UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANANIAS FELIX DA SILVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO UTILIZANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS

CAMPINA GRANDE – PB
2023

ANANIAS FELIX DA SILVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO UTILIZANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE – PB
2023

S586r Silva, Ananias Felix da.
A resolução de problemas nas técnicas de integração utilizando recursos tecnológicos [manuscrito] / Ananias Felix da Silva. - 2023.
149 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE. "

1. Tecnologia na educação. 2. Ensino-aprendizagem. 3. Metodologia de resolução de problemas. I. Título

21. ed. CDD 372.358

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

ANANIAS FELIX DA SILVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO UTILIZANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

Aprovada em: 27/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Filomena Mariá Gonçalves da Silva Cordeiro Moita (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Leomaques F. S. Bernardo

Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo (Membro externo)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico este trabalho ao meu melhor amigo Jesus Cristo, que sempre está comigo fielmente. A minha família que sempre me apoia incondicionalmente. Ao Clube de Oração formado por amigos que levarei por toda minha vida e a Ana Cristina e ao Renato, grandes amigos que foram cruciais para minha vida profissional.

AGRADECIMENTOS

Começo expressando minha gratidão ao meu melhor amigo, Jesus Cristo, que me concedeu a vida. Só tenho a me alegrar com sua infinita misericórdia derramada sobre minha vida todos os dias. Ao Senhor, seja dada toda a honra e glória.

Agradeço ao meu pai Francisco, à minha irmã Neném, aos irmãos Ricardo e José Ilo e a todos os meus sobrinhos, em especial a Ana Ingrid, por sempre me apoiarem e me fortalecerem ao longo da minha vida. Vocês são meu alicerce e tesouro que o Senhor me deu nesta terra.

Ao meu orientador, Prof. Roger Huanca, minha gratidão pelas grandes oportunidades de aprendizado. Suas aulas e orientações (individual e coletivamente) resultaram em contribuições significativas que permanecerão comigo por toda a minha vida. Foi através do senhor que aprendi o que é ser pesquisador e, com sua orientação, pude dar sentido e vida à minha pesquisa. Professor Roger, meus eternos e sinceros agradecimentos.

Gostaria de agradecer a minha banca de mestrado, formada pela Profa. Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita, esta educadora fantástica que com suas aulas aprendi de forma brilhante sobre Tecnologias e ao Prof. Leomaques Francisco Silva Bernardo, o qual tive o prazer de conhecer e aprender mais sobre matemática de forma marcante. Agradeço à senhora Filomena e ao senhor Leomaques, pela disponibilidade em contribuir para o meu crescimento educacional.

Aos meus amigos do Clube de Oração, Natália, Júnior, Luiz, Itaercio, Luana e Genádia, que sempre intercederam por mim em suas orações. A esses irmãos que sempre estiveram clamando ao Senhor pela minha vida, minha eterna gratidão. E também aos amigos Abrão, Sara, Mirian e Namíbia, meus irmãos na fé que sempre estiveram na torcida por mim e contribuíram de forma significativa para esse processo, muito obrigado por tudo.

Destaco agradecimento especial a minha grande amiga Ana Cristina, que sempre com sua atenção me ajudou de forma espetacular e também ao Renato, um irmão valioso que Deus me deu o privilégio de conhecer no mestrado, uma amizade que será para toda a vida.

Aos meus amigos Lidiane e Aluísio que me auxiliaram de forma direta, sempre conversando comigo e discutindo ideias que foram muito importantes para os meus estudos.

Agradeço a Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) que desde o início esteve disponível para me atender, acolher e oferecer contribuições acadêmicas.

Meus sinceros agradecimentos aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGECEM, da UEPB (campus Campina

Grande), por todas as experiências e aprendizagens que me proporcionaram durante esse percurso. Além disso, quero expressar minha gratidão por todos os momentos compartilhados entre os colegas de disciplina durante o mestrado.

A Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (FECLI-UECE) juntamente com os estudantes que estiveram no desenvolvimento da pesquisa de campo, só tenho a agradecer por possibilitar a realização do meu trabalho. Cada momento vivenciado foi muito rico e de extrema relevância.

Também agradeço aos meus colegas de trabalho em nome de Ana Passos, Márcio e Paulo pelo apoio durante toda essa jornada.

Diante de tudo isso, expresso minha gratidão a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente e demonstraram entusiasmo com o meu trabalho, permitindo a conclusão de um estudo que teve um impacto significativo em mim e que será acessível a pesquisas futuras sobre o mesmo assunto, apesar dos vários obstáculos enfrentados durante esta jornada de estudo e pesquisa.

“O Cálculo Diferencial e Integral: a ponte que conecta o finito ao infinito, revelando a harmonia oculta nos padrões do universo” – Carl Friedrich Gauss

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi analisar as Técnicas de Integração através da Metodologia de Resolução de Problemas com a utilização de recursos tecnológicos. A escolha da temática se deu com base no contexto vivenciado em aulas envolvendo as Técnicas de Integração, tendo em vista a importância de compreender os conceitos. A fundamentação teórica adotada nesta pesquisa foi um entrelaçamento dos seguintes temas: Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; Cálculo Integral; e Tecnologias Digitais. Com isso, desenvolvemos esta pesquisa pela seguinte questão norteadora: De que maneira a Metodologia de Resolução de Problemas com auxílio de recursos tecnológicos pode contribuir para o ensino e aprendizagem das Técnicas de Integração com compreensão? A nossa pesquisa é de caráter qualitativo, seguindo uma abordagem descritiva e constituímos os dados a partir da realização de sete oficinas presenciais e virtuais. Os participantes da pesquisa foram estudantes de uma turma de 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática e Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (FECLI), Ceará, os quais cursavam a disciplina Cálculo II. Os dados foram coletados através dos registros no computador pelo pesquisador, pelas anotações dos participantes da pesquisa e pelas gravações de áudio e vídeo durante as oficinas. A partir da análise de dados obtidos na pesquisa, percebemos que o desenvolvimento das oficinas através Metodologia de Resolução de Problemas trouxe aos estudantes uma melhor ótica de compreensão manipulatória das Técnicas de Integração, pois através dessa estratégia eles foram co-construtores de seu próprio conhecimento. Evidenciando esse contexto, trazemos como resultados os reflexos de episódios vividos durante as oficinas, tais como: a insegurança dos estudantes na resolução dos problemas, visto que estavam acostumados a receber os conceitos, exemplos e algumas regras; a contribuição de alguns recursos tecnológicos para compreensão dos problemas propostos e o auxílio da exploração da resolução do problema para a compreensão dos conceitos das Técnicas de Integração.

Palavras-Chave: Resolução de Problemas; Técnicas de Integração; Recursos Tecnológicos.

ABSTRACT

The objective of this work was to analyze the Integration Techniques through the Problem Solving Methodology with the use of technological resources. The choice of the theme was based on the context experienced in classes involving Integration Techniques, considering the importance of understanding the concepts. The theoretical foundation adopted in this research was an intertwining of the following themes: Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving; Integral Calculus; and Digital Technologies. With that, we developed this research by the following guiding question: In what way can the Problem Solving Methodology with the aid of technological resources contribute to the teaching and learning of Integral Techniques with understanding? Our research is qualitative, following a descriptive approach and we constituted the data from seven face-to-face and virtual workshops. The participants of the research were students from a third semester class of the Mathematics and Physics undergraduate course of the Faculty of Education, Sciences and Languages of Iguatu (FECLI), Ceará, who were taking Calculus II. The data was collected through the researcher's computer records, the research participants' notes, and through audio and video recordings during the workshops. From the analysis of the data obtained in the research, we noticed that the development of the workshops through the Problem Solving Methodology brought to the students a better view of manipulative understanding of the Integration Techniques, because through this strategy they were co-constructors of their own knowledge. Evidencing this context, we bring as results the reflections of episodes experienced during the workshops, such as: the students' insecurity when solving the problems, since they were used to receiving the concepts, examples and some rules; the contribution of some technological resources to the understanding of the proposed problems and the help of the exploration of the problem solving for the understanding of the concepts of Integration Techniques.

Keywords: Problem Solving; Integration Techniques; Technological Resources.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área que compreende o campo do raciocínio e da abstração e por isso, muitas vezes exige todo um envolvimento de compreensões para estudá-la. No Ensino Superior esse fato pode ser bem presenciado, tendo em vista que nesta etapa notamos a área com uma linguagem formal, caracterizada por seus conceitos repletos de abstrações e rigor.

Entre tantos assuntos que refletem este cenário, temos o Cálculo Diferencial e Integral. Acerca desse ramo matemático, podemos afirmar que ele é alvo de muitos estudos nos últimos anos. A relevância da centralidade de discussão do tema pode estar atrelado às dificuldades apresentadas pelos estudantes, no que diz respeito ao aprendizado dos tópicos propostos pelas disciplinas que compõem essa área da matemática, seja no aspecto de complexidade dos assuntos, ou na forma como os mesmos são abordados, como expressa Silva, Nascimento e Vieira (2017).

Tendo em vista a diversidade de conteúdos dispostos no Cálculo Diferencial e Integral, optamos por trabalhar com as técnicas de integração[1] como objeto de estudo de pesquisa, um assunto em que, por vezes, pode ser presenciado uma postura de apenas apresentações de teorias e exercitações.

O interesse por esse estudo começou a surgir após trabalhar algumas vezes com o assunto e notar uma visão limitada por partes dos estudantes quanto ao que se pretende na compreensão do conteúdo, isto é, no contexto de trabalho com o Cálculo em turmas dos cursos de licenciatura em Matemática e Física, mais precisamente com o de Integral, em que foi notado os estudantes compreendendo os conteúdos dessa parte como algo que está focado apenas em teorias e aplicações de contas.

Com o ingresso na Pós-Graduação sobrevieram muitas contribuições para que essas pretensões aflorassem e que se pudesse encontrar uma via que fosse a condutora para a realização dessa pesquisa.

Nesse embate, pensando na perspectiva de promover modificações no cenário de ensino da matemática, encontramos diferentes metodologias as quais visam proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos. Entre elas, observamos a Resolução de Problemas como uma vertente que pode quebrar com uma ideia tradicionalista, em que o professor repassa e o estudantes recebe.

---

[1] Nesse texto, técnicas de integração referem-se a funções de uma variável.

Acreditamos que essa metodologia pode ser interessante de utilizar quando o assunto se trata de promover ensino e aprendizagem, uma vez que ela, em sua essência, não se limita a uma simples aplicação conteudista. Além de ponderarmos que

> [...] a Resolução de problemas não cabe como um mero acréscimo de metodologias a serem utilizadas em aula, mas oferece alternativas às formas de abordar mesmo outras estratégias e pode promover ricos debates sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática (HUANCA, ALMEIDA, 2018, p. 11).

Desse modo, esta estratégia de ensino tem sua força indo além de um foco em técnicas e conceitos para resolver um problema, mas se atendo a compreensão da relação de todo o processo trabalhado, para que o objetivo da resolução não esteja amparado apenas na finalidade de chegar a uma solução (ONUCHIC, 1999).

Buscamos assim organizar as ideias para que fosse possível dispor dessa metodologia como forma de desenvolver a pesquisa, ansiando contribuir de maneira efetiva para a aprendizagem dos estudantes participantes da pesquisa podendo servir como estratégia para outras pesquisas futuras.

Desse modo, aliado a toda essa idealização de encontrar uma metodologia para trabalhar um respectivo conteúdo, nos propomos a utilizar alguns recursos tecnológicos como forma de auxiliar nessa construção, a exemplo, a disponibilização do software matemático *GeoGebra* e a lousa digital *Jamboard*.

Em princípio, pensamos na ferramenta *GeoGebra* como forma de facilitar o processo de construção do aprendizado proposto, possibilitando que os estudantes viessem a ter uma melhor visualização das construções ansiadas, tornando, assim, um percurso significativo.

Além disso, partindo do fato de que as atividades aconteceram de forma híbrida, dispomos de alguns recursos tecnológicos como aparelho celular, Google Meet, lousa digital *Jamboard* e aplicativo de gravação de tela. Isto porque além de poder contribuir para os estudantes enquanto protagonistas nesse processo, pensamos assim como descrevem Zampieri e Javaroni (2018) que quando há a proposta de se trabalhar atividades exploratórias com o uso de Tecnologias Digitais, o professor pode aprender e refletir sobre a utilização dessas ferramentas em diferentes propostas.

Desse modo, para o desenvolvimento deste trabalho nos embasamos na pesquisa de cunho qualitativo, a fim de organizar e apresentar uma estrutura que propicie cooperar com os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu-FECLI, da Universidade Estadual do Ceará, além de fornecer material que auxiliem os professores e futuras pesquisas que englobe a temática.

1.1 PROBLEMÁTICA

Ao olharmos para o campo da Matemática vemos um leque de conteúdos estudados nos mais distintos níveis de ensino. Entre eles, o Cálculo Diferencial e Integral, que é um assunto trabalhado no Ensino Superior que abarca grande parte do currículo de cursos como o de Licenciatura em Matemática.

Nessa vertente, compreender a referida área de estudo exige muitas vezes como pré-requisito um conjunto de aprendizados, tendo em vista que se espera saberes elementares para que possa haver uma efetivação de aprendizagem concisa.

Sendo ainda mais específico, quando passamos a trabalhar com as técnicas resolutivas das integrais, mais conhecidas como Técnicas ou ainda Métodos de Integração[2], vemos que além dos conhecimentos prévios é necessário entender como são trabalhadas.

É possível observar que os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral são trabalhados sob uma perspectiva algébrica, onde se tem exposição de formalizações, demonstrações e bastante exercitações (HUANCA; SILVA; SOUZA, 2021), no entanto, não se atendo a uma maior significação nesse processo de conhecimento das conceituações.

Nesse pensamento, somente recepcionar um conjunto de regras e resolver exercícios com base neste pode não se constituir como uma compreensão. Entendemos assim que por vezes as formas que se utilizam para se propiciar tais compreensões não são suficientes por si só, requerendo estratégias que viabilizem essa promoção.

Nesse embate, defendemos a relevância da busca de metodologias que possam favorecer o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral tomando nessa perspectiva a Resolução de Problemas como metodologia propiciadora nesse processo e o uso de recursos tecnológicos para mediar essa busca por obtenção do conhecimento almejado.

Diante disso, para desenvolvermos nossa pesquisa a fim de alcançarmos os objetivos traçados nos pautamos na pergunta norteadora: De que maneira a Metodologia de Resolução de Problemas com auxílio de recursos tecnológicos pode contribuir para o ensino e aprendizagem das Técnicas de Integração com compreensão?

---

[2] As Técnicas ou métodos integração, referidas nesse texto, corresponde ao conjunto de artifícios disponibilizados para o cálculo de antiderivadas.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral:

Analisar as Técnicas de Integração através da Metodologia de Resolução de Problemas com a utilização de recursos tecnológicos.

1.2.2 Objetivos Específicos:

- Realizar um levantamento bibliográfico em artigos, livros, dissertações, teses, entre outros materiais acerca da temática;
- Aplicar oficinas, enfocando na Resolução de Problemas envolvendo o estudo das Técnicas de Integração utilizando recursos tecnológicos;
- Identificar a contribuição da Resolução de Problemas com auxílio dos recursos tecnológicos para a compreensão das Técnicas de Integração.

1.3 ESTRUTURAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Estruturamos nosso estudo iniciando pela Introdução, na qual discorremos alguns elementos como o contexto da temática de estudo, a motivação e a justificativa para o desenvolvimento de uma pesquisa com o tema em tela. Além disso, expomos a problemática que nos impulsionou a investigar os objetivos que tivemos como meta em nossa pesquisa.

A seguir abordamos sobre a Resolução de Problemas, em que discorremos acerca da sua contextualização histórica, enfatizando o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, suas contribuições para a sala de aula e essa vertente no âmbito do Ensino Superior.

Damos continuidade com uma contextualização do Cálculo Integral, focando em pontos como o ensino dessa parte da Matemática, esbanjando uma literatura que disserta acerca deste ramo e também a apresentação de conceituações e definições como forma de enfatizar a Integral e suas Técnicas de Integração.

A seguir, tratamos sobre as Tecnologias Digitais, mirando em uma discussão teórica acerca dos recursos tecnológicos no contexto educacional, elencando uma breve abordagem das ferramentas utilizadas neste presente trabalho.

Já no próximo capítulo, abordamos sobre a Metodologia da Pesquisa, acentuando sob que linha de pensamento buscamos construir nessa narrativa e quais foram os sujeitos e instrumentos de coleta de dados da pesquisa. Neste capítulo também descrevemos as oficinas em episódios, a fim de deixarmos a par de conhecimento do leitor os principais pontos destacados.

Por fim, trazemos as Considerações Finais, nas quais buscamos elencar alguns pontos necessários do texto e discutir objetivos alcançados com a realização da pesquisa.

2. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Sabemos que desde os primórdios o homem busca maneiras de entender as ideias advindas do campo da Matemática, favorecendo assim para um solucionamento de problemas que surgiam nas respectivas épocas, expressando com suas formulações a relevância de tal necessidade. Fato esse que mostra que a área tem sua presença registrada durante toda a história, nos mais diferentes povos (D'AMBRÓSIO, 1999).

Além disso, notamos a Matemática como um campo de pesquisa que apresenta notável crescentemente principalmente quando o assunto está relacionado ao ensino e aprendizagem, sendo então vislumbrada como uma área que relevantemente necessita ser compreendida e aplicada (HUANCA, ALMEIDA, 2018).

Alinhado a essa construção ao longo do tempo, observamos também que, em meio a tantas discussões, a história foi dando a Matemática uma visão que a área deveria ser necessariamente compreendida por muitos, e não somente por uma parcela de favorecidos, como sempre aconteceu.

É nesse cenário que vemos as diversas tendências que nasceram a fim de contribuir de forma significativa para uma efetiva ocorrência do ensino e aprendizagem para a Matemática. Entre elas, podemos destacar a Resolução de Problemas.

A Resolução de Problemas é uma linha metodológica que notadamente vem tornando-se cada vez mais alvo de muitas discussões, algo que pode estar atrelado ao fato desse viés está presente em nossa vivência desde muito tempo. Em cenários mais atuais, isso passa a se revelar de forma ainda mais evidente, onde a referida metodologia ganha destaque por ser vista como uma perspectiva que pode ser promissora no âmbito educacional, principalmente em contextos como o da Educação Matemática.

Apresentamos a seguir considerações acerca da Resolução de Problemas, expressamos também, alguns aspectos que discutem um pouco deste campo de estudo, retratando sua perspectiva em um sentido voltado para a Matemática, bem como a sua relevância como campo de pesquisa.

2.1 Uma abordagem inicial da Resolução de Problemas

A discussão relacionada ao campo Resolução de Problemas teve George Polya como um dos principais percursores, o qual buscava em suas pretensões desenvolver nos estudantes uma boa capacidade de resolver problemas, evidenciando o professor como um auxiliador nesse processo de ensino e aprendizagem (MOÇO, 2013).

Como relatam Onuchic e Allevato (2011), Polya buscou em seus estudos compreender a resolução de problemas, na tentativa de visualizar maneiras que pudessem contribuir para solucionamentos de problemas.

É perceptível que outros estudos proporcionaram contribuições para mudanças nas perspectivas desse campo, mas a partir de Polya tivemos de fato grandes desencadeamentos quanto a essa linha de estudo. No entanto, ressaltamos que foi só por volta de 1980 que essa metodologia teve seu direcionamento em um sentido voltado intrinsecamente para a instituição de ensino, onde nesse cenário passou a iniciar-se uma discussão mais acentuada acerca da Resolução de Problemas, proporcionando distintas formas de concepções relacionada a esta vertente (GONÇALVES, 2019).

Ressalvamos esse cenário conforme descrevem Morais e Onuchic (2014, p.28) que: no ano de 1980, o documento "Uma agenda para Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980 publicada pelo NCTM[3], propôs que Resolução de Problemas fosse o foco da matemática escolar nos anos 1980".

Diante disso, observamos uma transição do campo em tela, ou seja, um momento em que notamos que a Resolução de Problemas perpassa toda uma conjuntura de perspectivas que vai desde um simples ato de dispor de cálculos para se solucionar problemas à novas perspectivas para trabalhar os mesmos.

Embora com o passar dos anos muito se discutiu com relação a uma proposta de trabalhar a referida área, muito se perdurou e ainda por vezes vigora idealizações da Resolução de Problemas como simples atos de efetuar contas, levando ao professor acreditar que com isso ele está dispondo da metodologia, bem como ao estudante pensar que resolver um problema se resume a tal ação. Isto finda muitas vezes caracterizando um cenário que restringe esta linha metodológica como algo tradicionalista, contrário ao que se pretende com esta.

Onuchic (1999, p. 203) frisa sobre mudança nesse pensamento quando relata a transição de perspectiva da Educação Matemática com enfoque na Resolução de Problemas, distinguindo antes ser uma vertente adotada por formas a serem seguidas, e então passando a ser caracterizada como uma ação levando os estudantes a serem "participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade". Este é um fato que

[3] *National Council of Teachers of Mathematics* - Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM).

vem sendo cada vez mais presente em nosso contexto de aprendizagem com essa linha metodológica.

Ao nos apropriar de um estudo da história da Matemática, encontramos diversas tendências que visam um trabalhar tanto na perspectiva de ensino como de aprendizagem. A resolução de problemas pode ser vista como uma dessas vias, estando ela visível desde as civilizações antigas.

Pontuando em um sentido metodológico, a Resolução de Problemas passou a ser observada, de fato, por volta dos anos 90, quando começou a ser direcionada para a prática de ensino. De acordo com Onuchic (1999) encontra-se, em princípio, por volta de 1980 uma busca por mudanças nos aspectos de resolução de problemas, mas que isso ficava apenas na teoria.

A autora ainda expõe que alguns pensamentos que se distinguiam na época proporcionaram pouco vigor da forma pretendida para se trabalhar a resolução de problemas. A autora, passou então a estudar sobre três linhas de pensamentos que evidenciava essas diferenças, sendo eles "o ensino sobre a resolução de problemas", "o ensino para a resolução de problemas" e "o ensino através da resolução de problemas".

Proença, Oliveira e Doneze (2022, p. 13) discorrem sobre cada uma dessas perspectivas:

> O ensino sobre resolução de problemas consiste em tomar ciência de etapas de resolução, como as quatro fases de resolução Polya (1994), de modo a segui-las e, assim, tornar-se um bom resolvedor de problemas. O ensino para resolução de problemas consiste em aplicar os conhecimentos matemáticos aprendidos previamente em situações problemas, ou seja, de fazer uso de uma matemática que se acabou de estudar para, logo em seguida, aplicá-la em "problemas". O ensino via/através da resolução de problemas coloca o problema como ponto de partida para o ensino de um novo conteúdo.

O Grupo de Trabalho e Pesquisa em Resolução de Problemas (GTERP) da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP - Rio Claro), liderado pela pesquisadora Lourdes de la Rosa Onuchic, se debruçou a estudar a última perspectiva, ou seja, o ensino através da Resolução de Problemas, compreendendo que o ensino, a aprendizagem e a avaliação ocorrem de simultaneamente.

Em decorrência das mudanças no cenário educacional do século XX, a princípio, o grupo GTERP fez a união dos termos ensino-aprendizagem, como algo que deveria ocorrer de forma simultânea. Depois, em análise pela importância da avaliação nesse processo é que se teve a conjunção Ensino-Aprendizagem-Avaliação, como explicitam mais detalhadamente Onuchic e Allevato (2011, p. 81),

> [...] considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

Ou seja, enquanto o professor ensina, o aluno aprende e ambos realizam uma avaliação. Neste caso, o aluno será um participante ativo e o professor será um mediador do conhecimento.

Sabemos que toda essa conjuntura de trabalho não se move sem um planejamento e organização no ansiado, faz-se necessário um pensamento de formas que proporcione essa interrelação. Nesse sentido, um roteiro com atividades foi criado e reorganizado ao longo dos anos. O primeiro foi desenvolvido por Onuchic (1999), e depois com respectivas alterações Onuchic e Allevato (2011, 2014), expomos a seguir de forma detalhada a versão publicada em 2011, a qual utilizamos em nossa pesquisa.

> 1. Preparação do problema; 2. Leitura individual; 3. Leitura em conjunto; 4. Resolução do problema; 5. Observar e incentivar; 6. Registro das resoluções na lousa; 7. Plenária. 8. Busca do consenso; 9. Formalização do conteúdo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85).

Ao olharmos para esse conjunto de informações, precisamos entender que as autoras não apresentam uma receita pronta e acabada para se proporcionar uma aprendizagem, mas sim um norte que essa construção possa ser propiciada.

2.2 A Resolução de Problemas no contexto da sala de aula

Muitos campos do conhecimento ganham notoriedade quando há sua inserção no meio escolar. No ensino de matemática esse fato é bem evidente, pois várias tendências são postas na perspectiva de contribuir para o ensino e aprendizagem dos mais diferentes conteúdos da área.

Pensando nisso, discorreremos posteriormente acerca de uma dessas estratégias de se trabalhar o ensino da Matemática, que é a Resolução de Problemas. Esta que por sua vez traz grandes discussões a nível internacional por estar sendo cada vez mais implantada como parte da área no meio escolar (VALE; PIMENTEL; BARBOSA, 2015).

Quando nos debruçamos nas pesquisas relacionadas a Resolução de Problemas percebemos que esta não se refere apenas a mais uma metodologia a ser aplicada na sala de aula, mas que ela se constitui como uma via que necessita ser bem trabalhada e compreendida, para que sua apresentação e aplicação seja de forma qualificada, deixando claro que sua execução demanda toda uma conduta compassadamente.

Como ponderam Allevato e Vieira (2016, p. 114), “a resolução de problemas não é algo que se implementa da noite para o dia com reflexos imediatos na aprendizagem dos alunos e também não deve configurar-se como uma prática isolada”.

Diante disso, podemos enfatizar o quanto é importante que a estratégia de ensino que for utilizada em sala de aula seja bem planejada, para que ela não seja oferecida de qualquer forma, deixando a desejar os objetivos traçados para a mesma.

É necessário ter consciência que a postura de solucionar os problemas, sem fazer uma exploração dos mesmos, pode tornar toda a aprendizagem com pouca significação. E, com isso, levar a Resolução de Problemas a ser taxada como mais uma ferramenta matemática, sem muito a contribuir, além de uma mera efetuação de cálculos. Nessa linha de raciocínio, é importante acentuar que:

> A resolução de problemas não é apenas outro movimento entre os muitos que têm aparecido e desaparecido em educação matemática. Em vez disso, tem sido aceite pela comunidade de educadores matemáticos como uma parte integrante do currículo de matemática (VALE; PIMENTEL; BARBOSA, 2015, p. 41).

Isto nos faz enxergar que resolver problemas revela-se como sendo de grande relevância, algo que podemos presenciar claramente ao longo dos tempos, em que se suscitou um olhar mais atencioso para a vertente.

Esboçando uma idealização do passado, Onuchic (2013) expressa acerca dessa perspectiva, descrevendo que antes ela era vista por uma ótica de apresentação de problemas, com possíveis inserções de técnicas para sua resolução.

Ao aprofundarmos na temática, compreendemos, como já mencionado, que esta é retratada como algo que se remonta desde os tempos passados, quando já se podia evidenciar uma busca por resolver problemas que iam surgindo na sociedade em geral, presentes nas mais distintas áreas. Um fato bem característico que sempre impulsionou grandes buscas por descobertas, sejam elas matemáticas ou não.

