UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MARIA LIDIANNY DA SILVA MOURA

PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE COORDENADAS POLARES: TÓPICOS DAS DISCIPLINAS CÁLCULO II E CÁLCULO III.

CAMPINA GRANDE
2023

MARIA LIDIANNY DA SILVA MOURA

PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE COORDENADAS POLARES: TÓPICOS DAS DISCIPLINAS CÁLCULO II E CÁLCULO III.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes.

CAMPINA GRANDE
2023

M929p Moura, Maria Lidianny da Silva.
Proposta didática para o ensino de coordenadas polares [manuscrito] : tópicos das disciplinas cálculo II e cálculo III / Maria Lidianny da Silva Moura. - 2023.
129 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação : Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes, UFPE - Universidade Federal de Pernambuco."

1. Ensino da matemática. 2. Coordenadas polares. 3. Engenharia didática. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Geovani S. de Oliveira - CRB - 15/1009

Biblioteca Central BC/UEPB

MARIA LIDIANNY DA SILVA MOURA

PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE COORDENADAS POLARES: TÓPICOS DAS DISCIPLINAS CÁLCULO II E CÁLCULO III.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 22/09/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Márcus Bessa de Menezes
Universidade Federal do Pernambuco (UFPE)
(Orientador)

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
(Examinador Interno)

Profa. Dr. Fernando Emilio Leite de Almeida
Instituto Federal do Pernambuco (IFPE)
(Examinador Externo)

Ao meu Esposo, José Aluisio, pelo apoio, companheirismo e incentivo sempre.

AGRADECIMENTOS

Á Deus, por permitir a realização de um sonho em me tornar mestre, concedendo saúde e sabedoria durante o processo.

Ao meu esposo José Aluisio, que sempre esteve comigo em todos os momentos, felizes e tristes, me apoiando e incentivando para alcançar meus objetivos e sonhos.

Ao meu pai Joaquim Moura (Celitônio), a minha mãe Aparecida, aos meus irmãos Ligia Raianne e Antonio Marcos, pela confiança e apoio que sempre me deram.

A minha sogra Maria (*in memoriam)*, embora fisicamente ausente, sua força, determinação e coragem me inspiraram para continuar lutando com garra mediante as adversidades da vida.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB, que contribuíram ao longo dessa jornada, por meio das disciplinas e debates, para minha formação acadêmica e para o desenvolvimento desta pesquisa.

A banca examinadora pela disponibilização em contribuir com o trabalho.

Ao professor Marcus Bessa, meu orientador, pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação, compreensão, contribuições e orientações, neste trabalho, e pela paciência e atenção comigo.

Aos colegas de turma pelos momentos de apoio e compartilhamento de experiência.

À Silvanio de Andrade, coordenador Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM/UEPB), por seu empenho e prontidão em atender os alunos.

Ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM/UEPB).

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho.

Meu muito obrigada!

“A vida é como a Matemática, erros são comuns, mas quanto mais experientes somos, menos erros cometemos.”

Leonardo Santos Medeiros

RESUMO

A pesquisa de cunho teórico teve como objetivo refletir como construtos teóricos da didática, podem contribuir para um trabalho envolvendo o GeoGebra para o ensino de Coordenadas Polares. Para isso, construímos duas sequências didáticas com auxílio da Teoria das Situações Didáticas e da plataforma GeoGebra, associamos a utilização da plataforma GeoGebra na validação/resolução das sequências propostas e analisamos a efetividade do meio construído para as sequências didáticas. Utilizemos como referencial teórico e metodológico a pesquisa bibliográfica, a Engenharia Didática, a Teoria das Situações Didáticas, o GeoGebra, o Modelo de Plano de Aula NOVA ESCOLA e os Níveis de Atividades do Professor de Margolinas. Dessa forma, podemos perceber que atingimos o objetivo desta pesquisa, quando os resultados mostram caminhos e alternativas de ensino para tópicos em Coordenadas Polares, tendo como aporte a elaboração de duas sequências de ensino, apresentadas como: Plano de Aula 1 e Plano de Aula 2. Diante das construções, percebemos que o professor precisa: tomar decisões diariamente para elaboração e condução das aulas, tendo em vista a realidade de sua sala de aula e sua formação docente, refletir sobre suas aplicações em sala de aula, alterando e adaptando seu plano de aula, caso necessário, pensar no meio didático proposto e no existente, sobre quem são seus alunos, os pré-requisitos que eles trazem e se o meio construído foi suficiente. Portanto, consideramos que a utilização de recursos tecnológicos aliados com teorias de ensino para ensinar conceitos matemáticos no Ensino Superior, pode se mostrar um caminho para diminuir as dificuldades em aprender assuntos que contemplem coordenadas polares.

Palavras-Chave: ensino da matemática; coordenadas polares; engenharia didática.

ABSTRACT

The theoretical research aimed to reflect on how theoretical didactic constructs can contribute to work involving GeoGebra for teaching Polar Coordinates. To this end, we built two didactic sequences with the help of the Theory of Didactic Situations and the GeoGebra platform, associated the use of the GeoGebra platform in validating/solving the proposed sequences and analyzed the effectiveness of the means constructed for the didactic sequences. Let us use bibliographical research, Didactic Engineering, the Theory of Didactic Situations, GeoGebra, the NOVA ESCOLA Lesson Plan Model and the Margolinas Teacher Activity Levels as a theoretical and methodological reference. In this way, we can see that we have achieved the objective of this research, when the results show teaching paths and alternatives for topics in Polar Coordinates, supported by the development of two teaching sequences, presented as: Lesson Plan 1 and Lesson Plan 2 . In view of the constructions, we realize that the teacher needs to: make decisions daily to prepare and conduct classes, taking into account the reality of their classroom and their teaching training, reflect on their applications in the classroom, changing and adapting their teaching plan class, if necessary, think about the proposed and existing teaching environment, about who your students are, the prerequisites they bring and whether the constructed environment was sufficient. Therefore, we consider that the use of technological resources combined with teaching theories to teach mathematical concepts in Higher Education may prove to be a way to reduce the difficulties in learning subjects that include polar coordinates.

Keywords: teaching mathematics; polar coordinates; didactic engineering.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2D	2ª Dimensão
AGUIA	Agência USP de Gestão da Informação Acadêmica
AL	Álgebra Linear
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAL2	Cálculo 2
CAL3	Cálculo 3
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CC	Coordenadas Cartesianas
CCP	Curvas em Coordenadas Polares
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CP	Coordenadas Polares
ED	Engenharia Didática
FGV	Fundação Getulio Vargas
GA	Geometria Analítica
GD	Geometria Diferencial
H/A	Hora aula
IDPs	Integrais Dependentes de Parâmetros
IFCE	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SciElo	Scientific Electronic Library Online
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFPO	Universidade Federal de Ouro Preto
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

x	Variável x
y	Variável y
z	Variável z
n	Variável n
a	Variável a
b	Variável b
θ	Teta
α	Alfa
β	Beta
∞	Infinito
m^3/h	metros cúbicos por hora
m	Metros
k	Constante
π	Pi
rad	Radiano
$cos(\theta)$	Função Cosseno
$sen(\theta)$	Função Seno
$tg(\theta)$	Função Tangente
$arctg(\theta)$	Arco tangente de Teta
R	Região R
S	Região S
A	Área
V	Volume
D	Região D
L	Comprimento L
$u.c$	Unidade de comprimento
dA	Domínio de integração
xy	Eixo xy

xz	Eixo xz
$d\theta$	Variação em teta
dr	Variação em r
dx	Variação em x
dy	Variação em y
dz	Variação em z
M_x	Momento em relação ao eixo x
M_y	Momento em relação ao eixo y
$\int \quad \int$	Integral dupla
$\sum_{i=0}^{n}$	Somatório de i igual a zero à n
$\frac{dr}{d\theta}$	Derivada de r em relação a teta
$\frac{dy}{d\theta}$	Derivada de y em relação a teta
$\frac{dx}{d\theta}$	Derivada de x em relação a teta
$\frac{dx}{dt}$	Derivada de x em relação a t
$(\underline{x}, \underline{y})$	Coordenada do centro de massa

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É sabido que disciplinas em cursos superiores de ciências exatas, possuem um leque de conteúdos a serem ensinados e, ensiná-los e buscar uma metodologia adequada que dê suporte a esse ensino é uma tarefa do professor. Dentre as disciplinas que são ministradas em cursos superiores de ciências exatas, citam-se Cálculo II e Cálculo III, onde destacamos as de código: CAL2, CAL3, em cursos de Licenciatura em Matemática. O motivo de destaque por essas disciplinas foi por, na maioria das vezes, possuírem ementas longas e apresentarem um alto índice de reprovação e dificuldades por parte dos alunos, tornando motivo de aversão para muitos estudantes de cursos de ciências exatas. Conforme Fornari et al. (2017), as dificuldades mencionadas pelos alunos em alguns conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, são: compreender, visualizar e interpretar geometricamente e analiticamente conceitos. Diante disso, uma missão é destinada aos docentes de propor e ensinar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral de forma acessível e clara.

Com base nisso, destacamos as disciplinas de Cálculo II e Cálculo III, da Licenciatura em Matemática, mais especificamente no estudo de tópicos que focam em Coordenadas Polares (CP). Essa pesquisa se justifica tanto por experiências na formação inicial e profissional, a motivação surgiu de vários aspectos dentre eles: dificuldades em: estudar, desenhar, memorizar e aplicar propriedades, em CP, na disciplina de Cálculo II, presenciados durante minha formação acadêmica e posteriormente em minha experiência docente. Pude observar a disciplina de Cálculo II (especificamente alguns tópicos em CP) sendo ministrada com a ilustração geométrica e sem essa exploração, ocasionando dificuldades, quanto à visualização e compreensão do mesmo. Assim estenderemos à disciplina de Cálculo III.

Outro fator foi a escassez de trabalhos, de dissertação e tese, que focassem no ensino e aprendizagem em CP com o arcabouço teórico e metodológico utilizado neste trabalho, sendo percebida durante as pesquisas e o levantamento bibliográfico para este estudo e ainda, outro motivo que nos encoraja realizar este estudo é devido ao ensino tradicional que ainda está excessivamente presente nas salas do Ensino Superior nas áreas exatas.

Com isso, para o ensino de CP, são necessárias ferramentas metodológicas úteis para essa prática, bem como a exigência do domínio de ferramentas, por parte do professor para se desenvolver um trabalho com os alunos que proporciona visões compreensivas sobre aspectos que envolvam conceitos, desenhos e padrões inerentes ao estudo em CP.

Para isso, as pesquisas em Educação Matemática vêm se desenvolvendo apoiadas em várias metodologias e percebe-se intensos esforços na construção de sequências didáticas e materiais/ferramentas didáticos para proporcionar aos alunos o desenvolvimento de competências ao manipular recursos de aprendizado e poder diagnosticar: compreensões, dificuldades, aprendizado, desenvolvimento do raciocínio lógico, ensino entre outros aspectos sobre o ensino da matemática.

Diante disso, usaremos para embasar a descrição e desenvolvimento de sequências didáticas em CP, a Teoria das Situações Didáticas (TSD), que segundo Almouloud (2007) ela tem o propósito de tecer reflexões sobre os processos de ensino e aprendizagem de conceitos de uma dada área de conhecimento, a citar a Matemática, e propor ferramentas teóricas para a construção, análise, experimentação de situações-problema que têm potencial para desenvolver situações fundamentais (situações adidáticas) para apropriação de conhecimentos/saberes matemáticos por parte de alunos, e produção de conhecimentos/saberes do ponto de vista da didática das disciplinas.

Corroborando com essa ideia, ao falar sobre recurso e ferramenta de auxílio ao ensino, destacamos a plataforma GeoGebra, que será a ferramenta de apoio na elaboração das sequências de ensino, por ser, além de uma ferramenta em ascensão, é livre, de fácil acesso e possui um grande potencial de manipulação e visualização de representações de conteúdos matemáticos.

Com isso, neste trabalho daremos ênfase ao estudo e ensino em CP e utilizaremos: a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e a TSD, como metodologia de ensino.

Nesse intuito, será utilizada a tecnologia como ferramenta didática em conteúdos matemáticos, procurando responder à nossa pergunta diretriz: Como a Engenharia Didática e a TSD podem auxiliar na elaboração de propostas didáticas, seguindo um plano de aula e utilizando o GeoGebra para trabalhar com CP?

Para Borba e Araújo (2013), a pergunta diretriz norteará o pesquisador no desenvolvimento da pesquisa. Nesse contexto, ela surgiu de questionamentos e preocupação da pesquisadora em sua experiência discente e docente.

Para tentar responder nossa pergunta, essa pesquisa objetiva refletir como construtos teóricos da didática, podem contribuir para um trabalho envolvendo o GeoGebra para o ensino de CP.

Para alcançar o objetivo geral pretendemos:

i) Construir duas sequências didáticas com auxílio da TSD e da plataforma GeoGebra;

ii) Associar a utilização da plataforma GeoGebra na validação/resolução das sequências propostas;

iii) analisar a efetividade do meio construído para as sequências didáticas.

Dessa forma, nosso trabalho está organizado em seis seções, que estruturam a dissertação intitulada **Proposta Didática para o Ensino de Coordenadas Polares: Tópicos das disciplinas Cálculo II e Cálculo III**. Na primeira seção, a introdução do nosso trabalho e apresentamos: a problemática da pesquisa, pergunta diretriz, objetivo geral, objetivos específicos e estrutura da pesquisa, bem como, a contextualização do problema de pesquisa, situando o leitor, também, sobre as teorias que iremos utilizar. Na segunda, apresentamos a justificativa e a revisão de literatura da pesquisa, trazendo trabalhos que serviram de base para a presente pesquisa. Na terceira, a fundamentação teórica, abordando: TSD, Engenharia Didática, A Plataforma GeoGebra, Ensino de Matemática com aporte na plataforma GeoGebra, Tópicos em CP e Representações de CP na plataforma GeoGebra, aqui além de todo arcabouço teórico do estudo, trazemos nessa seção, trabalhos que abordam a ferramenta escolhida, o GeoGebra, como importante aliada ao Ensino de Matemática e um manual de implementação de curvas polares. Na seção quatro, consta a metodologia de pesquisa: pesquisa bibliográfica, procedimentos utilizados **-** pesquisa alicerçada na engenharia didática e na pesquisa bibliográfica, justificativa da não aplicação da pesquisa e, cenário de investigação e público-alvo (modelo). Na quinta seção foi destinada a resultados e discussões, onde apresentamos as sequências didáticas, os dois planos de aula com a proposta de juntar toda a teoria do referencial teórico e por fim, na sexta seção, as considerações finais e referências.

2 JUSTIFICATIVA

A justificativa do presente trabalho se dará por três perspectivas: Experiências na formação inicial e profissional (já mencionada na introdução), Científica e Social. Na de caráter científico, se justifica pela produção de material didático visando o suporte à futuras pesquisas e aplicações, estando disponíveis em plataformas de apoio didático. Como também aumentar o leque de alternativas de ensino sobre CP.

Outra questão, é a carência de trabalhos com essa temática, uma vez que é conteúdo integrante da matriz curricular dos cursos de exatas e pesquisas voltadas a práticas pedagógica para análise e melhoria do ensino desse conteúdo é pouco notado, uma vez que o foco é propor situações didáticas para conteúdos mais ‘avançados’, assim existe uma gama de trabalhos com essa ideia. Mas vale salientar, que se deve voltar, também, para o ensino de conteúdos mais ‘simples’, uma vez que eles possuem maiores probabilidades de serem cobrados nos cursos superiores, não só das exatas, mas em outras áreas.

Tendo em vista o caráter social, ou seja, a população participante da pesquisa e dos que poderão participar em futuras aplicações, é de possibilitar uma abordagem de ensino e aprendizagem do assunto em estudo. Visto que, os alunos do Ensino Superior também apresentam dificuldades no tocante à pré-requisitos, visualização, abstração, compreensão e aprendizado. Podendo, esse trabalho, aumentar alternativas metodológicas para o ensino e aprendizado do objeto matemático em tela.

Assim, para melhor justificar a temática defendida neste trabalho, é possível verificar a relevância deste trabalho em buscas que foram realizadas sobre pesquisas nessa temática, ou seja, sobre o mesmo objeto de análise ou estudo que está sendo abordado. Com isso, realizaram-se buscas nos seguintes portais e plataformas: Portais da SciElo, Periódicos CAPES, Google acadêmico, Biblioteca digital brasileira de teses e dissertações (BDTD), Biblioteca digital da UNICAMP (SBU), Pergamum do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), biblioteca virtual são Paulo, banco de dados da USP, AGUIA agência USP de gestão da informação acadêmica universidade de são Paulo, Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP, repositório da UFPO, biblioteca IFCE fortaleza, biblioteca UFC e Sistema de Bibliotecas FGV.

Nas plataformas e portais, foram pesquisadas as palavras chaves: TSD e GeoGebra (encontrados 30 trabalhos), TSD e Curvas Polares (encontrado um trabalho) e por fim, foi pesquisado sobre a temática da pesquisa: TSD, GeoGebra e Curvas Polares (encontrando um trabalho relacionado, sendo o mesmo da pesquisa anterior), totalizando 31 trabalhos para serem selecionados e analisados. Vale salientar, que desses 31 trabalhos continham: artigos, monografias, dissertações e teses, no período de 2012 a 2022 (o período foi de 10 anos por encontrar poucos trabalhos em cinco anos, então aumentamos o período), por encontrar maior concentração de estudos sobre a temática pesquisada. Assim, foram escolhidos cinco trabalhos dentre os 31 pesquisados, recorte feito devido, uma dissertação abordar (TSD, GeoGebra e Curvas Polares) e quatro (dissertações e tese) apresentar maior relação com a nossa pesquisa, serão apresentados por ordem cronológica e discutido sobre o que contribuem para essa pesquisa e em que essa pesquisa avança sobre eles.

2.1 Revisão de Literatura

O primeiro trabalho é de doutoramento de Marcos Paranhos (2015), da PUC – SP, em que sua pesquisa está intitulada como: "Parametrização e Movimentação de Curvas e Superfícies para uso em Modelação Matemática". Neste estudo, são abordados os conteúdos (curvas e superfícies) assuntos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e Geometria Analítica (GA) e, (transformações) conteúdo da Álgebra Linear (AL), todas as disciplinas do Ensino Superior. O objetivo foi: "desenvolver atividades de modelação matemática para alunos do ensino superior da área de ciências exatas, realizando a sistematização, a articulação e a aplicação de objetos matemáticos estudados nas disciplinas de CDI, GA e AL, promovendo o aprofundamento e o significado do estudo dessas disciplinas".

Com isso, foram desenvolvidas atividades de Modelação Matemática em ambiente computacional, com aporte da metodologia da Engenharia Didática, com discentes que já cursaram as disciplinas. Tal trabalho apresentou propostas de atividades com a utilização do *software Winplot*, para estudar os assuntos já mencionados e propostas de atividades de reprodução da realidade. Quanto aos resultados, a pesquisa apresenta dois aspectos: do aprofundamento dos objetos estudados, em questões complexas em outros contextos, e de como a pesquisa se manifesta "agradável e estimulante."

O estudo de Marcos servirá como suporte para essa pesquisa, uma vez que ele trabalha com conteúdos do ensino superior e com a ED. Já se tratando em que o nosso trabalho irá avançar a este, será na abordagem da plataforma GeoGebra com a utilização da TSD.

O segundo trabalho escolhido foi uma dissertação de Fabiana Baptista (2017) da UNICAMP, ela trabalhou com o tema: “O Ensino de coordenadas polares através do *software* GeoGebra*”.* A pesquisa teve como objetivo: “mostrar que o estudo de Coordenadas Polares pode ser desenvolvido no ensino médio”. Devido o conteúdo sistema de CP e curvas polares não está contida no currículo do ensino médio, foram estudados os assuntos pré-requisitos para o ensino de CP e curvas polares: coordenadas cartesianas, conceitos da Geometria Analítica, conceitos de trigonometria, propriedades e gráficos de funções trigonométricas.

Depois foi estudado “o sistema de coordenadas polares e o esboço dos gráficos das principais curvas polares através da plataforma GeoGebra, mostrando a importância de se trabalhar com a tecnologia no ensino de alguns conteúdos”. Por fim, foram relatados “o desenvolvimento didático de sugestões de atividades que podem ser dadas aos alunos do ensino médio para a aprendizagem de coordenadas polares”.

O estudo de Fabiana dará suporte nessa pesquisa, no tocante a abordagem com CP por meio da plataforma GeoGebra. Já em relação em que iremos avançar, defendemos uma abordagem de tópicos em CP para o Ensino Superior, construindo situações de ensino utilizando a TSD.

A terceira pesquisa selecionada foi a dissertação de Maria Vanísia de Lima (2017), IFCE – Fortaleza, que está intitulada como: “Categorias Intuitivas no ensino do cálculo e a visualização de critérios de convergência: o caso das integrais dependentes de parâmetros – IDPs” e objetivou “analisar situações didáticas no contexto da noção de IDPs com a identificação das categorias do raciocínio intuitivo”. Para isso, foram elaboradas e aplicadas sequências de ensino com auxílio da plataforma GeoGebra para exploração quanto à "visualização dos critérios de convergência de algumas integrais”. A metodologia de pesquisa foi a Engenharia Didática, o embasamento teórico, está apoiado à: Teoria das Categorias Intuitivas de Efraim Fischbein e a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau.

Foram realizadas: análise de obras didáticas de Cálculo, elaboradas e aplicadas sequências didáticas fundamentadas na TSD, coleta de dados por uma ação investigativa com uma turma de Cálculo II, registro das categorias de raciocínio intuitivo "(intuições afirmativas, intuições conjecturais e intuições antecipatórias) de Efraim Fischbein foi feito mediante a exploração das quatro fases da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização".

Contudo, foi evidenciado, "que a visualização constitui um caminho diferenciado, no sentido da superação de determinadas barreiras recorrentes na aprendizagem do objeto matemático em estudo, pois a mesma torna intuitiva a compreensão do processo de convergência e divergência das Integrais Dependentes de Parâmetros".

O trabalho de Maria Vanísia embasa esta pesquisa, pois aborda: TSD, Engenharia Didática, plataforma GeoGebra e uma Teoria para análise dos dados, onde utilizamos essa ideia para trabalhar com tópicos em CP. Nosso estudo avançará, por utilizar o Modelo dos Níveis da Atividade do Professor proposto por Margolinas e por analisar a efetividade do meio construído nas sequências didáticas, verificando as condições de aplicações e adaptações. Assim, focaremos em pensar em uma proposta para trabalhar, explorar e discutir tópicos em CP, conteúdos presentes nas aulas de Cálculo II e Cálculo III e, pela escassez de propostas de abordagens do ensino de Curvas Polares.

O quarto trabalho escolhido foi a pesquisa de Ana Carla Paiva (2019), IFCE – Fortaleza, em que recebeu o título: "Engenharia Didática sobre o estudo e ensino de conceitos de geometria diferencial: descrição de situações didáticas com a utilização do *software* GeoGebra". Esta pesquisa teve como objetivo: "Investigar o ensino da disciplina Geometria Diferencial, em particular, os conceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies, sob a perspectiva de uma proposta metodológica intitulada Engenharia Didática e a utilização da plataforma GeoGebra aplicado a um grupo de professores em formação continuada".

Para tanto, foram realizados: um levantamento bibliográfico, verificando a abordagem e níveis dos conhecimentos trabalhados em livros de Geometria Diferencial (GD), aplicada uma intervenção didática com aporte na plataforma GeoGebra para professores de matemática, com intuito de ressignificar conceitos de GD. Após as análises e discussões, "constatou-se progressos dos estudantes no que se refere ao entendimento dos conceitos fundamentais dos tópicos trabalhados.

Na dissertação de Ana Carla ela usou a Engenharia Didática, plataforma GeoGebra e TSD, então também servirá de material para pesquisa. Este trabalho avançará em relação à análise dos dados que usará o Modelo dos Níveis da Atividade do Professor proposto por Margolinas.

O último trabalho escolhido foi a dissertação de Túlio Cardoso (2020), UNICAMP, está intitulado por: “Curvas Paramétricas: compreensão do movimento na perspectiva da geometria dinâmica”. Teve como objetivo: “construir o conceito de equações paramétricas envolvendo curvas planas, via meio tecnológico”. Para tal, esta dissertação propôs uma sequência didática fazendo uso de ambiente da geometria dinâmica e referência teórica a teoria das situações didáticas, visando favorecer na compreensão dos assuntos que envolvam curvas planas.

A metodologia adotada foi a Engenharia Didática e realizou-se em três níveis: o primeiro referente aos saberes prévios dos discentes para a relação entre as funções basilares e a construção dos conceitos pertinentes às curvas planas. No nível seguinte, é “construído o conceito de curvas e suas representações por meio de exemplos e construções geométricas aliadas às suas representações algébricas” e no terceiro nível, os estudantes passaram pelas situações adidáticas, onde foram propostas atividades com níveis de dificuldades e elaboradas via Teoria das Situações Didática.

Após as análises a posteriori da experimentação, os resultados sugerem que o objetivo foi alcançado e foi evidenciado “uma troca de informação que valoriza o desenvolvimento dos constructos em perspectiva histórica, o sujeito inserido no *milieu* e contexto social, estabelecendo uma relação entre o saber, o professor e aluno”.

Quanto ao trabalho do Túlio Cardoso, contribuirá nessa pesquisa por utilizar a mesma metodologia de ensino e ferramenta de visualização e auxiliar na elaboração das sequências de ensino e nossa pesquisa irá avançar pela implementação do Modelo dos Níveis da Atividade do Professor proposto por Margolinas e pelos tópicos em CP.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

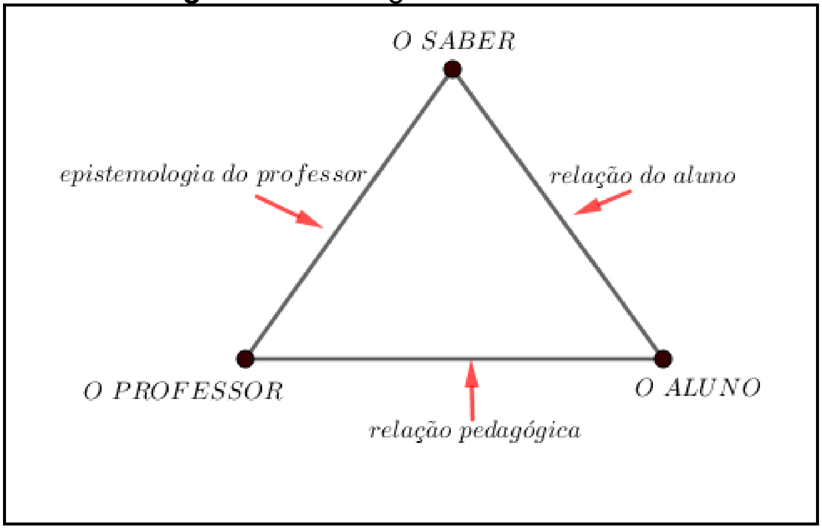
Nesta seção, apresenta-se o referencial metodológico e a fundamentação teórica que se entende relacionar com o problema de investigação. Isso posto, apresenta-se as teorias nas quais estão apoiados os pressupostos teóricos deste trabalho, tendo em vista o ensino de tópicos em CP. Com isso, serão descritas: a Teoria das Situações Didáticas (TSD), Engenharia Didática, A plataforma GeoGebra, Ensino de Matemática com aporte na plataforma GeoGebra e *T*ópicos em CP e Representações de CP na plataforma GeoGebra.

3.1 Teoria das Situações Didáticas – TSD

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi elaborada pelo francês, Guy Brousseau (1996), com o intuito de estudar e contribuir para a área de Didática da Matemática. Assim, o objetivo central da TSD é estruturar um processo de aprendizagem, caracterizado por uma série de situações replicáveis, possibilitando mudanças de comportamentos nos alunos e decorrentes de uma aprendizagem significativa (BROUSSEAU, 1996).

Para sistematizar a TSD, três elementos importantes são considerados que são: aluno, saber e professor.

Figura 1 – Triângulo Didático



Fonte: Adaptada de Almouloud (2007, p.32)

Na relação estabelecida entre o saber e o aluno, deve-se enfatizar os conhecimentos prévios dos aprendizes sendo possível estabelecer meios em que eles: formulem hipóteses, testem conjecturas, provem e construam conceitos do saber científico a ser adquirido, considerado que a intenção didática das situações do docente não pode ser percebida pelo aprendiz, pois ele deve atuar de forma ativa. Na relação pedagógica, o professor atua como mediador, devendo criar situações de aprendizagem para aproximar o aluno do novo saber científico (BROUSSEAU, 1996).

A TSD indica e diferencia dois tipos de situação: a situação didática e a situação adidática. A situação didática é dita como o objetivo central da TSD, sendo entendida como união de relações explicitamente e/ou implicitamente entre: alunos, o *milieu*[1] e um sistema educativo, visando aos alunos a apropriação de um saber constituído ou em constituição.

Na situação didática, o discente aprende pelos processos de adaptação mediante os problemas que são propostos pelo professor (ALMOULOUD, 2007, p. 32), o qual, de acordo com Brousseau (2008), é quem deve regular estes processos.

> O trabalho do professor consiste [...] em propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como respostas às exigências do meio e não a um desejo do professor (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Já se referindo a situação adidática, é quando o discente visto como o protagonista na construção do seu conhecimento é levado a compreender a importância de buscar o saber, por interesse próprio (ALMOULOUD, 2007). São situações em que o aluno atua de maneira autônoma, interagindo com o milieu no intuito de buscar soluções para o problema proposto. “O professor está, pois, envolvido em um jogo com o sistema das interações do aluno com os problemas que ele lhe coloca” (BROUSSEAU, 1996, p. 50). Almouloud (2007), embasado em Brousseau (1986) enfatiza que a situação adidática possui três características:

> - o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria; - o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às razões didáticas; - o professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus

[1]termo francês que significa meio, sendo muito utilizado no estudo das situações didáticas (ALMOULOUD, 2007).

> conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s) (BROUSSEAU, 1986, p. 60, apud ALMOULOUD, 2007, p. 33, grifo do autor).

Com isso, considerando a última característica, percebe-se que compreender o conceito de situação adidática decorre por construir os papéis do professor e do aluno neste jogo didático, assim como reconhecer a importância da autonomia dos discentes para a construção do próprio conhecimento. Com esta compreensão,

> O professor [...] procura situações que dêem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados. Porém, se a fase de personalização funcionou bem, quando o aluno respondeu às situações propostas não sabia que o que “produziu” é um conhecimento que poderá utilizar em outras ocasiões. Para transformar suas respostas e seus conhecimentos em saber deverá, com a ajuda do professor, re-despersonalizar e re-descontextualizar o saber que produziu, para poder reconhecer no que fez algo que tenha caráter universal, um conhecimento cultural reutilizável (BROUSSEAU, 1996, p. 50, grifo do autor).

Como discute e afirma Meier (2022), podem existir, para cada conhecimento matemático, situações didáticas ou uma combinação de situações didáticas que atinjam o objetivo da construção do conhecimento de forma autônoma pelos alunos, permanecendo seu sentido. Este é o conceito de situação fundamental, “[...] um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada/indicada, situações que permitem introduzir os conhecimentos em sala de aula numa epistemologia propriamente científica” (ALMOULOUD, 2007, p. 34).

Um elemento importante neste processo são as variáveis didáticas, pois estabelecem as possibilidades de escolhas do professor: “[...] as variáveis didáticas são aquelas que afetam a aprendizagem e da qual o ensino pode escolher o valor” (BROUSSEAU, 1998, p. 105, tradução nossa). Elas fazem parte do conjunto das variáveis cognitivas que influenciam na construção de um “conhecimento ótimo” (BROUSSEAU, 2008, p. 35).

Assim, Meier (2022), compreende que o docente, ao selecionar as variáveis didáticas que aparecerão na proposta da situação didática a ser explicada a seus alunos, define “os significados que o conhecimento matemático em jogo assumirá”. Desta maneira, o planejamento e a organização do milieu, efetuados pelo professor, são fatores que embasam o processo na construção e significação dos conhecimentos matemáticos.

Para Brousseau (2008), um milieu antagonista propicia desequilíbrios cognitivos e incertezas no aluno. As reações do estudante, tendo em vista as informações que o milieu antagonista lhe fornece, podem empregar-se como indicadores sobre suas decisões futuras, podendo antecipar, modificar e construir suas respostas ao problema proposto. “Os conhecimentos permitem produzir e mudar essas ‘antecipações’. A aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados” (BROUSSEAU, 2008, p. 28, grifo do autor).

A maneira como o professor propõe os problemas para originar situações adidáticas é denominada por Brousseau (1996) como devolução. É a partir da devolução que possibilita o aluno, sem identificar a intencionalidade didática da situação, um projeto autônomo de construção do conhecimento, que visa a solução do problema proposto.

Com isso, ainda que exista o papel essencial desempenhado pelo docente na escolha das variáveis didáticas que constituem a situação e a proposta do problema, pode ser afirmado que na TSD “[...] o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem” (ALMOULOUD, 2007, p. 35), uma vez que esteja disposto a aprender e realizar a tarefa posta.

