



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A ATIVIDADE ALGÉBRICA E O SIGNIFICADO DA IGUALDADE ATRAVÉS DA  
EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS E O TECER DE UMA  
INVESTIGAÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL

Raimunda Thaiz Mendes Silva

Campina Grande

2023

Raimunda Thaiz Mendes Silva

A ATIVIDADE ALGÉBRICA E O SIGNIFICADO DA IGUALDADE ATRAVÉS DA  
EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS E O TECER DE UMA  
INVESTIGAÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Mestrado Profissional da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, área de concentração em Educação Matemática, na linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor em Ensino de Ciências e Educação matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

Campina Grande

2023

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586a Silva, Raimunda Thais Mendes.  
A atividade algébrica e o significado da igualdade através da exploração e proposição de problemas e o tecer de uma investigação na formação inicial [manuscrito] / Raimunda Thais Mendes Silva. - 2023.  
98 p. : il. colorido.  
  
Digitado.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.  
"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática - CCT. "  
1. Educação algébrica. 2. Ensino de Matemática. 3. Problemas matemáticos. 4. Ensino-aprendizagem. I. Título  
21. ed. CDD 512

Raimunda Thaiz Mendes Silva

A ATIVIDADE ALGÉBRICA E O SIGNIFICADO DA IGUALDADE ATRAVÉS DA  
EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS E O TECER DE UMA  
INVESTIGAÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Mestrado Profissional da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, área de concentração em Educação Matemática, na linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor em Ensino de Ciências e Educação matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Data: 01/03/2023.

*Silvanio de Andrade*

Orientador

Professor Dr<sup>o</sup> Silvanio de Andrade - UEPB

*Rogéria Gaudencio do Rêgo*

Examinadora

Professora Dr<sup>a</sup> Rogéria Gaudencio do Rêgo - UEPB

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** FLAVIA SUELI FABIANI MARCATTO  
Data: 08/08/2023 11:44:45-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Examinadora

Professora Dr<sup>a</sup> Flavia Sueli Fabiani Marcatto - UNIFEI

*Raimunda Thaiz Mendes Silva*

Assinatura da Aluna

Raimunda Thaiz Mendes Silva

Campina Grande  
2023

Dedico este trabalho a minha mãe, Marly, por me incentivar na caminhada estudantil desde criança, e me apoiar mostrando que a educação tem o poder de melhorar a nossa realidade.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, meu guia. Tenho fé em Deus, e na sua criação. Obrigada, por me tornar forte para a realização de tudo o que foi possível, iluminada pela tua palavra sigo a cada momento de glorificar as tuas maravilhas em mim.

Gratidão ao meu orientador, Silvanio de Andrade (UEPB), que com sua humanidade e dedicação, orquestrou esta pesquisa, bem como saberes complementares durante a ornada das disciplinas do curso de mestrado, estágio e incentivo a participação ativa nos eventos da área. Estou feliz e contemplada, em ter essa vivenciado esta etapa sendo guiada pelas suas orientações.

Professoras, Rogéria Gaudêncio do Rêgo (UEPB) e Flavia Sueli Fabiani Marcatto (UNIFEI), agradeço por terem participado das bancas de qualificação e examinadora. Foi um processo de muita alegria, interagir com vocês na caminhada desta pesquisa, as contribuições de duas pesquisadoras contemporâneas e referencias na área, fortaleceram o trabalho.

Aos colegas da turma do mestrado do PPGECEM-UEPB, e do Grupo de Pesquisa GEPEP, que participaram ao longo do desenvolvimento do projeto, trazendo incentivo e reflexões sobre a área de pesquisa. Obrigada pelo companheirismo.

Aos pesquisadores da Educação Matemática e da Educação Algébrica que foram referências, através de seus textos.

A todos aqueles que contribuíram da minha caminhada na educação desde a educação Básica até a academia. Concluir uma pesquisa de mestrado me traz na memória cada um de vocês, peças fundamentais para o meu desenvolvimento.

Gratidão, me leva a crer que a glória está em todo o percurso, o aprendizado não tem intervalo.

“A álgebra é muito generosa. Ela sempre nos diz mais do que pedimos”.  
(D'Alembert)

“Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito”. (Fenelon)

SILVA, Raimunda Thaiz Mendes. **A Atividade Algébrica e o Significado da Igualdade Através da Exploração e Proposição de Problemas e o Tecer de uma Investigação na Formação Inicial**. 2023, 98 p. Dissertação (mestrado profissional em ensino de Ciências e Educação matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2023.

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo investigar, com olhar da Educação Algébrica, qual a compreensão que futuros professores de matemática têm do sinal de igualdade. O estudo da literatura foi realizado diante de uma investigação da Educação Algébrica, de modo a observar como vêm se desenvolvendo as pesquisas sobre ensino- aprendizagem através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. A literatura das pesquisas instigou a realização de aulas com Atividades Algébricas através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, para a compreensão do significado da Igualdade. O intuito foi sanar inquietações na nossa trajetória e contribuir para a formação da Licenciatura em Matemática na área da Educação Algébrica. A pesquisa, em suas atividades práticas, na produção e análise dos dados, é caracterizada como qualitativa. A investigação foi desenvolvida em uma turma da licenciatura em matemática, na disciplina de Laboratório de Álgebra, de um campus de uma universidade estadual. As aulas aconteceram por meio do ensino remoto, mediado pelo uso de tecnologia síncrona, via web conferência, no contexto de isolamento social tendo em vista a pandemia da Covid-19 no Brasil. Os dados foram produzidos durante as aulas da disciplina através de gravação da tela da web conferência, através dos registros da pesquisadora e dos participantes, em cadernos e chat de mensagens. Para a produção dos dados, realizamos aulas com o seguinte questionamento: “como a Exploração e a Proposição de Problemas Multicontextuais contribuem para a compreensão do sinal de igualdade por futuros professores de matemática na atividade algébrica?”. Essa questão aflorou o desejo pela busca de evidências e, durante a análise dos resultados, pudemos apresentar e discutir sobre a vivência desta experiência pelos licenciandos. Como resultados, destacou-se a compreensão do significado da igualdade durante o processo, evidenciada através da apresentação das ideias durante o trabalho com os problemas, e por meio da participação e engajamento no fazer matemático. Dessa forma, ao tratar da igualdade dentro da Atividade Algébrica, percebeu-se que os licenciandos se apresentaram receptivos e contribuíram com as etapas do processo da pesquisa, realizando suas reflexões e sínteses, bem como demonstrando tal compreensão durante a exploração. A Proposição de problemas se mostrou como uma prática nova para os licenciandos, porém desafiadora e instigante diante do fazer matemático tendo em vista o processo de ensino-aprendizagem, construindo uma postura para fazer matemática no ambiente da formação inicial. Nesse sentido, os resultados se direcionam para a contribuição na construção da compreensão através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas com o tecer dos fios da Educação Algébrica dentro da Formação Inicial, formando um tecido matemático sustentável nesta pesquisa.

**Palavras-Chave:** Educação Algébrica; Igualdade; Exploração, Resolução e Proposição de Problemas; Formação Inicial.

SILVA, Raimunda Thais Mendes. **A Atividade Algébrica e o Significado da Igualdade Através da Exploração e Proposição de Problemas e o Tecer de uma Investigação na Formação Inicial**. 2023, 98 p. Dissertação (mestrado profissional em ensino de Ciências e Educação matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2023.

## ABSTRACT

The present work aims to investigate, with a critical eye, what is the understanding that future mathematics teachers have of the equality sign. The study of the literature was carried out in front of an investigation of Algebraic Education, in order to observe how the research on teaching-learning through Exploration, Solving and Posing of Problems has been developed. The literature of the researches instigated the realization of classes with Algebraic Activities through Exploration, Solving and Posing of Problems, to understand the meaning of Equality. The intention was to solve questions in our trajectory and to contribute to the formation of undergraduate students in the area of Algebraic Education. The research, in its practical activities, in the production and analysis of data, is characterized as qualitative. The research was developed in a mathematics undergraduate class, in the subject Algebra Laboratory, in a campus of the state university. The classes took place through remote teaching, mediated by the use of synchronous technology, via web conference, in the context of social isolation in view of the Covid-19 pandemic in Brazil. The data were produced during the course classes through screen recordings of the web conference, through the researcher's and the participants' records in notebooks, and through chat messages. To produce the data, we conducted classes with the following question: "how do Multicontextual Problem Exploration and Posing contribute to the understanding of the equality sign by future mathematics teachers in algebraic activity?". This question aroused the desire to search for evidence and, during the analysis of the results, we could present and discuss the experience of this experimentation by the undergraduates. As results, the understanding of the meaning of equality during the process stood out, evidenced by the presentation of ideas during the work with the problems, and by the participation and engagement in doing mathematics. Thus, when dealing with equality within the Algebraic Activity, it was noticed that the undergraduates were receptive and contributed to the stages of the research process, making their reflections and syntheses, as well as demonstrating such understanding during the exploration. The problem posing proved to be a new practice for the undergraduates, but challenging and instigating when facing the mathematical process in view of the teaching-learning process, building an attitude to do mathematics in the initial training environment. In this sense, the results are directed to the conclusion that there was a contribution of understanding through Exploration, Solving and Posing of Problems with the weaving of the threads of Algebraic Education within the Initial Training, forming a sustainable mathematical fabric in this research.

**Keywords:** Algebraic education; Equality; Exploration, Solving and Posing of problems; Initial formation.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Tessitura.....	22
<b>Figura 2</b> – Registro do caderno de L 2.....	71
<b>Figura 3</b> - Registro da solução de L 5.....	73
<b>Figura 4</b> - Registro da solução de L 9.....	74
<b>Figura 5</b> - Tela da apresentação.....	81

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> - Dissertações correlatas do GEPEP.....	35
<b>Quadro 2</b> - Plano de atividades. ....	40
<b>Quadro 3</b> - Pontos para a análise dos dados. ....	46
<b>Quadro 4</b> - Quadro de Expressões.....	48
<b>Quadro 5</b> - Síntese das ideias. ....	49
<b>Quadro 6</b> - Síntese das respostas. ....	49
<b>Quadro 7</b> - Registro das proposições. ....	54
<b>Quadro 8</b> - Questionário on-line. ....	56

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	11
2 A ATIVIDADE ALGÉBRICA E O SIGNIFICADO DA IGUALDADE .....	17
2.1 Tessitura na pesquisa em Educação Algébrica .....	19
2.2 A Atividade Algébrica e a Igualdade .....	22
3 EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS MULTICONTEXTUAIS .....	29
3.1 Um caminhar pela Exploração e a Proposição de Problemas Multicontextuais ..	29
3.2 Pesquisas internacionais .....	32
3.3 Pesquisas do grupo GEPEP .....	34
4 ROTEIRO DE DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA .....	38
4.1 Metodologia de pesquisa .....	38
4.2 Caracterização dos fenômenos: ambiente e participantes .....	42
5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS .....	45
5.1 Os encontros de pesquisa: laboração das discussões .....	45
5.2 A Igualdade .....	46
5.3 O Problema de Laura .....	58
5.4 Regularidades com números .....	67
5.5 O Reflorestamento .....	76
5.6 Seminário de formação .....	80
6 PESQUISA SÍNCRONA MEDIADA POR TECNOLOGIA EM CONTEXTO DE ISOLAMENTO SOCIAL (PANDEMIA COVID 19).....	84
6.1 As possibilidades de divulgação da pesquisa e as contribuições dessas experiências.....	85
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	89
REFERÊNCIAS .....	93
ANEXO A- MATRIZ DA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE ALGÉBRA .....	96

## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos as discussões desta pesquisa intitulada “*A Atividade Algébrica e o Significado da Igualdade Através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas e o tecer de uma investigação na Formação Inicial*”, desenvolvida na área da Educação Matemática, em Educação Algébrica, a partir do direcionamento com investigação sobre o significado da Igualdade através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. O amparo no debate da área é favorecido pelo movimento da Educação Matemática no Brasil, por meio de eventos, publicações, universidades e entidades educacionais nacionais e internacionais.

As discussões são acentuadas através da apropriação em torno de pesquisas em Educação Matemática e suas implicações para o contexto da formação inicial de professores de matemática. Nas leituras referentes às pesquisas, a reflexão se dá sinalizando as contribuições na formação inicial do futuro professor de matemática.

Esta é uma pesquisa que foi desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECM- UEPB), e aprofundada através das discussões no Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP), com a leitura e debate das pesquisas já realizadas pelo grupo.

As leituras surgem a partir do interesse e das inquietações a respeito do ensino e da aprendizagem de Álgebra, emergentes durante nossas experiências de monitoria na universidade, ainda enquanto licencianda, e, posteriormente, na docência na educação básica e na supervisão de licenciandos de matemática através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

A convivência com o grupo de licenciandos bolsistas do PIBID aflorou a inquietação que antes era uma preocupação de formação individual acerca dos problemas matemáticos e da Educação Algébrica. O despertar nos encaminhou para a busca da problematização em aportes da área, tendo em vista o processo de formação inicial para o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

No desabrochar das inquietações, surge a possibilidade de contribuir, investigando na prática os elementos que possam permitir um avanço no debate na Educação Algébrica. O início era com uma busca pela Atividade Algébrica e a

compreensão da Álgebra e seus temas, levando ao ponto do significado da Igualdade para o desenvolvimento da área.

A Igualdade está presente na matemática tanto para o seu domínio de manipulação Algébrica quanto na solução de expressões, em que, por vezes, percebe-se uma preocupação apenas com a utilização do código linguístico ou com o domínio da leitura e da escrita matemática.

Desse modo, especialmente nas Atividades Algébricas, em que as incógnitas, variáveis, símbolos e linguagem matemática são evidentes, a Igualdade precisa ser compreendida, para evidenciar a busca por uma reflexão sobre as atividades trabalhadas, com uma exploração bem estruturada.

No tema de conteúdo matemático e nesta compreensão quanto à construção do significado da Igualdade, se estruturou a proposta de se desenvolver um trabalho com a Atividade Algébrica através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

Para a investigação de pesquisas na área, a base foram os referenciais bibliográficos refletidos e direcionados a licenciandos e educadores matemáticos, de modo a apresentar uma análise de como a Resolução de Problemas contribui para a Educação Algébrica e auxilia no processo de ensino e aprendizagem de temas do currículo no eixo da Álgebra escolar.

Por intermédio dos estudos e pesquisas provenientes do campo de estudo da Educação Matemática, indo além com a Exploração de Problemas, como prática para uma correlação da matemática com o problema e seus conceitos teóricos, com questões que surgem a partir do debate em pontos do contexto, refletindo em uma visão para a melhor compreensão de conceitos matemáticos e maior interação entre o ensino e a aprendizagem.

A Proposição de Problemas possibilita ao participante apresentar suas próprias questões, nas quais ele propõe um problema que pode surgir a partir de ponto de inspiração, ou mediado, que pode ser, por exemplo, uma tabela, um pequeno texto, um gráfico, ou mediante um cálculo numérico, outro problema, uma palavra ou um tema aplicando tópicos da matemática. Assim, a Proposição de Problemas possibilita uma autonomia neste processo.

A construção e a formulação do conceito matemático podem ser registradas pelo participante ao longo da atividade, a partir de instrumentos, como, por exemplo, no caderno, em diário de campo ou mapa conceitual.

O estudo deste tema através de Problemas nos trouxe a ideia de que a compreensão da leitura e da escrita matemática trazem consequências para os diferentes grupos sociais, culturais, políticos e econômicos, nos quais o sujeito é, inicialmente, desafiado no ambiente escolar, e depois para os demais espaços em que o cidadão esteja inserido na sociedade.

É importante considerar que o raciocínio, desenvolvido por meio de conteúdos matemáticos nas aulas, é aplicado na prática em sociedade, e essa apropriação promove seu fazer cidadão coletivo, indo em direção à compreensão dessa ciência, levando em consideração também o seu fazer cidadão crítico nas questões individuais, familiares e coletivas, sendo, portanto, uma relação interligada, que surge como necessidade escolar e de vida em comunidade.

É neste cenário de busca e por meio das leituras que evidenciamos a justificativa da proposta do tema e a metodologia de trabalhar Atividades Algébricas na problemática da pesquisa e suas contribuições na Educação Algébrica, com um olhar crítico à construção da Igualdade através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas Multicontextuais na Formação Inicial do Professor de Matemática.

Os participantes da pesquisa são graduandos do curso de Licenciatura em Matemática, escolhidos diante das justificativas dos estudos da literatura do tema e das perspectivas de pesquisadores, ao realizar pesquisas no ambiente de formação inicial do professor, possibilitando uma contribuição ainda neste contexto, e considerando a importância de discutir o ensino e a aprendizagem da Álgebra de forma científica e pedagógica. O desenvolvimento da parte prática foi nas aulas da disciplina Laboratório de Álgebra.

Os estudos levam a formulação e descrição do problema a ser investigado a partir da seguinte pergunta:

*Como a Exploração e a Proposição de Problemas Multicontextuais contribuem para a compreensão do sinal de igualdade por futuros professores de matemática na atividade algébrica?*

Para responder a esta indagação, o objetivo desta pesquisa é:

*Investigar, com olhar crítico, qual a compreensão que os futuros professores de matemática dão para o sinal de igualdade através da Exploração e Proposição de Problemas.*

Como objetivos específicos, buscamos:

(i) *Desenvolver o olhar dos licenciandos, utilizando a Atividade Algébrica, através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, para a compreensão do significado da Igualdade.*

(ii) *Pesquisar e Contribuir para a formação dos licenciandos na área da Educação Algébrica, durante as aulas da disciplina Laboratório de Álgebra.*

A intencionalidade da pesquisa foi propor aos licenciandos a experiência com a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, durante o desenvolvimento de aulas com a Atividade Algébrica Global para a compreensão e construção da Igualdade. Esta prática foi considerada importante no decorrer da investigação da questão norteadora na Educação Algébrica.

A perspectiva da análise dos dados é de natureza qualitativa e descritiva, diante das contribuições de Bogdan e Biklen (1994), acontecendo a partir da participação dos sujeitos nas aulas.

A escolha qualitativa se deu por considerar uma abordagem de análise e compreensão, através da reflexão com significado e tendo em vista a preocupação desta ocorrer durante todo o processo.

Assim, no decorrer da investigação, acontece o aprofundamento de uma atenção voltada a como está ocorrendo o processo. A descrição qualitativa das situações, serviu pra colher fragmentos minuciosos dos resultados, e estes foram analisados dentro da contribuição para as considerações sobre a problemática da pesquisa.

A análise descritiva reforça o planejamento do conhecimento pedagógico do professor ainda em formação para a docência. Na educação básica, destacamos que este conhecimento é colocado em exercício, quando o professor planeja para o engajamento dos alunos com o tema, de modo que a experiência em formação fortalece uma construção pedagógica estruturada.

A contribuição deste trabalho é na perspectiva de desenvolver uma pesquisa de Educação Algébrica com o enfoque na Exploração, Resolução e Proposição de Problemas Multicontextuais (Andrade, 2017). No contexto da proposta, um problema pode ser entendido “um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que podem gerar três movimentos”, ANDRADE (2017, p. 364).

Para esta pesquisa, consideramos os dois últimos, em que:

b) o aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo, em que o problema desperta o interesse, mediado por outro sujeito ou por si mesmo. Para esta mediação, se considera o planejamento com foco nos problemas, nos objetivos, e na formulação de questões aos participantes.

c) Introduce-se e/ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo, em que é necessária a disposição e esforço do participante durante o processo, sem ponto final, com engajamento no percurso cada vez mais a frente, com um movimento aberto, não-fechado.

Vale ressaltar que a abordagem de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas Multicontextuais vem se ampliando em pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP, orientados por Andrade (2017).

A Exploração dos problemas e a reflexão da situação abordada permitem que os participantes avaliem as ações que estão acontecendo e a possibilidade de refletir sobre a solução, descrevam a nova solução e a reavaliem, considerando as diferentes maneiras representativas.

O participante observa, ao final da sua resolução, as respostas dos colegas, como uma espécie de comentários sobre o trabalho, registrando seu comentário e refletindo e apresentando em grupo coletivamente, com a exploração em grupo mediada pelo professor.

Esta dissertação está estruturada em sete capítulos: o primeiro capítulo é dedicado à *Introdução*, apresentando, de forma geral, a motivação e o problema desta pesquisa e seus objetivos.