Encontramos a concepção dessa vertente desde muitos anos no âmbito nacional brasileiro, a exemplo de acordo com as orientações curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 81) quando nos apresentava que:

> [...] a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do

> conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento.

Sendo assim, embasado em todas essas ponderações, enxergamos o quanto a esfera da Resolução de Problemas é uma via valorosa, que atinge os diferentes setores da sociedade, indo um pouco além do cenário matemático. Como explicam Assis e Huanca (2016, p. 8) ela

> permeia diversas áreas do conhecimento e possui um significado distinto associado a cada área, indo desde a dissolução de impasses no ramo da política, mediação no mundo dos negócios e geração de soluções para inovação tecnológica, até a resolução de problemas matemáticos em sala de aula como forma de viabilizar a aplicação da Matemática a situações e problemas do cotidiano.

Concernente a um cenário educacional, percebemos que isso vem subsistido em muitas áreas do conhecimento até hoje, como é o caso principalmente na Matemática. É nítido o leque de assuntos que este campo proporciona, o qual muitas vezes exige ferramentas que contribuam efetivamente para suas compreensões. O que acontece é que há situações em que a utilização de tais utensílios são interpretados da forma inadequada.

Como declaram Allevato e Vieira (2016), a Resolução de Problemas se enquadra bem nesse rol de ferramentas com aplicações não planejadas, uma vez que a metodologia se configura em sua essência como algo não tão entendida pelos professores, sobretudo no que diz respeito ao ofertar contribuições para o ensino da Matemática.

Percebemos assim que não é simplesmente aplicar por aplicar uma estratégia em sala de aula, é necessário pensar acerca desta findando realizar um planejamento que possa ser promissor em sua execução.

Nesse sentido, ressalvamos que ensinar matemática é uma tarefa que exige bastante do professor, pois sabemos que ele está encarregado de despertar nos estudantes, através de suas ministrações, um entendimento matemático (SILVA, 2020). Tudo isso, sendo cauteloso para que não cause nestes uma aversão pelo aprendizado da área.

As aulas precisam ser bem objetivadas a fim de que seja dado aos estudantes a oportunidade de protagonizarem uma aprendizagem, possibilitando formas como a utilização da Resolução de Problemas para que haja de uma maneira organizada de se trabalhar um conteúdo matemático.

Acreditamos que a Resolução de Problemas quando for bem apresentada e aplicada poderá ser uma via que deixará um legado para distintas aprendizagens, uma vez que esse campo de estudo pode alcançar os mais diversos assuntos.

Muitas vezes o próprio título que se dá a este campo de pesquisa induz aqueles que pouco detém o assunto a pensar e inserir-se em um contexto onde se há uma realização de atividade com resolução de questões, está sendo trabalhado a ideia de Resolução de Problemas, o que mostra um pensamento errôneo, que precisa ser refletido.

O contexto em que esta metodologia se desenvolve está bem além de um simples solicitar de professor e reproduzir do estudante. Existe toda uma conjuntura de reflexões que devem ser consideradas para que a ideia da Resolução de Problemas possa de fato ocorrer.

> Não há métodos específicos e rígidos para o trabalho na perspectiva da Resolução de Problemas, até porque cada estudante é um ser singular, que compõe grupos singulares na multiplicidade da sala de aula, e cabe, ao docente, o reconhecimento desses fatores na hora de se propor problemas visando ao aprendizado (LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2015, p. 964).

Conforme deixam claro os autores, não devemos olhar para a respectiva estratégia de ensino com uma visão mecanizada, em que necessariamente devemos seguir um conjunto de regras para que o objetivo seja alcançado, mas que além disso possamos perceber todo um contexto envolvido, uma vez que precisamos oferecer um aprendizado para distintos estudantes com seus respectivos graus de aprendizados.

Estreitando essas reflexões em um contexto especifico de sala de aula, isto é, mais precisamente no âmbito de ensino de nível superior, apresentamos a seguir uma discussão relacionando a Resolução de Problemas com o referido nível de ensino.

2.3 Resolução de Problemas no Ensino Superior

No Ensino Superior, assim como nas outras etapas de ensino, o estudante necessita estar se atendo a aprendizados contínuos, os quais serão influentes sobre sua profissão. Em cursos como os de licenciaturas isso pode ser bem evidente, pois a estes são oferecidas oportunidades para se qualificarem no processo de construção do ser professor.

Durante a graduação são atribuídas ao professor diversas experiências que podem promover aprendizagens reflexivas acerca da profissão. Entre tantas metodologias nos atemos a uma que se mostra bem presente em estudos relacionados a aplicação em sala de aula, como é o caso da metodologia da Resolução de Problemas.

Ao nos atermos para esta vertente no Ensino Superior, Ferreira, Silva e Martins (2017, p. 190) apontam que ela pode ser trabalhada de algumas maneiras como: “Na formação Inicial de Professores de Matemática (Licenciatura); em outros cursos do Ensino Superior (Engenharia, Computação, etc.)”.

Os autores destacam que a metodologia é desenvolvida desde assuntos trabalhados em conteúdos da Educação Básica, abordados ainda no início de alguns cursos, bem como em disciplinas mais avançadas, como vistas ao longo da graduação.

De acordo com o estudo feito acerca de pesquisas que trabalham com a Resolução de Problemas no Brasil em nível Superior, Ferreira, Silva e Martins (2017) registraram algumas que estão fincadas na disciplina de Matemática Elementar, na qual acaba-se revivendo alguns assuntos básicos, e com relação a isso chamamos atenção para um alerta que eles descrevem como acreditarem não ser interessante disporem das mesmas formas de se trabalhar os conteúdos vivenciadas durante o Ensino Básico, porque poderá acabar gerando problemas semelhantes de aprendizados apresentados, podendo refletir em uma nova defasagem.

E, fazendo uma ponte com esta ideia os autores expressam que "[...] a Resolução de Problemas, em particular uma metodologia de ensino que trabalhe através da Resolução de Problemas, pode se configurar como sendo uma boa alternativa para cumprir esse papel" (FERREIRA; SILVA; MARTINS, 2017, p. 193).

Assim, os autores acima discorrem sobre a Resolução de Problemas com disciplinas de Ensino Superior, evidenciando assim uma pesquisa que envolve os conceitos de álgebra, que segundo eles é uma disciplina que se caracteriza como sendo visada com alto grau de dificuldades.

E com o estudo, eles chegaram a um consenso que "[...] a Resolução de Problemas pode ser um caminho para o processo de construção de conhecimentos de Matemática Superior, como os de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, dentre outros" (FERREIRA, SILVA, MARTINS, 2017, p. 200).

Notamos essa via de aprendizagem sendo muitas vezes alvo de estudos, pois nela pode ser enxergado uma busca por possibilitar uma interação entre aluno e conhecimento, em de vez apenas entregar esse conhecimento pronto e acabado. Nesse sentido,

> Torna-se crucial que a Universidade capacite, cada vez mais, professores na elaboração de atividades que potencializem a criatividade em seus estudantes, essencialmente na Matemática, uma vez que esta disciplina pode promover o ensinamento criativo, crítico e reflexivo quando alicerçada à Resolução de Problemas (BERTOTTI JUNIOR; POSSAMAI, 2021, p. 197).

De acordo com estudos realizados a matemática não é bem compreendida e aceita por muitos estudantes, isso porque alguns não veem o verdadeiro sentido nas compreensões da área. Pensar em estratégias que possam enaltecer o sentido de aplicação da área pode se constituir algo instigante para o estudante.

Nesse sentido, a Resolução de Problemas pode atender as expectativas, uma vez que ela propõe que "o docente necessita trabalhar na formulação da proposta do problema, levando em consideração o potencial do estudante e seus conhecimentos adquiridos a *priori*, o que lhe permitirá construir ferramentas para resolver problemas e constituir a própria aprendizagem" (LEAL JUNIOR, ONUCHIC, 2015, p. 963).

Em termos de assuntos a serem trabalhados com a Resolução de Problemas nos deparamos com um leque de possibilidades, independentemente do nível de ensino que são abordados. Com um enfoque central nesse estudo, apresentamos a seguir uma discussão acerca de um assunto especifico do Ensino Superior, denominado Cálculo Integral, visando trazer elementos primordiais para o entendimento do pretendido com esta pesquisa.

Diante disso, enxergamos a Resolução de Problemas como uma metodologia eficaz na promoção de ensino e aprendizagem, em especial no Cálculo Integral, em que o professor poderá dispor de uma maneira rica de contribuição e o estudante de uma estratégia que o possibilitará na condução da construção de seus conhecimentos.

3. CÁLCULO INTEGRAL

Ao ingressar em cursos como o de Licenciatura em Matemática os estudantes acabam se deparando com o Cálculo Diferencial e Integral (CDI), em qual constitui-se como sendo uma das principais disciplinas que se estende por boa parte da graduação.

Sabemos que o estudo de ambas as partes do Cálculo é de extrema importância, tendo em vista toda contribuição para as distintas áreas do conhecimento. A fim de se debruçar um pouco no contexto, abordamos a seguir sobre a Integral, elencando aspectos como a historicidade do Cálculo, enfatizando a integral, bem como das suas técnicas.

3.1 O ENSINO DO CÁLCULO INTEGRAL

Para conhecer um pouco acerca do contexto de ensino do Cálculo Integral faz-se necessário se debruçar um pouco em algumas caracterizações que retratam bem a temática, como desde o processo histórico que envolve o Cálculo, em geral, à abordagem da temática no contexto estudantil. A seguir, discorremos brevemente pontos que possam elucidar bem o contexto de ensino dessa parte da Matemática.

3.1.1 Situando o contexto histórico do Cálculo

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é um campo da matemática de grande aplicabilidade nas mais distintas áreas do conhecimento. Seu maior desenvolvimento se deu por volta do século XVII, por nomes como Leibniz e Newton. No entanto, este ramo não se resume apenas a esses matemáticos, recebendo muitas contribuições advindas de diferentes épocas. Como frisam Courant e Robbins (2000, p. 481) o Cálculo "[...] é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz, ambos, porém, desempenharam papel decisivo".

Notadamente, aos estudarmos o Cálculo, de acordo com a história da matemática, percebemos um campo com seus vestígios presentes desde as civilizações antigas, quando estas buscavam a resolução de problemas que eram impostos em suas referidas épocas. Porém, ressaltamos que com a estruturação que temos o Cálculo nos dias atuais, a datação vem do século XVII.

Bueno (2021) ratifica esta historicidade, alegando que o Cálculo está além de algo partido de uma única pessoa, tendo em vista que suas discussões iniciais datam de tempos antigos na Grécia e sua evolução se deu por muitos contribuintes de diferentes momentos da história, o que acabou proporcionando a culminância de muitas ferramentas para se trabalhar essa vertente, entre as quais temos uma que é utilizada até os dias atuais, o Teorema Fundamental do Cálculo. Importante resultado que deu ênfase aos matemáticos Leibniz e Newton, os quais são taxados, por vezes, como desenvolvedores da área.

Ao esquadrinharmos no conhecimento deste campo, aprendemos, em essência, que quando se fala no termo 'Cálculo' estamos nos referindo aos temas Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, os quais são tidos como processos inversos.

Um ponto crucial sobre estes dois assuntos é que embora os cursos tratem primeiro do estudo do Cálculo Diferencial para depois discutir o de Integral, o surgimento se deu de maneira invertida ao que se propõe no currículo abordado atualmente. Como narra Eves (2004, p. 417)

> primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

Toda essa descoberta e construção passou a constituir-se como sendo de grande relevância para a sociedade. À priori, o surgimento do Cálculo foi fundamental para que se pudesse solucionar problemas que até então não se conseguia obter resultados (MELCHIORS; SOARES, 2013). E é notório que com o passar dos anos o campo foi só acrescendo quanto às suas contribuições.

Observamos de forma evidente que a humanidade desde sempre busca em suas ações a criação de ferramentas que a possibilite conforto e acessibilidade. Em decorrência disso, atinamos o quanto o homem inventa e se reinventa para oferecer a si uma comodidade e conforto, procurando sempre, a construção de um mundo em que as soluções sejam de forma imediata.

Com a Matemática é possível presenciarmos esta busca incessante, considerando que é uma área que vem tentando em suas pesquisas ofertar uma melhora para a sua compreensão. Um fato que acaba implicando diretamente no cotidiano das pessoas. Entre seus diversos assuntos, o Cálculo tornou-se um dos primordiais para muitas aplicabilidades, o qual alcança diferentes setores sociais.

Bezerra (2015, p.14) ainda frisa que "Com o surgimento e sistematização do Cálculo, foi possível solucionar diversos problemas, das mais diversas áreas, com bem menos esforços – isso quando comparados aos procedimentos que eram adotados quando não se havia a estruturação que utilizamos na atualidade".

Contemplando também o que esse contexto proporciona Coxe (2013, p. 23) assegura que “O Cálculo diferencial e integral é um ramo da Matemática, considerado como a linguagem por excelência do paradigma científico e como instrumento indispensável de pensamento para quase todas as áreas do conhecimento”.

Todo esse conjunto de ponderações externalizam a relevância do ensino do CDI em sua totalidade e nos faz refletir o porquê de este ser um campo de estudo tão interessado por muitos, seja da própria área, ou como já bem exposto, por muitas outras.

Como principal ponto, a sua abordagem de ensino é algo que chama mais a atenção, considerando que o CDI seu deu de maneira bem restrita por muito tempo, obedecendo uma metodologia tradicionalista.

Tal abordagem corresponde aquela que põe o Cálculo como uma estratégia de trabalho, em que o professor é aquele que expõe um amontoado de conceitos e métodos a serem seguidos e o estudante o que recepciona e aplica-os em inúmeros exercícios, sem que seja dado a essa ação um real sentido (SILVA, 2020).

Com esse enfoque, o Cálculo chegou e se instalou no campo educacional com uma visão limitada, bem longínqua do que esta poderosa ferramenta pode proporcionar. Silva (2020) põe as claras o reflexo desse cenário, quando explana a respeito de questionamentos por parte dos estudantes com relação a significância do estudo da área, bem como que implicações esta pode possuir. E é embasado nisso que se nota uma busca constante por parte dos pesquisadores no cenário do ensino de Cálculo.

Nesse viés, podemos verificar que nos últimos tempos vem havendo tentativas de inserções de formas que possam asseverar a efetivações de progressos no respectivo cenário, o que acontece é que em certas situações a reestruturação na perspectiva de uma melhora para o trabalho com os assuntos da área não se constituiu como um pensamento sólido.

Quando discutia em seu escrito, Rezende (2003) já alertava sobre uma reestruturação em que a análise para se proporcionar um cenário melhor deve ser enraizado em um aspecto epistemológico, para que não se recaia no insucesso no percorrer da respectiva busca.

A boa ação de promover diferentes formas de se trabalhar o Cálculo pode ser interessante, haja vista que sejam bem objetivadas e direcionadas, para que não se incida em um amontoado de estratégias que não passa de dar continuidade a uma domesticação do tradicionalismo, isto é, encontrando apenas um jeito diferente de se fazer o que já se fazia, sem um aspecto de novo e promissor.

3.1.2 Um olhar para as Técnicas de Integração

Como já mencionado, um dos tópicos que compõem o Cálculo trata-se da integral. Assunto esse que, assim como outros da matemática, possibilita distintas aplicabilidades. Ao estudarmos as integrais, trabalhamos desde aplicações que dispõe de conceitos mais simples a aqueles que requerem ferramentas mais detalhadas, como é o caso das Técnicas de Integração que propiciam a resolução de diversos problemas.

Nesse viés, um ponto importante que precisamos nos ater é que trabalhar integrais deve ser compreendido como uma conjuntura de teorias e práticas para a respectiva cognição. Faz-se necessário uma boa desenvoltura no respectivo estudo, garantindo assim uma essencial compreensão do conteúdo.

Não obstante a essa idealização, o que acontece é que nem sempre esta é bem concebida, sendo dado a atenção apenas para a memorização de fórmulas, como também para resolução excessiva de exercícios. Deixando o estudo com enfoque em simples utilização de conceituação.

É importante termos consciência de que nas entranhas matemáticas "o conceito de um objeto matemático não se reduz a uma definição. Envolve todo um contexto de situações criadoras de significados" (BARROSO *et al.,* 2013, p. 89). Algo que revela que a compreensão de um conhecimento pode estar sempre em expansão.

Como pode-se perceber, o Cálculo, em sua totalidade, nos mostra ser uma das áreas da matemática que em sua abordagem, por vezes, ainda preserva bastante características adotadas desde sua inserção no meio educacional. A integral, como um de seus componentes, se enquadra bem nesse rol tradicionalista.

Diferentes pesquisas apontam o contexto pontuado. Coxe (2013), por exemplo, relata de acordo com análises feitas através dos livros envolvendo o assunto, juntamente com sua vivência em sala de aula, que a abordagem das integrais está focada na apresentação de teorias e exercitações.

Sobre essa consideração, entendemos que a proposta de exercícios pode ser também uma via para se trabalhar os conteúdos, no entanto, a compreensão de um determinado assunto precisa ir além de exercitação de questões, necessitando dar ao que se estuda um entendimento que possibilite aplicações mais apuradas.

Corroborando também para a presente discussão, Mota e Abar (2019) contam o quanto a falta da compreensão do aprendizado da integral implica em uma aprendizagem baseada em ações de forma mecanizada, isto é, refletida apenas em meros cálculos apoiados em métodos, sem o entendimento da verdadeira essência de tais aplicações.

Em linhas gerais, Alves (2017, p. 83) pontua que:

> Diante da complexidade e do caráter abstrato de muitos conceitos matemáticos, peculiares ao ambiente acadêmico, a opção única que se apresenta ao estudante será o expediente à memorização. Dessa forma, o caso da noção da integral e a descrição dos critérios de integrabilidade é, possivelmente, uma das circunstâncias em que registramos tal atitude.

Todas essas ponderações fazem alusão a um cenário em que a essência do assunto nem sempre é percebida como deveria ser. Nesse enfoque, entendemos que realizar o ato de ensinar sem dar a este uma significação pode ser um fator influente na vida do estudante, o qual em sua formação poderá levar consigo sequelas de um aprendizado desqualificado.

Refletimos que o estudo de um conteúdo precisa abarcar diversos aspectos, desde um aprendizado da teoria a uma praticidade, tomando ciência que isso não se refere apenas a uma restrição de prática de exercícios para uma fixação de conceitos trabalhados.

O conteúdo de integrais está associado, em certas situações, a uma desfreada efetuação de cálculos por meio da utilização de técnicas, o que não confere em totalidade com o real sentido de sua compreensão, o qual precisa ser explorado em um patamar bem além disso. Dispor de tais técnicas de fato configura-se como algo importante, porém somente prender-se a este ponto não oportuniza ao estudante uma compreensão expressiva (MOTA; ABAR, 2019).

Toda essa conjuntura de métodos, conhecida como técnicas de integração, figura-se como um pilar para o estudo da integral, em que são evidentemente essas técnicas que dão ao assunto viabilidade para se resolver muitos problemas.

Quando nos reportamos ao ensino das técnicas de integração podemos encontrar no assunto uma inclinação de apenas olharmos a teorização e reproduzirmos os cálculos por meio de exercitação, o que faz termos uma satisfação de aprendizagem. Acreditamos que isso pode ser um motivo de não querermos nos ater as possibilidades maiores para se trabalhar essas técnicas. Por que é necessária uma consciência de que essa estagnação pode trazer para os estudantes uma verdadeira desmotivação por estudo do conteúdo.

> Na qualidade de professores, precisamos ser cônscios de que o fato de resolver algumas dezenas de casos inseridos num repertório de "técnicas de integração", não garante e, muito menos assegura que, o entendimento conceitual a respeito das noções de integral definida e integral indefinida (ALVES; LOPES, 2013, p. 19).

Em sua pesquisa, Bezerra (2015) preocupa-se justamente em ultrapassar essa barreira que impossibilita uma exploração do conteúdo. A autora expressa interesse pela pesquisa, pois percebeu o conteúdo fechado a um simples manusear manipulatório algébrico. Nessa sintonia, Souza (2013) busca uma perspectiva de se trabalhar estratégias para o ensino das técnicas de integração, alegando também ver dificuldades dos estudantes nesse tópico.

Quando fazemos pesquisas relacionadas ao tópico integrais vemos uma quantidade considerável de trabalhos, mas quando somos mais específicos, restringindo-se as suas técnicas é notório uma quantidade mínima. Não obstante, evidenciamos, ainda que sejam poucos os textos, enxergamos ao longo desses escritos um apontamento para um ensino pautado em teorias e aplicações de exercícios, destacando poucas perspectivas de exploração.

Em sua pesquisa, Bezerra (2015) expõe uma verificação sobre formas trabalhadas das técnicas de integração de alguns livros de Cálculo, nos apontando sobre um ponto chave pouco discutido, que seria em uma perspectiva mais gráfica-geométrica.

Após uma seleção de alguns livros didáticos de Cálculo Integral, descrevemos a seguir uma análise das Técnicas de Integração.

3.1.3 Uma análise das Técnicas de Integração em livros de Cálculo

A análise de livros didáticos pode constituir-se como sendo algo relevante, uma vez que esta ação pode proporcionar um conhecimento de como é tratado os assuntos nele. Acreditamos nessa estratégia, pois isso pode nos acrescer no conhecimento de se trabalhar ou acrescentar na contribuição para o aprendizado ansiado.

Na tentativa de oferecer a promoção de um conhecimento aos estudantes participantes da pesquisa, nos propomos, tomar conhecimento e apresentar um pouco de como alguns livros de Cálculo esboçam o assunto Técnicas de Integração. Para isso, selecionamos e analisamos os seguintes livros: O Cálculo com Geometria Analítica (1994) de Louis Leithold; Cálculo (2013) de James Stewart e Um curso de Cálculo (2018) de Hamilton Luiz Guidorizzi. Todos eles do volume 1.

Leithold (1994) discute a integral no capítulo 5, tratando-a como sendo *Antidiferenciação*. Ainda nesse capítulo, aborda o método da substituição simples, em uma seção denominada *Algumas Técnicas de antidiferenciação*. E no capítulo 9 é que vemos a denominação Técnicas de Integração, onde se apresenta a integração por partes, substituição trigonométrica e frações parciais.

Sobre a substituição simples o Leithold (1994) enuncia ela como sendo um teorema que parte da conceituação da regra da cadeia para derivadas. Na apresentação da integração por partes, o autor parte da regra do produto para se chegar à fórmula.

No que concerne à integração por substituição trigonométrica vemos uma explanação por meio dos casos, enquanto que o método de frações parciais é mostrado inicialmente uma apresentação de polinômios já simbolizando a integral com a situação envolvendo um quociente. Partindo disso é que se explica sobre os casos, detalhando um a um.

Com exceção da técnica de substituição por frações parciais que expõe a resolução de algumas situações-problema na parte de explanação do assunto, as demais técnicas contêm em suas explicações apenas exercícios com exibição manipulatória, sendo os problemas expressados no fim da lista de exercícios, ao final de cada seção. Em síntese, o livro se apresenta com uma roupagem simples, expressando como principal característica a exposição de muitos exemplos e exercícios no final de cada seção e dos capítulos.

No livro de Stewart (2013) notamos uma caracterização mais ampliada com gráficos e cores, trazendo uma maior quantidade de elementos que podem contribuir para a compreensão dos conteúdos. Em relação as técnicas, encontramos também a explanação da substituição simples em um capítulo à parte, sendo tratado como Integral Indefinida, enquanto que em outro capítulo encontramos integração por partes, frações parciais e substituição trigonométrica, as quais são tratadas de maneira semelhante ao do Leithold.

O que podemos destacar sobre este livro é que mesmo trabalhando muitos exemplos e exercitações à medida que explora as técnicas, notamos uma ênfase na presença de problemas cotidianos, bem como voltados para um sentido computacional. Em suma, o livro mostra-se com uma abordagem crescente de grau de dificuldades, levando os estudantes a serem desafiados na resolução de seus exercícios e problemas.

No livro de Guidorizzi (2018), vemos um tratamento da integral como sendo primitiva de uma função, tendo um capítulo à parte para isso, enquanto em outro como "Técnicas de Primitivação" é abordado algumas técnicas de integração. Diferente dos livros anteriores, neste, o autor retrata todas as técnicas juntas. Ressaltamos que o autor não aborda em sua obra a respeito da técnica de substituição trigonométrica de uma maneira explícita. No sentido da trigonometria, apresenta apenas identidades trigonométricas.

Um aspecto destacado deste livro é que ele conta com diversos exemplos e exercícios que são de caráter algébrico manipulatório, sem a apresentação de problemas mais elaborados acerca dos conteúdos.

3.1.4 O que nos diz a literatura

Para atingir o nosso objeto de estudo e evidenciarmos a importância para a literatura, expomos, em seguida, um levantamento de pesquisas desenvolvidas no Brasil que versam sobre Técnicas de Integração.

Nessa perspectiva, fizemos a consulta na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), a princípio, a respeito de trabalhos que retratam sobre o ensino de CDI, o que nos levou a encontrarmos um número bem expressivo. Ao fazermos uma nova busca relacionada ao ensino de Integral, continuamos nos deparando ainda com um volume considerável de pesquisas, o que nos fez optarmos por tomar aqueles trabalhos que dialogam com nossa pesquisa, tendo como foco as Técnicas de Integração sendo pensado numa perspectiva de contribuir para o professor em sua formação.

Nesse filtro encontramos duas pesquisas, as quais apresentamos, na sequência, um breve resumo:

I) A dissertação da autora Cristina Alves Bezerra (BEZERRA, 2015) desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará teve seu estudo focado nas Técnicas de Integração, onde ela visou propiciar situações de ensino do assunto com aporte no software matemático *GeoGebra*. Isso na perspectiva de tornar a compreensão mais significativa, onde o estudante possa vir a entender o procedimento algébrico e geométrico nesse processo.

Bezerra fez uma apresentação da literatura acerca do CDI, como também do ensino e aprendizagem das técnicas de integração, visando seu processo, além de elencar acerca da utilização de um software para o ensino, como foi enfocado no *Geogebra*.

Para se chegar ao almejado, a autora trouxe em seu texto a exposição de algumas técnicas de integração, a fim de promover uma análise destas técnicas e propor uma forma de explaná-las. Além de tecer comentários sobre livros didáticos muito utilizados pelos cursos que abordam a temática de Cálculo.

Diante de seu estudo, Bezerra propôs a disponibilização de Tecnologias Digitais como forma de melhor oferecer o ensino, pois em se tratando das Técnicas de Integração o estudante não ficará preso a um estudo apenas de manipulações algébricas, e sim estará sendo possibilitado a uma visualização que poderá propiciar uma maior facilidade.

II) A dissertação de Rodrigo Tavares da Silva (SILVA, 2019) desenvolvida pelo Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, embora não traga no seu título a nomenclatura Técnicas de Integração, mas tem-se a presença de algumas delas no texto.

O autor centrou seu estudo na eficácia do ensino da integral com a tecnologia, partindo de atividades propostas num cenário de Ensino Híbrido. Com isso, tendo como objetivo principal investigar as possíveis contribuições da implementação da tecnologia na resolução de tarefas envolvendo conceitos de integral, entre elas dispondo da substituição simples e da integração por partes.

Nesse viés, ele apresentou tarefas que dispunham de algumas ferramentas tecnológicas como *Applet* e também vídeos no YouYube que auxiliavam no processo de teorização para as respectivas questões, as quais visavam auxiliar no processo de compreensão do uso das técnicas de integração. Além disso, destacar a vivência como pesquisador em uma experiência com o Ensino Híbrido.