A devolução consiste na alternância de uma situação em que o docente possui a responsabilidade de ensinar para outra, onde o aluno assume a responsabilidade por seu aprendizado, visto que quando se inicia o envolvimento do aluno em uma situação adidática. Brousseau (2011) esclarece que

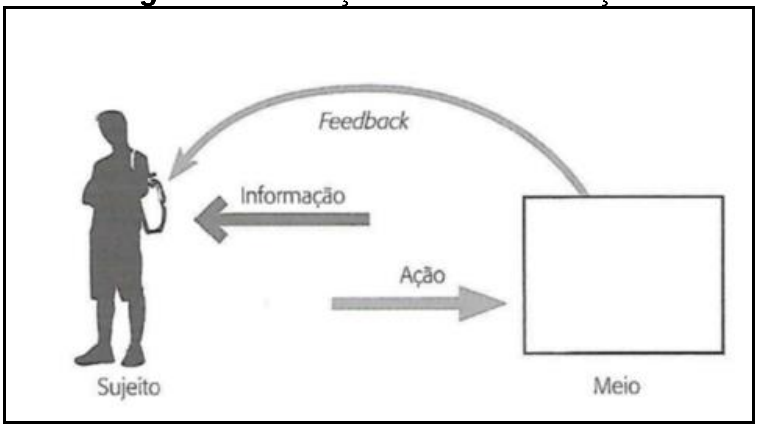
> A devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno assuma a responsabilidade por uma situação de aprendizagem (adidática) ou por um problema e ele mesmo aceita as consequências dessa transferência. [...] Ele deve, portanto, comunicar esse conhecimento sem ter que revelá-lo, o que é incompatível com uma relação contratual (BROUSSEAU, 2011, p. 41, tradução nossa).

A devolução não é entendida como uma relação simples de se alcançar pelo docente em sala de aula, pois além da necessidade da comunicação de um conhecimento sem deixá-lo explícito de antemão, também estão os fatores referentes à motivação dos discentes. Assim, a incumbência do professor relacionada à devolução é a de escolher os problemas de maneira que sua intenção de ensinar seja revelada de forma parcialmente clara, “[...] mas que dissimula o bastante esse saber e a resposta esperada para que o aluno não possa obtê-los a não ser por uma adaptação pessoal ao problema proposto” (BROUSSEAU, 2011, p. 40, tradução nossa). Dessa forma, uma vez transferida esta responsabilidade, o discente, em situação adidática, pesquise dentre seus conhecimentos anteriores os que julgue capaz(es) de propiciar as respostas satisfatórias para determinações propostas pelo milieu. Entretanto, o docente não deixa de participar como mediador, durante as situações adidáticas, fazendo questionamentos e acompanhando as ações dos estudantes.

Brousseau (1998) identificou quatro dialéticas que aproximam o aluno e o milieu, ou do aluno em uma situação didática. As quatro diferentes dialéticas, denominadas: de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. A dialética da institucionalização é tida didática, pois exige a participação direta do professor. Já as dialéticas da ação, formulação e validação são consideradas adidáticas pois nestas o docente se recusa a interferir de maneira a revelar suas intenções didáticas propiciando ações dos discentes frente ao problema apresentado e de suas reações originadas pelas limitações do milieu (ALMOULOUD, 2007), conforme as especificações a seguir.

A dialética da ação, o foco está no aluno e na proposta didática. O aluno entra em contato com determinado tipo de problema, recorrendo a conhecimentos anteriores para tentar resolvê-lo, possuindo uma visão geral de suas ações. A dialética da ação é entendida como um primeiro nível de relação entre o aluno e o saber em jogo. Como seu próprio nome aponta, trata-se de ações e tomadas de decisão diretas, sem utilizar registro codificado como a escrita. “Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do milieu” (ALMOULOUD, 2007, p. 37, grifo do autor).

Figura 2 - Situação adidática de ação



Fonte: Brousseau (2008, p. 28)

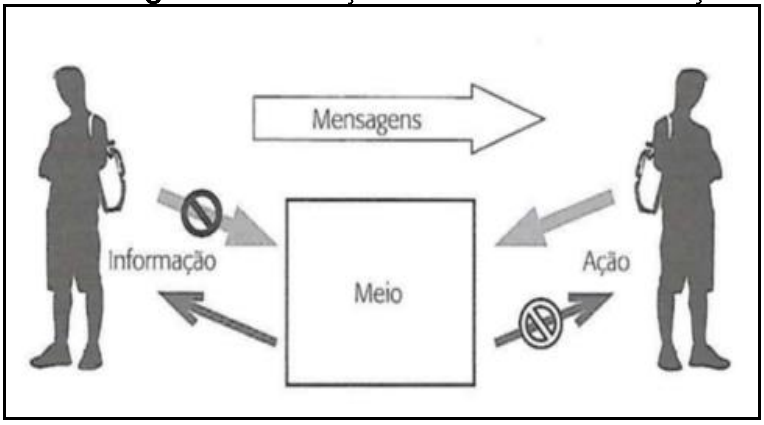
Nesta dialética, os alunos elaboram estratégias que os ajude na solução do problema. Mesmo a troca de informações entre os estudantes, sendo possível, a dialética de ação é definida pelas “antecipações” que foram feitas pelo aluno, que podem ser modificadas de acordo com a evolução da situação (BROUSSEAU, 2008, p. 28).

A outra dialética, a dialética de formulação, o aluno deve trocar informações com outros sujeitos, que podem ser emissores ou receptores. O aluno tenta formular conjecturas gerais sobre o tipo de problema e começa a fazer generalizações, verdadeiras ou não. O aluno, nessa dialética, já está empenhado em resolver analiticamente o problema e têm objetivo de construir, “[...] progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática” (ALMOULOUD, 2007, p. 38).

> Trata-se do caso em que o aluno faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação. Portanto, essas situações são caracterizadas pelo fato de não indicarem explicitamente os porquês da validade e de não estar sendo cobrado a fazê-lo (FREITAS, 2010, p. 97).

Esta dialética presume uma comunicação entre, pelo menos, dois alunos. Com isso, requer que emissor e receptor sejam capazes de criar sentenças (independente da linguagem escolhida) que retratem suas conjecturas e suposições. Dessa forma, “[...] a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico)” (BROUSSEAU, 2008, p. 29).

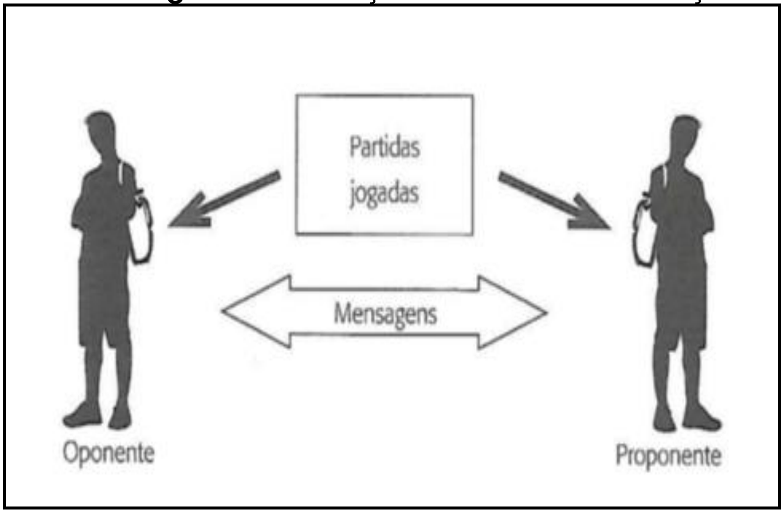
Figura 3 - Situação adidática de formulação



Fonte: Brousseau (2008, p. 29)

Na terceira dialética, a dialética da validação, o aprendiz valida seu modelo matemático criado. Sua resposta em linguagem matemática adequada é avaliada pelos demais alunos, eles podendo questionar, discordar, ou rejeitar o argumento do aprendiz. Nessa etapa, a relação entre o aprendiz e o receptor, é de grande potencial para estruturação e organização de novos conhecimentos pois o emissor e receptor assumem papéis distintos: proponente e oponente, pois “[...] colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas” (BROUSSEAU, 2008, p. 30). Nessas discussões, o conhecimento matemático age como o milieu podendo aceitar ou refutar as afirmações (ALMOULOUD, 2007, p. 39).

Figura 4 - Situação adidática de validação



Fonte: Brousseau (2008, p. 30)

Esta dialética possui o objetivo de desenvolver provas para as afirmações que são elaboradas em resposta ao milieu, onde inclui o conhecimento matemático que sustenta as discussões. “Em suma, o objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática” (ALMOULOUD, 2007, p. 40).

É importante destacar o caráter interligado e inseparável entre as três dialéticas adidáticas descritas e o distinto e importante papel no processo de aprendizagem. Freitas (2010) destaca que a dialética da validação se sustenta pelo desenvolvimento de uma dialética de formulação precedente: “[...] de fato, a produção de provas necessita que seja constituído um sistema comum de validação através de uma linguagem oral ou escrita, no seio de um grupo social, mesmo se restrito a dois indivíduos” (FREITAS, 2010, p. 100).

Na quarta e última dialética, a dialética da institucionalização, é quando o professor retoma a parte da responsabilidade que havia cedido aos discentes, demonstrando seu papel, juntamente com eles analisam os modelos matemáticos encontrados, define o objeto de estudo e oficializa o conhecimento matemático que será adquirido (ALMOULOUD, 2007).

Ressalta-se que a dialética da institucionalização foi criada posteriormente às demais, como resposta à necessidade que os docentes argumentam em rever os conhecimentos já trabalhados durante as situações adidáticas. Brousseau (2008) enfatiza que levou um tempo para

> [...] perceber que os professores realmente eram obrigados a “fazer alguma coisa”: tinham de dar conta da produção dos alunos, descrever os fatos observados e tudo o que estivesse vinculado ao conhecimento em questão; conferir um status aos eventos da classe vistos como resultados dos alunos e do processo de ensino; determinar um objeto de ensino e identificá-lo; aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e indicar quais poderiam ser reutilizadas (BROUSSEAU, 2008, p. 31).

Dessa forma, na institucionalização o docente deixa o papel de coadjuvante admitido na situação adidática e, identifica e discute os saberes produzidos pelos discentes e a fixar “[...] convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber” (ALMOULOUD, 2007, p. 40). Almouloud (2007) informa, ainda, que o instante em que esta dialética é realizada é importante, pois ela realizada antecipadamente, pode dificultar a construção autônoma do significado do conhecimento e, já realizada em momento tardio, pode favorecer para a formação de conhecimentos insuficientes ou mal interpretados, podendo atrasar a aprendizagem.

Na institucionalização o professor volta à cena, mas o discente não a abandona, como esclarece Freitas (2010):

> Durante a institucionalização, caracterizada pela sistematização por meio da apresentação de definições, propriedades e teoremas, em linguagem matemática mais formalizada, onde deve ocorrer uma socialização, professores e alunos dialogam sobre conhecimentos matemáticos historicamente construídos relativos ao problema abordado (FREITAS, 2010, p. 103).

É possível perceber três distintas e importantes relações nestas quatro dialéticas: “entre professor e aluno (relação pedagógica), entre professor e saber (epistemologia do professor) e entre aluno e saber (relação de aprendizagem)". Assim, é neste triângulo didático que a situação didática se concebe e é "a partir das interações geradas por estas relações que se dá a aprendizagem da Matemática, desde que este sistema, que compõe o milieu, seja provido de intenções didáticas". Contudo, a união de todas essas dialéticas descreve uma situação didática. Ressaltando, que nas três primeiras dialéticas definem uma situação a-didática, pois não há intervenção do professor e, já na última dialética, como o docente intervêm na situação, caracteriza-se como uma situação didática.

Portanto, todas as considerações aqui descritas sobre essa teoria, enfatizam a relevância desta para ser utilizada no ensino de Matemática, uma vez que sua existência foi diretamente construída e voltada para o ensino e aprendizagem da Matemática.

3.1.1 Milieu

Na TSD, a aprendizagem da Matemática acontece pelas adaptações do aluno em relação ao milieu: em vez das intenções didáticas do professor, é o milieu que instiga "o aluno a reelaborar seus conhecimentos, desenvolver hipóteses e buscar novas respostas ao problema proposto". Entretanto, em seu planejamento, o docente deve prever a constituição de uma situação didática que proporcione condições para que o discente se torne o principal ator da construção de seus conhecimentos mediante as tarefas propostas (ALMOULOUD, 2007).

Ao falar sobre: planejamento de tarefas matemáticas e a responsabilidade que o aluno possui com sua aprendizagem, a noção de contrato didático auxilia na compreensão relativa à relação entre o docente e discente, a qual

> [...] está subordinada a muitas regras e convenções, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas regras, porém, quase nunca são explícitas, mas se revelam principalmente quando se dá sua transgressão. O conjunto das cláusulas que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber constitui o chamado contrato didático (SILVA, 2010, p. 49, grifo do autor).

Dessa forma, o contrato didático está ligado ao conhecimento matemático que os estudantes devem modificar em uma determinada situação didática (BROUSSEAU, 2011). Com isso, cada conhecimento a ser ministrado remete a um contrato didático específico, o qual

> [...] depende de diferentes contextos de ensino e de aprendizagem. As escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho proposto aos alunos, os objetivos de formação, a epistemologia do professor, as condições da avaliação, etc., fazem parte dos determinantes essenciais do contrato didático (ALMOULOUD, 2007, p. 90).

A Teoria das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU, 1998) é a teoria que norteia este modelo, com bases também na abordagem construtivista de Piaget (1979). Brousseau de acordo com este pesquisador argumenta que o discente aprende se adaptando a um meio "que é um fator de contradições, de dificuldades e de desequilíbrios". No entanto, em sua acepção, o professor é o criador e organizador do meio ("milieu"), tendo em vista uma intencionalidade didática e o favorecimento de uma aprendizagem pelo aluno é o principal objetivo.

Segundo Almeida (2016), o milieu (meio) é caracterizado como "[...] o sistema antagônico do atuante. [...] chamamos de 'milieu' tudo o que atua sobre o aluno ou/e sobre o que o aluno atua" (BROUSSEAU, 2010, p. 3, tradução nossa, grifo do autor). O milieu é também "[...] fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio" (ALMOULOUD, 2007, p. 32), e permite ao professor compreender seu papel para a aprendizagem da Matemática, porém é insuficiente, uma vez que um milieu sem intenção didática "não é suficiente para produzir aprendizagens por parte dos alunos" (ALMOULOUD, 2007).

Ainda para Almeida (2016) o aprimoramento do conhecimento matemático não é unicamente oriundo "das ações do professor, ou das reações do aluno, nem decorre somente das características de cada saber". Ela acontece nas relações originadas pelos três agentes – professor, aluno e saber – quando se comunicam com a intencionalidade de promover a aprendizagem (BROUSSEAU, 1996). No propósito de

> [...] fazer funcionar um conhecimento no aluno, o professor busca uma situação apropriada; para que seja uma situação de aprendizagem, é necessário que a resposta inicial que o aluno pensa frente à pergunta formulada não seja a que desejamos ensinar-lhe: se fosse necessário possuir o conhecimento a ser ensinado para poder responder, não se trataria de uma situação de aprendizagem (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Dessa forma, a Teoria das Situações Didáticas baseia-se nesse princípio, caracterizando-se pelas "interações que se estabelecem entre o professor, o aluno ou alunos e um saber particular". No quadro a seguir, Brousseau propôs o modelo que estrutura o meio didático. Esse modelo é uma ferramenta da Teoria das Situações Didáticas e foi o arranque dos estudos de Margolinas (1997, 2002, 2005) na perspectiva para a atividade do professor. Este modelo propõe "explicar as várias etapas da atividade do professor desde o planejamento, passando pela aula propriamente dita (momento em que ele interage com o aluno), até o momento em que observa o aluno em ação"

Como esse estudo buscamos identificar conhecimentos e concepções que influenciam as escolhas feitas por professores de matemática, para propor suas aulas onde apresentaremos mais adiante neste trabalho, iremos utilizar o Modelo dos Níveis da Atividade do Professor proposto por Margolinas (2002, 2005) como referencial para descrever parte da sequência didática posteriormente. Assim, apresentamos um pouco dessa teoria a seguir.

Essa pesquisadora, por sua vez, propôs uma nova sistematização e uma nova ampliação do modelo supracitado com intuito de evidenciar o papel do professor na relação didática. Então, ela introduziu as posições P+3, P+2 e P+1 no modelo de estruturação do meio, onde propôs um quadro, como o ilustrado abaixo.

Quadro 1 – Estruturação do *milieu*

<table>
<tr><td>M+3
M: Construção</td><td></td><td>P + 3
P: Noosférico</td><td>S+3
Situação noosférica</td><td rowspan="3">Niveau
x
surdidactiques
(Sobre-didática)</td></tr>
<tr><td>M+2
M: Projeto</td><td></td><td>P + 2
P: Construtor</td><td>S+2
Situação de construção</td></tr>
<tr><td>M+1
M: Didático</td><td>E+1
E: Reflexivo</td><td>P+1
P: Projetista</td><td>S+1
Situação de Projeto</td></tr>
<tr><td>M0
M: Aprendizagem</td><td>E0
E: Aluno</td><td>P0
P: Professor</td><td colspan="2">S0
Situação didática</td></tr>
<tr><td>M-1
M: Referência</td><td>E-1
E: Aprendiz</td><td>P-1
P: Observador</td><td>S-1
Situação adidática de aprendizagem</td><td rowspan="2">Niveau
x
sousdidactique</td></tr>
<tr><td>M-2
M: Objetivo</td><td>E-2
E: Agindo</td><td></td><td>S-2
Situação de referência</td></tr>
</table>

M-3 M: Material	**E-3** E: Objetivo		**S-3** Situação objetiva	(sob-didática s)

Fonte: Margolinas, 2004

Nas posições S+1, S+2 e S+3 são as situações em que o docente não está em interação com o aluno (situações sobre-didáticas). Nas posições S-1, S-2 e S-3 são as situações sob-didáticas. S0 é a situação em que o professor está em interação real com o discente, é a situação didática é a parte mais visível da atividade do professor. Em 2002, com a evolução de seus estudos, Margolinas (1997) apresentou um modelo organizado por níveis, onde denominou por Níveis de Atividade do Professor, que apresentamos a seguir:

Quadro 2 - Modelo de Níveis da Atividade do Professor

Nível +3: Valores e concepções sobre o ensino e a aprendizagem Projeto educativo: valores educativos, concepções de aprendizagem e de ensino.
Nível + 2 Construção do tema Construção didática global na qual se inscreve a aula: noções a estudar e aprendizagem a construir.
Nível + 1: Planejamento da aula Projeto didático específico para uma aula: objetivos, planejamento do trabalho.
Nível 0 : Situação didática Realização da aula, interação com os alunos, tomada de decisões na ação.
Nível -1: Observação do aluno em atividade Percepção da atividade dos alunos, regulação do trabalho atribuído aos alunos

Fonte: (MARGOLINAS, 2002)

A seguir a autora descreve o que propõe em cada nível do modelo modificado como, por exemplo, no nível P+3 conhecido como (nível noosférico ou ideológico) caracteriza-se pela atividade do docente refletida de forma geral ou sempre em geral do ensino da matemática (ideia ampla do conhecimento que será ministrado). Considerando o P+2 denominado (nível de construção) é a atividade do professor de “conceber as grandes linhas do ensino de um tema” (ideia mais específica do que se pretende desenvolver, ensino de um conteúdo matemático). Na engenharia didática esse nível na pesquisa é uma situação fundamental. No P+1 chamado de (nível de planejamento) e se caracteriza pela determinação do cenário de uma aula planejada pelo professor (planejamento da aula). Já P0 é o (nível didático) que evidencia a ação do professor na sala de aula. Definido como o “nível de base” no qual acontecem a interação entre os alunos e o professor, é onde o docente mobiliza conhecimentos que ele possui dos alunos e que vão subsidiar suas decisões mais imediatas”. No P-1 é o (nível de observação), é determinado pela devolução ou da observação da atividade dos alunos, é onde o docente deve distinguir no trabalho do aluno, os erros e as dificuldades de aprendizagem apresentados que estão relacionadas com o que se pretende ensinar (MARGOLINAS, 2002).

Vale ressaltar que embora apresentamos linearmente os níveis, (MARGOLINAS, 2002) destaca que essa é uma descrição estrutural e que os níveis de atividade “não devem ser relacionados ao aspecto temporal”. O que deve ser levado em consideração é que a atividade do professor é dinâmica e que os níveis interagem uns com os outros.

3.2 Engenharia Didática (ED)

A Engenharia Didática (ED) conhecida como clássica ou de primeira geração, emergiu da Didática da Matemática, sobre influência da Didática Francesa, no início dos anos 1980. Os precursores que se destacam são: Yves Chevallard e Guy Brousseau, em 1982 e Michèle Artigue, posteriormente em 1989 (ALMOULOUD; SILVA, 2012).

Segundo Artigue (1988), ela compara essa abordagem didática como ao trabalho de um engenheiro que, para realizar seu projeto, se ampara em conhecimentos científicos de sua propriedade, concorda em se submeter a um comando do tipo científico, obriga-se trabalhar com objetos de maior complexidade do que os refinados da ciência e logo enfrenta, com os recursos que possui os problemas desprezados pela ciência (ARTIGUE, 1988 *apud* ALMOULOUD; SILVA, 2012).

No entanto, a ED é reconhecida sendo uma metodologia de pesquisa caracterizada por esquema experimental com intuito de auxiliar no desenvolvimento da construção, execução e análise de sessões de ensino em sala de aula, pois essa metodologia de pesquisa foi apresentada como capaz de fazer surgir fenômenos didáticos em situações mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica (ALMOULOUD; SILVA, 2012).

A ED é utilizada em pesquisas que exploram os processos de ensino e aprendizagem de conceitos, bem como, na elaboração de "gêneses artificiais" de conceitos. Assim, Artigue (1988) aponta que esta metodologia se caracteriza em um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula, em outras palavras, sobre a "concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino", possuindo uma validação interna por meio da confrontação das análises a priori e a posteriori. Assim, uma pesquisa seguindo os princípios de uma ED, perpassa pelas seguintes fases: análises prévias (preliminares); construção das situações de ensino (concepção) e análise a priori; experimentação (aplicação da situação didática) e análise a posteriori. Descrevendo cada fase, têm-se:

Na Análise Preliminar o objetivo é fazer o levantamento sobre o quadro teórico didático geral ou fundamentação teórica metodológica em relação ao que a pesquisa pretende abordar, ou seja, considera-se os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em tela, sendo incluído "o ensino atual do assunto e seus efeitos, as concepções dos discentes, dificuldades e obstáculos[2], e análise do campo das restrições e exigências para o desenvolvimento da efetiva realização didática" em sua análise epistemológica (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 26).

A Concepção e Análise a Priori das situações didáticas, é onde determina de que maneira as escolhas podem influenciar no comportamento dos envolvidos. Nessa etapa o docente deve tentar prever o comportamento dos discentes durante a atividade proposta (situação didática) sendo elaborado um planejamento para mediar o comportamento apresentado. O pesquisador, nessa etapa da pesquisa, orienta-se pelas análises preliminares e delimita o número de variáveis pertencentes ao sistema sobre as quais o ensino pode atuar denominadas por variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas).

---

[2]Aqui entendemos obstáculos por: epistemológicos e didáticos. No epistemológico, Bachelard (1996, p. 17) comenta que "não se trata de considerar obstáculos externos … é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidão e conflitos … causas de estagnação e até de regressão, causas de inércia". E, Pais (2015, p.3), define obstáculos didáticos por "conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar"

Com isso, são levados em consideração os pontos: a descrição das escolhas realizadas no nível local (podendo relacionar com as escolhas globais) e das características da situação a-didática desenvolvida; a análise do que pode estar presente para o aluno nesta situação, em relação às possibilidades de "de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação"; a previsão de possíveis campos de comportamentos e a busca pela demonstração de como a análise pode controlar seus significados e afirmar que se ocorreram os comportamentos esperados, foi consequência do desenvolvimento da aprendizagem (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 26).

Logo depois, acontece a Experimentação, momento em que a aula acontece e é desenvolvida. O docente aplica a sequência didática e é realizada a coleta de dados. Consiste. também, na apresentação dos objetivos e condições da realização da pesquisa, é onde se estabelece o contrato didático[3] e registra-se as observações realizadas durante a experimentação (ALMOULOUD; SILVA, 2012).

Por fim, a Análise a posteriori e validação, que consiste em averiguar as hipóteses definidas na etapa anterior, aqui os dados coletados são analisados profundamente. Nessa análise, verifica-se um conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, a citar: "produção dos alunos, registros de observadores e registro em vídeo". Se faz necessário a confrontação com a análise a priori para validação ou não das hipóteses descritas na investigação (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 27).

Ainda segundo Artigue (1988), essas etapas podem ser retomadas e aprofundadas ao longo do trabalho de pesquisa, vistas às necessidades emergentes e deve ser um trabalho concomitante com os demais momentos da pesquisa. A seguir, apresenta-se a teoria de ensino que será abordada na pesquisa, Teoria das Situações Didáticas.

3.3 A Plataforma GeoGebra

[3] Brousseau (1986, p.51) define o contrato didático como sendo: *"Uma relação que determina - explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente - aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir, e então ele se tornará responsável, e então, ele será de uma maneira ou de outra, responsável diante do outro* [parceiro]. *Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, quer dizer, a parte do contrato que é específica ao conteúdo: o conhecimento matemático visado."*

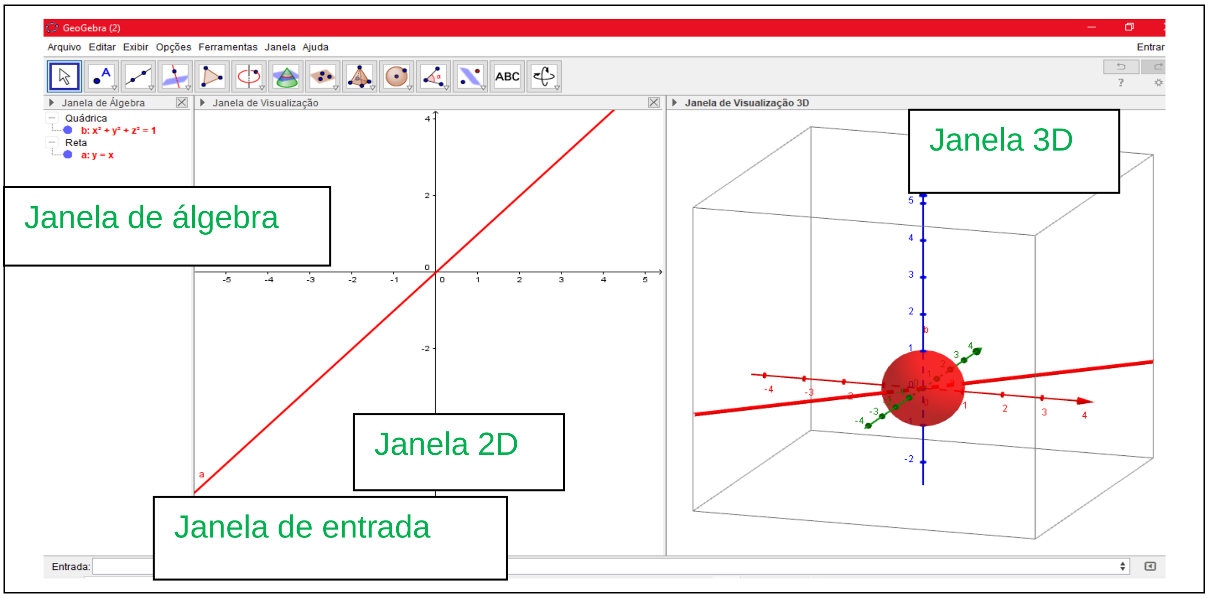
Foi criada por Markus Hohenwarter, em 2001 nos Estados Unidos, na Universitat Salzburg. Pensada para o ambiente de sala de aula e com o objetivo de auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, é uma plataforma gratuita, possui em sua escrita a linguagem JAVA, versão em português, permite realizar construções geométricas utilizando pontos, retas, segmentos de retas, polígonos, inserir funções, ou seja, possui articulação conjunta entre formas geométricas, gráficas e algébricas. Vale salientar que ele ainda está em desenvolvimento e aprimoramento, mas é orientado a ser utilizado em sala por já existir pesquisas que destacam seu potencial pedagógico (SILVA, 2015).

A plataforma GeoGebra também se destaca pelo recebimento de vários prêmios internacionais, destaca-se dentre eles: European Academic Software Award (2002), Austrian Educational Software Award (2003), German Educational Software Award (2004), German Educational Media Award (2004), Austrian Educational Software Award for "Spezielle Relativitätstheorie mit GeoGebra" (2005), Prêmio Internacional de Software Livre, categoria Educação (2005), 1º Prêmio no "Desafio dos Círculos" com GeoGebra (2006) e Prêmio Austríaco de Software Educacional (2006).

Primo (2013) apóia a utilização e o potencial desta plataforma, quando comenta que em uma construção é possível explorar inúmeras propriedades através de manipulações e alterações realizadas na mesma, sem modificar as propriedades geométricas. Essa plataforma pode ser instalada em um computador e pode ser usada diretamente em um pendrive, sem necessitar de instalação em um local específico, tornando-se mais acessível (SILVA, 2015).

Com isso, o GeoGebra é entendido como uma plataforma de Geometria Dinâmica e é estruturado por algumas janelas, a citar: uma janela de informações algébrica, janela de entrada e a janela de visualização geométrica (podendo ser em 2D ou 3D), como ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Interfaces da plataforma GeoGebra



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Para o manuseio da plataforma GeoGebra, pode-se destacar a existência de portais e repositórios de fóruns de ajuda, onde apresentam e disponibilizam materiais produzidos para auxiliar o professor/aluno aprendiz ou que já possua algum domínio dessa ferramenta. Então, arquivos, aulas elaboradas, apostilas são fáceis de serem encontradas para auxiliar ao aprendizado dessa plataforma, oferece inúmeras possibilidades de manipulação uma vez que as construções exploram a Geometria, a álgebra e o cálculo (SILVA, 2015, p. 150).

Assim, vale discutir a utilidade dessa plataforma no ensino de Matemática, a citar, na disciplina de Matemática em situações de ensino pensadas e planejadas para se obter melhores resultados nesta disciplina. Com isso, necessita-se desenvolver sequências didáticas em sala de aula com ferramentas e teorias que ajudem na prática da docência.

3.4 Ensino de Matemática com aporte na plataforma GeoGebra

Na educação contemporânea a necessidade por recursos tecnológicos está cada vez mais evidente. Em virtude disso, já possuem e estão sendo desenvolvidas várias pesquisas envolvendo as Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação Matemática. Assim, uma ferramenta em destaque nas pesquisas no ensino de Matemática é a plataforma GeoGebra, por propiciar uma geometria dinâmica, que permite a construção de vários objetos geométricos, como: curvas parametrizadas segmentos, vetores, pontos, retas, seções cônicas, gráficos de funções, dentre outros, que podem ser modificados dinamicamente. (ROTEIRO, 2016).

Pesquisas com essa temática, destaca-se a de Alves (2013), intitulada como "visualização no ensino de integrais com o uso do GeoGebra: o caso das coordenadas polares", ele comenta sobre o potencial que a plataforma GeoGebra possui, mostra também, a utilidade do mesmo nas construções apresentadas e indica à mediação deste saber em sala, por intermédio dessa plataforma.

No mesmo sentido, Cometti (2018) afirma que nas disciplinas específicas de Cálculo, a utilização de tecnologias pode se apresentar como ferramentas potencializadoras dos processos de ensino e aprendizagem. Cunha (2014, p.55) reafirma que "o uso da tecnologia no ensino de Cálculo amplia as possibilidades de trabalhar atividades por diferentes representações, tais como tabelas, gráficos, expressões algébricas de forma rápida e articulada".

Para Cometti (2018), as plataformas disponíveis para ajudar no ensino de Cálculo causam interesses em professores e alunos, porque são ferramentas que podem amenizar as práticas tradicionais de ensinar Cálculo e intensificar o uso da tecnologia. Para o ensino das disciplinas de Cálculo muitas são as plataformas disponíveis, uma delas destacada é a plataforma GeoGebra.

Cometti (2018) afirma que nas disciplinas de Cálculo, a plataforma GeoGebra é objeto de várias pesquisas em muitos assuntos do Ensino Superior. Este autor comenta que essa plataforma aparece em pesquisas envolvendo Limites e Continuidades (ROCHA, 2010; ALVES, 2010; MOURA, 2014), Séries e Sequências (FONSECA, 2012), Derivadas (GONÇALVES, 2012; GRANDE, 2013; PINTO, 2014; CUNHA, 2014; MARTINS JUNIOR, 2014; RICALDONI, 2014; ALVES, 2014; LOPES, 2015), Integrais (VOGADO, 2014; NASSARELA, 2014; REIS, 2015; BEZERRA, 2015).

Na dissertação de Cometti (2018), intitulada por "Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis**:** contribuições do GeoGebra 3d para a aprendizagem", ele comenta que a visualização proporcionada pela plataforma, se mostrou uma ferramenta indispensável na construção de conceitos e propriedades de Integrais Múltiplas. O autor, ainda, destaca que o uso dessa plataforma e sobre as propriedades que ela possui ajudaram na: observação e exploração de conceitos visuais de Integrais Múltiplas, viabilização do processo de criação, interpretação e reflexão sobre os gráficos criados, descrição e análise de informações e ideias antes desconhecidas e dentre outros aspectos. Concluiu afirmando que o uso da plataforma

GeoGebra nessa pesquisa oportunizou momentos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, apoiados a visualização e defende como uma experiência a ser replicada e utilizada como opção pedagógica para práticas dos professores de Cálculo. (COMETTI, 2018).