O capítulo 2, intitulado *A Atividade Algébrica e o Significado da Igualdade*, tem como objetivo apresentar a Educação Algébrica na formação do professor de matemática, expondo uma tecitura entre as pesquisas da Educação Algébrica, objeto de investigação desta pesquisa, a Atividade Algébrica e a Igualdade. Os principais

aportes teóricos para este capítulo são Kieran (1996; 2004) e Ponte, Branco e Matos (2009).

O capítulo 3, denominado *Exploração e Proposição de Problemas Multicontextuais*, tem como objetivo situar o ensino e a aprendizagem da matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas Multicontextuais, abordando as pesquisas internacionais e as pesquisas do grupo GEPEP. Os principais teóricos para este capítulo são Andrade (1998; 2017) e Onuchic (2014).

No capítulo 4, intitulado *O desenvolvimento da pesquisa*, será apresentado o contexto da pesquisa, a caracterização e o planejamento para a produção dos dados. O cenário de desenvolvimento de pesquisa é no formato síncrono, mediada por tecnologia em contexto de pandemia e isolamento social no Brasil.

No capítulo 5, designado *Descrição e análise dos dados*, apresentamos os encontros de pesquisa, os resultados e análise, com descrição de cada etapa, interpretando os dados produzidos à luz dos referenciais teóricos.

No capítulo 6, chamado *Pesquisa síncrona mediada por tecnologia em contexto de isolamento social (Pandemia Covid-19)*, são apresentados os desafios da aplicação da pesquisa e as possibilidades de divulgação da pesquisa, durante o seu desenvolvimento e as contribuições dessas experiências.

Concluí o texto com o capítulo de *Considerações finais* deste trabalho, descrevendo a conclusão sobre a questão da pesquisa, as contribuições, as possibilidades e as limitações, bem com as perspectivas de continuidade do estudo.

## 2 A ATIVIDADE ALGÉBRICA E O SIGNIFICADO DA IGUALDADE

Neste capítulo, trazemos a abordagem da Atividade Algébrica e da Igualdade, com a discussão dessa construção para a Educação Algébrica, observando como estas convergem entre os referenciais teóricos e a pesquisa na prática da Educação Matemática.

O entendimento do desenvolvimento histórico pode auxiliar os educadores matemáticos, professores em formação e em atuação, no que tange à percepção quanto à complexidade desse campo, buscando, assim, na prática docente, desenvolver atividades da educação algébrica que priorizem o entendimento e a construção da compreensão da álgebra, para uma aprendizagem com significado no fazer matemático.

Segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a respeito do histórico da álgebra no campo educacional, até 1960, o ensino prevaleceu com o caráter reprodutivo, sem clareza, e a matemática era dividida em compartimentos sequenciais, iniciando com a aritmética, a álgebra e, depois, a geometria, em que álgebra se apresentava mais instrumental e de resolução de procedimentos.

O Movimento da Matemática Moderna, a partir da década de 1960, teve como um dos principais propósitos unificar estes compartimentos, integralizando-os. E, assim, a álgebra, que já se destacava nos avanços desta ciência nos dois últimos séculos, se torna abrangente com uma caracterização mais abstrata e procedimental, o que retarda as generalizações dentro do processo, em que o aluno é levado a construir a matemática com compreensão resolvendo problemas e formulando a álgebra dentro de contextos e entendimentos.

Com este movimento, também foi repensado o ensino da álgebra e a pesquisa na formação de professores da educação básica. Questões relacionadas aos desafios em se inovar no espaço de formação inicial vêm sendo supridas diante de um ponto positivo em se pesquisar neste ambiente, tendo em vista a contribuição para o planejamento do estágio supervisionado, em que o licenciando tem o seu contato direto com os estudantes da educação básica.

Isso é discutido por Ribeiro e Ponte (2020), em que os pesquisadores trazem um modelo que orienta como compreender uma oportunidade de aprendizagem para

os licenciandos, em sua futura atuação docente para o ensino e aprendizagem da álgebra. Através de experimentação durante a formação.

Estes autores defendem que durante esse tipo de experiência, os licenciandos superam a solidão diante de uma rotina acadêmica intensa, através da experimentação em grupos, com práticas que vão desde as realizadas em disciplinas, projetos de extensão, pesquisas acadêmicas ou estágio docente, se aproximando da futura prática docente, observando os desafios e buscando, em sua formação, o esforço para traçar planejamentos que facilitem o ensino e a aprendizagem da álgebra. Uma experiência vivenciada na formação pode ser levada à prática ainda durante a formação, seja em projetos de iniciação à docência ou no estágio supervisionado.

Em apontamentos na álgebra, surge a Educação Algébrica quando perguntamos sobre como acontece a aprendizagem da álgebra: o que é Educação Algébrica? Precisamos refletir sobre o que é Álgebra?

Para tal discussão, colocamos em evidência Kieran (2004), que trouxe, em sua pesquisa, apontamentos voltados à álgebra como uma matéria da escola, uma aritmética generalizada, uma ferramenta da matemática, um modo de pensamento, uma linguagem, cultura, uma atividade. Estas concepções influenciam no ensino da álgebra, gerando a educação algébrica, que deve ser construída na formação inicial para ir desde os anos iniciais da educação básica, perpassando pelo social e pela formação acadêmica, como um ciclo necessário ao seu desenvolvimento.

Em sua obra, Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 43) defendem a ideia de que o conteúdo algébrico avança a partir do seu movimento lógico e histórico: “defendemos a ideia de que a educação algébrica deve se contrapor à ideia de que o ensino de álgebra deve se pautar tão somente no ensinar o formalismo dos conceitos algébricos e na aplicação de tais conceitos na realidade objetiva”.

O estudo desse movimento possibilita aos educadores buscarem orientações para o favorecimento de atividades de compreensão.

Os apontamentos de Freitas (2015) trazem questionamentos e reflexões sobre a Álgebra e a Educação Algébrica, alertando para o fato de que, atualmente, as pesquisas estão relacionadas às relações matemáticas abstratas, assinalando que a visão que permeia as pesquisas e as práticas pedagógicas é a concepção limitada de uma Álgebra das equações e das expressões.

Uma visão que desvaloriza o trabalho com os problemas, e as relações estruturais, com uma visão letrista e simbólica muito limitada, ou como um instrumento técnico para a resolução de problemas, apontando, assim, para um transformismo técnico, a fim de depois aplicar nas situações concretas, de modo a destacar o lugar do jogo de símbolos algébricos como um fator de fracasso do Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

As pesquisas em Educação Algébrica vêm sendo desenvolvidas norteadas em buscar quais são os principais desafios que ainda precisam ser enfrentados, diante do enfoque para as letras, objetos desconhecidos, números generalizados em variáveis e incógnita, quanto à ruptura da pré-álgebra para as compreensões dos significados, como, por exemplo, o significado da Igualdade (KIERAN, 1981).

Nessa direção, como principais desafios surgem as abordagens históricas, generalizações, modelagem e resolução de problemas. Destacamos, no que diz respeito a estas abordagens e suas contribuições, a provocação de cada uma delas, as dificuldades dos professores em utilizar resultados de pesquisas em sala de aula e as lacunas na formação inicial.

## **2.1 Tessitura na pesquisa em Educação Algébrica**

Organizamos essa tessitura entre as pesquisas em Educação Algébrica com o pensamento de situar a pesquisa e mobilizar nosso objeto de estudo dentro da área. Apresentamos uma reunião dos fios estruturantes em questões que se entrelaçam no pesquisar e nas suas extensões, formando um arranjo.

*No primeiro fio, indagamos: quais os sujeitos e objetos da pesquisa em Educação Algébrica?*

A partir de Kieran (2014), é evidenciado que o ensino e as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da álgebra escolar se davam, geralmente, em torno de alunos do ensino médio, e nos conteúdos de polinômios, expressões racionais, expressões algébricas com variáveis e incógnitas.

A resolução de equações lineares e quadráticas era feita no ponto de vista mais simbólico, científico, nas equações, na resolução e manipulação. Tais aspectos refletem na álgebra escolar, principalmente, a partir dos currículos escolares.

Com isso, poucas pesquisas na área se concentram na dificuldade dos alunos em resolver os vários tipos de equações, seus erros, práticas e aplicação de algoritmos na resolução de equações, na vista simbólica de cognição e manipulação.

Questões sobre a resolução de equações lineares e quadráticas, com abordagem mais simbólica e científica das equações, priorizam a resolução e manipulação com pouco desenvolvimento do raciocínio algébrico. Estes aspectos contribuem para uma álgebra escolar distante da Educação Algébrica.

*No segundo fio, refletirmos sobre a seguinte questão: quais as dificuldades evidenciadas na Educação Algébrica?*

As leituras em Kieran (1996; 2004; 2014) de pesquisas voltadas para a álgebra escolar evidenciam que os alunos precisam de tempo para a questão da transição de aprendizagem da Aritmética para a Álgebra, para melhorar o desempenho do pensamento algébrico, além de somente usar padrões e manipular expressões, operações e variáveis.

O panorama destas pesquisas traz como resultados que os alunos aprendem memorizando regras para a manipulação de símbolos, praticando a resolução de equações e, aos poucos, a simplificação de expressão foi substituída pela resolução de problemas e referiam-se aos problemas de palavra, com foco no aluno, e poucas pesquisas sobre o papel pedagógico do professor de matemática.

*No terceiro fio, nos inquietamos sobre o seguinte: quais as perspectivas dentro da área da Educação Algébrica?*

No desenvolvimento da área, Kieran (2014) afirma que as novas pesquisas são voltadas para o ensino fundamental e incluem, também, a construção e o desenvolvimento do pensamento algébrico, envolvendo habilidade de relacionar e descrever relações, e resolver procedimentos de forma geral, não relacionado somente aos aspectos simbólicos da Atividade Algébrica, mas também à sua explicação com fundamentação algébrica que é desenvolvida durante a tarefa.

As questões atuais de estudo são mais gerais e estão relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio lógico, abstrato e dedutivo de habilidades e da estrutura de memória que o aluno usa, com concentração nas formas em que os alunos constroem o significado para a Álgebra, a natureza dos conceitos, os

procedimentos algébricos e as medidas usadas pelos alunos durante suas tentativas em várias abordagens.

O enfoque pedagógico e as considerações socioculturais têm adicionado outra dimensão à pesquisa na área, em que a ampliação dos conteúdos de álgebra escolar, com a Multicontextualidade (Andrade, 2017), partem do abstrato indo adiante, debatendo contextos diversos dentro da aula de matemática com os problemas.

*No quarto fio, indagamos o seguinte: quais questões estão sendo pesquisadas?*

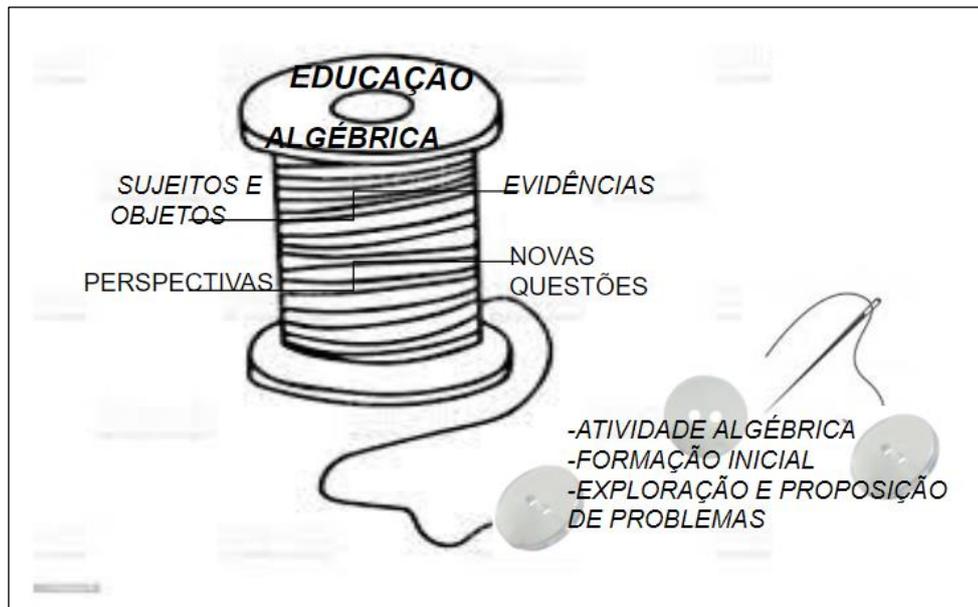
Diante do desenvolvimento das pesquisas, encontramos, nos referenciais, questões mais gerais relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio lógico, abstrato e dedutivo de habilidades e da estrutura de memória que o estudante utiliza, construindo o significado para os conceitos e procedimentos algébricos com compreensão.

As pesquisas levantadas por Ribeiro e Cury (2015), e organizadas em um panorama relacionam o ensino e a aprendizagem da Álgebra e identificam que existem diversos problemas relacionados aos conteúdos de Álgebra, e que, normalmente, os símbolos e procedimentos são pouco compreendidos quanto ao seu significado. Esses problemas, muitas vezes, foram identificados nas pesquisas diante da dificuldade do professor advinda de sua formação inicial, tendo, com isso, a necessidade de se ampliar os campos e os objetivos também para o professor.

Ao passo em que ocorre a ampliação dos conteúdos de álgebra escolar, surgem questões, como a de que “apesar do papel importante que a Álgebra tem na formação dos estudantes, temos percebido que o seu ensino não tem conseguido torná-la um fator relevante para o desenvolvimento dos sujeitos” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 46).

Esses fios se arranjam, de forma ilustrativa, na figura 1, representada como uma tessitura da Educação Algébrica com sujeitos e objetos (participantes e problema de pesquisa), perspectivas (com os objetivos, bibliografia), evidências (metodologia, resultados e análises), e novas questões (trazidas nas considerações finais da pesquisa), contando com os elementos: atividade algébrica, formação inicial, exploração e proposição de problemas.

**Figura 1 - Tessitura.**



**Fonte:** Autora (2023).

Essa tecitura ilustrada vem ao encontro dos elementos desta pesquisa, como está representado. Os fios estruturantes se arranjam com a Atividade Algébrica, a Formação Inicial, a Exploração e a Proposição de Problemas.

## **2.2 A Atividade Algébrica e a Igualdade**

A Atividade Algébrica vem sendo bem investigada e ampliada por Kieran (1996), em que compreendemos que se caracteriza como uma atividade de aplicação e desenvolvimento do raciocínio algébrico, como ponto forte da Educação Algébrica. Vale ressaltar que a Atividade Algébrica é organizada em Geracional, Transformacional e Global.

A Atividade Algébrica Geracional é um conceito que está direcionado às atividades de construção de significado, com propriedades, padrões, interpretações, representações algébricas, como, por exemplo, em uma generalização ou um valor desconhecido dentro de uma expressão matemática ou tarefa. Nesta Atividade Geracional, se resalta a construção do significado, como, por exemplo, para noções de Igualdade, equações e variáveis:

Temos se  $a = b$ , então,  $b=a$ , para quaisquer elementos  $a$  e  $b$ , uma simetria.

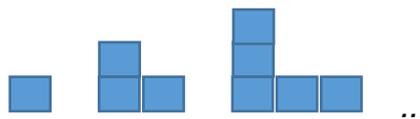
Se  $a = a$ , para todo elemento  $a$  uma sentença reflexiva.

Se  $a = b$  e  $b = c$ , então,  $a = c$ , para quaisquer valores  $a$ ,  $b$  e  $c$ , uma sentença transitiva.

*Estas sentenças representam uma generalização com propriedades dentro de qualquer que seja a tarefa, são válidas estas generalizações para a equivalência algébrica.*

Este exemplo demonstra que a Atividade Algébrica Geracional que busca regularidades de padrões, podem auxiliar na exploração do conceito da Igualdade dentro da regularidade matemática, e compreender conceitos introdutórios de temas matemáticos. Como neste caso podemos citar que o padrão desta atividade pode ser explorado em problemas de noções de equações.

A Atividade Algébrica Transformacional é caracterizada por atividades que apresentam símbolos e manipulações baseadas em habilidades e na sua construção, tanto para a formulação de conceitos teóricos ou técnicos, como, por exemplo, na construção de uma generalização de uma sequência, em termos de sua ordem e elementos, representados algebricamente:



*A sequência representada possui uma ordem, 1, 2, 3, ... ,n.*

*E se relaciona com um número de quadrados*

*Na ordem 1=1 quadrado*

*Na ordem 2=3 quadrados*

*Na ordem 3=5 quadrados*

*Na ordem  $n=2n-1$  quadrados*

*Que é a sequência do conceito dos números naturais ímpares*

$$n=1: 2(1)-1=1$$

$$n=2: 2(2)-1=3$$

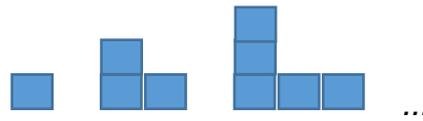
$$n=3: 2(3)-1=5$$

*(1,3,5, ...)*

A sequência exemplificada, utiliza-se de uma representação que se apresenta com símbolos (  ), ordenados e explorados para uma representação algébrica. Possibilita a formulação algébrica a partir da leitura que relaciona os símbolos e a matemática. Esta Atividade Transformacional traz um movimento de conceitos matemáticos, a partir de uma transformação do que é apresentado para se explorar a álgebra.

A Atividade Algébrica Global é relacionada a atividades com contextos, que apresentam a Álgebra como um caminho para engajar temáticas, em uma visão que une a Atividade Geracional e a Transformacional. Esta inclui a resolução de problemas e de padrões generalizáveis da matemática, a partir de situações apresentadas.

*Os alunos estão organizando os 36 dados gigantes para compor a decoração de um evento escolar, dispondo em filas da seguinte forma:*



*Continuando esse padrão, em quantas filas os alunos organizarão todas as caixas?*

*As filas se relacionam com o número de caixas*

*Na ordem 1ª fila =1 caixa*

*Na ordem 2ª fila =3 caixas*

*Na ordem 3ª fila =5 caixas*

*Na ordem nª fila =2n-1 caixas*

*Que é a sequência do conceito dos números naturais ímpares, 1,3,5,...*

*Então, podemos somar esta sequência 1+3+5= 9*

$$9+7+9=25$$

$$25+11=36$$

*O que representa a soma dos seis primeiros números ímpares naturais.*

*São 6 filas (1+3+5+7+9+11=36 caixas)*

*Na solução do problema, apresenta-se um total de 6 filas*

O engajamento, deste tipo de atividade busca envolver a situação que o problema apresenta com padrões e conceitos que pode ser representado por recursos e manipulações. Estes se dispõem em uma exploração acerca de conceitos matemáticos e a sua construção.

A situação apresentou uma representação simbólica, e uma instigação quanto ao padrão, que pode ser transformado relacionando a ordem das filas com a quantidade de caixas distribuídas, transformando em uma escrita algébrica, e explorada a resposta com relação a sequência numérica descrita, observando-se um conceito matemático de formação de uma sequência numérica de números naturais e ímpares. Compreendendo o problema introdutório e globalizando-o do ponto de vista matemático com cunho algébrico.

Com o problema sendo o ponto de partida para tal e para novos aprofundamentos além do proposto inicialmente, como uma espécie de exploração aberta a partir do que vai surgindo dos agentes.

A partir desse entendimento sobre a Atividade Algébrica, realizamos, nesta pesquisa, uma abordagem de Atividades Algébricas Globais para a construção do ensino-aprendizagem do significado da Igualdade na formação inicial de professores.

Para a investigação, de forma específica, abordamos quanto à construção do significado da Igualdade, destaca-se as reflexões de Ponte, Branco e Matos (2009), que apresentam os três significados que podem ser construídos para o sinal de Igualdade: *Operacional*, *Equivalência* e *Relacional*.

O *Operacional* é um significado a partir de um símbolo que indica uma ação, como a de uma operação a ser realizada após o comando, tendo em vista a percepção de que o sinal de Igualdade é como um sinal de fazer algo, a partir das operações diretas na resolução.

Por exemplo, na expressão numérica  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \underline{\quad}$ ,

*Temos  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$  (uma soma de duas frações diferentes) igual a um valor a ser obtido a partir da operação indicada pela igualdade.*

*A soma deles é igual a  $\frac{5}{4}$*

*Representando o resultado operacional  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \underline{\frac{5}{4}}$   
ou seja, é igual a  $\frac{5}{4}$ ;*

*E, neste caso, temos uma operação direta na matemática.*

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

A *Equivalência* é um significado muito importante para a compreensão de conceitos Algébricos, como, por exemplo, o conceito de expressões e de equação. A ideia de equivalência é o mesmo valor, o mesmo termo, o que tem de um lado é igual ao que tem do outro lado, organizados pelo símbolo da Igualdade.

