Mateus da Rocha	29/03/2022	DISSERTAÇÃO
Trilhas de aprendizagem com foco em competências: uma abordagem metodológica para aplicação no poder judiciário	Adriano Moreirade Souza	28/06/2019	DISSERTAÇÃO
Trilhas de aprendizagem na educação corporativa: modelagem de uma plataforma para o desenvolvimento de técnicos-administrativos universitários	Larissa Muniz Ferreira Bittencourt	30/03/2020	DISSERTAÇÃO
Um modelo baseado em trilhas de aprendizagem para a representação de alunos de ambientes virtuais de aprendizagem	David Brito Ramos	21/10/2022	TESE
Desenvolvimento de competências gerais para a sociedade em transformação digital: uma trilha de aprendizagem para profissionais do Setorindustrial	Regina Wundrack do Amaral Aires	20/02/2020	DISSERTAÇÃO
A gamificação como estratégia metodológica para o ensino de química na forma de trilhas de aprendizagem	Thalita Brenda dos Santos Vieira	13/01/2023	DISSERTAÇÃO
Aprendizagem criativa, gamificação e trilhas de aprendizagem: Uma proposta teórico-metodológica para o desenvolvimento de práticas inovadoras nos cursos técnicos	Diana Raquel Schneider Gottschalck	28/02/2023	DISSERTAÇÃO

Aprender a aprender tecno-pedagogia: autonomia e Trilhas de aprendizagem na aula de espanhol	Ana Paula Cavalcante de Albuquerque	25/06/2019	DISSERTAÇÃO
Trilhas de aprendizagem: uma proposta a partir do mapeamento de competências na Universidade Federal da Bahia	Laila Gabriele Card	06/02/2023	DISSERTAÇÃO

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Das pesquisas encontradas no banco de dissertações e teses da Capes que utilizaram a trilha de aprendizagem como modelo interativo, observamos que os fundamentos teórico-metodológicos têm um potencial discussão das problemáticas levantadas, a partir do modelo qualitativo de pesquisas.

4.2 Escola Campo da Pesquisa

Antes de fazer uma descrição objetiva da escola campo de pesquisa, apresentamos uma das mais belas expressões de significado da escola, feita pelo mestre patrono da educação brasileira, Paulo Freire, que diz:

A escola é, sobretudo gente, gente que trabalha, que estuda, que se alegra, se conhece, se estima. A escola será cada vez melhor na medida em que cada um se comporte como colega, amigo, irmão. Importante na escola não é só estudar, não é só trabalhar, é também criar laços de amizade, é criar ambiente de camaradagem, é conviver, é se “amarrar nela” (Freire, 2003, p.163).

Assim, motivado pela essência da palavra de Paulo Freire, materializada na função da escola e sua ação diária na vida da comunidade escolar, apresentamos a escola em que desenvolvemos nossa pesquisa de campo, denominada de Escola de Referência em Ensino Médio Dr. Fernando Pessoa de Mélo, criada pelo Decreto Nº 36.119 DO: 21/01/2011, localizada na Travessa Rio Branco s/n, Alto do Areias, Quipapá-PE, CEP. 55.415-000. Única escola de nível médio no município, oferece Ensino Médio Semi Integral; Ensino Médio Regular; Ensino Médio Educação de Jovens e Adultos – EMEJA. Atende à comunidade local, aos distritos e estudantes oriundos da zona rural do município, com um quadro distribuído no turno da manhã e tarde, com vinte turmas do Ensino Médio Semi Integral, noturno da noite com três turmas de EMEJA.

A escola é composta na sua maioria com funcionários efetivos, distribuídos nos diversos setores da escola, profissionais que lecionam, compõe a equipe gestora

administrativa e pedagógica da escola, funcionários da secretaria. Em número, a escola tem aproximadamente 28 professores efetivos, 4 professores contratados, 98% dos professores são especialistas na área do conhecimento que atuam. Conta ainda com uma Gestora, uma Assistente de Gestão, uma Secretária, dois Educadores de Apoio Pedagógico, duas Analistas Educacional, um chefe de biblioteca, um assistente administrativo educacional, seis merendeiras e três agentes de serviços gerais funcionárias da empresa que presta serviço nas escolas da rede estadual de ensino e um Agente Administrativo cedido pelo Setor de Recursos Humanos da Secretaria do Estado.

Recentemente a escola passou por um processo de mudança de jornada de atendimento, sendo agora uma escola de tempo integral de dupla jornada, atendendo estudantes nos três turnos diários em dias úteis.

A escola tem por objetivo contribuir para a formação de estudantes participativos, responsáveis, compromissados, críticos e criativos, oportunizando situações de construção do conhecimento que promovam seu crescimento pessoal e social de forma consciente, visando a sua integração e atuação no meio sociocultural.

A Escola está centrada com os fins estabelecidos pela legislação educacional em vigor que é promover o pleno desenvolvimento do educando. Assim, o compromisso dessa instituição – prestadora de serviço à comunidade – vai além da tarefa de ensinar, abrangendo também outras dimensões que fazem de cada pessoa um ser humano em pleno desenvolvimento de suas habilidades com consciência, plenitude e eficácia. Nesse sentido, percebe que a escola tem como diretriz desenvolver uma linha de trabalho que permita a formação integral dos estudantes, visando a sua inserção na sociedade para o exercício de sua cidadania e contribuir para a formação profissional desses estudantes.

Nesse contexto, cabe à escola garantir aos estudantes das diversas modalidades educacionais o acesso aos signos historicamente produzidos, assegurando, através da sua decodificação a aquisição de competências e habilidades necessárias ao exercício da cidadania, cultivando o senso crítico e oportunizando tempo e espaço para reflexão sobre a realidade, na relação com o outro e com o ambiente em diferentes situações do cotidiano.

Um ensino que compreenda o papel socializador da educação escolar, visando construir uma escola que atue de acordo com as necessidades e peculiaridades de todos que a compõem, uma meta difícil de cumprir que se constitui, entretanto, em um desafio apaixonante.

A tendência educacional do século XXI deverá superar a visão do homem apenas racional e voltar-se para sua condição humana e antagônica. Esperanças, sonhos, desejos, medos, angústias e perplexidades sempre foram fontes criadoras do pensamento e das ciências.

Os saberes ocorrem a partir de práticas reflexivas comprometidas com significados e intencionalidades. Estas são construções de conhecimentos decorrentes da práxis social e histórica, realizada também por um sujeito histórico, consciente de seus determinantes sociais. Assim sujeito e realidade dialogam, se transformam e os saberes são transformados, através dessas práticas, requerendo a presença do sujeito intermediando a teoria com as condições da prática. Portanto, é preciso compreender que os saberes não existem dissociados do sujeito, mas vinculados a ele, enquanto sujeito autônomo, consciente e criador.

Quadro 5 – Sinótico de estudantes matriculados no Novo Ensino Médio - NEM – ano letivo: 2023

Turma	Itinerário Formativo	Matrícula
1º ano A	Trilha I - Linguagens e Natureza (Modos de Vida,)	34
1º ano B	Trilha I - Linguagens e Natureza (Modos de Vida,)	38
1º ano C	Trilha I - Linguagens e Natureza (Modos de Vida,)	40
1º ano D	Trilha II - Matemática (Soluções Ótimas)	34
1º ano E	Trilha III - Humanas (Direitos Humanos)	35
1º ano F	Trilha I - Linguagens e Natureza (Modos de Vida,)	37
1º ano G	Trilha III - Humanas (Direitos Humanos)	38
2º ano A	Trilha I - Linguagens e Natureza (Modos de Vida,)	40
2º ano B	Trilha I - Linguagens e Natureza (Modos de Vida,)	44
2º ano C	Trilha II - Matemática (Soluções Ótimas)	40
2º ano D	Trilha III - Humanas (Direitos Humanos)	42
2º ano E	Trilha I - Linguagens e Natureza (Modos de Vida,)	37
2º ano F	Trilha II - Matemática (Soluções Ótimas)	37
2º ano G	Trilha III - Humanas (Direitos Humanos)	38

Fonte: Diário eletrônico da rede estadual de ensino de Pernambuco – SIEPE.

Dessa forma, entendemos que só a ação docente realizada como prática social pode produzir conhecimentos disciplinares e interdisciplinares: saberes referentes a conteúdos com abrangência social ou mesmo saberes didáticos referentes a diferentes gestões de conteúdos, de dinâmicas de aprendizagem e de valores e projeto de ensino. A apreensão de saberes

pedagógicos só é possível em um sujeito que vai, gradativamente, assumindo uma posição política, cercando-se de sua realidade existencial, transformando-a em direção a todas as suas intencionalidades. Esse sujeito vai fazer uso do necessário conhecimento didático, metodológico e cultural para incrementar as suas práticas pedagógicas.

Quadro 6 – Sinótico de estudantes matriculados no Ensino Médio Semi-Integral – ano letivo: 2023

Turma	Matrícula
3º ano A	38
3º ano B	39
3º ano C	36
3º ano D	26
3º ano E	30

Fonte: Diário eletrônico da rede estadual de ensino de Pernambuco – SIEPE.

Quadro 7 – Sinótico de estudantes matriculados na EMEJA – ano letivo: 2023.1

Turma	Matrícula
I Módulo	38
II Módulo	35
III Módulo	39

Fonte: Diário eletrônico da rede estadual de ensino de Pernambuco – SIEPE – TOTAL GERAL DA ESCOLA – 817

A partir da descrição da escola, trazendo ao conhecimento todo o contexto escolar e seus recursos, que contribuem ou dificultam a ação pedagógica dos seus profissionais, buscando atender sua perspectiva educacional na sociedade.

4.3 Análises epistemológica, didática e cognitiva

Nessa fase primária, buscamos incorporar em todo o processo da pesquisa seus objetivos pré-determinados, a partir da questão norteadora que nos motiva a buscar possíveis propostas de práticas de ensino que contribuam para aprendizagem do objeto matemático da nossa pesquisa, que são as transformações geométricas, incluindo uma análise epistemológica.

Assim, realizamos o levantamento bibliográfico, por meio livros, artigos publicados

em anais e revistas, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)⁶, com o intuito de conhecer aspectos referentes ao ensino das transformações geométricas, seu contexto histórico, as peculiaridades curriculares de sistemas de ensino de alguns países, relacionando as particulares e as aproximações desses sistemas com o do nosso país. Além de propor possibilidades metodológicas de ensino, de maneira interdisciplinar e delimitando o campo de atuação do objeto matemático em estudo para o nosso interesse de pesquisa.

Ainda por meio do levantamento bibliográfico, construímos nosso referencial teórico pautados na proposta de relacionar o objeto matemático a uma proposta de metodologia de ensino, como uma possibilidade de produzir soluções epistemológicas, e fortalecer os processos cognitivos de aprendizagem. Nessa etapa da pesquisa e através dos encontros colaborativos com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, refletimos sobre como se dá o ensino das transformações geométricas e levantamos algumas hipóteses sobre os obstáculos no ensino das transformações geométricas.

A cada encontro fomos avançando nessa discussão e, com isso, propomos possibilidades metodológicas de ensino que consigam superar as deficiências e avançar na consolidação do conhecimento do objeto matemático.

Nessa perspectiva, propomos o ensino das transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem. Nos encontros posteriores, foi promovida a oficina para construção da trilha de aprendizagem. A construção da trilha de aprendizagem foi pautada tendo como pressuposto teórico a teoria de Van Hiele, que orienta os níveis de aprendizagem para as atividades e desafios propostos na trilha, como também a organização dessas atividades em níveis de conhecimento a partir da orientação da teoria e as etapas de cada nível.

Dessa forma, o estudante será impulsionado a construir um percurso que lhe faça perceber seu conhecimento sobre o objeto matemático e como utilizá-lo na aplicação de problemas do cotidiano.

Após a análise dos professores, referente à construção da trilha, foi proposta a aplicação dessa metodologia de ensino em um grupo de estudantes, escolhido pelos próprios professores, com a finalidade de percepção da proposta.

Na sequência deste capítulo, apresentamos de maneira detalhada todos os aspectos percebidos da aplicação da proposta metodológica de ensino das transformações geométricas.

⁶ Ver: <https://bdtd.ibict.br/vufind/>.

4.4 Análise a priori de experiências

Por algumas observações feitas em sala de aula, e por meio de artigos que tratam sobre o tema que estamos pesquisando, verificamos que uma parte considerável dos estudantes apresentam certas dificuldades em conteúdos que exigem a aplicação das propriedades das transformações geométricas. Um exemplo bem comum é quando buscam aplicar as relações métricas no triângulo retângulo ou, muitas vezes, em situações elementares de visualização e dedução de procedimentos geométricos em situações-problemas envolvendo áreas e perímetros de figuras planas ou objetos tridimensionais. Essa deficiência se dá pela má formação básica no conteúdo das transformações geométricas ou ainda, ausência de conhecimento sobre as propriedades e conceitos de posicionamento das figuras e suas variações dimensionais.

A partir do conhecimento sobre essa realidade, o professor precisa propor possibilidades de ensino através de metodologias que promovam a produção de significados para o estudante. Uma possibilidade metodológica é um procedimento que promova a capacidade de mobilizar os conhecimentos de caráter perceptível e intuitivo, onde o estudante protagonize a autonomia do saber colocando em prática suas habilidades cognitivas, suas experiências sobre o objeto matemático e sua capacidade lógica de argumentar e dar significados à relação do objeto em estudo com seu conhecimento de mundo.