3.2 Cálculo Integral

Nesta seção apresentamos acerca da integral indefinida e definida, em que trazemos definições e propriedades partindo de conceituações prévias, expondo informações relevantes.

3.2.1 A notação de Soma

Para facilitar a escrita de somas com muitos termos, reconhecíveis por meio de algumas propriedades, utiliza-se a notação de soma, com a letra grega maiúscula Σ denominada sigma, que simboliza matematicamente um somatório.

De forma geral, temos que:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n),$$

Onde m e n são inteiros e $m \leq n$.

Na soma o número m é chamado de limite inferior e n é chamado de limite superior, o símbolo k (qualquer outra letra pode ser usada, por exemplo: i, j, etc.) é chamado de índice da soma e f é uma função de k.

3.2.2 Propriedades da notação de Soma

1. $\sum_{k=1}^{n} C = nC$, onde C é qualquer constante.

2. $\sum_{k=1}^{n} C \cdot f(k) = C \sum_{k=1}^{n} f(k)$, onde C é qualquer constante.

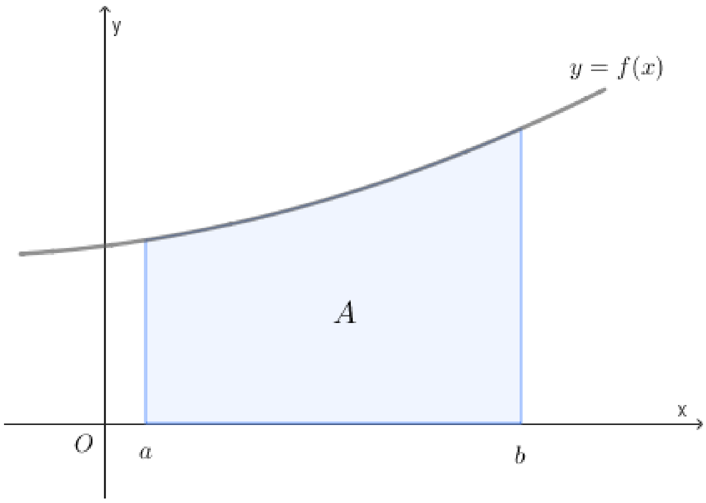
3. $\sum_{k=1}^{n} [f(k) + g(k)] = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$; esta propriedade pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções.

4. $\sum_{k=1}^{n} [f(k) - f(k-1)] = f(n) - f(0)$; esses tipos de somatórios são chamados de telescópicas, devido ao cancelamento sofrido pelos termos inferiores.

3.2.3 Área sob uma curva

Em geometria aprendemos a calcular a área de regiões poligonais e circulares. Agora, vamos analisar o problema de obtenção da área de uma região do plano cartesiano limitada pelo eixo Ox, as retas verticais $x = a$ e $x = b$, e a curva $y = f(x)$, onde f é a função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Vejamos o seguinte gráfico:

Figura 1 – Área de *A*

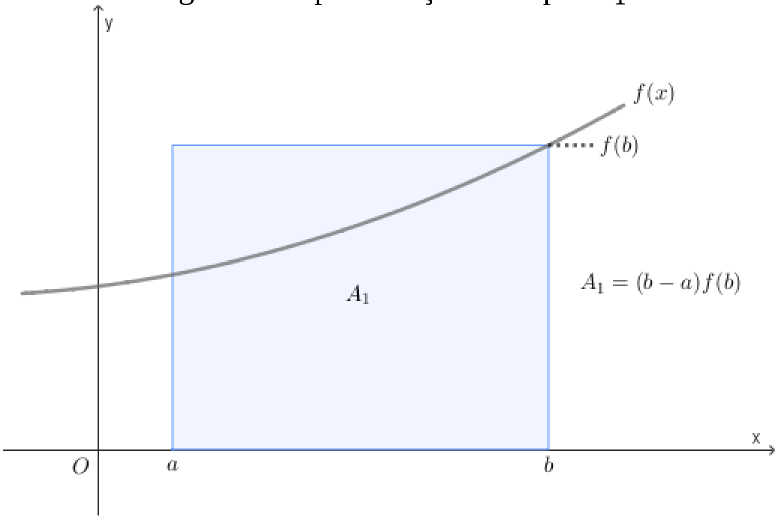


Fonte: Elaborado pelo autor

Denotando essa área por A, abordamos seu cálculo.

Uma primeira aproximação consiste em calcular a área da região retangular sombreada A, como mostra o gráfico a seguir:

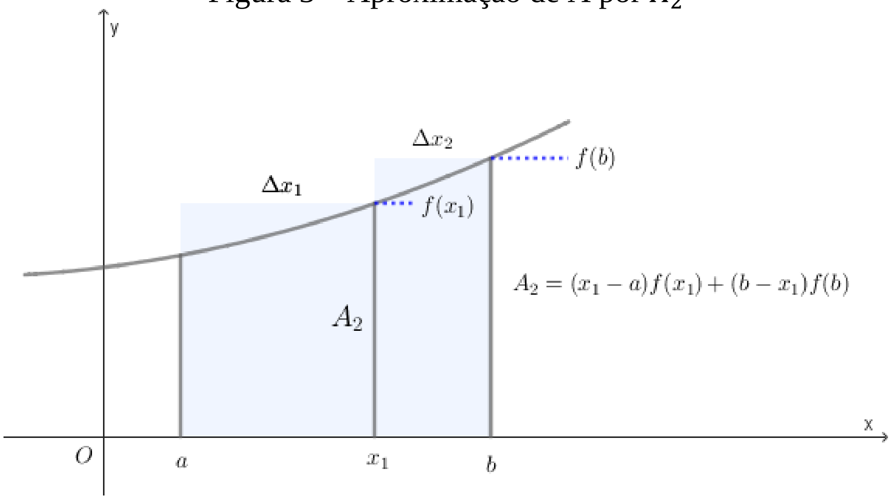
Figura 2 – Aproximação de A por A_1



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando duas regiões retangulares, obtemos uma melhor aproximação da área pesquisada como mostra o gráfico a seguir:

Figura 3 – Aproximação de A por A_2



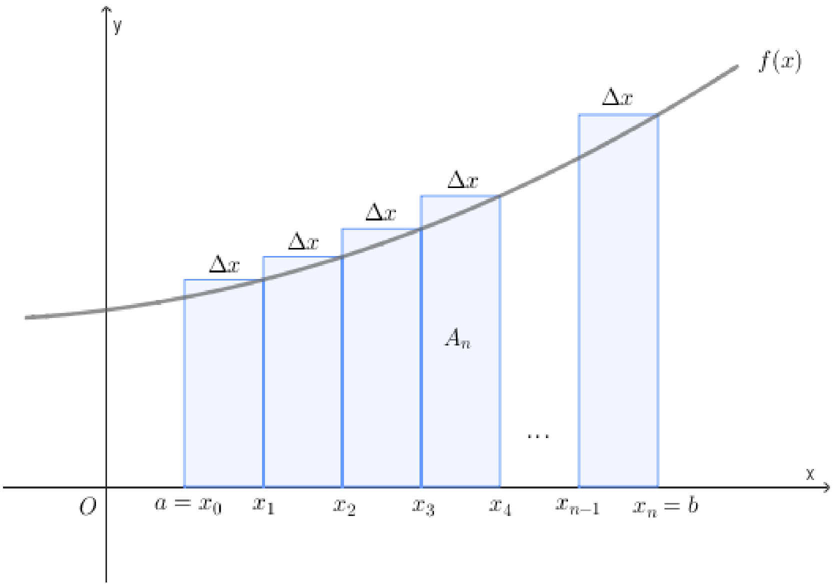
Fonte: Elaborado pelo autor

Se os dois subintervalos em que dividimos o intervalo $[a, b]$ tiverem o mesmo comprimento, ou seja, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$, a equação descrita na expressão anterior pode ser escrita na forma:

$$A_2 = \Delta x f(x_1) + \Delta x f(b) = \Delta x[f(x_1) + f(b)].$$

À medida que o número de regiões retangulares aumenta, a diferença entre a soma de suas áreas e a área sob a curva diminui, conforme mostrado no gráfico a seguir.

Figura 4 – Aproximação de A por A_n



Fonte: Elaborado pelo autor

Se o intervalo fechado $[a, b]$ for dividido em n subintervalos de igual comprimento (Δx), tal que $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ (gráfico anterior), então a equação da soma das áreas dos n retângulos, é:

$$A_n = [\,f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]\Delta x.$$

Intuitivamente nota-se que quando o número n de retângulos tende ao infinito, a soma de suas áreas tende a um limite que é a área procurada. Portanto, a área sob a curva $y = f(x)$, limitada à esquerda e à direita pelas retas verticais $x = x_0 = a$ e $x = x_n = b$ é

$$A = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}[\,f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]\Delta x.$$

Usando a notação de soma, a equação acima pode ser escrita como

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

Também deve ser notado que os n retângulos podem ser inscritos ou circunscritos, isto é, inscrito quando o retângulo fica todo abaixo da curva e circunscrito quando o retângulo passa um pouco da curva. Se considerarmos retângulos inscritos e como f é crescente no intervalo fechado $[a, b]$, o valor mínimo absoluto da função no k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ é $f(x_{k-1})$; portanto, a equação da área sob a curva é:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

As somas correspondentes das áreas dos retângulos circunscritos são pelo menos tão grandes quanto a área da região A, e pode-se mostrar que o limite dessas somas conforme n aumenta sem limite é exatamente o mesmo que o limite da soma das áreas dos retângulos inscritos. O valor máximo absoluto da função no k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ é $f(x_k)$, então a equação da área sob a curva dividida em retângulos circunscritos é:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

3.2.4 Somas de Riemann

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Vamos dividir isso em n subintervalos selecionando quaisquer $n - 1$ pontos distintos, intermediários entre a e b, digamos $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$, ordenados de tal maneira que

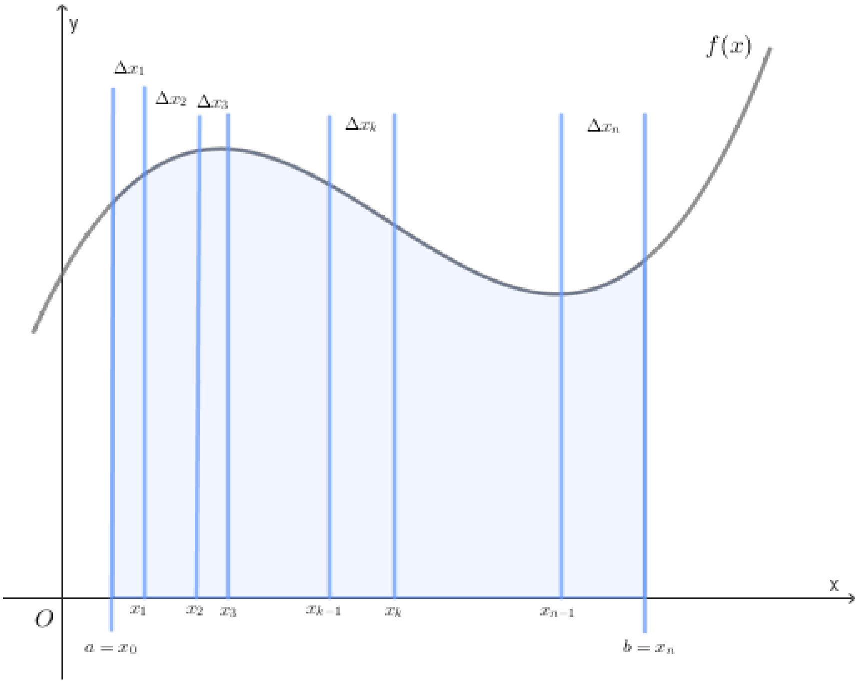
$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_n,$$

embora os referidos pontos não sejam necessariamente equidistantes.

Os subintervalos assim construídos $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{n-1}, x_n]$ têm comprimentos respectivamente $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, isto é, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, para $k = 1, 2, \dots, n$. Note-se que estes intervalos são fechados à esquerda e abertos à direita, exceto o último, que é fechado, para o qual se explica a seguir.

O conjunto $\Delta = [x_0, x_1], [x_1, x_2] \dots, [x_{n-1}, x_n]$ dos n subintervalos construídos chama-se uma partição do intervalo $[a, b]$, ou seja, particionar um conjunto significa dividi-lo em uma coleção de subconjuntos não relacionados, cuja união é o conjunto particionado, algo semelhante ao que se obtém fatiando ou dividindo um bolo, pois dele se obtêm partes não relacionadas (fatias) cuja união forma o bolo original completo. A partição do intervalo $[a, b]$ é ilustrada na figura a seguir:

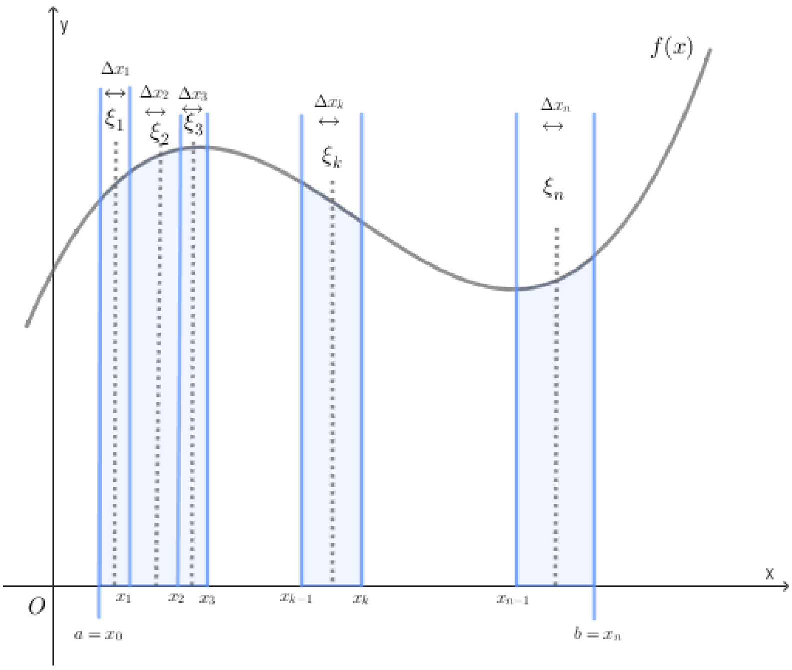
Figura 5 – Partição de A por Riemann



Fonte: Elaborado pelo autor

Em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ selecionamos um ponto ξ_k, onde $x_{k-1} < \xi_k < x_k$, conforme mostrado abaixo:

Figura 6 – Escolha do ponto ξ em cada intervalo de Riemann



Fonte: Elaborado pelo autor

A soma das áreas dos retângulos cuja base é x_{k-1}, x_k e sua altura é ξ_k é representada pelo somatório $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$, que na notação de soma é escrita:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

é chamada Soma de Riemann, que se aproxima da área sob a curva, ficando cada vez melhor à medida que n aumenta.

A soma de Riemann é uma aproximação da área sob a curva. Portanto,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

e para funções contínuas, a área sob a curva é obtida tomando o limite, quando n tende ao infinito,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

isto é, área limitada pelo eixo x, a curva $y = f(x)$ e as retas verticais $x = a$ e $x = b$.

3.2.5 Introdução à definição da Integral de uma função

O conceito de derivação é necessário para especificar a descrição da inclinação de uma curva, a velocidade das partículas em movimento ou, de forma mais geral, o conceito de taxa de variação. O conceito de integração está relacionado com a descrição de áreas de regiões cujos limites podem ser descritos por uma função.

3.2.5.1 Integral Definida

Se f é uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a integral definida de $f(x)$ entre a e b, denotada pelo símbolo $\int_a^b f(x)dx$ é dada pelo limite de uma soma de Riemann para quando o número n de subintervalos tende ao infinito. Isto é,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Matematicamente se ler: integral definida de f entre os limites a e b.

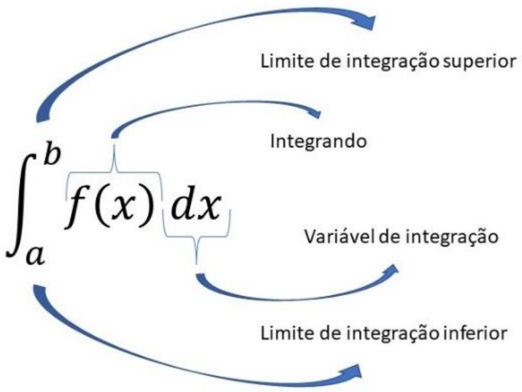
3.2.5.2 Notação de Leibniz para a Integral

A descrição da integral como um limite de uma soma levou a Leibniz a fazer uso do símbolo ∫ para denotar a integral, porque é semelhante ao S maiúsculo que sugere o conceito de soma:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Assim, a passagem para o limite a de uma subdivisão finita em partes Δx_k é indicada usando a letra d em vez de Δ. Portanto, os seguintes elementos para a integral definida são identificados:

Figura 7 – Elementos da Integral Definida



Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.5.3 Propriedades da Integral Definida

A integral definida quando calculada a partir de sua definição, ou seja, determinando o limite da soma de Riemann, acaba sendo complicada e impraticável. Para estabelecer um método simples e eficaz, é necessário reconhecer algumas propriedades da integral definida, como as mostradas abaixo.

1. Se Δ é qualquer partição do intervalo fechado $[a, b]$, fica estabelecido que:

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$$

2.Se f é definida no intervalo fechado $[a, b]$ e se existe

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} Cf(x_k)\Delta x_k,$$

onde delta é qualquer partição do intervalo $[a, b]$ e C é qualquer constante, temos:

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} Cf(x_k)\Delta x_k = C \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k.$$

3.2.5.4 Teoremas que dão origem às Propriedades da Integral Definida

1. Se a função f é integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e C é uma constante arbitrária, temos:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

2. Se as funções f e g são integráveis no intervalo fechado $[a, b]$, então $f + g$ é integrável e está estabelecido que:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Este teorema pode ser aplicado a qualquer número de funções, isto é, se as funções $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ são todas integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ temos:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx$$

é igualmente aplicável à subtração e adição de funções.

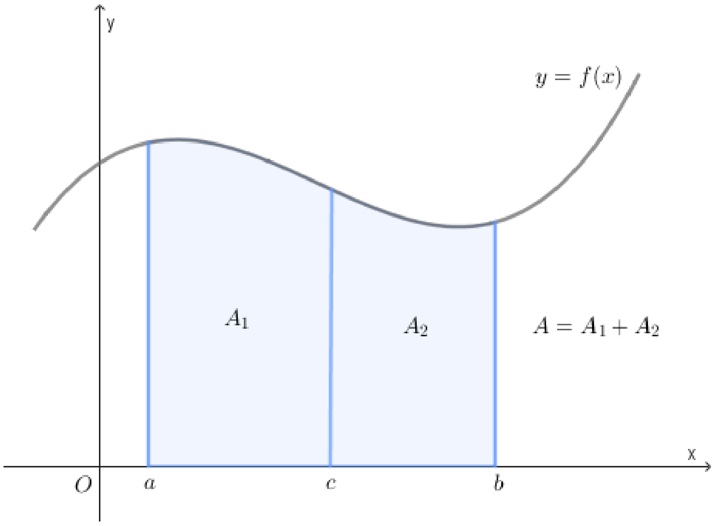
3. Se a função f é integrável nos intervalos fechados $[a, b], [a, c]$ e $[c, b]$, temos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

onde $a < c < b$.

Este teorema é interpretado geometricamente, se $y = f(x)$ é uma função definida para todo x em $[a, b]$, então é estabelecido que a área sob a curva $y = f(x)$ entre a e b pode ser dividida em duas áreas, entre a e c, c e b, como é mostrado a seguir:

Figura 8 – Ilustração do teorema 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Pode ser generalizado para o caso em que c não é um ponto intermediário entre a e b, conforme estabelecido pela seguinte propriedade.

4. Se f é integrável em um intervalo fechado que contém os números a, b e c em qualquer ordem, então:

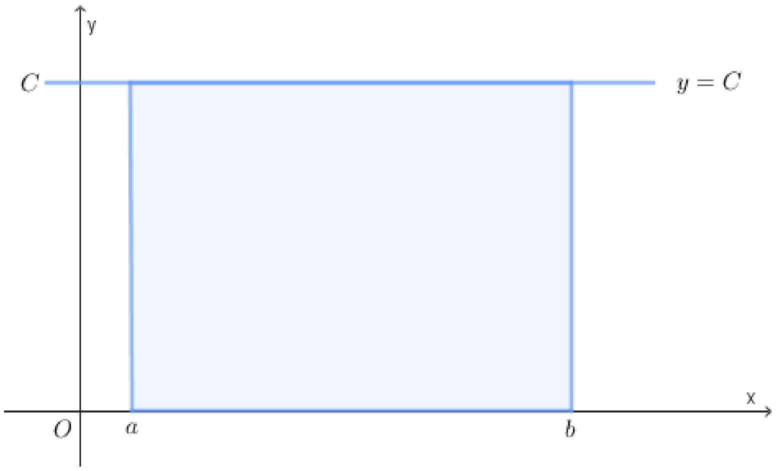
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Se f é uma função constante $f(x) = C$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$, temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx = C(b - a).$$

Este teorema é interpretado geometricamente para quando $C > 0$, estabelecendo que a integral definida $\int_a^b C\,dx$ dá a medida da área da região sombreada, que é um retângulo cujas dimensões são C unidades e $(b - a)$ unidades conforme mostrado a seguir.

Figura 9 – Ilustração do teorema 5



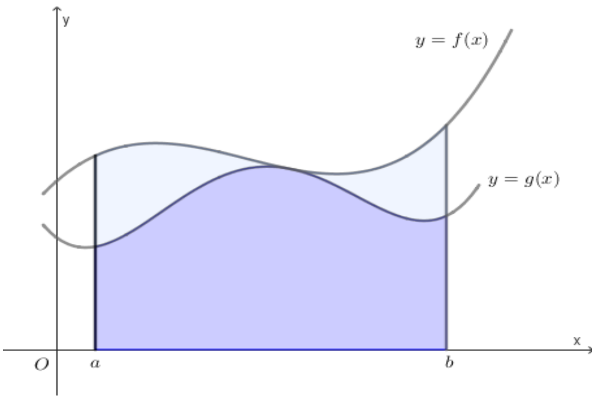
Fonte: Elaborado pelo autor

6. Se as funções f e g são integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, temos:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Geometricamente, este teorema significa que se duas regiões compartilham a mesma base e são limitadas lateralmente pelas mesmas retas verticais, uma das áreas será maior ou igual à outra se seu topo nunca estiver abaixo do topo da outra, conforme observamos no seguinte gráfico:

Figura 10 – Ilustração do teorema 6



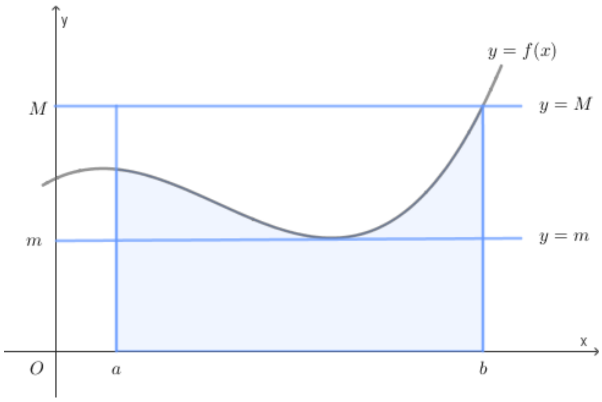
Fonte: Elaborado pelo autor

7. Suponha que f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se m e M são os valores absolutos mínimo e máximo de f em $[a, b]$ respectivamente, tal que $m \leq f(x) \leq M$, para todo x tal que $a \leq x \leq b$, então:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Se a função f, além disso, não assume valores negativos, a interpretação geométrica desse teorema estabelece que a área sob a curva de uma região cuja tampa está entre as retas horizontais $y = m$ e $y = M$, em todos os pontos do intervalo $[a, b]$, terá um valor intermediário entre as áreas dos retângulos baseados em $[a, b]$ e cujas alturas são m e M. Se além disso a função f não assume valores negativos, a interpretação geométrica desse teorema estabelece que a área sob a curva de uma região cuja função está entre as retas horizontais $y = m$ e $y = M$, em todos os pontos do intervalo $[a, b]$, terá um valor intermediário entre as áreas dos retângulos baseados em $[a, b]$ e cujas alturas são m e M, conforme mostrado abaixo:

Figura 11 – Ilustração do teorema 7



Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.5.5 A Integral Definida

Os conceitos fundamentais da integral definida foram usados pelos antigos gregos muitos anos antes da descoberta do Cálculo Diferencial. No século XVII, quase simultaneamente, mas de forma independente, Isaac Newton e Gottifried Whilhelm Leibniz trabalharam na aplicação do Cálculo para determinar a área de uma região delimitada por uma curva ou um conjunto de curvas, para isso, calcularam uma integral definida por meio da antidiferenciação; em cujo processo de solução está contido o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Para estabelecer e provar o Teorema Fundamental do Cálculo, serão discutidas integrais definidas com um limite superior variável e um teorema preliminar.

Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então o valor da integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ depende apenas da função f e dos números a e b e não da variável x, que é a variável independente. A partir do exemplo $\int_0^3 x^2dx$ determinamos que o valor exato de x é 9. Qualquer outra letra poderia ter sido usada no lugar de x, por exemplo:

$$\int_0^3 s^2ds = \int_0^3 t^2dt = \int_0^3 u^2\,du = \int_0^3 v^2 = 9.$$

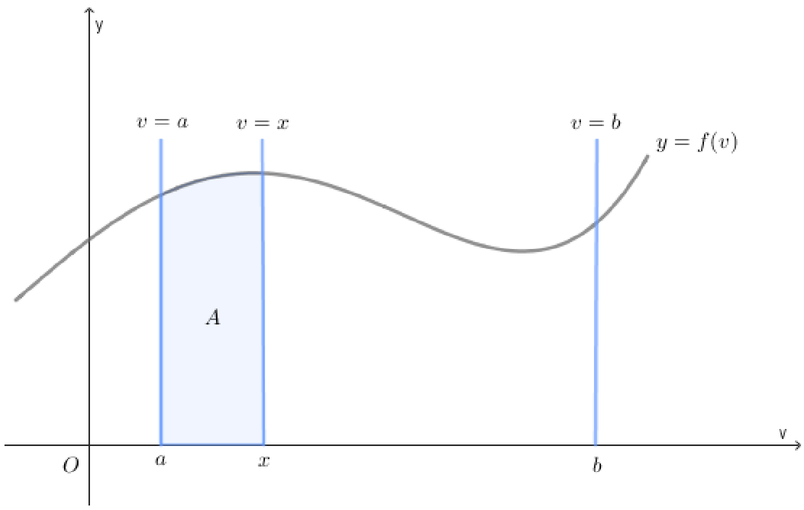
Se f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$; pela definição da integral definida, é garantido que $\int_a^b f(v)dv$ existe. Portanto, fica estabelecido que, se a integral definida existe, ela representa um valor único. Se x é um valor numérico em $[a,b]$, então f é contínua em $[a,x]$, pois é contínua em $[a,b]$. Portanto, $\int_a^x f(v)dv$ define uma função F cujo domínio são todos os valores numéricos no intervalo fechado $[a,b]$ e cujo valor da função em qualquer valor numérico x em $[a,b]$ é dado por:

$$F(x) = \int_a^x f(v)dv.$$

Se os limites da integral definida são variáveis, literais diferentes são usados para esses limites e para a variável independente no integrando, ou seja, na equação $F(x) = \int_a^x f(v)dv$, como x é o limite superior usamos o literal v como a variável independente no integrando.