Por exemplo, na expressão numérica: **24= 24**,

*Temos 24 (número) igual ao valor 24 (mesmo número)*

*São números iguais entre si,*

*porém representam o mesmo número;*

*ou seja, 24 é igual a 24.*

*E, neste caso, temos uma equivalência matemática:*

$$\mathbf{24=24}$$

Por exemplo, na expressão numérica: **c – 5 = 11**,

*Temos c- 5 (uma subtração entre dois objetos matemáticos diferentes),  
que é igual ao valor 11*

*E, para resolver a expressão, chega-se ao valor de c, para que a  
igualdade seja válida como uma equivalência antes e depois da  
igualdade;*

*c representa 16, pois 16-5=11 o que equivale a 11=11*

**(c-5) equivalente a 11, resolvendo em c=16.**

*E, neste caso, temos uma equivalência matemática.*

A Equivalência ocorre entre o que está antes da igualdade ao que está depois da igualdade.

O *Relacional* engloba a compreensão de uma relação estática a partir da Igualdade aritmética ou algébrica, situações em que o sinal de igualdade é utilizado para representar uma igualdade de expressões, em uma relação funcional do texto da tarefa.

Outro exemplo é na expressão matemática  **$12+7=m$** :

- Manoel estava organizando seu álbum de figurinhas e percebeu que doze já tinham sido colados e sete estavam no envelope e faltavam colar para completar o álbum.

- Foi quando sua mãe perguntou:

- Manoel, afinal, quantas figurinhas são necessárias para completar este álbum?

- *Ele responde:*

– Mãe são  $12+7$ , mas já estou completando com as 7 que faltavam serem coladas,

*Na expressão  $12+7=m$*

*Onde são relacionadas às 12 e as 7 figurinhas com o total de  $m$  figurinhas.*

*$12+7$  igual ao valor total desconhecido por sua mãe, a soma deles se relaciona como total, em uma relação estática de soma.*

*E, neste caso, temos uma igualdade relacional:  $12+7=m$*

O foco desta investigação é a Atividade Algébrica Global aliada à Exploração, Resolução e Proposição de Problemas e, algebricamente, sobre a Igualdade gerando o desenvolvimento das oficinas.

### 3 EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS MULTICONTEXTUAIS

Neste capítulo, apresentamos a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas como uma prática que vem sendo abrangente nas pesquisas voltadas para o processo de ensino e aprendizagem da álgebra, no ambiente nacional, no qual destacaremos as pesquisas do GEPEP e, no ambiente internacional, em que situamos seus avanços, de acordo com o levantamento de pesquisas relacionadas aos temas matemáticos da Educação Básica e na Licenciatura em Matemática.

#### 3.1 Um caminhar pela Exploração e a Proposição de Problemas Multicontextuais

Nesta pesquisa, iremos assumir uma perspectiva de problema explicada por Andrade (2017, p. 364), em que um Problema é entendido como a disposição de um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação, em que estes podem provocar no aluno diferentes sensações e reações diante um problema, podendo a) o aluno não ter ou não conhecer nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução. E, assim, não sendo um trabalho repetitivo, mas que o desafie; Há o despertar para que: *b) o aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho. O trabalho desperta o desejo pela busca, e se preciso despertado pelo professor; ou ainda o problema causa nele o que se entende por: c) Introduz-se e/ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo.* Sendo o fator primordial o trabalho produzido pelo aluno, o seu processo, em detrimento da solução.

Andrade (2017) destaca que o principal é o que o problema possa desencadear no sujeito. Neste caso, estamos interessados no processo de compreensão.

A investigação desta pesquisa foi planejada com atividades práticas que servem para a produção dos dados, fomentando a prática da Exploração e Proposição de Problemas, contribuindo para a reflexão de como se compreende o conceito da Igualdade, formulando o conceito através de problemas. A ideia é de que o problema não se limite unicamente à busca da solução, indo além (ANDRADE, 2017), para a formalização de conceitos matemáticos.

Através de Andrade (2017), compreendemos que as tarefas de proposição de problemas possibilitam ao participante elaborar suas próprias questões, utilizando as

representações, de modo que ele elabora uma questão que pode ser respondida a partir do ponto de inspiração, podendo ser, por exemplo, uma tabela, um pequeno texto, um gráfico, ou mediante um cálculo numérico.

A partir dessa reflexão, se compreende o conceito da Igualdade e a formulação do conceito a partir de Atividades Algébricas Globais, com a ideia de que, através da Exploração e Proposição de Problemas, seja proposto um engajamento para a construção desse significado.

O fechamento da atividade de Exploração e a formulação do conceito matemático vai sendo registrado pelo participante ao longo da abordagem dos problemas, destacando o ensino através do problema (ONUChic, 2014).

Por meio das colocações de Andrade (2017), compreendemos um movimento de Exploração, Resolução Exploração, Proposição Exploração e Codificação Descodificação (ERPCDP) de Problemas como partes essenciais para esta pesquisa, permitindo uma melhor compreensão e tomada de decisões no decorrer do processo.

Na Exploração e Proposição de Problemas, a resolução é a parte integrante e resultante do processo de exploração, e a Proposição Exploração ganha destaque para a tomada de consciência, percebendo uma parte impactante ao longo do processo como um todo.

O enfoque no ensino e na aprendizagem de matemática na perspectiva da Exploração, resolução e proposição de Problemas tem acontecido, conforme por Andrade (2017), com a direção de três casos possíveis:

**I) Problema A- Trabalho A- Reflexões e Sínteses-Resultado A**

*Neste formato, pode haver três resultados: a solução do problema A gerar um novo Problema B, e ainda produzir novos conteúdos e conceitos. Esses três resultados podem provocar a continuação com a repetição do movimento.*

**II) Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultados**

*Neste caso, o processo acontece quando alunos e/ou professores chegam a um resultado parcial ao final da aula. E esse*

*resultado não gera novos movimentos com novos problemas ou conteúdo.*

### **III) Problema- Processos- Resultado**

*Neste procedimento, ficam incluídos todos os processos possíveis no ensino e na aprendizagem da matemática, em casos em que o processo simplesmente acontece sem ter um movimento fechado.*

Quando estamos diante de um problema, para o compreendermos, atravessamos a sua Resolução/Exploração em um caminho mais longo, em que nossa disposição avança para a Proposição de novos problemas à medida que compreendemos dentro da exploração um conceito matemático, ou aplicamos com a Codificação-Descodificação, integrando a matemática e uma multicontextualidade da nossa vivência.

Por exemplo, na compreensão da Igualdade como relacional, podemos identificar uma situação em que ela pode ser aplicada dentro do nosso cotidiano, a partir do momento em que ela é construída e compreendida matematicamente. Apresentamos, nesse sentido, o problema abaixo:

**O problema de Laura-** Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês, ela reservou R\$70,00 para a compra de CDs ou DVDs; um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R\$70,00?

#### **Comentário:**

*Em certo dia, Laura vai ao mercado e decide comprar dois produtos distintos, com o dinheiro que tem. Ela observa o valor de cada um deles e distribuí o seu dinheiro. Neste problema, surgem a relação entre os dois*

*produtos em uma igualdade de valor fixo de R\$70,00. E ainda surge o questionamento ao se resolver algebricamente  $12x+16y=70$ .*

Este tipo de problema pode surgir com uma pessoa que planeja comprar algo, ou em uma situação imediata diante da venda de um produto. O interessante é que a compreensão do significado da igualdade amplia as possibilidades e o olhar diante da situação.

### **3.2 Pesquisas internacionais**

Vamos discutir, nesta seção, uma breve revisão sobre as publicações em pesquisas no âmbito internacional em Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, direcionadas ao ensino e a aprendizagem de matemática. Como recorte de fonte, trazemos as edições da *Research in Mathematics Education*: (i) *Posing and Solving Mathematical Problems Advances and New Perspectives* (SINGER, ELLERTON; CAI, 2015); (ii) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (FELMER, LILIJEDAHN, KOICHI, 2020). (iii) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (FELMER, PEHKONEN, KILPATRICK, 2016).

A seguir, apresentam-se as discussões:

A proposição de problemas e suas aplicações nas pesquisas sobre o ensino aparecem junto à resolução de problemas, se incorporando e, assim, os problemas vêm fortalecendo as práticas na matemática escolar.

As pesquisas se concentram nos estudantes e em como aconteciam as proposições, os processos cognitivos, os tipos de problemas e as atitudes no processo na compreensão matemática e na avaliação. Surge o interesse de investigar esse processo nos professores para o ensino da matemática e suas práticas, indo em direção ao contexto do professor de formação inicial em matemática.

Destaca-se que ocorre um movimento assim como na pesquisa em Educação Algébrica a partir de investigações com os estudantes, percebendo que as dificuldades apresentadas levam a direcionamentos em relação ao professor e à sua atuação, recaindo nas intervenções de sua formação. Assim, por exemplo, em uma aula em que o estudante precisa compreender a equivalência para utilizar em um

problema, e este processo é suprido por uma resposta resumida, coloca-se em evidência que a mediação não proporcionou a construção deste significado, sendo necessária uma ampliação nas pesquisas com estes sujeitos.

A Exploração e Proposição de Problemas têm sido postas como uma importante ferramenta para os professores, propondo o problema durante o planejamento ou durante a aula, e sendo necessária uma experiência em sua formação.

Um problema pode ser considerado a partir de uma palavra formal escrita, verbalizada, ilustrada e apresentada aos alunos para que resolvam. Esse problema precisa ter uma intenção, como aprofundar o raciocínio usado, uma forma de estender a aplicação de um conceito matemático, fazer a descoberta e formalizar um conceito, interligando com a problematização. A problematização vai além, questionando com um olhar crítico dentro do contexto matemático e sociocultural.

Professores que estão em formação inicial apresentam dificuldades em se envolver com a Exploração de problemas, especialmente com a Proposição de problemas, pois é uma habilidade com a qual não estão familiarizados, tanto como alunos quanto como licenciandos.

Os problemas que eles expõem, por vezes, não são bem estruturados de forma complexa diante do rigor da matemática, são problemas com perguntas mais diretas e sem a busca de exploração profunda. Falta a prática de exercitar problemas mais úteis à matemática e ao contexto.

É posto também os bons efeitos deste tipo de tarefa, em que os participantes são desafiados a se engajar e se mostram disponíveis para o processo, apresentando seus problemas organizados e fazendo a exploração da resolução antes de apresentá-los, demonstrando uma compreensão interpretativa do problema e da situação matemática, tendo, assim, perspectiva de avanço quanto a essa qualidade, ao passo que participam de mais momentos de proposição, quando levam em consideração as dúvidas e perguntas de alunos em série escolares distintas, visualizando o poder do problema sendo um catalisador para a mobilização de conhecimentos, enquanto fazem a atividade com o sentido em que fazem.

Sobre a proposição, destacamos, também, diante das leituras, que ela seria positiva quando apresentada na formação de professores e no exercício de pesquisadores da educação matemática, colocando-a entre as práticas promissoras

que contribuem para o desenvolvimento de habilidades no seu contexto.

Os problemas podem ser modificados, tornando-os em novos com nível mais fácil ou mais difícil, considerando os sujeitos, para introduzir ou aprofundar um conteúdo, como uma ferramenta pedagógica que os professores podem utilizar para engajar os alunos com a matemática.

O professor pode propor, durante o planejamento da aula, ou até mesmo durante aula, e ainda pode trabalhar com um problema proposto pelo aluno durante a aula, ou como uma atividade que provoque a proposição pelos estudantes, como tarefa principal da aula.

A proposição de problemas é destacada em três perspectivas: a primeira, como sendo uma prática de ensino para a promoção da aprendizagem; a segunda, como uma atividade mediada por licenciandos em uma sala de aula de estudantes e professor, por exemplo, no exercício de estágio; a terceira, como ferramenta para pesquisadores que buscam contribuir com a formação inicial, como uma questão.

Os pesquisadores internacionais deixam a mensagem de que é importante que a área desenvolva pesquisas no ambiente de formação inicial, contribuindo para o futuro trabalho docente e o desenvolvimento das habilidades, identificando questões chaves para este processo, após reconhecer o trabalho com problemas e seus ganhos para o ensino e a aprendizagem da matemática.

### **3.3 Pesquisas do grupo GEPEP**

A influência das pesquisas desenvolvidas no GEPEP tem se dado nas discussões, na busca de referenciais e nas contribuições dos integrantes interessados na pesquisa do cotidiano da educação, compondo o conhecimento da matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

Assim, estas pesquisas vêm se articulando na medida em que seus processos foram realizados, seja no campo matemático ou na metodologia de discussão, a partir dos sujeitos e da produção de dados.

**Quadro 1** - Dissertações correlatas do GEPEP.

<b>Título</b>	<b>Autoria</b>	<b>Orientação</b>	<b>Publicação (ano)</b>
Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de Matemática via exploração, resolução e proposição de problemas	Fabíola da Cruz Martins	Silvanio de Andrade	2019
Resolução de problemas e representações múltiplas no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas	Juscelino de Araújo Silva	Silvanio de Andrade	2019
Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas	Adriano Alves da Silveira	Silvanio de Andrade	2016
Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas.	Ledevande Martins da Silva	Silvanio de Andrade	2013

**Fonte:** Autora (2023).

Na temática, pesquisadores do grupo, como Martins (2019), utilizou a metodologia voltada ao ensino-aprendizagem de sistemas lineares, com foco no papel da formação inicial do professor de matemática e em sua formação via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

Na sua pesquisa, ela conclui que, através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, os licenciandos desempenharam uma postura que

demonstrou maior compreensão frente aos Sistemas Lineares, e isso foi visto a partir do momento em que eles puderam lidar com os problemas, expressando uma matemática evidenciada nas suas representações, o que contribui para o futuro educador matemático, construindo o conceito durante a aprendizagem.

A articulação se apresenta, principalmente, no campo matemático da educação algébrica, na discussão através da Resolução, Exploração e Proposição de problemas, e nos participantes que são licenciandos do curso de matemática, uma vez que a produção dos dados se dá em uma disciplina de Álgebra.

Outra pesquisa de destaque é a que tem o tema de sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, a partir do foco na resolução de problemas, realizada por Silva (2019), que evidenciou a contribuição desta para estudantes da educação básica.

Silva (2019) realizou a pesquisa com o tema de sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas com foco na resolução de problemas, utilizando as representações múltiplas na educação algébrica, no ambiente escolar diretamente com os estudantes ou no ambiente de formação acadêmica inicial.

O autor destacou que é preciso ouvir a compreensão dos licenciandos, para que seja comparada ao que eles registram na escrita, ou seja, se eles conseguem transmitir a aprendizagem desenvolvida. Essa demonstração de compreensão facilita ao pesquisador uma análise qualitativa do processo como sendo contínuo, na medida em que há um aprofundamento no seu fazer.

Em articulação com os participantes licenciandos, o campo de estudo de sistema de equações polinomiais do 1º grau se aplica por meio do significado de Equivalência nas equações, tanto em sua formação quanto na resolução.

Silveira (2016) pesquisou como uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de problemas poderia contribuir para o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória e evidenciou que, através da abordagem, foi possível acompanhar a aprendizagem dos alunos neste conteúdo, e o grande ganho foram as proposições dos alunos e suas próprias ideias para resolver os novos problemas no fazer matemática durante a aprendizagem.

Em continuidade, Silveira (2020) destaca uma parte de seu trabalho no 14º ICME (International Congress on mathematical Education Shanghai, 2020),

apresentando problemas do campo da análise combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas e sala de aula. Ele evidencia a autonomia dos participantes na construção das ideias, com criatividade e melhor interpretação dos problemas que propuseram, pois eles conseguiam justificar todo o processo.

Nossa pesquisa teve a proposta de propiciar momentos de exploração e proposição de novos problemas com a intenção de contribuir na formação dos licenciandos, sendo, portanto, semelhante à ideia exposta por Silveira (2016). A busca pela evidência desta prática dentro da Educação Algébrica fortalece nosso buscar diante do problema de investigação.

Silva (2013) aborda a Resolução, Exploração e Proposição de Problemas a partir da compreensão de ideias do conteúdo de funções, em uma pesquisa voltada ao ensino-aprendizagem do conteúdo, analisando qualitativamente as atividades propostas em torno das representações múltiplas nas funções, em uma turma de ensino médio, como pesquisa pedagógica. Essa pesquisa envolvendo a álgebra, evidenciou que a resolução, proposição e exploração de problemas contribuíram para possibilidades de novas compreensões dos estudantes em relação ao conteúdo algébrico de funções, em suas ideias essenciais, caminhando para diminuir as dificuldades em relação aos conceitos e resoluções das funções.

Este último ponto está em articulação, pois as evidências de que a Exploração de problemas contribui para superar desafios na aprendizagem da álgebra é uma visão que também desta pesquisa, com o destaque para a importância, e o desenvolvimento de como foi a metodologia na produção dos dados.

## **4 ROTEIRO DE DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA**

A leitura deste capítulo possibilitará a compreensão sobre o desenvolvimento da pesquisa, a partir de sua descrição. Como introdução, discutimos sobre os procedimentos da Metodologia de Pesquisa Qualitativa e Descritiva (BODGAN; BICKLEN, 1994), na pesquisa investigativa de Educação Matemática; registrando a justificativa sobre este tipo de pesquisa escolhida.

Para a continuação, detalho como ocorreu o planejamento da pesquisa, as etapas, os participantes, e informações sobre a produção de dados e organização de como ocorre a análise.

### **4.1 Metodologia de pesquisa**

Compreende-se, no aporte teórico, que as pesquisas de Educação Algébrica tendo como sujeito central o professor, são pesquisas recentes na academia. E os tópicos são voltados ao conhecimento do conteúdo pelo professor sobre o conhecimento pedagógico relacionado e tendo em vista a formação de professores que estudam para se tornarem professores de álgebra. O ensino e a aprendizagem são permeados pelos desafios de abordagens metodológicas e teóricas na formação prática de licenciandos.

As tendências para novas pesquisas são com professores interessados na pesquisa como sujeito principal, em metodologia de pesquisa pedagógica contribuindo e coproduzindo um conhecimento profissional e científico próprio com seus colegas, e não apenas como ser a ser receptor da pesquisa, mas também como meio de compor o conhecimento. Desse modo, se apresentam também as pesquisas na formação inicial de professores de matemática.

Esta é uma pesquisa qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), e os dados foram produzidos diretamente no ambiente da formação inicial, por meio de pesquisa-ação.

Nesta pesquisa-ação, segundo Fiorentini (2004), pesquisadora e licenciandos atuam através da reflexão-ação nas aulas para uma compreensão do problema da pesquisa, como forma de possibilitar uma transformação que provoca mudanças no processo formativo e prático através da sequência: planejamento, ação, observação, registros, reflexões, análises e avaliação da pesquisa.

A perspectiva da análise dos resultados é de natureza qualitativa e foi analisada diante das contribuições de Bogdan e Biklen (1994), acontecendo a partir de relatos dos licenciandos e das pesquisas que trabalharam a proposta metodológica.

A escolha qualitativa se deu por considerar uma abordagem de análise e compreensão através da reflexão com significado e tendo em vista a preocupação de tal reflexão ocorrer durante todo o processo.

Assim, pode-se planejar as atividades e, durante a execução, se aprofundar e voltar a atenção em como está ocorrendo, descrevendo qualitativamente o processo, investigando a situação e colhendo fragmentos minuciosos que possam contribuir para as considerações da pesquisa.

O ponto de partida é o cuidado no planejamento de problemas, de forma atenta à representação introdutória que as Atividades Algébricas apresentam, haja vista o incentivo ao questionamento que desenvolve a educação Algébrica e seu impacto na variedade de ideais e conceitos.

A visão se foca na estruturação do conceito teórico e na construção de igualdade registrada na compreensão dos futuros professores. As questões de exploração dos problemas visam discutir e incentivar os estudantes na resolução e proposição de problemas.

O planejamento e a realização da pesquisa focam na formação inicial de professores de matemática, no campo da educação matemática, e se desenvolve com atividades virtuais para o levantamento de dados.