Como proposta metodológica de ensino das transformações geométricas, conhecimento básico para realizar aplicações em situações problemas de geometria, propomos a trilha de aprendizagem como um processo de ensino de desenvolvimento de competências e com alta capacidade de proporcionar uma aprendizagem duradoura, sólida e significativa.

Portanto, partindo desses pressupostos, pautamos o percurso metodológico da pesquisa com foco na busca de uma possível resposta à questão de pesquisa, de acordo com os objetivos traçados.

5 CONSIDERAÇÕES E REFLEXÕES FINAIS

Ao longo da nossa pesquisa, buscamos investigar sobre como se dá o ensino das transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem, propondo assim, um processo de aprendizagem para o ensino dos conceitos e propriedades geométricas, precisamente das transformações geométricas. Para tanto, trouxemos em nossa fundamentação teórica, especialistas que pesquisam as duas vertentes que são pilares da nossa investigação, de um lado o objeto matemático as transformações geométricas e de outro o objeto metodológico, a trilha de aprendizagem, buscando desde sempre compreender suas aproximações relacionadas ao ensino. Além do mais, buscamos fazer algumas abordagens de ensino das transformações geométricas através de obras artísticas de autores internacionais e locais, com o intuito de dar significados a aprendizagem do objeto matemático da nossa pesquisa. Compreendemos que se faz necessário apresentar de maneira detalhada e acessível os conceitos e propriedades das transformações geométricas e assim, o apresentamos, fundamentada a partir do livro, “Construções Geométricas” do professor e pesquisador do IMPA, Eduardo Wagner (Ano 2007).

Em relação a metodologia de ensino, a trilha de aprendizagem, apresentamos definições e modelos para sua construção, além de enfatizar sobre sua potencialidade para o ensino de competências específicas e com possibilidades de agregar na sua composição, diversos recursos e abordagens. Para tanto, buscamos construir essa metodologia de ensino em colaboração com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, através de encontros agendados e dentro dos encontros formativos proposto pela organização da escola. Nesses encontros foram discutidos o ensino das transformações geométricas, seus desafios e possibilidades de aprendizagem e assim foi proposto na construção da trilha de aprendizagem de transformações geométricas, atividades que contemplem em suas abordagens, situações que impulsionem a produção de significados, verificando sempre o que se sabe e consolidando esse saber, em etapas e níveis específicas da trilha.

Dessa forma, adotamos a teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, na estruturação da trilha, ou seja, na composição das atividades que foram organizadas por níveis de conhecimento dos conceitos e propriedades das transformações geométricas. Toda essa construção foi direcionada pela metodologia da pesquisa na qual adotamos, compreendendo as possibilidades que o percurso metodológico ofertou, permitindo uma melhor e adequada relação com os dados e os objetivos da pesquisa. Ainda, seguindo todo os procedimentos metodológicos da pesquisa, percebemos que a utilização da teoria do

pensamento geométrico de Van Hiele nas abordagens das atividades da trilha, se limita ao aspecto conceitual referente as propriedades de reconhecimento e operações com as figuras planas e espaciais, não apresentando aspectos conceituais as transformações que essas mesmas figuras sofrem por alguma ocasião de posição ou dimensão.

Mesmo assim, buscamos atingir uma maior aproximação fundamentada pela teoria de Van Hiele, com a proposta das atividades presente na trilha de aprendizagem de transformações geométricas, tendo em vista que a pesquisa possa ser futuramente retomada, no intuito de uma possível explicação mais contundente para a aproximação da teoria do pensamento geométrico em aplicações de transformações geométricas.

Portanto, sendo assim, esperamos que nossa pesquisa contribua para a academia e para a sociedade, na perspectiva de um olhar crítico sobre os métodos de ensino de geometria, gerando uma reflexão para os educadores e impulsionando mudanças estruturais no processo de ensino. Dessa forma, propomos uma metodologia que permite a personalização do ensino, que ative a aprendizagem, que se utilize das mais diversas tecnologias e que relacione de maneira significativa com a vida do estudante, respeitando a individualidade, bem como suas necessidades e motivações, trazendo na sua praticidade o protagonismo do conhecimento no estudante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, José Joelson Pimentel de. **Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de matemática**. 2012. 257f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador 2012. Disponível em: https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/jose_joelson.pdf. Acesso em: 3 mai 2023.
- ARTIGUE, Michele. Ingénierie Didactique”. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.9.3, pp.281-308, 1988. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>. Acesso em: 3 mai. 2023.
- ARTIGUE, Michele. Engenharia Didáctica. *In: DIDÁTICA DAS MATEMÁTICAS*. Brun, J. (org.). Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Disponível em: <https://reer.emnuvens.com.br/reer/article/download/11/8/17>. Acesso em: 3 mai. 2023.
- BASTOS, R. **Transformações geométricas. Grupo de trabalho de geometria da APM**. Set/2021.
- BOGDAN, Robert S.; BIKEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. 12. ed. Portugal: Porto, 2003.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CHIRÉIA, José Vagner. **Transformações geométricas e a simetria: uma proposta para o ensino médio**. Londrina, 2013. 89 f.
- ESQUERDO, C. A. S. **Transformações Geométricas no Plano: Uma abordagem inspirada em Escher**. 2018. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.
- FERREIRA, Ana Cristina. **Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo**. Campinas, SP. 2003.
- FILIZZOLA, Pedro. O que são trilhas de aprendizagem? Aprenda a montar a sua! *In: Blog sambatech*, junho de 2021. Disponível em: <https://sambatech.com/blog/insights/trilhas-de-aprendizagem/>. Acesso em: 15 set. 2021.
- FREIRE, Paulo. **A escola**, *Nova Escola*, nº 163, Jun-Jul, 2003.
- GIOVANNI, José Ruy, GIOVANNI, Jr. **Matemática pensar e descobrir**. São Paulo: FTD, 2000.
- GUERREIRO, Antônio. Concepções e práticas na formação inicial de professores sobre transformações geométricas. **Revista Interacções**, [S. l.], v. 15, n. 50, pp.23-45, 2019. DOI: 10.25755/int.18787. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/18787>. Acesso em: 4 mai. 2023.
- JOHNSTON, Marilyn; KIRSCHNER, Becky. **This issue. Theory into the Practice**, vol.3, no. 3, pp.146-148, 1996.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? A educação matemática em revista. Geometria. **Blumenau**, número 04, pp.03-13, 1995. Edição especial.

MABUCHI, S. T. **Transformações Geométricas - A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. PUC – São Paulo, 2000. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11217>. Acesso em: 20 mai. 2021.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). **Standares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática**. S.A.E.M. Thales.

NCTM (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. NCTM: Reston VA.

PPP. **Projeto Político Pedagógico da Escola de Referência em Ensino Médio Dr. Fernando Pessôa de Mello**. Quipapá, 2022.

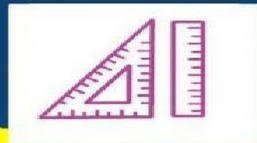
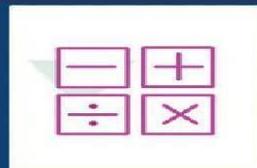
SOUSA, Ivan Bezerra de. **Produção de significados a partir de investigações matemáticas: Função afim e contextos cotidianos**. 2018. 288f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande 2018. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3339>. Acesso em: 4 mai. 2023.

TAFNER, E. P.; TOMELIN, J. F. E; MÜLLER, R. B. Trilhas de aprendizagem: uma nova concepção nos ambientes virtuais de aprendizagem – AVA. *In*: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 18. São Luís, 2012.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez (Autores Associados), 1986. (Coleção temas básicos de pesquisa-ação).

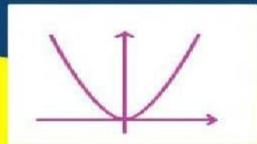
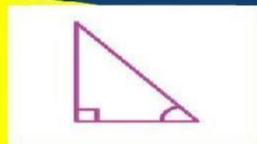
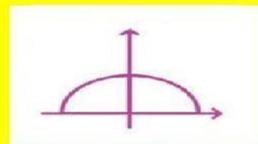
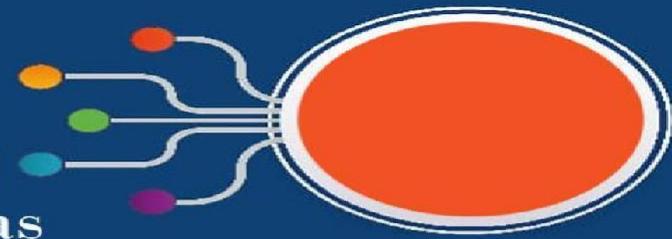
WAGNER, E. **Construções geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

APÊNDICE A - PROCESSO PRODUTO EDUCACIONAL – PPE

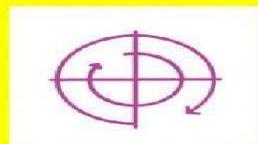
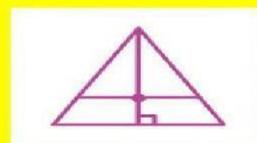
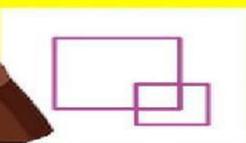
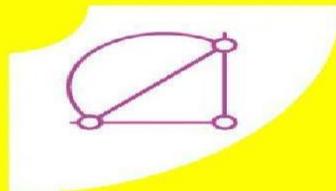
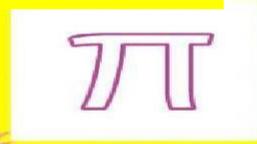
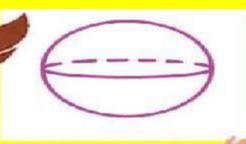


Trilha de Aprendizagem

Transformações Geométricas



ALEX ANTONIO DA SILVA
JOSÉ JOELSON PIMENTEL DE ALMEIDA
Organizadores



**ALEX ANTONIO DA SILVA
JOSÉ JOELSON PIMENTEL DE ALMEIDA
ORGANIZADORES**

PRODUTO EDUCACIONAL

TRILHA DE APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586t Silva, Alex Antônio da.
Trilha de aprendizagem de transformações geométricas
[manuscrito] / Alex Antônio da Silva. - 2023.
43 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática - CCT. "

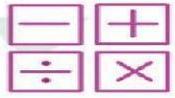
1. Trilha de aprendizagem. 2. Transformações geométricas. 3. Trabalho colaborativo. 4. Produto educacional.
I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Fernanda M. de A. Silva - CRB - 15/483

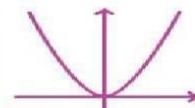
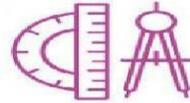
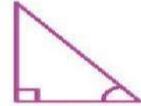
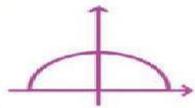
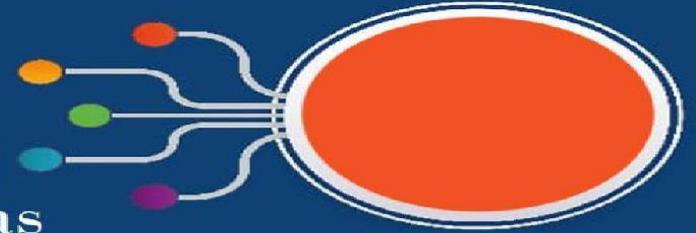
CoBib/UEPB

Campina Grande-PB, 2023

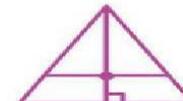
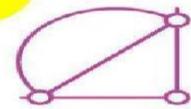


Trilha de Aprendizagem

Transformações Geométricas



SEJAM BEM-VINDOS(AS)!



CONVITE A LEITURA

Minha amiga professora, meu amigo professor,

É com tamanha alegria, presteza e responsabilidade que apresentamos esse material de apoio para o processo de ensino e aprendizagem em transformações geométricas, construída por meio de um trabalho colaborativo com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, intitulado como, “Trilha de Aprendizagem de Transformações Geométricas”.

Estruturamos uma sequência de atividades, em forma de trilha com etapas e níveis de saberes postos a partir da teoria do pensamento geométrico de Van Hiele, que poderá ser trabalhada nas salas de aulas, com estudantes executando-a individualmente ou em grupo, com o intuito de proporcionar uma aprendizagem sólida e significativa, atendendo as competências e habilidades a serem desenvolvidas para cada etapa do ensino. Na construção desse material, tivemos a colaboração dos membros do grupo de pesquisa LEEMAT, em que agradecemos rendemos eternos e sinceros agradecimentos.

A trilha de aprendizagem permite que os alunos aprendam sobre transformações geométricas em uma progressão lógica, começando com conceitos básicos e avançando para tópicos mais complexos. Isso ajuda os alunos a construir uma compreensão sólida e sequencial do assunto. Ao ensinar transformações geométricas de forma contextualizada, os estudantes conseguem entender como esses conceitos são aplicados em situações do dia a dia. Uma trilha de aprendizagem bem estruturada ajuda os estudantes a desenvolver essas habilidades, pois são gradualmente introduzidos conceitos mais complexos à medida que avançam na trilha. A trilha de aprendizagem tem sua funcionalidade desafiar os estudantes com problemas progressivamente mais difíceis, incentivando-os a desenvolver habilidades de resolução de problemas ao longo do tempo, compondo atividades práticas e visualizações que ajudam os estudantes a desenvolver essas habilidades essenciais.