Outro trabalho que evidencia a plataforma GeoGebra é a pesquisa realizada por Pereira e Souza Junior (2019), intitulado por “Tecnologias Digitais e Modelagem Matemática: um Mapeamento de dissertações e teses brasileiras no Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no ensino Superior”, apresenta em seus resultados, que a plataforma foi uma das mais citadas e utilizadas nos trabalhos analisados na pesquisa, em trabalhos como por exemplo de Borssoi (2013), Schutz (2015) e Silva (2013). Vale destacar o trabalho de Schutz (2015, p. 43 – 44), que alude o uso da plataforma GeoGebra com o intuito de “plotar os gráficos das funções e obter regressões, raízes de equações, campos de direção e resolver as equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.” (PEREIRA; SOUZA JUNIOR, 2019).

Adicionalmente, no trabalho de Oliveira, Gonçalves e Piasson (2018), eles realizaram um mapeamento de trabalhos que abordassem a plataforma GeoGebra no ensino de Cálculo Diferencial e integral e em suas considerações poderam identificar

> Procurando apontar os argumentos pelos quais o software é utilizado, identificamos que, em geral, os autores assumem a ideia de que, ao explorar o GeoGebra, este se torna um fator de modificação à compreensão dos conceitos e uma importante ferramenta de mediação didática. Os autores também percebem no software a presença de recursos tecnológicos com potencial para contribuir com a melhora do processo de ensino do CDI, em especial, os recursos de visualização gráfica e animação, os quais possibilitam a ressignificação dos conceitos relacionados a esta disciplina, e proporcionam o equilíbrio entre o processo visual e algébrico (OLIVEIRA; GONÇALVES; PIASSON, p.481- 482, 2018).

Ainda segundo esses autores,de acordo com os dados levantados com o mapeamento, poderam entender que utilizar o GeoGebra se mostra significativo para os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral, e sua utilização é “recomendável como recurso didático e metodológico em sala de aula” (OLIVEIRA; GONÇALVES; PIASSON, p.482, 2018).

Outro autor, Baptista (2017) ressalta a contribuição do GeoGebra para o desenvolvimento de sua pesquisa sobre a abordagem de CP no Ensino Médio, destacando a plataforma por ser uma excelente ferramenta tecnológica para o ensino da matemática ocasionando ao aluno, maior interesse do conteúdo estudado em sala de aula (BAPTISTA, 2017).

Corroborando com Baptista (2017), Primo (2013) destaca o potencial que esse programa apresenta sendo uma ferramenta de grande utilidade nas disciplinas de exatas e por estar em ascensão no ensino de Matemática, quando se pensa na dinâmica do mundo moderno. O autor argumenta que essa plataforma possibilita a utilização de vários recursos e, podendo criar figuras bidimensionais e tridimensionais, podendo serem plotadas e rotacionadas e, é uma ferramenta que favorece maior atenção e interação dos alunos. Suas animações possibilitam uma melhor visualização de conteúdos matemáticos.

Segundo Hellmann, L. *et al*. (2016) em seu trabalho utilizando o software GeoGebra, com as atividades apresentadas,

> foi possível perceber um bom aceite por parte dos alunos, pois demonstraram entusiasmo ao utilizar o software, além de elogios pela sua praticidade e possibilidade de simulação ao resolver exercícios, além de ser útil na verificação de resoluções feitas manualmente. A seguir, algumas considerações, feita pelos alunos: "é possível verificar o que acontece no gráfico, quando alteramos um número ou um sinal" ou "o Geogebra ajuda a representar e calcular gráficos que demorariam muito tempo para fazer manualmente" (HELLMANN, L. *et al*., p.42, 2016).

Com isso, a plataforma GeoGebra como recurso tecnológico, pode facilitar o aprendizado no estudo de Curvas em CP. Além disso, Cometti (2018) orienta que para melhor potencialidade e aproveitamento em atividades ligadas à exploração de características visuais devem ser guiadas pelo docente ou por uma sequência didática. Assim, abaixo se apresenta como será a dinâmica da pesquisa, explicando como será utilizada cada teoria e desenvolvimento de sequências didáticas.

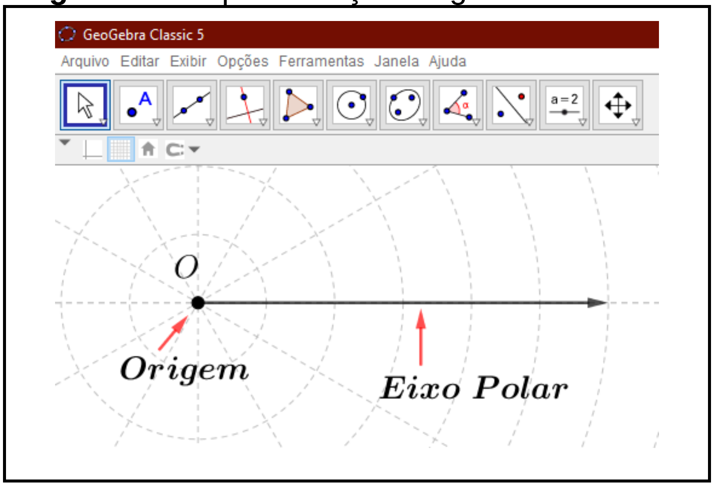
3.5 *T*ópicos em Coordenadas Polares

Aqui apresentamos nosso objeto matemático, tópicos em CP descrevendo: Sistema de CP, Comprimento, Área, Volume e Aplicações em CP.

3.5.1 Sistema de Coordenadas Polares

O Sistema de Coordenadas Polares foi um sistema introduzido pelo matemático Newton, é um sistema de coordenadas bidimensional, sendo que cada ponto no plano é descrito por uma distância e um ângulo considerando um ponto fixo de referência. Ou seja, para construção desse sistema é considerado um ponto de referência, semelhante a origem do sistema cartesiano, que é denominado de pólo ou origem, que é representado por O e a semirreta do polo com a direção de referência é chamado de eixo polar, como ilustrado a seguir.

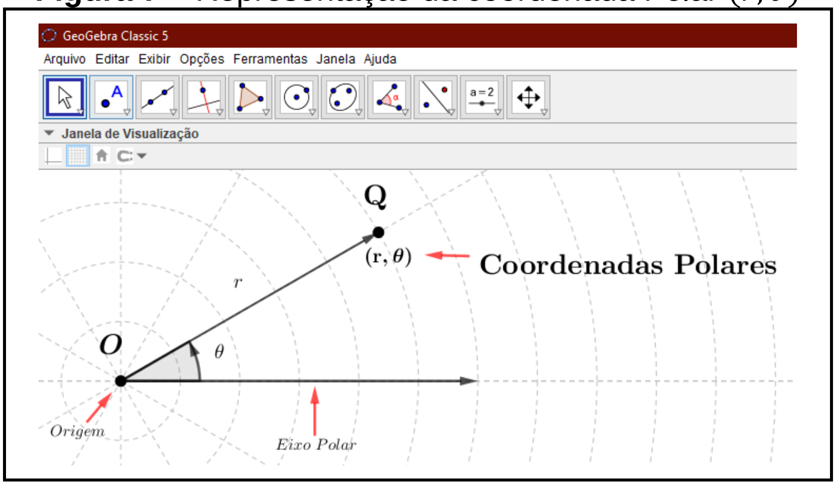
Figura 6 – Representação Origem e Eixo Polar



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

É chamada de coordenada radial ou raio essa distância a partir do polo e o ângulo formado pela semirreta e o eixo polar é chamada de coordenada angular ou ângulo polar, os ângulos em notação polar, normalmente são expressos em graus ou em radianos ($2\pi\, rad = 360°$). Considerando Q, sendo outro ponto nesse plano, r será a distância entre OQ e θ o ângulo entre o eixo polar e o segmento OQ. Assim, o ponto Q é representado pelo par ordenado (r, θ), logo r e θ são chamados de CP. Outros fatores importantes é que um ponto pode ser expresso por um número infinito de CP diferentes $(r, \theta\ + -n \times 360°)$ e quando o ângulo é medido no sentido anti-horário é dito que a coordenada é positiva angular (STEWART, 2013).

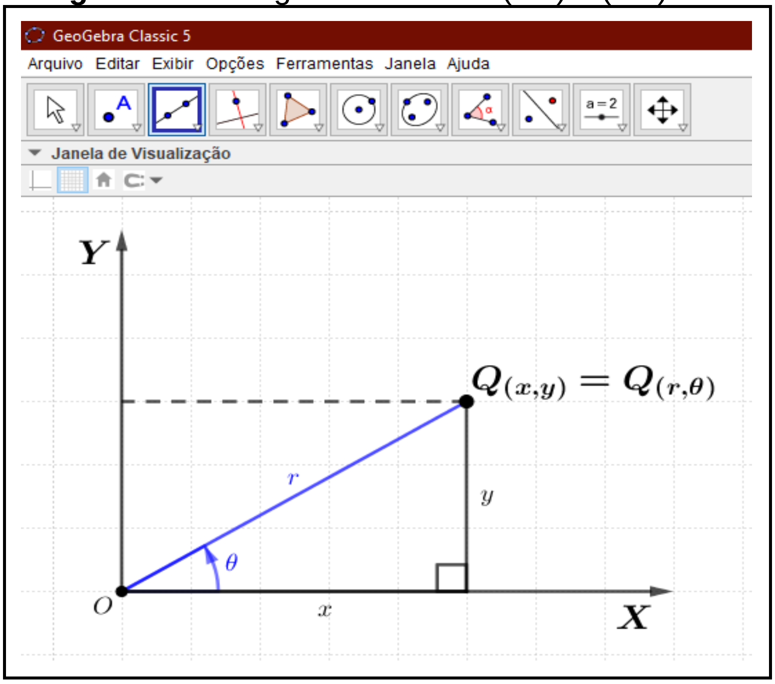
Figura 7 – Representação da coordenada Polar (r, θ)



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Ciente de elementos fundamentais de CP, agora pode-se perceber uma relação existente entre as (CP) e as Coordenadas Cartesianas (CC). Segundo Stewart (2013), é considerado o pólo de CP correspondente a origem do CC e o eixo polar de CP coincide com o eixo x positivo de CC. Pela imagem a seguir podem-se extrair as seguintes relações.

Figura 8 – Triângulo Relacional (CP) x (CC)



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Ao observar a imagem acima e utilizando propriedades de trigonometria no triângulo retângulo, será calculado o $cos(\theta)$ e o $sen(\theta)$, assim temos as seguintes relações:

$$COS(\theta) = \frac{X}{R} \qquad X = R.COS(\theta)$$

$$SEN(\theta) = \frac{Y}{R} \qquad Y = R.SEN(\theta)$$

A partir dessas relações é possível encontrar outras relações, elevando os membros ao quadrado, isolando termos, calculando o arco tangente ou o arco inverso, como nas relações descritas abaixo:

$$X = R.COS(\theta) \; X^2 = R^2.COS^2(\theta)$$

$$Y = R.SEN(\theta) \; Y^2 = R^2.SEN^2(\theta)$$

$$R^2 = X^2 + Y^2 \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$X = R.COS(\theta) \quad COS(\theta) = \frac{X}{R}$$

$$Y = R.SEN(\theta) \quad SEN(\theta) = \frac{Y}{R}$$

$$TG(\theta) = \frac{X}{Y} \quad \Theta = ARCTG\frac{X}{Y}$$

Outra informação importante é a respeito ao gráfico, pois o gráfico de uma equação polar $F(r,\theta) = 0$, são todos os pontos P que tenha ao menos uma representação (r,θ), com as coordenadas satisfazendo a equação (STEWART, 2013).

3.5.2 Comprimento de curva em Coordenadas Polares

Para calcularmos o comprimento de uma curva polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, nos referimos a θ como um parâmetro e escrevemos as equações paramétricas da curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\, sen\,\theta = f(\theta) sen\,\theta$$

Utilizando a Regra do Produto e derivando em relação a θ, obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\, sen\,\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} sen\,\theta + r\cos\theta$$

Agora elevando as duas igualdades anteriores ao quadrado, somando-as e utilizando a identidade trigonométrica $cos^2\theta + sen^2\,\theta = 1$, ficamos com:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 cos^2\,\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\, sen\,\theta + r^2 sen^2\theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2\,\theta$$
$$+2r\frac{dr}{d\theta}\, sen\,\theta\cos\theta + r^2cos^2\,\theta = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 cos^2\,\theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2\,\theta + r^2sen^2\theta + r^2cos^2\theta =$$
$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 (cos^2\,\theta + sen^2\,\theta) + r^2(cos^2\,\theta + sen^2\theta) = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

Assumindo que a derivada da função f' é contínua, podemos usar o teorema:

Teorema: Se uma curva C é descrita por equações paramétricas $x = f(t), y = g(t), \alpha \leq t \leq \beta$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e C é percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de α até β, então o comprimento de C é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 dt}$$

Assim, o comprimento de arco pode ser reescrito em CP como:

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

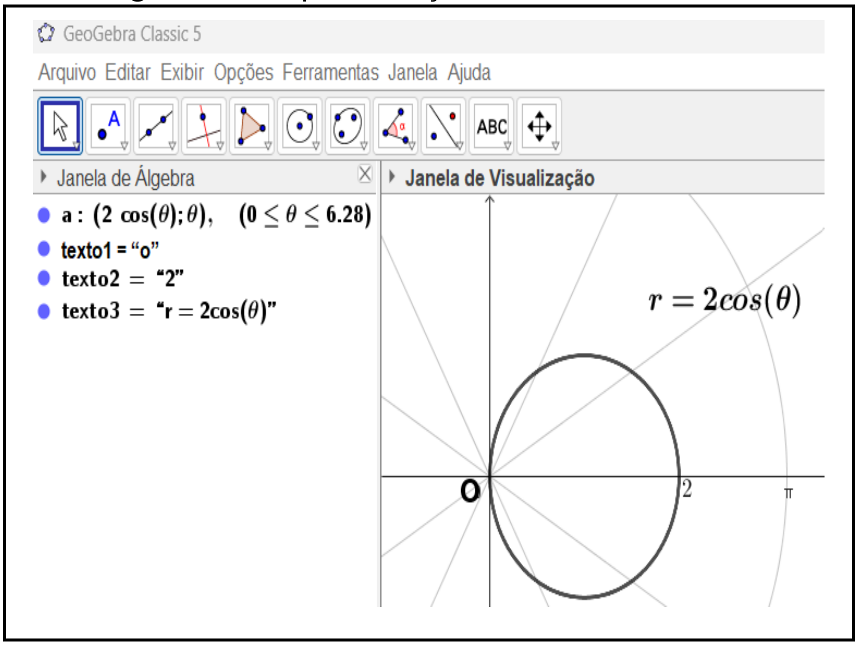
Portanto, o comprimento da curva com equação polar $r = f(\theta),\ a \leq \theta \leq b,$ é

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{(r)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Exemplo 1: Calcule o comprimento exato da curva polar $r = 2cos\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$

Solução: Antes de utilizar a fórmula apresentada anteriormente, consideramos $r = 2cos\theta$ e calcularemos:

Figura 9 – Representação da curva $r = 2cos\theta$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

$r^2 = 4\theta$, $\frac{dr}{d\theta} = 2\, sen\, \theta$ e $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 4sen^2\, \theta$, agora substituindo na fórmula, temos:

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(2\, cos\, cos\, \theta\,)^2 + 4\, sen^2\theta} d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4cos^2\, \theta + 4\, sen^2\theta} d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4(cos^2\, \theta + \, sen^2\theta)} d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4} d\theta$$

$$L = 2\theta|_0{}^{\pi}$$

$$L = 2\pi\, u.c$$

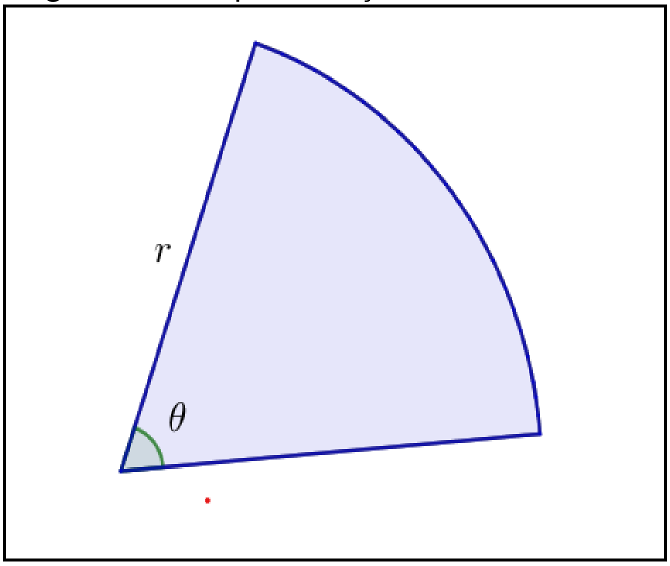
3.5.3 Área em Coordenadas Polares

Nesse tópico iremos deduzir a fórmula para calcular a área de uma região que tem como fronteira uma equação polar. Para isso, começaremos lembrando a fórmula para cálculo de área de um setor de um círculo, dada por:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \qquad (I)$$

Onde r é o raio e θ, a medida em radianos do ângulo central, como mostrado na Figura 10 abaixo.

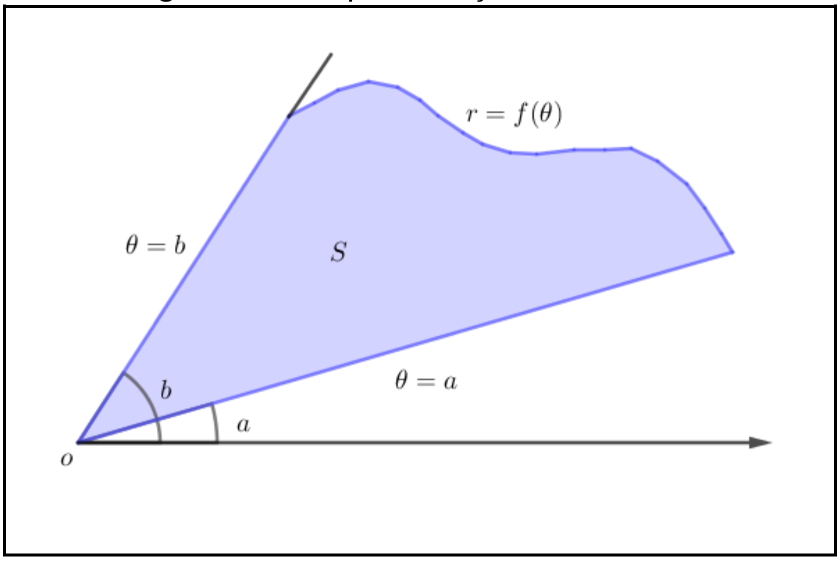
Figura 10 – Representação do setor Circular



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Seja S a região, como ilustrada na Figura 11, limitada pela curva polar $r = f(\theta)$ e pelos raios $\theta = a$ e $\theta = b$, onde f é uma função contínua positiva e onde $\theta < b - a \leq 2\pi$.

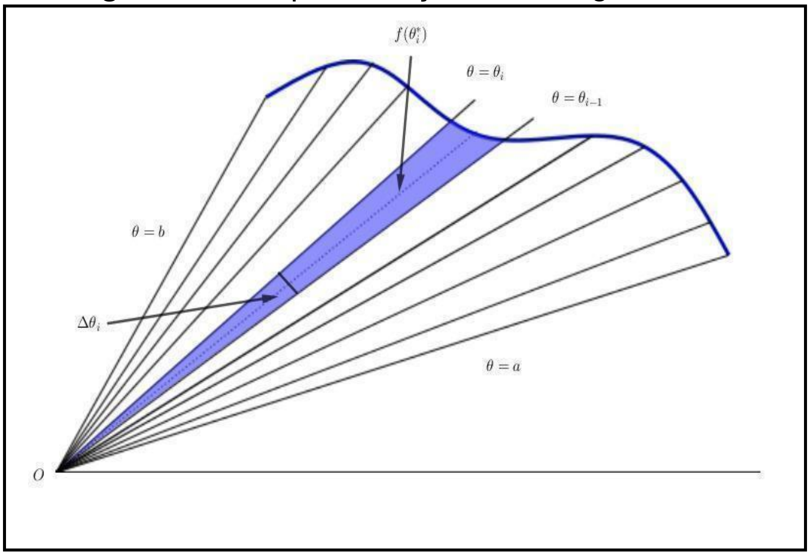
Figura 11 – Representação da área de S



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos com extremidades $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ e larguras iguais a $\Delta\theta$. Os raios $\theta = \theta_i$ podem dividir S em n regiões menores com ângulos centrais $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Se escolhermos θ_i^*no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, então a área ΔA_i da i-ésima região será aproximada pela área do setor de um círculo com ângulo central $\Delta\theta$ e raio $f(\theta_i^*)$. Como mostra a Figura 12 abaixo.

Figura 12 – Representação das n regiões de S



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Considerando a fórmula (I), temos:

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\Delta\theta$$

E, para encontrar uma aproximação para a área total A de S será

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\Delta\theta \qquad (II)$$

Tomando como base a figura 18, percebemos que a aproximação melhora em (II) quando $n \to \infty$. Outrossim, as somas em II são as somas de Riemann para a função $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, logo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\Delta\theta = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

Contudo, a fórmula para a área A da região polar S é

$$A = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta \qquad (III)$$

Que pode ser escrita como:

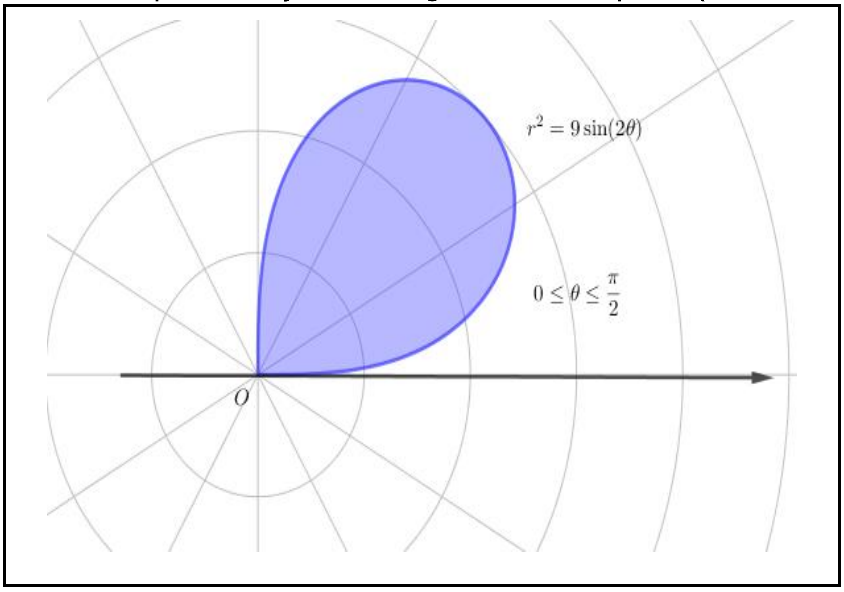
$$A = \int_a^b \frac{1}{2}r^2 d\theta \qquad (IV)$$

Onde $r = f(\theta)$ e, podemos perceber uma relação entre a fórmula (I) e a fórmula (IV). Uma visão que é interessante pensar que quando aplicamos a fórmula (III) ou (IV), podemos imaginar na área como sendo varrida por um raio em rotação que passa por O e que começa com o ângulo a e termina com o ângulo b.

Exemplo 2: Encontre a área da região que é delimitada pela curva $r = \sqrt{9\ sen\ 2\theta}$ com um $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Solução: Podemos perceber que a fórmula para o cálculo de área, solicita r^2, então antes de substituir a função na fórmula iremos determinar r^2. Logo, elevamos ambos os membros da igualdade ao quadrado, assim ficaremos com: $r^2 = \left(\sqrt{9\ sen\ 2\theta}\right)^2 \to r^2 = 9\ sen\ 2\theta$.

Figura 13 – Representação da Região do exemplo 2 ($r^2 = 9\ sen\ 2\theta$)



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Agora podemos substituir na fórmula (IV).

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(9\ sen\ 2\theta)d\theta$$

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2\theta d\theta$$

Utilizando o resultado que $\int sen\ \alpha\theta d\theta = -\frac{1}{\alpha\theta} cos\ \alpha\theta + k$ e como sabemos que vale para a integral definida também, podemos resolver de forma imediata a integral acima, sendo:

$$A = \frac{9}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}cos\ 2\theta\right)\right]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = -\frac{9}{4}[(cos\ 2\theta)]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = -\frac{9}{4}\left[\left(cos\ 2 * \frac{\pi}{2}\right) - (cos 2 * 0)\right]$$

$$A = -\frac{9}{4}[(-1) - (1)]$$

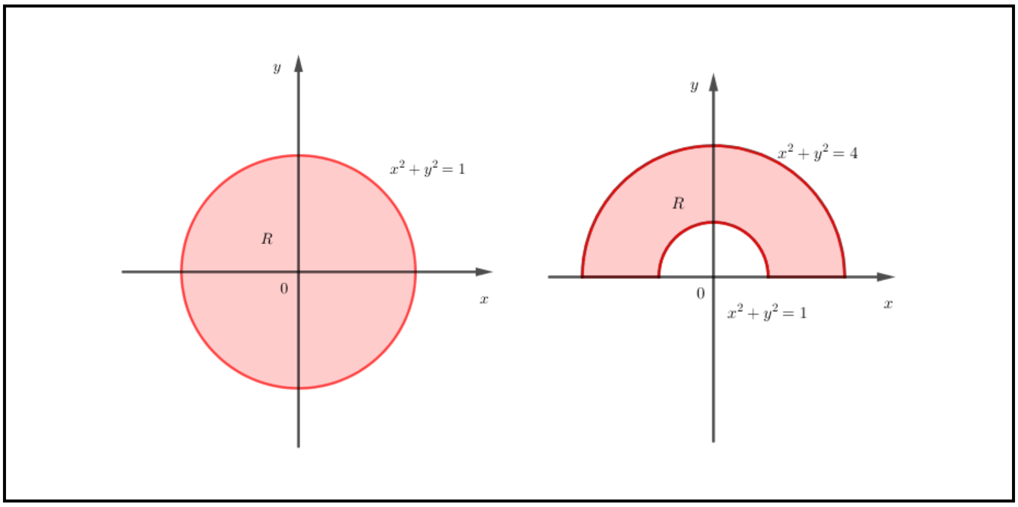
$$A = -\frac{9}{4}[-2]$$

$$A = \frac{9}{2}\ u.a$$

3.5.4 Volume em Coordenadas Polares

Para calcular a integral dupla $\iint_R f(x,y)dA$, a descrição da região R, com uma ilustração na figura 14, é complicada em coordenadas retangulares, porém a utiliza-se a descrição dessa região R em coordenadas polares por se apresentar mais fácil.

Figura 14 – Representação Regiões R



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

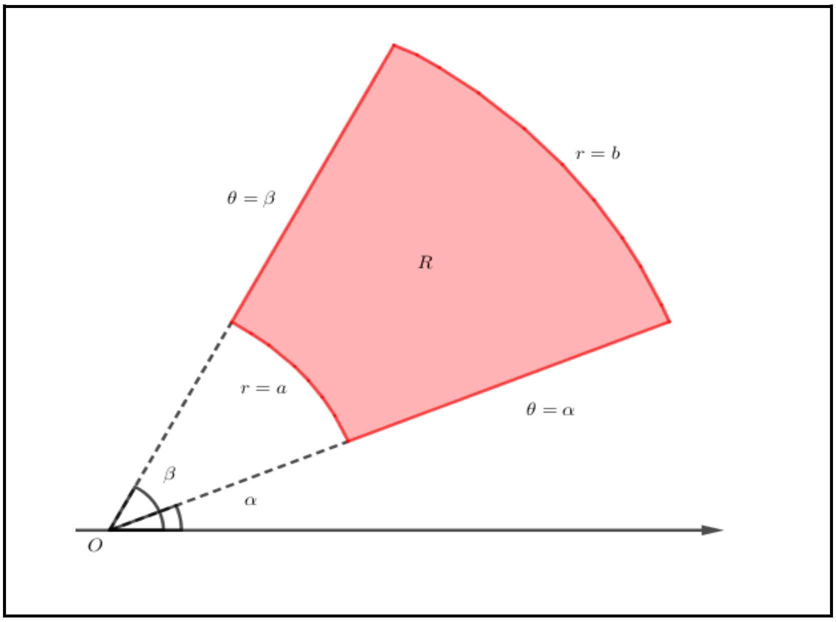
$(a)\ R = \{(r,\theta)|0 \leq r \leq 1\ , 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ $\quad$ $(b)\ R = \{(r,\theta)|\ 1 \leq r \leq 2\ , 0 \leq \theta \leq \pi\}$

Como já vimos as CP (r,θ), estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x,y) pelas equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\ cos\theta \qquad y = r\ sen\theta$$

Perceba também que as regiões da Figura 20, são casos especiais de um retângulo polar descrito por: $R = \{(r,\theta)|a\ \leq\ r\ \leq\ b\ ,\alpha\ \leq\ \theta\ \leq\ \beta\}$, ilustrado na figura 15.

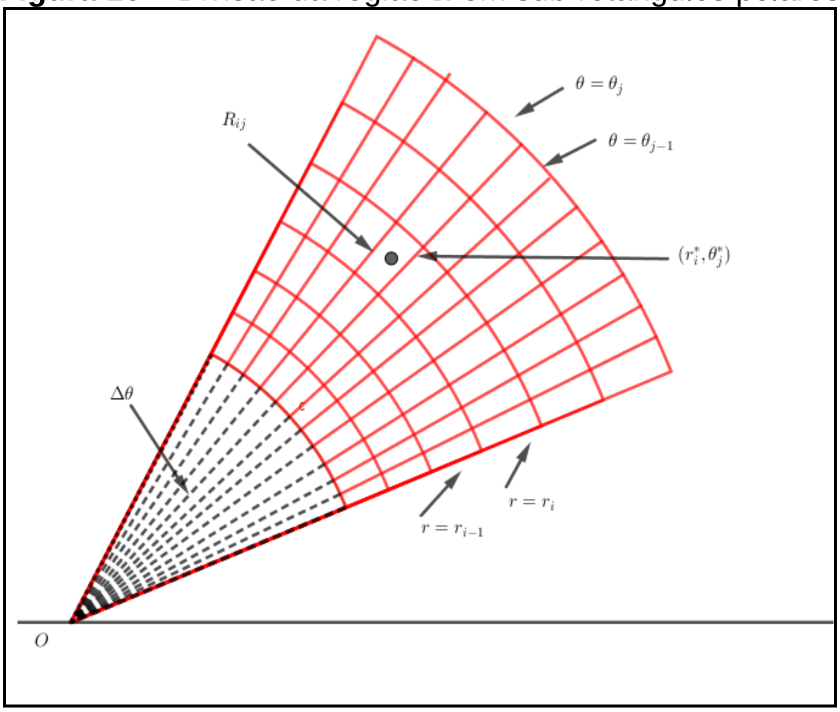
Figura 15 – Retângulo Polar



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Para realizar o cálculo da integral $\iint_R f(x,y)dA$, sendo R, um retângulo polar, dividiremos o intervalo $[a,b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = \frac{b-a}{m}$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$. Logo, os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividirão o retângulo polar R nos retângulos polares menores R_{ij} ilustrados na figura 16.