Os dados produzidos são registrados em caderno de anotação, com notas sobre o caminhar das atividades e registro de produções dos sujeitos, apresentando as críticas reflexivas dos licenciandos por meio de sua participação quanto à construção através da Exploração e Proposição de Problemas, fomentando a prática do conteúdo.

Nesta pesquisa, o eixo temático da Educação Algébrica é fortalecido pela construção do pensamento Algébrico, através da Exploração de Problemas por meio de atividade algébrica global. No tema matemático, o enfoque é a construção do significado de igualdade.

Os problemas aqui, são postos no sentido de propor a exploração da compreensão da Igualdade. A exploração surge a partir do que é apresentado pelos participantes durante as tarefas.

O trabalho ocorre como um processo contínuo que envolve a resolução do problema, a discussão de conceitos matemáticos, a proposição de novos problemas contribuindo com o desenvolvimento as tarefas, onde os participantes desempenham as tarefas mediados pela pesquisadora durante a exploração dos problemas, engajando os problemas para a construção dos significados Operacional, Equivalência e Relacional da Igualdade.

No quadro 2, apresentamos como foi o roteiro do plano de atividades realizadas:

**Quadro 2** - Plano de atividades.

TEMÁTICA	PROBLEMA
<p>Igualdade no Quadro de Expressões</p>	<p>Expressões matemáticas apresentadas no Quadro:</p> <p>1) <math>12 + 7 = m</math></p> <p>2) <math>c - 5 = 11</math></p> <p>3) <math>\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1</math></p> <p>4) <math>x + 1 = 2x - 7</math></p> <p>5) <math>\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}</math></p> <p>6) <math>3,25 + 2.4,05 = b</math></p> <p>7) <math>7.2 - 3 = 5.2 + 1</math></p> <p>8) <math>24 = 24</math></p>

<p>Problema do Reflorestamento</p>	<p>"Em uma floresta já existente, 424 novas árvores foram plantadas. Alguns anos depois, as 217 árvores mais antigas foram cortadas. A floresta, então, contém 1.062 árvores."</p>		
<p>Problema de Laura</p>	<p>Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês, ela reservou R\$70,00 para a compra de CDs ou DVDs; um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R\$70,00?</p>		
<p>Regularidades com números</p>	<p>Investigue o que acontece ao efetuar as seguintes multiplicações com suas igualdades, nos itens a e b:</p> <table border="1" data-bbox="815 1361 1377 1641"> <tr> <td data-bbox="815 1361 1062 1641"> <p>a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>8.8=64</math></li> <li>■ <math>9.7=63</math></li> <li>■ <math>10.6=60</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> </ul> </td> <td data-bbox="1110 1361 1377 1641"> <p>b)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>15.15=225</math></li> <li>■ <math>16.14=</math></li> <li>■ <math>17.13=</math></li> <li>■ <math>18.12=</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> </ul> </td> </tr> </table>	<p>a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>8.8=64</math></li> <li>■ <math>9.7=63</math></li> <li>■ <math>10.6=60</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> </ul>	<p>b)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>15.15=225</math></li> <li>■ <math>16.14=</math></li> <li>■ <math>17.13=</math></li> <li>■ <math>18.12=</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> </ul>
<p>a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>8.8=64</math></li> <li>■ <math>9.7=63</math></li> <li>■ <math>10.6=60</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> </ul>	<p>b)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>15.15=225</math></li> <li>■ <math>16.14=</math></li> <li>■ <math>17.13=</math></li> <li>■ <math>18.12=</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> <li>■ <math>__. __ =</math></li> </ul>		

Fonte: Autora (2023).

Cada aula foi nominada a partir da temática do problema associada à Atividade Algébrica Global: A Igualdade, Atividade Algébrica; O problema de Laura, Atividade Algébrica; Regularidades com Números, Atividade Algébrica; O problema do Reflorestamento.

## 4.2 Caracterização dos fenômenos: ambiente e participantes

A realização da parte prática e dos procedimentos metodológicos aconteceram no ambiente de formação inicial de professores, mais especificadamente, em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática, em um campus de uma universidade estadual, durante a realização da disciplina Laboratório de Álgebra. A turma era composta por dezessete licenciandos.

O objetivo da disciplina Laboratório de Álgebra se direciona a uma fundamentação didática, pedagógica e metodológica sobre o ensino desta área. A proposta é que, na formação inicial, aconteça o contato aprofundado sobre a Educação Algébrica e suas possibilidades dentro dos processos de ensino e aprendizagem.

A disciplina foi ofertada no semestre a licenciandos do terceiro ao sétimo período do curso e tem a carga horária de 60h na matriz do curso. Parte da disciplina ocorre com foco na teoria e outra parte na prática.

Durante a disciplina, a professora titular desenvolveu atividades voltadas ao ensino-aprendizagem da álgebra com jogos, materiais manipulativos, história da matemática, softwares, entre outros, e combinamos de trabalhar com a abordagem da Exploração e Proposição e Problemas como parte da carga horária prática da disciplina.

Corroborando com o desenvolvimento da disciplina, as atividades da pesquisa foram propostas como Atividades Algébricas Globais para a construção do significado da Igualdade através da Exploração e Proposição de Problemas, enquanto uma intervenção na formação inicial dos participantes, em que estes experienciavam as atividades e formalizavam os conceitos matemáticos a partir da exploração.

As aulas da pesquisa foram desenvolvidas no período de ensino remoto, por motivo da pandemia causada pela COVID19 na população, provocando medidas de isolamento social. As aulas remotas aconteceram com interação síncrona, por videoconferência e com duração de 2 horas.

O compartilhamento aconteceu por ferramentas tecnológicas, como notebook, computador com webcam e microfone, smartfone, rede de internet. Utilizamos como registro o caderno de anotação e a interação por grupo de aplicativo de mensagens instantâneas.

Os dados produzidos a partir das atividades realizadas durante a disciplina ficaram registrados mediante a ferramenta tecnológica de videoconferência síncrona, através dos registros de gravação das aulas em drive de internet, escritas dos alunos compartilhadas no chat e por fotografias na exploração dos problemas.

Para a mediação dos problemas, foram utilizadas apresentações em slides. Objetivamos uma exploração indo além da resolução, com o estudo do problema até a possibilidade de proposição de novos problemas que contribuem para a compreensão do conceito e desenvolvimento das atividades algébricas.

Destacamos o percurso como fonte de estudo e a prática da Educação Algébrica com o ponto de partida sendo o problema. O caminhar em todo o percurso valorizava as discussões e a análise qualitativa da participação dos futuros professores de matemática.

No decorrer das oficinas, os registros serviram para uma análise que fosse alicerçada nos pressupostos teóricos acerca do tema desta proposta, interligando as percepções em relação à criticidade na exploração de problemas para a educação algébrica.

A exploração e o debate buscaram sempre evidenciar as concepções sobre os conceitos da bibliografia, bem como a sua compreensão pôde ser experienciada na formação acadêmica.

Consideramos que o tema proposto possibilitou uma discussão objetiva que contribuiu para o desenvolvimento da Educação Algébrica, partindo da Igualdade. Essa compreensão do significado da Igualdade acarreta aplicações de outros conteúdos da álgebra, como, por exemplo, equações e funções. Esses conteúdos são os mais presentes em pesquisas com a exploração de problemas para o processo de ensino e aprendizagem da álgebra.

No processo de investigação desta pesquisa qualitativa, consideramos que a análise não se decorre de dados fechados, mas, sim, por meio de uma descrição detalhada, apresentando sua contribuição para a formação acadêmica e para o desenvolvimento de pesquisas na área, tendo em vista o fazer matemático de uma aprendizagem através dos problemas.

O instrumento para a produção de dados da investigação são as oficinas sobre o significado da Igualdade, com o objetivo de trabalhar as Atividades Algébricas

através da Exploração e Proposição de Problemas, para a formalização do significado e discussão da Educação Algébrica.

Para a melhor compreensão e análise dos dados, serão apresentados diálogos que ocorreram durante as oficinas, com o registro das falas dos participantes, de modo que o cunho qualitativo se evidencia e aproxima do leitor da investigação. Essa transcrição esclarece pontos importantes da pesquisa, especialmente, para situar como ocorreu a Exploração e Proposição dos Problemas.

As oficinas foram fundamentas e referenciadas na Educação Algébrica por meio das reflexões de Kieran (1996), e na perspectiva de ensino-aprendizagem da matemática através da Exploração e Proposição dos Problemas, tendo em vista as discussões de Andrade (1998) e de pesquisadores do GEPEP, com pesquisas na mesma área.

## 5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, descrevemos como foram planejadas, desenvolvidas e analisadas as atividades metodológicas. As discussões durante as atividades e sua análise qualitativa voltada ao processo através da exploração e proposição de problemas são postas no processo com o objetivo de criar uma imagem do cenário diante dos resultados, passando pelo planejamento, sujeitos, problemas e a experientiação na prática, tendo em vista o olhar antes, durante e depois em conjunto, dando uma criticidade à investigação por completa.

### 5.1 Os encontros de pesquisa: laboração das discussões

A apresentação das discussões dos encontros de pesquisa foi realizada a partir da apresentação descrita do planejamento, desenvolvimento e com diálogos, isto é, inicialmente, como foi a proposta e como ocorreu com relatos através da interação de falas entre os participantes e a pesquisadora atuante.

Destacamos que a aplicação prática de forma remota e síncrona aconteceu tanto por meio de aplicativo de videoconferência quanto com registros compartilhados por grupos de mensagens instantâneas, em que os participantes enviavam fotografias de seus cadernos com suas anotações, e acredita-se que isso influenciou, de forma positiva, o acompanhamento do processo de exploração dos problemas.

Para organizarmos o entendimento da leitura, denotamos as seguintes palavras-chave:

- L1, L2, L3, ..., L17: como referência aos participantes que são os Licenciandos, ordenando cada um de acordo com a lista de frequência da professora titular da disciplina.
  
- PA: termo para a Pesquisadora Atuante na realização prática da pesquisa.

Para registro das ideias quanto à análise dos dados produzidos, apresentamos o Quadro 3.

**Quadro 3** - Pontos para a análise dos dados.

POTENCIALIDADES	DESCRIÇÃO DOS DADOS PRODUZIDOS
COMENTÁRIO: O QUE SE ESPERA?	QUAIS OS ACHADOS?
DIÁLOGO E REFLEXÃO	ENCONTRO COM A TEORIA
ANÁLISE QUALITATIVA	CONSIDERAÇÃO FINAL DA OFICINA

**Fonte:** Autora (2021).

A organização do roteiro e sínteses de como foram os planejamentos das aulas serão apresentadas a seguir. Nos próximos pontos do texto, a abordagem é uma sequência com as descrições de cada encontro desde o planejamento até a realização e a análise.

## 5.2 A Igualdade

Na primeira atividade, trabalhamos com um instrumento de produção de dados, em forma de um quadro com expressões matemáticas, tendo como objetivo introduzir o estudo sobre a compreensão do significado da Igualdade em Atividades Algébricas através da Exploração e Proposição de Problemas durante o desenvolvimento da aula. Para o registro final, foi feito um formulário on-line com questões em que os licenciandos pudessem resumir a discussão da aula.

A organização da síntese do roteiro de como foi planejada a aula está descrita abaixo, detalhando os objetivos, o conteúdo, o que se espera na aula e os problemas iniciais que foram propostos na pesquisa.

### Atividade: Introdução ao tema do significado da Igualdade

#### Objetivos:

- Introduzir a questão de que a Igualdade tem mais de um significado;
- Explorar uma igualdade numérica;
- Incentivar a proposição a partir de uma expressão matemática, com uma atividade de proposição de problemas, reescrevendo uma expressão matemática dada.

**Conteúdo:** Significado da Igualdade, Expressões Numéricas e Algébricas.

Nesta aula, esperávamos que os participantes pudessem participar da aula, interagindo com o tema da compreensão quanto ao significado da Igualdade, a partir de reflexões sobre as expressões matemáticas propostas na parte I, e pudessem expressar seu entendimento através da parte II da atividade. Na parte II, queríamos que os alunos realizassem uma proposição, como uma reescrita de uma expressão, mantendo a igualdade, e relacionando quanto ao seu significado.

**Parte I:** Problema do Quadro 4- Quadro de Expressões.

**Parte II:** Reescrever a igualdade  $24 = 24$ .

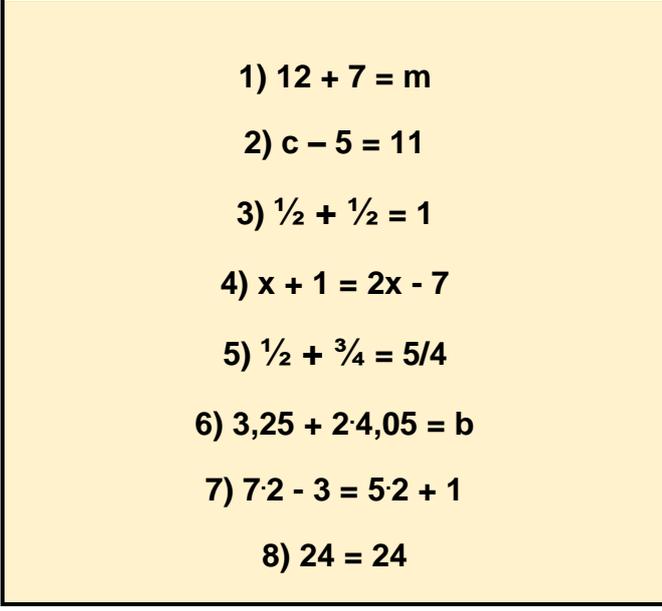
- a) Utilizando uma expressão numérica que mantenha a igualdade.
- b) Utilizando elementos algébricos, de modo que, na resolução, se mantenha a igualdade.

Nesta aula, faltaram dois alunos. A professora titular da disciplina deu boas-vindas, fez a frequência e sinalizou o início da gravação. Posteriormente, nos apresentamos e iniciamos a aula, sem falar do tema.

Vamos descrever sobre a realização da aula para a análise inicial da parte I.

Parte I – no início da aula, a pesquisadora propôs um diálogo com a turma, a partir da apresentação de um quadro de expressões matemática. Após a apresentação da Pesquisadora Atuante, ela apresentou o *Quadro 4* e iniciou o diálogo.

**Quadro 4** - Quadro de Expressões.



1)  $12 + 7 = m$   
2)  $c - 5 = 11$   
3)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$   
4)  $x + 1 = 2x - 7$   
5)  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$   
6)  $3,25 + 2 \cdot 4,05 = b$   
7)  $7 \cdot 2 - 3 = 5 \cdot 2 + 1$   
8)  $24 = 24$

Fonte: Autora (2023).

A construção do quadro se deu por oito expressões matemáticas contendo diferentes conjuntos numéricos e operações com símbolos escritos na linguagem matemática, em que a partir delas fosse possível introduzir a temática do significado da Igualdade.

O quadro foi proposto como um objeto de engajamento que levasse à prática inicial de um diálogo sobre os objetos matemáticos, de modo a se direcionar para tópicos da Educação Algébrica, como, por exemplo, expressões numéricas, expressões algébricas e relações matemáticas.

O diálogo teve início com o compartilhamento do quadro na tela, e solicitou-se que os licenciandos registrassem informações sobre esse quadro em relação aos objetos matemáticos, e fizessem isso pelo chat de mensagens ou por áudio.

Com a participação deles, em relação ao quadro 4, surgiram ideias que foram sintetizadas no quadro 5. As ideias colocadas pelos licenciandos foram em torno de

afirmações e perguntas ligadas a diferentes objetos da matemática, voltadas aos conjuntos numéricos, símbolos em diversas representações.

**Quadro 5** - Síntese das ideias.

<b>Adição e subtração?</b>	<b>Adição de frações</b>	<b>Números</b>
<b>Fração</b>	<b>Teria alguma de monômio?</b>	<b>símbolos</b>
<b>Irracional</b>	<b>Equação de 1° grau</b>	<b>Operações</b>

Fonte: Autora (2023).

Um ponto de destaque é para as interrogações que podem ser interpretadas como dúvida ou insegurança na tentativa de obter uma resposta única.

Em seguida, retornamos ao diálogo para explorar as falas dos participantes:

- PA: *Como vocês identificam a 2ª expressão? 2)  $c - 5 = 11$*
- L 5: *Equação do 1º grau.*
- L 2: *Acho que é um monômio.*
- L 11: *Um monômio.*
- L 1: *Acho que a segunda não é um monômio. Nem a primeira. Acho que é uma expressão algébrica, pois monômio é quando há multiplicação.*

Quando questionados: “Na visualização geral de todas as expressões, qual a semelhança entre elas, identificam um elemento em comum?” Surgiram as respostas no chat, que permitiram introduzir o tema da Igualdade:

**Quadro 6** - Síntese das respostas.

<p><b>A igualdade;</b></p> <p><b>O símbolo de igual;</b></p> <p><b>O sinal de igualdade;</b></p> <p><b>As operações matemáticas;</b></p> <p><b>Símbolo de igualdade;</b></p>
--

### As quatro operações.

Fonte: Autora (2023).

Observamos que os participantes se atentaram para a visualização escrita do quadro 5 e colocaram como elementos principais as operações e a igualdade. Na sequência, segue um recorte do diálogo com os licenciandos sobre a introdução do tema:

- PA: - Vocês já estudaram sobre o símbolo da Igualdade?
- L 5: *não especificamente, mas de uma forma geral quando é passado no ensino básico.*
- L 11: *Equações.*
- P A: *Em qual(is) disciplina(s)?*
- L 2: *Nas disciplinas de cálculo.*
- L 5: *É essencial nas disciplinas de cálculo.*
- L 3: *Acho que na disciplina de Matemática Elementar.*
- L 7: *Acho que em quase todas as disciplinas que envolvam cálculos.*
- L 9: *Isso mesmo.*

Nesse diálogo, surgiu o olhar crítico da pesquisadora, sobre o porquê eles não haviam estudado, apesar dos participantes terem apresentado a ideia de que é importante saber o porquê estuda-se as operações de adição, subtração, divisão, multiplicação e pouco se fala da Igualdade. O sentido da discussão é chamar a atenção dos licenciandos para as questões já discutidas nas pesquisas de Trivilin e Ribeiro (2013) e (2015).

Para o diálogo deste ponto, um relato por áudio de uma das participantes foi transcrito abaixo:

- L 7: *Acho que, às vezes, por questão do professor ver essas operações como + e -, a gente fosse utilizar muito mais no nosso dia a dia do que esse símbolo igual. Porque, quando a gente estuda na educação básica, só é dito "igual" como algo que é*

*semelhante “ $24=24$ ” e pronto, ele não trabalha muito isso, ele trabalha muito mais com a gente com as outras operações, como é dita “as quatro operações da matemática” e a gente vai treinando isso.*

L 7 destaca um pouco de sua experiência e a reflexão enquanto estudante na Educação Básica sobre como o professor dá destaque as quatro operações básicas da matemática, deixando de trabalhar a Igualdade de forma específica. O foco foi como um símbolo aparece nas operações básicas da matemática e nada além dos símbolos +, -, x, ÷, e que não se estuda sobre o significado do símbolo de igualdade. Tais constatações se relacionam com as discussões das pesquisas de Kieran (1981).

A participante demonstrou preocupação e, como está na licenciatura, isso é algo a ser explorado, pois, para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de aritmética, álgebra e geometria, é preciso a compreensão como parte importante dos procedimentos matemáticos.

Após essa introdução sobre o significado da Igualdade, a pesquisadora informa à turma que os alunos estariam participando de uma atividade investigativa de Educação Algébrica na pesquisa de mestrado intitulada “A atividade algébrica e o significado da igualdade através da exploração e proposição de problemas e o tecer de uma investigação na formação inicial”, durante as aulas da disciplina Laboratório de Álgebra, como fonte de contribuição da pesquisa em sua formação inicial.

As aulas aconteceriam no formato remoto, com aulas planejadas dentro da pesquisa, em que o objetivo é: investigar, com olhar crítico, qual a compreensão que os futuros professores de matemática dão para o sinal de igualdade através da Exploração e Proposição de Problemas.

É importante dizer que não foram apresentadas teorias com referenciais e conceitos, para os licenciandos, haja vista os objetivos desta pesquisa focando na compreensão deles. A participação deles era fator contribuinte para sua formação. Desse modo, enfatizamos que os estudantes ficassem à vontade na interação durante as aulas.