Uma trilha de aprendizagem pode ser adaptada para atender às necessidades individuais dos alunos. Alunos com diferentes níveis de habilidade podem progredir em taxas diferentes, garantindo que cada aluno compreenda os conceitos antes de passar para o próximo estágio.

Sendo assim, esperamos que esse trabalho possa contribuir de alguma forma para fortalecer o ensino e aprendizagem de transformações geométrica e que impulse momentos de muita interatividade e colaboração no sucesso das aprendizagens.

SUMÁRIO

1. OBJETIVOS	04
1.1 Objetivo Geral	04
1.2 Objetivo Específico	04
2. TRILHA DE APRENDIZAGEM.....	05
2.1 Abordagem inicial sobre a Metodologia de Ensino Trilha de Aprendizagem.....	07
2.2 A Trilha de Aprendizagem na Perspectiva da Teoria de Van Hiele.....	08
2.3 Produzindo significados por meio de uma trilha de aprendizagem no ensino das transformações geométricas	09
3. O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	10
3.1 Transformações Geométricas: Conceitos e Propriedades	10
3.2 O Ensino de Transformações Geométricas: Reflexões e Perspectivas	17
3.3 As Transformações Geométricas em diversos contextos artísticos	18
4. TRILHA DE APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	21
4.1 Atividade: Etapa 1 – Nível 1	24
4.2 Atividade: Etapa 1 – Nível 1	25
4.3 Atividade: Etapa 1 – Nível 1	26
4.4 Atividade: Etapa 1 – Nível 2	27
4.5 Atividade: Etapa 2 – Nível 3	30
4.6 Atividade: Etapa 2 – Nível 4	34
4.7 Atividade: Etapa 2 – Nível 4	35
4.8 Atividade: Etapa 3 – Nível 5	38
4.9 Atividade: Etapa 3 – Nível 5	39
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
REFERÊNCIAS.....	43

1. OBJETIVOS

1.1 Objetivo Geral

O ensino de transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem tem por objetivo fornecer aos estudantes uma compreensão sólida desses conceitos, promover habilidades práticas e estimular o pensamento crítico, preparando-os para aplicar esses conhecimentos em várias disciplinas e situações do mundo real.

1.2 Objetivo Específico

- Desenvolver uma compreensão profunda dos conceitos fundamentais relacionados às transformações geométricas, como tradução, rotação, reflexão e dilatação.
- Desenvolver a capacidade dos alunos de usar transformações geométricas para resolver problemas complexos relacionados a padrões, simetria e congruência.
- Promover a aprendizagem autodirigida, permitindo que os alunos explorem tópicos relacionados às transformações geométricas de acordo com seus interesses e níveis de proficiência.

2. TRILHA DE APRENDIZAGEM:

As trilhas de aprendizagem podem ser definidas como um “conjunto integrado, sistemático e contínuo de desenvolvimento de pessoas e profissionais”. As trilhas pretendem combinar as necessidades dos estudantes com o conteúdo transmitido pelo discente. Para isso, é importante considerar as individualidades de cada aluno e as limitações dos corpos discente e docente.

O método utilizado pela trilha de aprendizagem reforça a ideia de que o aluno precisa protagonizar o estudo, criando autonomia para que a transmissão do conteúdo acadêmico se efetive.

Desse modo, o uso de ferramentas tecnológicas deve se aliar às ferramentas tradicionais. Aulas expositivas, livros, jogos, vídeos e podcasts são alguns exemplos de instrumentos importantes para compor uma trilha de aprendizagem.

A finalidade da utilização do método é transformar o conhecimento técnico em um aprendizado completo, que engloba o desenvolvimento de competências. Assim, as trilhas de aprendizagem são experiências que facilitam a absorção do conhecimento através da combinação de diferentes tipos de atividades durante a formação em uma instituição de ensino superior.

- O objetivo das trilhas de aprendizagem é fazer com que o aluno passe por uma sequência contínua de treinamentos sobre determinado conteúdo e, assim, melhore o seu nível de entendimento sobre o assunto.
- Nesse sentido, as trilhas funcionam com uma junção de conteúdo a serem repassados para o aluno, para que o seu aprendizado possa ser mais rico e de maior qualidade. Isso acontece a partir do envolvimento de diversos materiais sobre um só tema, fazendo com que o estudante tenha contato com várias frentes e não veja o assunto de uma ótica só.
- Esse caminho a ser seguido e os materiais a serem estudados deverão ser selecionados pelo time pedagógico, professores e coordenadores, visando as necessidades de cada disciplina e turma/estudante.
- É importante que uma trilha apresente as seguintes características:

Por se tratar de um método que potencializa o aprendizado e promove o desenvolvimento integral do aluno, as trilhas de aprendizagem mostram-se como vantajosas para a educação superior. A seguir, apresentamos os principais benefícios:

- Proporcionam um aprendizado inclusivo - As trilhas de aprendizagem combinam diversas ferramentas no processo de transmissão do conteúdo. Assim, os estudantes podem optar pelo uso de ferramentas que mais se encaixam em seu perfil pessoal e em suas individualidades. Por exemplo, o estudante que possui maior facilidade em assimilar a matéria lida será contemplado assim como o aluno que tem preferência pelo conteúdo em vídeo.
- Promovem autonomia - A utilização das trilhas de aprendizagem permite que o discente opte pelo melhor caminho para seu desenvolvimento. Desse modo, gera maior autonomia para o estudante e o transforma em protagonista, o que aumenta o engajamento e promove uma postura mais ativa em relação ao aprendizado.
- Incentivam o ensino por competências - A aprendizagem por competências é uma metodologia que se opõe à educação tradicional de ensino por disciplinas. Ela conecta diferentes áreas do saber e combina conhecimentos, recursos, atitudes, valores, estímulos e habilidades.
- Um dos benefícios da utilização das trilhas de aprendizagem é romper com o modelo tradicional de ensino. Nesse sistema, os alunos passam a aprender por combinações de ferramentas que complementam seu aprendizado e desenvolvem novas capacidades, como habilidades práticas, técnicas, cognitivas e socioemocionais.
- Nivelamento do conhecimento - Outro benefício das trilhas de aprendizagem é conseguir **auxiliar no processo de nivelamento da aprendizagem**, fazendo com os estudantes estejam no mesmo lugar em relação ao conteúdo. Não havendo atrasos e desigualdades muito grandes, os alunos ficam mais motivados, pois caminham juntos no assunto estudado, o professor pode seguir com a matéria sem se preocupar com quebras e, assim, a qualidade do ensino.

2.1 Abordagem inicial sobre a Metodologia de Ensino Trilha de Aprendizagem

Para tanto, apresentamos em nossa pesquisa as “trilhas de aprendizagem” como uma ferramenta de grande potencialidade para aferir e impulsionar as competências inerentes ao objeto matemático, as transformações geométricas. As trilhas de aprendizagem proporcionam um resultado mais voltado a conhecer no estudante seus saberes relativos às propriedades e conceitos das transformações geométricas e como se pode planejar ações e atividades que produzam no estudante o aprofundamento sobre o objeto matemático.

Segundo Tafner, Tomelin e Müller (2012), as trilhas de aprendizagem são caminhos flexíveis e alternativos para o desenvolvimento intelectual. As trilhas de aprendizagem também são identificadas por sinônimos como “caminhos de aprendizagem”, “percurso de aprendizagem” e, em língua inglesa, “learning path”, “learning route”, “learning itineraries”. É possível perceber que os autores apontam como deve ser uma trilha de aprendizagem, cujo objetivo, além de uma abordagem de cunho cognitivo, impulsiona aspectos que desenvolvem a autonomia do estudante, o senso crítico sobre a sua ação na aprendizagem, com um itinerário que se apresenta por etapa e nível de conhecimento.

As trilhas de aprendizagem têm como base fundamental a teoria de competências, levando em consideração o conhecimento prévio do estudante, agregando atividades práticas e teóricas para atingir o objetivo final, produzindo um pós-aprendizado, ou seja, um alto nível de conhecimento sobre o objeto de estudo. Ainda segundo Filizzola, uma das grandes vantagens das trilhas de aprendizagem é que não é preciso se ater a somente um formato ou recurso de conteúdo. Materiais em vídeos, games, podcasts, infográficos, testes e, até mesmo, fóruns, podem ser utilizados.

Para que uma trilha cumpra com o objetivo proposto e seja eficiente para a aprendizagem, segundo o artigo de Filizzola, deve cumprir três requisitos básicos:

Flexibilidade: Onde o estudante deve se sentir motivado a ser protagonista de sua aprendizagem, por isso as trilhas devem ter atividades obrigatórias e outras escolhidas pelo próprio aluno, de forma a complementar sua jornada de conhecimento.

Experiência: nessa parte das trilhas, visam o pré e pós-aprendizagem, por isso, a experiência deve ser pensada desde o primeiro contato até a forma como o estudante colocará em prática os conhecimentos adquiridos.

Diversidade de estímulos: Nas trilhas, devemos aproveitar todos os recursos para potencializar a aprendizagem.

Dessa forma, adotar trilhas de aprendizagem como recurso que permite a personalização do ensino, respeitando a individualidade de cada pessoa, bem como suas necessidades e motivações, traz na sua praticidade operacional o protagonismo do conhecimento para o estudante, dando mais autonomia e responsabilidade a ele.

Além disso, nesse procedimento metodológico, as trilhas, ao serem aplicadas, podem estimular o compartilhamento de conhecimento, através de caminhos alternativos de aprofundamento sobre o objeto do conhecimento, nesse caso as transformações geométricas, buscando proporcionar o desenvolvimento integral do estudante sobre o campo de estudo.

2.2 A Trilha de Aprendizagem na Perspectiva da Teoria de Van Hiele

O modelo da teoria da aprendizagem geométrica de Van Hiele é dividido em cinco níveis de compreensão, o qual se inicia com o nível básico, ou zero, que está relacionado a competência da percepção visual-geométrica e finaliza com o nível mais elevado desse processo, rigor que poucos estudantes chegam a esse nível, pois o mesmo exige certa compreensão de aplicabilidade formal de maneira abstrata e dedutiva.

A Teoria de Van Hiele se torna um excelente suporte para avaliar o nível de desenvolvimento do raciocínio dos sujeitos e desenvolver uma proposta de ressignificação dos conceitos básicos da geometria plana. Além disso, ainda reforça a crença nas potencialidades da teoria como um caminho teórico e metodológico capaz de sustentar um projeto consistente no ensino de Geometria. No mais, devemos explicar que a teoria do pensamento geométrico, apresenta limitações na sua real relação entre a idade e nível de conhecimento, quando rigorosamente acompanhado a essa aprendizagem.

Essa teoria apresenta uma certa ordem processual da aprendizagem geométrica, pois compreende que a linguagem geométrica, o raciocínio e intuição são obtidos gradualmente pelos estudantes, para que, em situações posteriores, possam identificar figuras e propriedades nos mais diversificados níveis e etapas produzindo outros significados, a partir de um processo de construção própria do estudante.

Portanto, na construção da trilha de aprendizagem das transformações geométricas, buscamos compreender os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico idealizados por Van Hiele, como teoria orientadora, para uma melhor elaboração do material a ser aplicado no processo de coleta de dados dessa pesquisa.

2.3 Produzindo significados por meio de uma trilha de aprendizagem no ensino das transformações geométricas

A construção da trilha de aprendizagem se deu a partir de intensa discussão nos encontros colaborativos com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, sobre as dificuldades de aprendizagem voltadas aos conceitos e propriedades das transformações geométricas, nas diversas complexidades de abordagem, percebidas a partir da linguagem não acessível ao estudante e a falta de estímulos associados a suas perspectivas. Sendo assim, a metodologia de ensino trilha de aprendizagem apresenta essa característica oferecer oportunidades aos alunos para produzir significados ao conhecimento teórico das transformações geométricas.

Almeida (2012), de maneira precisa e profunda, remete às diversas formas e relações da linguagem, na perspectiva de produzir significados.

Sabemos que uma poesia pode ser assim considerada apenas quando o poema é lido, interpretado, declamado. Assim ele adquire alma, vira poesia, música, aos ouvidos de quem o ouve, lê, sente. Podemos dizer que assim é com qualquer texto, inclusive matemático. Enquanto escrito, impresso em um suporte qualquer, é apenas um texto, no qual se verificam características sintáticas diversas. Quando lido, aí sim podemos dizer que há uma realização matemática dele. A Matemática se faz presente. Mas isto somente se essa *leitura* for acompanhada de significados por quem a lê, dando-lhe alma, sentido (Almeida, 2012, p.16).

No processo de produção de significados, é fundamental estabelecer uma interação propositiva entre os envolvidos, de um lado o professor orientando e propondo intencionalmente as etapas da trilha, atividades de aplicação e que impulse o estudante relacionar o objeto em estudo, em situações que visualmente se relaciona com seu cotidiano, facilitando a compreensão e a manipulação das formas, em busca de atender um comando e conseqüentemente, se chegar a uma solução ou resposta.