Figura 16 – Divisão da região R em sub-retângulos polares



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Analisando o ponto central do sub-retângulo polar $R_{ij} = \{(r,\theta)|\, r_{i-1} \leq r \leq r_i,\ \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$ onde tem como CP $r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$ e $\theta_j^* = \frac{1}{2}\left(\theta_{j-1} + \theta_j\right)$. Agora calcularemos a área de R_{ij} utilizando a ideia de que a área de um setor de círculo de raio r e ângulo central θ é $\frac{1}{2}r^2\theta$. Depois subtraímos as áreas de dois desses setores, cada um deles com ângulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, assim percebemos que a área de R_{ij} será

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta$$

A integral dupla $\iint_R f(x,y)dA$, foi definida em termos de retângulos convencionais, mas se as funções f forem contínuas, podemos obter o mesmo resultado utilizando retângulos polares. As coordenadas retangulares do centro de R_{ij} são $(\,r_i^* cos\,\theta_j^*\ ,r_i^* sen\,\theta_j^*)$. Agora, faremos uma soma de Riemann obtendo

$$\sum_{i-1}^{m} \sum_{j-1}^{n} f(\,r_i^* cos\,\theta_j^*\ ,r_i^* sen\,\theta_j^*)\Delta A_i$$

$$= \sum_{i-1}^{m} \sum_{j-1}^{n} f(\,r_i^* cos\,\theta_j^*\ ,r_i^* sen\,\theta_j^*)\, r_i^*\, \Delta r\, \Delta\theta \quad (V)$$

Agora escrevendo $g(r,\theta) = rf(rcos\theta, r\,sen\theta)$, a soma de Riemann na equação (V) pode ser reescrita por

$$\sum_{i-1}^{m} \sum_{j-1}^{n} g(\,r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta$$

Como é a soma de Riemann para integral dupla escreveremos da seguinte forma

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} g(r,\theta)dr\, d\theta$$

Contudo, temos

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\,r_i^* cos\,\theta_j^*\ ,r_i^* sen\,\theta_j^*)\Delta A_i =$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(\,r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} g(r,\theta)dr\, d\theta =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta)r\, dr\, d\theta$$

Definição: (Mudança para Coordenadas Polares em uma integral Dupla) Se fé contínua no retângulo polar R dado por $0 \leq \alpha \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

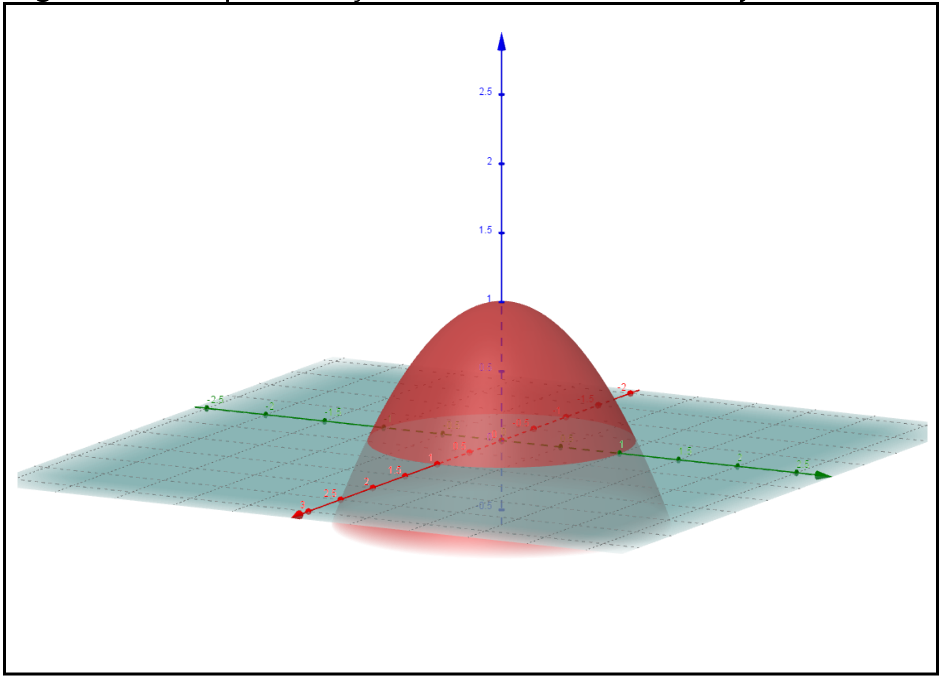
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta)r\,dr\,d\theta.$$

Na definição acima converte-se coordenadas retangulares para CPem uma integral dupla escrevendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,sen\,\theta$, usando os limites de integração adequados para r e θ e substituindo dA por $r\,dr\,d\theta$. Lembrando que não deve esquecer o fator adicional r no lado direito da definição. Segue um exemplo para ilustração dessa fórmula.

Exemplo 3: Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Solução: Se tomarmos $z = 0$ a equação do paraboloide ficará $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que o plano intercepta o parabolóide no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e o sólido está abaixo do parabolóide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ como na Figura 17.

Figura 17 – Representação do sólido $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z = 0$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Em coordenadas polares D é dado por $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$ o volume é

$$V = \iint_D \ (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr$$
$$= \theta|_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \quad u.v$$

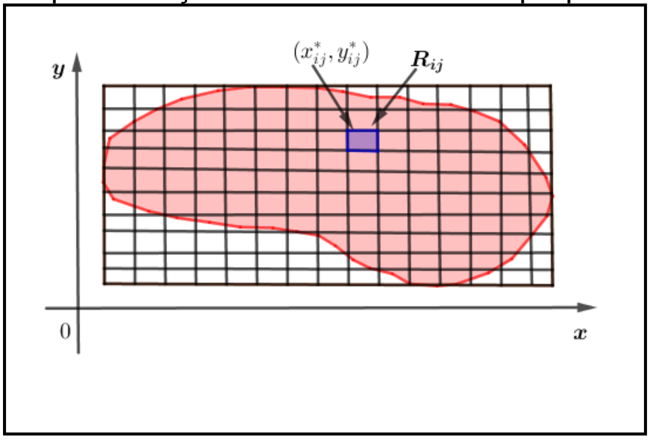
3.5.5 Aplicação de Coordenadas Polares outras áreas

As aplicações utilizando a dupla integral, podem ser citadas em várias áreas como na Física, tais como: cálculo de massa, carga elétrica, centro de massa e momento de inércia. Como, também, no que envolve funções de densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias. Aqui focaremos em apresentar a aplicação momentos e centros de massa, por ser aplicação que se utiliza de coordenadas polares.

3.5.5.1 Momentos e Centros de Massa

Considera-se que já foi determinado o centro de massa de uma lâmina de densidade constante e agora considera-se uma lâmina de densidade variável. Assim, suponha que a lâmina ocupará uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. Como já foi visto que o momento de uma partícula em relação a um eixo é dado pelo produto de sua massa pela distância (perpendicular) ao eixo. Divide-se D, em pequenos retângulos como na Figura 18 abaixo:

Figura 18 – Representação da divisão de D em pequenos retângulos



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Assim a massa de R_{ij} será aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$ e pode-se aproximar o momento de R_{ij} em relação ao eixo x por

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A]y_{ij}^*$$

Basta somar essas quantidades e aplicar o limite quando o número de sub-retângulos cresce indefinidamente, encontra-se o Momento da lâmina inteira em relação ao eixo x:

$$M_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \int \int_D y\, \rho(x,y)dA$$

De forma análoga, o Momento em relação ao eixo y:

$$M_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \int \int_D x\, \rho(x,y)dA$$

Como já definido o centro de massa $(\underline{x}, \underline{y})$ de tal modo que $m\underline{x} = M_y$ e $m\underline{y} = M_x$. Fisicamente significa que a lâmina se comporta como se toda sua massa se concentrasse em seu centro de massa. Com isso, a lâmina permanece horizontal quando está equilibrada em seu centro de massa.

As coordenadas $(\underline{x}, \underline{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade $\rho(x,y)$ são:

$$\underline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\int \int_D x\, \rho(x,y)dA \qquad \underline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\int \int_D y\, \rho(x,y)dA$$

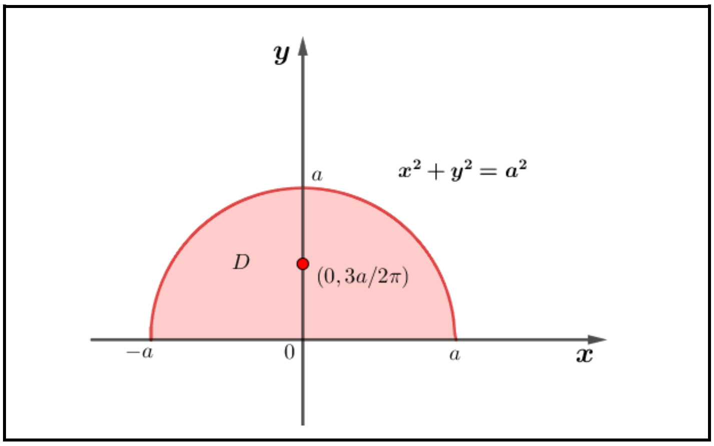
onde a massa m é dada por

$$m = \int \int_D \rho(x,y)dA$$

Exemplo 4: A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

Solução: Posicionando a lâmina na metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Como na Figura 19 abaixo:

Figura 19 – Representação da metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

A distância do ponto (x, y) ao centro do círculo que coincide com a origem é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Assim a função densidade é $\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$, onde K é constante. Daí tanto a função densidade como a forma da lâmina indicam a conversão para coordenadas polares para resolver a situação proposta. Assim, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a região D é dada por $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi$. Então, a massa da lâmina será:

$$m = \int \int_D \rho(x, y)dA = \int \int_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA =$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{a} (Kr)rdrd\theta = K \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\, dr = K\pi \frac{r^3}{3} |_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}$$

Percebe-se que tanto a lâmina como a função densidade apresentam simetria com relação ao eixo y e assim, é necessário que o centro de massa esteja sobre o eixo y, ou seja, $\underline{x} = 0$. Com isso a coordenada y é dada por:

$$\underline{y} = \frac{1}{m} \int \int_D y\, \rho(x, y)dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r\, sen(\theta)\, (Kr)rdrd\theta =$$

$$\frac{3}{\pi a^3} \int_0^{\pi} \int_0^{a} sen(\theta) r^3 drd\theta =$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a sen(\theta)d\theta = \frac{3}{\pi a^3} \times \frac{a^4}{4} \times [-cos(\theta)]_0^{\pi} = \frac{3a}{2\pi}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, \frac{3a}{2\pi})$.

A seguir será apresentado o capítulo de metodologia da pesquisa.

3.6 Representações de Coordenadas Polares na plataforma Geogebra

Mesmo com a existência de simetria, para auxiliar na construção da representação gráfica, algumas curvas podem ser mais difíceis para desenhá-las e visualizá-las. A seguir, apresentaremos um possível passo a passo para implementação de curvas polares na plataforma GeoGebra.

Para melhor compreensão desse processo iremos dividi-lo em três momentos: Momento I: Criação dos controles deslizantes, Momento II: Implementação da função $r = f(\theta)$, Momento III: Implementação da curva polar. Faremos uso da função polar $r = cos\ (2\theta)$. Ela possui período de $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a mesma é conhecida como rosa de quatro pétalas. Segue o passo a passo de implementação:

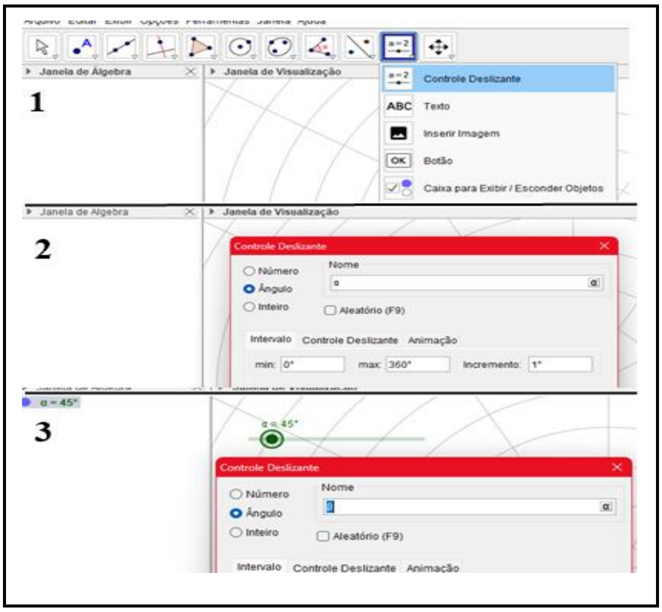
Momento I: Criação dos controles deslizantes

Passo 1: Seleção da ferramenta controle deslizante: Na barra de ferramentas da plataforma 2D escolha a caixa 10 e, depois, escolha a opção controle deslizante (Figura 20, imagem 1).

Passo 2: Criando controle α: Click em qualquer lugar na janela de visualização e abrirá uma aba, nesta, escolha a opção em ângulo, cria-se α com intervalo mínimo $0°$ e máximo 360° (Figura 20, imagem 2).

Passo 3: Criando controle β: Novamente click em qualquer lugar na janela de visualização e abrirá uma nova aba, nesta, escolha novamente a opção em ângulo, cria-se β com intervalo mínimo $0°$ e máximo 360° (Figura 20, imagem 3).

Figura 20 - Momento I Implementação da curva $r = cos(2\theta)$



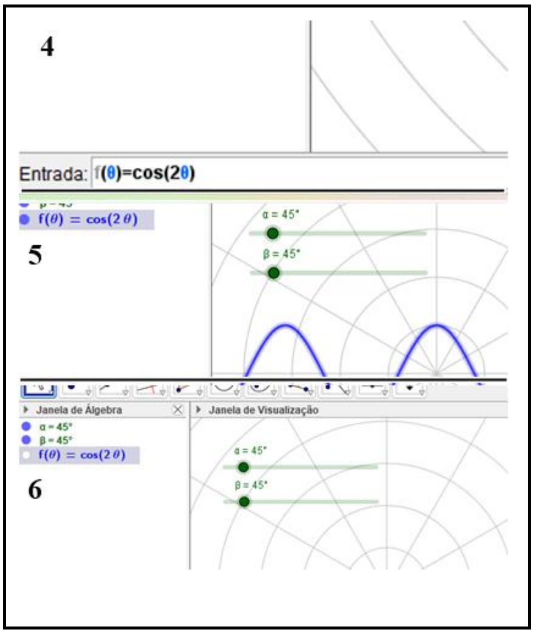
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Momento II: Implementação da função $r = f(\theta)$

Passo 3: Programando a função $f(\theta) = r$: Na janela de entrada, digite a função $f(\theta) = cos(2\theta)$, (Figura 21, imagem 4) e clica em *enter* (a mesma aparecerá simultaneamente nas janelas de álgebra e de visualização) (Figura 21, imagem 5).

Passo 4 Desativando a visualização da função $f(\theta) = r$ da janela de visualização: Na janela de álgebra desmarque a visualização da função na janela de visualização, para isso clique na bolinha azul que está na função. (Isso é feito para não encher a janela de visualização com muitas informações) (Figura 21, imagem 6)

Figura 21 - Momento II de Implementação da curva $r = cos(2\theta)$



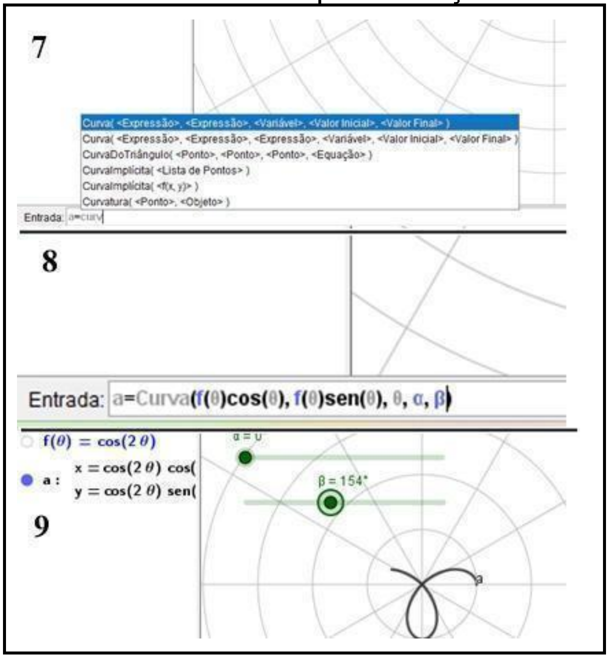
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Momento III: Implementação da curva polar:

Passo 5: Programando a curva polar: Na janela de entrada, escreve a = Curva, irá aparecer algumas opções, então irá escolher a que aparecer: Curva(<Expressão>, <Expressão>, <Variável>,<Valor inicial>, <Valor final>) (Figura 22, Imagem 7) ainda na janela de entrada deverá preencher essa opção com as informações: a = Curva($f(\theta)cos(\theta)$, $f(\theta)sen(\theta)$,θ ,α, β) (Figura 22, Imagem 8) ao clicar *enter* a curva será plotada.

Passo 6: Análise dos controles deslizantes: deve-se verificar se os mesmos estão correspondendo a volta completa para a curva em questão: se sim, você chegou a (Figura 23) **FIM**, se não, você chegou a (Figura 22, Imagem 9) e deverá manipular/alterar os valores de α e β, de acordo com a variação de θ, para determinar o gráfico desejado no intervalo dado então siga para o **Passo 7** .

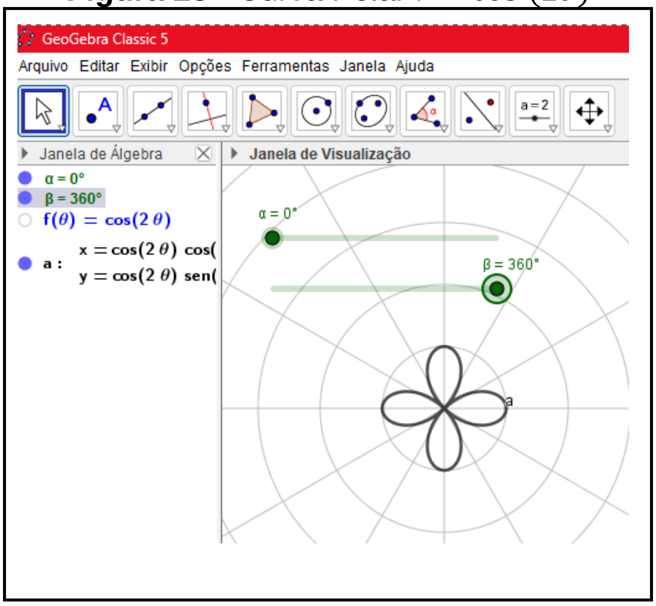
Figura 22 -Momento III de Implementação da curva $r = cos(2\theta)$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Passo 7: Organizando α e β para o intervalo de θ: seja então $0 \leq \theta \leq 2\pi$, assim você deverá deixar o controle deslizante $\alpha = 0$ e colocará o controle deslizante $\beta = 2\pi$, assim temos a curva a curva $r = cos\ (2\theta)$, plotada na janela de visualização como mostra a Figura 23.

Figura 23 - Curva Polar $r = cos\ (2\theta)$

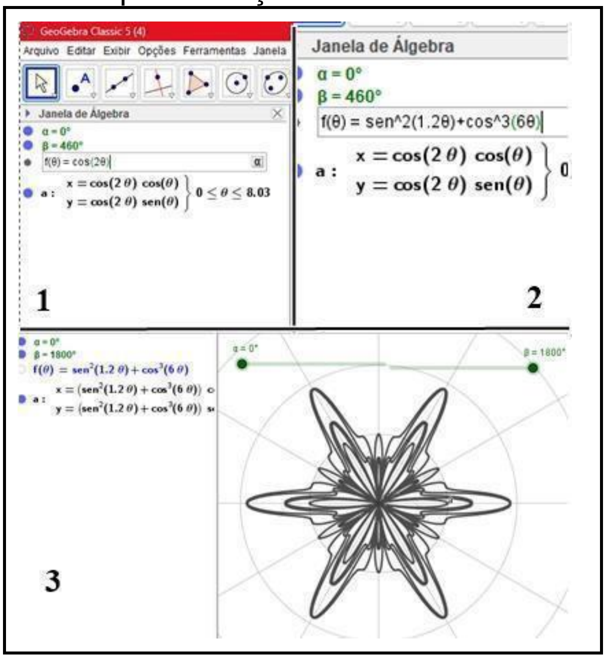


Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Agora podemos utilizar o código descrito acima para desenhar qualquer curva polar. No entanto, deve-se realizar as alterações para implementar a nova função desejada, apenas indo na janela de álgebra, dar um clique duplo na função $f(\theta)$, e redefinir a função para nova f. Posteriormente, ajustar o controle deslizante para o intervalo indicado na nova função. Assim, para ilustrar o que foi dito, plotaremos duas curvas, a curva $r = sen^2(1{,}2\,\theta) + cos^3\,(6\theta)$ e a curva $r = sen\ (\frac{8\theta}{5})$, que serão ilustradas a seguir.

A curva $r = sen^2(1{,}2\,\theta) + cos^3\,(6\theta)$, possui período de $0 \leq \theta \leq 10\pi$ e seguindo as orientações anteriores, especificamente os passos 1, 2 e 3, abaixo, veja na Figura 24, como deverá seguir para plotar a referida curva.

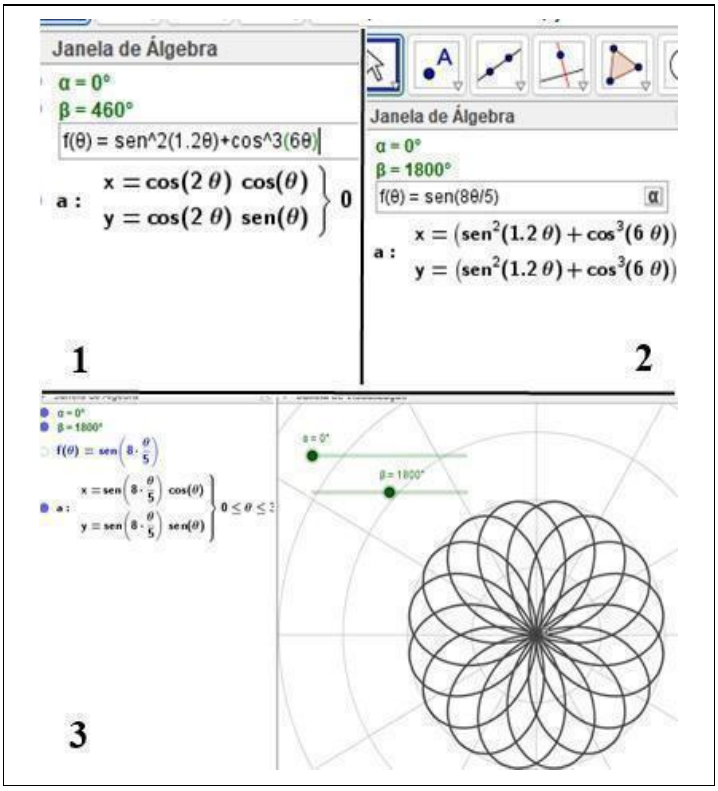
Figura 24 – Passos de implementação da Curva Polar $r = sen^2(1{,}2\,\theta) + cos^3\,(6\theta)$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

A curva $r = sen\ (\frac{8\theta}{5})$, possui período de $0 \leq \theta \leq 10\pi$ e seguindo, também as orientações anteriores, os passos 1, 2 e 3, para plotar a referida curva, estão ilustrados na Figura 25, abaixo.

Figura 25 – Passos de implementação da Curva Polar $r = sen\ \ (\frac{8\theta}{5})$



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

A seguir apresentamos um manual de construção para implementação de qualquer curva que os discentes ou pesquisadores venham a construir, segue abaixo o passo a passo de realizar a implementação e solução das curvas $r = f(\theta)$ com $\alpha \leq \theta \leq \beta$ no GeoGebra:

1- Na caixa 10 que fica na barra de ferramentas da plataforma, clica-se e escolhe a opção controle deslizante e cria-se um controle deslizante (ângulo), α com intervalo mínimo $0°$ e máximo 720°;

2- Novamente, na caixa 10 que fica na barra de ferramentas da plataforma, clica-se e escolhe a opção controle deslizante e cria-se um controle deslizante (ângulo), β com intervalo mínimo $0°$e máximo 720°;

3- Na janela de entrada cria-se a função $f(\theta) = r$, logo após, na janela de álgebra desselecione a função;

4- Cria-se a curva $a = f(\theta)$ seguindo os comandos na janela de entrada:

Escreve a = Curva e escolhe a opção que aparece: Curva(<Expressão>, <Expressão>, <Variável>,<Valor inicial>, <Valor final>), depois preenche essa opção pelas informações: a = Curva($f(\theta)cos(\theta)$, $f(\theta)sen(\theta)$,θ ,α, β) e clica em enter;

5- Altera-se os valores de α e β , de acordo com a variação de θ.

6- Cria-se, na janela de entrada, c=Comprimento(<curva>,<valor t inicial>,<valor de t final>), depois preenche essa opção com as informações: c=Comprimento(a, α ,β).

7- Na janela de álgebra aparecerá c com seu respectivo valor, que corresponde ao valor do comprimento da curva dada.

Essas foram algumas representações de curvas polares, plotadas e/ou descritas o passo a passo de sua implementação na plataforma GeoGebra que podem ser explorados muitos conceitos pertencentes a CP e servir de manual para os leitores que queiram explorar construções em CP.

4 METODOLOGIA

Nessa pesquisa, serão utilizadas teorias para dar suporte ao seu desenvolvimento. A citar: a Engenharia Didática sendo a teoria da metodologia de pesquisa, onde serão seguidas as duas primeiras etapas (pelo fato de não haver aplicado a pesquisa) das quatros etapas: análises preliminares, análise a priori, experimentação e análise a posteriori, como suporte para pesquisa, a Teoria das Situações Didáticas – TSD, a teoria que embasa a metodologia de ensino, onde serão exploradas as quatro dialéticas dessa teoria, aliadas a plataforma GeoGebra, como ferramentas metodológicas auxiliares, para elaboração sequências de ensino (Planos de Aulas), tais sequências seguirão o modelo adaptado de Plano de Aula disponibilizado pela Associação Nova Escola (ANEXO). Nestas sequências serão explorados conteúdos da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, das disciplinas: Cálculo II e Cálculo III, especificamente os tópicos: Cumprimento e Volumes em CP.

Quanto ao percurso metodológico da pesquisa, ela caracteriza-se: com abordagem bibliográfica, a natureza é uma pesquisa básica, aos objetivos, é uma pesquisa exploratória e descritiva e por fim, aos procedimentos se configura como pesquisa bibliográfica.

4.1 Pesquisa Bibliográfica

A pesquisa científica está relacionada com a praxe isenta dos julgamentos e crenças dos pesquisadores na investigação ou busca de regularidades, novos resultados e respostas a respeito de determinados questionamentos (GOLDENBERG, 2004). Na pesquisa científica são apresentadas muitas modalidades, a pesquisa bibliográfica é uma delas.

Segundo Sousa, Oliveira e Alves (2021), a pesquisa bibliográfica insere-se no meio acadêmico e com finalidade de aprimorar e atualizar o conhecimento, por meio de investigações científicas em obras publicadas. A ideia de Sousa, Oliveira e Alves (2021) foi embasada na perspectiva de Andrade (2010) que afirma que pesquisa bibliográfica:

> A pesquisa bibliográfica é habilidade fundamental nos cursos de graduação, uma vez que constitui o primeiro passo para todas as atividades acadêmicas.

> Uma pesquisa de laboratório ou de campo implica, necessariamente, a pesquisa bibliográfica preliminar. Seminários, painéis, debates, resumos críticos, monográficas não dispensam a pesquisa bibliográfica. Ela é obrigatória nas pesquisas exploratórias, na delimitação do tema de um trabalho ou pesquisa, no desenvolvimento do assunto, nas citações, na apresentação das conclusões. Portanto, se é verdade que nem todos os alunos realizarão pesquisas de laboratório ou de campo, não é menos verdadeiro que todos, sem exceção, para elaborar os diversos trabalhos solicitados, deverão empreender pesquisas bibliográficas (ANDRADE, 2010, p. 25).

Colaborando com Andrade (2010), Prodanov e Freitas (2013) define a pesquisa bibliográfica como:

> [...] elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa. Na pesquisa bibliográfica, é importante que o pesquisador verifique a veracidade dos dados obtidos, observando as possíveis incoerências ou contradições que as obras possam apresentar (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 54).

Dessa forma, para Sousa, Oliveira e Alves (2021), toda pesquisa científica inicia-se pela pesquisa bibliográfica, uma vez que, o pesquisador busca obras relevantes já publicadas, com intuito de conhecer e analisar o tema da pesquisa a ser realizada. Os autores continuam, quando mencionam que a pesquisa bibliográfica auxilia desde o início a pesquisa científica, possibilitando identificar a existência de trabalhos sobre o assunto em tela, colaborando para escolha do problema e do método adequado. Permite, também, conhecer melhor o fenômeno em estudo e os instrumentos utilizados para realização de uma pesquisa bibliográfica são: "livros, artigos científicos, teses, dissertações, anuários, revistas, leis e outros tipos de fontes escritas que já foram publicados". (SOUSA, OLIVEIRA, ALVES, 2021, p.66).

A pesquisa bibliográfica, de acordo com Fonseca (2002), é constituída

> [...] a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002, p. 32)

Como a pesquisa se baseia em estudos de teorias já publicadas, para Sousa, Oliveira e Alves (2021) é fundamental para o pesquisador: apropriação do conhecimento, a partir da leitura realizada, e sistematização do material que está sendo analisado. Pois na pesquisa bibliográfica, o pesquisador deve: “ler, refletir e escrever” sobre o tema que estudou, para assim, se preciso, “reconstruir a teoria e aprimorar os fundamentos teóricos”. Organizar as obras escolhidas que colaboraram com a construção da pesquisa é importante.

Sousa, Oliveira e Alves (2021) reafirma que a pesquisa bibliográfica é o “levantamento ou revisão de obras publicadas sobre a teoria”, que direciona o trabalho científico e requer do pesquisador: dedicação, estudo e análise. Ressaltando que, o intuito é reunir e analisar trabalhos publicados, para embasar o trabalho científico. Com isso, para Gil (2002, p. 44), a pesquisa bibliográfica “[...] é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. Reforçando, Severino (2007), argumenta que a pesquisa bibliográfica se realiza pelo:

> [...] registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utilizam-se dados de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir de contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos (SEVERINO, 2007, p. 122).

Com isso, ela é entendida como um conjunto de informações e dados registrados em documentos impressos, livros publicados, artigos, dissertações, teses, em que esses registros são fontes que embasam teoricamente a pesquisa. Continuando com as definições e argumentações sobre pesquisa bibliográfica, Amaral (2007), relata que ela

> [...] é uma etapa fundamental em todo trabalho científico que influenciará todas as etapas de uma pesquisa, na medida em que der o embasamento teórico em que se baseará o trabalho. Consistem no levantamento, seleção, fichamento e arquivamento de informações relacionadas à pesquisa (AMARAL, 2007, p. 1).

Para Macedo (1994, p. 13), ela: “Trata-se do primeiro passo em qualquer tipo de pesquisa científica, com o fim de revisar a literatura existente e não redundar o tema de estudo ou experimentação”. Assim sendo, para Lakatos e Marconi (2003, p. 183): “[...] a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras”.

A pesquisa bibliográfica, segundo Boccato (2006),

> [...] busca a resolução de um problema (hipótese) por meio de referenciais teóricos publicados, analisando e discutindo as várias contribuições científicas. Esse tipo de pesquisa trará subsídios para o conhecimento sobre o que foi pesquisado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto apresentado na literatura científica. Para tanto, é de suma importância que o pesquisador realize um planejamento sistemático do processo de pesquisa, compreendendo desde a definição temática, passando pela construção lógica do trabalho até a decisão da sua forma de comunicação e divulgação (BOCCATO, 2006, p. 266).

De acordo com Boccato (2006), a pesquisa bibliográfica pretende realizar o levantamento e analisar criticamente documentos já publicados sobre o assunto em destaque da pesquisa, objetivando a atualização, o desenvolvimento do conhecimento e contribuição com a realização da pesquisa. Pois, não é indicado realizar uma revisão bibliográfica que não contribua com o desenvolvimento e evolução do trabalho.

Após apresentar definições de alguns autores, agora podemos destacar as características da pesquisa bibliográfica, elas são as fontes confiáveis e concretas que fundamentam a pesquisa a ser realizada. Assim, elas são classificadas em Sousa, Oliveira e Alves (2021) como:

> **Fontes primárias:** são informações do próprio pesquisador, bibliográfica básica. Exemplos: artigos, teses, anais, dissertações, periódicos e outros.**Fontes secundárias:** são bibliografias complementares, facilitam o uso do conhecimento desordenado e trazem o conhecimento de modo organizado. Exemplo: Enciclopédias, dicionários, bibliografias, bancos de dados e livros e outros.**Fontes terciárias:** são as guias das fontes primárias, secundárias e outros. Exemplos: catálogos de bibliotecas, diretórios, revisões de literatura e outros. (SOUSA,OLIVEIRA,ALVES, 2021, p.67-68)

A pesquisa bibliográfica tem se mostrado um procedimento bastante utilizado em trabalhos de caráter exploratório-descritivo e segundo Lima e Mioto (2007), a pesquisa bibliográfica é um importante procedimento metodológico para a produção do conhecimento científico podendo gerar, “a postulação de hipóteses ou interpretações” servindo de base para outras pesquisas.

Portanto, os benefícios citados por segundo Lima e Mioto (2007), a respeito da utilização da pesquisa bibliográfica são: o baixo custo e a possibilidade de investigar vasta amplitude de obras publicadas, pois sem o deslocamento para procurar as pesquisas e com a internet facilita o acesso aos temas pesquisados. Porém, os pontos que devemos estar atentos, são os negativos como: as fontes bibliográficas não confiáveis, acarretando uma pesquisa sem qualidade e, se o tema pesquisado possuir poucas obras publicadas, comprometendo, também, a qualidade da pesquisa.

4.2 Procedimentos Utilizados - Pesquisa Alicerçada na pesquisa bibliográfica e na Engenharia Didática

Na primeira etapa da ED, análise preliminar, foi dedicada ao levantamento bibliográfico, aqui a pesquisa bibliográfica e suas características, entram dando suporte a essa primeira etapa, onde realizamos pesquisas relacionadas ao tema em estudo, sendo pesquisado em: periódicos, livros, dissertações, teses, nos portais da Scielo, Google acadêmico, Anais de eventos internacionais e nacionais e bibliotecas virtuais de universidades, para fundamentar a temática do estudo.

Pois, segundo (GOLDENBERG, 2011, p.31) “o método bibliográfico pode acrescentar a visão do lado subjetivo dos processos institucionais estudados, como as pessoas concretas experimentam estes processos e levantar questões sobre esta experiência mais ampla”. Assim, tornando imprescindível a realização do levantamento bibliográfico e produção do referencial teórico da pesquisa. Bem como, foi pesquisado sobre estudos que abordaram os referenciais teóricos utilizados nesta pesquisa para avaliarmos como estava o estudo e as pesquisas respaldados nesses tópicos.