A função F é definida para todos os valores de x em $[a,b]$. Com isso, o valor de $F(x)$ pode ser interpretado geometricamente como a medida da área da região delimitada pela curva $y = f(v)$, o eixo v e as linhas $v = a$ e $v = x$. (Ver figura 12).

Figura 12 – Ilustração da relação entre derivada e integral



Fonte: Elaborado pelo autor

Com base na figura acima, pode-se ver que $F(a)$=$\int_a^a f(v)dv$ é igual a zero.

A seguir será apresentado e demonstrado o teorema que dá origem à derivada de uma função F definida como uma integral com limite superior variável.

Teorema: Seja a função f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja x qualquer valor numérico em $[a, b]$. Se F é a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(v),$$

então $F'(x) = f(x)$.

Se $x = a$, então a derivada $F'(x)$ pode ser uma derivada à direita;

Se $x = b$, então a derivada $F'(x)$ pode ser uma derivada à esquerda.

Demonstração: Considerando dois valores numéricos x_1 e $x_1 + \Delta x$ no intervalo fechado $[a, b]$, temos:

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(v)dv \ e \ F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(v)dv$$

Logo,

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(v)dv - \int_a^{x_1} f(v)dv \ \ (equação\ A).$$

Pelo Teorema 4, que dá origem às propriedades da integral definida, temos:

$$\int_a^{x_1+\Delta x} f(v)dv = \int_a^{x_1} f(v)dv + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)dv$$

Igualmente:

$$\int_a^{x_1+\Delta x} f(v)dv - \int_a^{x_1} f(v)dv = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)dv \ \ (Equação\ B)$$

Substituindo a equação B em A, obtemos:

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)dv \ \ (Equação\ C)$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais[4], existe algum número X no intervalo fechado limitado por x_1 e $x_1 + \Delta x$ tal que:

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)dv = f(X)\Delta x \ (Equação\ D)$$

---

[4] Se a função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então existe um X tal que $a \leq X \leq b$ e

$$\int_a^b f(x)dx = f(X)(b - a).$$

Das equações C e D, obtém-se que $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(X)\Delta x$. Se dividirmos por D, obtemos:

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(X)$$

Tomando o limite quando $\Delta x \to 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(X) \quad (Equacão\ E)$$

O lado esquerdo da equação E é $F'(x_1)$. Para encontrar o $\lim_{\Delta x \to 0} f(X)$, não se deve esquecer que X está contido no intervalo fechado limitado por x_1 e $x_1 + \Delta x$, e como,

$$\lim_{\Delta x \to 0} x_1 = x_1\ e\ \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 + \Delta x) = x_1$$

Pelo Teorema do Confronto que afirma: assumindo que as funções f, g e h são definidas em algum intervalo aberto contendo a a, exceto possivelmente o próprio a, e que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x naquele intervalo para as causas $x \neq a$. Assumindo também que $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} h(x)$ existem e são iguais a L. Então $\lim_{x \to a} g(x)$ também existe e é igual a L.

Pelo exposto, fica estabelecido que o $\lim_{\Delta x \to 0} X = x_1$. Como f é contínua em x_1, temos $\lim_{\Delta x \to 0} f(X) = \lim_{X \to x_1} f(X) = f(x_1)$; portanto, da equação E resulta: $F'(x_1) = f(x_1)$.

Se a função f não for definida para valores de x menores que a, mas for contínua à direita de a, então, no argumento acima, se $x = a$ na Equação E, Δx deve ser aproximado de zero pela direita. Portanto, o lado esquerdo da equação $F'(x_1) = f(x_1)$ será $F'_+(x_1)$. Da mesma forma, se f é indefinido para valores de x maiores que b, mas é contínua à esquerda de b, então se $x = b$ na equação E, Δx deve se aproximar de zero pela esquerda. Portanto, o lado da esquerda da equação $F'(x_1) = f(x_1)$ será $F_-'(x_1)$.

Assim, o teorema anterior estabelece que a integral definida

$$\int_a^x f(v)dv,$$

com limite superior variável x, é uma antiderivada de f.

Teorema Fundamental do Cálculo: Seja a função f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que $g'(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$. Então

$$\int_a^b f(v)dv = g(b) - g(a)$$

Se $x = a$, a derivada em $g'(x) = f(x)$ pode ser uma derivada à direita e se $x = b$, a derivada em $g'(x) = f(x)$ pode ser uma derivada à esquerda.

3.2.5.6 A Integral Indefinida

A partir da expressão

$$F(x) = \int_a^x f(v)dv,$$

a função $F(x)$ é chamada de uma integral indefinida da função $f(v)$. Diz-se **uma** e não a integral indefinida, pois ao invés de ter escolhido a como limite inferior de integração, poderia ser escolhido outro valor constante e, nesse caso, obter-se-ia outro valor para a integral.

É muito fácil verificar que qualquer integral definida é determinada a partir de uma integral indefinida $F(x)$ através da expressão:

$$\int_a^b f(v)dv = g(b) - g(a)$$

A relação anterior entre uma integral definida e uma integral indefinida sugere uma maneira de calcular o valor da primeira a partir da segunda.

O Teorema Fundamental do Cálculo afirma que uma integral indefinida $F(x)$ de uma função contínua $f(x)$ definida por $F(x) = \int_a^x f(v)dv$ sempre tem uma derivada $F'(x)$ e é tal que $F'(x) = f(x)$. Ou seja, a derivação de uma integral indefinida sempre reproduz o integrando:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(v)dv = f(x).$$

O Teorema Fundamental do Cálculo mostra o caráter inverso das operações de derivação e integração, que constitui o fato básico do cálculo. Devido a esta relação derivação-integração inversa, a função é chamada de primitiva de F, pois esta última vem da derivação da primeira.

Definição (Primitiva de uma função): Seja f uma função definida num intervalo *I*. Uma primitiva de f em *I* é uma função definida em *I*, tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x em *I*.

3.2.5.7 Integração

Em cálculo diferencial aprende-se a determinar a derivada $f'(x)$ ou a diferencial $f(x)dx$ de uma dada função $f(x)$; No Cálculo integral, realiza-se a operação inversa, ou seja, determina-se uma função $f(x)$ cuja derivada ou diferencial é conhecido.

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 + 9$

$$\left.\frac{dy}{dx} = 2x\right\} \; Derivada \qquad\qquad \left.\int 2xdx = x^2 + C\right\} \text{ Integração}$$

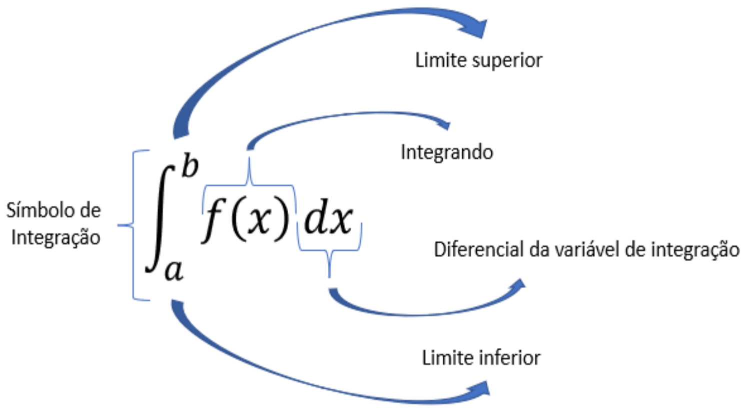
$$\left.\text{dy} = 2xdx\right\} \text{ Diferencial}$$

A integração e diferenciação são operações inversas.

Pela expressão não é possível saber qual é o valor de C (constante de integração), ou seja, é um valor indefinido e por isso essa operação é conhecida como integral indefinida.

A partir da notação para a integral definida, pode-se identificar:

Figura 13 – Identificação dos elementos da Integral Definida



Fonte: Elaborado pelo autor

ETAPAS PARA INTEGRAR UMA FUNÇÃO

1. Da expressão a ser integrada, toma-se a variável e obtém-se o seu diferencial.
2. Se a diferencial resultante completa a diferencial da integral, a fórmula correspondente é aplicada diretamente.
3. Se a diferencial resultante completa a diferencial da integral e sobram constantes, elas passam reciprocamente multiplicando o resultado da integral.

Fórmulas para integrais imediatas elementares

1. $\int dv = v + C.$

2. $\int a\,dv = a\int dv = av + C.$

3. $\int (dv + du - dw) = \int dv + \int du - \int dw = v + u - w + C.$

4. $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1).$

5. $\int \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{v}} = \ln|\mathrm{v}| + \mathrm{K} = \ln|\mathrm{v}| + \ln|\mathrm{C}| = \ln\ |\mathrm{vC}|.$

As fórmulas para integráveis imediatos elementares são obtidas diretamente das fórmulas gerais de diferenciação.

3.2.6 Técnicas de Integração

Apresentamos, a seguir, uma abordagem das Técnicas de Integração, as quais auxiliam na resolução de muitos problemas.

3.2.6.1 Substituição Simples

Sejam f e g tais que $Im\, g \subset D_f$ com g derivável. Suponhamos que F seja uma primitiva de f, isto é, $F' = f$. Segue que $F(g(x))$ é uma primitiva de $f\big(g(x)\big)g'(x)$, de fato,

$$\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x).$$

Deste modo, de

$$\int f(u)du = F(u) + k,$$

Obtém-se:

$$\boxed{\begin{gathered}\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = ?\\ u = g(x); du = g'(x)dx\\ \int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F\big(g(x)\big) + k\end{gathered}}$$

3.2.6.2 Integração por partes

Suponhamos f e g definidas e deriváveis num mesmo intervalo I. Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ou

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Supondo, então, $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observando que $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, então $f(x)g'(x)$ também admitirá primitiva em I e

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \ (*)$$

que é a regra de integração por partes.

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, o que nos permite escrever a regra (*) na seguinte forma usual:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Observação: Para aplicar a fórmula de integração por partes em um determinado caso, é necessário decompor a diferencial dada em dois fatores, ou seja, em u e dv. Embora não existam instruções gerais que facilitem a escolha desses fatores, recomendam-se os seguintes passos para a escolha dos fatores u e dv.

1. dx sempre faz parte de dv.
2. Deve ser possível integrar dv.
3. Quando a expressão a integrar for o produto de duas funções, é melhor selecionar aquela de aparência mais complexa, desde que possa integrar como parte de dv.

3.2.6.3 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Uma função racional é definida como o quociente de duas funções polinomiais da forma:

$$Função\ Racional \begin{cases} R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \end{cases}$$

Se o grau do numerador P(x) for menor do que o grau do denominador Q(x), temos uma função racional própria e se o grau de P(x) for maior do que o grau do denominador Q(x), teremos uma fração racional imprópria.

Para integrar uma função racional, geralmente é útil escrevê-la como a soma de frações parciais. Os denominadores das frações parciais são obtidos fatorando o denominador $Q(x)$ como um produto de fatores lineares e quadráticos; isso sempre é possível se aplicarmos o seguinte teorema algébrico: todo polinômio com coeficientes reais pode ser expresso como um produto de fatores lineares e quadráticos, cada um deles com coeficientes reais.

Podemos supor que se o denominador $Q(x)$ é um polinômio de grau n, então o coeficiente C_0 de x^n é 1, pois se $Q(x) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}x + C_n$, então se $C_0 \neq 1$ pode ser dividido no numerador $P(x)$ e no denominador $Q(x)$ da fração racional entre o coeficiente C_0:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{P(x)}{C_0}}{\frac{P(x)}{C_0}}$$

Caso I

Todos os fatores do denominador são de primeiro grau (lineares) e nenhum se repete. Este caso é uma decomposição em frações parciais da forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

onde não deve haver dos a_i idênticos e também, onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas. Vale ressaltar que o número de constantes a serem determinadas é igual ao grau do denominador.

Caso II

Todos os fatores do denominador são de primeiro grau (lineares) e alguns se repetem. Nesse caso, o fator $(x-a)$ que se repete n vezes, corresponde à soma de n frações parciais da forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^n} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_1)}.$$

Caso III

Os fatores do denominador são lineares e quadráticos (primeiro e segundo graus) e nenhum dos fatores quadráticos se repete.

Nesse caso, todo fator quadrático da forma p corresponde a uma fração parcial da forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

O método para integrar expressões dessa maneira é aquele em que a integral é reduzida a imediata por substituição algébrica (primeiro e segundo graus).

Caso IV

Os fatores do denominador são lineares e quadráticos (primeiro e segundo graus) e alguns dos fatores quadráticos são repetidos.

Nesse caso, todo fator quadrático da forma x^2+px+q que se repete n vezes corresponde à soma de n frações parciais da forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^n}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}.$$

3.2.6.4 Substituição Trigonométrica

A substituição trigonométrica é uma das técnicas bastante utilizadas quando trabalhamos as integrais, isto porque as identidades trigonométricas, em alguns casos, possibilitam a substituição de uma função algébrica por uma função trigonométrica, facilitando o processo de solução da integral.

Nessa vertente, para resolver integrais indefinidas de funções contendo expressões da forma $\sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{u^2\pm a^2}$, onde $a>0$, e que sejam redutíveis a integrais imediatas por substituição trigonométrica, recomenda-se fazer uma mudança de variáveis, pois é o método mais curto para integrar tais expressões. Para trabalhar estes casos dispomos de algumas identidades trigonométricas. Assim, partindo da relação fundamental da trigonometria:

$$sen^2\theta+cos^2\theta=1$$

decorre a relação:

$$tg^2\theta=sec^2\theta-1 \text{ e } 1+tg^2\theta=sec^2\theta.$$

Daí, teremos:

i) Se a função integrando envolve $\sqrt{a^2-u^2}$, usamos a substituição $u=a\,sen\theta$. Então, $du=acos\theta d\theta$. Supondo que $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{a^2-u^2}=\sqrt{a^2-a^2sen^2\theta}=\sqrt{a^2(1-sen^2\theta)}=\sqrt{a^2cos^2\theta}=acos\theta.$$

ii) Se a função integrando envolve $\sqrt{u^2+a^2}$, usamos a substituição $u=atg\theta$. Então, $du=asec^2\theta d\theta$. Supondo que $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{u^2 + a^2} = \sqrt{a^2tg^2\theta + a^2} = \sqrt{a^2(tg^2\theta + 1)} = \sqrt{a^2sec^2\theta} = asec\theta.$$

iii) Se a função integrando envolve $\sqrt{u^2 - a^2}$, usamos a substituição $u = asec\theta$. Então, $du = asec\theta tg\theta d\theta$. Supondo θ tal que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2tg^2\theta} = atg\theta.$$

4 TECNOLOGIAS DIGITAIS

Assim como destacamos as potencialidades para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Passamos agora a discorrer sobre a temática das Tecnologias Digitais e como vem sendo muito utilizada em pesquisas da área de Educação Matemática. Ela é utilizada como sendo sinônimo de Tecnologias da Informação e Comunicação, conhecida como “TIC”. Sendo as Tecnologias Digitais mais um recurso utilizado nesta pesquisa, apresentamos neste capítulo algumas considerações sobre Tecnologias Digitais tais como um olhar das Tecnologias Digitais na Educação Matemática; As Tecnologias Digitais na prática docente; Recursos Tecnológicos de aprendizagem; A compreensão conceitual do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva do pensamento digital.

Assim como destacamos as potencialidades para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Também, discutimos alguns aspectos da utilização das Tecnologias Digitais no Ensino Superior, especificamente dissertamos sobre uso do GeoGebra e algumas ferramentas digitais como o Jamboard, Google Meet, dentre outros, a partir de pesquisas realizadas sobre o assunto. Por fim, nos proporemos a fazer uma conversação com as considerações de alguns autores que retratam essas ferramentas tecnológicas com enfoque na prática docente, referenciar algumas que podem contribuir para o processo de facilitação do ensino e aprendizagem. E, além disso, explaná-las em uma perspectiva da compreensão do Cálculo Diferencial e Integral.

4.1 Um olhar das Tecnologias Digitais na Educação Matemática

As Tecnologias Digitais estão presentes em nosso cotidiano, nas transações bancárias, no comércio, no lazer e no próprio relacionamento pessoal. Porém, quando queremos inserir as Tecnologias Digitais no cotidiano escolar encontramos algumas dificuldades. Há dezesseis anos, Kenski (2007) já indicava preocupações sobre essa situação junto a educação, em que tem crescido a frequência de uso das Tecnologias Digitais no cotidiano do aluno, apontando que

> [...] o fluxo de interações nas redes e a construção, a troca e o uso colaborativos de informações mostram a necessidade de construção de novas estruturas educacionais que não sejam apenas a formação fechada, hierárquica e em massa como a que está estabelecida nos sistemas educacionais (KENSKI, 2007, p. 48).

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), apresentam um panorama ressaltando uma perspectiva do uso das Tecnologias Digitais que já foram ou estão sendo pesquisadas na área de Educação Matemática no Brasil. Eles classificam o desenvolvimento e uso das pesquisas que envolvem a utilização e a exploração das Tecnologias Digitais de diferentes formas em quatro fases.

Os autores também procuraram relacionar os modos de uso das Tecnologias Digitais levando em conta quando as inovações tecnológicas constituíram um cenário qualitativamente diferenciado para a investigação Matemática com relação ao que era pesquisado anteriormente. Eles citam a pesquisa de Morelatti (2001) que procurou construir um ambiente construcionista de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, através de atividades que envolviam a linguagem de programação LOGO. Essa pesquisa contribuiu como exemplo do uso de um software pioneiro nas aulas de Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014).

Segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), nos anos 80 e início dos anos 90, fase inicial, do século passado, começam a disseminar iniciativas pelo Ministério da Educação e Secretaria da Educação dos estados incentivando o uso do computador como um recurso pedagógico, e apesar da expectativa de ser um agente potencial para uma mudança pedagógica, pouco foi feito nesse sentido.

A segunda fase aconteceu a partir dos anos 1990 e teve como características o princípio da acessibilidade e a popularização dos computadores pessoais. Assim, foi possível iniciar o uso de softwares com menos programação e voltados às representações de funções e geometria dinâmica, ou seja, que o estudante tivesse a possibilidade de manipular, construir e visualizar de forma virtual os objetos, construindo novos caminhos de investigação. Os autores destacam que foi nesta fase que também surgiu a “prova do arrastar” que consiste em arrastar algum elemento da construção geométrica, de forma que ao modificá-lo, as propriedades do objeto construído não são alteradas (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014).

Esses autores dizem que, se o estudante construir um quadrado de maneira que a figura geométrica não esteja fixa na janela de visualização do software, e que seja possível alterar essa construção de forma que as suas características não sejam modificadas, e então este estudante alterar a medida de um lado, todos os outros lados devem acompanhar a medida. Essa possibilidade de simular a construção de vários quadrados a partir de uma única construção é um modo de exploração do objeto matemático que não é possível de ser utilizada com lápis e papel, por exemplo.

Também Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014, p. 24-25) enfatizam que, com o aparecimento destas tecnologias, deve-se surgir também novas soluções para os problemas didáticos, pois “muitas vezes um problema que poderia ser didático com uma tecnologia não é com outra". E assim surgem as preocupações com a "domesticação" dessas novas tecnologias, segundo os autores domesticar a tecnologia "significa utilizá-la de forma a manter intacta práticas que eram desenvolvidas com uma mídia que é predominante em um determinado momento da produção de conhecimento" (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 25), ou seja, utilizar destas tecnologias sem que se explore as potencialidades destas para o aprendizado.

As potencialidades desses novos tipos de softwares começam a ser estudadas também nesta fase, por exemplo a partir do construto seres-humanos-com-mídias de Borba e Villarreal (2005), dentro do grupo de pesquisa GPIMEM. Estes autores propõem que o conhecimento pode ser produzido e moldado por um coletivo constituído por seres humanos e mídias, independentes de serem mídias digitais ou não. Um exemplo são as representações gráficas, consideradas qualitativamente diferentes quando feitas no papel ou construídas em um software como o *GeoGebra* (CHIARI, 2015).

> A noção de seres-humanos-com-mídias passa a ter para muitos de nós papel importante também na medida em que buscamos detectar manifestações das mídias consideradas relevantes para um dado coletivo pensante em determinado momento (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 53).

Passado um pouco menos de uma década chegamos na terceira fase iniciada com o advento da internet. Esta fase é caracterizada pelos cursos de formação à distância, em que o destaque da tecnologia digital são as plataformas de comunicação virtual, juntamente com hipertextos, fóruns e chats. Os autores perceberam também que a interação em ambientes virtuais de aprendizagem oferece nuances cognitivas diversificadas. É importante visualizar como este tipo de formação sofreu mudanças consideráveis com a utilização das plataformas digitais, pois antes da internet a formação era feita através de correspondências, por rádio e depois pela TV (BORBA; ALMEIDA, CHIARI, 2015).

O surgimento da quarta fase se deu em meados de 2004, os pesquisadores Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) dizem que, a internet ficou rápida despontando como a nova contribuição para o uso das tecnologias, com melhor qualidade na conexão, a comunicação online foi sendo transformada e tornando-se no que temos hoje. Eles destacam alguns aspectos que a caracterizam, como: o uso frequente de vídeos na internet e o acesso fácil a esses vídeos nas plataformas; comunicadores online como o Skype; tecnologias portáteis como celulares, tablets e notebooks; e as redes sociais. Como é a fase mais recente a surgir, tem ainda muitas possibilidades para investigações e pesquisas.

Por causa de alguns dispositivos que caracterizam a quarta fase, o termo “tecnologia digital” começa a ser mais usado. Os celulares inteligentes, a capacidade de acessar fotos e vídeos na internet, bem como a capacidade de produzir suas próprias fotos e vídeos, demonstram a multimodalidade e a diversidade de ambientes para expressão e comunicação. Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) notam que uma das vantagens de ter uma explicação de um conteúdo em um vídeo é que você pode revisitá-lo quantas vezes quiser. Sendo assim, os autores dizem

> Os softwares gratuitos disponíveis e os sites de armazenamento de vídeos, entre outros recursos, facilitam o processo, pois permitem que qualquer pessoa compartilhe material, nesse caso o vídeo, de maneira consideravelmente mais rápida do que há alguns anos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 91).

Além de se preocuparem com os recursos que criam novas maneiras de pesquisar usando tecnologias digitais, os autores classificam o desenvolvimento dessas fases por suas próprias características dentro das possibilidades da vida cotidiana, bem como pelos processos de ensino e aprendizagem compreendidas em geral, especialmente no campo da Matemática. Como resultado, as fases às vezes se sobrepõem, pois podem existir elementos específicos que surgiram nas fases anteriores e que ainda podem ser importantes nas fases mais recentes.

Dessa forma, por conta desse grande contato com os recursos digitais, especialmente na pandemia da Covid-19, as ferramentas digitais proporcionaram uma facilidade na compreensão de alguns conteúdos matemáticos, essencialmente na visualização de gráficos. Nesse sentido, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) já concebiam a visualização como uma protagonista na aprendizagem Matemática por ser “um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 53).

Os autores sugerem que as atividades praticadas em tecnologia devem ser experimentais e pensam em uma atividade experimental usando o software *GeoGebra*. Eles acreditam que os recursos exclusivos do software podem permitir uma variedade de soluções, caminhos diferentes para encontrar uma solução e ser qualitativamente diferente de uma atividade com lápis e papel.

A visualização pode ser descrita como um processo de múltiplas naturezas. Às vezes, pode ser útil como ilustração, mas outras vezes pode estimular a inscrição e a elaboração de suposições. Na nossa pesquisa de campo, que consistiu em oficinas para oferecer aos graduandos de um curso de extensão, houveram momentos em que os estudantes interpretaram as atividades de forma diferente do planejado.

4.2 As Tecnologias Digitais na prática docente

É notório que no decorrer dos anos o mundo vem passando por grandes transformações, em que os mais diferentes setores são atingidos diretamente, em especial a Educação. Vários aspectos podem ser contribuintes para isso, entre eles conferimos no subitem anterior um olhar das Tecnologias Digitais na Educação Matemática, as quais proporcionam uma sociedade cada vez mais imersa na disponibilização de recursos como utilidade para vivência cotidiana.

Sendo assim, entre tantos meios sociais cercados por uma era digital que vem tomando espaço dia após dia, encontramos a Educação, na qual presenciamos constantes idealizações, planejamentos e aplicações com a utilização de tecnologias que visam contribuir para o ensino e aprendizagem.

Situando este contexto, Bittencourt e Albino (2017, p. 208) elucidam que:

> Estamos vivenciando uma nova realidade, a era da informação e da tecnologia, a qual os alunos, professores e a sociedade geral, mudaram seus pensamentos e a sua forma de agir. Assim como tudo mudou ao longo dos anos, a educação também mudou nos últimos anos.

Diante disso, compreendemos um cenário educacional com novas perspectivas, em que fincar apenas em um olhar não se mostra coerente. Por isso, cabe reflexões cada vez mais presentes nas instituições de ensino a respeito da promoção de ensino e aprendizagem, em que o professor precisa pensar estratégias que alcance uma geração que está chegando à sala de aula conectada digitalmente. Assim, o docente é um profissional que tem em seu ofício muitas tarefas que requerem dele preparação e dedicação para que assim possa haver uma promoção de ensino e aprendizagem, o que o põe como alguém que deve estar sempre se atualizando em suas ações.

Nessa vertente, entendemos que o ser professor se caracteriza como alguém que se relaciona intimamente com diversos saberes ao longo da sua jornada, lembrando que isso não está restrito a uma profissão prendida apenas a um modelo de repasse e reprodução de conhecimentos, pois

> [...] sua prática integra diferentes saberes, com os quais o corpo docente mantém diferentes relações. Pode-se definir o saber docente como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais (TARDIF, 2012, p. 36).

Uma pluralidade que é de extrema importância ser compreendida por esse profissional da educação, a qual será contribuinte para a construção de sua identidade, não moldando ele como um mero transmissor de conhecimento, mas alguém que poderá dar contribuições de forma efetiva para o seu meio de trabalho.

Quando na prática, é sabido que o professor se deparará com diversos contextos que a ele será incumbido de se apropriar, como é o caso da busca pelo domínio das tecnologias. Temos conhecimento, não é de hoje, que o cenário educativo é atingido constantemente pela necessidade do aprendizado sobre o uso de ferramentas tecnológicas e que por isso o professor como agente ativo na sala de aula precisa se ater, isto é, necessita se adequar a uma cultura digital em que seus alunos estão cada vez mais inseridos.

Como já mencionado a tecnologia é algo que vem abarcando espaços e que não tem suas limitações fincadas apenas nos meios digitais sociáveis, sendo disponibilizada constantemente em âmbitos com a educação visando possíveis contribuições para ensino e aprendizagem, como alega Silva (2019).

Ao olharmos para o cenário das Tecnologias Digitais verificamos que elas começaram a se tornar bastante difundida por volta de 1990, com o uso do computador juntamente com a internet, possibilitando distintas maneiras de comunicação (SILVA, 2016). E observamos que com o passar dos anos essa utilização foi crescendo e tornando-se mais divulgada.

E é pensando nesta utilização cada vez mais vigente que ponderamos a meditação da necessidade de ser oferecido ao professor durante seu processo de formação, seja inicial ou de forma continuada, reflexões sobre uso e possibilidades que as Tecnologias Digitais podem trazer consigo, que vão desde uma via como recurso direto para o ensino em sala de aula, bem como para busca de informações que contribuirão para o ambiente de trabalho escolar.