A continuidade do diálogo se direcionou ao significado da igualdade diante do contato deles durante a sua vida escolar e acadêmica. Foi possível um diálogo mais

específico a partir das perguntas: Qual é o conhecimento curricular que vocês têm em relação aos diferentes significados do sinal de igualdade? O que significa = nas expressões do quadro? Tendo em vista essas questões, eles responderam no chat:

- PA: *Qual é o conhecimento curricular que vocês têm em relação aos diferentes significados do sinal de igualdade? O que significa = nas expressões do quadro?*
- L 2: *É como aquilo que sabemos o que significa, mas não sabemos explicar.*
- L 11: *Igualar conhecimentos matemáticos, aplicados em diversos cálculos.*
- L 6: *Mas, no geral, entendo o sinal de igual para dizer que um termo é igual ao outro.*
- PA: *Em qual expressão você identifica isso?*
- L 8: *Item 3, igualdade numérica.*

Por estas interações, conseguimos identificar que o conhecimento prévio apresentado por estes alunos está voltado a ideias iniciais da palavra igualdade aplicada à matemática.

Os estudantes também conseguiram expressar seus conhecimentos relacionando igualdade à equivalência:

- L 3: *Que ambos os lados da equação têm o mesmo valor ou são equivalentes.*
- PA: *Em qual expressão você identifica isso?*
- L 10: *Item 7*
- L 8: *Item 4*
- L 2: *Mostrar que ambos os lados das equações são iguais.*
- L 5: *Item 4*

Na resposta de L4, é possível prever a presença de um significado diferente das respostas anteriores, pois ele insere a ideia de que não é só a questão entre

igualdade e equivalência.

*- L 4: Eu vi em algum lugar que o sinal de igual nem sempre serve para relacionar os termos como iguais, mas não lembro ao certo.*

Neste momento, aproveitamos esta fala que se distancia da equivalência, e fizemos a mediação sobre a álgebra e a importância de reconhecer o papel da Igualdade na matemática, com a apresentação de slides com os referenciais teóricos desta pesquisa, trazendo a apresentação histórica da álgebra escolar, já discutida nesta pesquisa, como fonte de questões a partir do movimento da matemática moderna no Brasil.

A Exploração foi desenvolvida diante da discussão do quadro, realizado pelos participantes, e trouxe dentro do problema, respostas que se ampliaram em uma exploração. O movimento de exploração se torna, neste caso, direcionado a partir das questões, onde o nível de exploração foi de acordo com o desenvolvimento das ideias conceituais que surgiram.

Além disso, também discutimos sobre a abrangência das expressões numéricas e algébricas diante da passagem da aritmética para álgebra durante o desenvolvimento da matemática, e na Educação Básica, até o ensino superior sobre o que o sinal de igual influência na aula de cálculo sobre limites e integrais, para que os licenciandos se integrassem no cenário.

Com este diálogo sobre a Igualdade, a turma mostrou-se receptiva e disposta a participar, de forma efetiva, da pesquisa, buscando aprender mais sobre a álgebra. A partir daí, iniciamos a próxima etapa.

Parte II- Exploração e Proposição - a partir do quadro das expressões, destacando a expressão 8, do quadro 4, através do problema abaixo. Em seguida, cada participante apresenta a ideia da sua proposição:

**Problema:** reescrever a igualdade  $24 = 24$ .

- c) Utilizando uma expressão numérica que mantenha a igualdade.
- d) Utilizando elementos algébricos e que, na resolução, se mantenha a igualdade.

Esperávamos dos alunos, inicialmente, que durante a atividade os participantes registrassem suas ideias de forma objetiva, em mensagem pelo chat. No momento da apresentação, a PA estimulou para que cada participante dialogasse por áudio, ou pelo chat de mensagens, por meio da interação entre os demais participantes e a pesquisadora em direção a apontamentos da Educação Algébrica.

Apresentamos parte do diálogo desta etapa nas mensagens registradas pelo chat, com as proposições. As ideias apresentadas eram com foco nas operações básicas da matemática, alguns participantes utilizaram apenas uma operação. E outros propuseram expressões numéricas com mais de uma operação:

**Quadro 7** - Registro das proposições.

<b>Operação</b>	<b>Proposição</b>
Multiplicação	<i>L 14:</i> $3 \times 4 = 6 \times 2$ <i>L 8:</i> $6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$
Adição e subtração	<i>L 11:</i> $24 = 24 + 3 - 3$
Adição e multiplicação	<i>L 3:</i> $12 \cdot 2 = 16 + 8$ <i>L 5:</i> $2x + 7 = 24$ <i>L 9:</i> $6 \cdot 4 = 20 + 4$ <i>L 2:</i> $8 \times 3 = 16 + 8$ <i>L 15:</i> $4 \times 6 = 7 \times 3 + 3$

	$L 1: 20+x=6x$
Divisão e multiplicação	$L 7: 30 \times 8 \div 10 = 240 \div 10$
Adição, subtração e multiplicação:	$L 13: 4 \times 4 + 8 = 5 \times 5 - 1$ $L 10: 2 \cdot 10 + 4 = 3 \cdot 9 - 3$ $L 12: 3 \times 9 - 3 = 10 \times 4 - 16$

Fonte: Autora (2023).

Dois participantes introduziram o uso de letras dentro das proposições, como uma linguagem algébrica, expressando sua proposição como uma igualdade como o resultado de uma letra. Os participantes escreveram:

-  $L 6: 12x=24$  Para  $x=2$

-  $L 10: 2e+4=3e-6$

Para explorarmos este processo de proposição, a pesquisadora convidou os participantes para explicarem, na sua apresentação, como interpretaram a ideia e a sua criatividade utilizando a matemática:

-  $L 8: Bom, eu pensei em duas multiplicações distintas que tivessem como resultado o 24.$

-  $L 14: Eu pensei de forma análoga a L8, só que, no meu caso, o número é o 12.$

-  $L 12: Eu pensei em usar a multiplicação e a subtração.$

Após as apresentações, a pesquisadora discutiu os significados da Igualdade, a partir das discussões de Ponte, Branco e Matos, (2009), bem como abordou o significado de Operacional, Equivalência, Relacional, interligando as expressões do quadro 4. No significado Operacional 2)  $c-5=$  e 5)  $1/2 + 3/4= 5/4$ ; Relacional 1)  $12+7=$  m e 6)  $3,25 + 2.4,05= b$ ; Equivalência 4)  $x+1= 2x-7$  e 8)  $24= 24$ .

Após esta apresentação, foram indagadas as seguintes questões: No momento da análise do quadro de expressões, como cada um de vocês percebeu esses significados? Como aplicou o significado quando fez a sua proposição a partir de

“ $24=24$ ”? Desse modo, Registro das proposições. Registro das proposições. Registro das proposições. os participantes puderam realizar uma autoavaliação.

No encerramento da aula, foi proposto um questionário on-line, com o objetivo de que os estudantes registrassem as ideias exploradas na aula.

O questionário era com perguntas subjetivas e foram enviadas por meio de um formulário eletrônico, através de um link com as questões:

**Quadro 8** - Questionário on-line.

<b>Questionário</b>
<p>1. Você conhecia os diferentes significados de Igualdade (=) que foram discutidos nesta aula? Qual você não conhecia (cite, se for o caso)?</p> <p>2. Você já havia pensado sobre os significados do sinal de Igualdade, e que ele (=) assume diferentes significados, e isso pode ser identificado a partir do contexto matemático em que ele está inserido (expressões, equações, funções, derivadas)?</p> <p>3. Como você destaca a importância de se conhecer os diferentes significados de Igualdade para o ensino de álgebra?</p>

**Fonte:** Autora (2023).

O link foi enviado e a gravação foi encerrada pela professora titular da turma. O questionário esteve aberto para respostas durante cinco dias, e foi respondido pelos doze participantes.

Em relação ao primeiro questionamento, ficou claro que o significado da Igualdade já se apresentava como noção para os licenciandos diante das respostas diretas, em que cinco participantes responderam com “*Sim*” e outro com “*Sim, já tinha uma noção de tinha outros significados, só não conhecia todos*”.

Outros dois participantes afirmaram que não tiveram este conhecimento durante sua vida escolar: “*Não conhecia*”.

Em relação à relevância desta pesquisa no grupo de estudantes da licenciatura, é identificada a evidência de que a contribuição era positiva, visto que um participante respondeu que *“Por definição, a primeira vez que ouvi falar foi na disciplina.”*, outro disse que *“Eu conhecia, mas não sabia as definições de cada um”*; *“Já tinha percebido no decorrer das resoluções de atividades escolares, mas nunca tinha estudado sobre”*.

Em relação aos objetivos da aula, em uma das respostas, que o diálogo, a exploração e a proposição dos problemas se apresentaram como fontes de aprendizagem para o licenciando, e sua futura atuação no processo de ensino e aprendizagem de matemática, pois este respondeu de forma reflexiva: *“Não conhecia com estas nomenclaturas apresentadas. Talvez o significado de cada um já é muito comum, mas agora ficou bem melhor tendo o entendimento das classificações da igualdade e assim mostrar para o aluno o porquê da utilização em determinados casos”*.

Em relação à segunda questão, no que tange à autoavaliação pensada no final da aula, evidenciou-se que os participantes não tiveram antes esta prática de repensar a igualdade no contexto matemático em que está inserido, pois *“nunca tinha parado pra pensar nisso. Mesmo em diferentes situações, eu o enxergava com o mesmo significado, ou seja, igualdade”; não*; *“nunca tinha parado para pensar nisso”*; *“não havia pensado sobre”*; e, ainda: *“não me recordo de ter sido mostrado tais definições antes em alguma aula ou encontro matemático, agora, vou analisar melhor essas definições e buscar encontrar o significado de algo ensinado já de forma generalizada”*.

Em relação ao questionamento sobre a importância deste conhecimento sobre os significados da Igualdade, os participantes mostraram, em suas respostas, a atenção quanto à aprendizagem de novos conteúdos, com: *“bom, as classificações permitem diferenciar as formas de igualdade. Isso, talvez, facilite na aprendizagem”*; e *“como forma de ampliação para o conhecimento matemático”*.

Em relação a escrever um trabalho matemático, destacando a preocupação em uma matemática que gere compreensão, um dos participantes afirmou: *“conhecer os significados de igualdade certamente ajuda bastante na hora de redigir um trabalho matemático.”*

Nestas respostas, vemos uma associação ao trabalho através de problemas: *“é de grande importância, pois, a partir do conhecimento dos significados,*

*conseguimos resolver os problemas com mais facilidade”; “melhor compreensão da aplicação em cada caso”; e “facilita o entendimento dos problemas, facilitando o processo de resolução”.*

Esta resposta foi bem completa, na qual conseguimos identificar os objetivos da pesquisa e uma descrição compreensiva desta construção: *“é relevante compreender esses diferentes significados e fazer a diferenciação das três classificações: operacional, equivalência e relacional. Sendo assim, fica evidente que o sinal de igualdade não representa apenas a equivalência, como na maioria das vezes é justificado, mesmo para explicar outros fatores”.*

Enfim, as respostas dos licenciandos nos deram um norte de como foi a aula introdutória ao tema e de como eles conseguiram abordar a educação algébrica diante do significado da igualdade. Citamos alguns aspectos importantes após a análise do questionário: não estamos interessados que os alunos memorizem os significados da igualdade, mas que estes construam um processo de compreensão próprio diante das atividades algébricas que propomos nas próximas aulas.

### **5.3 O Problema de Laura**

Nesta atividade, trabalhamos com uma Atividade Algébrica Global, ou seja, com um contexto, que apresenta a Álgebra e o engajar de temáticas entre Atividade Geracional e a Transformacional. Incluiu a resolução de problemas e de padrões generalizáveis da matemática.

Como instrumento para a produção de dados relativos à compreensão do significado Relacional da Igualdade através da Exploração e proposição do Problema de Laura.

A organização da síntese e do roteiro de planejamento estão descritos abaixo, com detalhes quanto aos objetivos, conteúdo, o que esperávamos com esta atividade e com problema trabalhado.

<b>Atividade: O Problema de Laura</b>
<b>Objetivos:</b>

- Explorar uma igualdade numérica dentro do problema;
- Identificar a compreensão do significado da Igualdade, como relacional;
- Incentivar a proposição a partir de um problema.

**Conteúdo:** Significado da Igualdade relacional dentro de um contexto.

Nesta aula, esperávamos que os participantes pudessem explorar uma igualdade dentro do problema proposto, interagindo com o tema da compreensão da Igualdade, que eles pudessem identificar e compreender o significado relacional da igualdade na atividade algébrica global, para construir suas proposições durante a exploração do problema mantendo a igualdade, e relacionando quanto ao seu significado.

**Parte I - Resolução e Exploração: O Problema de Laura**

Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês, ela reservou R\$70,00 para a compra de CDs ou DVDs; um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R\$70,00?

**Parte II - Atividade de Proposição.**

Para a realização desta atividade, tivemos a participação de 16 alunos. Iniciamos a gravação da aula, com a apresentação na tela do Problema de Laura.

Vamos detalhar sobre a realização da aula e a análise dos dados produzidos diante dos objetivos propostos.

Na Parte I, fizemos uma abordagem através do Problema de Laura, para que os alunos buscassem a exploração como ferramenta de compreensão, de modo a se aprofundar o contexto.

O problema tinha como objetivo trabalhar a compreensão da igualdade relacional como a exploração das possibilidades. O intuito era facilitar a visualização relacional entre os elementos do problema, explorando o significado a partir da investigação com o contexto da igualdade de 70 reais.

Um dos participantes conseguiu realizar compras gastando 64, 68, 72 e 76 reais, sabendo que “*não podia ser números quebrados e sim inteiros*”, mas não conseguiu gastar exatamente os 70 reais. E um outro colega completa:

*- L 10: Porque tem que ser números inteiros, meio cd não pode.*

Um dos participantes iniciou detalhando a “*não solução do problema*”. Por áudio (transcrito abaixo), temos a sua descrição:

*- L 4: Que não tem solução. A compra é de cds e dvd, logo, não posso comprar meio cd, então, tem que ser com números inteiros em quantidades exatas. Eu fiz os múltiplos de 12 e de 16: 12, 24, 36, 48, 60, aí 72 ia passar, 16, 32, 48, 64, e fiz as combinações para dá 70, (48+12=60) e fiz o teste com outros valores (24, 64, 2 cds e 4 dvds= só que a soma ia passar), após os testes e amostragem com os valores e as combinações e possibilidades com estes valores, vi que é impossível de dar exatamente 70.*

L 4 ficou na dúvida se tem outra maneira de resolver, mas só pensou desta forma. Com essa compreensão inicial, partimos para outra resolução, a de L 3, descrita no chat. Depois, pedimos para ela ler o que escreveu e ela complementou com sua conclusão:

*- L 3: Eu pensei na representação por letras, eu chamei a quantidade de cds de x e de dvd de y, e fiz,  $12x+16y=70$ :*

*Depois, atribui valores  $x=1$  cd e  $y=3$  dvd, resultando em 60 reais. Quando  $x=2$  cds e  $y=2$  dvd, a compra será de 56 reais. E para comprar mais um cd, e ficar 3=cds e 2 dvd = 68 reais. E já quando  $x=4$ cd só  $y=1$  dvd = 64 reais. (Chat)*

- L3: *Se a gente botar  $x=5$  ultrapassa o valor do dinheiro. Eu pensei em um sistema, mas não consegui, então resolvi só atribuindo valores. (Áudio).*

Notamos que os estudantes estavam pensando por meio de elementos da álgebra, então, inserimos a questão sobre o significado da igualdade: “ $12x+16y=70$  é uma equação? Seria uma relação de equivalência? Qual o significado da igualdade neste contexto? E no problema?” E os participantes logo disseram (em áudio):

- L 7: *Relacional: porque não conseguimos os valores para ser igual a 70.*

- L 11: *Relacional: mesmo pensamento.*

Os participantes que apresentaram sua resposta com  $12x+16y=70$  se aproximavam do significado da igualdade em equivalência.

A partir destas respostas iniciais, fizemos duas perguntas à turma: “*Por que vocês acham que não dá para ter solução? O que influencia? Justifiquem*”.

- PA: *O que acontece se dividirmos  $12x+16y=70$  ao meio/metade? Como fica?*

- L 1: *Simplifiquei, dá  $6x+8y=35$*

- PA: *E com essa daria certo o cálculo?*

Após um tempo de silêncio na aula, continuamos esse debate, quando um participante afirma:

- L 6: *É a mesma coisa, pois encontraríamos os mesmos valores de cd e dvd, e sobrava dinheiro ou faltava.*

- L 1: *Só dividir por 2, não altera muito os cálculos, acredito que por isso seriam os mesmos.*

Após um tempo em silêncio, relacionamos mais elementos que pudessem avançar na compreensão do problema:

- PA: Lembrando dos múltiplos... O que você diz dos múltiplos de 6?

- L 1: São números pares.

- PA: E de 8?

- L 1: Também.

- PA: O que dizer da soma de dois números pares?

É possível que dê ímpar?

- L 1: Conclusão: não.

Quando na mediação, conseguimos estabelecer perguntas em sequência, de modo que os participantes pudessem observar novos pontos-chaves dentro do problema e, nesse caso, vimos um ponto importante dentro da escrita, da leitura e da interpretação de um trecho do problema:

- PA: E sobre a interpretação e compreensão do problema?

- PA: Laura teria que comprar X cds e y dvds é isso que diz o problema?

- L 6: No problema, diz que ela deve comprar cds ou dvd, né isso?

- L 6: Ela também poderia comprar um ou outro!

Um dos participantes relata que já tinha visto essa possibilidade, mas que, mesmo assim, comprando cds ou dvds, os valores não deram exatamente 70, o que remete que ainda teriam outros pontos-chaves para o problema, concluindo que não há múltiplos de 12 e 16 que dê 70 em suas combinações. O valor total não convergia com os múltiplos.

A pesquisadora sentiu necessidade de continuar a discussão, convidando outros estudantes a apresentarem suas compreensões. Surgiu algo no sentido de representação por sistemas, já modificando o problema, surgindo a ideia de um novo problema a partir da exploração do problema inicial:

- L 11: Pensei em um sistema algébrico, mas não consegui, e por isso que fiz uma proposição, estipulei o número exato de itens comprados.

- L 9: Para dá 70, só consegui inserindo porcentagem.

Diante dessas falas, dissemos para a turma que, agora, eles teriam a missão de propor um problema em alusão ao Problema de Laura e, na continuidade da aula, cada um iria fazer a discussão de sua proposição.

## Parte II- As proposições

Neste tempo da aula, se esperava que os estudantes refletissem sobre as discussões diante da “não solução fechada do problema” e dos elementos discutidos na exploração, tendo em vista o significado da igualdade dentro do contexto, para que pudessem realizar suas proposições.

Nesta etapa, os participantes teriam o espaço para que apresentassem seu processo de compreensão do significado relacional da igualdade em um contexto de proposição a partir do problema de Laura. Ficou claro para eles que o problema de Laura era a fonte para a proposição de novos problemas e o foco no significado da igualdade.

Assim, os estudantes explicaram a solução pensada na direção de um novo problema que respondesse ao problema inicial, através da proposição.

Nas proposições, observamos diferentes compreensões sobre como propor um novo problema, e apresentamos sete delas. Essas proposições foram escolhidas por terem sido as únicas que foram apresentadas na aula e discutidas entre os participantes.

Um dos problemas propostos foi o de L2: cite algumas formas de se obter o valor maior ou igual a 60, e menor ou igual a 80. “Mudei o final do problema”.

- *Laura é fã de música popular brasileira e vai realizar uma compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Cite algumas formas de se realizar a compra com um valor entre 60 e 80 reais.*

A partir dos resultados que conseguiu na solução inicial, ela apresentou que, com esses valores de 60 e 80, conseguiu quantidades exatas para a compra de CDs e DVDs.

Ela disse que não tiraria o termo “ou” do problema, porque dava para comprar só CD. Que daria 5 CDs a 12 reais, gastando exatamente 60 reais. E que também daria para comprar só DVD de 16 reais, gastando 80 reais na compra de 5 DVDs.