Considerando a pesquisa bibliográfica, inicialmente definimos o que seria pesquisado, decidimos pesquisar sobre: conteúdos matemáticos do Ensino Superior, aqui buscamos pesquisar trabalhos que abordassem assuntos de Cálculo Diferencial e Integral. Com isso, as buscas se direcionaram a pesquisar sobre CP, aqui encontramos muitos trabalhos sobre CP no caráter da Matemática Pura, abordando os assuntos tradicionalmente, mas sem um caráter aplicado. Dessa forma, pesquisamos sobre a plataforma GeoGebra, aqui tanto pesquisamos a plataforma como recurso e ferramenta de ensino tanto como o cenário educacional com o auxílio dela, aparecendo uma gama de trabalhos, no entanto referente ao nosso objetivo, com especificamente a utilização da Plataforma GeoGebra no ensino de CP, encontramos poucos trabalhos. Posteriormente, buscamos as teorias metodológicas e de ensino vinculadas a conteúdos Matemáticos, como: a TSD e a ED (encontramos bastantes trabalhos que utilizassem essas teorias, mas aplicadas ao ensino de CP foram poucos). Com isso, ao pesquisarmos sobre trabalhos que apresentassem o conteúdo de CP com utilização do GeoGebra, aliadas a TSD e a ED, como proposta de ensino para o Ensino Superior, não encontramos nenhum trabalho. Dessa maneira, fortalecendo a nossa preocupação inicial referente ao tema.

Com isso, após uma análise dos trabalhos encontrados na diversidade de fontes, refinamos as pesquisas, considerando os trabalhos que apresentavam pelo menos duas palavras chaves: Coordenadas Polares, Engenharia Didática, Teoria das Situações Didáticas, Plataforma GeoGebra e, que fossem mais recentes, totalizando 5 trabalhos escolhidos, os quais estão descritos em nossa justificativa, ressaltando a importância tê-los escolhido. No entanto, o descarte dos 26 trabalhos foi por apresentarem, somente, uma das palavras chaves citadas.

A análise que fizemos nesses 5 trabalhos, foi verificar em que contribuíram em nossa pesquisa e em que nossa pesquisa avançaria em relação a elas. Após descrever, brevemente, cada pesquisa, onde foi apontado nosso avanço.

Após esse primeiro momento, fomos estruturar nossa pesquisa, no tocante à fundamentação teórica das palavras chaves que alicerçam nosso estudo. Com isso, como já apresentado, no capítulo de Fundamentação Teórica, a Teoria das Situações Didáticas – TSD, foi escolhida como a teoria metodológica de ensino, apresentada como teoria de apoio para a descrição e orientação das sequências de ensino que serão elaboradas. Tendo em vista, ser uma teoria consolidada e em destaque no cenário da Educação Matemática, apresentando resultados satisfatórios de sua utilização no ensino de Matemática em todos os níveis. Em seguida, trazemos a Engenharia Didática sendo a teoria que assegura a metodologia de pesquisa, vinculada a TSD. Uma vez que, algumas de suas etapas se associam com a pesquisa bibliográfica, ampliando o arcabouço metodológico desse estudo.

Posteriormente, trazemos a plataforma GeoGebra, como já apresentada. A escolha se deu, por ser um recurso também consolidado no ensino de matemática, pelo fácil acesso e baixo custo. Para embasar esse argumento, trazemos em uma seção intitulada por ensino de Matemática com aporte na plataforma GeoGebra, resultados de pesquisas que apontam eficácia e satisfação em sua utilização em vários níveis de ensino. Com isso, apresentamos tópicos em CP, conteúdos do Ensino Superior, nível de ensino que escolhemos abordar nessa pesquisa.

Logo após, trouxemos representações de CP na plataforma GeoGebra, como uma primeira relação que estabelecemos entre nossa fundamentação teórica para nossa proposta, servindo como suporte para os pesquisadores/leitores que queiram implementar curvas polares no GeoGebra, trazemos como um manual de suporte, sendo uma primeira contribuição de nosso estudo.

Contudo, ficou a questão de como a Engenharia Didática e a TSD podem auxiliar na elaboração de propostas didáticas, seguindo um plano de aula e utilizando o GeoGebra para trabalhar com CP.

Assim, desenvolveu-se a próxima etapa da ED, a análise a priori, que foi destinada ao planejamento e elaboração de sequências didáticas, que exploraram conteúdos da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, ou áreas afins, na disciplina de Cálculo II e Cálculo III. Para isso, foram elaborados dois planos de aula, que tentassem interligar os construtos teóricos com a plataforma GeoGebra no ensino de CP,

Quando falamos em TSD pensamos inicialmente que somente as etapas da própria são suficientes para a execução da mesma, no entanto, ao falarmos de atividades desenvolvidas em sala de aula pelo professor, sabemos que uma aula, pode ser composta para além das dialéticas da TSD, Diante disso, percebemos a importância de utilizarmos um plano de aula tendo em vista que o mesmo contempla, Introdução, Desenvolvimento e Conclusão, pois, em nosso levantamento bibliográfico percebemos que a TSD é parte do desenvolvimento de uma aula. Assim, elaboramos dois planos de aula, que foram descritos baseados no modelo de plano de aula NOVA ESCOLA[4] (ANEXO), sendo realizadas as devidas adaptações para incluir a TSD, a plataforma GeoGebra e o Modelo dos Níveis da Atividade do Professor proposto por Margolinas. A escolha do Modelo de Margolinas se deu pelo fato de estarmos falando de elaboração de planos de aula, que está diretamente relacionado com as tomadas de decisões e intenções do professor diante de uma aula que deve ser ministrada.

Em relação a escolha dos conteúdos para elaboração dos planos, foram selecionados os seguintes tópicos que abordassem CP: Curvas em Coordenadas Polares (CCP), Comprimento de curvas em coordenadas Polares, Áreas em Coordenadas Polares, Volume em Coordenadas Polares e Aplicação de outra área

[4] Em relação ao plano de aula NOVA ESCOLA, a Associação Nova Escola foi criada em 2015 apoiada pela sua mantenedora, a Fundação Lemann. Destaca-se por ser uma organização brasileira de impacto social sem fins lucrativos que visa trabalhar no fortalecimento da prática docente dos professores do Brasil, vindo a contribuir para a melhoria da aprendizagem e do desenvolvimento dos alunos. Atualmente é uma plataforma digital que produz: “reportagens, cursos autoinstrucionais, formações, planos de aula e materiais educacionais” com objetivo de fortalecer a prática dos professores brasileiros e é acessada frequentemente com 3,1 milhões de pessoas por mês (ASSOCIAÇÃO NOVA ESCOLA, 2023).

em Coordenadas Polares. Dentre esses tópicos, fizemos a escolha de dois, em que elaboramos dois planos de aula, com os assuntos: comprimento de curva em coordenadas polares (Cálculo II) e volumes em coordenadas polares (Cálculo III), com as teorias e as ferramentas já mencionadas. Foram elaboradas duas sequências, pois devido ao tempo não conseguimos propor mais sequências. Então, escolhemos dois dos assuntos apresentados no referencial teórico.

A escolha por comprimento de curva, se deu por não ser um assunto visto e comum para o Ensino Fundamental e Médio, ou seja, o aluno ainda está se adaptando a ideia de comprimento e já necessita interpretá-lo em uma mudança de sistema de coordenadas, e muitas vezes apenas com uma interpretação meramente algébrica. Quanto a escolha de volume, por ser uma aplicação na própria matemática, outro fator importante foi, tentarmos contemplar pelo menos um assunto pertencente às ementas de Cálculo II e Cálculo III, tendo em vista que conteúdos da mesma ementa apresentam estratégias similares de abordagens.

Com isso, pensamos em uma abordagem desses assuntos com amparo em ferramentas metodológicas. Foi utilizado, como já mencionado, o modelo de plano de aula da Nova Escola, realizando as seguintes adaptações: Na parte da atividade principal do plano de aula da Nova escola foi descrita as dialéticas da ação e formulação da TSD, na etapa de discussões das soluções, descrevemos a validação da TSD com o auxílio da plataforma GeoGebra para verificação dos resultados encontrados pelos alunos, na etapa de encerramento do plano da Nova Escola descrevemos a dialética da institucionalização da TSD, e fizemos as devidas orientações na parte do Raio X. Assim, na seção de resultados e discussões, serão descritas as sequências em forma de planos de aulas, tentando prever os comportamentos dos alunos e possíveis decisões que o docente poderá tomar na aplicação das sequências.

Nas duas últimas etapas da ED, a experimentação e a análise a posteriori, não aconteceram nessa pesquisa, uma vez que não realizamos a aplicação das sequências, portanto, a análise da pesquisa será realizada mediante a análise a priori da engenharia didática.

4.2.1 Justificativa da não aplicação da pesquisa.

Durante o desenvolvimento desse estudo, tivemos muitos imprevistos que impossibilitaram a aplicação da nossa pesquisa, irei relatar, de forma sucinta, três pontos relevantes que buscam justificar o cenário vivenciado.

Primeiro motivo, mediante o cenário pandêmico, provocado pela COVID-19, a pesquisadora passou por problemas pessoais, perdendo amigos e familiares próximos pelo COVID-19, sendo infectada pelo próprio vírus, e ainda, com seu pai na UTI, adquirindo problemas psicológicos e ansiedade, com isso passou um grande período sem condições de se dedicar de forma efetiva a pesquisa.

Segundo motivo, por conta da restrição de contato nas escolas e a baixa frequência dos alunos no retorno das aulas, tendo que haver uma readaptação tanto por parte dos alunos quanto dos professores, com as regras e orientações que deveriam seguir. E ainda, como não era bolsista tive que retomar minhas atividades docentes, que por sua vez, deslocava-me para outro estado, realizando um percurso de 600km semanalmente.

Por fim, não menos importante, diante de todo cenário o tempo de dois anos no qual vivemos 1.5 anos no apse da COVID-19 foi um fator decisivo para a gente optar por não irmos a campo. Dentre tantos outros motivos, foi então que concluímos que a pesquisa não seria aplicada.

Contudo, vale salientar, que a partir de então, apresentaremos um percurso metodológico tendo em vista a aplicação de nosso estudo, assim seria: a abordagem qualitativa, a natureza uma pesquisa aplicada, aos objetivos, uma pesquisa exploratória e descritiva e por fim, aos procedimentos iria se configurar como: pesquisa experimental, pesquisa de campo e pesquisa de levantamento.

Quanto ao cenário de investigação, seria a instituição citada na justificativa, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Cedro, cenário esse muito importante para impulsionar a pesquisa, tendo em vista que foi nessa instituição que a pesquisadora fez sua graduação e iniciou suas indagações iniciais sobre o tema proposto, ele vale para o público-alvo. Quanto à sequência didática aqui apresentada, ela serviu como pontapé inicial para testarmos nossos pensamentos, apontando falhas e acertos e ainda dando-nos possibilidade de readaptações antes das intervenções que pretendemos realizar. Mostra, também, a evolução no trabalho.

Diante de tudo isso, como não conseguimos ir a campo, apresentamos na seção 5, dois planos de aulas, que para elaboração usamos como motivação, inspiração e referência o cenário de investigação cotado em 4.3 e o público-alvo citado em 4.4 incorporando e adaptando o processo de uma sequência didática apresentada em 4.5.

4.3 Cenário de Investigação

A investigação sugere-se ser desenvolvida em cursos de graduação de ciências exatas que contemplem as disciplinas de Cálculo II e Cálculo III. Como exemplo, de cenário de investigação e apresentação de uma matriz curricular de um curso de ciências exatas, traremos o curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus* CEDRO, curso esse que foi referência para justificativa desse trabalho, pois foi onde cursei minha graduação, tornando-me Licenciada em Matemática em 2018. Tal instituição possui 28 anos de funcionamento e oferta além do Ensino Médio Integrado Integral, cursos técnicos em: Informática, Eletrotécnica, Mecânica Industrial, Administração (EaD) e Eletrotécnica para o EJA (Educação de jovens e adultos). Quanto ao nível superior, a instituição dispõe de seis cursos: Licenciatura em Matemática, Tecnologia em Mecatrônica Industrial, Licenciatura em Física, Bacharelado em Sistema de Informação, Bacharelado em Engenharia Mecânica e Bacharelado em Engenharia Elétrica. E, quanto aos cursos de pós - graduação conta com Especialização em Docência do Ensino Superior.

A Licenciatura em Matemática teve sua implantação no ano de 2004 e em seu Projeto Pedagógico, salienta a utilização de recursos computacionais e exploração de situações problemas para o ensino de Matemática, previstas nas habilidades que precisam ser desenvolvidas e constatadas nos objetivos e competências no projeto do curso. No tocante à estrutura, o *Campus* possui um laboratório de Matemática e um laboratório de informática do curso de Licenciatura em Matemática, possibilitando o uso de recursos desses ambientes na prática docente.

A despeito do exposto, percebe-se que as disciplinas específicas da Licenciatura em Matemática, no *Campus* de Cedro, são ministradas tradicionalmente, enfatizando os aspectos lógicos formais dos conceitos. Com isso, a disciplina de Cálculos II, como em outras disciplinas específicas do curso de Matemática, tem abordagem expositiva e analítica, tendo os conteúdos organizados da seguinte forma:

> **Unidade I**: Introdução à Integração: Propriedades da integral indefinida; tabelas de integrais imediatas; método da substituição; método da integração por partes; área, integral definida; teorema fundamental do Cálculo. **Unidade**

> **II**: Métodos de Integração: Integração de funções trigonométricas; fórmulas de redução e/ou recorrência; integração por substituição trigonométrica; integração de funções racionais por frações parciais; integrais envolvendo expressões da forma a ≠ 0. **Unidade III**: Aplicações da Integral Definida: Comprimento do arco de uma curva (usando a equação cartesiana); área de região plana; volume de um sólido de revolução: métodos do disco circular, anel circular, invólucro cilíndrico e do corte. **Unidade IV:** Coordenadas Polares: Gráfico em coordenadas polares; comprimento do arco em coordenadas polares, áreas de figuras planas em coordenadas polares**.** **Unidade V:** Formas indeterminadas e integrais impróprias: A forma indeterminada 0/0 e outras formas indeterminadas; integrais impróprias com limites infinitos de integração e outras integrais impróprias. Integração; Métodos de integração; Aplicação das integrais; **Coordenadas Polares;** Formas indeterminadas e integrais impróprias (PROJETO PEDAGÓGICO, IFCE – *Campus* Cedro, p. 81-82, 2012).

Em relação a disciplina de Cálculo III e segundo o projeto pedagógico está organizada da seguinte forma:

> **Unidade I** – Cálculo Diferencial de funções reais com duas ou três variáveis Limite e Continuidade de Funções de Várias Variáveis; Funções de mais de uma variável; limites de funções de várias variáveis; funções contínuas e suas propriedades; derivadas parciais; diferenciabilidade; Regra da Cadeia; derivada direcional e gradiente; planos tangentes e normais à superfície; derivadas parciais de ordem superior; extremos de função de várias variáveis.**Unidade II** – Integração Múltipla Integrais duplas; áreas e volumes; integral dupla em coordenadas polares; integral tripla; integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas. **Unidade III** – O Teorema de Green Obtenção de uma função a partir de seu gradiente; integrais de linha; integrais de linha independente do caminho; Teorema de Green e o Teorema da Divergência no Plano (PROJETO PEDAGÓGICO, IFCE – *Campus* Cedro, p. 93-94, 2012).

Pode-se perceber no exposto acima que os tópicos que envolvem CP estão previstos nas ementas das disciplinas de Cálculo II e Cálculo III, do curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* de Cedro-CE.

4.4 Público-alvo

Os sujeitos que poderão participar da pesquisa serão estudantes regularmente matriculados ou já tenham concluído, as disciplinas: de Cálculo II e Cálculo III de cursos de ciências exatas.

Os discentes serão convidados a participar, voluntariamente, das sequências de ensino atinentes aos tópicos: Comprimento e Volumes em CP. Caso o docente queira gerar dados com a aplicação, recomenda-se, para garantir a liberdade de análise e divulgação dos dados, que os alunos assinem um termo de compromisso, atestando a ciência em participar do trabalho e, concordando com a divulgação dos dados em futuras publicações.

Outrossim, a amostra será composta pela quantidade *n* de estudantes que aderirem a pesquisa e serão identificados por Aluno 1, Aluno 2 e Aluno 3, ... Aluno *n*, para preservar suas identidades.

A seguir, descreve-se duas sequências na seção de resultados e discussões.

A seguir, descreve-se uma sequência didática de curva polar, seguindo as dialéticas da TSD, que se prevê possíveis comportamentos dos participantes no decorrer da sequência de ensino, para ilustrar parte das sequências que serão elaboradas explicando o desenvolvimento das atividades de nosso experimento.

4.5 Sequência Didática - Curvas Polares

A TSD é um mecanismo de aprendizagem matemática mais autônomo, que possibilita um ensino para o desenvolvimento de habilidades de investigação e interpretação, crítica e criativa. Na sequência constituída, é válido salientar que esta discute alguns conceitos de Coordenadas Polares (curva parametrizada, polo, eixo polar, pontos, equação polar, gráfico polar, simetria e traçado de curvas polares) com a utilização da plataforma GeoGebra. Assim, mostraremos a seguir uma situação didática organizada, a partir das orientações dos momentos de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD.

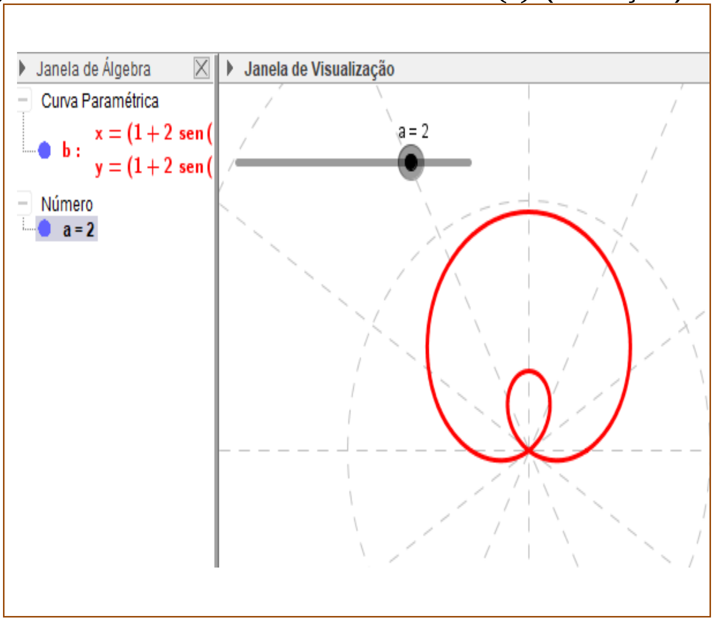
4.5.1 Sequência 1 – Famílias das Limaçons

Contexto: a situação refere-se a problemas que abordam Curvas Polares contendo de como se comporta uma família de limaçons quando se varia uma incógnita, no plano polar. Objetivo da atividade: analisar, apresentar e discutir sobre questionamentos referentes à questão proposta e ao que pode surgir no desenvolvimento da situação didática no estudo de Curvas Polares. Hipótese didática: os alunos devem ser capazes de analisar o que acontece com a curva ao passo que a varia.

Contexto proposto

Considerando a família de Curvas Polares definida por $r = 1 + a\, sen\, \beta$, cujas curvas são denominadas de **limaçons**, termo em francês que significa caracol, pela configuração das curvas por causa de valores atribuídos a a. Com isso, analise o que acontece com a curva ao passo que a varia.

Figura 26 – Curva Polar $r = 1 + 2sin(t)$ (Limaçon)



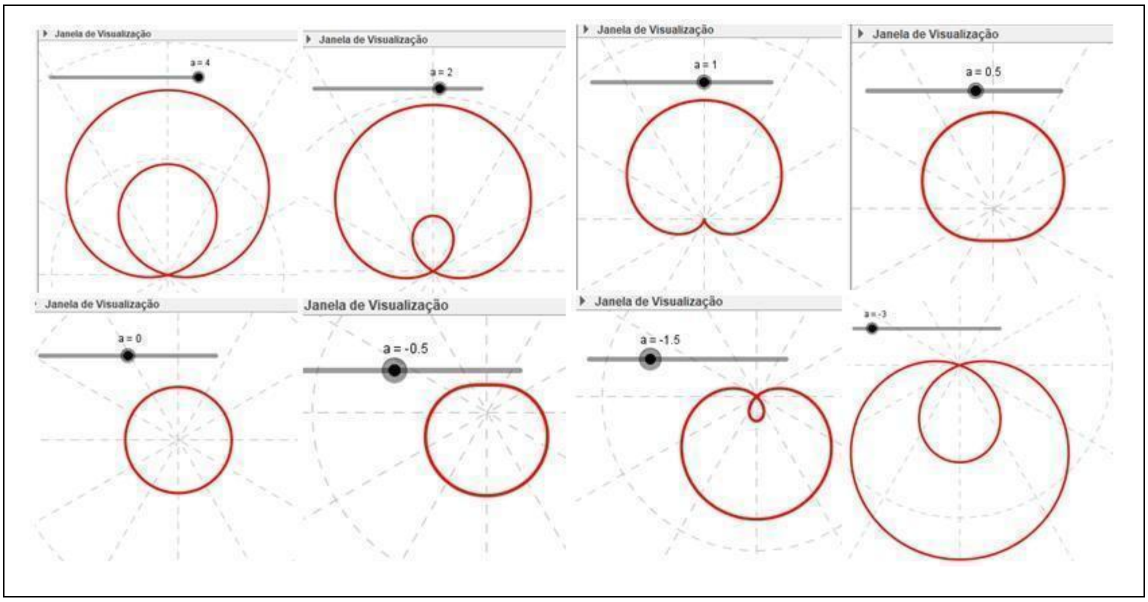
Fonte: Elaborada pelos autores (2022)

Vale salientar, que a situação adidática e a plataforma *GeoGebra* (recurso utilizado para potencializar a realização das etapas) são considerados modelos determinantes nas situações de aprendizagem a serem analisadas. Para Santos e Alves (2018), a plataforma *GeoGebra* busca propiciar uma transposição didática através da modelização do problema por meio de construções e interatividade, podendo relacionar elementos matemáticos e construção de conceitos. A questão requer conceitos básicos de CP como: curva parametrizada, polo, eixo polar, pontos, equação polar, gráfico polar, simetria e traçado de curvas polares.

Dialética de ação: A dialética de ação está ligada à devolução, pois permite o aluno entrar no jogo didático e, assim, desenvolver outras dialéticas. Ela é um momento experimental do conhecimento que possibilita aos sujeitos, por meio de tentativas e argumentos, criarem estratégias de resolução para situação pela vivência de ação. O discente deparado com o problema mobiliza seu conhecimento prévio, a partir da apropriação do enunciado e das conjecturas pertinentes ao visualizar e rabiscar a questão, sem formalismo. O momento é destinado à intuição e ao raciocínio implícito. Nessa primeira dialética, é uma tentativa de apropriar-se dos conhecimentos pré-requisitos da questão em si. Os alunos nessa etapa devem ler a situação- didática, entender o que se pede, mobilizar conhecimentos prévios e manipular a plataforma GeoGebra. Ao clicarem no botão animar, deverão visualizar as configurações do limaçõn e conversaram e levantaram hipóteses. Assim, deverão conjecturar possíveis soluções no que diz respeito ao problema proposto que é analisar o que acontece com a curva polar dada ao passo que a varia.

Dialética de formulação: neste momento, os sujeitos já conseguem fazer afirmações sobre a resolução, mesmo sem sua validação. É comum a ocorrência de socialização das estratégias intuídas em dupla ou grupo, mesmo sem uma certeza de sucesso. Vale ressaltar que a utilização do GeoGebra possibilita o manuseio da questão de forma mais dinâmica, expressiva, ampla e clara, permitindo uma maior movimentação da questão na plataforma. Com isso, os discentes tentarão explicar com linguagem natural e/ou matemática o que acontece com o formato da curva, conforme a varia, a partir da animação e manipulação na plataforma. Deverão recorrer ao desenvolvimento analítico e visual, apropriando-se de conhecimentos prévios sobre propriedades de curvas polares. Poderão argumentar que o controle deslizante ao variar de -5 a 5, que são os valores de a, altera o formato da curva, mudando o tamanho do laço. Deverão perceber e argumentar que para $a > 1$, há uma volta em que o tamanho decresce na medida em que a diminui, quando $a = 1$, o laço desaparece e a curva se torna a cardióide. Os alunos devem perceber, também que para $\frac{1}{2} < a < 1$, a cúspide da cardióide suaviza, se configurando em uma “covinha” e, que quando $0 < a < \frac{1}{2}$, a limaçon fica no formato oval. E quando $a = 0$, a curva é o círculo $r = 1$. Essa análise, deve ser feita também, para os valores negativos, pois os formatos mudam na ordem inversa, uma vez que essas curvas são reflexões ao redor do eixo horizontal das correspondentes curvas com a positivo. Tal observação se dará com a manipulação do GeoGebra, ilustrado abaixo.

Figura 27 - Ilustração da variação de a ao animar a construção.



Fonte: Elaborada pelos autores (2022)

Se o aluno não conseguir construir um raciocínio coerente com a visualização e com os seus conhecimentos prévios, o professor pode se atentar ao motivo dessa não assimilação do aluno. Com isso, o docente terá que observar e identificar possíveis motivos, tais como: a existência de obstáculos didáticos, problema na construção do meio didático, ou seja, se esse meio foi suficiente para alcançar tal percepção e/ou se o discente está diante de um obstáculo epistemológico. Esses motivos permeiam o processo de ensino-aprendizagem e, o docente precisa refletir sobre as condições impostas, pelo meio didático, aos alunos e pensar, caso necessário, em readaptação desse meio. Nesse momento, o trabalho com devolutivas é fundamental. Após esses ajustes, novos questionamentos e manipulações das construções na plataforma *GeoGebra,* o discente poderá ter condições de formular um raciocínio para resolução da questão de maneira autônoma.

Dialética de validação: Nessa dialética, o aprendiz deve validar a sua hipótese. Nesse momento ele apresenta seu modelo matemático, ou seja, como resolveu a questão, para os demais sujeitos, onde eles podem pedir uma melhor explicação, ou até mesmo não aceitar a sua solução, justificando o porquê. Nessa etapa, os alunos irão comparar os resultados obtidos no desenvolvimento analítico, caso tenha feito, com a visualização na plataforma GeoGebra, cada dupla apresentará o que concluiu com a manipulação e apresentará argumentos apoiados em conceitos matemáticos e na aplicação de propriedades e regras de Curvas Polares. Concluindo que os valores atribuídos a a, quando variam, muda o formato da curva $r = 1 + a\, sen\, \beta$, família de limaçons podendo serem analisados várias curvas e características envolvidas nessas representações.

Dialética de institucionalização: nessa dialética é onde acontece um fechamento em que a docente expressa matematicamente a generalização da situação proposta e firma as resoluções apresentadas pelos estudantes. Para Artigue (1984), é um momento em que o conhecimento deverá ser fixado, propiciando o ordenamento cognitivo do novo saber científico com seus conceitos. Na ocasião, a plataforma GeoGebra deve ser evidenciada pelo recurso da visualização, propondo uma melhor compreensão das situações apresentadas em sala de aula, uma vez que se fossem desenhados manualmente para analisar o que acontece com as curvas, demandaria de mais tempo. Assim, nessa etapa, o professor poderá utilizar a ferramenta pausa, para explicar o que acontece em cada valor a, do intervalo dado, que são as diversas representações das Curvas Polares $r = 1 + a\, sen\, \beta$, explorando outras propriedades presentes nessa construção.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção serão apresentados dois Planos de Aula, um sobre comprimento de curva em coordenada polares e outro de volumes em CP Para elaboração desses planos seguimos o modelo de plano de aula disponibilizado pela Associação Nova Escola, podendo ser encontrado no site: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/matematica, sendo o modelo adaptado para inclusão das dialéticas da TSD, do Modelo dos Níveis da Atividade do Professor proposto por Margolinas (2002, 2005) e da descrição com a plataforma GeoGebra.

A seguir serão apresentados os planos de aula com as devidas adaptações realizadas pelos autores deste trabalho, mas deixamos claro que caso o leitor necessite, poderá realizar, também, as adaptações cabíveis.

5.1 Plano de Aula 1: Comprimento de Curva em Coordenadas Polares

SOBRE O PLANO

Autora: Maria Lidianny da Silva Moura

Mentor: Marcus Bessa de Menezes

Objetivos específicos:

- Realizar a leitura e discussão do problema proposto sobre comprimento de curvas em coordenadas polares;
- Resolver problemas de Comprimento de Curva em Coordenadas Polares;
- Explorar propriedades envolvidas na situação-didática sobre Comprimento de Curvas em Coordenadas Polares.

Conceito-chave: Comprimento de Curvas em Coordenadas Polares.

Recursos necessários: Computadores[5] ou notebooks com a plataforma GeoGebra instalada, projetor, caneta, situação-didática 1 impressa em folha A4 e folhas para rascunho.

RESUMO DA AULA

[5] A quantidade de máquinas é diretamente proporcional a forma que o professor irá realizar a atividade seja Individual,duplas,equipes, de modo que cada um fique com uma máquina.

Quadro 3 - Quadro Resumo 1

Atividades	**Objetivo Principal**	**Ação Principal**	**Tempo Sugerido**
Objetivos	Identificar o uso de comprimento de curvas polares em situações do cotidiano.	Criar situações para que permitam o aluno chegar ao objetivo.	Durante toda a aula.
Retomada	O professor irá apresentar os conteúdos que são pré-requisitos para o desenvolvimento dessa sequência.	O professor irá abordar os conceitos em aulas anteriores. (P+3, P+2, P+1, S+3, S+2, S+1)	Aproximadamente em 4h/a.
Atividade Principal (Dialéticas: Ação e Formulação)	Apresentar a Situação-didática 1 contextualizada sobre comprimento de curvas em coordenadas polares e instigá-los a resolvê-la.	Entregar a situação-problema 1 aos alunos e orientá-los a tentar resolvê-la. Nesse momento, eles permeiam as dialéticas de ação e formulação. (S0, P0,P-1)	Aproximadamente 1 h/a
Discussões das soluções (Dialética da Validação)	Os alunos irão Apresentar/Discutir/Provar/Comparar/Validar o resultado encontrado.	Os discentes irão discutir as soluções encontradas, mostrar seu modelo matemático e comparar/validar seus resultados com a construção na Plataforma GeoGebra. (S0, P0, P-1)	$\frac{1}{2}$h/a

Encerramento (Dialética da Institucionalização)	O docente irá retomar a condução da aula.	O docente vai dar um status de conhecimento, formalmente, da questão no quadro (fórmula de comprimento de curva polar), utilizará o GeoGebra para comprovação e discussão dos resultados e de propriedades existentes na questão proposta e, encerra a sequência. (S0, P0, P-1)	$\frac{1}{2}$h/a
RaioX	O docente irá refletir sobre o desenvolvimento da situação didática.	O docente irá refletir e avaliar o planejamento e a aplicação da sequência didática, apontando melhoramento e erros que possam surgir.	________

Fonte: Elaborado pelos autores, adaptado de Modelo de Plano de Aula NOVA ESCOLA, 2023.

APRESENTAÇÃO DO OBJETIVO: Identificar o uso de comprimento de curvas polares em situações do cotidiano.

Tempo sugerido: Durante toda a aula.

Orientação: O docente irá conduzir os alunos ao objetivo geral da aula durante o desenvolvimento da mesma (de maneira indireta), pois eles deverão perceber estratégias para solucionar o problema a eles apresentado. Todas as orientações da sequência serão informadas no início da atividade, como: o material que eles poderão usar, que utilizarão a plataforma GeoGebra para validação de suas respostas, que poderão interagir com os colegas, que o docente será imparcial e não poderá informar o resultado da questão e que eles devem usar conhecimentos prévios para tentar resolver a questão, podendo propiciar o momento da situação a-didática nas etapas previstas no plano de aula em questão.

Propósito: Possibilitar que os alunos saibam a intencionalidade do que se pretende desenvolver na aula (utilizar o comprimento de Curvas em Coordenadas Polares).

RETOMADA

Tempo sugerido: $\frac{1}{12}$h/a

Orientação: Nesta etapa da sequência orienta-se que o docente realize uma conversa inicial com os alunos, comentando que os assuntos necessários para o desenvolvimento da sequência foram estudados em aulas anteriores, ou seja, a retomada, para o nosso contexto, entende-se como uma conversa introdutória para sequência, mas que com aulas previamente ministradas.

OBSERVAÇÃO: Para aplicação dessa sequência os alunos devem possuir os Pré-requisitos inerentes aos assuntos exigidos, logo em aulas anteriores o professor deverá explanar sobre: integração em coordenadas polares, propriedades, equações e suas curvas polares, estratégias e técnicas de integração, fórmula (integral definida) para o cálculo de cumprimento de curva. Podendo no decorrer dessas aulas abrir uma discussão com alunos sobre o cálculo de integrais e algumas técnicas de integração, bem como as utilidades dessa ferramenta para o dia a dia. Fazendo as devidas anotações e resumos para os alunos. Sendo estudados esses assuntos anteriormente, possibilitará a construção da referida sequência e poderá acontecer o que Margolinas prevê nos Níveis da Atividade do Professor, destacando o papel do professor na relação didática.