Gomes e Moita (2016) enfatizam o grande benefício que esta estratégia permite, notando que as Tecnologias Digitais devem estar presentes na escola e que os professores precisam estudar de acordo com as circunstâncias em que vivem para que possam se reinventar no processo de construção do aprendizado.

Desse modo, acreditamos no quão é pertinente um olhar mais aguçado para este cenário das Tecnologias Digitais, pois quando bem incorporado pode vir a calhar como algo bastante relevante para o contexto de ensino e aprendizagem. Bittencourt e Albino (2017) pontuam de forma precisa que:

> A utilização cada vez maior, das mídias digitais no ambiente acadêmico e corporativo como estratégia, com um público cada vez mais envolvido com a tecnologia, trazem para as instituições várias opções de recursos didáticos para lhes dar a oportunidade

> de responder às diferenças individuais e às múltiplas facetas da aprendizagem (BITTENCOURT; ALBINO, 2017, p. 209).

Considerando uma cultura que não se pode mais negar o uso desfreado de ferramentas tecnológicas, o docente precisa atuar de forma ávida para que ele possa estar sempre no alcance de seu alunado. Maltempi e Mendes (2016, p. 95) explicam que “utilizar as tecnologias digitais em sala de aula é ser coerente com o tempo em que vivemos”.

Assim, destacamos a importância desses usos, mas também indicamos que eles devem ser bem planejados e executados com atenção a vários fatores, como levar em consideração que os aprendizados são individualizados, pois cada pessoa tem seu próprio tempo para construí-lo (SILVA; MOITA, 2019).

O professor, enquanto atuante direto no processo de mediar o ensino e aprendizagem, pode ser favorecido, quando este dispor das mais distintas ferramentas tecnológicas de maneira que possa se achegar aos seus estudantes. Tais aplicações podem propiciar lucros para o professor na desenvoltura de seu trabalho quando bem percebidas e direcionadas, contribuindo assim para os estudantes na condução do desenvolvimento do aprendizado deles (PEREIRA, ARAÚJO, 2020).

Nesse embate, tomando essa proporção de uso das tecnologias, o âmbito educacional pode encontrar uma oportunidade para converter uma disponibilização sem objetivo em algo com foco para proporcionar um ensino e aprendizagem.

Acreditamos que esse objetivo pode ser alcançado se a visão do uso das tecnologias digitais for bem pensada e planejada em relação ao contexto em que serão aplicadas. Também é importante ter acesso constante aos recursos tecnológicos necessários para executar as atividades sugeridas, afim de alcançar o objetivo pretendido. A seguir, falaremos sobre como as ferramentas tecnológicas são úteis para facilitar o ensino e o aprendizado e mostraremos alguns exemplos que podem ajudar nessa experiência prática.

4.3 Recursos Tecnológicos de aprendizagem

As Tecnologias Digitais se tornaram cada vez mais importantes para a sociedade devido aos vários recursos que fornecem e que podem ser encontrados em vários setores sociais. Nesse contexto, a escola serve como um meio pelo qual podemos nos deparar regularmente com ferramentas digitais que podem ser usadas para várias atividades.

Com o passar dos anos muitas estratégias vêm sendo pensadas para se trabalhar os mais distintos conteúdos em sala de aula, entre elas encontramos justamente a disponibilização de diversos recursos tecnológicos. Tal atitude parte da ponderação que “[...] é necessário encontrar alternativas para tornar as aulas de qualquer conteúdo escolar mais agradáveis e motivadoras, proporcionando assim uma melhor aprendizagem aos alunos” (PEREIRA, ARAÚJO, 2020, p. 8).

Compreendemos assim que as Tecnologias Digitais podem se configurar como uma aliada da escola, vindo a oferecê-la maneiras de contribuir para a construção e execução de aulas. Um fato que pode se mostrar significativo no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Pereira e Araújo (2020) a utilização de recursos tecnológicos traz consigo benefícios, como o estimular a participação dos estudantes, como também aguçar a criatividade deles, aspectos que são fundamentais no processo de aprendizagem. Nessa vertente, “as tecnologias digitais devem ser utilizadas na prática pedagógica como arte, como técnica e como interação, pois são recursos que podem auxiliar o processo de ensino-aprendizagem e a formação humana, um ensino colaborativo” (GOMES, MOITA, 2016, p.161).

Diante disso, enxergamos o quanto pode ser viável disponibilizarmos da tecnologia para um uso promissor, sempre tendo em vista o cenário que iremos estar desenvolvendo as atividades que forem pensadas, propondo recursos que possa vir surtir algum efeito. Posteriormente apresentamos alguns desses meios que as Tecnologias Digitais dispõem para possíveis facilitações no processo de ensino e aprendizagem.

a) GeoGebra

Um dos primeiros recursos tecnológicos que narramos aqui é o *GeoGebra*. Esta ferramenta é um software matemático criado para utilização proposital em sala de aula e traz consigo diversas possibilidades para aplicações de atividades envolvendo conteúdos como a Álgebra, Geometria e o Cálculo. Um meio tecnológico cuja facilidade e acessibilidade de manuseio pode promover uma interação entre conhecimento e estudante.

Zampieri e Javaroni (2018, p.379) descrevem que o *GeoGebra* “[...] integra janela de álgebra, janela de visualização, planilha, campo “entrada” para a inserção de funções ou fórmulas, dentre outros recursos, sendo possível visualizá-los e manuseá-los na mesma tela”.

Magalhães e Almeida (2017) ainda apresentam alguns aspectos do software, como sua funcionalidade em diferentes sistemas operacionais, as suas inúmeras possibilidades de realização de construções, permitindo até modificações quando necessárias em muitos casos, entre outras disponibilidades que poderão enriquecer o almejado.

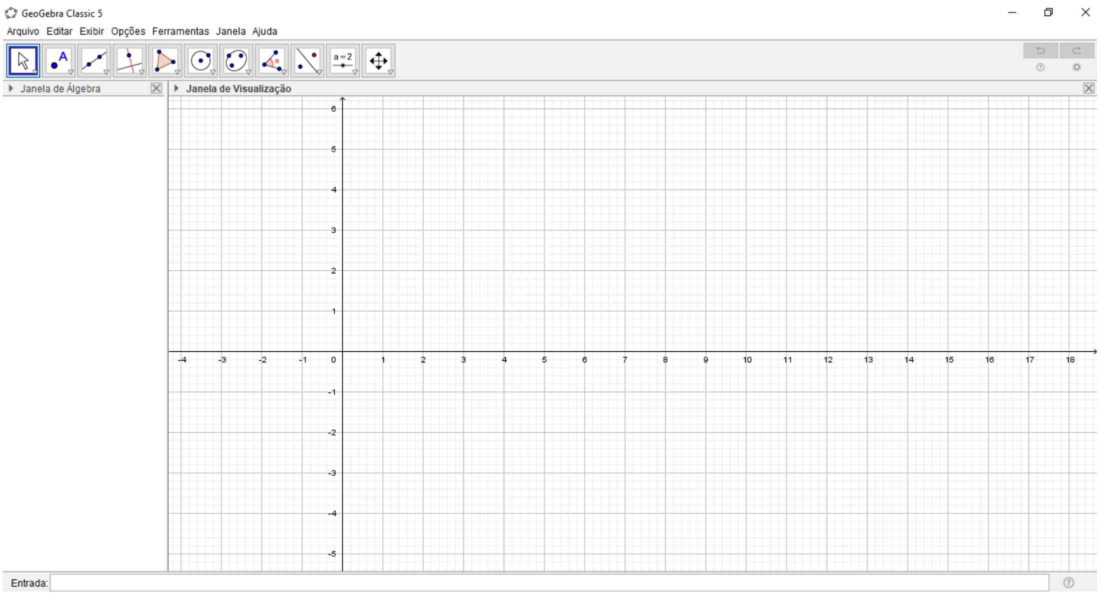
A ferramenta tecnológica pode, portanto, servir como um meio de promover o aprendizado devido ao fato de instigar os alunos no processo de construção do conhecimento, demonstrando uma relação entre álgebra e geometria (AMORIM; SOUSA; SALAZAR, 2011).

Desse modo, esse mecanismo tecnológico pode ser um viés que possibilitará ao estudante a interação necessária para absorção de um aprendizado matemático almejado, além de propiciar uma aula que ultrapasse a exposição via quadro branco.

Diante disso, enxergamos o *GeoGebra* como um mecanismo para oferecer ao estudante formas de alcançar o aprendizado propositado, tendo em vista as inúmeras construções que o meio tecnológico possui. E, com isso, o estudante possa entender a essência do que está sendo ensinado.

A utilização de um software de ensino situa-se no campo das Tecnologias Digitais - recursos muito utilizados nos últimos anos no ensino matemático, uma vez que podem reproduzir construções geométricas de forma dinâmica. Quanto ao software, esta é originada pela interface virtual simples que possui (Figura 14), de modo que a aprendizagem para a utilização acontece de maneira intuitiva e a grande disponibilidade de ferramentas permite o estudo de diversos tópicos da matemática (SANTOS, 2013).

Figura 14 - Interface do software simples que permite uma aprendizagem descomplicada



Fonte: Elaborado pelo autor

Seu download e a utilização da totalidade de recursos são gratuitos para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux, e seu tamanho não ultrapassa 100 MB, sendo acessível a todos que possuam um computador ou smartphone). Para baixar o software, acessamos o site oficial do *GeoGebra* (https://www.geogebra.org/download?lang=pt) e seguimos os passos recomendados.

A popularidade do *GeoGebra* em meio aos professores também foi atentada para a escolha. Este possui uma gama de estudos desde sua programação, e sua utilização em diversas áreas da Matemática promoveram necessidades de atualização de seus recursos, mantendo-o como um software modelo para o auxílio do ensino da matemática (SANTOS, 2013). Nesse sentido, é importante enfatizar que, embora o software possua condições para a construção de conhecimento, o *GeoGebra* não é capaz de ensinar a matemática sozinho. Para que haja a aprendizagem de fato dos conceitos matemáticos, este deve ser utilizado como ferramenta de apoio as situações didáticas elaboradas pelo professor para o ensino.

Em suma, dentre as derivações do software, o utilizado neste estudo foi o *GeoGebra* Classic 5 (Figura 15), aplicativo voltado para geometria, planilha, probabilidade e outros. Foi utilizado como um auxílio para o ensino de tópicos relacionados a Cálculo Diferencial e Integral, de maneira a construir uma interação dos participantes da pesquisa com a matemática por meio da tecnologia, tão presente na vida dos estudantes nos dias de hoje.

Figura 15 - Ícone do aplicativo GeoGebra

Fonte: GeoGebra

Criado em 2001 por Markus Hohenwarter, um pesquisador focado no uso da tecnologia na Educação Matemática, o software tem o objetivo principal de auxiliar o processo de ensino e aprendizagem matemático nos Ensinos Básico e Superior. Para uma abordagem do Cálculo, o software possui diversas ferramentas para a resolução de problemas, como os eixos cartesianos *x* e *y*, formação de figuras; todos a partir de fáceis comandos no programa. O software permite realizar construções geométricas com a utilização de funções, assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas.

Portanto, o *GeoGebra* é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. O programa ainda reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao Cálculo. Assim, nosso intuito da utilização do software foi a resolução, junto aos participantes das oficinas, de problemas que envolvam elementos da Cálculo Integral, auxiliando-os e apresentando uma maneira mais dinâmica de aprender matemática.

b) Google Meet

Um outro recurso que vem ganhando notoriedade nos últimos anos trata-se do Google Meet. Essa ferramenta é uma plataforma de videochamada que pode ser utilizada via diferentes recursos digitais, a princípio "projetada para reuniões de trabalho com interface simples de utilizar e oferece integração com as mais diversas possibilidades do Google, por exemplo, o Google agenda, o Google chat e o Google sala de aula".

Como destaca Silva (2021, p.4) "é o aplicativo que permite videoconferências on-line no computador sem instalação de software e para os dispositivos móveis (smartphone ou tablets) é necessário baixar o aplicativo Google Meet".

Sua utilização é de grande facilidade e por isso ainda permanece sendo disponibilizado para a realização de reuniões virtuais com os mais distintos objetivos como expressa Soares (2021, p. 107) quando diz que "por meio do Google Meet é possível realizar reuniões de vídeo de qualquer lugar como aulas remotas, treinamentos pedagógicos, entrevistas, apresentações de trabalhos, seminários pedagógicos, etc."

Ressaltamos que o uso dessa ferramenta ganhou destaque no período pandêmico, tendo em vista que as instituições de ensino disponibilizaram bastante em decorrência da necessidade de desenvolver suas atividades. Isso aconteceu nos mais diferentes níveis de ensino.

Ao verificarmos a utilização constante dessa ferramenta tecnológica, principalmente durante a pandemia da Covid-19, compreendemos um pouco da dimensão de seu uso e acreditamos que foi um veículo de interação digital que surgiu e permanecerá, considerando que a educação vem se apoderando veemente dessa via.

c) A ferramenta Jamboard

Ao utilizarmos a plataforma Google Meet, notamos várias ferramentas que podem promover reuniões e promover positivamente. Uma dessas é o *Jamboard* que é uma lousa digital interativa (GOMES; SILVA; MOITA, 2023).

É evidente que ao desenvolver as aulas de forma remota o professor muitas vezes pode realizar apresentações de slides como uma maneira de expor a teoria, podendo até usar ferramentas como caneta digital para que haja interação na tela, no entanto, com o *Jamboard* é possível trabalhar unindo estas possibilidades, tendo em vista que na lousa o professor tem como organizar materiais que ofereçam o exigido pela disciplina trabalhada, podendo isso ser arquivado no drive (SILVA *et al.*, 2020).

O ensino da Matemática traz consigo aluns obstáculos que precisam ser superados pelo professor para que o estudante consiga compreender os conceitos ensinados. Esses obstáculos se tornam ainda mais evidentes quando trabalhamos com as Tecnologias Digitais. Com a suspensão das aulas presenciais por conta da pandemia da Covid-19 e a adoção do ensino híbrido pelas instituições de ensino, novos desafios surgiram no ambiente escolar e o professor precisou rever sua prática e utilizar novos recursos para poder ensinar.

O desafio é ainda maior no ensino de matemática. Uma das maiores dificuldades com no ensino de matemática é a abstração do estudante nos conteúdos curriculares. Para criar um ambiente de perguntas que facilite a superação desses desafios relacionados a esse processo, o professor deve considerar os erros dos estudantes como uma parte importante do processo de superação dos obstáculos relacionados à aprendizagem. Para isso, consideramos importante que os estudantes possam acompanhar o processo de resolução dos problemas propostos.

Segundo Onuchic (1999), o professor precisa assumir papel de mediador do conhecimento e não somente o detentor. Não cabe a ele transpor o papel de mero explanador dos conceitos pretendidos a serem ensinados, mas promover a autonomia do estudante, o instigando a levantar questionamentos, mobilizar seus conhecimentos anteriores e realizar as conexões necessárias para que aquele conhecimento novo faça sentido para ele.

Assim, no contexto educacional

> [...] as principais transformações observadas nos últimos tempos estão na postura do professor frente à educação, ou seja, o docente deixa de ser o detentor único do saber para se transformar num mediador da aprendizagem. Por outro lado, o aluno deixa de ser uma figura passiva, que apenas recebe a informação, e assume uma postura mais ativa, que não concebe uma educação sem interação e prática pedagógica dos conhecimentos que estão sendo construídos (B. JUNIOR, 2017, p. 1591).

É evidente que essa tarefa se torna mais difícil quando o professor não tem a possibilidade de interagir com o estudante face a face. A grande dificuldade nesse sentido, está atrelada ao fato de que a forma como o professor expõe esse processo aos estudantes se torna mais limitada utilizando as Tecnologias Digitais. O uso de slides para exposição do conteúdo, por exemplo, não substitui uma lousa, já que neste tipo de apresentação, as integrais e informações relacionadas as técnicas de integração, já estão expostas de forma digitalizada e por mais que o professor use configurações para apresentar as etapas de forma gradativa, a experiência não é a mesma de quando o estudante tem a oportunidade de tentar sozinho, sob mentoria do professor.

Nesse sentido, os professores devem buscar novas maneiras de criar um ambiente interativo nas aulas híbridas. Neste contexto, a utilização de Tecnologias Digitais é indispensável para os professores porque pode melhorar a sua prática e permitir maior interação possível.

> [...] é importante salientar que a tecnologia por si só não gera aprendizagem, sendo para isso necessário um planejamento organizado pelo professor, em que ele considere os objetivos educacionais, o contexto dos alunos, a opção metodológica e as formas avaliativas, buscando efetivar um processo que garanta um ensino e aprendizagem de qualidade para todos os alunos (SCHNEIDER, et. al., 2020, p. 1085).

O ensino de Matemática nas aulas on-line se torna mais difícil quando há a ausência de lousa ou outros recursos visuais. Tentando suprir essa necessidade de interação com os alunos e construção de saberes para que os estudantes possam visualizar o conteúdo, alguns professores utilizam as mesas digitalizadoras. Ela consiste em um dispositivo digital semelhante a uma prancheta que permite escrever e desenhar com uma caneta. Esse recurso tem sido usado como uma lousa digital. Quando conectado a um computador, ele espelha na tela deste, permitindo que você compartilhe conteúdo com os estudantes em tempo real durante as aulas on-line. Apesar de parecer uma ferramenta fantástica para usar nas aulas, não todos têm condições de obtê-la.

Há uma abundância de recursos tecnológicos disponíveis, mas o que o professor almeja é um recurso que ele e os estudantes possam utilizar de forma prática, de fácil acesso e manipulação, preferencialmente, pelo smartphone. Nesse sentido é que se evidencia a opção pela utilização da ferramenta Jamboard, que cumpre com todos os facilitadores acima citados.

A ferramenta Jamboard pertence ao Google e funciona como um quadro inteligente que pode ser editado por mais de uma pessoa ao mesmo tempo, de lugares diferentes, podendo ser acessado por diversos dispositivos como smartphones, computadores ou tablets.

Nele o professor pode criar apresentações, escrever ideias em tempo real, adicionar imagens, utilizar a ferramenta de post it e personalizar sua apresentação como preferir.

O Jamboard oferece diversos recursos semelhantes aos de uma mesa digitalizadora, é prático, de fácil configuração e permite que o professor crie uma sequência de quadros que podem ser salvos no formato PDF para serem utilizados a qualquer momento. O mais interessante desse recurso para as aulas *on-line* é a possibilidade de interação. Ele é diferente das mesas digitalizadoras, e está disponível de forma gratuita, necessitando apenas de uma conta do Google para realizar o acesso.

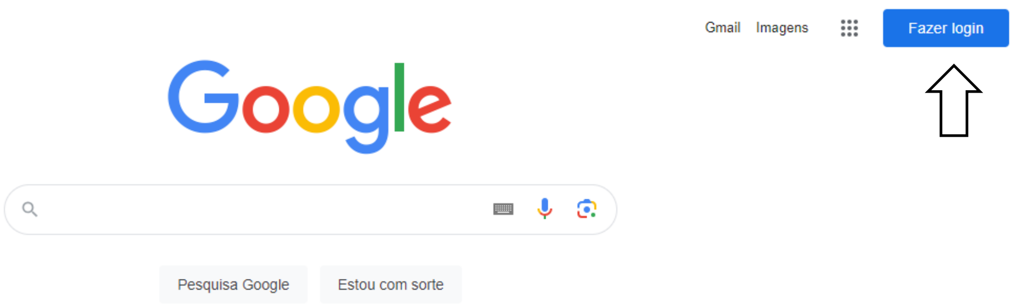
Diante dessas possibilidades, enxergamos a lousa digital como uma via rica em detalhes que podem favorecer uma maneira interativa dos estudantes dialogarem acerca dos assuntos que estiverem sendo trabalhados, uma vez que o professor pode deixar recados/lembretes sobre situações importantes aos alunos (SILVA et. al, 2020).

Antes de explorar as vantagens dessa ferramenta, a primeira coisa a fazer é entender como ela funciona. Depois disso, poderemos descobrir a versatilidade dela e como ela pode inovar as aulas de Matemática e auxiliar no processo de construção do conhecimento. Para obter acesso à ferramenta Jamboard do Google, siga os seguintes passos.

Passo 1:

O professor deve estar logado em uma conta no Google já existente. Ao acessar a página inicial do Google, em seu navegador, no canto superior dirento terá um campo azul escrito “fazer login”. Veja na figura 16.

Figura 16 – Inscrição para acesso ao Jamboard



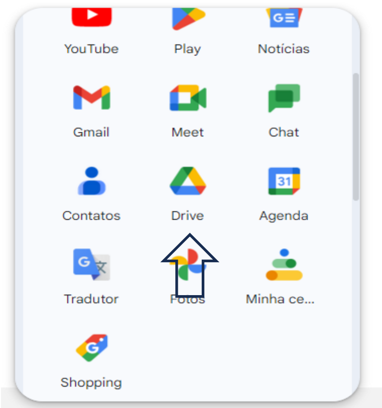
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao clicar ali, aparecerá todas as opções de contas no Google existentes. É necessário escolher uma delas e realizar o login.

Passo 2:

Após efetuado o login, ainda na página inicial do Google, no canto superior direito, irá aparecer alguns ícones. Clicando no ícone dos pontinhos, ao lado do usuário, selecionar a opção Drive, como mostra a figura 17.

Figura 17 – Acesso ao Drive

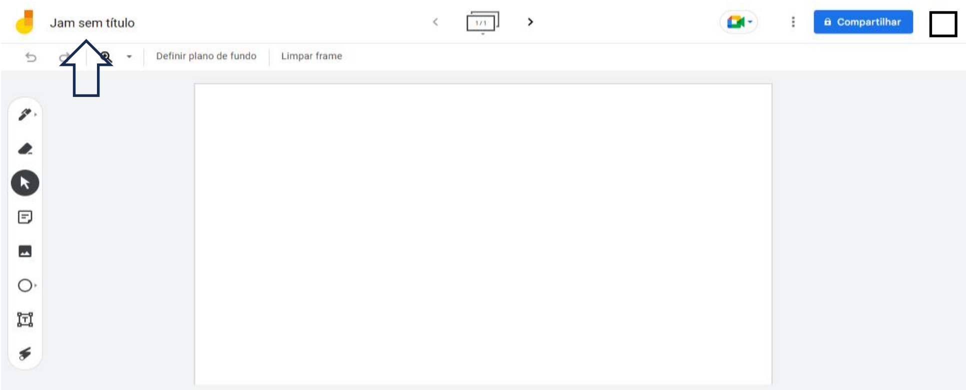


Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3:

Ao abrir a página do Drive, é preciso selecionar a opção “novo” no canto superior esquerdo < levar o *mouse* até a opção MAIS > selecionar “GOOGLE JAMBOARD”. Ao clicar ali, o professor será direcionado à página inicial do Jamboard, onde aparecerá o quadro branco e as opções de configurações e recursos, como na figura 18.

Figura 18 – Página inicial do Jamboard



Fonte: Elaborado pelo autor

É possível dar ao seu projeto um título clicando na opção “Jam sem título”. O professor pode então usar uma variedade de recursos atraentes para criar um quadro interativo.

É possível mudar o plano de fundo clicando na opção “Definir plano de fundo”, que fica logo acima do quadro. Você pode escolher entre quadros com linhas, quadriculados, fundo preto ou azul, malhas de pontos ou até mesmo selecionar um plano de fundo de uma imagem que foi salva no dispositivo. Para fazer isso, pressione o ícone + no dispositivo.

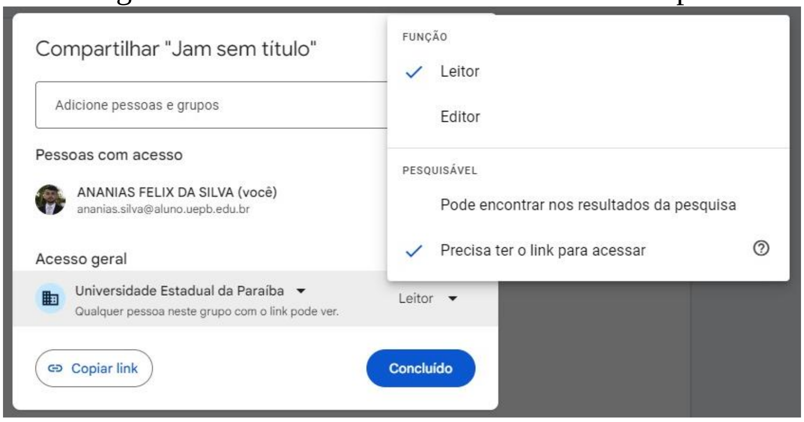
No canto esquerdo são apresentados diversos recursos. É possível selecionar as opções de canetas, borracha, caixa de texto, entre outros.

A opção "nota autoadesiva" destaca informações importantes como um post it digital para anotações. Além disso, você também pode adicionar uma foto. Ao usá-la, o professor pode explorar o campo visual e apresentar gráficos ou tabelas para discussão em sala de aula. A opção “círculos” ainda permite a criação de formas geométricas. A ferramenta “laser” ajuda o professor a explicar, mostrando onde os estudantes devem olhar, servindo do orientação para a apresentação. Esse recurso permite que você rabisque o quadro sem se preocupar, pois ele apagará automaticamente.

Como mencionado anteriormente, uma das principais vantagens de usar o Jamboard em aulas online é uma oportunidade de interagir com os estudantes. Além de permitir que o professor edite a lousa durante a apresentação, também é possível dar acesso aos estudantes, dando-lhes a oportunidade de editar. Essa ferramenta se torna ainda ainda mais versátil com a utilização desse recurso valioso; pode ser usado para realizar estimativas on-line, realizar atividades, discutir ideias e fazer brainstorming e expor conteúdo.

Para incrementar a interação dos estudantes durante a aula virtual, é possível compartilhar a lousa criada pelo professor. Para isso, basta clicar na opção “Compartilhar” no canto superior direito, e adicionar o e-mail de cada estudante, selecionando a opção “Editor” e clicando em “Salvar”, como mostra a figura 19.

Figura 19 – Insira o e-mail do aluno neste campo



Fonte: Elaborado pelo autor

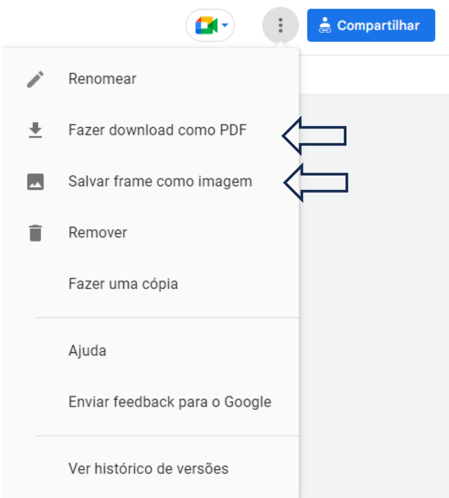
Selecionando a opção “Editor”, o estudante passa a ter acesso ao quadro criado pelo professor, não só visualizando mas podendo editar o material por meio dos recursos disponíveis no Jamboard, tais como a caneta, caixa de texto, nota adesiva, etc.

Esse recurso pode ser usado tanto durante uma aula quanto para que o professor deixe atividades para os estudantes fazerem em casa após uma aula. Essa ferramenta permite que professor e estudante acessem o quadro simultaneamente e editem o mesmo durante uma aula, ou seja, à metida que o estudante faz edições, o professor acompanha em tempo real, podendo contribuir ou modificar. Isso permite que o professor crie um ambiente para discussões e debates, permita que os estudantes façam exercícios e até mesmo os avalie durante a aula.