3. O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

3.1 Transformações Geométricas: Conceitos e Propriedades

Como objeto de estudo nas escolas, as transformações geométricas permitem a introdução e a visualização de conceitos como números e medidas, percepção de semelhanças e diferenças e de regularidades entre diversas estruturas, sem a necessidade de realizar sua definição formal prévia. Sem uma boa compreensão, o estudante pode apresentar lacunas no entendimento de conceitos posteriores, que são abstratos, se antes não for realizada a apreensão visual. Com isso, podemos perceber que o início do raciocínio matemático se dá pela visualização, e a construção desse raciocínio é fundamental para que o estudante desenvolva a capacidade de elaborar a solução de problemas mais complexos futuramente.

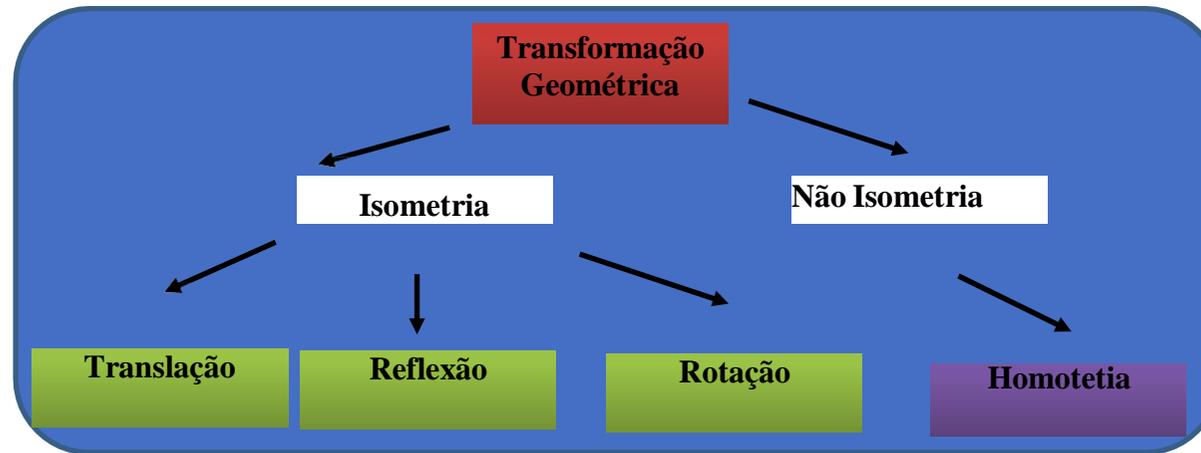
Para tanto, nessa seção buscamos apresentar, de maneira mais detalhada e objetiva, os conceitos e propriedades das transformações geométricas, como também, a partir de alguns exemplos, formalizar o objeto matemático em estudo. Assim, se faz necessário inicialmente, apresentar uma breve definição sobre transformações geométricas, segundo o que diz Wagner, (2007)

[...] transformações geométricas, consiste em um tópico específico da geometria que trata de alterações no posicionamento (transformações isométricas: translações, reflexões, e rotações, que podem ocorrer em relação a um ponto ou a um eixo de simetria) ou nas dimensões (homotetias) de uma dada figura, em relação a uma figura inicial (Wagner, 2007, p.71).

Adotamos essa definição, como princípio norteador do campo de atuação da nossa pesquisa, pois compreendemos que os processos de ensino voltados para as transformações geométricas devem transcender a compreensão dos conceitos e propriedades ensinadas no espaço da sala de aula.

A seguir apresentamos os tipos de transformações geométricas baseada em Wagner (2007), que são objetos de estudo da nossa pesquisa e que direcionam nossa ação investigativa, como também os conceitos e propriedades exemplificadas nas imagens construídas pelo autor, com o intuito de compreender o seu processo de ensino. As transformações geométricas são divididas em isometrias e homotetias e cada uma delas trata de específicas propriedades. O quadro a seguir apresenta os tipos de transformações geométricas e suas dimensões.

Quadro 3 – Organograma das Transformações Geométricas



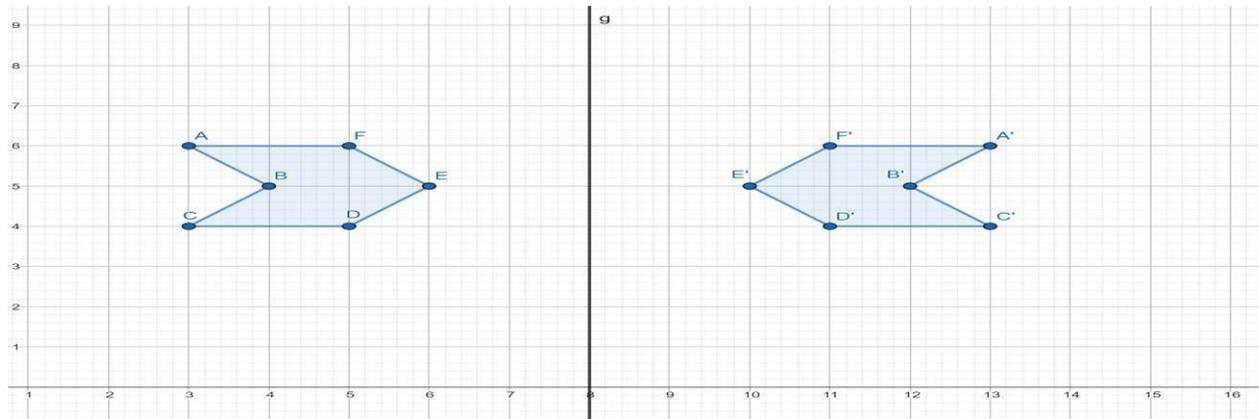
Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Sendo assim, temos que as **Transformações Geométricas de Isometria**: por definição, são aquelas que *preservam distâncias e ângulos*, apresentando as seguintes propriedades:

- A imagem de uma reta por uma isometria é uma reta;
- Uma isometria preserva paralelismo;
- Uma isometria preserva ângulos.

Como consequência da definição, suponho que uma imagem I por uma isometria é uma figura I' *congruente* à imagem I .

Figura 10 – Isometria do polígono ABCDEF em um polígono A'B'C'D'E'F'



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

Podemos notar, a partir da figura acima, que a imagem do polígono formado pelos pontos A, B, C, D, E e F é a imagem denominada I, e o polígono formado pelos pontos A', B', C', D', E' e F' é a imagem I', congruente à imagem I.

Dando sequência, apresentamos os tipos de transformações geométricas de isometria, sendo os seguintes:

Isometria de Translação

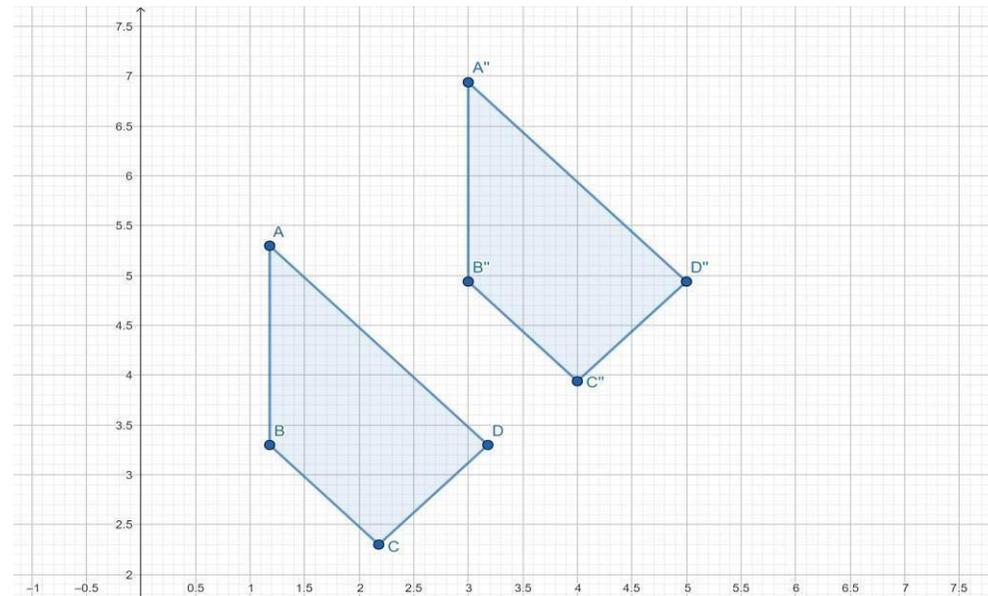
A translação transforma qualquer figura em outra, rigorosamente congruente, conservando assim as distâncias entre os pontos. Sejam A e B pontos distintos do plano. A translação T_{AB} é a isometria que leva um ponto X do plano ao ponto $T_{AB}(X) = X'$, tal que $ABX'X$ é um paralelogramo, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X são colineares, então T_{AB} é tal que XX' está na reta AB e os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio.

¹Por definição livre remete a ideia de manter, conservar, evitar mudar suas medidas dimensionais e de ângulos.

²Definições de Oxford Languages: 2. idêntico ou correspondente na constituição, forma ou estrutura.

Vejamos um exemplo a seguir.

Figura 11 – Translação, transporte do quadrilátero ABCD em um quadrilátero A'B'C'D'



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

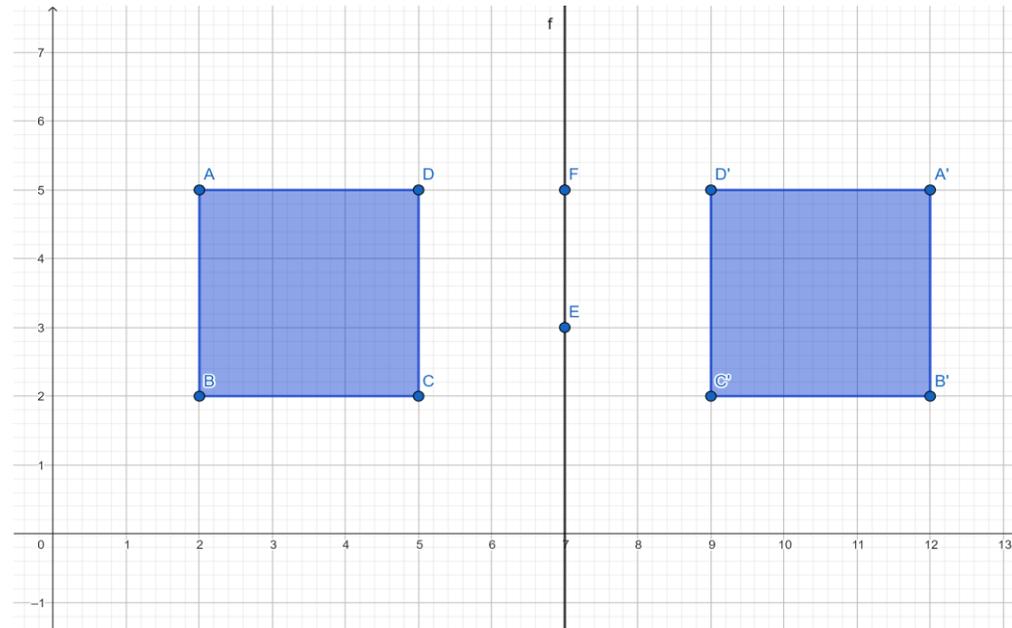
Observando a imagem acima, percebemos que o quadrilátero ABCD possui uma imagem congruente, denominada de quadrilátero A'B'C'D'. Nesse exemplo podemos notar a presença das propriedades da isometria. O quadrilátero muda de localização no plano, conservando o paralelismo e as medidas dos ângulos.

Isometria de Reflexão

A isometria de reflexão permite transformar cada imagem I em uma outra imagem I' , congruente a I . Entretanto, a reflexão inverte a orientação do plano. Por definição para reflexão consideremos uma reta r , a isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano

em seu simétrico P' em relação à reta r , é chamada reflexão na reta r , ou simetria de reflexão na reta r , a qual vamos indicar por R_r . A reta r é chamada eixo da reflexão de R_r . Observe a figura abaixo.

Figura 12 – Reflexão Eixo central do plano, transforma a imagem do quadrilátero ABCD em um quadrilátero $A'B'C'D'$



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

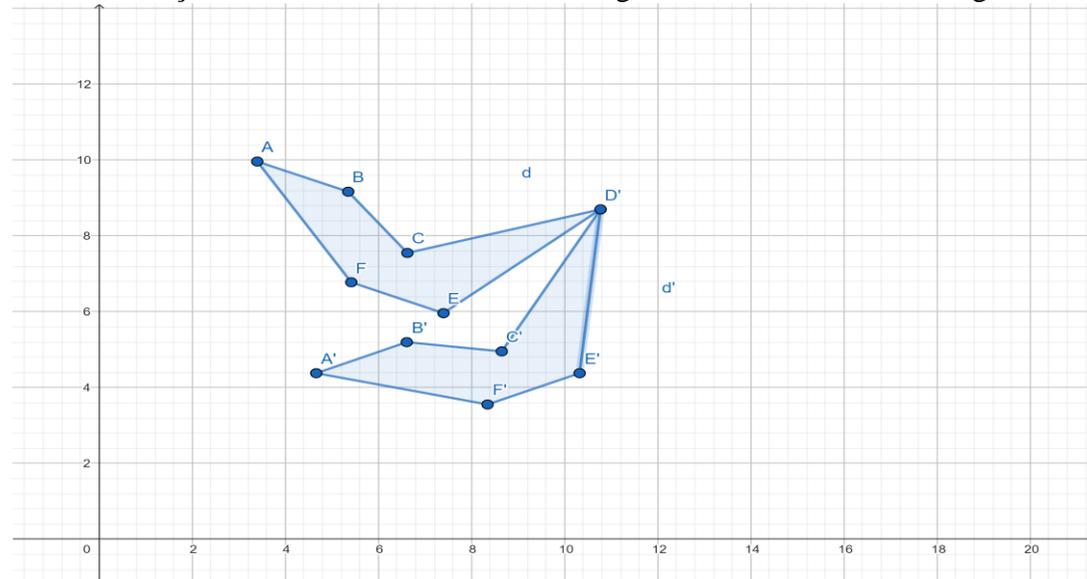
Isometria de Rotação

A rotação é o movimento giratório de uma figura geométrica em torno de um determinado ponto fixo dessa figura. A figura não mudará de tamanho ou forma, mas mudará de direção.