Podemos, destacar que para a situação didática que será apresentada, esse momento da retomada servirá para o docente refletir as (S+3, S+2, S+1)[6], que são as situações em que o docente não está com os alunos, que são destinadas a focar no aprendizado que os alunos trazem, pois servem para o docente refletir e realizar escolhas de ensino em sala de aula, a citar, auxilia na análise: do (P+3), quando o docente deve fazer um estudo da ementa da disciplina e verificar a quantidade e os assuntos que precisam ser ensinados de Cálculo II, destacando os pré-requisitos que os alunos precisam possuir para o desenvolvimento da disciplina, do (P+2) que é quando o professor decide trabalhar, um certo conteúdo, aqui com comprimento de curva em coordenadas polares e pensar em que pretende que os alunos aprendam desse conteúdo e no (P+1) de como elaborar o plano de aula, a sequência de ensino, decidir quais recursos usar: uma lista de exercício, um jogo, aula expositiva, recursos tecnológico, pensar em uma metodologia de ensino. Em relação a esta sequência,

[6] (S+3,S+2, S+1) são as situações sobre-didáticas (Situação noosférica, situação de construção e situação do projeto).

decidir quais ferramentas utilizar, de acordo com a realidade da sala para elaboração e aplicação da Situação-didática 1.

Propósito: Espera-se que os alunos identifiquem o objetivo da aula no decorrer da aplicação da sequência didática.

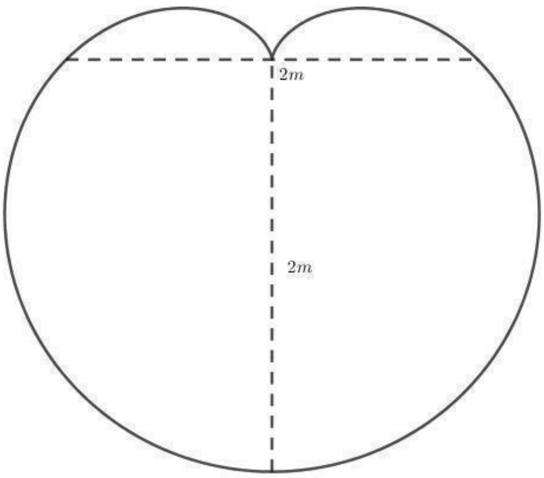
ATIVIDADE PRINCIPAL (Dialéticas de Ação e Formulação)

Tempo sugerido: 1h/a

Orientação: A aula será iniciada com a apresentação/entrega da situação- didática 1 aos alunos, em uma folha de papel A4 (dependendo da quantidade de alunos, divide-se a turma em duplas e/ou trios), para que eles possam realizar a leitura do problema e aceitar entrar no milieu. Pretendemos nesse momento da aula que os alunos entrem e permeiam pelas dialéticas de Ação e Formulação, de acordo com a TSD e que o docente siga os níveis (S0, P0, P-1)[7] como prevê Margolinas sobre a Atividade do Professor. Com isso, a situação-didática, adaptada do exemplo 4 da seção 10.4 do livro James Stewart, 7 edição, página 604, será a seguinte:

Situação-didática 1: Laura é uma arquiteta e recebeu uma proposta para desenhar e entregar um projeto de ambientação de uma praça na cidade Cedro-CE. No projeto deveria constar um local no formato de um coração e após considerar as observações do prefeito da cidade, para o coração, Laura projetou o seguinte desenho

Figura 28 - Projeção do Coração Situação-didática 1



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

[7] S0: situação em que o docente está em interação real com o aluno; P0:situação didática a realização da aula e P-1: a observação do aluno em atividade, pelo professor.

Após fazê-lo, ela percebeu que se colocasse uma fita de led sobre a borda do coração chamaria mais a atenção da população e fez a proposta para o prefeito. Ele gostou da ideia e logo a perguntou quanto aumentaria no orçamento do projeto inicial. Dessa forma, sabendo que o metro linear da fita de led custa R$11,00 (onze reais), qual será o custo adicional da implementação dessa fita que Laura informará ao prefeito?

Dialética da Ação e Dialética da Formulação: Nesse momento, após a leitura da situação-problema 1, espera-se que os alunos, ao visualizarem o desenho proposto, pensem que para solucionar o problema devem calcular o comprimento ao entorno do coração e que para isso, possam lembrar de conceitos matemáticos inerentes ao estudo de comprimento de curvas (situação adidática). No entanto, para começarem a construir a ideia para solução eles podem pensar em curvas retangulares, assim levando o desenho para o plano cartesiano e buscando ferramentas que possibilitem a elaboração de uma fórmula matemática que represente o coração (dialética da formulação). Após essa abordagem, deverão perceber que em retangulares não será o caminho, espera-se então que eles percebam a necessidade de parametrizar x e y, ou seja, pensem no sistema de coordenadas polares (dialética da ação).

Ao identificar o sistema correto, devem ter condições de escolher o melhor ponto do desenho para ser o polo, a partir de então começarem a análise em busca de uma equação que descreva o coração. Espera-se que os alunos fixem o 'bico' do coração no polo e percebam que no ângulo θ, possui imagem polar igual a 1. Assim, poderão começar a conjecturar a equação (dialética da ação e formulação).

Sabendo de trigonometria que para $\theta = 0$ ter como imagem 1, de forma imediata pensa-se em $f(\theta) = cos(\theta)$, mas ao testar outros arcos perceberão que o desenho não coincidirá com o da situação-didática 1. Assim, continuarão pensando em outras funções. Espera-se que eles tentem $f(\theta) = 1 \pm sen(\theta)$, pois para $\theta = 0$temos $f(\theta) = 1$. E diante da análise perceberão que $f(\theta) = 1 - sen(\theta)$, descreve o gráfico do problema. Nesse momento, os alunos poderiam ter feito vários desenhos até chegar no coração da situação-didática 1, tentando outras curvas não citadas no texto (dialética da formulação).

Agora espera-se que os alunos pensem na fórmula para o cálculo de comprimento de curva em coordenadas polares $L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$ ou em comprimento de curvas paramétricas $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$, já que as curvas polares são parametrização x e y associadas à r e θ. Assim, esperamos que eles escolham $L = \int_{a}^{b} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$ (dialética da ação).

Para utilizar essa fórmula, terão que determinar os intervalos de integração e a derivada primeira da $f(\theta) = 1 - sen\theta,$ que precisarão para aplicar na integral. Os alunos deverão recorrer aos desenhos feitos para dedução da equação que podem auxiliar no processo de escolha do intervalo de integração, pois sabe-se que é necessária uma análise em torno da simetria da curva (dialética da ação e formulação).

Durante o desenvolvimento dessa sequência os alunos deverão traçar ideias de solução e trocar ideias e sugestões com os colegas (dialética da ação), visando resolver a Situação-didática 1 com artifícios prévios existentes para formularem soluções.

Poderão aplicar a fórmula para o cálculo de comprimento de curva em coordenadas polares $L = \int_{a}^{b} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$. Para montar a integral, o aluno deve perceber que o período/intervalo dessa curva é $0 \leq \theta \leq 2\pi$, mas tem que perceber que nos pontos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π, existe uma simetria em sua representação geométrica, e com isso se o intervalo escolhido não for o correto pode interferir no resultado final. (Aqui podem surgir várias integrais com os limites de integração diferentes, ocasionando resultados diferentes). Logo para determinar qual será o intervalo de integração, uma possibilidade é observar no intervalo de $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ equivale a metade do coração e como a curva é simétrica multiplica-se por dois (dialética da ação). Assim, a integral poderá ser escrita (utilizando a fórmula já estudada) e o comprimento poderá ser calculado da seguinte forma (dialética da formulação):

$$L = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - sen\theta)^2 + cos^2\,\theta}\, d\theta = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 2sen\theta + sen^2\theta + cos^2\,\theta}\, d\theta$$

Agora pela relação fundamental da trigonometria $sen^2\theta + cos^2\,\theta = 1$, temos que:

$$L = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 2sen\theta + 1}\, d\theta = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2sen\theta}\, d\theta$$

Ao chegar nessa integral os alunos deverão buscar artifícios de simplificação da integral para resolvê-la, assim poderão multiplicar e dividir o integrando por $\sqrt{2+2sen\theta}$, obtendo:

$$L = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-2sen\theta}\,.\frac{\sqrt{2+2sen\theta}}{\sqrt{2+2sen\theta}}d\theta = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2^2-2^2sen^2\theta}}{\sqrt{2+2sen\theta}}d\theta =$$

$$2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2^2(1-sen^2\theta)}}{\sqrt{2+2sen\theta}}\,d\theta = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{cos^2\theta}}{\sqrt{2+2sen\theta}}\,d\theta = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2cos\theta}{\sqrt{2+2sen\theta}}d\theta$$

Agora eles poderão perceber que precisarão de algumas estratégias de integração, assim usarão a substituição $u \to du$, para continuar a resolução. Com isso, chamando $u = 2 + 2\,sen\theta \quad \to \quad du = 2\,cos\theta\,d\theta$. Na sequência, pode-se mudar os limites de integração para ficarem em função de u .Logo, considerando $\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \to$ $u = 2 + 2\,sen\frac{3\pi}{2} \quad \to \quad u = 0,$ e tomando $\theta = \frac{\pi}{2} \quad \to \quad u = 2 + 2\,sen\frac{\pi}{2} \quad \to \quad u = 4.$ Dessa forma, reescrevendo a integral ficará:

$$L = 2\int_0^4 \frac{du}{\sqrt{u}}$$

Resolvendo a integral ficará da seguinte forma:

$$L = 2\int_0^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\int_0^4 u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\,\Big|_0^4$$

E após, resolver a integral definida aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, encontrará o resultado:

$L = 4\sqrt{4} - 4\sqrt{0} = 4 \times 2 - 0 = 8$. Logo $L = 8\text{ m}$

Chegando a 8 m de comprimento do coração e depois multiplicando por R$ 11,00 que é o valor do metro da fita de led, o custo será de R$ 88,00 a mais no orçamento (dialética da formulação).

Propósito: Essa atividade poderá fornecer ao docente uma alternativa de conduzir os alunos a pensar e mobilizar saberes para resolver uma questão de comprimento de curva polar, oportunizando os alunos a perceberem formas diferentes de se resolver questões desse tipo, como perceber maneiras que não resolvem, podendo tirar aprendizados nas tentativas realizadas. Poderão aplicar muitos conceitos estudados no curso de Cálculo Diferencial e Integral, pois a maioria dos artifícios utilizados para resolver essa questão são assuntos já estudados e o interessante é que esse tipo de questão pode surgir outras formas de resolução e visualização do problema, oportunizando a socialização de ideias e soluções.

DISCUSSÃO DAS SOLUÇÕES (Dialética de Validação)

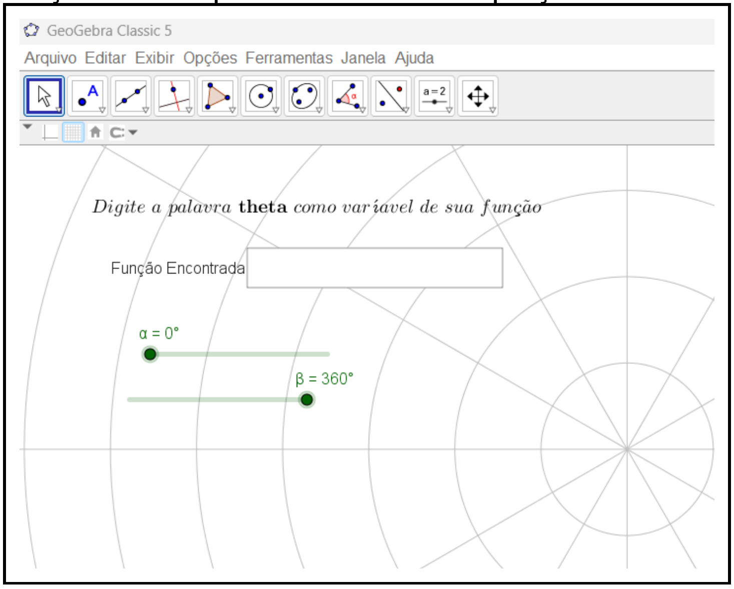
Tempo sugerido: $\frac{1}{2}$h/a

Orientação: Nesse momento da aula, os alunos individualmente ou como foi dividida a turma, deverão apresentar seu modelo matemático, devem provar a sua hipótese de solução, mostrar aos demais como resolveram a questão, caso necessário podem pedir uma melhor explicação da solução uns para com os outros, nesse momento os alunos discutem os resultados encontrados, justificando o porquê de suas escolhas e oportunizando os demais estudantes aceitarem ou não suas justificativas, pois é um momento de discussão de ideias (S0, P0).

Essa dialética da validação prevê que os alunos comparem os resultados obtidos no desenvolvimento analítico, caso tenham feito. Nessa sequência, foi planejado que eles poderiam ter o auxílio do GeoGebra, para a visualização e comprovação das curvas/gráficos das funções/equações polares que eles encontraram anteriormente.

Para este momento sugere-se que o professor realize previamente uma construção na Plataforma GeoGebra que favorece essa comprovação por parte dos alunos, assim, uma possível construção é apresentada na Figura 29.

Figura 29 - Ilustração do campo de entrada da equação encontrada pelos alunos

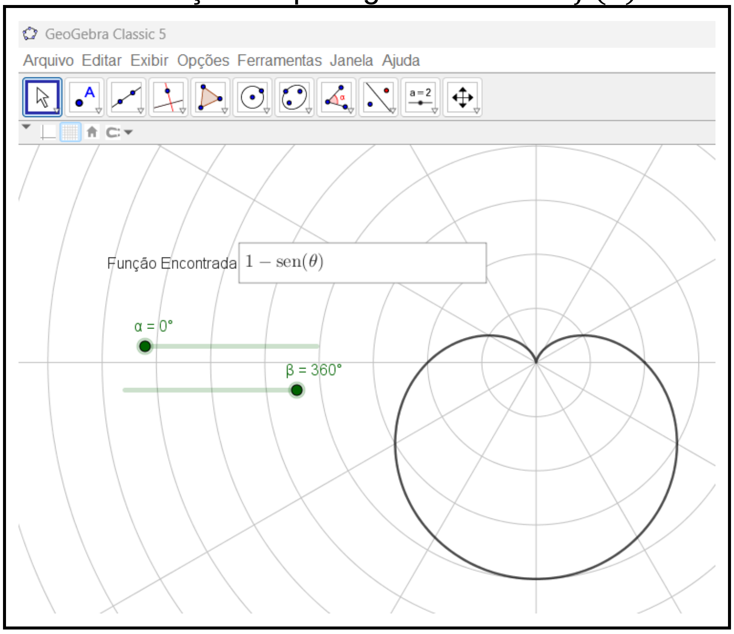


Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Nesta temos dois controles deslizantes α e β que indicam o intervalo de integração do ângulo θ, sendo θ correspondente ao limite inferior e β ao limite superior, onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e ainda uma caixa de entrada para ser digitada a curva encontrada pelos alunos, servindo o GeoGebra como uma 'calculadora' de comprovação dos resultados de cada aluno/dupla/trio. Vale salientar que os alunos deverão estar em um ambiente que tenham computadores suficientes para as divisões que foram feitas com os alunos.

Os alunos poderão inserir sua função e verificar se o gráfico está de acordo com o 'coração' da situação - didática 1 e observaram que se a função que está plotada no programa é diferente da situação - problema 1 a função que eles encontram tem algo de errado, assim poderão repensar sobre seus cálculos, (devem voltar para a dialética da ação). No entanto, se ao plotar a função perceberem que coincidiu com o desenho da situação - problema, então foi a curva $f(\theta) = 1 - sen\theta$ que eles inseriram no campo de entrada.

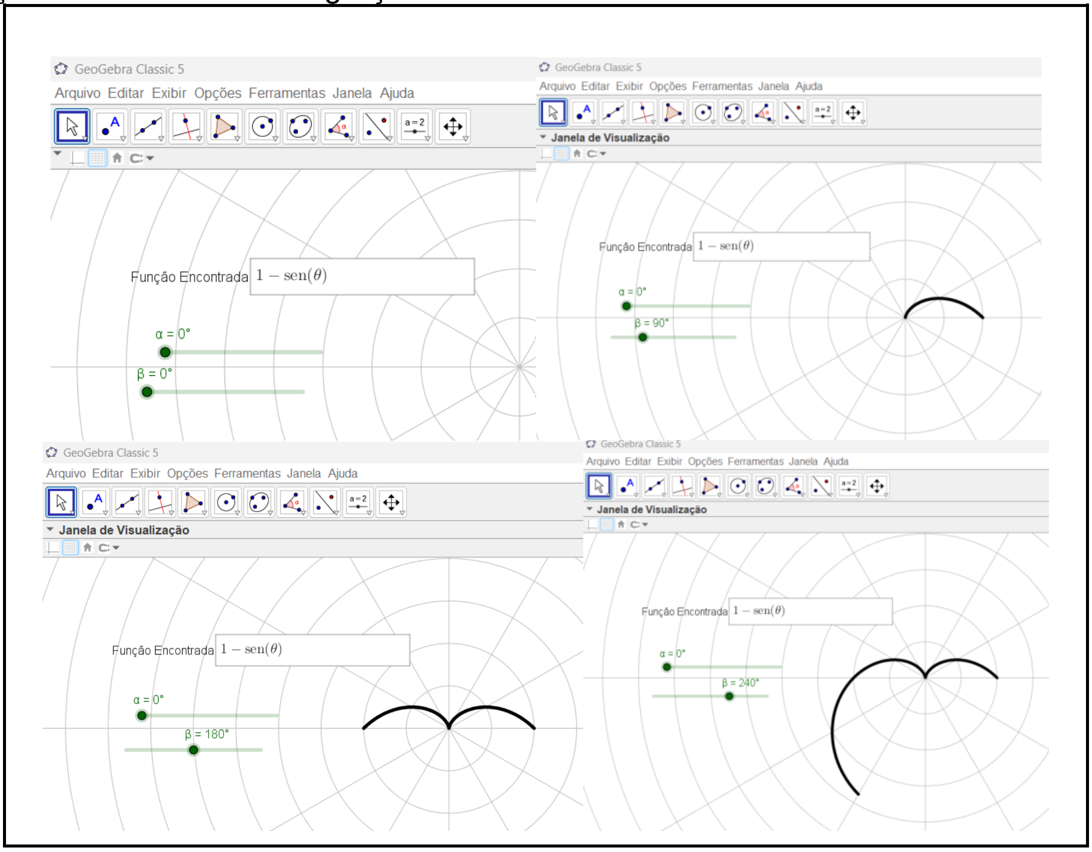
Figura 30 - Ilustração da plotagem da curva $f(\theta) = 1 - sen\theta$

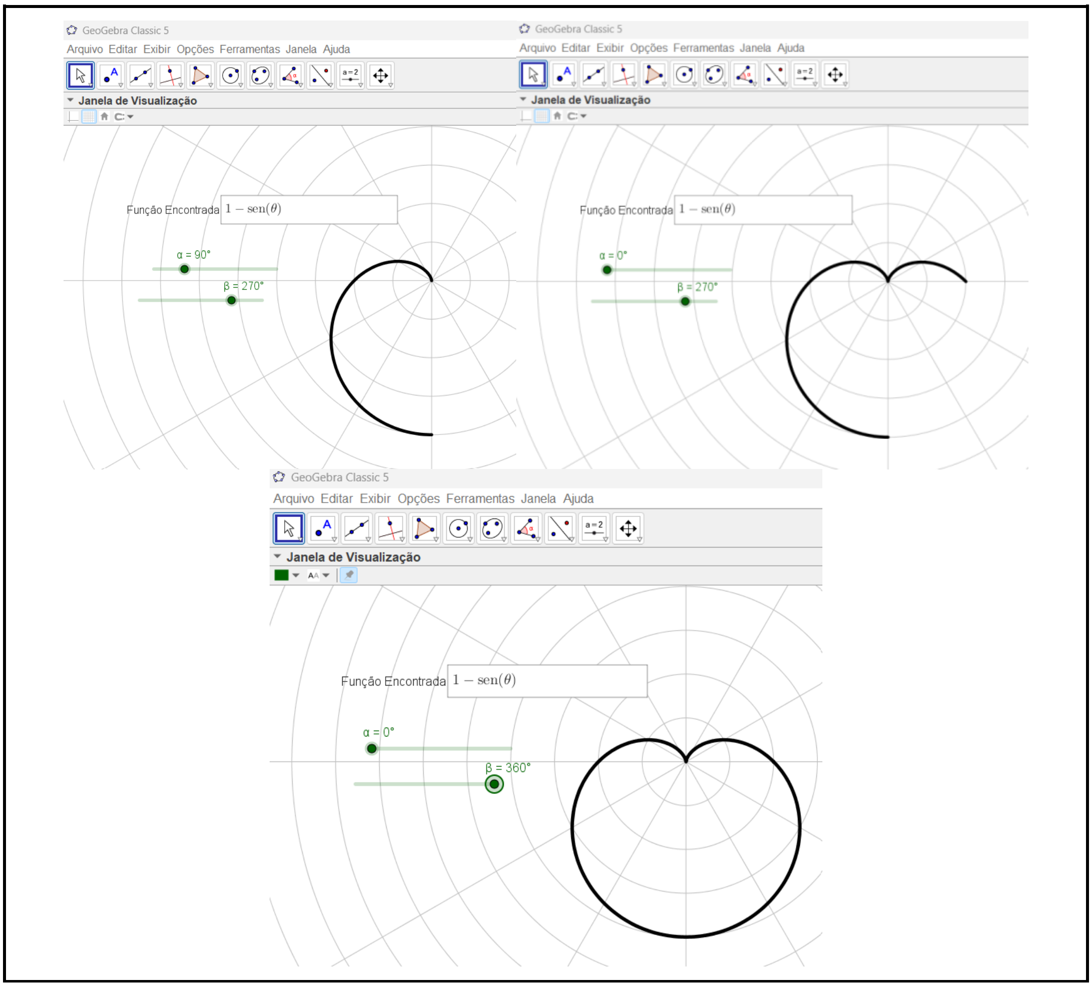


Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Continuando a validação eles agora terão que verificar o intervalo de integração se está correto. Assim, poderão manipular os controles deslizantes para colocar o intervalo de integração que eles encontraram, e ver se a curva irá possuir uma volta completa (ou seja, se formou o coração solicitado na questão), ou metade do coração, assim caso eles tenham escolhido um intervalo que não retorne a metade do desenho ou ele completo, poderão pensar em outro intervalo que desenhe o coração solicitado na questão (voltar a dialética da ação) até encontrar qual o limite de integração deve ser usando, para obter uma volta completa e ser totalmente desenhado o coração.

Figura 31 - Representação da manipulação dos controles deslizantes para verificação do intervalo de integração

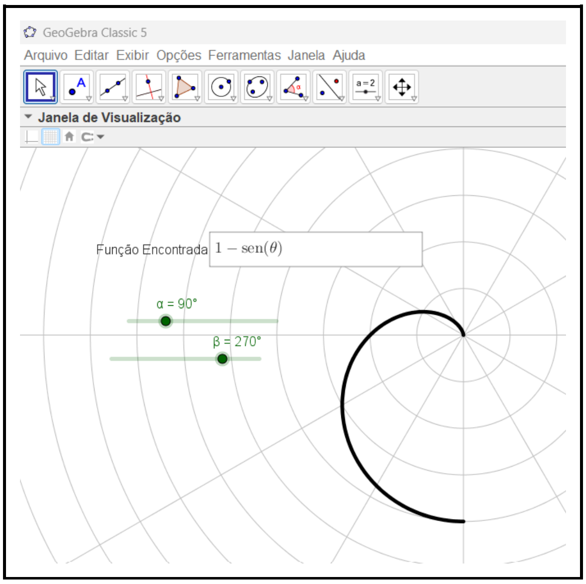




Fonte: Elaboradas pelos autores, 2023.

Após verificar o intervalo e tendo encontrado o correto $(\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, pois perceberá a simetria e multiplicará a integral por dois e terá realizado o cálculo correto da integral (aplicando a fórmula de cálculo de comprimento de curva) e encontrado o comprimento da curva.

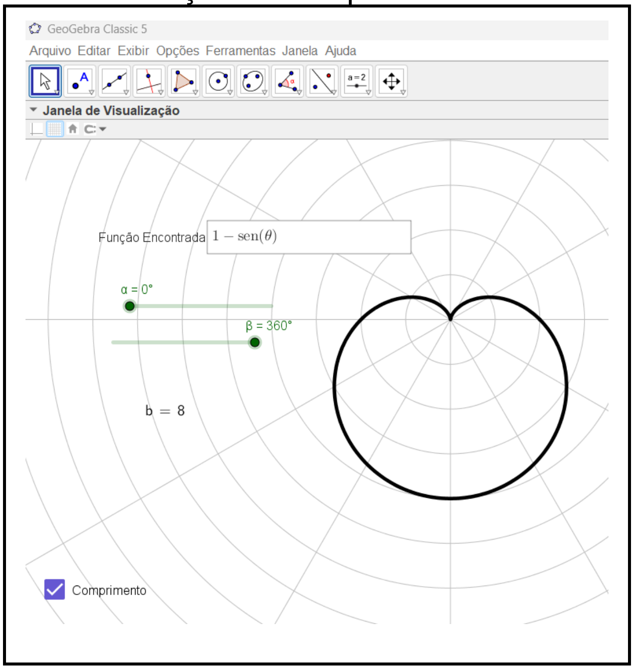
Figura 32 - Ilustração da simetria da curva $f(\theta) = 1 - sen\theta$



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Após verificar e ter comprovado: a função, o intervalo de integração, montar a integral utilizando a fórmula para o cálculo de comprimento de curva polar e calculando o valor (considerando que não tiveram obstáculos até aqui). Será utilizada a ferramenta do GeoGebra para o cálculo de comprimento de curva (o docente deverá já ter construído um botão com o nome comprimento para que após a manipulação dos controles deslizantes eles cliquem em comprimento para verificarem e comprovarem o valor, a programação fica a cargo do professor) para verificar e comparar com os resultados encontrados pela turma. Ao clicarem no botão comprimento, se depararam com a imagem/valor ilustrado a seguir:

Figura 33 - Verificação do comprimento da curva $r = 1 - sen(\theta)$



Fonte: Elaboradas pelos autores, 2023.

Após a manipulação da construção, cada aluno/dupla/trio perceberão se seus cálculos estão corretos e se não estiverem (caso apresentem outro resultado para o comprimento devem sempre retornar a dialética anterior para repensar a estratégia usada) poderão corrigi-la identificando onde foi o erro e como poderiam melhorar (retornam às dialéticas de ação e formulação). Esse momento é de comprovação e validação dos argumentos que serão apoiados em conceitos matemáticos utilizados e com apoio da ferramenta utilizada, plataforma GeoGebra e então, chegaram à conclusão de que o comprimento do coração solicitado será 8 m e como cada metro custa 11,00 reais cheiraram em um valor de 88,00 reais que Laura informará ao prefeito.

Utilizar o GeoGebra na validação dessa sequência é um fator crucial para construção e assimilação dos conceitos estudados pois segundo Oliveira, Gonçalves e Piasson (2018) entendem que a utilização do GeoGebra se mostra significativo para os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral, e sua utilização é "recomendável como recurso didático e metodológico em sala de aula" (OLIVEIRA; GONÇALVES; PIASSON, p.482, 2018).

Propósito: Utilizar o GeoGebra como um artifício de conferência de resultado (calculadora) servirá tanto para visualização para aqueles que não conseguem desenhar a curva como para análise de cálculos, permitindo aos alunos retomarem ao início da questão e reavaliar suas estratégias caso necessitem. Além disso, a utilização do GeoGebra, além de possibilitar a visualização da curva, proporciona aulas mais dinâmicas e instigantes para os discentes despertarem o raciocínio crítico, a criatividade, vindo a aprender e a aplicar os conceitos necessários para resolver esse tipo de questão.

ENCERRAMENTO (Dialética da institucionalização)

Tempo sugerido: $\frac{1}{2}$h/a

Orientação: Poderá ser dividida em três momentos: Uma conversa sobre a questão; a Matemática presente na questão e resolução da questão no quadro; e, por fim, exploração da plataforma GeoGebra.

Momento 1 - Conversa sobre a questão

Nesse momento da aula o docente retoma a atividade que estava sendo desenvolvida a-didaticamente pelos alunos. Propõe uma conversa sobre a situação-didática 1, se os alunos entenderam a situação-didática 1 proposta e se conseguiram perceber qual seria o conteúdo matemático estudado que poderia ajudar na resolução da questão.

Abrir uma discussão sobre a aplicabilidade desse conteúdo em outras áreas do conhecimento, bem como, a importância dele. Conversar com os alunos onde foi que eles sentiram maior dificuldade durante a sequência e onde precisam melhorar. Poderá discutir com a turma sobre: qual momento sentiu mais dificuldade na questão? Você tem alguma sugestão de onde poderia melhorar o seu processo de resolução? Favoreceu/ auxiliou na verificação proporcionada pelo GeoGebra?

Nesse momento o docente pode sugerir materiais complementares e pretende-se aqui ler e interpretar a questão juntamente com os alunos e mostrar/discutir sobre os artifícios necessários para resolver a situação-didática 1.

Momento 2 - Matemática e Resolução da questão

Nesse momento, o docente institucionaliza o conhecimento em estudo, ou seja, irá explorar toda matemática possível no problema da praça proposto. Irá enfatizar ou apresentar, se não chegaram nessa ideia de uso de conteúdo, que para essa questão deveriam usar o conceito estudado de comprimento de curvas polares, bem como, a fórmula $L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$, argumentar que a equação que descreve o desenho do problema (o coração) é $f(\theta) = 1 - sen(\theta)$, que descreve um cardióide por possuir um formato parecido com o de um coração, que essa curva possui simetria, ou seja, comentar que essa função é simétrica em relação à reta vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$, porque $sen(\pi - \theta) = sen(\theta)$ e em relação ao intervalo mesmo θ, estando entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$, por ser uma função $sen\ (\theta)$, no intervalo $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, a curva espelha o seu comportamento.

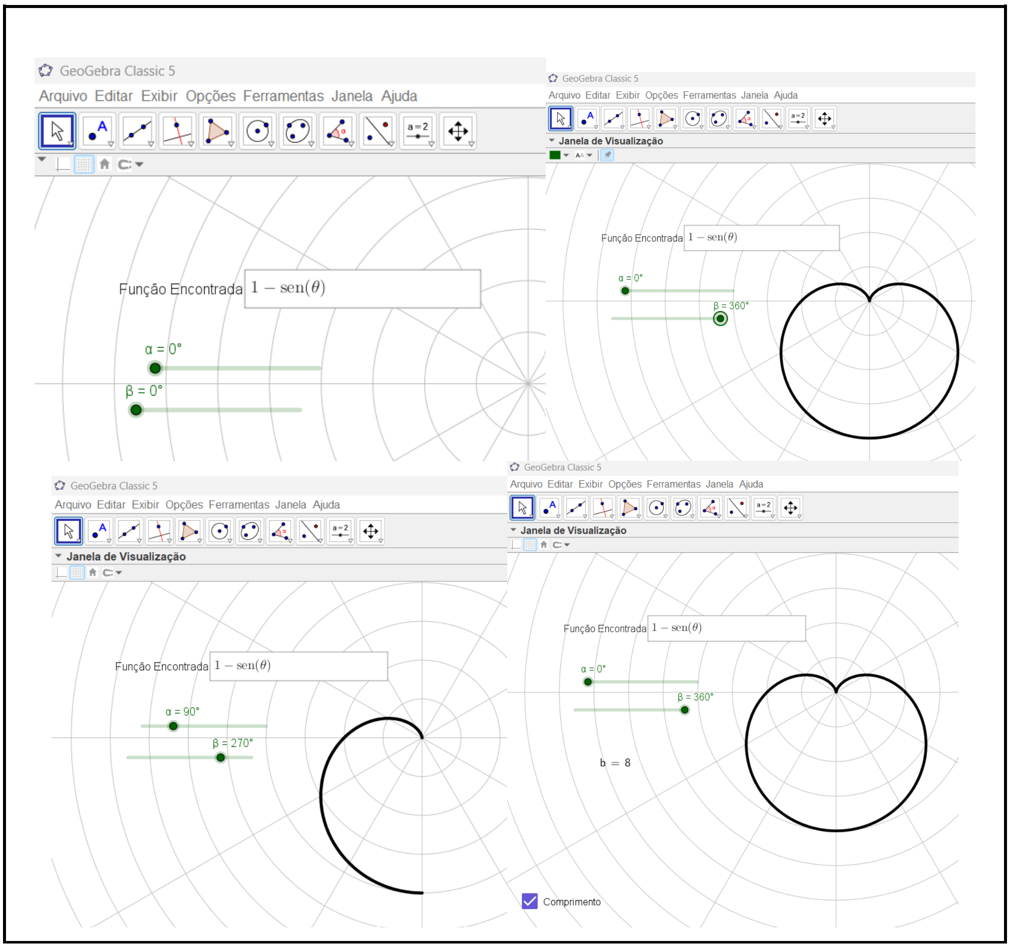
Comentar que essa simetria é importante para o esboçar as curvas, pois precisamos marcar menos pontos e depois refleti-los em torno do eixo polar, ou polo ou para reta vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$, dependendo da equação que estejamos trabalhando.

Após realizar essa análise sobre simetria, deve-se argumentar sobre o intervalo, voltando para a curva polar em destaque $f(\theta) = 1 - sen(\theta)$, no intervalo encontrado $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, montar a integral utilizando a fórmula de comprimento de curva polar e a ideia de simetria, descrevendo no quadro a integral: $L = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - sen\theta)^2 + cos^2\theta}\, d\theta$, após montar a integral ele pode resolver a questão no quadro e chegar ao valor de 8 metros e depois multiplicar por R$ 11,00, resultando em R$ 88,00 reais que é a resposta do problema.