Em outro problema proposto, o participante considerou um valor a mais no orçamento que Laura teria, para poder realizar a compra:

- *Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês, ela reservou R\$70,00 para a compra de CDs e DVDs. Um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Ela ganhou mais 30 reais de sua mãe, com isso, ela comprou 7 itens. Quantos CDs e quantos DVDs ela consegue comprar gastando exatamente todo o dinheiro?*

O participante explicou que, como ela ganhou mais 30 reais, fica com um total de 100 reais. Como foi estipulada a quantidade de itens que ela comprou, agora, temos um problema que pode ter solução exata. Na sua proposição, a compra seria de CDs e DVDs. Para isso, podemos montar um sistema, representando CD pela letra C, e DVD pela letra D. Com relação à quantidade itens  $C+D=7$  e com relação ao dinheiro gasto comprando cds e dvds:  $12C+16D=100$ , o participante apresentou a solução com a compra de 4 DVDs e 3 CDs.

Para uma outra participante, a análise foi feita com a combinação de valores em uma tabela dos possíveis valores, e chegando à proposição de que Laura precisaria de mais dinheiro.

- *Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês, ela reservou R\$70,00 para a compra de CDs e DVDs. Um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R\$70,00 e sabendo que ela decidiu comprar 4 CDs e 2 DVDs. Quanto ela ainda precisa adquirir para realizar a compra?*

Na proposição, este problema proporia uma quantidade fixa de CDs e DVDs, e que o dinheiro não daria para a compra, ou seja, Laura precisaria adquirir mais dinheiro do que R\$70,00. 4 CDs custam R\$48,00 e 2 DVDs custam R\$32, necessitando de um total de R\$80,00. E  $80-70=10$ . Ou seja, ela ainda precisava de mais R\$10,00.

Também foi feita uma proposição em outro problema: reescreva todo o problema substituindo o valor de 70 por 80.

- *Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês, ela reservou R\$80,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R\$80,00?*

E assim a compra seria de 4 CDs e 2 DVDs.

Um outro problema foi proposto a partir das combinações entres os valores já realizados, tendo a conclusão de que 68 reais era uma boa solução. Para isso, seria pensado no troco, e na compra de outro produto para gastar exatamente os 70 reais.

- *Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês, ela reservou R\$70,00 para a compra de CDs e DVDs. Um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Além disso, ela queria ter um troco de R\$2,00 para comprar um doce. Então, quantos CDs e DVDs ela deverá comprar para conseguir satisfazer tais demandas gastando exatamente os R\$70,00?*

Focando na compra de CDs e DVDs e ainda do doce, o participante propôs o problema. E, neste caso, 68 reais era uma boa solução. Então, pensamos no troco, pensamos em 3 CDs e 2 DVDs.

Outro participante pensou no mesmo formato, fixando a compra de 5 produtos, comprando CDs ou DVDs e gastando exatamente os 70 reais.

Uma das proposições excluiu a condição de gastar exatamente os R\$70,00:

- *Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês ela reservou R\$70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa*

*R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Já que ela não pode comprar CDs e DVDs para resultar em exatamente R\$70,00, quantas formas diferentes ela teria de comprar sem ultrapassar seu orçamento?*

Levantou-se, ainda, a questão de que o próprio problema afirma que ela não gastará os R\$70,00 e sim gastará menos:

*- L 3: sim, eu abordei essa pergunta, estou acostumado. Porque sempre que eu vou comprar produtos e CDs de músicas eu sempre levava dinheiro a mais, nunca ia com o valor exato. Se eu levasse 20 reais, eu observava o valor que o feirante falava de jogos em CDs e DVDs em um valor aproximado de 20 que eu levei.*

Neste caso, o participante considera um pensamento de comprar CD e DVD, e também de comprar CD ou DVD. Em relação aos CDs, seria no máximo 5, ou 4 DVDs, no máximo. Juntando CD e DVD seriam 9 possibilidades. Ao todo, são 11 possibilidades. 20 formas diferentes, sem ultrapassar os 70. A partir de comprar 1 CD; 1 DVD; 1 CD e 2 DVDs; 1 CD e 3 DVDs... Há várias combinações.

Na proposição seguinte, Laura gasta exatamente R\$70,00, na compra de CDs e DVDs, inserindo a informação de um desconto percentual no final da compra.

- *Laura é fã de música popular brasileira. Em um certo mês, ela reservou R\$70,00 para a compra de CDs e DVDs. Um CD custa R\$12,00 e um DVD custa R\$16,00. Ela gastou exatamente R\$70,00. Quantos CDs e quantos DVDs ela comprou, se, ao final da compra, ela ganhou 12,5% de desconto?*

Assim, para esse problema, a compra seria de 4 CDs, gastando 48 reais, e 2 DVDs gastando 32 reais. A compra seria num valor total de 80 reais, com o desconto de 12,5%, o que representa 10 reais sobre o valor final, dando exatamente 70 reais com este desconto.

É importante fazermos uma observação a partir das reflexões de Silveira (2016), o qual coloca em sua análise que, por vezes, os estudantes não se aprofundam na exploração do problema, em que era possível um caminhar maior, e que, diante disso, destaca que o tempo da aula colabora para que isso aconteça, mas que o principal motivo é o fato de ser abordagem nova e de pouco conhecimento por parte dos estudantes.

No caso desta pesquisa, é perceptível que os licenciandos buscaram explorar o problema, pensando em uma solução para o fato de gastar “exatamente R\$70,00”, limitando essa tarefa.

No encerramento da aula, realizamos considerações sobre as evidências apresentadas pelos participantes a respeito da disposição em explorar o problema, questionando e justificando suas afirmações quanto à resolução do mesmo, e de sua criatividade matemática em propor novos problemas, tanto buscando complementar o problema de Laura quanto inserindo novos objetos matemáticos no contexto.

#### 5.4 Regularidades com números

Agora, vamos apresentar a análise de uma atividade algébrica, exposta a partir de uma sequência com regularidades, como aporte para a exploração quanto à compreensão da igualdade como operacional. De início, apresentamos a primeira parte do problema para que os participantes pudessem realizar os procedimentos de resolução. Na segunda parte do problema, trabalhamos juntos, através da exploração e proposição de problemas.

A organização e a síntese do roteiro e do planejamento da aula estão descritas abaixo, com detalhes quanto aos objetivos, conteúdo, o que esperávamos com esta atividade e o problema trabalhado.

#### **Atividade: Regularidades com números (um caso multiplicativo)**

##### **Objetivos:**

- Identificar uma regularidade entre as operações numéricas propostas;

- Investigar a compreensão do significado operacional da igualdade;
- Realizar a exploração e a proposição de problemas como conclusão da atividade.

**Conteúdo:** Atividade Algébrica abordando o significado operacional da Igualdade, em uma sequência com regularidades.

Nesta aula, esperávamos que o problema proposto despertasse nos participantes uma construção da compreensão do significado operacional da Igualdade, interagindo com a regularidades expressas na sequência. A participação ativa dos estudantes na aula, com evidências deste processo, incentiva a pesquisa e a justificativa de contribuir na sua formação inicial, nos servindo de dados para uma análise qualitativa detalhada.

### Parte I:

#### Problema: Regularidades com números (um caso multiplicativo)

Investigue o que acontece ao efetuar as seguintes multiplicações com suas igualdades, nos itens a e b:

a)

- $8 \cdot 8 = 64$
- $9 \cdot 7 = 63$
- $10 \cdot 6 = 60$
- $\_ \cdot \_ =$
- $\_ \cdot \_ =$
- $\_ \cdot \_ =$

b)

- $15 \cdot 15 = 225$
- $16 \cdot 14 =$
- $17 \cdot 13 =$
- $18 \cdot 12 =$
- $\_ \cdot \_ =$
- $\_ \cdot \_ =$

### Parte II Exploração e Proposição

c) Observando as ideias, faça a sugestão de uma operação para prever o resultado de 21 multiplicado por 19.

d) Como podemos escrever algebricamente a representação dessas regularidades?

Para a realização desta atividade, contamos com a participação de 16 licenciandos. Iniciamos a gravação da aula, com a apresentação na tela do Problema da Atividade Algébrica “Regularidades com números (um caso multiplicativo)”.

Agora, iremos iniciar o detalhamento sobre a realização da aula e a análise dos dados produzidos diante dos objetivos traçados.

Parte I – Introdução da aula com a apresentação do problema, com sequências de operações entre dois fatores numéricos e o produto, por meio do compartilhamento de tela, em que os estudantes iriam realizar a compreensão e a resolução, apenas dos itens a) e b).

<b>Problema: Regularidades com números (um caso multiplicativo)</b>	
Investigue o que acontece ao efetuar as seguintes multiplicações com suas igualdades, nos itens a e b:	
a) <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>8.8=64</math></li> <li>■ <math>9.7=63</math></li> <li>■ <math>10.6=60</math></li> <li>■ <math>\_.\_ =</math></li> <li>■ <math>\_.\_ =</math></li> <li>■ <math>\_.\_ =</math></li> </ul>	b) <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>15.15=225</math></li> <li>■ <math>16.14=</math></li> <li>■ <math>17.13=</math></li> <li>■ <math>18.12=</math></li> <li>■ <math>\_.\_ =</math></li> <li>■ <math>\_.\_ =</math></li> </ul>

Na realização da resolução, não teve a intervenção da pesquisadora. Foi estipulado um tempo de 10 minutos para que os estudantes realizassem essa etapa, não apenas realizando o cálculo, mas também justificando cada resultado, e a regularidade de cada sequência.

Esta resolução seria compartilhada e discutida na próxima etapa pelos participantes.

Parte II- Desenvolvimento: Exploração a partir de sequências de operações entre dois fatores numéricos e o produto, explorando os itens a) e b) e depois c) e d).

c) Observando as ideias, faça a sugestão de uma operação para prever o resultado de 21 multiplicado por 19.

d) Como podemos escrever algebricamente a representação dessas regularidades?

Inicialmente, compartilhamos as resoluções e exploramos as regularidades de a) e b), observamos o padrão entre os fatores e o padrão entre os resultados e os produtos.

Observemos as mensagens no chat. O participante L9 apresentou a seguinte compreensão:

- L 9: *O padrão é somar de um lado e subtrair do outro.*

- PA: *É o mesmo padrão entre a e b?*

- L 9: *Sim, acredito que sim.*

- PA: *Como podemos escrever esse padrão entre os resultados?*

- L 9: *Os resultados aparecem em ordem decrescente, no qual a diferença entre eles será sempre 2.*

Quando perguntei “*todos vocês concordam?*”, o participante L5 destacou que a sua compreensão era diferente, trazendo, em seu discurso por áudio, algo que ele já havia aprendido anteriormente na academia e, quando instigado sobre o que ele apresentou quanto às regularidades do item a), ele expõe o seguinte:

- L5: *Assim, eu não concordo muito não, porque um padrão que eu já tinha percebido há um tempo é que, tipo, você pegar um número e elevar ao quadrado vai dá um número, e se você fizer o antecessor vezes o sucessor vai dá aquele número ao quadrado menos um, sempre vai acontecer isso.*

- PA: *E no caso a) 64, 63, 60 tem a ver com seu pensamento?*

- L 14: *tem sim, por exemplo,  $8 \times 8 = 64$  e o sucessor do 8 é o nove e o antecessor é o 7, então, vai ser  $8^2 - 1$ .*

- L 10: E do mesmo jeito  $15 \times 15 = 225$  e  $16 \times 14$  vai ser  $15^2 - 1 = 224$ .

Os demais participantes continuaram a investigação:

- L 2: Eu percebi uma regularidade, mas não sei explicar.

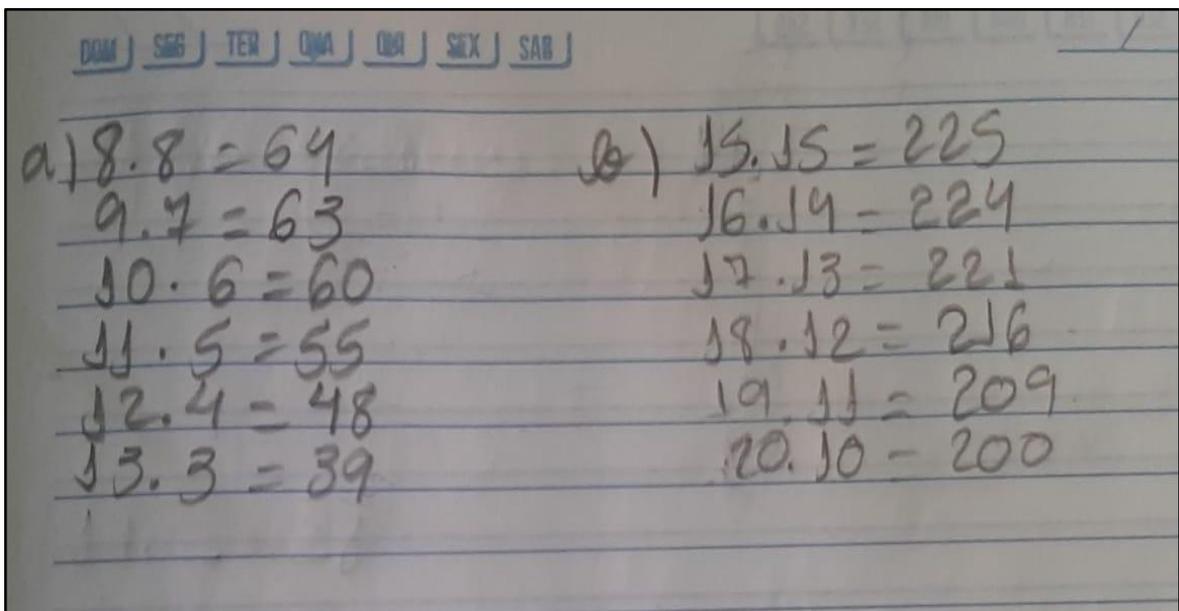
$15 \times 15 = 225$ , aí diminui 1, fica 224.

$16 \times 14 = 224$ , diminuem 3 ficando 221.

$17 \times 13 = 221$ , diminuindo 5 dá 216.

$18 \times 12 = 216$ , diminuem 7 e  $19 \times 11 = 209$ .

**Figura 2** – Registro do caderno de L 2.



**Fonte:** Dados da pesquisa, 2022.

A seguir, sugerimos que fôssemos para o item C, com a indicação de uma operação para rever o resultado  $21 \times 19$ . E surgiram as operações de 20 multiplicado por 20 e também de 21 multiplicado por 21:

- PA: Se fosse para multiplicar 21 vezes 19, qual estratégia você utilizaria, no dia a dia rápido, quanto é  $21 \times 19$ ?

- L 5: Começamos por  $20 \times 20$ .

- L 8:  $21 \times 21$ , não?

- L 5: acho que me confundi com  $20 \times 19$ .

- L 16: *Agora que estou vendo esta aula, eu faria  $20 \times 20 - 1 = 400 - 1 = 399$ . Mais fácil do que fazer a conta inteira.*

- L 8: *Eu faria assim: multiplicaria  $21 \times 21$  e o resultado subtrairia 21, o resultado era 420. Diminuir uma casa do 20 que é a quantidade de vezes que 21 iria se repetir:  $420 - 21 = 399$ , que é correto.*

Neste momento da exploração, L6 destaca seu pensamento e detalha:

- L 6: *Agora, estou percebendo uma regularidade.*

*Do 15 vezes 15 igual a 225, para 17 vezes 13, a diferença do resultado é 4.*

*Essa diferença do resultado é 17 menos 15 igual a 2, que é igual a 15 menos 13, que é 2 também. Isso dá uma diferença total de 4. 225 menos 4 é igual a 221, entre os fatores. Então, a diferença entre os dois produtos é a diferença entre os fatores. Deu para entender?*

- L 4: *Sim, associou a diferença total com a diferença entre os fatores.*

- L 10: *Segue uma ordem. A primeira expressão, 16 vezes 14, seria 1 vezes 1 igual a 1 menos 225. E 16 vezes 14 igual a 224, com 2 vezes 2 igual a 4, 225 menos 4 igual a 221, e assim continuaria a sequência.*

A partir deste entendimento apresentado pelo participante, vamos ao item d), percebendo como seria possível escrever algebricamente a representação dessas regularidades. Durante esta etapa, foi observado se os participantes se direcionavam ao significado operacional da igualdade:

**Figura 3** - Registro da solução de L 5.

$$x \cdot x = x^2$$

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$$

$$\vdots$$

$$(x+n)(x-n) = x^2 - n^2$$

**Fonte:** Dados da pesquisa (2022).

- L 5: *Eu fui só fazendo a multiplicação, somando 1 de um lado e subtraindo 1 do outro lado.*

*Essa multiplicação de  $(x+1)(x-1)$  me lembra um conceito que agora eu esqueci como se chama.*

*Esse  $(x+n)(x-n) = x^2 - n^2$ , Aí interessante se  $n=x$ .  $(2x)(0) = 0$ . Ou seja, a igualdade é válida.*

*Eu fiz a multiplicação dos parênteses para  $x^2 - n^2$ , não relacionei aos resultados.*

- PA: *Você representou algebricamente ou também os resultados?*

- L 9: *Eu acredito que é válido para os resultados também.*

$$X=8$$

$$8 \times 8 = 64$$

$$64 - 1 = 63$$

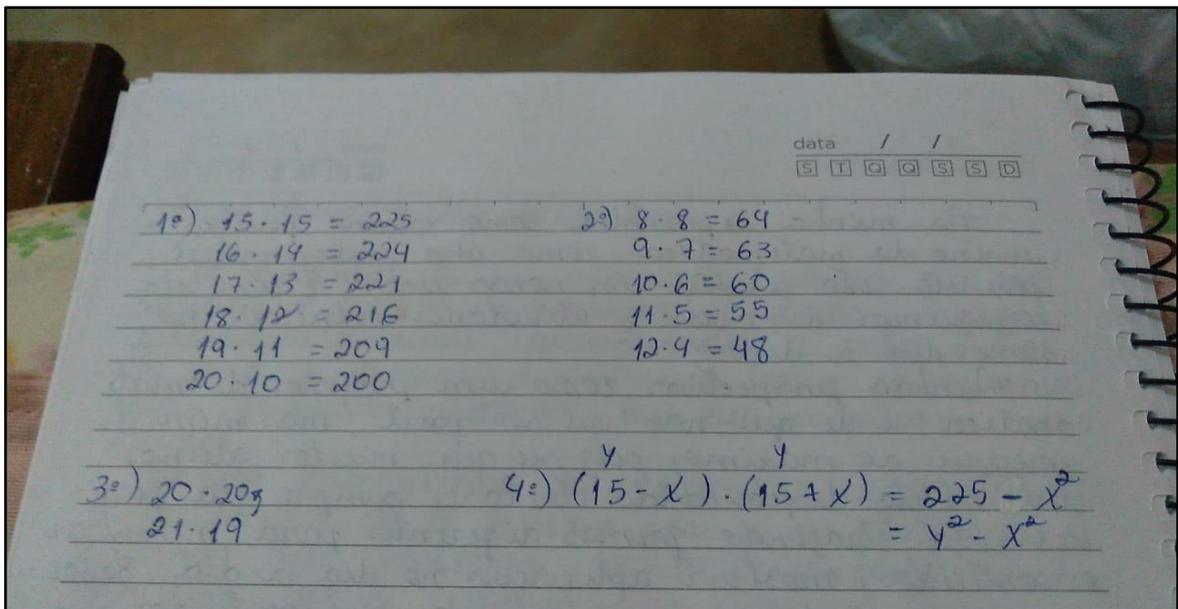
$$64 - 4 = 60$$

$$64-9=55$$

Por que o 9?  $3^2=9$ ,  $x^2 - n^2$

- L 12: Lembrei do conceito de produto notável.

Figura 4 - Registro da solução de L 9.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Vejamos, agora, outra resposta no chat:

- L 8:  $(x-y)(x+y)=y^2-x^2$

- PA: Comente a sua resposta.

- L 8: Antes de pôr o y, eu coloquei 15.  $Y=15$

$$:(x-15)(x+15)=15^2-x^2.$$

O x é o primeiro termo

Para  $16 \times 14$

$$16-15=1$$

$$14-15=1$$

x era o resultado subtração e da soma.

$$8 \times 8 \quad y=8$$

$$X \text{ a posição do número. } 9 \times 7=63.$$

64-1

Observemos, ainda, a seguinte resposta:

$$\text{- L 11: } 20 \times 20 = 400 \quad x = 20$$

$$21 \times 19 = 399 \quad (x+1)(x-1)(x^2 - 1^2)$$

$$22 \times 18 = 396 \quad (x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$$

$$23 \times 17 = 391 \quad (x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$$

Como ponto para instigar a proposição, foi colocada a seguinte questão: deem um exemplo de outra multiplicação que poderia ser feita nesta regularidade, para cada participante desafiar um ao outro a responder a sua multiplicação. E surgiram as operações: 12 vezes 8; 18 vezes 42 e 26 vezes 18.