Por definição, seja O um ponto do plano e θ um número real com $0 < \theta \leq 360$. A rotação de centro O e ângulo θ é a isometria $R_{O,\theta}$ que deixa fixo o ponto O e leva o ponto X , $X \neq O$, no ponto $X' = R_{O,\theta}(X)$, tal que $OX = OX'$ e a medida do ângulo orientado (OX, OX') é igual a θ , se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq 180$. Além disso, $OX' = OX$, sendo O o ponto médio de XX' , se $\theta = 180$; e $X' = X$ se $\theta = 0$.

Observamos o exemplo a seguir.

Figura 13 – Rotação de centro D, transforma o hexágono ABCDEF em um hexágono A'B'C'D'E'F'



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

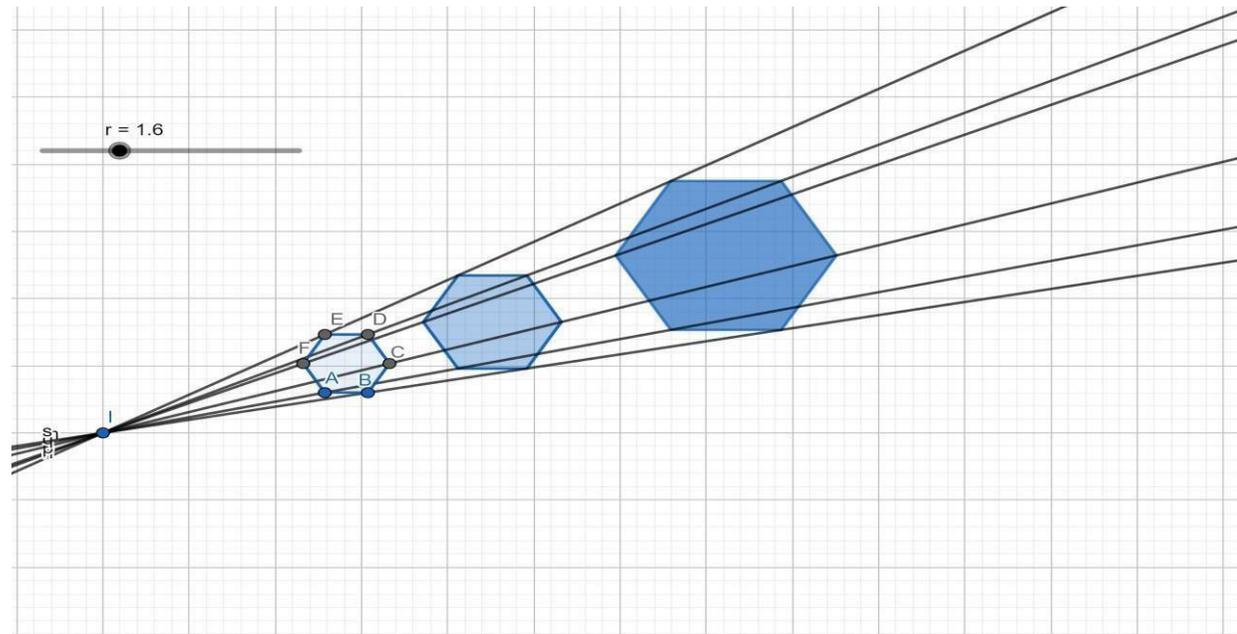
Podemos observar que o hexágono ABCDEF, sendo a figura principal, realiza um movimento giratório sobre o ponto fixo D, deslocando o hexágono sobre o plano, produzindo o hexágono A'B'C'D'E'F' congruente à figura principal. Assim, a partir do movimento ocorrido, se caracteriza como uma transformação geométrica de isometria de rotação.

Antes de prosseguirmos para o estudo sobre a homotetia, porém, é necessário formalizarmos a transformação geométrica semelhança no plano, uma vez que ela vai auxiliar no desenvolvimento do estudo das homotetias. Portanto, segue um estudo sobre semelhança no plano.

Transformações Geométricas de Homotetia: Homotetias são transformações geométricas que “ampliam” ou “reduzem” de forma contínua qualquer imagem geométrica. Observemos a ilustração da definição na figura abaixo.

Por definição uma homotetia ϕ de centro O e razão k é uma transformação geométrica que satisfaz: $\phi(O)=O$ e, para $A \neq O$, temos que: $\phi(A)=A' \Leftrightarrow O, A, A'$ são colineares e $OA' : OA = k$.

Figura 14 – Homotetia do hexágono ABCDEF transformando-o em figuras semelhantes



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023.

A partir da ilustração e os conceitos que foram apresentados ao longo deste capítulo, enfatizamos sobre o quanto o conhecimento geométrico está presente em nosso dia a dia, basta olharmos à nossa volta. Logo, aprender seus conceitos e suas propriedades e tê-las como recursos fundamentais ao conhecimento matemático, e até de mundo, tornando-se imprescindível para o desenvolvimento intelectual do estudante. Contudo, muitos estudos afirmam que a geometria não vem sendo abordada de forma satisfatória, de modo a garantir um ensino significativo em relação aos conceitos geométricos na educação básica, em particular nos anos finais do Ensino Fundamental.

Por esse motivo, esta linha de pesquisa tem a perspectiva de contribuir para transformar a prática pedagógica do professor de Matemática no que se refere ao ensino de geometria, nas diversas etapas de ensino, como também na formação de conceitos bem definidos e estabelecidos, como base para apropriação mais complexa e profunda de estudos posteriores.

3.2 O Ensino de Transformações Geométricas: Reflexões e Perspectivas

O ensino de transformações geométricas é uma parte fundamental do currículo de matemática em muitos sistemas educacionais ao redor do mundo. As transformações incluem reflexões, rotações, transformações e a homotetia, e são importantes não apenas no contexto matemático, mas também em várias disciplinas contextos do conhecimento.

Aqui estão algumas reflexões e perspectivas sobre o ensino de transformações geométricas:

Reflexões:

1. Conceitualização Clara:

- É crucial que os alunos compreendam o conceito por trás de cada transformação. Não deve ser apenas um processo mecânico, mas sim algo entendido de forma intuitiva.

2. Aplicações no Mundo Real:

- Conectar as transformações geométricas com situações do mundo real pode ajudar os alunos a visualizar melhores esses conceitos. Isso pode incluir mapeamento de terrenos, design gráfico, animação, entre outros.

3. Uso de Tecnologia:

- Ferramentas digitais e softwares de geometria dinâmica podem ser usados para demonstrar visualmente as transformações. Isso não apenas torna o aprendizado mais interativo, mas também permite a experimentação, o que pode aprofundar a compreensão.

4. Abordagem Interdisciplinar:

- Integrar conceitos de transformações geométricas com outras disciplinas, como física e biologia, pode mostrar aos alunos como essas ideias são universais e aplicáveis em diversas áreas.

Perspectivas:

1. Avaliação Formativa:

- Em vez de depender apenas de exames tradicionais, o uso de avaliação formativa, como projetos e atividades práticas, pode ajudar a entender realmente se os alunos internalizaram os conceitos das transformações geométricas.

2. Personalização do Ensino:

- Cada aluno tem um ritmo de aprendizagem diferente. Ferramentas educacionais adaptativas podem personalizar o ensino, fornecendo a cada aluno os recursos certos no momento certo.

3. Inclusividade:

- Considerar diferentes estilos de aprendizagem e adaptar as estratégias de ensino pode garantir que todos os alunos, independentemente de suas habilidades ou desafios, tenham acesso ao conhecimento das transformações geométricas.

4. Fase de Resolução de Problemas:

- Enfocar problemas do mundo real que podem ser resolvidos usando transformações geométricas não apenas contextualiza o aprendizado, mas também desenvolve habilidades de resolução de problemas nos alunos.

Em suma, o ensino de transformações geométricas deve ir além da memorização de fórmulas e procedimentos. Deve ser uma experiência envolvente e aplicável, onde os alunos compreendem profundamente os conceitos e veem a relevância dessas transformações no mundo ao seu redor.

3.3 Transformações Geométricas e as expressões artísticas, suas conexões

Para uma melhor sintetização sobre nosso objeto de pesquisa, apresentamos um breve relato histórico sobre os primeiros registros envolvendo as primitivas concepções das transformações geométricas, seu contexto de ensino em algumas redes de educação internacional e nacional, como uma maneira de buscar aproximações do seu ensino, sua relação com a arte, a partir de obras de artistas internacionalmente conhecidos, e a arte de artistas da localidade onde a pesquisa de campo acontece.

Nesse espaço, aproveitamos para apresentar algumas dessas expressões artísticas, que combinam traços específicos das transformações

geométricas e da arte, para representar a visão de mundo do artista e buscar dar significados a sua criatividade, usando de maneira brilhante as dimensões das formas geométricas, com o intuito de caracterizar os seus feitos. A seguir apresentaremos uma sequência de imagens que retratam em seus traços artísticos, a materialização de conceitos e propriedades das transformações geométricas.

Podemos notar essa característica na imagem abaixo, que é um jogo americano de sousplat, utensílio que tem por finalidade, ser posto sobre a mesa de refeição. Observamos que a artista usa e abusa de pontos de crochê que produzem padrões e que fazem destaque ao formato triangular com uma de suas bordas sendo de formato de arco e essa mesma figura é reproduzida de maneira rotacional com o ponto central fixo, reproduzindo outros triângulos congruentes. Dessa forma, notamos que está presente no feito artístico acima propriedades das transformações geométricas de isometria.

Figura 5 – Jogo Americano *Sousplat*



Fonte: Lala's Ateliê – Dona Fátima.

Outra obra está representada na foto abaixo, que é a construção de peças de madeira no formato de coração e de circunferência, e que são produzidos em diferentes tamanhos, conservando os padrões característicos de semelhança entre eles. Ou seja, nessas peças de madeira estão

implícitas no seu feito propriedades da homotestia das transformações geométricas. Nessa arte é possível notar, a partir dos formatos geométricos, figuras que apresentam propriedade da congruência (homotetia).

Figura 8 – Kit Tábuas de Frios



Fonte: Mundo Rústico Ateliê – Alexander de Lima Timm – Freddy Timm.

Os artistas buscam comunicar-se usando diversas linguagens, dando formas e sentidos através de suas obras, refletindo suas percepções de mundo, sua cultura e costumes sociais, muitas vezes, expressam sua maneira ímpar de observar e descrever o mundo por meio de sua arte.

4. TRILHA DE APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS TG's

A trilha de aprendizagem de transformações geométricas foi construída de maneira colaborativa com os professores de matemática da escola campo de pesquisa, em encontros de estudo.

A trilha está estruturada a partir de um percurso formativo que desenvolva no estudante seu protagonismo, dando-lhe autonomia no processo de aprendizagem, com o apoio das suas aprendizagens prévias, compreendendo suas potencialidades e fragilidades sobre o objeto matemático em estudo. Assim, a trilha é composta por etapas e níveis de complexidade, posta a partir da estrutura posta pela teoria de Van Hiele, na qual tomamos como subsídio para as aprendizagens a serem testadas e adquiridas.

A seguir, apresentamos as atividades da trilha seguindo essa padronização e característica das trilhas de aprendizagem.

As etapas e níveis dos itens da trilha segue uma lógica fundamentada na teoria do pensamento geométrico de Van Hiele, adaptada aos conceitos e propriedades específicas e inerentes ao conhecimento sobre as transformações geométricas, e estão postos da seguinte maneira:

Etapas 1 / Nível 1 → Reconhecimento

Os estudantes identificam, reconhecem, descrevem, comparam e classificam as mudanças de posição das representações geométricas, visualmente, mas não identificam as propriedades existentes.

Etapas 1 / Nível 2 → Análise

Os estudantes começam a analisar as propriedades das transformações geométricas através da análise da orientação de mudança de posição no plano e aprendem a simbologia adequada para descrevê-las, através de uma análise informal a partir da observação e experiência.

Etapas 2 / Nível 3 → Ordenação

Os estudantes estabelecem uma ordenação lógica das propriedades das transformações geométricas por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações os tipos de transformações geométricas. O estudante neste nível não compreende o significado de uma dedução ou dos axiomas.