Outra característica interessante do Jamboard é que cada título pode conter uma sequência de até vinte lousas, possibilitando ao professor fazer uma sequência de exposições de quadros sobre um mesmo assunto e criando uma sequência construtiva. Assim é possível trabalhar um mesmo conceito de várias maneiras em um mesmo lugar, intercalando quadros expositivos, atividades para resolução em aula, gráficos, imagens, etc.

Ao finalizar uma sequência de lousas em um mesmo título, é possível ainda importar um arquivo de PDF com todos os quadros, no formato de slides, e salvar onde quiser. Caso o professor esteja interessado em salvar apenas uma das lousas, é possível também salvar no formado de imagem. Para isso, basta selecionar uma dessas opções, clicando no ícone de três pontos, ao lado do ícone “Compartilhar”. Veja as opções na figura 20.

Figura 20 – Como compartilhar Jamboard com os alunos



Fonte: Elaborado pelo autor

Os professores de modo geral estão familiarizados com as práticas dos modelos tradicionais de ensino. Não estão, portanto, habituados ao uso de recursos tecnológicos em suas aulas. Como consequência, os estudantes não são ensinados a utilizar a tecnologia de forma consciente com a finalidade de promover a aprendizagem.

Para minimizar os efeitos negativos do ensino híbrido, os professores podem buscar estratégias que incentivem maior interação e um ambiente de discussão nas aulas. Quando se trata do ensino da Matemática, como já se sabe, a mudança de aulas presenciais para aulas híbridas requer tolerância dos professores e dos estudantes. Isso se deve principalmente ao fato de que esta nova modalidade de ensino exige que os estudantes sejam mais independentes e motivados para estudar. A falta de interesse dos estudantes não é apenas resultado das aulas remotas; o processo de ensino-aprendizagem continua sendo centrado no professor em vez dos estudantes (PALÚ; SCHUTZ; MAYER, 2020).

Tendo em vista isso, os recursos oferecidos pelo Jamboard são muito diversificados e podem ser explorados nas aulas de Matemática. O professor pode usar a criatividade e elaborar atividades a serem aplicadas durante todo o processo de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Considerando que esta pesquisa visou conhecer um pouco da literatura envolvendo Tecnologias Digitais e esse contexto matemático expomos na sequência algumas pesquisas que estabelecem essa relação, visando ampliar a compreensão do objeto de estudo.

4.4 A compreensão conceitual do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva do pensamento digital

O Cálculo Diferencial e Integral é um campo muito discutido quando o assunto é ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Superior. Ao longo dos anos, esse ramo da matemática vem sendo centro de pesquisas devido suas conceituações serem tratadas muitas vezes na superficialidade, refletindo um cenário caótico de frutos alcançados.

Quando nos apropriamos de um estudo aprofundado desse cenário, encontramos um quadro de pesquisas que descrevem problemas de diferentes naturezas quanto ao entendimento dos assuntos que compõem o Cálculo, entre os quais enxergamos um recorrente que se trata da compreensão efetiva de seus conceitos. Nesse viés, Olimpio Junior e Villa-Ochoa (2013), elencam trabalhos que retratam essa perspectiva da compreensão conceitual do Cálculo integrada a uma perspectiva digital, se atendo a destacar esse contexto desde assuntos mais elementares até entendimentos mais rigorosos.

Em princípio de conversa, os autores levantam questionamentos acerca do que se trata uma compreensão adequada para entendimento durante a vida acadêmica como exemplo "qual é a natureza da compreensão conceitual esperada de um aluno que conclui a sequência tradicional do Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real no primeiro ano do Ensino Superior?" (OLIMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013, p. 145). Isso tudo pensando em um contexto do que é interessante a ser compreendido pelo estudante em sua vida estudantil.

Nessa linha de indagações os autores nos inserem em uma discussão de muita relevância, na qual emergem pontos cruciais para nos apropriarmos do entendimento ansiado.

Desse modo, um primeiro tópico discutido é **"A transição da matemática escolar para a matemática universitária"**, em que são destacados distintos fatores problemáticos para o estudante que se presencia durante esse período.

> [...] tais como os decorrentes da própria natureza da matemática universitária, das deficiências de formação - não apenas em Matemática – na Educação Básica, dos aspectos emocionais advindos da transição para a idade adulta e dos emergentes do choque com um ambiente onde reinam novos e desconhecidos valores acadêmicos e estéticos (OLIMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013, p. 148).

Para ilustrar esse contexto, os autores apresentam a pesquisa de Olimpio (2006) cuja retrata um estudo com alunos em seu primeiro ano na graduação sobre "[...] conceitos de função, limite, continuidade e derivadas entre escrita em linguagem natural, oralidade e o CAS MAPLE [...] (OLIMPIO, 2006, apud OLIMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013, p. 148)", destacando a experiência com a interação do conhecimento e as dificuldades advindo dessa vivência em quatro episódios.

Dando prosseguimento na abordagem, como segundo ponto, Olimpio Junior e Villa-Ochoa (2013) discutem a **"Compreensão sobre o conceito de Derivada – Outros olhares".** Nessa parte, abrange-se uma discussão sobre tais compreensões em uma perspectiva tecnológica, pautando-se na pesquisa de Villareal (1999, apud OLIMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013, p.153) que nos:

> Mostra como os estudantes interagindo diferentes tecnologias constituem uma ecologia cognitiva particular indutora de abordagens tanto visuais quanto algébricas que demanda delicados exercícios de coordenação no trânsito entre representações de conceitos centrais do Cálculo.

Para enfatizar este ponto, Olimpio Junior e Villa-Ochoa apresentam uma observação destacada por Villareal (1999) acerca da representação da reta tangente a uma curva sobre um ponto, levando ao leitor do livro refletir que embora este possa ter uma boa compreensão dessa ideia, mas que "[...] tal percepção nem sempre encontra respaldo na realidade das salas de aula universitárias" (OLIMPIO JUNIOR, VILLA OCHOA, 2013, p. 154).

Em conexão com este contexto, enfatizando a derivada, isto é, **"A Derivada como taxa de variação"**, é apresentado uma discussão acerca do estudo de Villa-Ochoa (2011) com os aplicativos *GeoGebra* e Modellus[5] com enfoque "nas compreensões do conceito de derivada como taxa de variação" (OLIMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013, p. 156).

Diante disto, tem-se a exposição de alguns pontos elencados no estudo de Villa-Ochoa (2011), em que o autor:

> [...] argumenta sobre as dificuldades dos estudantes na compreensão do conceito de derivada, além de constatar os anêmicos significados atribuídos por estes à expressões como
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
>
> E até mesmo à interpretação geométrica clássica como inclinação da reta tangente. (VILLA-OCHOA, 2011 apud OLIMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013, p.156-157).

É exposto pelo autor uma ilustração para enfatizar como se deu o embasamento para o seu desenvolvimento com base no que ele se deparou com relação ao que é compreendido acerca de alguns conceitos.

Estendendo um pouco mais esse contexto do Cálculo, isto é, uma relação derivada e integral, é discutido o tópico **"A conexão Cálculo Diferencial - Cálculo Integral"** com o estudo do autor Scucuglia (2006), o qual apresenta em seu trabalho um estudo das compreensões do Teorema Fundamental do Cálculo.

Conforme Scucuglia (2006, apud OLIMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013) o autor "mostrou como os coletivos estudantes-calculadora-gráficas foram induzidos a articular e a transitar entre múltiplas representações algébricas, gráficas e numéricas para finalmente constituírem compreensões robustas e significativas sobre o TFC".

Com relação a essa experiência vivenciada com o estudo sobre tais compreensões:

> Acredito que experimentação com calculadoras gráficas, proposta nesta pesquisa sobre Teorema Fundamental do Cálculo, pode ajudar no estabelecimento de conexões entre a matemática difundida no Ensino Médio e a Matemática exposta na comunidade acadêmica. Ao invés de propor uma abordagem tradicional a estudantes de primeiro ano da graduação, no sentindo de expor diretamente os resultados de um teorema e buscar uma demonstração complexa deste, procurei possibilitar que os estudantes conjecturassem os resultados do Teorema Fundamental do Cálculo de modo experimental, com a calculadora gráfica e, em seguida, propus, a partir das conjecturas elaboradas experimentalmente pelos coletivos pensantes, uma

[5] O Modellus é um aplicativo de software que permite a criação de modelos interativos e simulações computacionais para auxiliar no ensino e aprendizado de disciplinas científicas e matemáticas.

> demonstração mais acessível, com notações e simbologias mais simples, não exacerbadamente complexas (SCUCUGLIA, 2011 apud OLIMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013, p. 164).

No tocante a integral, vê-se uma explanação do trabalho de Rosa (2008), no qual discute-se ensino e aprendizagem a distância com um jogo de videogame denominado RPG (Role Playing Game).

De acordo com Olimpio Junior e Villa-Ochoa (2013, p. 167) o estudo

> [...] evidenciou as inter-relações entre personagens e identidades online se mostrando em transformação, em imersão e em agency (ação com vontade e senso de realização) no propósito da construção de compreensões sobre o conceito de integral definida. Caracterizou-se, portanto, neste processo, uma noção de seres-humanos-com-mídias ainda mais complexas, uma vez que cada ser humano pode atuar sob múltiplas identidades com características e objetivos próprios.

De acordo com uma exposição, ficou evidente o quanto o trabalho com o virtual pode ajudar a realizar e refletir matemática.

Enfim, ao longo deste capítulo, nos apoiamos em Chiari (2015) e a reflexão sobre as tecnologias intelectuais, em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) com fases das Tecnologias Digitais na Educação Matemática e a concepção de seres-humanos-com-mídias de Borba e Villarreal (2005), além de autores como Bittencourt e Albino (2017), Gomes e Moita (2016) e Maltempi e Mendes (2016) entre outros que fundamentam bem a compreensão da temática.

Nosso trabalho, que utilizou tecnologias digitais como recurso de visualização gráfica, mostrou sua relevância quando buscamos os dados de sete participantes do estudo após participarem de oficinas voltadas para as Técnicas de Integração através da Resolução de Problemas. Este estudo pretende contribuir com a Educação Matemática, pois irá refletir sobre a formação desses futuros professores participantes da oficina, ou seja, a oficina proporcionou duas importantes estratégias de ensino, como a Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais, que podem facilitar elementos que podem ou não pode afetar a sala de aula.

5. METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, discorremos sobre o desenvolvimento da pesquisa de campo, expondo sua contextualização, trazendo autores que falam sobre a pesquisa qualitativa visando esclarecer o porquê de estarmos trabalhando sob esse enfoque.

Também buscamos situar os sujeitos da pesquisa, destacando qual motivação nos levou a escolha deles e delinear os instrumentos que foram utilizados para se analisar e coletar as informações para a exposição dos resultados deste trabalho.

5.1 Contextualizando a Pesquisa

Esta pesquisa tem como enfoque qualitativo, ao que se refere à abordagem do problema. Escolhemos esse tipo de estudo, pois acreditamos ser uma direção que traz muitas possibilidades para compreendermos o almejado.

Pensando no fato de estarmos diretamente conectado ao nosso objeto de estudo, Prodanov e Freitas (2013, p. 70) nos situa bem sobre esse tipo de pesquisa informando que "na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo".

Sendo assim, a procura por respostas concretas acerca do objeto de pesquisa, nos direciona a uma inserção direta num âmbito que poderá nos proporcionar os resultados a serem analisados.

Entendemos que no contexto da pesquisa qualitativa observa-se uma busca aprofundada do pesquisador, pois nessa perspectiva há uma preocupação em entender o cenário que se pretende realizar o determinado estudo. Como pontuam Bogdan e Biklen (1994, p. 48) "os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente de ocorrência".

Sob essa visão de se inserir em um contexto para melhor estudarmos e podermos oferecer algo efetivamente contribuidor, enxergamos essa via de pesquisa, não como um ato de o pesquisador querer manipular as situações para se chegar ao desejado, mas sim uma forma dele visualizar maneiras de se proporcionar contribuições para o contexto pesquisado.

Com isso, esse tipo de estudo possibilita ao pesquisador um grande envolvimento, pois quando ele se propõe a ingressar nessa missão deverá estar ciente de que necessitará disposição para análises que forem necessárias, sejam quais forem as anotações realizadas durantes a pesquisa, bem como a trabalhos que retratam a temática, ou até mesmo a busca por dados adicionais (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Em consonância com toda essa compreensão da pesquisa qualitativa, é que definimos a trajetória metodológica visando alcançar os objetivos geral e específicos, buscando responder à pergunta norteadora: De que maneira a Metodologia de Resolução de Problemas com auxílio de recursos tecnológicos pode contribuir para o ensino e aprendizagem das Técnicas de Integração com compreensão?

5.1.1 Sujeitos da Pesquisa

Esta proposta de pesquisa foi desenvolvida com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu do Ceará (FECLI-UECE), os quais estavam regularmente matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (Cálculo II).

Estes estudantes foram escolhidos partindo da ideia de trabalhar assuntos que fazem parte do componente curricular da referida disciplina, visando tomar conhecimentos prévios oriundos do Cálculo I, para que se chegasse a conceituações do conteúdo trabalhado de uma maneira promissora.

Esta disciplina é ofertada no terceiro semestre do Curso de Licenciatura em Matemática, como também para o curso de Física da respectiva Universidade, sendo oferecida em turnos alternados durante os semestres.

A turma da disciplina de Cálculo II contava com 10 alunos matriculados. Mediante o convite para participação das oficinas apenas 7 do total optaram por participar.

As atividades aconteceram de forma híbrida, sendo os encontros remotamente por meio da plataforma Google Meet e os presenciais em uma sala de aula da Universidade que fizemos a pesquisa, em que pudemos contar com a disponibilização de Datashow, o que nos ajudou nas apresentações de slides.

A realização das oficinas ocorreu, em alguns momentos, no horário de aula da disciplina de Cálculo II, com a permissão do professor titular desta, bem como em outros momentos fora desse horário.

5.1.2 Instrumentos para coleta de dados

Para a coleta de dados da pesquisa utilizamos alguns instrumentos que acreditamos dialogar com o objetivo da mesma. Nesse sentido, dispomos da realização da observação, fotografias, gravação de áudios e vídeos para que se fizesse os respectivos registros.

Dispusemos da fotografia, pois ela nos fornece subsídios representativos quanto a apresentação de um contexto estudado. A fotografia pode ser utilizada de diversas formas podendo permitir uma exposição da subjetividade presente através da imagem (BOGDAN, BIKLEN, 1994).

A gravação de áudio e vídeos foram também formidáveis para que depois de cada momento vivenciado pudéssemos com calma coletar dados e analisá-los e, com isso, expressarmos resultados e discussões evidenciadas com o estudo.

Valorizando a ética de pesquisa, pontuamos que todos os participantes da pesquisa foram informados sobre os instrumentos a serem utilizados durante o percurso e que os dados coletados por meio deles seriam usados para serem transcritos, mas sempre resguardando suas identidades.

Para gravação de todas as oficinas virtuais usamos o aplicativo "oCam", tendo em vista que a plataforma de videochamada Google Meet não estava mais disponibilizando a gravação como ferramenta.

Como forma de acrescentar nos encontros presenciais, usamos aparelhos celulares, os quais eram deixados próximos a cadeiras dos participantes da pesquisa, sempre solicitando a permissão deles para essa ação.

5.2 Descrição das oficinas em episódios

Ao ser consolidado o formato das oficinas em conversa com o orientador de mestrado, fomos à instituição de ensino que seria o campo de pesquisa, apresentamos a proposta em primeiro momento ao professor da disciplina de Cálculo II e depois ao diretor da universidade, concedida a permissão por meio de um termo de autorização de realização da pesquisa, acordado com o orientador e também diretor da universidade, levamos a proposta até os licenciandos que seriam os participantes da pesquisa.

Após os estudantes aceitarem a participação, criamos um grupo de *WhatsApp* para que além das conversações iniciais acerca da pesquisa, também ficasse disponível para sanar quaisquer dúvidas ao longo de tal execução.

Desse modo, a ferramenta foi utilizada para o envio do termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE), solicitando que se os estudantes concordassem poderiam assinar e enviar pelo e-mail. Caso não fosse possível de imediato, seria recebido na oficina seguinte. Vale ressaltar que os modelos do termo de autorização para realização da pesquisa e do TCLE se encontram nos anexos, ao fim desta dissertação.

A ideia inicial da pesquisa era que todo o trajeto fosse de forma presencial, mas ao conversar com os estudantes e o professor da disciplina, ficou acertado que seria necessário que as oficinas ocorressem de forma híbrida, em decorrência da pouca disponibilidade de ambas partes.

Pensando nisso, a pesquisa de campo ocorreu em sete oficinas com duração de 2 horas cada, totalizando 14 horas. De acordo com o percurso, sempre se atendo as possibilidades dos envolvidos, realizamos quatro oficinas presenciais e três remotamente. Além disso, a execução das atividades fora acordada com o professor da disciplina para ocorrência em alguns momentos de aula, como também extra a esse momento. Após findar os encontros entregamos a certificação pela participação dos estudantes.

Para a descrição das oficinas, em que exporemos falas dos estudantes e do pesquisador, fixaremos a nomenclatura E1, E2, E3, E4, E5, E6 e E7, buscando garantir e resguardar a identidade dos participantes da pesquisa. Lembramos que essa utilização foi disponibilizada para escrita do texto acerca de todas as oficinas, independente das equipes que os estudantes tivessem.

Tabela 1: Estrutura das oficinas

Oficinas	**Conteúdo programático**	**Horário/ Formato**	**Local**
Episódio 1	Apresentação da oficina.	13 h às 15 h Virtual	Plataforma Google Meet
Episódio 2	Integral como a primitiva de uma função.	18h30min às 20h30min Presencial	Sala de aula da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (UECE – FECLI).
Episódio 3	Integral como o cálculo de área – Integral Definida.	13 h às 15h Virtual	Plataforma Google Meet
Episódio 4	Técnica de Integral por substituição simples.	18h30min às 20h30min Presencial	Sala de aula da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (UECE – FECLI).
Episódio 5	Técnica de Integração por partes.	13h às 15h Virtual	Plataforma Google Meet
Episódio 6	Técnica de Integração por frações parciais.	18h30min às 20h30min Presencial	Sala de aula da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (UECE – FECLI).
Episódio 7	Técnica de Integração por substituição trigonométrica; Finalização da oficina.	18h30min às 20h30min Presencial	Sala de aula da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (UECE – FECLI).

Fonte: Elaborado pelo autor

Ressaltamos que as informações coletadas para análise foram seguidas conforme as falas apresentadas pelos envolvidos na pesquisa, a fim de mantermos a fidelidade na elaboração de nosso estudo, pois destacam Bogdan e Biklen (1994, p. 48) que

> Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos.

Diante disso, segue a narração do desenvolvimento da pesquisa expressando-as em episódios, pautando-se sempre na evidenciação de informações preciosas para a discussão desse estudo.

5.2.1 Episódio da primeira oficina

A primeira oficina ocorreu no dia 10 de setembro de 2022, a qual foi realizada de forma virtual via plataforma de videoconferência Google Meet. De 7 estudantes que haviam confirmado a participação durante as oficinas, 5 marcaram presença na chamada.

Esta oficina inicial teve como foco a apresentação da pesquisa, em que fizemos menção ao uso da Metodologia de Resolução de Problemas como proposta para se trabalhar durante os momentos que iriam ser vivenciados.

É importante destacarmos que embora em seu título, a oficina expressou o nome Cálculo, mas nada foi adiantado sobre o estudo das Técnicas de Integração. Isto porque, a perspectiva era que dispondo da referida metodologia fosse possível tomar conceitos de derivadas para se chegar na conceituação dos métodos resolutivos trabalhados na integral. Tal proposta metodológica considera:

> [...] que, partindo dos conhecimentos que já possui, o aluno se coloque em uma dinâmica de resolução do problema e que no percurso de sua resolução aprenda Matemática, aprenda o conteúdo que o professor pretende que ele aprenda e outros conteúdos, eventualmente, não previstos pelo professor (ALLEVATO; VIEIRA, 2016, p.119).

Nessa vertente, comunicamos aos estudantes que eles não precisariam se prender a nenhum assunto específico na solução de seus problemas, que estariam livres para escolher o percurso de construção das resoluções.

Concernente a oficina, para iniciarmos a primeira, fizemos alguns cumprimentos aos participantes da pesquisa, bem como externamos agradecimentos pela participação deles naquela jornada que estávamos iniciando. Em seguida, esclarecemos dúvidas que poderiam ter surgido sobre o termo de consentimento TCLE, o qual foi enviado via grupo de *WhatsApp* antes da efetivação do encontro virtual.

Findada todas as considerações iniciais, compartilhamos a tela do meet, solicitando a permissão dos presentes para gravação da chamada em prol da pesquisa. Concedida a autorização de gravação por todos, iniciamos a apresentação, enfatizando a temática e a motivação para o referido estudo, como também seus respectivos objetivos.

O primeiro tópico abordado foi acerca do Cálculo, em que trouxemos aos estudantes algumas ponderações sobre a área, tendo em vista que este campo é composto por inúmeros assuntos que se tornam tão corriqueiros ao longo de cursos como o de Licenciatura em Matemática.

Em introdução a essa reflexão, propusemos o questionamento: ***Como vocês enxergam o Cálculo?***

Como resposta, a participante ***E1*** falou:

E1- Acho um pouco complicado, mas se a gente tivesse uma melhor base na educação básica, né? Seria bem mais feito essa disciplina, sabe? Precisaria de uma melhor revisão, digamos assim, em alguns conceitos, lá no básico.

Em vista da fala, sobrelevamos a importância de conceitos básicos para compreensão do assunto tema da pesquisa, aproveitando para relembrar junto aos participantes qual a principal ideia do Cálculo, atentando para o quanto esse ramo da matemática é aplicável nas diversas áreas do conhecimento.

Mota e Abar (2019), também entendem que esta área da Matemática tem grande importância para a comunidade científica, viabilizando soluções de problemas nos mais diversos campos do conhecimento.

Ainda a respeito da mesma indagação, um outro participante da videochamada comentou no chat:

E2- eu vejo o cálculo como uma disciplina fundamental, para nossa formação enquanto futuros professores, tendo uma aplicação complexa, porém muito eficaz para a compreensão de problemas.

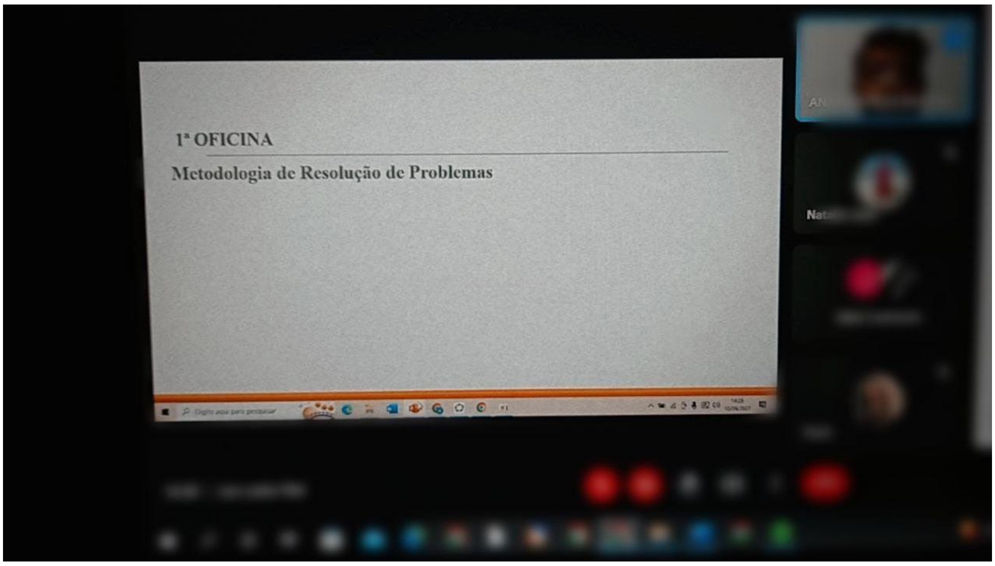
O ponto de vista expressado realçou um pouco da relevância do Cálculo, enquanto disciplina estudada e aplicada, mostrando que há sim uma visão dos estudantes de quanto essa disciplina pode ser útil.

Melchiors e Soares (2013) narram de forma suscinta sobre a história desse tão importante assunto, bem como elucida as proporções de visibilidade que o estudo desta parte da Matemática ganhou, atraindo assim diversos pesquisadores. Os autores explanam desde períodos que os estudos voltados para o Cálculo não eram bem fundamentados até o que se tem hoje.

Nesse enfoque, trouxemos essa discussão para os participantes da pesquisa, pois achamos importante deixar os estudantes a par do contexto do Cálculo em geral, visando promover reflexões nos estudantes quanto a relevância da área.

Finalizada a conversa acerca deste primeiro tópico, foi apresentado aos participantes da pesquisa a Metodologia de Resolução de Problemas, em primeiro momento afim de verificar se eles tinham conhecimento ou não com relação a essa via de ensino. Posteriormente, foi explanado sobre ela em uma perspectiva de abordagem de ensino.

Figura 21: Apresentação da oficina



Fonte: Acervo das oficinas

Quando questionados se tinham algum conhecimento relacionado a Metodologia, todos os estudantes responderam ***não.*** Antevendo a possibilidade de desconhecimento da temática, preparamos e expusemos uma apresentação sobre a origem da vertente e seus desdobramentos, destacando pontos como os principais pesquisadores nesse campo.

Após uma exposição geral da Metodologia de Resolução de Problemas, direcionamos a conversação para a perspectiva a ser tratada no estudo, o Ensino-Aprendizagem-Avaliação, destacando seus principais objetivos, como também seus idealizadores. Posto isto, visamos direcionar os estudantes na experiência que eles iriam vivenciar ao longo dos episódios das oficinas que seguiriam.

Entre as características da Resolução de Problemas na ótica de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, apresentamos aos estudantes um roteiro que orienta a resolução de problemas nessa vertente, o qual foi pensado e elaborado pelas autoras Onuchic e Allevato (2011), em que neste elas descrevem nove passos para se resolver um problema. Ressalta-se que foi falado um pouco sobre cada um deles.

Ainda sobre a Metodologia aproveitamos para comentar e expor textos referência da temática. E quando finalizada a breve discussão sobre esta, indagamos aos estudantes sobre a concepção que eles tinham acerca dela. O estudante E2 comentou que acreditava, assim como achava que os demais colegas também, que poderia ser algo bem mais dinâmico do que apenas efetuar cálculos. O comentário surtiu um pensamento positivo quanto as expectativas que poderiam ser esperadas ao trabalhar através da Metodologia. Após todas essas explicações, fez-se um fala precisa de toda a dinâmica pretendida com a realização das oficinas.

Após explicar sobre a metodologia a ser trabalhada durante a pesquisa de campo, ou seja, encontros virtuais e presenciais, indiciei que também utilizaríamos um software matemático chamado *GeoGebra* para auxiliar no estudo do Cálculo.

Nesse segundo momento também questionamos os estudantes se eles conheciam o referido *software*. De imediato obteve-se uma afirmação positiva dos participantes presentes na oficina, embora eles comentarem não ter tanto domínio desta. Diante disso, ressaltamos sobre a facilidade de tal utilização, motivando os estudantes que seria um manuseio bem interessante. Além disso, também dispomos da oportunidade para falar sobre a utilização cada vez mais presente da ferramenta no ensino de conteúdos matemáticos.