*- L 4: A resolução para 18x42*

*18+42=60 e divide por 2=30, a metade dos dois, então, o número de x=30, a diferença de 30 para 18 é 12. E de 42-30=12.*

*- L 7: Então vai ser (30-12) (30+12) = 30<sup>2</sup> - 12<sup>2</sup> = 900 - 144 = 756.*

*L 10: Eu também pensei em calcular primeiro a média, para chegar ao quadrado perfeito.*

*- L 1: 26x18*

*Diminuindo 1*

$$(25 \times 19)$$

$$(24 \times 20)$$

$$23 \times 21$$

$$22 \times 22$$

$$(22+4) (22-4) = 22^2 - 4^2 = 484 - 16 = 468.$$

Sobre a conclusão da aula e a compreensão da Igualdade, os participantes destacaram a compreensão operacional, tanto nas multiplicações quanto entre a relação algébrica que representou a regularidade entre os fatores e o produto. Na representação algébrica, houve um entendimento de ser equivalência, porém a escrita

evidenciou que não era justamente pela relação que não estava bem estabelecida pelo sinal da igualdade.

### 5.5 O Reflorestamento

Agora, iremos apresentar uma análise da próxima atividade algébrica, trabalhada com foco na compreensão dos diferentes significados da igualdade. Inicialmente, apresentamos o problema.

Na segunda parte da aula, solicitamos que os participantes organizassem a proposição de problemas.

A organização e a síntese do roteiro e do planejamento da aula estão descritas abaixo, com detalhes quanto aos objetivos, conteúdo, o que nós esperávamos com esta atividade e o problema trabalhado.

<b>Atividade Algébrica Problema do Reflorestamento.</b>
<p><b>Objetivos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Explorar o problema e realizar a proposição de problemas dentro do contexto do problema apresentado, compreendendo os significados da igualdade.</li> </ul>
<p><b>Conteúdo:</b> Significado da igualdade através da proposição de problemas.</p>
<p>Com esta aula, pretendíamos que os participantes pudessem interagir na aula já iniciando pela proposição de problemas. O ponto de inspiração foi o texto do reflorestamento. Os participantes seriam estimulados a apresentar os problemas, explorando suas ideias, para que, a partir de reflexões, eles pudessem expressar a compreensão dos diferentes significados da Igualdade, a fim de concluirmos a produção dos dados desta pesquisa.</p>

**Parte I - Exploração e Proposição de problemas.**

**Problema do Reflorestamento**

"Em uma floresta já existente, 424 novas árvores foram plantadas. Alguns anos depois, as 217 árvores mais antigas foram cortadas. A floresta, então, contém 1.062 árvores.

**Parte II - Considerações sobre a temática trabalhada na pesquisa.**

Para a realização desta atividade, contamos com a participação de quinze licenciandos. Iniciamos a gravação da aula com a apresentação na tela do Problema da Atividade Algébrica “O problema do Reflorestamento”.

Agora, iniciaremos o detalhamento sobre a realização da aula e a análise dos dados produzidos diante dos objetivos traçados.

Parte I – Introdução da aula com a apresentação do problema, por meio do compartilhamento de tela, em que os estudantes iriam realizar a atividade através da proposição de problemas, que estão apresentados a seguir.

- *Proposição de L 5: quantas árvores tínhamos antes de serem plantadas as novas?*

Para a exploração do problema, L 5 apresentou a resposta de 855 árvores:  $X+424-217=1062$ , logo, são iguais a 855 arvores.

Os alunos formularam proposições semelhantes quanto à pergunta:

- *L 17: Quantas arvores tínhamos antes de plantar as novas?*
- *L 4: Tinha quantas árvores nesta floresta antes de plantarem as novas?*
- *L 10: Quantas árvores tínhamos antes das árvores serem cortadas?*

Tivemos a mesma resposta. Representando por  $x$  as árvores que tínhamos, podemos ter a relação  $x - 217 = 1062 + 217$ , que é igual a 1279 árvores.

- PA: Como vocês usaram a igualdade?
- L 17: Como relacional.
- L 10: Também relacional.
- L 4: Sim, relacional.

Proposição de L 1:

- *Caso não tivessem sido plantadas as 424 novas árvores. quantas árvores teriam agora na floresta?*

Respostas: 638.

- L 8: *Caso não tivesse sido plantadas as 424 árvores novas, quantas árvores teriam agora na floresta?*
- L 1: *É bem simples, precisa apenas subtrair as 424 do valor total após ter sido cortadas, que é 1062, resultando 638.*

Proposição de L 3:

- *Qual o total de árvores antes de serem cortadas? Quantas árvores antes do novo plantio?*

Proposição de L 12:

- *Se cortarem 75% das árvores velhas restantes, restariam mais árvores velhas ou novas?*

Nesta proposição de L 12, temos novos elementos, como, por exemplo, a questão dos intervalos de tempo.

- *Uma floresta tem 1.062 árvores. Há 5 anos atrás, foram plantadas 424 árvores e 2 anos depois foram cortadas 217. Quantas árvores tinham há 6 anos atrás? E há 4 anos? E há 3 anos?*

Proposição de L 8:

- *Em uma floresta já existente, 424 novas árvores foram plantadas. Alguns anos depois, as 217 árvores mais antigas foram cortadas. A floresta então contém 1.062 árvores. Qual total de árvores antes de serem cortadas? Quantas árvores havia antes do novo plantio?*

O comentário apresentado pelo participante para a sua proposição foi de que “Para saber quantas árvores foram plantadas antes do plantio, basta fazer uma representação de  $x+424-217=1062$ , isso resultaria em  $x=855$ , que seria o total de árvores antes do plantio”. “Aí, para saber quantas haviam antes de serem cortadas é só fazer  $855+424$ , já que sabemos que antes do plantio havia 855 árvores, que dá um total de 1279 árvores na floresta antes de serem cortadas.

Após a apresentação destas proposições, vou descrever a parte final com a análise das falas dos participantes, em que eles retomaram o “quadro 5” para exemplificar a compreensão dos significados da Igualdade.

## Parte II – Considerações sobre a temática trabalhada na pesquisa

Nesta segunda parte da aula, instigamos os participantes a falarem e escreverem pelo chat sobre as considerações acerca destas aulas com a proposta de investigar o tema:

- *L 2: Essa questão da igualdade a gente usa nas disciplinas, mas sem conhecer profundamente.*

L 2, por áudio, lembrou sobre a nossa questão relacionada ao tema da pesquisa, reconhecendo o uso da Igualdade, mesmo “sem conhecer profundamente”, relacionado ao seu significado, e seu uso dentro de um problema, que é a tarefa que realizamos durante as aulas.

A seguir, mais registros deste momento, pelo chat:

- *L 1: Agora, consigo dizer que  $X+3=7 \rightarrow x=7-4 \rightarrow x=4$  é uma igualdade Relacional.*
- *L 5: Eu quero dizer uma equivalência que pensei  $2x+3=5+x$ , colocando  $-(x+3)$  em ambos os lados,*

teremos:  $2x+3-(x+3)=5+x-(x+3)$   $2x+3-x-3=5+x-x-3$ ,

e o resultado  $x$  é equivalente a 2.

- L 9: Operacional- $\rightarrow 2+9=11$ . Equivalência- $\rightarrow 3x=x+6$ .

- L 16: E outra relacional é- $\rightarrow g=3+2+4$ .

- L 11:  $81/9=9$  é operacional.

Nestas mensagens,

- L 12: Foi interessante criar um problema a partir de uma expressão.

- L 8: Não foi tão fácil, mas foi divertido.

Vimos a aplicação do significado da Igualdade, com compreensão dos diferentes significados, ao exemplificar e relacionar, nos encontramos em um acontecimento. Assim, “em nossa visão, a compreensão de Matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar” (ONUCHIC *et al.*, p. 47, 2014).

## 5.6 Seminário de formação

Para complementar o objetivo de “contribuir para a formação dos licenciandos na área da Educação Algébrica”, e como este é um processo dentro da formação inicial de professores de matemática, realizamos, ao final do trabalho com os problemas, uma aula com um seminário.

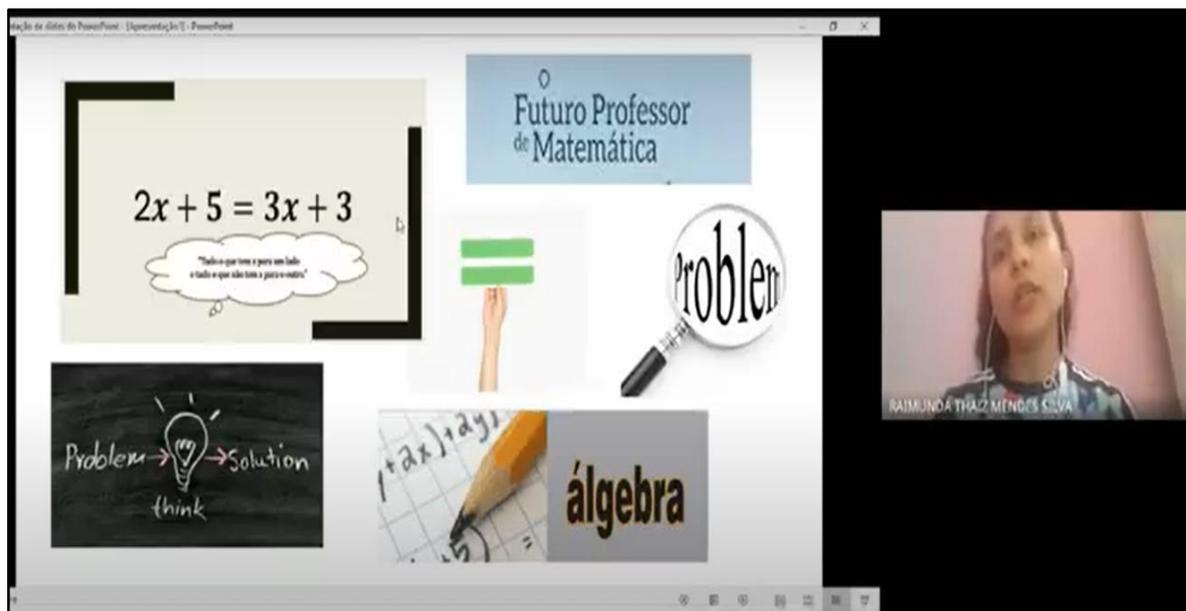
Neste seminário, apresentamos o aporte teórico da pesquisa e discutimos a respeito do tema dentro do ambiente da formação inicial. Aproveitamos para incentivar os licenciandos a buscar estudos e formações para além da licenciatura, enfatizando que, por mais que eles tivessem a expectativa de logo iniciar a docência, seria muito interessante que eles aproveitassem para participar de projetos.

Podiam, também, fazer uma seleção para a pós-graduação, e poderiam fazer de sua formação um ambiente de pesquisa, buscando sanar seus questionamentos, pois o processo de ensino e aprendizagem é um universo de contínuo estudo.

Como detalhamento do seminário, iniciamos pelo delineamento teórico do livro de Onuchic (2014), com a teoria e a prática a partir da temática de resolução de problemas, e fizemos uma abordagem do livro desde o ensino *para* a resolução de problemas propostas por Schroeder e Lester, expondo, ainda, a abordagem de Polya com o ensino *sobre* resolução de problemas, e chegando às pesquisas de ensino-aprendizagem-avaliação *via* resolução de problemas de Onuchic e Allevato, em (ONUCHIC *et al.* 2017) constatando que o ponto de partida sempre é o problema, avançando em suas pesquisas com um processo *através* da resolução de problemas no fazer matemática pelo aluno durante a aula.

Nesse sentido, a intencionalidade maior é dada pelo professor para que o aluno relacione os novos conceitos da matemática. Apresentamos, para eles, os dez passos da metodologia, e os três blocos do Fluxograma de Romberg-Onuchic, em (ONUCHIC *et al.* 2017), que são passos direcionados ao planejamento do professor para a sala de aula, como exemplos de metodologias que o docente pode aplicar com os estudantes.

**Figura 5** - Tela da apresentação.



**Fonte:** Registro da autora (2022).

Em sequência, apresentamos as reflexões de Andrade (2017), no livro "Perspectivas para a resolução de problemas" (ONUCHIC *et al.* 2017). Andrade (2017)

apresenta seu caminhar histórico dentro das pesquisas com um olhar crítico sobre a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no cotidiano da sala de aula, tendo como base a sua pesquisa de mestrado e as pesquisas de seus orientandos, que são também integrantes do GEPEP. Destacamos um ponto específico desse autor que é a Codificação e Descodificação de problemas, e a multicontextualidade na sala de aula.

A perspectiva da codificação e da descodificação é colocada como o entendimento dos processos que os estudantes realizam e se integram para a formalização da matemática.

A multicontextualidade se refere a reflexões sobre quais problemas recomendar ao professor. Será que os problemas do livro didático são suficientes? É preciso saber se são do contexto local e com as preocupações sociais inerentes à formação dos estudantes e, portanto, à questão da exploração, tendo em vista as singularidades entre seus alunos com privação de liberdade, autismo, licenciatura, crianças pequenas, enfim, diversos contextos, chegando, desse modo, a propostas de pesquisas com a proposição de problemas, em que o professor seria o próprio autor de seus problemas, para planejar as aulas e ser independente, e ainda, trabalhar a proposição com os estudantes, desenvolvendo a criatividade, a leitura e a interpretação dos estudantes.

Deixamos uma reflexão: durante as nossas atividades, utilizamos uma codificação da linguagem matemática e uma descodificação, identificando o significado da igualdade dentro do contexto e suas multicontextualidades.

Como considerações sobre o seminário, deixamos o depoimento sobre a relação entre teoria e prática, e o reflexo entre elas, em que a parte da teoria, pesquisas, teóricos, metodologias servem de ferramentas para a nossa atuação prática como professora e pesquisadora. Estamos sempre buscando mais ferramentas e organizando-as em uma caixa de suporte para o nosso trabalho.

Como exemplo de ferramenta teórica, falamos sobre “o que é um problema?”, afirmando que melhor do que saber a teoria, é saber a fonte, onde ir buscar. Nessa direção, nossa fonte para o conceito de problema é que um problema é entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação que desperte no aluno querer conhecer algo novo, desejando explorar, de forma efetiva, um problema, (ANDRADE, 2017, p. 364).

A Educação Algébrica, quanto à atividade algébrica, se relaciona ao significado da igualdade. Levantamos esses pontos citando Kieran (1998;2004;2014), uma vez que estas pesquisas se voltam para a investigação do processo de construção do significado de um objeto algébrico. As atividades descritas em Geracional, Transformacional e Global se apresentam como suporte para a investigação. Também apresentamos essas atividades por meio dos exemplos aqui descritos no capítulo 2.

Finalizamos o seminário com a provocação aos licenciandos: *“A Exploração, Resolução e Proposição de Problemas é uma matemática para ensinar?”*

Concluimos, assim, citando Kilpatric (2017), haja vista que, na perspectiva de refazer a rota, reformulando os caminhos, cada um tem o seu caminho e a forma de caminhar, o objetivo nos ajuda a recalcular a rota e ordenar nossas vivências no fazer matemática na sala de aula.

## 6 PESQUISA SÍNCRONA MEDIADA POR TECNOLOGIA EM CONTEXTO DE ISOLAMENTO SOCIAL (PANDEMIA COVID 19)

O contexto social da pesquisa foi o ano de 2021, no qual o mundo viveu, desde o ano de 2020 uma pandemia em decorrência do COVID19. A pandemia vem afetando importantes eixos sociais, como, por exemplo, a saúde, a alimentação, o emprego e a educação, especialmente pela recomendação da medida de isolamento social.

As escolas e as universidades brasileiras estavam funcionando com aulas remotas intermediadas por ferramentas tecnológicas, através de rede de internet no momento da produção de dados desta pesquisa, o que isolou os estudantes em suas condições individuais e familiares, em um país subdesenvolvido como o Brasil com poucas possibilidades de usufruírem dos recursos públicos educacionais.

Neste cenário, as aulas aconteceram em isolamento social, por aulas remotas e síncronas com os licenciandos. Portanto, os licenciandos, a professora titular da disciplina e a pesquisadora atuante estavam em suas casas e utilizavam computador, smartfone e rede de internet durante as aulas.

A interação foi totalmente virtual e, com isso, observou-se a importância de descrever os detalhes durante a investigação.

Para que a pesquisadora explorasse melhor a interação síncrona, se dedicou a participar de eventos e cursos sobre temas da álgebra, a fim de que estivesse situada neste formato e nas discussões atuais do ensino remoto.

Um ponto de destaque é a frequência dos licenciandos, a turma sempre se apresentava bem participativa, a frequência mínima registrada na disciplina, durante a pesquisa, foi de 70,6%, e foi positiva quanto à participação nas atividades das aulas.

Sobre os desafios da realização da pesquisa neste formato, destacamos: a interferência de outras pessoas, como, por exemplo, pessoas fazendo barulho na casa dos participantes, e eles se sentiam desconcentrados. Como evidências, apresentamos mensagens dos participantes no chat: “*desculpa não ligar o microfone, tá zuada demais kkkkk*”, “*tem barulho aqui em casa*”, “*eu não posso falar no momento*”, e barulhos externos que tiravam a atenção durante a aula.

As redes de energia e de internet oscilavam, assim, alguns participantes não podiam participar da oficina até o final, ou precisavam atualizar a página da web

conferência, não ligar a câmera, de modo a não ocorrer o contato visual durante os diálogos, como percebe-se através de algumas falas: “preciso *carregar aparelhos*” e “*está sem energia aqui em casa, por isto não participei da aula.*”, “*espera, Internet oscilando*” e “*erro de digitação, vou corrigir*”.

A pesquisadora não tinha o controle para observar e analisar todos os participantes em conjunto, ou seja, o destaque era mais individualizado, na expectativa de que os outros estivessem realizando a exploração.

Um dos desafios durante este período pandêmico foi se dedicar à etapa de pesquisa de mestrado enquanto estava em formação na pós-graduação, atuando como pesquisadora em isolamento social. Para enfrentar essa situação, buscou-se participar de cursos, eventos e transmissões ao vivo com educadores matemáticos de diversas regiões do Brasil e do âmbito internacional. Através dessas atividades, foi possível manter o foco na pesquisa e incentivar o equilíbrio emocional, mantendo o foco nas atividades acadêmicas.

Além disso, ao longo desse período desafiador, a pesquisadora também explorou novas abordagens metodológicas para coletar e analisar dados de forma remota, aproveitando as ferramentas tecnológicas disponíveis. Isso permitiu uma adaptação criativa às circunstâncias únicas, demonstrando a resiliência e a capacidade de inovação diante das adversidades impostas pela pandemia.

### **6.1 As possibilidades de divulgação da pesquisa e as contribuições dessas experiências**

A pesquisa, quando ainda em desenvolvimento, foi compartilhada em eventos importantes para a educação matemática. Isso foi possível através de Comunicação Científica escrita, de forma oral, em anais de eventos, resumos expandidos e artigo para capítulo de livro de um evento. Estas experiências ocorreram de forma on-line entre os anos de 2020 e 2021, e muito contribuíram para o crescimento da pesquisa e sua análise qualitativa.

A pesquisadora, ao compartilhar sua temática, debatia e anotava sobre o que outros pesquisadores estavam desenvolvendo na área, inclusive no GEPEP, em que as pesquisas, com ênfase no ensino e na aprendizagem da álgebra através da Exploração e Proposição de Problemas, se voltavam às equações e funções

polinomiais, deixando à parte conceitos algébricos importantes para o pensamento algébrico, como, por exemplo, o símbolo da Igualdade.

O VII Encontro Cajazeirense de Matemática (ECMAT), com o tema "A inovação e a criatividade tecendo novos caminhos na Matemática", aconteceu de 28 a 30 de outubro de 2020, em nosso primeiro ano de pós-graduação. Assim, submetemos um artigo de comunicação científica denominado "Conhecimento tecnológico e pedagógico na formação de professores que ensinam matemática: atividades remotas com o Nearpod" e uma oficina chamada "03 - Educação Algébrica e a Exploração de Problemas Com a Ferramenta Nearpod". Nas duas produções, apresentamos direcionamentos sobre a formação de professores de matemática e de abordagem com problemas.