Etapas 2 / Nível 4 → Dedução

Os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas

e provas. A realização de conjecturas e esforços iniciados é espontânea. Um aluno neste nível pode construir provas, não apenas memorizá-las.

Etapa 3 / Nível 5 → Rigor

Os estudantes apresentam a capacidade de compreender demonstrações formais. São capazes de entender axiomas, mesmo na ausência de modelos concretos. Além da descrição característica de cada nível de conhecimento do pensamento geométrico, apresentamos também as fundamentações técnicas que dimensiona a teoria como uma proposta orientativa que o estudante precisa se direcionar nas suas escolhas durante a trilha. Então a teoria tem nas suas características, sua dimensão,

Hierárquica - Onde os níveis obedecem a uma hierarquia, isto é, para atingir certo nível é necessário passar antes por todos os níveis inferiores.

Linguística - Em que cada nível tem uma linguagem, conjunto de símbolos e sistemas de relações próprios.

Conhecimentos intrínsecos - Que em cada nível, o estudante tem conhecimentos que estão intrínsecos e eles não conseguem explicar. No nível seguinte é que esses conhecimentos serão explicados.

Nivelamento - Não há entendimento entre duas pessoas que raciocinam em níveis diferentes, ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno.

Avanço - O progresso entre os níveis depende da instrução oferecida, isto é, o estudante só progride para o nível seguinte depois de passar por atividades específicas, que o preparem para esse avanço.

Para construir a trilha de aprendizagem usamos o google Forms, seguindo a proposta da trilha em uma série de atividades que os estudantes devem concluir sequencialmente para aprender ou adquirir conhecimento sobre o objeto matemático. A seguir, apresentamos o passo a passo da organização e criação da trilha de aprendizagem de transformação geométrica na plataforma do google forms.

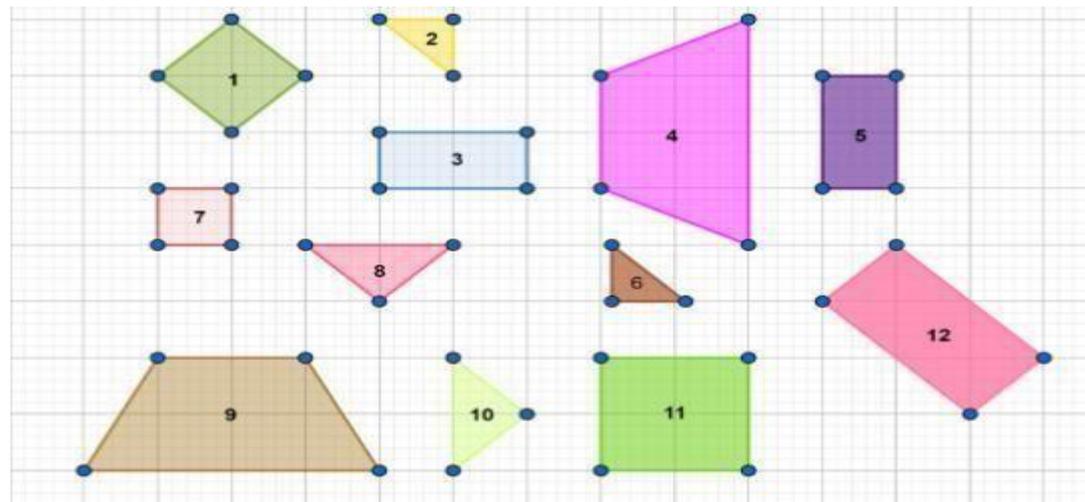
1. **Planejamento:** Antes de começar, definimos claramente o objetivo da trilha de aprendizagem e o objeto matemático que será abordado, que também estão elencados nos objetivos descritos no produto educacional. Assim, pensamos no quantitativo de atividades que serão necessários para atingir o objetivo. Organizamos a trilha de forma lógica e sequencial.
2. **Criar um Formulário no Google Forms:** Acessamos o Google Forms em <https://forms.google.com/> e fizemos o login em nossa conta do Google, para criar o formulário em que será feita a trilha de aprendizagem de transformações geométrica.

3. **Criar a Primeira Atividade:** Criamos uma pergunta para a primeira atividade da trilha de aprendizagem, sendo uma pergunta de múltipla escolha, com alternativas que a partir da resposta do estudante o leva para uma próxima pergunta que poderá ser da mesma etapa e/ou nível de complexidade ou para uma seção que lhe apresente um momento de estudo e revisão como suporte para uma melhor performance na trilha.
4. **Configurar a Navegação:** Na sequência, pós criação das atividades, configuramos o formulário selecionando a opção "Navegação" ou "Lógica de ramificação", com o intuito de programar a sequência de etapas da trilha com base na resposta. Isso, garantindo que os estudantes prossigam para a próxima atividade após concluir a atual ou que seja direcionado para uma seção que revise o conteúdo para um melhor aproveitamento na sequência da trilha.
5. **Adicionar Seções:** Criamos uma seção para cada atividade subsequente da trilha de aprendizagem. Dentro de cada seção, adicionamos as perguntas ou seções de revisão.
6. **Configurar a Lógica de Ramificação:** Configuramos a lógica de ramificação para cada seção, direcionando os estudantes para a próxima seção após a conclusão da seção atual. Certificando de que a trilha de aprendizagem siga a ordem correta.
7. **Personalizar a Aparência (Opcional):** Personalizamos o formulário de acordo com a proposta metodológica da trilha, adicionando imagens, cores e outros elementos de design que tornem a trilha de aprendizagem mais atraente.
8. **Configurar Configurações de Compartilhamento:** Definimos o público participante da trilha, para o livre acesso ao formulário.
9. **Testar a Trilha de Aprendizagem:** Fizemos um teste completo da trilha de aprendizagem para garantir que todas as perguntas, lógica de ramificação e instruções funcionem conforme o esperado.
10. **Compartilhar a Trilha de Aprendizagem:** Após testar e ajustar a trilha de aprendizagem, deixamos disponível o link do formulário para possível aplicação aos estudantes.
11. **Acompanhar o Progresso:** Assim, acompanhamos o progresso dos estudantes, verificando as respostas coletadas no Google Forms ou usando as análises fornecidas pela plataforma.
12. **Fornecer *Feedback* e Avaliação (Opcional):** Por último, teremos a oportunidade de fornecer feedback e avaliação com base em suas respostas.

Dessa forma, apresentamos a sequência de atividade que estão postas na trilha de aprendizagem na plataforma do google forms, atendendo a ordem de etapas e níveis de complexidade de cada atividade.

4.1. Atividade: Etapa 1 – Nível 1

1. Sobre um plano em malha quadriculado, a professora de matemática Alcilene, da escola de Referência em Ensino Médio Dr. Fernando Pessoa de Mélo, do município de Quipapá-PE, colocou a disposição as seguintes representações geométricas, solicitando ao grupo A, que selecione as figuras organizando-os a partir de critérios estabelecidos pelos próprios estudantes. Dessa forma, a partir das possíveis formas de organização, qual seria o conjunto de figuras que representam os trapézios?



- a) Figuras 1, 7 e 11.
- b) Figuras 2, 6, 8 e 10.
- c) Figuras 3, 5 e 12.
- d) Figuras 4 e 9.

4.2. Atividade: Etapa 1 – Nível 1

2. Na aula de matemática sobre transformações geométricas, a professora Alcilene apresentou em slides a imagem abaixo. A partir da imagem a professora propõe a análise da imagem com os seguintes questionamentos:

- O que podemos observar na composição da imagem?
 - O que se pode dizer sobre os componentes da figura?
 - Há relação entre esses componentes?
 - Existe alguma congruência entre os componentes? Se sim, de que forma?
 - Escolha um dos componentes da imagem e indique como ocorre sua construção.
- A partir dos direcionamentos da professora os estudantes foram impulsionados a perceber que:

- a) Que a imagem não tem nenhuma relação com os tipos de transformações geométricas.
- b) Que a imagem apresenta propriedades de homotetia (aumento e redução das representações geométricas)
- c) A isometria de reflexão predomina nas representações geométricas na imagem, a partir da observação dedutiva com o reflexo na água.



4.3. Atividade: Etapa 1 – Nível 1

3. A senhora Fátima Silva, artista de crochê no município de Quipapá-PE, ao produzir um casaco, ela sempre colocar as peças uma ao lado da outra para observar suas semelhanças dimensões. Dessa maneira que dona Fátima faz essas observações, acaba realizando um procedimento que usa propriedades de transformações geométricas. Que tipo de transformação geométrica é possível perceber com essa ação de dona Fátima?



- a) Rotação.
- b) Reflexão.
- c) Translação.
- d) Homotetia.

Essas atividades têm o intuito de verificar e desenvolver noções básicas de espaço, forma e orientação. É a fase inicial desse processo, em que os estudantes estão começando a explorar conceitos básicos e desenvolver suas habilidades de pensamento geométrico, como, exploração de formas, classificando objetos do ambiente de diferentes formas de posicionamento e alteração.

Essas atividades são projetadas para ajudar os estudantes a desenvolver uma base sólida em transformação geométrica, familiarizando-se com os

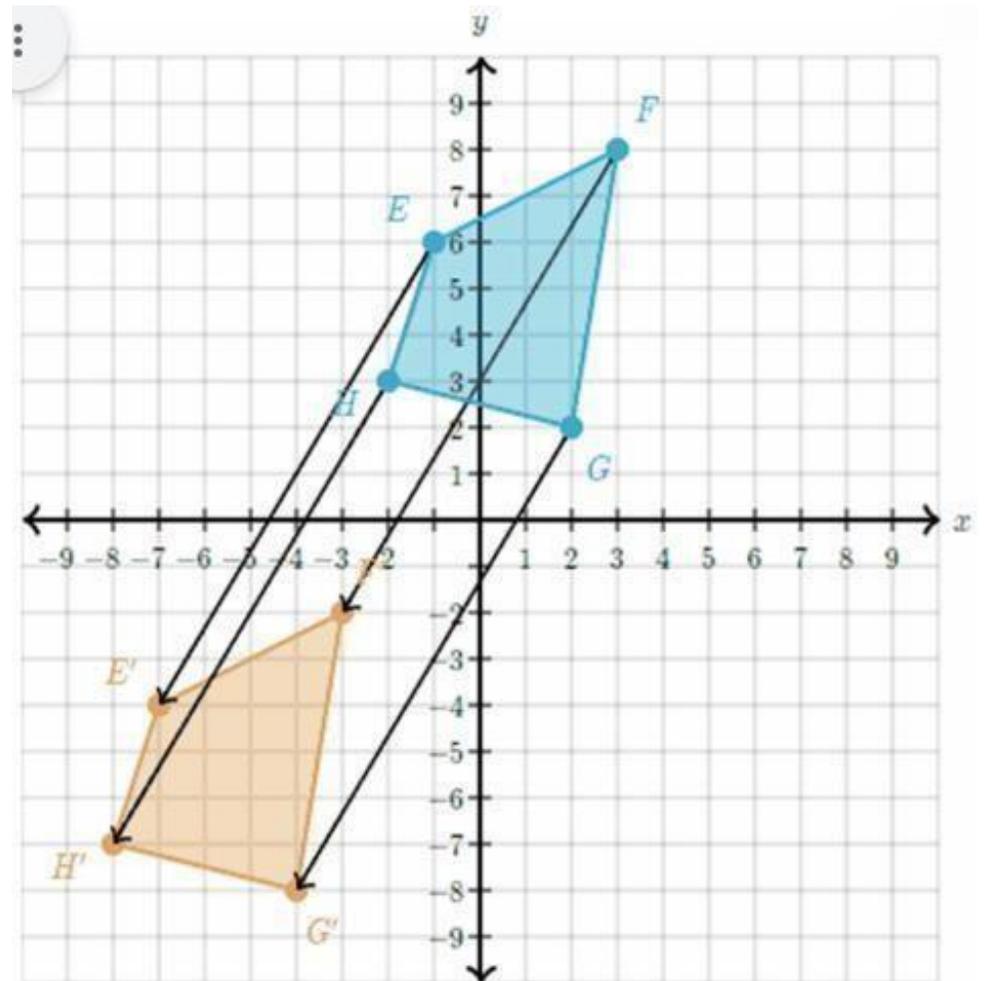
conceitos e as linguagens relacionadas à geometria desde cedo. Conforme os estudantes progredem em seus estudos, eles passarão para níveis mais avançados, explorando tópicos mais complexos, alcançando os níveis mais elevados gradualmente.

4.4. Etapa 1 / Nível 2 → Análise

Os estudantes começam a analisar as propriedades das transformações geométricas através da análise da orientação de mudança de posição no plano e aprendem a simbologia adequada para descrevê-las, através de uma análise informal a partir da observação e experiência.

5. Em uma aula sobre transformação geométrica, a professora Luana, fez algumas abordagens no software dinâmico Geogebra, para facilitar a compreensão dos conceitos e propriedades de cada tipo de transformação geométrica no plano. Assim, em um dado momento foi construído e apresentado a seguinte imagem na interface do geogebra. A professora orientou os estudantes que observe os polígonos EFGH e E'F'G'H' no plano cartesiano. Em seguida a professora induziu os estudantes a partir da observação produzisse uma sequência lógica de deduções sobre a imagem produzida para que eles possam identificar, que tipo de transformação geométrica foi produzida do polígono EFGH no polígono E'F'G'H'. Assim, qual será a resposta correta sobre o tipo de transformação geométrica que ocorreu no polígono, a partir das observações lógicas dedutivas?