Antes mesmo da apresentação da interface do programa, salientamos que a disponibilização do *software* tinha enfoque no auxílio para o desenvolvimento da pesquisa, e não o de explorá-lo como principal objetivo neste trabalho.

Já no momento de exibição do *software*, apresentamos a barra de ferramentas, esboçando diversas possibilidades de construções que poderiam ser feitas, frisando que além de clicar nessas abas existia a possibilidade de inserir informações na barra de comando e que isso proporia chegar no mesmo resultado.

À medida que era mostrado cada parte da interface que compõe o *GeoGebra*, íamos fazendo aplicações simples para exposição de tal uso. Após toda essa explanação, finalizamos o encontro virtual, agradecendo mais uma vez pela participação de todos.

Como pode ser observado, a primeira oficina teve seu foco em uma exposição geral dos propósitos do estudo em si, visando esclarecer quaisquer dúvidas e introduzir os estudantes em um cenário que eles iriam vivenciar posteriormente na prática. Percebemos que nesse momento inicial os estudantes expuseram algumas visões acerca da temática que nos fez pensar como traçar algumas ideias para serem trabalhadas ao longo dos encontros.

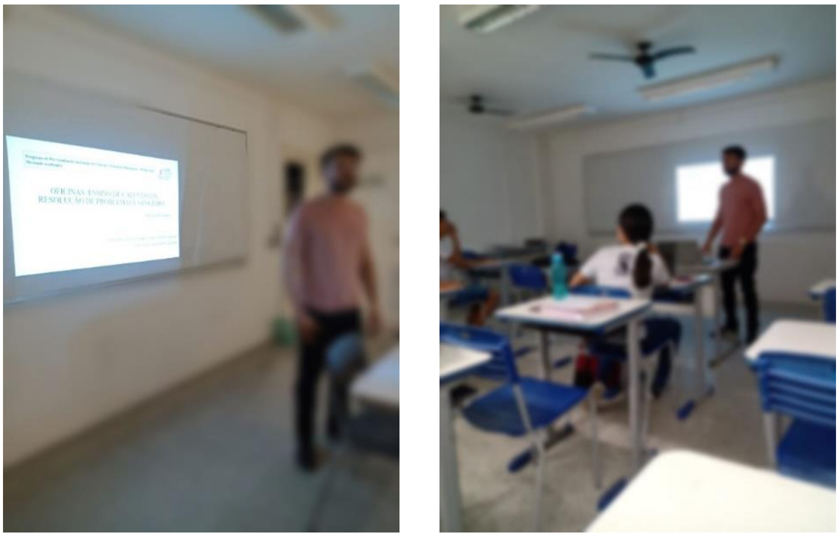
Nesse primeiro encontro não centralizamos nossa atenção na aplicação direta de problemas, pois acreditamos ser importante os participantes da pesquisa conhecerem sobre como aconteceria os encontros e também sobre as metodologias e ferramentas que utilizaríamos. De acordo com Prodanov e Freitas (2013, p.70), como pesquisador qualitativo, nos preocupamos “[...] muito mais com o processo do que com o produto”, isto é, nosso maior interesse está alicerçado na busca por oferecer uma vivência de construção de aprendizados sem se prender a um formato delimitado.

5.2.2 Episódio da segunda oficina

Dando prosseguimento as atividades, a segunda oficina aconteceu de forma presencial no dia 16 de setembro de 2022 em uma sala de aula da Universidade, campo da pesquisa. Nesse encontro, assim como no primeiro, estiveram presentes 5 estudantes participantes da pesquisa, entre os quais um não estava na reunião anterior.

Considerando a primeira participação desse estudante na oficina, bem como a importância de falar novamente as ideias desta proposta, fizemos uma breve retomada do encontro anterior comentando alguns aspectos muito importantes, além de frisar o roteiro de atividade proposto por Onuchic e Allevato (2011), que iriamos trabalhar durante os encontros da pesquisa de campo que iria ser trabalhado nela.

Figura 22: Apresentação inicial da oficina 2



Fonte: Acervo das oficinas

Após tecer alguns comentários gerais da oficina, iniciamos a execução da atividade planejada. Entregamos, então, o problema aos estudantes e solicitamos que eles fizessem uma leitura individual. Confere-se a seguir o problema.

Problema 1 (oficina 2): A equação de movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que s está em metros e t em segundos. Encontre a velocidade como função de t.

A escolha deste problema foi com o intuito de, possivelmente, resgatar conhecimentos prévios que os estudantes poderiam ter adquirido acerca do assunto derivada de uma função, mais precisamente em uma perspectiva de interpretação física. Visamos também enxergar o nível de conhecimento deles no assunto.

Para se chegar à conclusão de escolha desse e outros problemas, nos embasamos na fala de Allevato e Vieira (2016), as quais dizem que estes não devem conter um teor de complexidade, e sim um objetivo de proporcionar os estudantes disporem de seus conhecimentos já concebidos para chegarem a um entendimento do assunto em vigência.

Após a leitura individual, solicitamos que formassem dois grupos, deixando os estudantes livres para escolher quem seriam seus parceiros, definindo apenas a quantidade de membros em cada, isto é, um dos grupos com duas pessoas e outro com três, pedindo na sequência a eles que fizessem uma leitura grupal.

Feito isso, perguntamos se havia alguma dúvida acerca do problema, percebendo que não, pedimos que dessem início a resolução deste. À medida que a busca pela solução ocorria, passávamos entre os grupos observando como os estudantes procediam.

Sobre essa ação de estar disponível para sanar qualquer dúvida, pontuamos que é algo de grande relevância, pois mesmo que os estudantes não queiram ou não tenham alguma indagação imediata para expor, mas estarão cientes de que podem contar com a nossa contribuição.

Seguindo as observações, entre as conversações de um dos grupos, neste caso o grupo 1, como assim ficou definido, notamos, por parte dos membros, algumas reflexões na tentativa de lembrar de algo que fosse útil para a solução do problema. Foi quando um dos estudantes falou:

E6 - No caso vai ter s, v é o que a gente quer, a velocidade, temos o tempo né, no caso? isso aqui é física?

Partindo desta fala, percebemos que após alguns minutos de conversas aquela equipe começava a entrar no cerne da questão.

Chamamos atenção para este momento para relatar o quanto é interessante, pois nesta fase proposta pelo roteiro de atividades de Onuchic e Allevato (2011) aproveitamos para conhecer um pouco de como estão os conhecimentos dos nossos pesquisandos, analisando que informações eles lembram e quais podemos acrescentar para que possa surtir um feito na construção de seus raciocínios.

Considerando então a situação, tentamos instigar os estudantes a buscarem nas lembranças conceitos da disciplina de Cálculo I que fizessem alusão aos elementos apresentados no enunciado do problema.

Quando foi proposto essas possíveis recordações, houve alguns comentários:

E2 – Não, eu não lembro nada de Cálculo I.

E6 – Também não.

E2 – Faz tanto tempo que vi Cálculo I.

Mesmo com essas afirmações, eles deram prosseguimento na procura de uma solução, em que começavam a utilizar das ideias de limites para tal resolução.

Sobre essa intervenção do professor no diálogo de construção do problema, Onuchic e Allevato (2011) pontua bem o contexto, alegando que nesse momento é oportuno que o professor tente resgatar conhecimentos já obtidos pelos estudantes, de modo a promover questionamentos que possibilitem a eles caminhos para a solução do problema.

Por outro o lado, o grupo 2, como assim ficou determinado, dialogavam:

E3 – A equação é essa, $s(t)$ igual a t^3 ...

E1- $s(t) = t^3 - 3t$.

E3 – Pronto, agora vamos derivar primeira ordem.

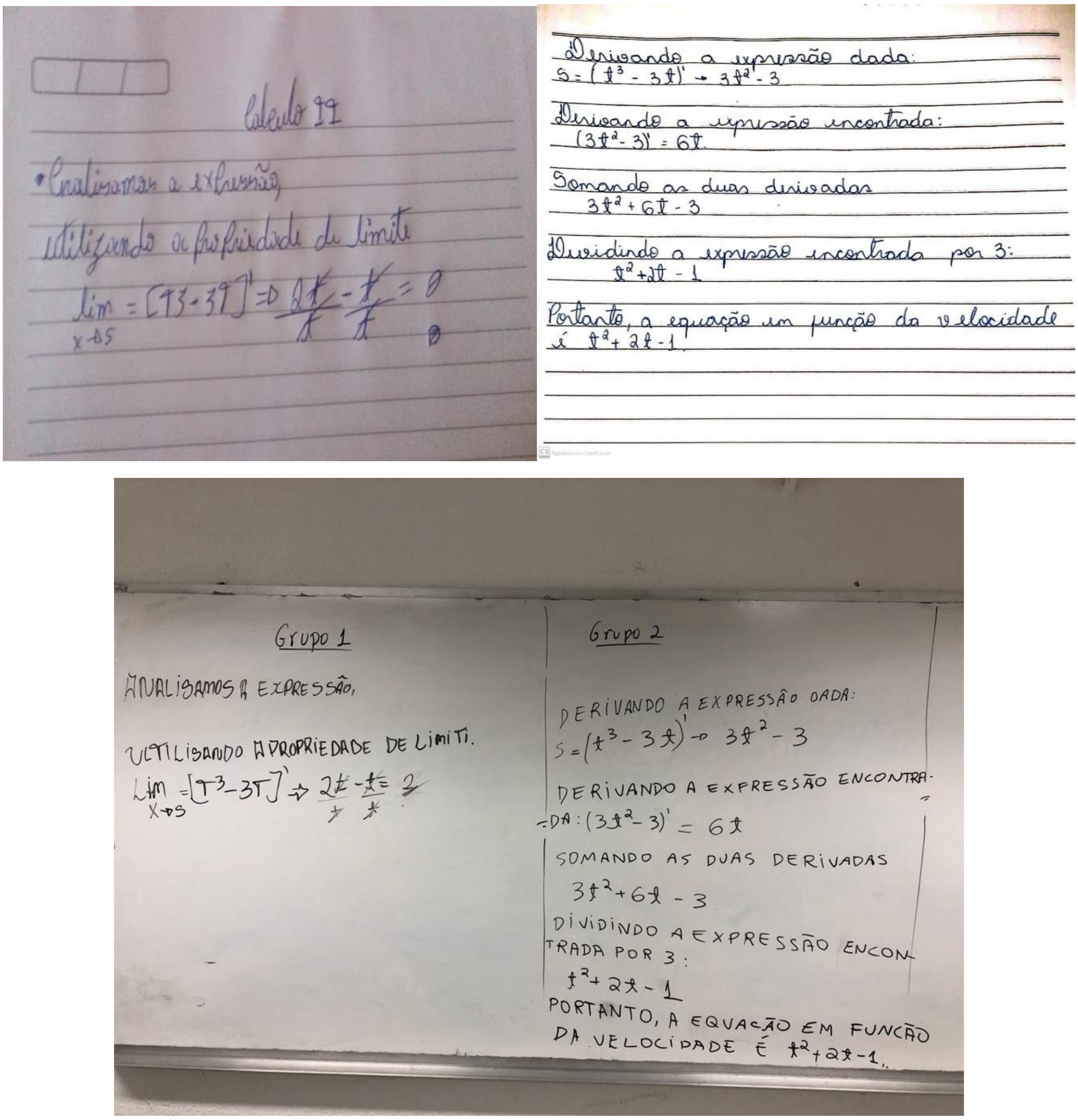
E1 – Calma! Para achar a velocidade?

E3- Isso, para achar a velocidade em função do tempo.

E1 – Derivada, $s'(t) = 3t^2$. Derivando outra vez, temos $6t$.

Com essa conversa, ficou notado a percepção deles que era necessário a utilização da ideia de derivadas. Nessa linha de raciocínio, eles finalizaram a solução, bem como o grupo 1. Com isso, passou-se para o momento em que eles escreveram na lousa a forma como tinham feito.

Figura 23: Resolução do problema 1 – Oficina 2



Fonte: Acervo das oficinas

Diante desse processo, refletimos um ponto interessante, em que necessitamos situar os estudantes na vivência que eles estão tendo com o problema, buscando promover nestes uma consciência que não se trata apenas de encontrar uma resposta, mas sentir cada etapa vivenciada, levando-os a um entendimento da essência do assunto.

De acordo com Proença e Pirola (2014) essa idealização que se parte de um problema para se chegar a novas conceituações pode caracterizar-se como algo que pode beneficiar os aprendizados dos estudantes, pois nessa perspectiva é possível ensinar o novo sem se preocupar com uma matemática restrita apenas a exposição de cálculos.

Já na plenária foi possível observar os estudantes apresentando elementos estudados no Cálculo I, como limites e derivadas. Antes de iniciar a etapa seguinte aproveitamos o momento para ressalvar que não importava quais formas estavam sendo utilizadas para a resolução, e sim o processo que foi efetivado para essa construção, destacando que esse fato é algo característico da Resolução de Problemas.

Seguindo as etapas do roteiro, buscamos em conjunto, chegar ao consenso da resolução do problema, possibilitando uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, para que os estudantes estendessem o objetivo do problema.

Para iniciar a solução foi esboçado conforme Stewart (2013), em se tratando de derivada, que se tivesse $s = f(t)$ como sendo uma função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então $f'(a)$ corresponderia a taxa de variação do deslocamento s em relação ao tempo t, isto é, $f'(a)$ corresponderia a velocidade da partícula no instante em que $t = a$. Em suma, a velocidade escalar instantânea da partícula exprimiria o valor absoluto da velocidade, isto é, $|f'(a)|$.

Os estudantes participantes da pesquisa apresentaram dificuldades em lembrar essas conceituações, mesmo com auxílio para resgatar tais informações. Mas quando frisado no momento da exposição da resolução eles declararam começar a ter algumas recordações desses conhecimentos.

Partindo disso, apresentamos:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d(t^3 - 3t)}{dt} = 3t^2 - 3.$$

Para sanar possíveis dúvidas e possibilitar da melhor forma tais lembranças, fizemos uma explanação das formalizações do assunto. Em primeiro momento, mostramos nos slides a definição da derivada em um ponto, bem como sua interpretação física, que nos diz que a derivada de uma função em um determinado ponto fornece a taxa de variação da função no respectivo ponto.

Depois foi exposto a derivada tanto através da definição de limites como usando a regra da potência. Tudo isso para se chegar à compreensão da taxa de variação média e os estudantes pudessem fechar o raciocínio do problema que envolve a derivada sob a ótica da interpretação física.

Salientamos que estas atitudes foram conduzidas à luz do que descrevem Onuchic e Allevato (2011), quando sugerem que o professor precisa conduzir os estudantes durante este percurso de busca pela aprendizagem.

Após toda essa vivência do problema 1, propusemos um segundo problema, no qual tivemos a atitude de tomar como base o primeiro para sua elaboração, em que propositalmente queríamos uma situação que submetesse propositalmente os estudantes na percepção de uma inversão nos cálculos, buscando induzi-los a compreenderem a primitiva de uma função. Para chegar a essa ideia tomando como nota o contexto descrito pelos autores Proença, Oliveira e Doneze (2022, p.13) que dizem:

> A escolha do problema consiste em selecionar uma situação de Matemática que pode ser retirada na íntegra de algum material didático; pode ter sido reelaborada, elaborada pelo professor ou visar a busca por um padrão pelo processo de generalização.

Sem dúvida, entendemos com essa perspectiva que há diversas maneiras de irmos em busca de problemas que possam ser viáveis para o estudo almejado, não se prendendo necessariamente a um material específico.

Com tudo isso chegamos ao problema 2, que pode ser visualizado a seguir:

Problema 2 (Oficina 2): A velocidade de uma partícula em movimento, em função do tempo t, onde t é dado em segundos, é descrita pela expressão $v(t) = 3t^2 - 3$. Determine a equação de movimento dessa partícula, sabendo que s está em metros.

Dado início ao processo, pedimos que os participantes da pesquisa fizessem a leitura individual e coletiva na sequência. Depois foi permitido a resolução.

Ao passar e observar o desenrolar dos estudantes, o grupo 2 chamou a atenção, porque tentavam associar os termos com fórmulas trabalhadas na física. Nessa situação, eles demonstravam dúvidas sobre como encontrar a equação solicitada. Como forma de instigar, indagamos se eles conseguiam estabelecer alguma relação com o problema anterior.

Ao observar o problema, o grupo dialogava:

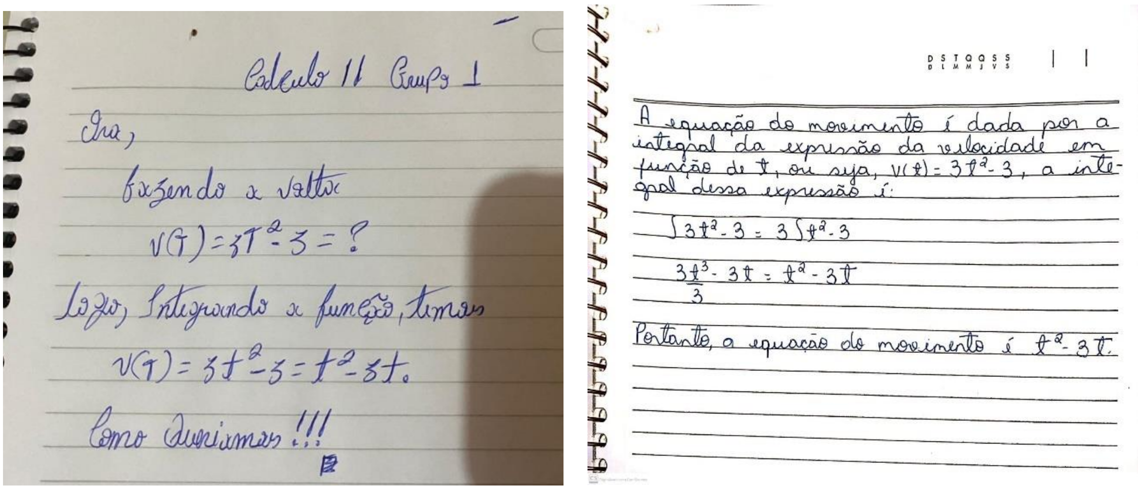
E3- Será que se nós voltarmos?

E2 – Só se nós voltarmos.

Por vezes, algumas informações podem fazer fluir ideias que nos possibilita chegar a um objetivo de resolução almejada. Confiamos na Resolução de Problemas, pois entre tantos aspectos positivos encontramos o fato de que podemos, enquanto professor mediador nesse processo, proporcionar aos estudantes raciocínios que podem ser cruciais no percurso que eles estão trilhando, nos revelando um parceiro nessa efetivação de aprendizados, em vez de detentor do saber.

Tendo em vista essa possibilidade de diálogo entre os pares, logo os estudantes fizeram a conclusão de que a volta poderia resultar na expressão desejada. E assim fecharam a compreensão.

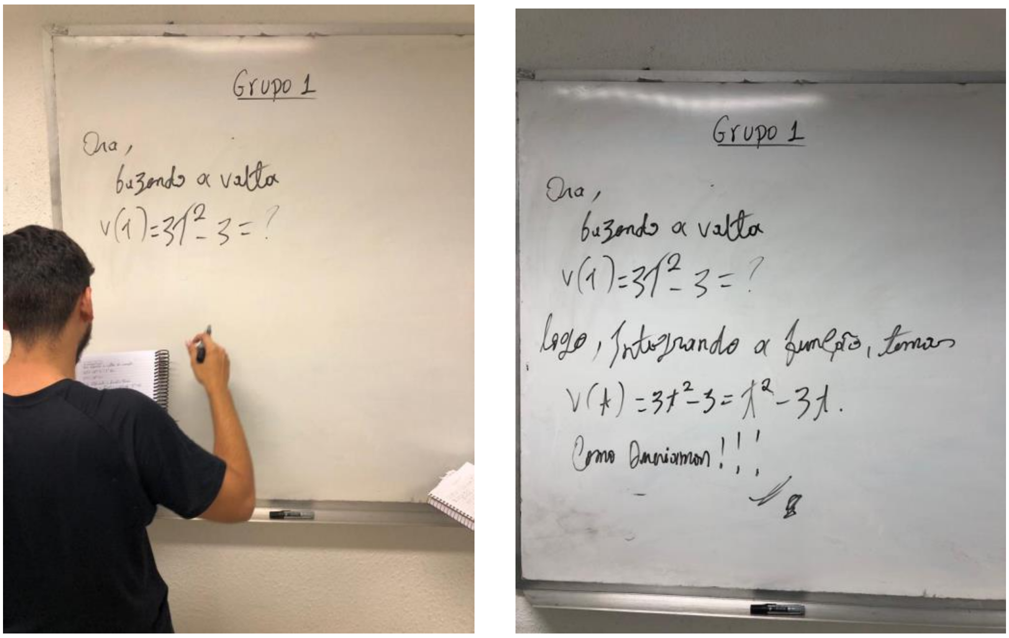
Figura 24: Resolução do problema 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Finalizada a resolução do problema solicitamos que escrevessem na lousa como eles tinham feito. Pudemos observar que os dois grupos conseguiram resolver o problema. Já o primeiro grupo não utilizou a simbologia de integral.

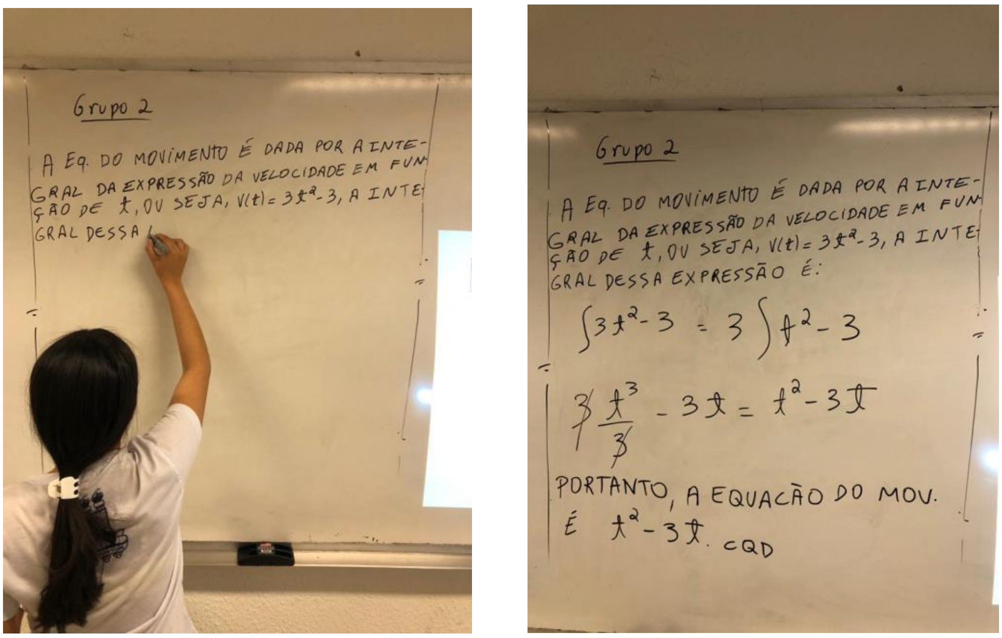
Figura 25: Exposição do problema no quadro pelo grupo 1 – Oficina 2



Fonte: Acervo das oficinas

O segundo grupo, por outro lado, dispôs da simbologia da integral. Ambas as formas foram levadas em consideração, tendo em vista que elas buscavam seguir um raciocínio semelhante.

Figura 26: Exposição do problema no quadro pelo grupo 2 – Oficina 2



Fonte: Acervo das oficinas

Aproveitando a solução dos estudantes e tomando posse delas, apresentamos a resolução do problema através dos slides para deixar mais esclarecidos alguns termos, que como observado eles já tinham conhecimento.

Partindo de $v(t) = 3t^2 - 3$. Considerando a velocidade ser dado por $v(t) = s'(t)$, ressaltamos que para encontrar $s(t)$ era preciso desfazer $s'(t)$, ficando $s(t) = t^3 - 3t$.

Evidenciando esse ponto, comentamos sobre esse procedimento de desfazer a função, a qual é chamado de primitiva de uma função. Em seguida, definimos, como descrito a seguir:

Seja f uma função definida em um intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que:

$F'(x) = f(x)$, para todo x em I (GUIDORIZZI, 2001, p.290).

Ressaltamos o quanto é relevante esta abordagem que o autor Guidorizzi apresenta no início do capítulo a respeito da integral, pois quando este retrata a ideia da primitiva pode desenrolar consequentes compreensões que contribuirão para um entendimento melhor do que se trata a integral.

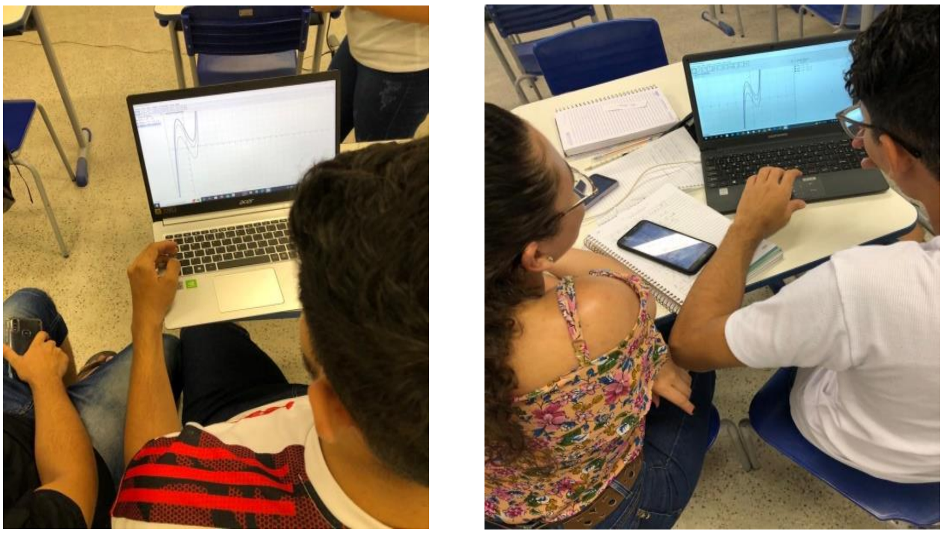
Para esclarecer mais este contexto, após apresentar a resolução e definição da primitiva de uma função, pedimos que os estudantes abrissem o *GeoGebra* e inserissem as seguintes funções:

$$f(x) = x^3 - 3x,\ g(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ e } h(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Depois dos grupos executarem o comando e encontrarem o desenho, fizemos questionamento do que eles verificavam de diferente nas funções. Rapidamente alguns responderam: *"a constante"*. Nesse embate, buscamos direcionar os olhares dos estudantes para a derivada da função.

Com a observação, eles perceberam que independente da constante acrescentada à função, a taxa de variação ia ser sempre a mesma. Em termos algébricos, os estudantes demonstraram compreender bem. (Ver abaixo as figuras do desenho das funções no *GeoGebra*)

Figura 27: Construção do gráfico da primitiva de uma função no GeoGebra



Fonte: Acervo das oficinas

Por outro lado, quando perguntado o porquê da importância de compreender a primitiva de uma função, os estudantes não expressaram nenhuma resposta imediata. Assim, percebemos a necessidade de destacar a ideia de prever outras taxas, uma vez que se sabe a função original, no caso a primitiva.

A prática dos participantes na construção geométrica das funções solicitadas no aplicativo, evidenciou uma melhor compreensão por parte deles quanto a definição algébrica de primitiva, pois a visualização no *software* deixou o entendimento do tópico mais coerente.