O segundo evento foi o II Seminário Internacional de Matemática Mackenzie: reflexões sobre a educação matemática, realizado pela Universidade Presbiteriana Mackenzie – São Paulo, nos dias 27, 28 e 29 de setembro de 2021, no qual apresentamos o trabalho "Educação Algébrica: investigação do significado da Igualdade através da Exploração, Resolução, e Proposição de Problemas". A apresentação teve transmissão ao vivo pelo *YouTube*, o que possibilitou ampla divulgação e acesso.

No mês de novembro de 2021, entre os dias 3 e 5, aconteceu, em conjunto o II Seminário Internacional em Resolução de Problemas (SIRP), o V Seminário em Resolução de Problemas (SERP) e o I Fórum de Investigadores em Resolução de Problemas (FIRP), em que apresentamos o trabalho "A Atividade Algébrica Global e a Resolução, Exploração e Proposição de Problemas: um olhar para a pesquisa na formação inicial do professor de matemática", no qual a contribuição maior foi debater pesquisas que vão além da resolução, se encaminhando para a proposição através da exploração de problemas, em que o problema não é apenas solucionado, mas explorado e novos problemas surgem.

Esse evento foi realizado pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GETERP), espaço no qual também divulgamos uma das atividades de investigação desta pesquisa, em formato de relato de experiência, sobre quando trabalhamos a proposta no GEPEP, compartilhando o seguinte trabalho: "As Percepções sobre a Igualdade através da Resolução, Exploração e Proposição e Problemas: uma atividade no grupo de pesquisa". Com esse trabalho, pretendíamos

que outros pesquisadores da área tivessem contatos sobre uma experiência de aplicação da pesquisa. É importante destacar que a atividade desenvolvida no grupo de pesquisa foi a mesma do primeiro encontro desta pesquisa: “A igualdade”.

A Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), através da diretoria da regional do estado da Paraíba, realizou o XI Encontro Paraibano de Educação Matemática (XI EPBEM), entre os dias 10 e 12 de novembro de 2021. Neste evento, apresentamos a comunicação científica intitulada “Atividade Algébrica Global na compreensão da Igualdade através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas”, no Eixo Temático - ET05 Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, uma experiência na qual nos comunicamos com outros pesquisadores da área em uma sessão temática, destacando o referencial teórico da investigação.

Entre os dias 16 e 19 de novembro de 2021, aconteceu o XXV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em educação Matemática (EBRAPEM). Com o tema “Educação Matemática: pesquisa, diálogos e saberes em contextos adversos”, o evento nacional mais importante para a área, os pesquisadores participaram de Grupos de Discussão e compartilharam suas pesquisas com outros.

Assim, neste evento, o nosso trabalho denominado “Pesquisa em Educação Algébrica com abordagem através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas” foi integrante do GD14: Resolução de Problemas.

A última versão de divulgação da pesquisa antes de ser publicada foi por meio da submissão e apresentação oral no VPCT2022 (A Voz dos Professores de C&T: Encontro Internacional). Este fórum internacional proporciona o compartilhamento de experiências, conhecimentos e investigações relacionadas à prática educativa de professores e pesquisadores de países de línguas ibero-americanas. Realizado de forma online e síncrona, o evento ocorreu nos dias 10, 11 e 12 de novembro de 2022, na UTAD, em Vila Real, Portugal.

A comunicação, intitulada 'Investigação na Educação Algébrica sobre a Igualdade por meio da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas', abordou o desenvolvimento da pesquisa, explorando a interação entre a bibliografia e a proposta prática do estudo. No texto, examinou-se o embasamento teórico que enriquece a intencionalidade com a Atividade Algébrica Global e a Igualdade na Educação Algébrica. A discussão na seção em que o trabalho foi compartilhado

concentrou-se na abordagem de problemas no ensino e na aprendizagem de matemática, abrangendo diferentes níveis de formação.

Essa participação no VPCT2022 proporcionou uma valiosa oportunidade para o intercâmbio de ideias e perspectivas com outros profissionais do campo, contribuindo para a ampliação do entendimento do estudo e de seu potencial impacto na educação matemática, além de fomentar o desenvolvimento de abordagens pedagógicas inovadoras.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As leituras e discussões contribuem para a reflexão de que as pesquisas voltadas para a área evidenciam a necessidade de novas abordagens no processo de ensino-aprendizagem da Álgebra.

Para a investigação prática durante a abordagem da Atividade Algébrica para o significado da Igualdade, através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, registramos como apontamentos dos resultados a contribuição dos problemas, conduzindo para uma formalização do conceito no decorrer das aulas, como foi evidenciado na análise dos resultados.

Registramos que a intencionalidade da Exploração e Proposição de Problemas contribui positivamente, possibilitando aos participantes a elaboração de seus próprios problemas, registrados na produção dos dados, com o enfoque para o caminhar do significado da Igualdade com a Atividade Algébrica Global.

Em relação ao trabalho com a Proposição de Problemas, destacamos um fenômeno similar ao que discorre Andrade (2017), na ocorrência de uma descoberta com avanço a partir da Exploração de um problema, um movimento de construção comparado a uma caixa de ferramentas para a Exploração, impulsionando o trabalho de investigação durante as aulas.

Os dados produzidos se direcionam à compreensão do significado da igualdade durante o processo, evidenciados através da apresentação das ideias no decorrer do trabalho com os problemas, e com a participação e engajamento no fazer matemático.

Na primeira atividade, propusemos um diálogo mediado por um quadro de expressões matemáticas, como forma de um instrumento de produção de dados, tendo como objetivo a introdução ao tema, com o estudo sobre a compreensão do significado da Igualdade em Atividades Algébricas através da Exploração e Proposição de Problemas.

Durante o diálogo, foi possível chegar ao tema da Igualdade dentro da Educação Algébrica, e pudemos perceber que os participantes tinham, durante sua vida escolar e acadêmica, pouco suporte de aprofundamento em relação à Igualdade. Embora o tema tenha sido pouco abordado, quando explicamos que este seria o objeto da pesquisa, como parte da disciplina de Laboratório de Álgebra, surgiu o

interesse em participar das atividades. Com o diálogo, ansíavamos consegui mediar a introdução ao tema e despertar para a participação ativa dos estudantes nas aulas.

Como registro final deste momento, foi compartilhado um formulário on-line com questões em que os licenciandos pudessem resumir a discussão da aula. Na apresentação dos resultados, eles reconheceram a pouca discussão do tema e apontaram questões importantes diante do tema, afirmando ser necessário compreender não só a equivalência na Igualdade, com significado único, mas, também, a contribuição quanto a outros temas da matemática, de modo a compreender os outros significados.

Dessa forma, ao tratar da igualdade dentro da Atividade Algébrica, foi percebido que os licenciandos se apresentaram receptivos e contribuíram com as etapas do processo da pesquisa, realizando suas reflexões e sínteses, bem como demonstrando tal compreensão durante a Exploração.

Vale salientar a importância da disciplina Laboratório de Álgebra nos cursos de licenciatura, para se discutir pontos essenciais que contribuem para o ensino e a aprendizagem de seus conteúdos, fomentando uma experiência de formação matemática entre a teoria e a prática.

Os licenciandos ansiavam por vivências de práticas em sua formação, ainda mais durante o período de ensino remoto, e disciplinas de laboratório proporcionavam maior interação entre a teoria e a futura prática como professores.

A Proposição de problemas se mostrou como uma prática nova aos licenciandos, porém desafiadora e instigante, diante do seu fazer matemático tendo em vista os processos de ensino e de aprendizagem, construindo uma postura para fazer matemática no ambiente da formação inicial.

Por fim, a conclusão de que houve contribuição da compreensão através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas com o tecer dos fios da Educação Algébrica dentro da Formação Inicial, fez com que se formasse um tecido matemático sustentável nesta pesquisa.

A mediação da pesquisa nos fez olhar com criticidade para nossa prática quanto às leituras em Educação Algébrica nos levando a refletir sobre a contribuição que estávamos proporcionando na formação acadêmica daqueles licenciandos, algo que não tivemos na nossa formação inicial.

Compreendemos que esta iniciativa foi necessária diante das nossas inquietações, pois pudemos ver, na prática, as concepções dos licenciandos, e seu despertar junto às questões inerentes ao processo de ensino e aprendizagem da álgebra, compreendendo a igualdade com a tal clareza que ela precisa para ser bem relacionada dentro da matemática.

Na introdução deste trabalho, apresentemos o problema a ser investigado, como sendo: *Como a Exploração e a Proposição de Problemas Multicontextuais contribui para a compreensão do sinal de igualdade por futuros professores de matemática na atividade algébrica?*

E, após a busca pela resposta com evidências, reafirmamos a preocupação do olhar crítico e da contribuição para a formação inicial, através da Exploração, Resolução e Proposição de problemas, uma vez que foi possível ser testemunha da participação dos licenciandos, em que eles se dispuseram a apresentar suas próprias ideias diante dos problemas, e, conseqüentemente, perceber a relação da Igualdade com o seu fazer matemática.

A participação deles foi ativa, visto a análise dos resultados, com participação por áudio e pelo chat, registrando as explorações nos cadernos, demonstrando o compromisso com a pesquisa e, acima de tudo, com sua formação.

Além disso, eles assumiram o papel de propositor de novos problemas, demonstrando o exercício da independência, conseguindo apresentar a exploração do problema proposto, para ir além do problema já posto na aula.

À medida que cada participante ia apresentando a sua proposição, inserindo elementos da matemática, propiciava-se a discussão quanto a sua capacidade de ampliar o problema, motivando os outros a não apenas reescrever o problema, mas possibilitar uma proposição com outros fatores.

O trabalho com o objetivo de *investigar, com olhar crítico, qual a compreensão que os futuros professores de matemática dão para o sinal de igualdade através da Exploração e Proposição de Problemas* contribuiu na formação dos estudantes, ao passo que eles faziam reflexões durante a exploração nas atividades das aulas.

As experiências vividas de desenvolver o olhar dos licenciandos utilizando a Atividade Algébrica, através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, para a compreensão do significado da Igualdade e de contribuir para a formação dos

licenciandos na área da Educação Algébrica proporcionou um diálogo vivo entre a teoria e a prática, do ponto de vista da nossa formação e caminhada como pesquisadora, do ponto de vista dos licenciandos.

O diálogo trouxe a mobilização do processo das aulas, com a abordagem dos problemas, através da sua Exploração, Resolução e Proposição na Atividade Global, para o significado da Igualdade.

Em suma, finalizamos este texto com a positividade de que esta pesquisa contribuiu como intervenção na formação inicial de futuros professores de matemática, pois possibilitou uma postura mais autônoma no seu processo de formação.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Jadilson Ramos de; SANTOS, Marcelo Câmara dos. Desenvolvimento do pensamento algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha. *Zetetike*, Campinas, SP, v. 26, n. 3, 2018.
- ANDRADE, Silvanio. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. Dissertação (mestrado em educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.
- ANDRADE, Silvanio de. Um caminhar crítico reflexivo sobre resolução, exploração e proposição de problemas matemáticos no cotidiano da sala de aula. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L.C.; PIRONEL, M. (orgs). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 355-395.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. São Paulo: Porto Editora, 2010.
- CAVALCANTE, Maria Marina Dias *et al.* **Didática e prática de ensino: diálogos sobre a escola, a formação de professores e a sociedade**. Fortaleza: EdUECE, 2015.
- FELMER, Patricio. LILIJEDAHN, Peter. KOICHU, Boris. Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development. **Research Mathematics Education**. 2020. doi 10.1007/978-3-03029215-7-11. 2020.
- FELMER, Patricio. PEHKONEN, Erkki. KILPATRICK, Jeremy. Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development. **Research Mathematics Education**. 2016. DOI 10.1007/978-3-319-28023-3. 2016.
- FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.
- FIORENTINI, Dário. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? *In*: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004, p. 47-76.
- FIORENTINI, D., FERNANDES, F. L. P. CRISTÓVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *In*: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, 2005. **Anais [...]**. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005.
- FREITAS, José Luiz Magalhães de. Reflexões e questionamentos sobre pesquisa em Educação Algébrica - Reflections and Questions About Research In Algebraic Education. **Educação Matemática Pesquisa**, supl. Número Especial do III Fórum de Discussão: Parâmetros; São Paulo, v. 17, Ed. 3, 2015.
- FRIEDLANDER, Alex; TABACH, Michal. Promoting multiple representations in

algebra. In: CUOCO, A.; CURCIO, F. R. (Ed.). **The roles of representation in school mathematics**. Reston, NCTM, 2001 (Yearbook 2001). p. 173-185.

KIERAN, Carolyn. Algebra Teaching and Learning. *In*: LERMAN, Stephen. (Ed). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Dordrecht: Springer Science, 2014. p. 27-32.

KIERAN, Carolyn. Algebraic thinking in the early grades: What is it? The mathematics Educator, **Georgia**, v. 8, n. 1, p. 139 – 151, 2004.

KIERAN, Carolyn. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**. Berkeley, California, v. 12, p. 317-326, 1981.

KIERAN, Carolyn. The changing face of school algebra. *In*: Alsina C, Alvarez J, Hodgson B, Laborde C, Pérez A (eds) **Eighth international congress on mathematical education: selected lectures**. S.A.E.M.Thales, Seville, 1996, p. 271–290.

KILPATRICK, Jeremy. Reformulating: Approaching Mathematical Problem Solving as Inquiry. *In*: Felmer, P., Pehkonen, E., Kilpatrick, J. (eds) **Posing and Solving Mathematical Problems**. Research in Mathematics Education. Springer, Cham. 2016.

KILPATRICK, Jeremy. History of Research in Mathematics Education. *In*: Lerman, S. (2eds). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Springer, Cham. 2020

MARTINS, Fabíola da Cruz. **Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de Matemática via exploração, resolução e proposição de problemas**. 2019. 139f. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual da Paraíba. 2019.

MIGUEL, Antônio.; FIORENTINI, Dário.; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 3, n. 1, p. 39–54, 2016. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424>. Acesso em: 10 out. 2022.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa *et al.* **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. R; LEAL JUNIOR, L.C.; PIRONEL, M. (orgs). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **A Álgebra no Ensino Básico**. Portugal: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - DGIDC, Lisboa, 2009.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor**: Explorando os conceitos de equação e de função. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; PONTE, João Pedro da. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 28, p. e020027, 2020.

RODRIGUES, Cátia; PONTE, João Pedro da; MENEZES, Luís Prática de discussão coletiva de uma professora em Álgebra. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 26, n. 3, 2018.

SILVA, Ledevande Martins da. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 2013. 306p. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual da Paraíba. 2013. Disponível em: < <http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/dissertacoes-e-teses-teste/> > Acesso em: 10 abr. 2020.

SILVA, Juscelino de Araújo. **Resolução de problemas e representações múltiplas no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas**. 2019 163p. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual da Paraíba. 2019.

SILVEIRA, Adriaño Alves da. ANDRADE, Silvanio de. Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio. **Revista De Educação Matemática**, 17, e020017. 2020.

SILVEIRA, Adriano Alves da. **Análise combinatória em sala de aula: Uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas**. 2016. 234f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

SINGER, Florence Mihaela. ELLERTON, Nerida Fay. CAI, Jinfa. Mathematical problem posing: From research to effective practice. **Research Mathematics Education**. 2015.

SOUSA, Maria do Carmo de; PANOSSIAN, Maria Lucia; CEDRO, Wellington Lima. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino**: o percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado das Letras, 2014.

TRIVILIN, Linéia Ruiz. **Conhecimentos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade**. 2013. 127 f. Dissertação. (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática) – Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, SP. 2013.

TRIVILIN, Linéia Ruiz. RIBEIRO, Alessandro Jacques. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema** [online]. 2015, v .29, n. 51, p. 38-59.

## ANEXO A- MATRIZ DA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE ALGÉBRA

### DISCIPLINA

LABORATÓRIO DE ENSINO DE ÁLGEBRA						
Código	Sem	Curso	Créditos		Carga Horária	
			Teóricos	Práticos	Teóricos	Práticos
IG559	3	Licenciatura	02	02	34	34
Pré-Requisito	Não Possui					

### PROGRAMA

EMENTA	OBJETIVOS
<p>Leitura e Produção de textos de ensino de Álgebra. Avaliando os livros didáticos de ensino de Álgebra. Utilização e produção de jogos no ensino de Álgebra. Utilização e criação de materiais concretos para o ensino de Álgebra. O ensino de álgebra através da Resolução de Problemas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◊ Incentivar a pesquisa e a leitura de artigos.</li> <li>◊ Trabalhar álgebra por meio de situações problemas próprias da vivência do aluno e que o façam pensar, analisar, julgar e decidir-se pela melhor solução.</li> <li>◊ Conhecer as novas tendências do ensino da álgebra: utilizando a história da matemática, trabalhando com a investigação matemática, utilizando re cursos didáticos tais como jogos e materiais concretos.</li> <li>◊ Avaliar livros didáticos, quanto aos conteúdos de álgebra, do ensino fundamental e médio.</li> </ul>

## CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

MÓDULO I - LEITURA E PRODUÇÃO DE TEXTOS DE ENSINO DE ÁLGEBRA.
◊ Evolução histórica da Álgebra. ◊ Pesquisa e leitura de artigos. ◊ Produção de resumos.
MÓDULO II - O USO DE JOGOS NO ENSINO DE ÁLGEBRA.
◊ A importância do jogo no processo ensino-aprendizagem da Matemática. ◊ Limitações do uso de jogos na construção de conceitos de álgebra. ◊ Conhecendo e confeccionando jogos.
MÓDULO III - UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS
◊ Metodologia e limitação do uso de materiais concretos na construção de conceitos de álgebra. ◊ Conhecendo materiais (algeplan, balança de pratos, blocos para produtos notáveis, blocos pitagóricos e outros).
MÓDULO IV - O ENSINO DE ÁLGEBRA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
◊ As quatro fases da resolução de problemas: Compreensão, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. ◊ Tipos de problemas. ◊ Seleção de problemas envolvendo o conteúdo de álgebra.

METODOLOGIA	AVALIAÇÃO
◊ Aulas teóricas expositivas. ◊ Grupos de discussão e Pesquisa. ◊ Recursos audio-visuais.	◊ Avaliações individuais e/ou em grupos. ◊ NPC e NEF ( caso necessário). ◊ Pesquisa e seminários.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA
1- GARBI, Gilberto G. <u>O Romance das Equações Algébricas</u> . São Paulo, Makron Books, 1997.
2- BIEMBENGUT, Maria Salett e HEIN, Nelson. <u>Modelagem Matemática no Ensino</u> . São Paulo. Contexto. 2000.
3- BIEMBENGUT, Maria Salett. <u>Número de Ouro e Secção Áurea</u> . Blumenau. Furb. 1996.
4- <u>Coleção o Prazer da Matemática</u> , (30 volumes), Editora Gradiva, Lisboa, Portugal, 1990-2002.
5- <u>Coleção Matemática sem Problema</u> . Rio de Janeiro, Melhoramentos/José Olympio, 1972.
6- PIAGET, J. e ROLANDO G. <u>Psicogênese e História das Ciências</u> . Lisboa, Dom Quixote, 1987.

- 7- Revista do professor de Matemática. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. N<sup>o</sup>s de 1 a 53. anos: de 1982 até 2003. Rio de Janeiro.
- 8- Revista: A educação Matemática em revista. SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Blumenau. Furb. 1993/2003. n<sup>o</sup>s 01/14
- 9- Revista: Educação e Matemática. APM - Associação dos Professores de Matemática. Lisboa. APM. NÚMERO 01/71. 1988/2002.

#### BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- 1- LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001. Coleção Professor de Matemática,
- 2- DANTE, Luiz Roberto. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 1994.
- 3- KAMII, Constance de e DECLARK, Georgia. *Reinventando a Aritmética: implicações da teoria de Piaget*; tradução: Elenisa Curt, Mari na Célia M. Dias e Maria do Carmo D. Mendonça. 9 edição. São Paulo: Editora Papyrus, 1994.
- 4- Explorando o Ensino da Matemática: artigos volume 1 e 2. Seleção e organização Ana Catarina P. Hellmeister [et. al]; organização geral: Suely Druck. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de educação Básica, 2004.
- 5- POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas: um novo enfoque do método matemático*; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1994.