Momento 3 - Exploração do GeoGebra

Nesse momento o docente utiliza a plataforma GeoGebra para mostrar os passos de solução da questão. Mostrando primeiramente que a função que descreve a situação-problema 1 é a $f(\theta) = 1 - sen(\theta)$, que o intervalo utilizado será o $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e que após resolver a integral mencionada anteriormente o comprimento será exatamente 8, como ilustrados os passos abaixo.

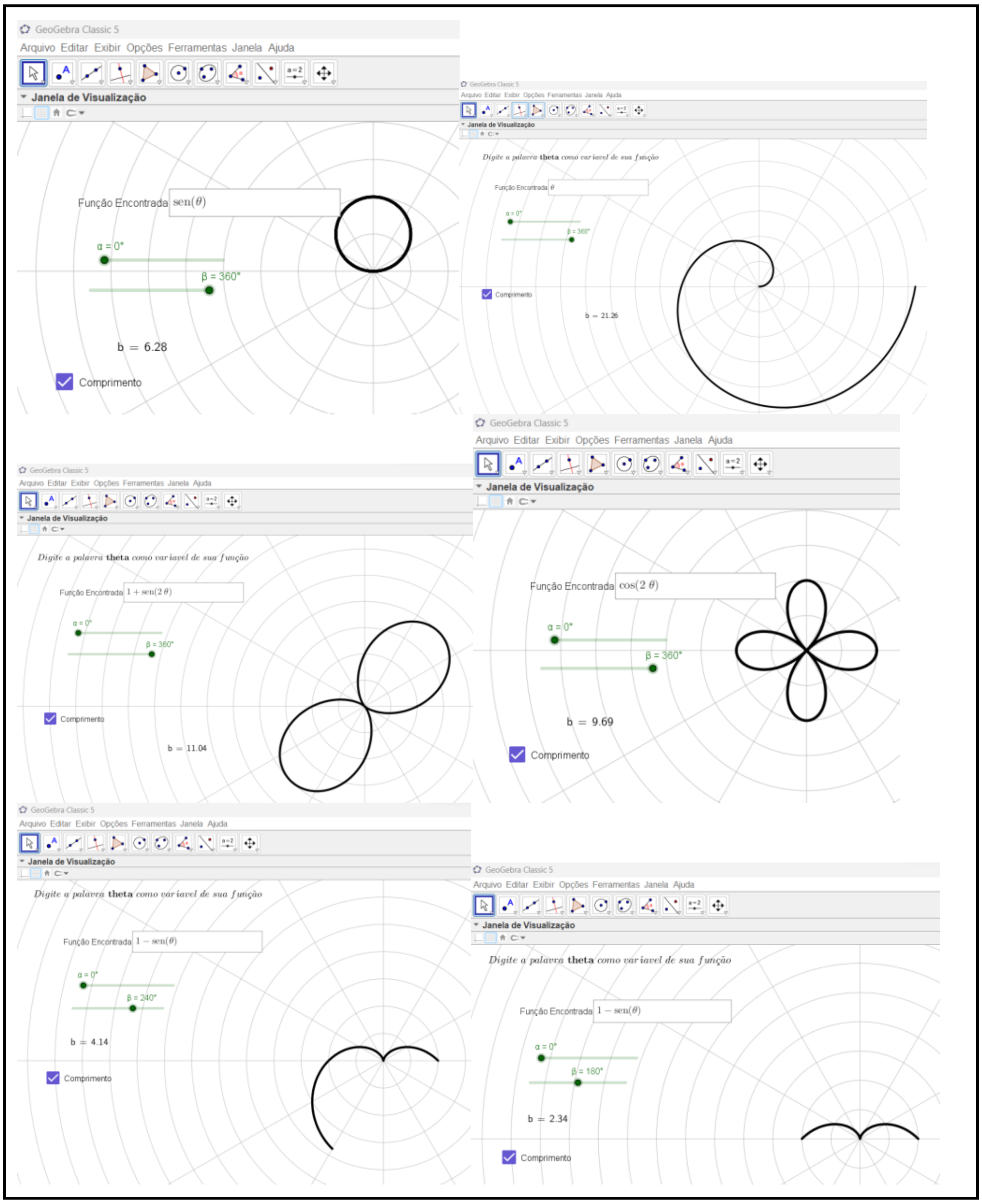
Figura 34- Representação da manipulação 1 do professor



Fonte: Elaboradas pelos autores, 2023.

Após mostrar a verificação dos cálculos que foram realizados, o professor poderá realizar uns testes na construção e explorar conceitos como, funções e intervalos diferentes dos da situação-didática 1, que resultaria em outro resultado, enfatizando que a escolha do intervalo é importante para a resolução de um problema. Ilustramos alguns testes que o docente poderá explorar com os alunos e verificar o comprimento, função errada e intervalos errados, respectivamente para o nosso problema.

Figura 35- Representação da manipulação 2 do professor



Fonte: Elaboradas pelos autores, 2023.

O docente deve explorar a ideia de simetria presente no cardióide reforçando a ideia de que essa função é simétrica em relação à reta vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$, porque $sen(\pi - \theta) = sen(\theta)$ e em relação ao intervalo mesmo θ. Reforçar a ideia de que a simetria tem grande funcionalidade no esboço de curvas e que pode ser verificado no Geogebra, plotando equações e verificar se há simetria ou não.

E para finalizar a sequência retomar o objetivo da aula: Identificar o uso de comprimento de curvas polares em situações do cotidiano.

Propósito: Essa atividade, pode fornecer ao docente a utilização de uma plataforma matemática que possibilita ao aluno a visualização de ferramentas computacionais, para verificação e validação de seus cálculos, podendo inseri-los em um meio tecnólogo, mais atrativo, facilitando a visualização de comprimento de curvas polares e instigando-os a compreender propriedade e resultados matemáticos, percebendo o que está em volta de questões de comprimento de curva, como por exemplo, a importância de determinar o intervalo de integração corretamente e onde pode ser aplicado no cotidiano.

RAIO X (Refletindo sobre a sequência…)

Propósito: Esse é um momento pessoal do docente de reflexão da elaboração e aplicação da sequência. Então, optamos em discorrer sobre a construção da sequência proposta seguindo o nível P+2 (P2) denominado como nível de construção ou construtor. Para isso, realizamos uma reflexão em torno da proposta acima descrita, em relação: melhoramento da sequência, possíveis erros presentes, devolutivas dentre outros aspectos, traremos como base, como já mencionado, o modelo de níveis da atividade do professor (Margolinas, 2002, 2005).

A seguir iremos pontuar possíveis dificuldades encontradas ao aplicar a Sequência didática a Situação- didática 1, assim como, possíveis alternativas de melhoramento para uma nova aplicação, podendo auxiliar ao professor nas tomadas de macro e micro decisões. Para melhor destacamento dos acontecimentos iremos utilizar as dialéticas da TSD para elencar tais elementos.

AÇÃO E FORMULAÇÃO

- Deve-se levar em consideração que os alunos podem não aceitar entrar no milieu da situação-didática 1.
- Alunos não terem estudado ou não lembrarem dos assuntos que são pré-requisitos para aplicação dela.
- Tenha ciência que a condução da sequência será por meio das devolutivas estabelecidas do meio didático construído (a-didaticamente).
- A Situação-didática 1 não está bem definida e escrita, ou seja, apresenta dados insuficientes que impossibilitem a solução dela por parte dos alunos.

Alternativas de melhoramentos por partes do professor referentes aos itens citados anteriormente, respectivamente.

- Entender o meio e refletir porque o aluno não aderiu ao milieu.
- Aulas de revisão tendo como foco as principais dificuldades verificadas pelo docente.
- Tentar interferir o mínimo possível, não invadindo o espaço em que os estudantes constroem e reflete sobre sua resolução (dialéticas de ação, formulação e validação) priorizando a observação.
- Refazer a situação-didática 1 e propor em um outro momento.

Tendo em vista que o processo citado nos pontos de dificuldades apresentados anteriormente não tenha acontecido, podemos pensar ainda em possíveis falhas no processo de resolução por parte dos discentes, citamos agora alguns desse:

- Pensar em curvas retangulares e no plano cartesiano para resolver o problema;
- Escolher outro ponto do plano polar que não seja o polo;
- Escolher outra função que não seja a $f(\theta) = 1 - sen(\theta)$;
- Não aplicarem a fórmula para o cálculo de comprimento de curva em coordenadas polares $L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$;
- Determinar os intervalos de integração e a derivada primeira da $f(\theta) = 1 - sen\theta,$ incorretamente;
- Não lembrarem das propriedades de simetria da curva;
- Não resolverem a integral corretamente (dificuldades em: técnicas de integração, relações trigonométricas, manipulações algébricas e aplicação do teorema fundamental do cálculo, dentre outros pré-requisitos para o cálculo de integração em coordenadas polares);
- Falha de compreensão nas devolutivas entre professor e aluno.

VALIDAÇÃO

- Problemas técnicos nos computadores;
- Domínio básico dos alunos com o GeoGebra.
- Falhas com a Plataforma GeoGebra;
- Bugs na programação da Situação-didática 1

Alternativas de melhoramentos por partes do professor referentes aos itens citados acima, respectivamente.

- Realocar as equipes;
- Aula de apresentação da plataforma e conceitos básicos;
- Orientar aos alunos instalarem o GeoGebra para celulares
- Verificar compatibilidade de versões da Plataforma e/ou alterações por partes dos alunos na programação interna do projeto.

INSTITUCIONALIZAÇÃO

A seguir elencamos alguns pontos podem dificultar a compreensão dos alunos em relação a solução da situação- didática1, o professor poderá:

- Não proporcionar interpretação adequada da situação proposta;
- Não conseguir conduzir a solução algébrica;
- Não conseguir explorar a situação problema na plataforma GeoGebra.

Cuidados que o professor pode tomar para que os alunos compreendam a solução da situação problema proposta e assim alcance o objetivo Geral:

- Estudar antecipadamente o problema proposto, vindo a possibilitar a interpretação e exploração dos dados pertinentes ao problema.
- Resolver antecipadamente o problema;
- Realizar teste na plataforma, que possibilite explorar propriedades e conceitos relacionados ao problema proposto.

Enfim, o docente deve sempre estar atento às devolutivas que ocorreram durante todo o processo, pois segundo Brousseau (1986) a preocupação do professor não deve ser com a comunicação de um conhecimento, mas com a devolução adequada do problema. Uma vez que esta devolução adequada ocorre, indica que o aluno entrou no jogo (aceitou participar do milieu) e se ele ganha esse ‘jogo’, existe uma possibilidade para a aprendizagem.

5.2 Plano de Aula 2: Volumes em Coordenadas Polares

SOBRE O PLANO

Autora: Maria Lidianny da Silva Moura

Mentor: Marcus Bessa de Menezes

Objetivos específicos:

- Realizar a leitura e discussão do problema proposto sobre Volumes em Coordenadas Polares;
- Resolver problemas de Volumes em Coordenadas Polares;
- Explorar propriedades envolvidas na situação-didática 2 sobre Volumes em Coordenadas Polares;

Conceito-chave: Volumes em Coordenadas Polares;

Recursos necessários: Computadores ou notebooks com a plataforma GeoGebra instalada (quantidade em que foi dividida a turma), projetor, caneta, Situação- didática 2 impressa em folha A4 e folha para rascunho.

RESUMO DA AULA

Quadro 4 - Quadro resumo 2

Atividades	**Objetivo Principal**	**Ação Principal**	**Tempo Sugerido**
Objetivos	Identificar o uso de Volumes em Coordenadas Polares em situações do cotidiano.	Criar situações que permitam os alunos chegarem ao objetivo.	Durante toda a aula.
Retomada	O professor irá apresentar os conteúdos que são pré-requisitos para o desenvolvimento dessa sequência.	O professor irá abordar os conceitos em aulas anteriores. (P+3, P+2, P+1, S+3, S+2, S+1)	Aproximadamente em 4h/a.

Atividade Principal (Dialéticas: Ação e Formulação)	Apresentar a situação-didática 2 contextualizada sobre Volumes em Coordenadas Polares e instigá-los a resolvê-la.	Entregar aos alunos uma folha de papel A4 com a situação-problema 2 e orientá-los a tentar resolvê-la. Nesse momento, eles permeiam as dialéticas de ação e formulação. (S0, P0, P-1)	1h/a.
Discussões das soluções (Dialética da Validação)	Os alunos irão Apresentar/Discutir/Provar/Comparar/Validar o resultado encontrado.	Os discentes irão discutir as soluções encontradas, mostrar seu modelo matemático e comparar/validar seus resultados comparando com a construção na plataforma GeoGebra. (S0, P0, P-1)	$\frac{1}{2}$h/a
Encerramento (Dialética da Institucionalização)	O docente irá retomar a condução da aula.	O docente se certificará do resultado que os alunos encontraram e apresentará: o método de resolução, formalmente, da questão no quadro (fórmula do Volume em Coordenada Polar), utilizará o GeoGebra para comprovação e discussão dos resultados e de propriedades existentes na questão proposta e, encerra a sequência. (S0, P0, P-1)	1h/a.
RaioX	O docente irá refletir sobre o desenvolvimento da sequência didática.	O docente irá discutir e avaliar o planejamento e a aplicação da sequência didática, apontando melhoramento e erros que possam surgir.	________

Fonte: Elaborado pelos autores, adaptado de Modelo de Plano de Aula NOVA ESCOLA, 2023.

APRESENTAÇÃO DO OBJETIVO: Identificar o uso de Volumes em Coordenadas Polares em situações do cotidiano.

Tempo sugerido: Durante toda a aula.

Orientação: Serão informadas no início da sequência de como os alunos deverão conduzir a mesma.

Propósito: Possibilitar aos alunos a intencionalidade da aula de envolvê-los da situação-didática 2.

RETOMADA

Tempo sugerido: Aproximadamente 4h/a

Orientação: O docente realizará explanação dos conceitos: integração dupla em Coordenadas Polares, propriedades, fórmula (integral definida) para o cálculo de volumes em Coordenadas Polares. Acontecendo nesse momento da aula, o que Margolinas prevê nos Níveis da Atividade do Professor (P+3, P+2, P+1, S+3, S+2, S+1) em relação às decisões do professor.

Propósito: Apresentar os conteúdos pré-requisitos para o desenvolvimento da sequência didática em aulas anteriores.

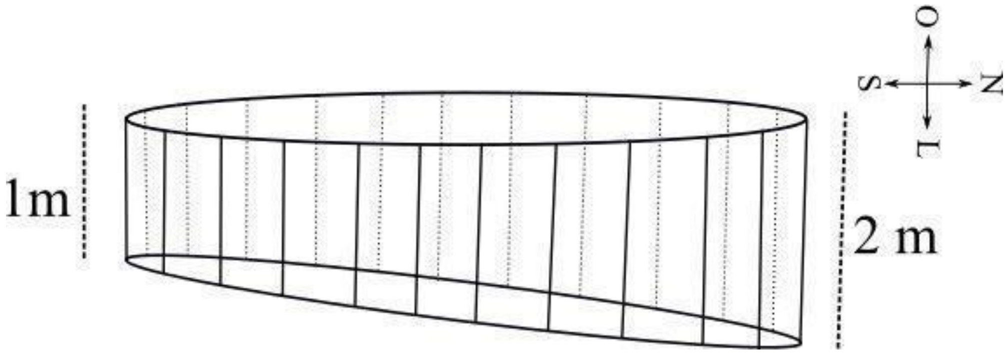
ATIVIDADE PRINCIPAL (Dialéticas de Ação e Formulação)

Tempo sugerido: 1h/a.

Orientação: A aula será iniciada com a apresentação/entrega da situação- problema 2 aos alunos, em uma folha de papel A4 (podendo dividir a turma em duplas e/ou trios), para realizarem a leitura do problema e aceitar entrar no milieu da situação-didática 2. Espera-se que os alunos aceitem participar da sequência e permeiam as dialéticas de Ação e Formulação, de acordo com a TSD e que o docente siga os níveis (S0, P0, P-1) como prevê Margolinas. Com isso, a situação-problema 2, adaptada da questão 35 da seção 15.4 do livro James Stewart, 7ª edição, página 900, será a seguinte:

Situação-didática 2: José decidiu construir uma piscina, em sua casa, no Sítio Maniçoba. Para construção da piscina, ele sugere que as seguintes orientações fossem aceitas: a profundidade da piscina seria constante ao longo das retas de leste para oeste e crescente linearmente de 1 metro na extremidade sul para 2 metros na extremidade norte. Essas orientações mais algumas medidas, estão ilustradas na Figura 36:

Figura 36- Projeção da Piscina da Situação-problema 2



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

No entanto, o que preocupava José, era saber quanto tempo levaria para encher essa piscina, sabendo que a mangueira que ele irá utilizar possui vazão de $11m^3/h$?

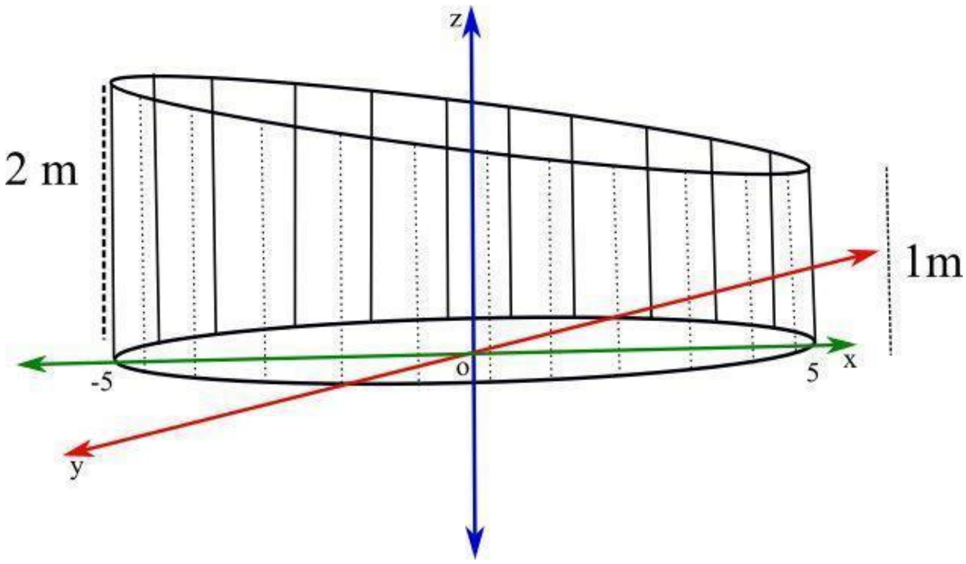
Dialética da Ação e Dialética da Formulação: Após a leitura da situação-didática 2 e ao visualizarem o desenho proposto, espera-se que os discentes, consigam entender o que se pede e extrair os dados da questão para montar uma estratégia de solução. Espera-se que eles pensem que inicialmente precisa-se do volume da piscina para depois calcular o tempo necessário para encher a piscina. Que ao interpretarem a imagem e após visualizarem o formato da piscina da situação-didática 2, possam pensar em estratégias de como calcular o volume dela.

Uma possibilidade que eles logo pensam, é calcular o volume por geometria espacial, formando cilindros, tentando realizar diferença entre volumes, realizando manipulações para se chegar ao volume procurado. Mas podem, também, tento estudado conteúdos das disciplinas de Cálculo 2 e Cálculo 3, intuir que o problema pode ser solucionado utilizando integral dupla, para calcular o volume do sólido irregular a partir de regiões delimitadas, para isso os discentes devem determinar essas regiões para terem condições de montar a integral dupla que resolva o problema.

No entanto, para montar essas integrais, os alunos devem perceber/extrair os dados da questão como: a piscina possui formato circular, possui diâmetro de 10 metros, logo tem raio medindo 5 metros. A profundidade da piscina varia linearmente em relação aos pontos cardeais, com ênfase na extremidade sul e na extremidade norte, assim se percebe que a altura máxima da piscina será 2 metros e a mínima será 1 metro.

Os discentes, ao pensarem em estratégias de resolução poderão utilizar a ideia de colocar a imagem, 'a piscina', no sistema tridimensional (x, y, z), para melhor analisar as variações e visualizar algum padrão, para facilitar podem imaginar uma rotação na imagem, colocando a borda superior da piscina (nível da água), para baixo no sistema/espaço tridimensional e com centro coincidindo com a origem dos eixos, pois a outra extremidade da piscina, como tem um declive ficaria mais difícil de colocar no eixo xy, mas é válida a projeção. Podendo desenharem (dialética de formulação) como ilustrado na Figura 37.

Figura 37- Projeção da Piscina no plano tridimensional

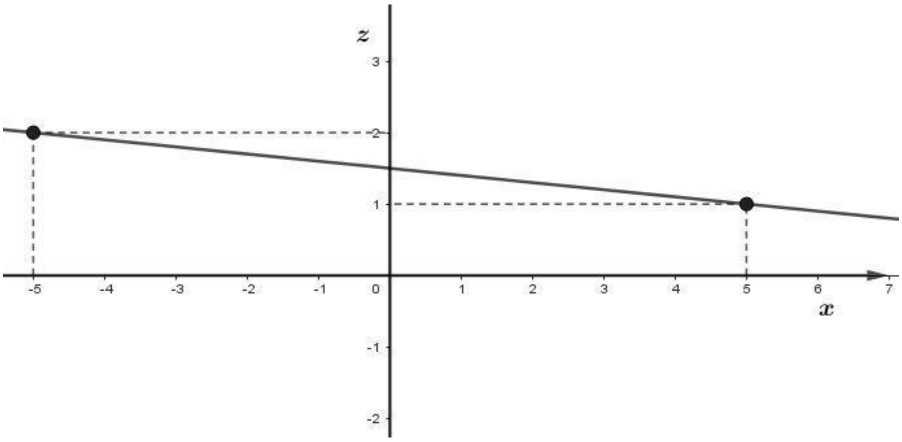


Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Posteriormente, considerando a estratégia de solução por integral dupla, é necessário determinar a função que será integrada. Para isso, os alunos precisam determinar quais são as regiões em questão, uma é o domínio de onde serão extraídos os intervalos de integração e a outra a função de integração (superfície). Para isso, os discentes precisam perceber que as alturas 1 m e 2 m, estão associados à pontos tridimensionais com tripla ordenadas (x, y, z) e antes de encontrar suas tripla -ordenadas poderiam perceber que os pontos de interseção com os eixos x e y são: $(5, 0, 0), (-5, 0, 0), (0, 5, 0)$ e $(0, -5, 0)$ e depois perceber também, que para os valores de x assumir 5 ou -5, as imagens em z seriam 2 e 1, respectivamente formando os pontos $(-5, 0, 2)$ e $(5, 0, 1)$, pois são os valores de máximo e mínimo de acordo com as informações dadas (dialética da ação).

Com esses pontos os discentes devem pensar na construção da equação de um plano que representa o fundo da piscina (na imagem rotacionada representa a parte superior, que seria a superfície procurada) e que passe por esses dois pontos. Uma possibilidade, em que os estudantes poderiam pensar seria planificar o eixo xz, onde os pontos estão, podendo desenhar o seguinte (dialética da formulação), Figura 38.

Figura 38- Planificação dos eixos xz



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Após essa planificação, podem perceber uma reta decrescente que passa pelos pontos $(-5,2)$ e $(5,1)$, assim sendo possível determinar a equação dessa reta. Deverão perceber, que para determinar a equação da reta usaram a equação da reta $ax + b = z$, considerando z pois o plano em questão é o xz. Para encontrar a equação da reta que contenha esses pontos, precisam montar um sistema de equações lineares e substituir os pontos $(-5,2)$ e $(5,1)$ em x e z, assim poderão desenvolver os cálculos da seguinte forma (dialética da formulação):

$$\begin{array}{rl} -5a + b = 2 & (i) \\ 5a + b = 1 & (ii) \\ \hline \end{array}$$

Somando as equações (i) e (ii)(aqui os discentes podem utilizar outro método de resolução de sistema), ficariam com:

$$2b = 3 \rightarrow b = \frac{3}{2}$$

Para determinar o valor de a , substituir o valor de b encontrado em uma das equações acima, optando-se pela (ii), encontrariam,

$$5a + \frac{3}{2} = 1 \rightarrow 10a + 3 = 2 \rightarrow a = \frac{-1}{10}$$

Encontrando, assim a equação da reta sendo: $\frac{-x}{10} + \frac{3}{2} = z$, que por consequência será a equação do plano (visualizado no espaço tridimensional) que limita a profundidade da piscina.

Após esses passos, os estudantes poderiam enxergar que já possuem a função retangular que deve ser integrada e montarem a seguinte integral:

$$\int_D \int \frac{-x}{10} + \frac{3}{2} dA$$

No entanto, para determinar os limites de integração dessa integral, não é fácil, por se tratar de uma região circular no domínio. Logo, se faz necessário pensar em Volume por Coordenadas Polares, associando ao cálculo de volume em coordenadas polares, com integral dupla previamente estudado em cálculo 3. Então seria necessário encontrar os elementos para montar a integral dupla em Coordenadas Polares. Para isso, ao analisar a imagem e perceber uma base circular, poderão lembrar que em coordenadas polares, precisa-se de um raio e um ângulo que descrevem a região do domínio de integração. Dessa forma, deverão intuir que como na circunferência está de -5 à 5, o raio será de 0 à 5, já que possui diâmetro 10 e o ângulo para fechar o contorno total da circunferência será de 0 à 2π. Outro passo necessário é realizar a transformação da função retangular $f(x,y) = \frac{-x}{10} + \frac{3}{2}$ para a polar para resolver a integral e encontrar o volume. (Esse é um passo importante, caso não realizado a integral dupla polar, será calculada incorretamente).

Para realização da transformação de coordenadas cartesianas para polares os discentes devem lembrar que:

$$x = r\,cos\theta$$
$$y = r\,sen\theta$$

Com isso, a função após transformada ficará da forma $f(r,\theta) = \frac{-r\,cos\theta}{10} + \frac{3}{2}$ e como os limites de integração são $0 \leq r \leq 5$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a integral dupla em coordenadas polares que os alunos devem encontrar, será $\int_0^{2\pi} \int_0^{5} \left(\frac{-r\,cos\theta}{10} + \frac{3}{2}\right) rdrd\theta$ (sendo $rdrd\theta$ a mudança de dA para o Jacobiano).

Após montar a integral dupla, os discentes poderão recorrer aos métodos de cálculo de integral dupla estudados no curso de Cálculo 3 e espera-se que eles calculem a integral dupla e a seguir, uma possível forma de resolução que pode ser utilizada pelos alunos que representa o volume procurado:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{5} \left(\frac{-r\,cos\theta}{10} + \frac{3}{2}\right) rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{5} \left(\frac{-r^2\,cos\theta}{10} + \frac{3r}{2}\right) drd\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{-r^3\,cos\theta}{30} + \frac{3r^2}{4}\right]_0^5 d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{-125\,cos\theta}{30} + \frac{75}{4}\right] d\theta = \left[\frac{-125\,sen\theta}{30} + \frac{75\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{75\pi}{2}\,m^3$$

Portanto, o volume da piscina será aproximadamente 117,8 m^3 de água e como José quer saber o tempo para encher a piscina, basta os alunos dividirem o volume da piscina pela vazão da mangueira que é 11m^3/h, resultando aproximadamente 10,7 horas, encontrando o tempo procurado.

Propósito: Essa atividade poderá fornecer ao docente uma alternativa de proporcionar aos alunos um momento pensarem e mobilizarem saberes estudados em Cálculo 3, resolvendo questões de volume de sólidos não regulares, utilizando conceitos de Coordenadas Polares para auxiliar na solução e esperando por parte dos alunos o surgimento de outras formas de resolução e visualização do problema.

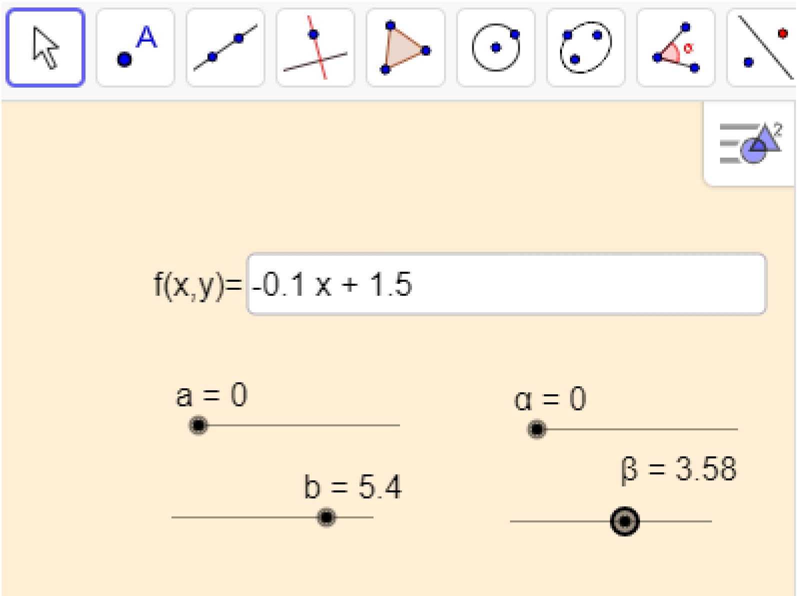
DISCUSSÃO DAS SOLUÇÕES (Dialética de Validação)

Tempo sugerido: $\frac{1}{2}$h/a

Orientação: Os alunos, individualmente ou em equipe, deverão apresentar sua solução e como resolveram. Devem provar a sua hipótese de solução, compartilhar como resolveram, podendo virem a ser contestados de sua solução. Nessa dialética, os alunos discutem os resultados encontrados, aqui se encontram no (S0, P0) de Margolinas.

Nessa sequência, os alunos podem utilizar o GeoGebra, no momento da validação dos resultados, servindo de verificação e comparação, não só do número encontrado, mas das regiões e intervalos determinados. Para esse momento o docente deve realizar previamente uma construção na Plataforma GeoGebra que favoreça essa comprovação por parte dos alunos, assim, uma possível construção é apresentada na Figura 39.

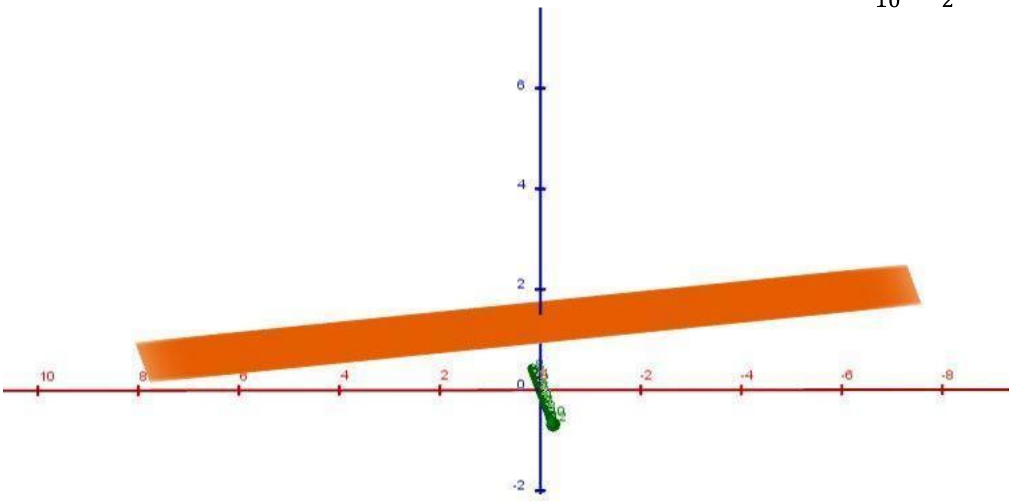
Figura 39 - Ilustração do campo de entrada da equação do plano encontrada pelo aluno



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Nesta temos quatro controles deslizantes α, β , a e b que indicam o intervalo de integração do ângulo θ, sendo θ correspondente ao limite inferior e β ao limite superior, onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, n indica o raio que está variando de $0 \leq r \leq 5$ e ainda uma caixa de entrada para ser digitada a equação retangular do plano encontrada pelos alunos, servindo o GeoGebra como uma ferramenta de visualização e de comprovação dos resultados de cada aluno/dupla/trio. Assim, quando os alunos inserirem sua equação, verificarão se a superfície está de acordo com o ‘a base da piscina’ da situação - problema 2 e se apresentar algo diferente poderão repensar sua equação, (devem voltar para a dialética da ação). No entanto, ao plotar a equação e perceberem a coincidência com a imagem da situação - didática 2, foi a equação $f(x,y) = \frac{-x}{10} + \frac{3}{2}$ que eles inseriram no campo de entrada.