- Reflexão em relação ao eixo x.
- Reflexão em torno da origem do sistema de coordenadas.
- Translação.
- Rotação em relação ao ponto F.



Etapa 1 / Nível 2

No contexto da teoria do pensamento geométrico, o nível 2 refere-se a um estágio em que os estudantes estão desenvolvendo uma compreensão mais abrangente das transformações geométricas. Eles começam a entender as propriedades das transformações e como elas podem ser usadas para analisar e resolver problemas geométricos. Aqui estão alguns itens das atividades que podem ser percebidas e exploradas para estudantes no nível 2 da teoria do pensamento geométrico sobre as transformações geométricas: Os estudantes buscam identificar nas diferentes figuras geométricas que as identifique os tipos de transformação eles estão sofrendo observando o efeito resultante na figura. Isso ajuda os estudantes a entender como as transformações interagem umas com as outras. Desenhar a mesma figura após uma determinada transformação. Isso ajuda a fortalecer a compreensão prática das transformações. Explorar as propriedades das transformações, como a invariância de forma e tamanho em algumas transformações, em que os estudantes identifiquem e especifiquem as propriedades em exemplos específicos.

Outra maneira que pode ser abordada são a apresentação de problemas que podem ser resolvidos usando conceitos de transformação es geométricas, como por exemplo, problemas que envolvem encontrar a rotação necessária para que uma figura se sobreponha a outra.

A exploração de padrões e sequências que envolvem transformações geométricas, os estudantes identificam o próximo passo em uma sequência de transformações ou padrões que emergem de uma série de transformações.

A introdução de transformações geométricas usando coordenadas ajuda os estudantes a entender como as coordenadas dos pontos mudam após diferentes tipos de transformações.

Usando jogos interativos que envolvem transformações geométricas ajuda os estudantes a praticar e reforçar conceitos de transformações de maneira divertida. E ainda, discutir exemplos do mundo real que envolvem transformações geométricas, como mapeamento de terrenos, design de objetos e animações por computador, tem a intenção de aproximar os conceitos e propriedades das transformações geométricas na prática.

Ao projetar essas atividades para o nível 2 da teoria do pensamento geométrico sobre transformações geométricas, foi pensado em garantir que os estudantes tenham a oportunidade de aplicar conceitos de maneira prática, resolver problemas do mundo real e desenvolver uma sólida das propriedades das transformações geométricas.

Etapa 2 – Nível 3

No nível 3, os estudantes são capazes de entender e aplicar transformações geométricas de forma mais avançadas. Isso inclui a compreensão de conceitos como reflexão, rotação, tradução e simetria, bem como a capacidade de aplicar essas transformações em diferentes contextos geométricos. Esse nível envolve maior abstração e compreensão das transformações geométricas em comparação com os níveis anteriores.

Os estudantes são capazes de identificar padrões em transformações geométricas. Eles podem considerar regularidades e regras subjacentes nas transformações, como reflexões, rotações e translações. Os estudantes no nível 3 são capazes de aplicar transformações geométricas a objetos específicos. Eles podem, por exemplo, refletir uma figura em relação a uma linha ou girar em torno de um ponto de rotação.

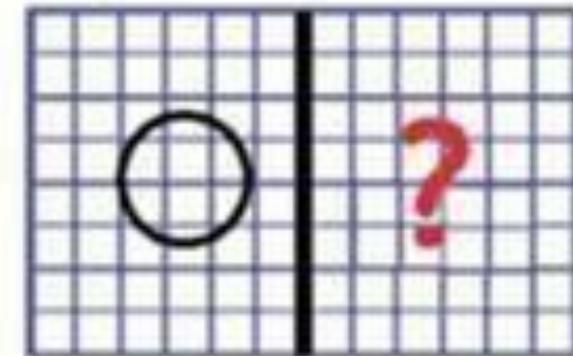
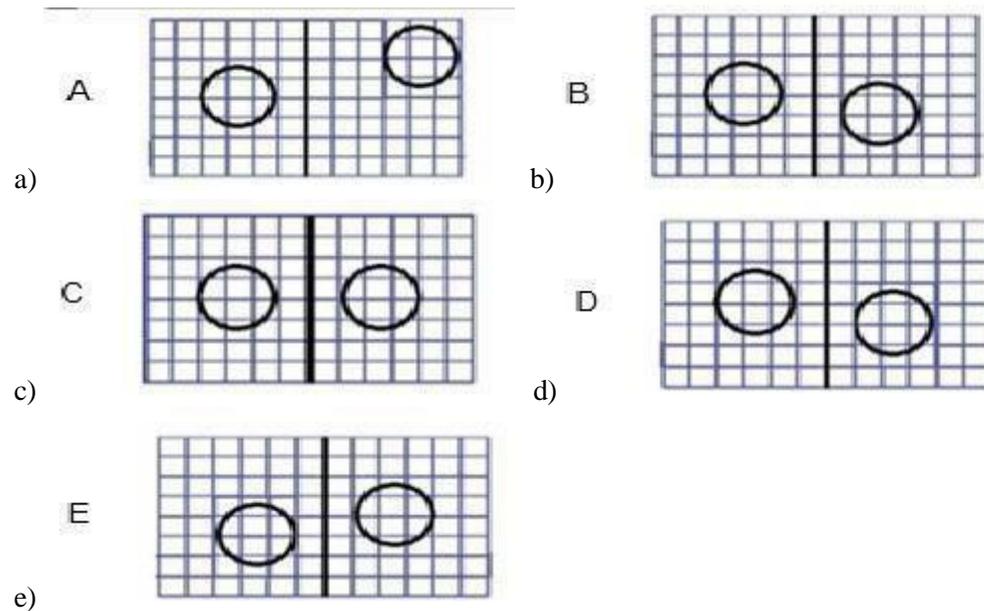
nesse estágio, os estudantes podem começar a usar representações simbólicas para descrever transformações, como notações matriciais para rotações ou sistemas de coordenadas para translações. Os estudantes podem entender como as composições de várias transformações impactando um objeto geométrico. Eles podem realizar sequências de transformações e prever o resultado final. As atividades envolvem a resolução de problemas mais complexos que requerem a aplicação de transformações geométricas para encontrar soluções. Isso pode incluir problemas de simetria, congruência ou transformações em geometria euclidiana.

Nesse estágio, os estudantes podem começar a abstrair conceitos geométricos e aplicá-los a diferentes contextos. Eles podem compreender as relações entre transformações e outras áreas da matemática, como a álgebra linear. Os estudantes podem identificar invariantes, ou seja, propriedades que permaneceram inalteradas sob transformações. Isso requer um nível avançado de compreensão das transformações e das geometrias geométricas. Dessa forma, os estudantes podem começar a generalizar resultados sobre transformações geométricas e desenvolver argumentos lógicos para provar teoremas relacionados a transformações.

Lembrando que o desenvolvimento do pensamento geométrico pode variar de pessoa para pessoa, e nem todos alcançarão o nível 3 da teoria do pensamento geométrico. Além disso, o ensino e a prática desempenham um papel crucial no desenvolvimento desse tipo de pensamento. As atividades e exemplos acima são apenas indicativos do que pode ser esperado em um estágio de pensamento geométrico de nível 3 sobre transformações geométricas.

4.5. Atividade: Etapa 2 – Nível 3

6. Qual das figuras a seguir representa a reflexão da circunferência em relação ao eixo demarcado?



Etapa 2 – Nível 4

O nível 4 é o nível de dedução informal. Neste nível, os alunos são capazes de realizar atividades que envolvem transformações geométricas de forma mais avançada. Aqui estão algumas atividades que os estudantes do nível 4 podem realizar:

1. Compreensão Profunda de Transformações:

- **Raciocínio Dedutivo:** Resolver problemas desativados que algoritmo dedutivo para realizar transformações geométricas complexas, como provar teoremas usando transformações.

- **Identificação de Propriedades:** identificar e utilizar propriedades invariantes sob diferentes transformações (reflexões, rotações, translações, etc.).
- **Transformações Combinadas:** Realizar múltiplas transformações em sequência e compreender o resultado final.

2. Problemas de Construção:

- **Construções Complexas:** Criar figuras geométricas complexas usando uma combinação de transformações geométricas.
- **Problemas de Construção Invertida:** Dada uma figura transformada, construa uma figura original usando transformações geométricas.

3. Exploração de Simetrias:

- **Simetrias Avançadas:** identificar e explorar diferentes tipos de simetrias em figuras geométricas complexas.
- **Padrões Simétricos:** Criar padrões simétricos usando transformações e identificar as regras que governam esses padrões.

4. Coordenadas e Transformações:

- **Transformações no Plano Cartesiano:** Compreender como as transformações internas as coordenadas dos pontos no plano cartesiano.
- **Representação Matricial:** Representar transformações geométricas como matrizes e realizar operações de multiplicação de matriz para combinação de transformações.

5. Exploração de Teoremas:

- **Teoremas de Transformação:** Investigar teoremas que envolvem transformações geométricas e entender as implicações desses teoremas.
- **Provas com Transformações:** Criar e tentar entender que envolvem transformações geométricas, mostrando como as transformações preservam propriedades específicas das figuras.

6. Aplicações em Contextos do Mundo Real:

- **Aplicações Práticas:** Aplicar transformações geométricas em contextos do mundo real, como design gráfico, engenharia, e ciências da computação para modelar e resolver problemas do mundo real.

7. Aprofundamento em Transformações 3D (Opcional):

- **Transformações Tridimensionais:** Explorar transformações no espaço tridimensional, incluindo rotações, reflexões e translações em figuras tridimensionais.

Neste nível, os estudantes não apenas aplicam transformações, mas também compreendem profundamente os princípios subjacentes e podem raciocinar de forma dedutiva sobre problemas geométricos complexos envolvendo transformações. As atividades são desafiadoras e incentivam os estudantes a pensar criticamente sobre as propriedades geométricas das figuras sob diferentes transformações.

Nesse nível, os estudantes estão envolvidos em atividades que envolvem transformações geométricas mais complexas e abstratas. Como, por exemplo:

1. **Composição de Transformações:** Os estudantes exploram como diferentes transformações geométricas (como rotações, reflexões, translações e dilatações) podem ser combinadas em uma única transformação. Eles podem criar sequências de transformações para alcançar um resultado específico.
2. **Transformações Isométricas e Transformações Afins:** Os alunos distinguem entre transformações isométricas (aquelas que preservam distâncias e ângulos) e transformações afins (aquelas que preservam ângulos, mas não necessariamente distâncias). Eles podem trabalhar com exemplos de ambas as categorias.
3. **Transformações em Coordenadas:** As aulas envolvem transformações geométricas a objetos representados em sistemas de coordenadas cartesianas. Isso envolve a manipulação de pontos, vetores e matrizes para realizar transformações.
4. **Simetria e Invariância:** Os estudantes investigam objetos e figuras que mantêm a aparência após uma ou mais transformações. Eles podem estudar figuras simétricas e entender como diferentes transformações envolvem a simetria.

5. Grupos de Transformações: Os estudantes podem explorar grupos matemáticos que descrevem conjuntos de transformações geométricas. Eles podem aprender sobre as propriedades desses grupos, como identidade, inversos e fechamento sob composição.
6. Transformações Projetivas: Em níveis mais avançados, os alunos podem começar a estudar transformações projetivas, que incluem perspectivas e outras transformações que preservam relações de colinearidade.
7. Aplicações em Computação Gráfica e Engenharia: Os alunos podem aplicar suas habilidades de transformação geométrica em campos práticos, como design gráfico, animação 3D, processamento de imagens e modelagem de objetos tridimensionais.

Essas atividades representam um conjunto avançado de conceitos e aplicações dentro do Nível 4 da teoria do pensamento geométrico, voltado especificamente para as transformações geométricas. Os estudantes que alcançam esse nível estão preparados para abordar problemas geométricos mais solicitados e aplicar seu conhecimento em contextos mais complexos.

4.6. Etapa 2 – Nível 4

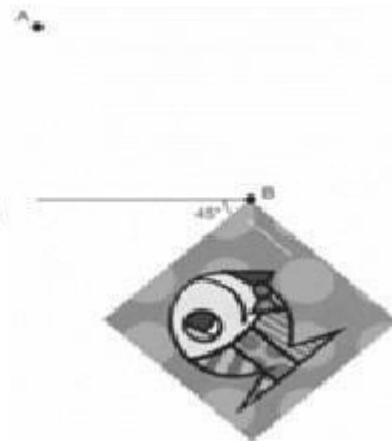
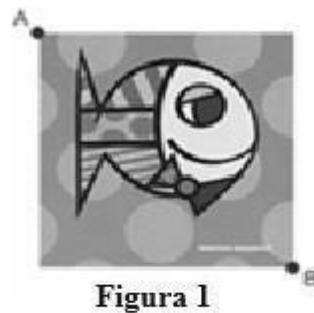
8. Quais características das propriedades das transformações geométricas podemos identificar com maior ênfase na arte de croche da artista Fátima Silva.

- a) Rotação.
- b) Reflexão.
- c) Translação.
- d) Homotetia.