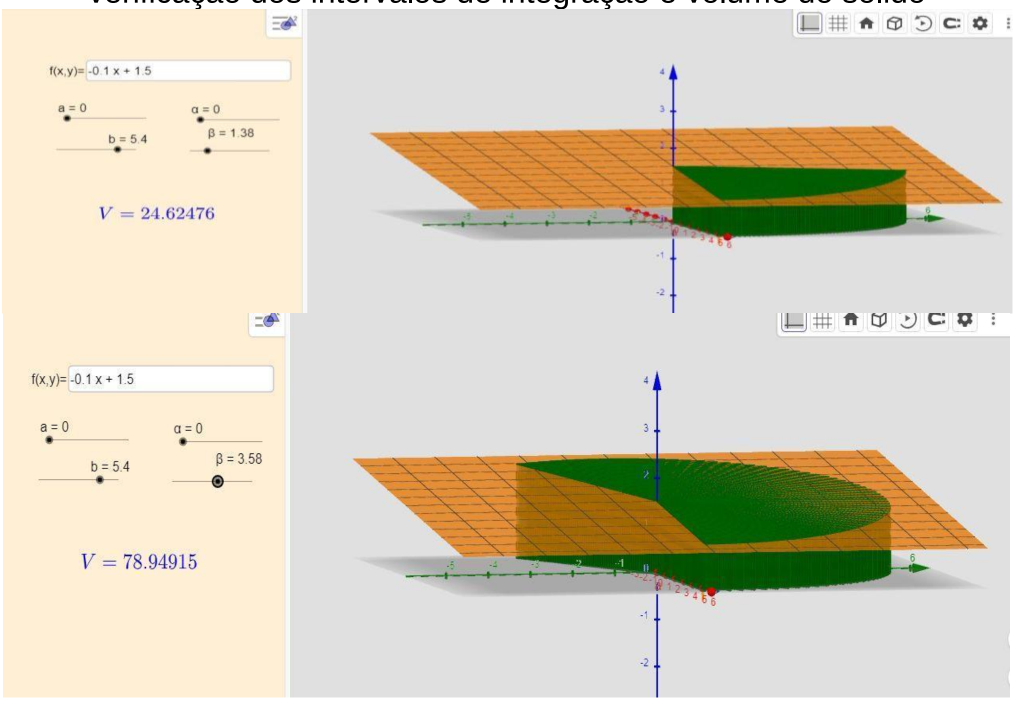
Figura 40 - Ilustração da plotagem da equação $f(x,y) = \frac{-x}{10} + \frac{3}{2}$



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Na sequência poderão manipular os controles deslizantes para colocar os intervalos de integração encontrados e ver se o sólido está semelhante com o da piscina (ou seja, se possui mesmo formato e medidas) e se possui mesmo volume, pois ao passo que manipularem os intervalos, pelos botões deslizantes, aparecerá o volume do sólido obtido simultaneamente na janela de visualização ao lado do sólido, (adaptação da plataforma GeoGebra) previamente construída pelo docente.

Figura 41- Representação da manipulação dos controles deslizantes para verificação dos intervalos de integração e volume do sólido



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Após a manipulação da construção, cada aluno/dupla/trio perceberão se seus cálculos estão corretos e se não estiverem (caso apresentem outro resultado para o volume devem sempre retornar a dialética anterior para repensar a estratégia usada) poderão corrigi-la identificando onde foi o erro e como poderiam melhorar. Caso contrário, nesse momento, comprovaram que o volume da piscina será 117,8 m^3 de água e assim como a vazão é de 11 $m^3\ /h$, o tempo que levará para encher a piscina de José será de aproximadamente 10,7 horas.

Nesse momento o GeoGebra é um aliado para o ensino e aprendizagem de CP, pois para Cometti (2018), essas plataformas ajudam no ensino de Cálculo causando interesses em professores e alunos, pois serem ferramentas que podem amenizar as práticas tradicionais de ensinar Cálculo e intensificar o uso da tecnologia.

Propósito: Utilizar o GeoGebra como um artifício de conferência de resultado (calculadora) e de visualização das superfícies, podendo facilitar a análise de resolução de problemas que envolvem volumes de sólidos irregulares, como o problema da piscina.

ENCERRAMENTO (Dialética da institucionalização)

Tempo sugerido: $\frac{1}{2}$h/a

Orientação: Poderá ser dividida em três momentos: conversa sobre a questão; a Matemática presente na questão e resolução da questão no quadro; e, por fim, exploração da plataforma GeoGebra.

Momento 1 - Conversa sobre a questão

O docente retoma a atividade que estava sendo desenvolvida a-didaticamente pelos alunos. Propõe uma conversa sobre a situação-problema 2, se os discentes entenderam a situação-didática 2 e se conseguiram perceber qual o conteúdo matemático presente na questão e que poderia auxiliar na resolução. Abrir uma discussão sobre aplicabilidade em outras áreas do conhecimento e conversar sobre as dificuldades encontradas durante a sequência e possíveis melhoramentos. Poderá, aqui, sugerir materiais complementares.

Momento 2 - Matemática e Resolução da questão

O docente institucionaliza o conhecimento em estudo, explorando toda matemática possível no problema da piscina. Irá enfatizar ou apresentar, que para essa questão deveriam usar o conceito de volume em Coordenadas Polares, bem como, a fórmula $V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r\,cos(\theta), r\,sen(\theta)) r dr d\theta$, argumentar que a equação que descreve o plano é $f(r,\theta) = \frac{-r\,cos\theta}{10} + \frac{3}{2}$, que descreve a base inclinada da piscina, sendo um plano que está interceptando um cilindro de equação $f(r,\theta) = r^2cos^2(\theta) + r^2sen^2(\theta) - 25$, que a base desse cilindro é a base superior da piscina de José, onde fica o nível da água, mas agora foi rotacionada e o centro do círculo da base desse cilindro coincide com a origem do sistema tridimensional, aqui poderá desenhar no quadro um esboço dessas informações.

Comentar que para chegar nessa imagem deve-se encontrar alguns valores e equações. Para determinar a equação do plano, será encontrada mediante uma planificação de eixos e utilizando a equação da reta usamos $ax + b = y$, aqui usando $ax + b = z$, por considerar o plano xz. Identificar os pontos neste plano e encontrar a equação da reta que passa pelos pontos $(5{,}1)$ e $(-5{,}2)$, resolvendo no quadro da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 5a + b = 1 \\ -5a + b = 2 \\ + \overline{\hspace{3cm}} \\ 2b = 3 \;\rightarrow\; b = \frac{3}{2} \end{array}$$

$$5a + \frac{3}{2} = 1 \rightarrow\; 10a + 3 = 2 \rightarrow a = \frac{-1}{10}$$

Concluindo que a equação da reta será $\frac{-x}{10} + \frac{3}{2} = z$ e sua representação no tridimensional será a equação do plano que limita a profundidade da piscina. (Aqui o docente poderá enfatizar que existem outros métodos de se encontrar a equação do plano). Enfatizar, também, que o cálculo do volume será por Coordenadas Polares, logo a equação parametrizada será $\frac{-r\,cos\theta}{10} + \frac{3}{2}$, pois recordará as coordenadas $x = r\,cos\theta$ e $y = r\,sen\theta$.

Posteriormente, para montar a integral será analisado o domínio em questão, como é um círculo para sua descrição, θ irá variar em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e como a situação-didática 2, informa que o diâmetro é 10, temos que o raio será 5, assim $0 \leq r \leq 5$. O docente estará fazendo anotações no quadro e conversando com os alunos montará e calcular a seguinte integral:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \left(\frac{-r\,cos\theta}{10} + \frac{3}{2}\right) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \left(\frac{-r^2\,cos\theta}{10} + \frac{3r}{2}\right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-r^3\,cos\theta}{30} + \frac{3r^2}{4}\right]_0^5 d\theta =$$

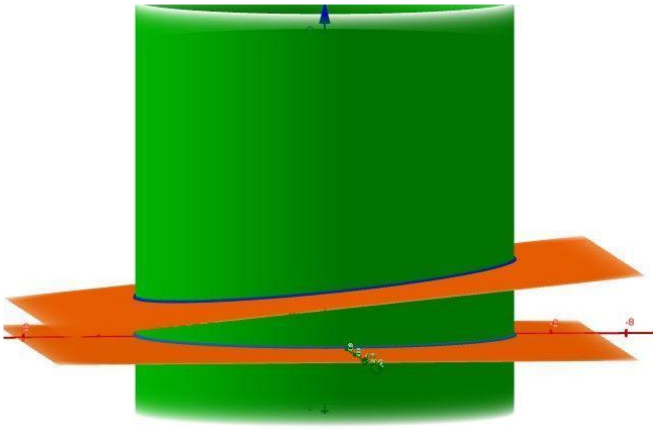
$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{-125\,cos\theta}{30} + \frac{75}{4}\right] d\theta = \left[\frac{-125\,sen\theta}{30} + \frac{75\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{75\pi}{2}\,m^3$$

Chegará que o volume que José procura, será aproximadamente, 117,8 metros cúbicos de água e que a duração para o enchimento da piscina será de 10,7 horas, pois dividirá 117,8 por 11, uma vez que é a vazão da mangueira.

Momento 3 - Exploração do GeoGebra

Nesse momento o professor utiliza a plataforma GeoGebra para mostrar os passos de solução da questão. Mostrando primeiramente, a representação da rotação da imagem da piscina, cilindro e interceptação do plano com o cilindro como ilustrado na figura 42.

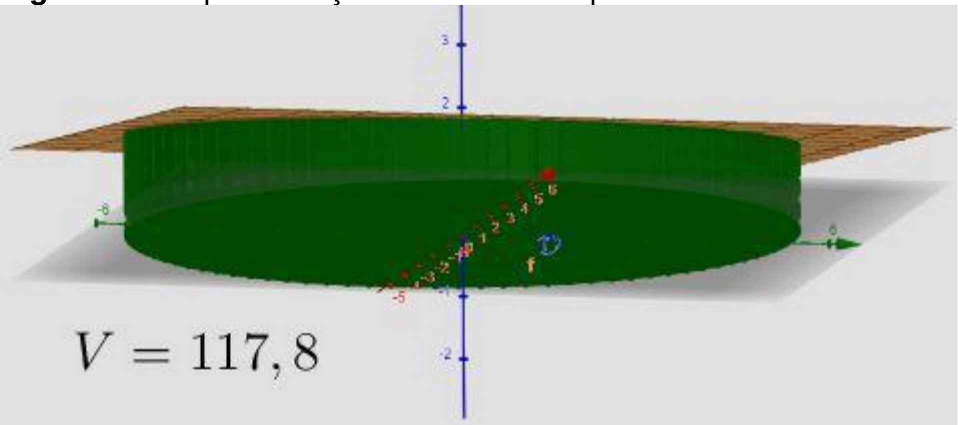
Figura 42- Representação da rotação da imagem da piscina, cilindro e interceptação do plano com o cilindro



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

Mostrará a superfície descrita pela situação problema, e os intervalos fazendo as manipulações dos controles deslizantes explorado as representações/superfícies encontradas e posteriormente, tendo resolvido a integral no quadro, mostrará aos alunos o volume será aproximadamente 117,8 e que o tempo gasto para encher a piscina será 10,7 horas, essas informações estarão na janela de visualização.

Figura 43- Representação do volume da piscina de José



Fonte: Elaborada pelos autores, 2023.

RAIO X (Refletindo sobre a sequência…)

Propósito: Nesse momento, o docente reflete sobre a elaboração e aplicação da sequência. Assim, optamos em analisar/refletir essa proposta seguindo o nível P+2 (P2) denominado como nível de construção ou construtor. Dessa forma, realizamos uma reflexão em torno de: melhoramento da sequência, possíveis erros presentes, devolutivas dentre outros aspectos, traremos como base, como já mencionado, o modelo de níveis da atividade do professor (Margolinas, 2002, 2005).

Na sequência iremos pontuar possíveis dificuldades encontradas ao aplicar a Sequência didática a situação - didática 2, assim como, possíveis alternativas de melhoramento para uma nova aplicação, podendo auxiliar ao professor nas tomadas de macro e micro decisões.

AÇÃO E FORMULAÇÃO

- Deve-se levar em consideração que os alunos podem não aceitar entrar no milieu da situação-didática 2;

- Alunos não terem estudado ou não lembrarem dos assuntos que são pré-requisitos para aplicação dela;
- Tenha ciência que a condução da sequência será por meio das devolutivas estabelecidas do meio didático construído (a-didaticamente);
- A situação- didática 2 não está bem definida e escrita, ou seja, apresentar dados insuficientes que possibilitem a solução dela por parte dos alunos.

Alternativas de melhoramentos por partes do professor referentes aos itens citados acima, respectivamente.

- Entender o meio e refletir porque o aluno não aderiu o milieu;
- Aulas de revisão tendo como foco as principais dificuldades verificadas pelos docentes;
- Tentar interferir o mínimo possível, priorizando a observação;
- Refazer a situação-didática 2 e propor em um outro momento.

Se considerarmos que os pontos de dificuldades não tenham acontecido, podemos intuir ainda, possíveis falhas no processo de resolução por parte dos discentes, mencionarmos alguns:

- Pensar em equações cartesianas e intervalos em coordenadas retangulares para resolver o problema;
- Escolher outro eixo que não fosse os indicados por norte e sul;
- Escolher outra função que não seja a $f(r,\theta) = \frac{-r\, cos\theta}{10} + \frac{3}{2}$;
- Não aplicarem a fórmula para o cálculo de volume em coordenadas polares $V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r\, cos(\theta), r\, sen(\theta)) r dr d\theta;$
- Determinar os intervalos de integração considerando a região circular lembrando de coordenadas polares e a determinar o raio considerando o diâmetro dado, incorretamente;
- Não lembrarem das propriedades de parametrização de curva;
- Não resolverem a integral corretamente (dificuldades em: técnicas de integração, relações trigonométricas, manipulações algébricas e aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, dentre outros pré-requisitos para o cálculo de integração em coordenadas polares);
- Falha de compreensão nas devolutivas entre professor e aluno.

VALIDAÇÃO

- Problemas técnicos nos computadores;
- Domínio básico dos alunos com o GeoGebra.
- Falhas com a Plataforma GeoGebra;
- Bugs na programação da Situação-didática 2

Possibilidades de melhoramentos por partes do professor referentes aos itens citados acima, respectivamente.

- Realocar as equipes;
- Aula de apresentação da plataforma e conceitos básicos;
- Orientar aos alunos instalarem o GeoGebra para celulares;
- Verificar compatibilidade de versões da Plataforma e/ou alterações por partes dos alunos na programação interna do projeto.

INSTITUCIONALIZAÇÃO

A seguir elencamos alguns pontos podem dificultar a compreensão dos alunos em relação a solução da situação- didática 2, o professor poderá:

- Não proporcionar interpretação adequada da situação-proposta;
- Não conseguir conduzir a solução algébrica;
- Não conseguir explorar a situação problema na plataforma GeoGebra.

Cuidados que o professor pode tomar para que os discentes possam compreender a solução da situação-didática 2 e assim alcançar o objetivo Geral:

- Estudar antecipadamente o problema proposto, vindo a possibilitar a interpretação e exploração dos dados pertinentes ao problema.
- Resolver antecipadamente o problema;
- Realizar teste na plataforma, que possibilite explorar propriedades e conceitos relacionados ao problema proposto.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As metodologias de ensino para o Ensino Superior é algo em discussão na área de Educação Matemática. Uma vez que, cursos de ciências exatas necessitam de intervenções e alternativas de ensino em tópicos de CP no Ensino Superior. Disciplinas que envolvem Cálculo Diferencial e Integral, são exemplos de se pensar em metodologias que auxiliem no processo de aprendizado. Com isso, em nossa pesquisa, inicialmente pensamos em propor uma alternativa de ensino para trabalhar com o assunto CP, buscando dar suporte a alunos no ensino e aprendizagem de conceitos de forma significativa. A motivação para esse estudo, foi devido à minha formação não ter estudado os conteúdos inerentes a CP, sendo dada ênfase a interpretação geométrica, não vindo a estabelecer relação entre gráfico e função. Nesse sentido, se faz importante pesquisar e propor alternativas de ensino para áreas e disciplinas que, segundo levantamento bibliográfico, apresentam altos índices de reprovações, dificuldades e desistência. Diante do exposto, surgiu o estímulo de pensar em estratégias para tal ensino, então selecionamos alguns tópicos em CP.

Assim, para elucidar as considerações finais deste trabalho, resgatamos o problema de pesquisa que é como a Engenharia Didática e a TSD podem auxiliar na elaboração de propostas didáticas, seguindo um plano de aula e utilizando o GeoGebra para trabalhar com Coordenadas Polares, e chegamos à conclusão que o estudo demonstrou a possibilidade de relacionar essas metodologias, juntamente com o recurso tecnológico para elaboração de duas sequências de ensino, apresentadas como: Plano de Aula 1 e Plano de Aula 2, sobre comprimento de curva em coordenadas polares e volumes em coordenadas polares. Como essas teorias orientam etapas e dialéticas, tentamos adaptar um modelo de plano de aula NOVA ESCOLA, para atender a abordagem desses assuntos, utilizando a ferramenta tecnológica e aplicando as teorias na descrição.

Para descrição, necessitamos realizar levantamento bibliográfico sobre trabalhos que estavam sendo desenvolvidos nessa área e com isso nossa pesquisa utilizou como metodologia de pesquisa, a pesquisa bibliográfica, sendo realizado inicialmente uma revisão da literatura de obras já existentes, com objetivo de auxiliar na delimitação do tema e na contextualização do objeto problema. Pois a pesquisa bibliográfica é uma importante metodologia no âmbito da educação, com base em conhecimentos já estudados, auxiliando na resposta de seu problema, vindo a adquirir novos conhecimentos sobre o assunto pesquisado. Ela nos auxiliou desde o levantamento de pesquisas sobre Coordenadas Polares à análise crítica sobre a efetividade do meio proposto, para assim atingir o objetivo desse trabalho que é refletir como construtos teóricos da didática, podem contribuir para um trabalho envolvendo o GeoGebra para o ensino de Coordenadas Polares. Dessa forma, podemos perceber que atingimos o objetivo.

Para alcançar esse objetivo, propomos outros três, com intuito de conduzir o desenvolvimento da pesquisa. Inicialmente, construímos duas sequências didáticas com auxílio da TSD e da plataforma GeoGebra. Para isso, realizamos levantamento bibliográfico inerente ao ensino de CP com utilização da metodologia de ensino TSD com suporte do GeoGebra. Vale salientar que poucos foram os trabalhos encontrados voltados a falar sobre o cenário e o aprendizado desse assunto, porém sugestões para o ensino dele, encontramos algumas ferramentas. Além disso, trouxemos o referencial teórico e metodológico que desse suporte para construção, com a Engenharia Didática, TSD, GeoGebra e Modelo de Plano de Aula NOVA ESCOLA.

Tendo em vista a elaboração da sequência e condução da aplicação por parte do professor (mesmo que não aplicamos, fizemos considerações durante o texto sobre o papel das decisões que o professor deve tomar antes de propor uma atividade), trabalhar com a TSD não é uma tarefa fácil, uma vez que precisamos ser imparciais na aplicação das sequências e fazer o papel de observador, ver os erros, dúvidas, angústias dos alunos em não saber resolver as questões e o professor em não poder interferir. No entanto, precisamos entender que é fundamental esse processo, tanto dos alunos agirem a-didaticamente, quanto do professor observar.

O segundo objetivo específico, foi associar a utilização da plataforma GeoGebra na validação/resolução das sequências propostas, nesse utilizamos o GeoGebra como uma “calculadora”, com intuito de verificação e comprovação dos resultados.

No tocante às construções apresentadas nessa pesquisa, encontrei dificuldades em algumas programações do GeoGebra, por minha limitação com o programa, tentando deixar a construção mais clara e útil para os alunos. Com isso, destaco a importância de uma formação voltada a aprender utilizar ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra é fundamental para os professores e futuros professores em Matemática. Para esse trabalho, pensamos no GeoGebra como uma “calculadora” para verificação, mas podemos sugerir que se os alunos possuírem domínio da ferramenta podem pensar em eles mesmos construírem os conceitos a depender do nível da sequência proposta.

Podemos destacar, também, que para pensar em elaborar uma sequência sobre algum conteúdo, utilizando teorias e ferramentas de ensino é necessário seguir um modelo de plano de aula. Pois auxilia o professor, no roteiro e nos momentos da aula, em como será apresentado o assunto mediante o que se pretende alcançar.

E o último, foi analisar a efetividade do meio construído para as sequências didáticas, aqui descrevemos reflexões que o docente precisa fazer ao pensar e aplicar uma sequência, tendo em vista as decisões que precisam ser tomadas.

Para esse objetivo apresentamos uma reflexão sobre a sequência descrita, mencionando o que o professor precisa tomar cuidado ou refletir em cada dialética da TSD. Utilizamos a teoria de Margolinas, para situar a decisão do professor em cada momento do planejamento.

Contudo, os resultados da pesquisa que poderíamos mencionar, são referentes a elaboração dos planos de aula e minha aálise sobre todo o trabalho realizado, tentando apontar as contribuições para o meio acadêmico que pesquisa sobre esses temas nessa área de estudo. Assim, os resultados (descrição dos planos de aula e reflexão de possíveis tomadas de decisões do professor) mostram caminhos e alternativas de ensino para tópicos em CP.

De um ponto de vista geral do trabalho desenvolvido, considero que é impresindível pensar e propor sugestões de aulas sobre assunto em Matemática, uma vez que é considerada o “bicho de sete cabeças” para muita gente e tentar dismistificar essa disciplia/área é tarefa de todos nós professores de Matemática, que todos os dias se deparamos em sala de aula com esses discursos e acaba por atrapalhar nossa conduta e aproveitamento em sala. Assim, propomos uma possibilidade de apordagem de alguns tópicos em CP, que mesmo sabendo que é pouco em relação a gama de assuntos que existem nessa área, mas se apresenta como uma parcela de contribuição para o ensino de Matemática. Vale salientar que consideramos, também, utilizar recursos tecnológicos aliados com teorias de ensino para ensinar conceitos matemáticos no Ensino Superior, mostrando, assim um caminho para diminuir as dificuldades em aprender os assuntos ensinados.

Diante da construção da pesquisa percebi, também, que o professor precisa tomar decisões diariamente para elaboração e condução das aulas, tarefa que não é fácil, pois precisam estar embasadas e direcionada a sua realidade de sala de aula e formativa. Que o docente precisa refletir sobre suas aplicações em sala de aula, podendo alterar ou adaptar seu plano de aula ou até mesmo ressignificar sua prática caso necessite. Que pensar no meio didático proposto e no existente é algo decisivo para a aula. Pensar sobre quem são seus alunos, sobre os pré-requisitos que eles trazem, se o meio construído foi suficiente, são pontos a considerar.

Assim, esperamos que esse trabalho contribua para o meio acadêmico em Educação Matemática, aos professores desta e de outras áreas, que pesquisem e que refletem sobre o ensino, com objetivo de deixar sua parcela de contribuição. Com isso, pretendemos que essa pesquisa venha servir de modelo e inspiração para futuras pesquisas.

E, se tratando de futuras pesquisas, pretendemos aplicar as sequências didáticas elaboradas nessa pesquisa ou outras na mesma vertente na instituição de ensino mencionada na metodologia, com o objetivo de verificar se essas sequências obtêm resultados satisfatórios. Pensar em aplicações em outras instituições e em áreas afins que contemplem os tópicos abordados. Elaborar os planos de aulas dos demais tópicos que abordamos neste trabalho. Investir mais na teoria de Margolinas que é o Modelo dos Níveis da Atividade do Professor, podendo se aprofundar nas decisões que são tomadas pelo professor antes, durante e depois do desenvolvimento de suas aulas, vindo a refletir sobre sua prática e caso necessário, rever e ressignificar sua prática docente.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da matemática**. Paraná. Ufpr, 2007.

ALMOULOUD, S; COUTINHO C. Q. S.; Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19 / anped. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 3, n. 1, p. 62-77, 26 mar. 2008. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/314765489_Engenharia_Didatica_caracteristicas_e_seus_usos_em_trabalhos_apresentados_no_GT-19_ANPEd. Acesso em: 15 jun. 2021.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 13 dez. 2012. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22. Acesso em: 15 jun. 2021.

ALMEIDA, F. E.L. de. **O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas**: analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita. 2016. 305 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação no Ensino das Ciências e Matemática, Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco - Ufrpe, Recife, 2016. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7438. Acesso em: 10 out. 2023.

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa**. 2 ed. São Paulo: Pioneira/ Thomson, 2004.

ALVES, F. R. V. VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DE INTEGRAIS COM O USO DO GEOGEBRA: o caso das coordenadas polares. **Revista de Educação, Ciências e Matemática,** Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, p. 53-67, 2013. Disponível em: http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/2048/1109. Acesso em: 15 jun. 2021.

AMARAL, J. J. F. **Como fazer uma pesquisa bibliográfica.** Fortaleza, CE: Universidade Federal do Ceará, 2007. Disponível em: http://200.17.137.109:8081/xiscanoe/courses-1/mentoring/tutoring/Como%20fazer%20pesquisa%20bibliografica.pdf.Acesso em: 01 set. 2023

ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico: elaboração de trabalhos na graduação**. São Paulo, SP: Atlas, 2010.

ARTIGUE, M. (1988): “Ingénierie Didactique”. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico:**contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAPTISTA, Fabiana Tesine. **O Ensino de coordenadas polares através do software Geogebra.** 2017. 140 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017. Disponível em: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:BQcYeUYpNcMJ:repositorio.unica mp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/325375/1/Baptista_FabianaTesine_M.pdf+&cd=1&hl=ptBR&ct=clnk&gl=br. Acesso em: 15 jun. 2021.

BICUDO, M.A.V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **R. B. E. C. T**, Campo Grande, v. 5, n. 2, p. 15-26, ago. 2012. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185/840. Acesso em: 16 jun. 2021.

BICUDO, M.A.V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **REVEMAT**. eISSN 1981-1322. Florianópolis (SC), v. 9, Ed. Temática (junho), p. 07-20, 2014. http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9nespp7.

BOCCATO, V. R. C. Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação. **Rev. Odontol. Univ**. Cidade São Paulo, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 265-274, 2006.Disponível em: https://arquivos.cruzeirodosuleducacional.edu.br/principal/old/revista_odontologia/pdf/setembro_dezembro_2006/metodologia_pesquisa_bibliografica.pdf Acesso em: 10 out. 2023

BORBA, M.C; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. (3a ed.). Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). **Didática da Matemática**: Reflexões Psicológicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b. Cap.4.p. 48-72.

BROUSSEAU, G. **Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques**, 1998. Disponível em: http://guy-brousseau.com/wpcontent/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf. Acesso em: 06 jul. 2021.

CARDOSO, Tulio Sousa. **Curvas Paramétricas**: compreensão do movimento na perspectiva da geometria dinâmica. 2020. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática Aplicada e Computacional, Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas - Sp, 2020. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/pos-graduacao/curvas-parametricas-compreensao-movimento-na-perspectiva-geometria-dinamica. Acesso em: 20 maio 2022.

CHAGAS, E. M. P. de F. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: PROBLEMÁTICAS E POSSÍVEIS SOLUÇÕES. **Educação, Ciência e Tecnologia**, São Paulo, p.240-248, 2002.

COMETTI, M. A. **DISCUTINDO O ENSINO DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS NO CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS:** contribuições do geogebra 3d para a aprendizagem. 2018. 193 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2018. Disponível em: http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/10011. Acesso em: 16 jun. 2021.

CUNHA, L. G. A. **Estudo do comportamento de funções por meio da análise de suas derivadas, utilizando objeto de aprendizagem em ambientes educacionais informatizados**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

DENZI, Norman. K; LINCOLN, Yvonna. S.; e Colaboradores. O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

FORNARI, A; CARGNIN, C; GASPARIN, P.P; ARAÚJO, E. C. **Ciênc. educ**. Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica e Álgebra Linear na educação a distância. vol.23. n.2. Bauru, 2017.Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132017000200475&lng=pt&tlng=pt. Acesso em: 22 jun. 2021

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo, SP: Atlas, 2002.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro, RJ: Record, 2004.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 2011.

HELLMANN, L. *et al*. Geogebra no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I. **R. Eletr. Cient. Inov. Tecnol.**, Medianeira, v. 2, n. 14, p. 31-49, 2016. Semestral. Disponível em: https://revistas.utfpr.edu.br/recit/article/view/4313/Helmann. Acesso em: 05 nov. 2023.

IFCE. **Projeto Pedagógico do Curso** Licenciatura em Matemática. Cedro, 2012. Disponível em: https://ifce.edu.br/cedro/campus_cedro/cursos/superiores/licenciatura/matematica/pdf/ppc-matematica. Acesso em: 16 jun. 2021.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D.Sobre a Pesquisa Qualitativa na Modelagem Matemática em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 883-905, ago. 2012. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291226275007.pdf. Acesso em: 16 jun. 2021.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica.** São Paulo, SP: Atlas 2003.

LIMA, M. V. M.de. **CATEGORIAS INTUITIVAS NO ENSINO DO CÁLCULO E A VISUALIZAÇÃO DE CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA:** O CASO DAS INTEGRAIS

DEPENDENTES DE PARÂMETROS – IDPs. 2017. 156 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2017.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Rev. Katál.**,Florianópolis, v. 10 n. esp., p.37-45, 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rk/a/HSF5Ns7dkTNjQVpRyvhc8RR/ .Acesso em: 20 out.2023.

MACEDO, N. D. **Iniciação à pesquisa bibliográfica:** guia do estudante para a fundamentação do trabalho de pesquisa. São Paulo, SP: Edições Loyola,1994.

MARGOLINAS, C. Situations, milieux, connaissances: analyse de l'activité du professeur. In Dorier, J.-L. et al. (Eds.), **Actes de la 11 École d'Été de Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, p.141-156, 2002.

MARGOLINAS, C. La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In: SIMMT, E.; DAVIS, B. (Org.). **Actes 2004 de la rencontre annuelle du groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques.** Edmonton: CMESG/GCEDM, p.1-21, 2005.

MEIER, W. M. B. **CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**. 2022. 195 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pósgraduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – Ppgecem, Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, Cascavel, 2022. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/5989. Acesso em: 20 out. 2023.

MELO, J. D. A. ; SILVA, A. S. A. **UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA O ESTUDO DE PROBABILIDADE: O JOGO DOS DISCOS.** 2017. Disponível em: <https://even3.azureedge.net/anais/48391.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2019.

OLIVEIRA, R. A. de; GONÇALVES, W. V.; PIASSON, D. O uso do Geogebra para o ensino de cálculo diferencial e integral, um mapeamento de suas publicações. **Revista Thema**, [S.L.], v. 15, n. 2, p. 466-484, 20 maio 2018. Instituto Federal de Educacao, Ciencia e Tecnologia Sul-Rio-Grandense. http://dx.doi.org/10.15536/thema.15.2018.466-484.892. Disponível em: https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/892/817. Acesso em: 10 nov. 2023.

PAIS, Luiz Carlos. **Obstáculos epistemológicos e didáticos**. In: Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. 3. Ed. 1. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIVA, Ana Carla Pimentel. **ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE O ESTUDO E ENSINO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL**: descrição de situações didáticas com a utilização do software geogebra. 2019. 174 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Fortaleza, 2019. Disponível em: https://mestrado.ifce.edu.br/cursos-de-pos-graduacao/pgecm/producao-e-publicacoes/dissertacoes/. Acesso em: 20 maio 2022.

PARANHOS, Marcos de Miranda. **Parametrização e Movimentação de Curvas e Superfícies para uso em Modelação Matemática**. 2015. 154 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11029. Acesso em: 20 maio 2022.

PEREIRA, G. M. R.; SOUZA JUNIOR, A. J. de. TECNOLOGIAS DIGITAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA: um mapeamento de dissertações e teses brasileiras no ensino de cálculo diferencial e integral no ensino superior. **Rencima**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 160-175, 2019. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2325/1120. Acesso em: 15 jun. 2021

POMMER, W.M.Brousseau e a ideia de Situações Didática. In: SEMASEMINÁRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA/FEUSP, 2008, **Seminário.** 2008. Disponível em: <www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 10 fev.2019

PRIMO, M. E. **O Princípio de Cavalieri para Cálculo de Volumes no Ensino Médio: algumas possibilidades**. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ufjf, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/1479/1/marcioeduardoprimo.pdf. Acesso em: 25 jun. 2021.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013.

REVISTA NOVA ESCOLA. **Planos de aula e atividades de Matemática.** Disponível em:https://novaescola.org.br/planos-de-aula/matematica. Acesso em: 22 mar. 2022.

ROTEIRO, Z. F. J. **GeoGebra 3D Uma Abordagem para Timor-Leste**. 2016. 117 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática Para Professores, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Universidade do Porto, Porto, 2016. Disponível em: https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/82457/2/38021.pdf. Acesso em: 17 jun. 2021.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico.** São Paulo, SP: Cortez, 2007.

SILVA, C.R. da. **ARTICULAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES CARTESIANA, PARAMÉTRICA E POLAR DE RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS, NA TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO, E DO ENSINO SUPERIOR**. 2015. 332 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Coordenadoria de Pós- Graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/3472. Acesso em: 20 jun. 2021.

SOUSA, A. S. de; OLIVEIRA, G.S. de; ALVES, L. H. A PESQUISA BIBLIOGRÁFICA: princípios e fundamentos. **Cadernos da Fucamp**, Monte Carmelo, v. 20, n. 43, p. 64-83, 2021. Quadriênio. Disponível em:

https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336. Acesso em: 20 out. 2023.

Stewart, James. **Cálculo, volume 1/ James Stewart ; tradução EZ2 Translate**. 7 ed. -- São Paulo : Cengage Learning, 2013.

Stewart, James. **Cálculo, volume 2 / James Stewart ; tradução EZ2 Translate**. 7 ed. -- São Paulo : Cengage Learning, 2013.

ANEXO A - MODELO DE PLANO DE AULA NOVA ESCOLA

PLANO DE AULA: COLOCAR AQUI O TÍTULO DA AULA

Descrição do plano

Autora: Mentor: Habilidade da BNCC: Objetivos específicos:
Conceito-chave Recursos necessários

Objetivos de aprendizagem

-

Resumo da Aula

Quadro 5 - Quadro Resumo 3

Atividades	**Objetivo Principal**	**Ação Principal**	**Tempo Sugerido**
Objetivos			
Retomada			
Atividade Principal			
Discussões das soluções			
Encerramento			
Raio X			

Fonte: Elaborado pelos autores, adaptado de Modelo de Plano de Aula NOVA ESCOLA, 2023.