4.7. Etapa 2 – Nível 4

9.(ENEM) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B (figura 1). Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu e girou rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura 2, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte. Para recolocar a tela na posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360° . A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:



- a) 90° no sentido horário.
- b) 135° no sentido horário.
- c) 180° no sentido anti-horário.
- d) 270° no sentido anti-horário.
- e) 315° no sentido horário.

Etapa 3 – Nível 5

A Teoria do Pensamento Geométrico, descreve como as pessoas desenvolvem a capacidade de visualizar, analisar e transformar formas mentais geométricas. No nível 5 dessa teoria, os alunos são capazes de compreender e executar transformações geométricas complexas. As atividades nesse nível podem incluir:

1. **Rotações Complexas:** Os alunos podem ser desafiados a realizar rotações em torno de pontos específicos ou realizar rotações múltiplas para transformar uma figura em outra.
2. **Reflexões em Linhas Arbitrárias:** Pedir aos alunos para realizar reflexões em relação a linhas que não são necessariamente horizontais ou verticais. Isso exige um entendimento mais profundo das propriedades das reflexões.
3. **Traduções em Direções Diferentes:** As atividades podem envolver translações em direções não apenas horizontais e verticais, mas também em flexíveis diagonais ou inclinadas.
4. **Composição de Transformações:** Os alunos podem aprender a combinar diferentes transformações, como rotações seguidas de reflexões ou translações seguidas de rotações. Isso ajuda a desenvolver a compreensão de como as transformações interagem umas com as outras.
5. **Transformações Isométricas e Não Isométricas:** Explorar transformações que preservam ou não preservam as medidas e os ângulos. Isso pode incluir atividades com dilatações ou contrações.
6. **Transformações em Figuras Tridimensionais:** Introduzir transformações em objetos tridimensionais, como cubos ou pirâmides. Isso pode envolver rotações, reflexões e translações em três dimensões.
7. **Problemas do Mundo Real:** Apresentar problemas do mundo real que podem ser resolvidos usando transformações geométricas, como mapeamento de terrenos, projeto de objetos ou planejamento de layout.
8. **Problemas de Quebra-Cabeça:** Criar quebra-cabeças geométricos que requerem uma série específica de transformações para serem resolvidos. Isso ajuda os alunos a desenvolver habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.

9. **Atividades de Software Interativo:** Utilização de software interativo de geometria que permite aos alunos experimentar diferentes transformações geométricas de forma visual e intuitiva.

O nível 5 dessa teoria é o mais avançado e indica um alto grau de habilidade e compreensão em relação a transformações geométricas. Aqui estão algumas das atividades e características associadas ao nível 5 da teoria do pensamento geométrico sobre transformações geométricas:

Compreensão profunda de transformações: Os estudantes têm uma compreensão profunda e abstrata das transformações geométricas, incluindo reflexões, rotações e translações. Eles não apenas conhecem as regras e procedimentos, mas também entendem a essência das transformações.

Ainda, os estudantes são capazes de usar o cálculo formal para explicar suas ações e decisões ao aplicar transformações geométricas. Eles podem demonstrar teoremas e propriedades associadas a essas transformações. São ainda capazes de generalizar seus conhecimentos sobre transformações geométricas aplicando os princípios aprendidos em uma ampla variedade de situações geométricas e entender como essas transformações estão relacionadas. Eles podem ver como as transformações se relacionam com álgebra, trigonometria, física e outras disciplinas. Os estudantes são capazes de resolver problemas geométricos complexos que envolvem múltiplas etapas e transformações. Eles podem usar sua compreensão profunda para abordar problemas desafiadores de maneira sistemática. Eles têm uma compreensão sofisticada de simetria e podem identificar padrões simétricos em objetos e figuras geométricas. Eles também podem aplicar transformações para criar simetria.

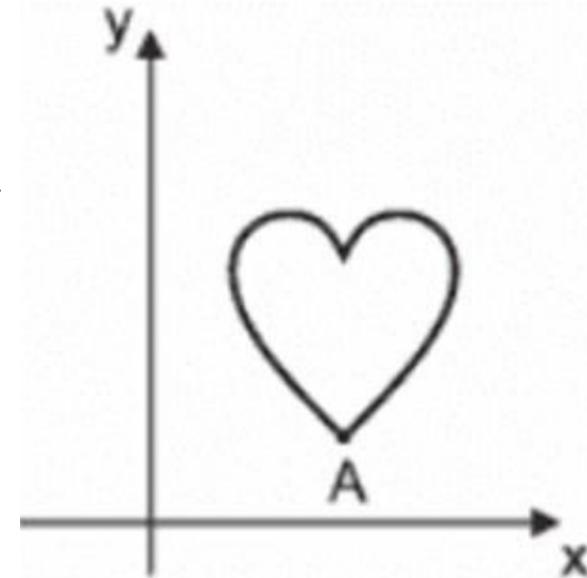
Os estudantes desse nível podem usar transformações geométricas de maneira criativa para criar arte, design e modelos matemáticos complexos. Eles têm a capacidade de visualizar como as transformações afetam a forma e a estrutura dos objetos.

Em resumo, o nível 5 da teoria do pensamento geométrico sobre transformações geométricas representa um estágio avançado de compreensão e habilidade nessa área, onde os indivíduos são capazes de aplicar seu conhecimento de maneira profunda, generalizada e criativa para resolver problemas complexos e fazer conexões interdisciplinares.

4.8. Etapa 3 – Nível 5

10. (ENEM) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre os pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, e a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o “giro” de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:

- 1º) Reflexão no eixo x ;
- 2º) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A ;
- 3º) Reflexão no eixo y ;
- 4º) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A ;
- 5º) Reflexão no eixo x .



Disponível em: www.pucsp.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

Após as cinco transformações, qual é a posição final da figura?



a)



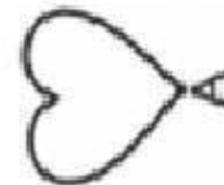
b)



c)



d)



e)

4.9. Etapa 3 – Nível 5

10. A senhora Maria Luzinete, "Dona Nete", faz arte em tecidos, em particular em toalhas de pratos, mesas entre outros utensílios de cozinha. Na imagem abaixo, um registro de uma das suas obras, podemos observar alguns traços de transformação geométrica. Na região em destaque é possível reconhecer de maneira dedutiva a transformação de reflexão, onde a imagem I, muda de posição conservando suas características dimensionais.

A partir dessa dedução, quais das propriedades abaixo se relaciona com a transformação geométrica em destaque na imagem?

a) Isometria de Translação - A translação transforma qualquer figura em outra, rigorosamente congruente, conservando assim as distâncias entre os pontos. Sejam A e B pontos distintos do

plano. A translação T_{AB} é a isometria que leva um ponto X do plano ao ponto $T_{AB}(X) = X'$, tal que $ABX'X$ é um paralelogramo, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X são colineares, então T_{AB} é tal que XX' está na reta AB e os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio.

b) A isometria de reflexão permite transformar cada imagem I em uma outra imagem I', congruente a I. Entretanto, a reflexão inverte a orientação do plano. Por definição para reflexão consideremos uma reta r, a isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P' em relação à reta r, é chamada reflexão na reta r, ou simetria de reflexão na reta r, a qual vamos indicar por R_r . A reta r



é chamada eixo da reflexão de R_r .

c) A rotação é o movimento giratório de uma figura geométrica em torno de um determinado ponto fixo dessa figura. A figura não mudará de tamanho ou forma, mas mudará de direção. Por definição, seja O um ponto do plano e α um número real com $0 < \alpha \leq 360$. A rotação de centro O e ângulo α é a isometria $R_{O,\alpha}$, que deixa fixo o ponto O e leva o ponto X , $X \neq O$, no ponto $X' = R_{O,\alpha}(X)$, tal que $OX = OX'$ e a medida do ângulo orientado (OX, OX') é igual a α se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 180$. Além disso, $OX' = OX$, sendo O o ponto médio de XX' , se $\alpha = 180$; e $X' = X$ se $\alpha = 0$.

d) Homotetias são transformações geométricas que “ampliam” ou “reduzem” de forma contínua qualquer imagem geométrica. Observemos a ilustração da definição na figura abaixo. Por definição uma homotetia ϕ de centro O e razão k é uma transformação geométrica que satisfaz: $\phi(O) = O$ e, para $A \neq O$, temos que: $\phi(A) = A' \Leftrightarrow O, A, A'$ são colineares e $OA' / OA = k$.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de transformações geométricas é um tema crucial na educação matemática, pois ajuda os alunos a desenvolver habilidades espaciais e visuais, além de promover o raciocínio lógico e a compreensão de conceitos fundamentais.

O ensino das transformações geométricas sendo fundamental por várias razões, desempenha um papel essencial no currículo de matemática nas escolas em todo o mundo. Estudar transformações geométricas ajuda os estudantes a desenvolver habilidades visuais, espaciais e de percepção. Eles aprendem a visualizar objetos em diferentes posições e orientações no espaço, além de resolver problemas que requerem raciocínio lógico e habilidades de resolução de problemas. Isso ajuda os estudantes a desenvolver habilidades analíticas que são úteis em diversas áreas.

O estudo das transformações geométricas pode ajudar a contextualizar outros conceitos matemáticos, como trigonometria, coordenadas cartesianas e vetores. Isso ajuda os estudantes a ver a interconexão entre diferentes áreas da matemática, não apenas fortalece as habilidades matemáticas, mas também prepara para aplicar esses conhecimentos em diversas áreas do conhecimento, estimulando a criatividade e o pensamento analítico. Além disso, fornece uma base sólida para futuros estudos em campos relacionados à matemática, ciência e tecnologia.

Nesse contexto, uma trilha de aprendizagem foi projetada de forma a, com o objetivo de sua futura aplicação, envolver os estudantes em atividades práticas e interativas, que estimulam o pensamento crítico e a resolução de problemas. Além disso, o trabalho colaborativo entre professores teve um papel fundamental nesse processo, incentivando a troca de ideias, o debate e a construção coletiva da proposta.

Durante as atividades da trilha de aprendizagem, o grupo de trabalho colaborativo construiu uma proposta com diferentes tipos de transformações geométricas, como rotações, reflexões e translações e a homotetia. Eles puderam elaborar essas atividades que compõem a trilha de aprendizagem por meio de exemplos do cotidiano, jogos interativos, simulações computacionais do Geogebra e outras atividades práticas envolvendo imagens de objetos de arte de manifestação de artistas do próprio município, com o intuito de ajudar a consolidar o entendimento dos conceitos.

O ambiente colaborativo também permitiu que trabalhássemos juntos em atividades práticas, nos quais aplicássemos as transformações geométricas em situações do mundo real. Esse tipo de abordagem prática e contextualizada, surgiu a partir das diversas reflexões ao longo dos encontros colaborativos com os professores de matemática da escola campo da pesquisa, para ajudar a compreender a relevância e a aplicabilidade

das transformações geométricas no cotidiano dos estudantes.

Como resultado desse processo educacional inovador, os alunos não apenas adquiriram um entendimento sólido das transformações geométricas, mas também desenvolveram habilidades de trabalho em equipe, comunicação e pensamento criativo. Além disso, uma trilha de aprendizagem e o trabalho colaborativo desenvolvido para um ambiente de aprendizagem dinâmico e estimulante na escola estadual em Quipapá-PE, demonstrando o impacto positivo de abordagens pedagógicas inovadoras e colaborativas no processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, o ensino das transformações geométricas por meio de uma trilha de aprendizagem não apenas ajuda os estudantes a entender conceitos matemáticos complexos, mas também desenvolve habilidades cognitivas e prepará-los para aplicar esse conhecimento em diversas áreas da vida e do trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, José Joelson Pimentel de. **Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de matemática**. 2012. 257f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador 2012. Disponível em: https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/jose_joelson.pdf. Acesso em: 3 mai 2023.

BASTOS, R. **Transformações geométricas**. Grupo de trabalho de geometria da APM. Set/ 2021.

CHIRÉIA, José Vagner. **Transformações geométricas e a simetria**: uma proposta para o ensino médio. Londrina, 2013. 89 f.

FILIZZOLA, Pedro. O que são trilhas de aprendizagem? Aprenda a montar a sua! In: Blog sambatech, junho de 2021. Disponível em: <https://sambatech.com/blog/insights/trilhas-de-aprendizagem/>. Acesso em: 15 set. 2021.

GUERREIRO, Antônio. Concepções e práticas na formação inicial de professores sobre transformações geométricas. **Revista Interações**, [S. l.], v. 15, n. 50, pp.23-45, 2019. DOI: 10.25755/int.18787. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/18787>. Acesso em: 4 mai. 2023.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? A educação matemática em revista. Geometria. **Blumenau**, número 04, pp.03-13, 1995. Edição especial.

MABUCHI, S. T. **Transformações Geométricas - A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. PUC – São Paulo, 2000. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11217>. Acesso em: 20 mai. 2021.

SOUSA, Ivan Bezerra de. **Produção de significados a partir de investigações matemáticas**: Função afim e contextos cotidianos. 2018. 288f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande 2018. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3339>. Acesso em: 4 mai. 2023.

TAFNER, E. P.; TOMELIN, J. F. E; MÜLLER, R. B. Trilhas de aprendizagem: uma nova concepção nos ambientes virtuais de aprendizagem – AVA. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 18. São Luís, 2012.

WAGNER, E. **Construções geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.