Alves e Lopes (2013, p. 6) expressam isso, evidenciando todo esse contexto de maneira ainda mais explícita dizendo que "[...] a tecnologia pode proporcionar ao estudante a descoberta e a familiarização progressiva com padrões geométricos oriundos dos gráficos das funções integradas e de suas respectivas primitivas $F(x) + k$ $(com\ k \in \mathbb{R})$".

Com o desfecho da explanação acerca da primitiva, finalizamos a oficina, tecendo alguns comentários acerca da forma de trabalhar a primitiva em alguns livros, como o Guidorizzi.

Em vistas a experiência vivenciada com a aplicação da Resolução de Problemas nesta segunda oficina, pudemos constatar momentos bastante valiosos, pois as etapas vividas durante este dia puderam promover nos estudantes ricas reflexões, além de propiciar lembranças de alguns conceitos da disciplina estudada no semestre anterior.

Também percebemos os estudantes tímidos em algumas etapas do percurso da Metodologia trabalhada, no entanto, até nesses momentos pudemos verificar pontos positivos, pois a eles foi dado a oportunidade de compreenderem que a resposta era importante, porém, o que realmente enriquecia o aprendizado seria as discussões vivenciadas durante o processo.

5.2.3 Episódio da terceira oficina

A terceira oficina aconteceu no dia no dia 24 de setembro de 2022, de forma online, via plataforma Google Meet. Desta vez contou-se com 3 estudantes participando. Após fazer os cumprimentos iniciais e frisar mais uma vez a ideia da realização daquelas atividades com a resolução de problemas, apresentamos o problema 1 da terceira oficina a ser trabalhado no dia.

Problema 1 (Oficina 3): Ache a área limitada pela reta $y = 2x - 1$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 5$.

A finalidade de propor este problema era que eles relembrassem como calcular áreas com figuras planas, um conceito fundamental para a posterior compreensão de área no contexto do Cálculo Integral.

Sabemos que a Resolução de Problemas é conduzida por atividades em que o estudante se envolve na construção de um conhecimento, estando dotado apenas de conhecimentos prévios, ou seja, desconhecendo ainda o assunto a ser trabalhado (HUANCA; SILVA; SOUZA, 2021). Diante disso, justificamos o resgate de alguns conceitos elementares para ingressarmos no estudo da integral.

Com relação ao encontro, como se tratava de forma virtual, explicamos que uma outra ferramenta a ser utilizada seria a lousa interativa presente no Google Meet, a qual é denominada *Jamboard*. Sendo assim, para a exposição do problema, como forma de explorar a lousa para conhecimento dos participantes, em vez de apresentar a interface dela apenas comentando as ferramentas, pedimos que um dos estudantes abrisse uma aba com a lousa, para que pudéssemos explicar como se dava tal passo. Logo após, enviamos a imagem do problema 1 para o *WhatsApp* do estudante que ficou responsável por essa ação e pedimos que ele copiasse e colasse-a naquela lousa.

Depois disso, solicitamos que os estudantes fizessem a leitura individual. Em seguida, uma leitura coletiva. Nisso, rapidamente eles escolheram um entre os três presentes na videoconferência para tal leitura. Concluído o tempo para cada uma dessas etapas pedimos que iniciassem a resolução do problema no *Jamboard*, ou seja, eles puderam resolver em grupo e simultaneamente.

A situação mostrou-se interessante, pois os estudantes interagiam bem com os recursos da ferramenta usada. Além de trabalhar o problema, eles iam explorando e aprendendo acerca de mais um meio tecnológico que poderia ser útil em suas práticas futuras de sala de aula, ou até mesmo em pesquisas que poderiam desenvolver.

Diante disso, não podemos deixar de destacar o quanto esse momento mostra-se pertinente e enriquecedor para ambas as partes, tanto para o estudante ampliando seus horizontes quanto ao aprendizado de dominar novas ferramentas enquanto aprende um conteúdo, quanto ao professor que experencia a utilização de meios que podem contribuir para a sua prática de trabalho.

Nessa vertente, visualizamos por meio desse contexto alguns pontos bastante relevantes que se trata das transformações que as tecnologias trazem, em especial, para o cenário escolar e também que elas proporcionam um âmbito educacional voltado para trabalhar o senso crítico dos estudantes através da disponibilização desses meios tecnológicos (GOMES; MOITA; 2016).

Voltando ao processo de resolução, um fato importante que se deu logo no início da conversação foi que os estudantes falavam sobre integral. Isso ocorreu em decorrência da pesquisa se dar concomitantemente com o acontecimento das aulas da disciplina de Cálculo II, na qual se trabalha integrais.

Mesmo com isso, vimos que eles demoravam em dá a contrapartida para iniciar a solução. Desse modo, aproveitamos para fazê-los refletir sobre o que aconteceria se utilizassem as delimitações fornecidas no problema por meio da construção do gráfico. Foi então, que os estudantes se sentiram motivados a utilizar o *GeoGebra*, como maneira de ter essa visualização.

Ao inserirem no software matemático as expressões dispostas no problema, os estudantes puderam ter uma visualização de que tipo de figura era originada com os dados fornecidos. Embora o gráfico tivesse sido construído, pairava um silêncio acerca do que fazer na sequência. Nesse enfoque, começamos um diálogo na tentativa de levá-los a uma compreensão do problema.

Os estudantes participantes da pesquisa começaram a raciocinar sobre uma região que lhes interessava naquele estudo, entendendo que eles poderiam calcular a área dela, mas nesse ponto surgia dúvidas de quais valores na reta do eixo x considerar. Sendo assim, buscamos que eles conjecturassem sobre isso.

Pesquisador: Vejam as limitações, as delimitações do problema.

E3: Ah, então seria de 1 a 5, não?

Pesquisador: Isso.

Pesquisador: Aí pegaria que região?

E1: Só esse triângulo aqui, no caso, sem essa parte aqui.

Considerando as falas de E1 e E3, fizemos uma indagação a respeito do gráfico construído:

Pesquisador: Só com base na visualização, tem como vocês calcularem a área?

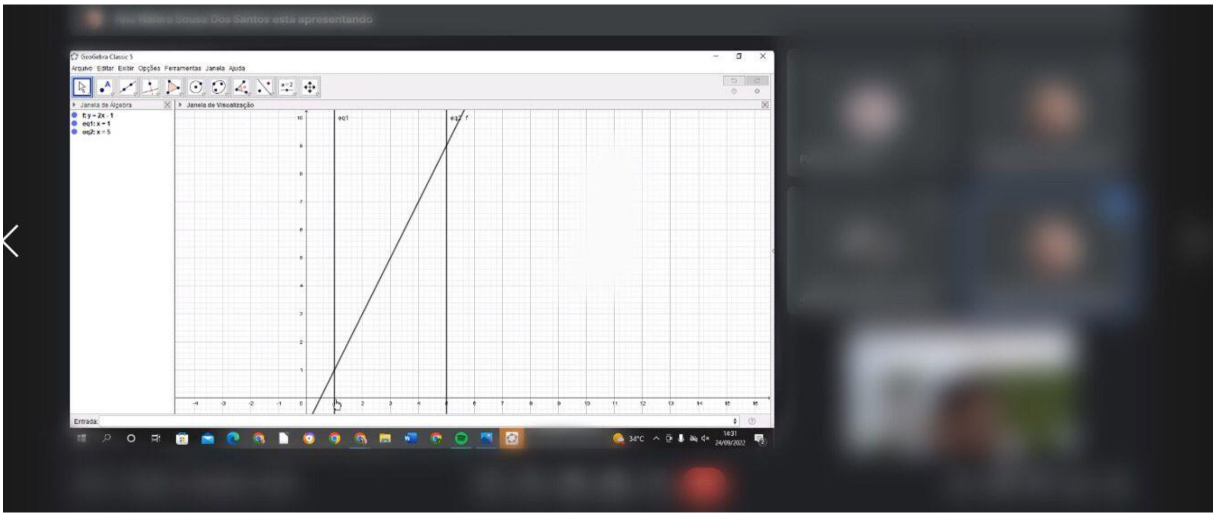
E4: Assim, eu acho que tem, tipo, a gente pode visualizar um trapézio, né?

Pesquisador: Isso.

E4: Se a gente quiser dividir, a gente pode dividir em um triângulo e um retângulo.

Esse diálogo foi fundamental para que os estudantes pudessem ter um princípio bem consolidado para a compreensão futura dos limites de integração no estudo de uma integral. A figura abaixo expõe o momento.

Figura 28: Utilização do GeoGebra para resolução do problema



Fonte: Acervo das oficinas

Na plenária, um dos estudantes não hesitou em explicar, pois considerou algo simples de se calcular, optando por apresentar a resolução como a visualização de um trapézio. Nesse problema não se viu a necessidade da etapa de formalização do conteúdo, pois os estudantes demonstraram dominar bem os cálculos básicos de áreas planas.

Chamamos atenção um aspecto forte nessa resolução que foi a utilização do *GeoGebra*, destacando o quanto essa via pode ser contribuinte para muitas vezes haver uma melhor percepção de um gráfico. Como confirma Bezerra (2015), esta ferramenta pode proporcionar uma visão geométrica de problemas e gráficos que muitas vezes são tratados apenas como algo algébrico.

Além de referenciar a tecnologia digital como contribuidora nesse processo também tecemos um comentário a respeito do diálogo traçado com os participantes, pois acreditamos que com essa ação podemos instigar os estudantes a serem o que Souza (2013) descreve como aluno reflexivo, o qual não busca tecer de imediato uma resolução, mas pensa e reflete sobre ela.

Depois do desenvolvimento do problema 1, em que pretendemos retomar conceitos fundamentais de cálculos de áreas planas passamos ao segundo problema, proposto para a oficina.

Desse modo, no tocante ao problema 2, o objetivo almejado era apresentar um elemento novo em suas delimitações, que foi a presença de uma curva. Posto isto, com a finalidade de se trabalhar a ideia de integral definida. Ver problema a seguir.

Problema 2 (Oficina 3): Calcule a área da região limitada por $y = x^2$, o eixo x e a reta $x = 2$.

Após todos os passos iniciais como leitura individual e coletiva, demos a largada para a resolução do problema, solicitando que o mesmo estudante que comandou o processo no problema anterior fizesse todo o passo a passo de espelhar a tela do Meet, abrir o *GeoGebra* e inserir as informações contidas no enunciado do problema no *software*.

Feito isso, percebemos que ao observarem o gráfico formado, os estudantes se mostravam inseguros quanto a comentar a respeito, deixando um silêncio na videochamada. A fim de instigá-los no que pensar questionamos eles quanto ao que proceder naquela situação. Logo após, iniciamos uma conversação acerca do que considerar no gráfico para ser trabalhado.

Desse modo, para situá-los naquela resolução, perguntamos se eles conseguiam enxergar a diferença entre as figuras dos problemas 1 e 2. Sem demoras, tivemos uma resposta:

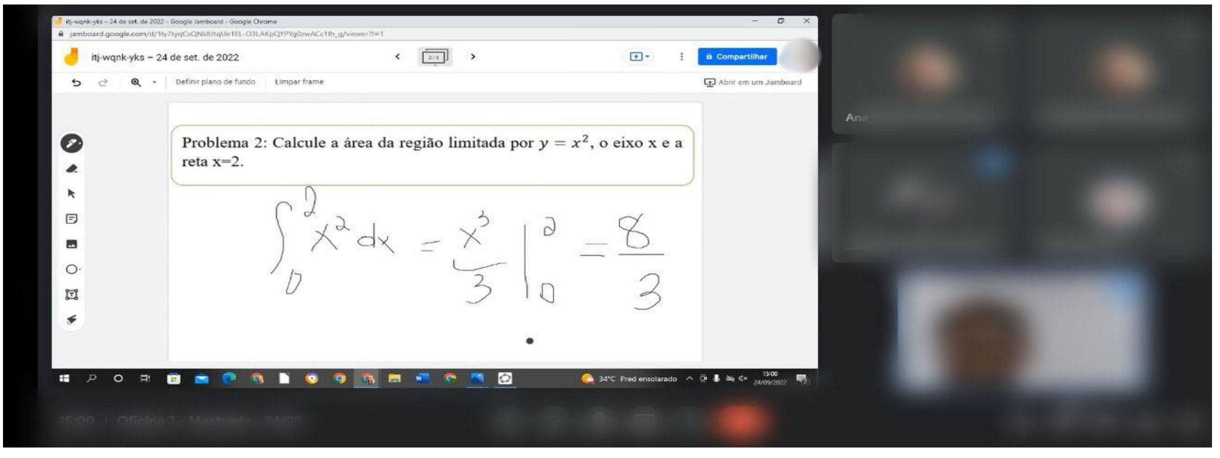
E1: A curva

Dessa observação, buscamos motivar eles a sondarem assuntos já vistos anteriormente, como no caso da disciplina de Cálculo I, para saber se seria possível usá-los e resolverem aquele problema, mas a estudante E1 disse:

E1: Eu só sei usando integral.

Esse comentário se deu em decorrência do professor da disciplina Cálculo II já estar trabalhando conceitos de integrais em sala de aula, como já comentando anteriormente. Logo foi visto que os estudantes conseguiram fazer tal resolução e a apresentaram na lousa interativa.

Figura 29: Resolução do problema 2 no Jamboard – Oficina 3



Fonte: Acervo das oficinas

Após a apresentação do que tinha sido resolvido, examinamos se eles sabiam o como se chegar aquelas regras para executar tal solução, pois eles demonstravam não ter domínio sobre. Aproveitando aquela oportunidade, fizemos a formalização para se chegar a todo o respectivo processo.

Desse modo, retomamos a busca por questioná-los acerca do porquê de não ser tão simples de calcular a área de figuras como a que eles obtiveram ao inserir os dados no *software*. Em resposta, escutou-se:

E1- Porque não é uma figura comum.

Partindo justamente dessa fala, comentamos sobre os conceitos de Cálculo Integral estarem presentes desde muito cedo, quando se calculava áreas de figuras planas no início da Educação Básica. É bem comum não ser levado em consideração, por vezes, que os assuntos matemáticos estudados, tiveram suas raízes em outros bem anteriores. Enfatizando esse cenário e comentando acerca dessa conceituação, em específico, Barroso *et al.* (2013, p. 90) explicam que:

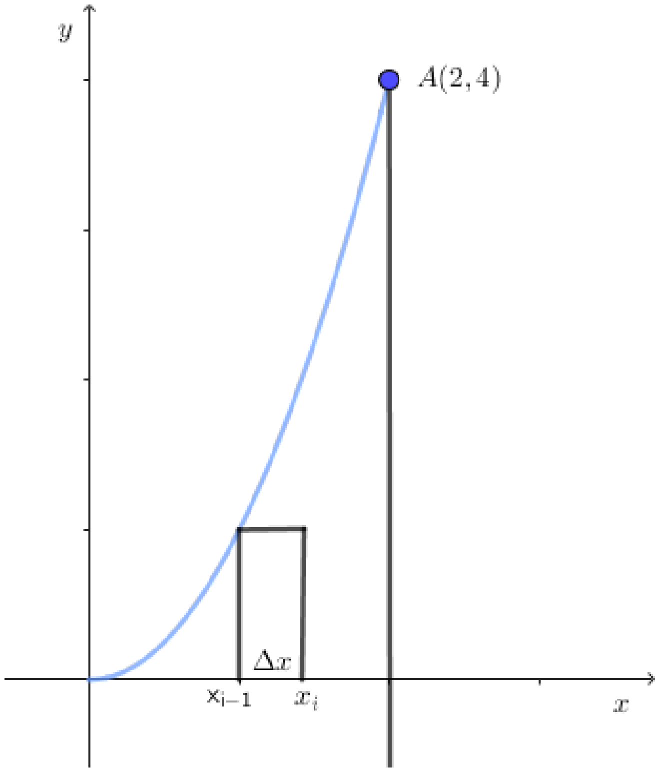
> O estudante brasileiro é levado a pensar que o seu primeiro contato com a noção de integral de Riemann se inicia na universidade. No entanto, já nos primeiros anos de escola, o conceito de integral vem sendo construído por ocasião, entre outros ensinos, do ensino do conceito de medida de comprimentos.

Mostrar ao estudante essa percepção pode ser bem favorável, podendo despertar uma compreensão que ele acreditava nunca ser necessária utilizar. Desse modo, feita toda explanação com relação a contextualização, iniciamos uma exploração construtiva no *GeoGebra*, visando mostrar ao estudante como se chegar à expressão que é disponibilizada para o cálculo que eles executaram.

Diante disso, para se trabalhar este problema apresentamos, primeiramente, a consideração da partição de um intervalo, ou seja, fazendo-se a divisão do intervalo que delimita o eixo x da figura, em n subintervalos, tomando-os com mesma medida de comprimento e representando por Δx. Isto é, dividindo-se o intervalo que for fornecido $[a,b]$ em n subintervalos. Logo, no caso deste problema, seria o intervalo [0,2], ficando $\Delta x = \frac{(2-0)}{n}$. Denotando-se os extremos desses subintervalos por $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$, onde na referida situação ficou $x_0 = 0,\ x_n = 2$.

Em cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i. Isto é, para cada $i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$, construímos um retângulo de base Δx e altura $f(c_i)$.

Figura 30 – Construção no GeoGebra do Problema 2 – Oficina 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Pedimos que observassem que se fosse somado as áreas de todos os retângulos que fossem construídos, iria chegar a:

$$S(n) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_i)\Delta x_i + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

que é chamada de soma de Riemann.

Informamos que à medida que n cresce muito e cada $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$, torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entende-se como área da figura. Em termos de limite:

$$A = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Tendo em vista que para se resolver os problemas com essa forma acima é trabalhosa, explicamos que Leibniz, para trabalhar o cálculo da área sob uma curva $y = f(x)$ de a até b introduziu o seguinte símbolo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

onde a e b são os limites de integração (a= limite inferior e b=limite superior).

Apresentamos, assim, a observação que se $\int_a^b f(x)dx$ existe, então f é integrável em $[a,b]$.

Foi aberto um tempo para comentar sobre outro tópico que seria necessário para dá continuidade na compreensão, o Teorema Fundamental do Cálculo, como explicado posteriormente. Ressaltamos que sobre este ponto eles também desconheciam.

Assim, para utilização, de fato, da aplicação da integral foi necessitado compreender uma das partes do Teorema Fundamental do Cálculo, que diz que se for conhecida uma primitiva F de f, então podemos calcular $\int_a^b f(x)dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nas extremidades do intervalo $[a,b]$, isto é,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

E só então toma-se o que fora expressado na lousa, ou seja, encontrar a primitiva e aplicar os limites de integração:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{1}{3}[(2)^3 - (0)^3] = \frac{1}{3}(8) = \frac{8}{3}.$$

Chegando à área correspondente a $\frac{8}{3}$.

A fim de consolidarmos uma ideia inicial acerca da integral, algo que visamos prioritariamente com todo esse processo foi deixar claro para os estudantes que

> Não é tão fácil, no entanto, encontrar a área de uma região com lados curvos. Temos uma ideia intuitiva de qual é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área (STEWART, 2013, p.326).

Após toda essa exposição, ressaltamos que foi elencado que os últimos passos do problema correspondiam ao que os estudantes tinham desenvolvido e exposto na lousa. Com isso, foi concluído o encontro.

Com relação a esta oficina, pudemos verificar dois pontos importantes, o primeiro corresponde a resolução dos problemas, em que os estudantes se sentiram mais à vontade no processo de construção, mesmo que com algumas dificuldades. Um segundo, trata-se da compreensão das delimitações da figura no gráfico por meio da ferramenta *GeoGebra*, o que iria contribuir bastante para o proposto nas oficinas seguintes.

Com isso, ressaltamos a importância do uso de uma ferramenta digital que pode ser útil no momento em que se tem discussões relacionadas ao um conteúdo, sem falar que a transmissão do Meet com sua lousa digital *Jamboard* foram eficazes na execução da atividade proposta.

5.2.4 Episódio da quarta oficina

A oficina 4 aconteceu de forma presencial no dia 30 de setembro de 2022, em uma sala de aula da Universidade, campo de pesquisa, e 6 estudantes participaram do encontro. Ressaltamos que neste encontro tivemos a participação do professor da disciplina de Cálculo II, em que o mesmo também se propôs a dar suas contribuições.

Como optado, nesse encontro, foi feito uma recapitulação junto à turma participante acerca do que fora trabalhado na oficina anterior. Isso, na tentativa de resgatar alguns conceitos que seriam de grande relevância para que os estudantes tivessem um bom desempenho na oficina que sucederia.

Por conseguinte, foi entregue o primeiro problema, em que os alunos fizeram uma leitura individual seguido da leitura coletiva. Dividimos os estudantes em dois grupos, para que eles pudessem resolver em grupo os problemas propostos, deixando a escolha dos membros a critério deles. Na sequência, apresenta-se o primeiro problema:

Problema 1 (Oficina 4): Calcule $\int \sqrt{3x-2}\, dx$.

Este problema, tinha como finalidade incutir os estudantes no trabalhar com manipulação de expressões matemáticas, as quais iriam passar a surgir constantemente na resolução de problemas com integrais. Além disso, começar a propor uma situação na tentativa de levá-los a perceber a necessidade de utilização de uma técnica para tal resolução, neste caso, a substituição simples.

Quando lançado o tempo para o desenrolar do problema, notamos que os estudantes se mostravam confusos quanto ao que fazer para se resolver aquela integral. Passados alguns minutos de busca pela solução, ouvimos em um diálogo entre os participantes do grupo 1, o estudante E2, dizendo:

E2 - Precisamos retirar da raiz.

Sendo assim, o estudante E2 e seus colegas de grupo concordaram, à priori, que o ideal era desfazer a raiz e depois, ficando o expoente em forma de fração, separar a expressão como uma subtração de termos elevado a fração um sobre dois, cada. Notando esse raciocínio, intervimos buscando promover entre eles uma reflexão sobre aquele procedimento, questionando-os:

Pesquisador: Você pode retirar assim da raiz? Lembrem das propriedades de radiciação. Será que pode fazer isso?

E2 – Não é assim não, ó?

E6 – Acho que não pode não.

E2 - Ah, então, não pode, você tá falando é separar aqui, né?

Insistindo, o professor-pesquisador falou:

Pesquisador – Será que pode fazer essa separação?

Desse modo, o estudante comentou:

E2- Ah, não pode é separar.

Com essas indagações, provocamos uma discussão entre o grupo, a qual se prolongou de maneira interessante, até que eles perceberam que em vez de cada termo está elevado a fração ½, seria simplesmente transformar a expressão como forma de potência.

No grupo 2, estavam pensando semelhante, no entanto ponderavam separar os termos sem desfazer a raiz de imediato. Mas com o diálogo entre eles, sem intervenções, logo visualizaram outra vertente.

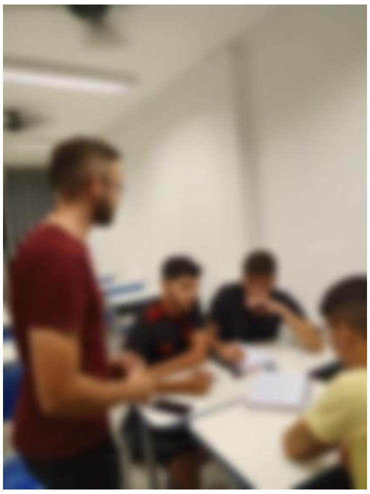
E3 - Ah, agora vamos transformar a raiz em potenciação.

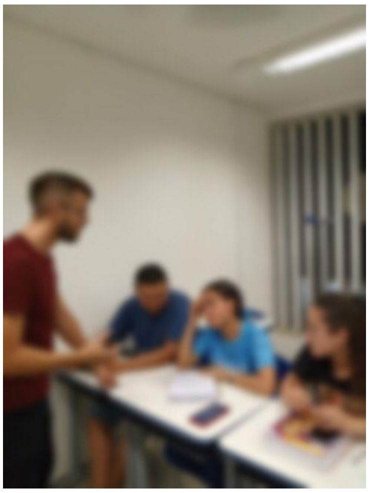
E1 - É mesmo.

Estas conjecturas se mostram muito valiosas, pois a conversação entre os estudantes propõe um compartilhamento de informações que se entrelaçam muitas vezes ajudando a conclusão de um conhecimento desejado.

Após a conversa e retirada de dúvidas os estudantes perceberam que aquilo se tratava apenas de uma manipulação matemática, em que precisaria posteriormente aplicar a integral.

Figura 31: Observação e incentivo do professor-pesquisador nos Grupos



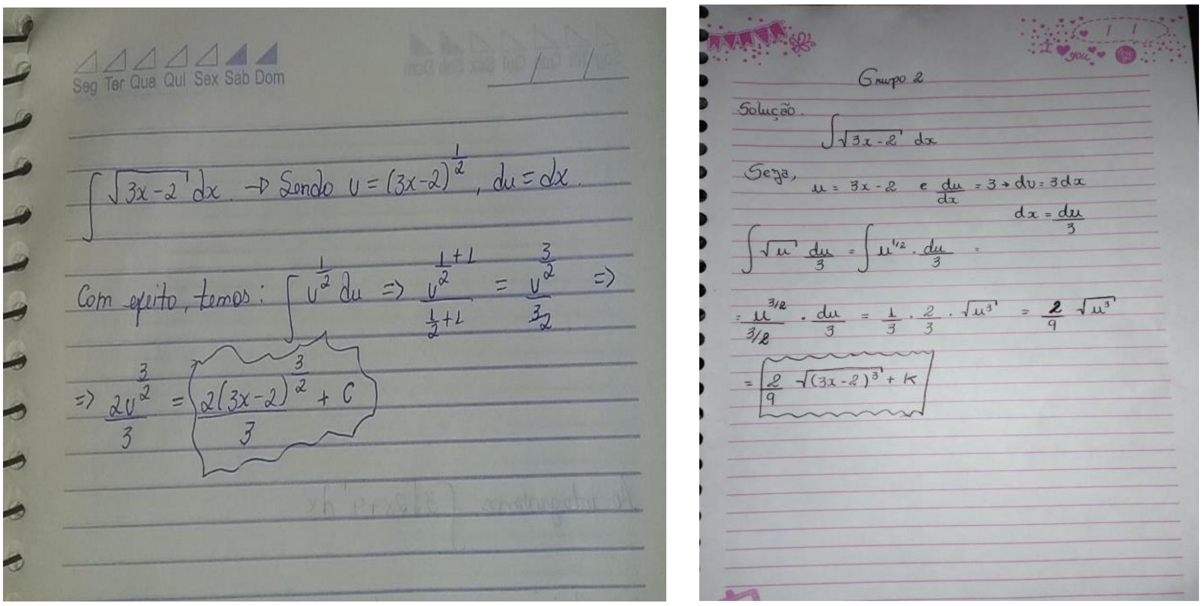


Fonte: Acervo das oficinas

Após identificarem a necessidade dos respectivos artifícios a serem utilizados, os estudantes fizeram sua resolução. É importante ressaltar que embora os estudantes tenham iniciado o estudo de integrais, mas nesse episódio não tinha sido trabalhado a técnica por substituição simples, no entanto, dois estudantes tinham conhecimento do assunto em decorrência de já terem iniciado a disciplina uma vez, o que contribuiu para se chegar à solução.

Visto que eles tinham concluído a estratégia pensada, solicitamos que escrevessem na lousa, sendo em seguida dado início a plenária. Os estudantes se disponibilizaram a apresentar a resolução, explicando-a logo em seguida. Na justificação havia a descrição de procedimentos usados, mas não o uso do termo substituição simples.

Figura 32: Resolução do problema 1 – Oficina 4



Fonte: Acervo das oficinas

Após a solução exposta no quadro branco, juntamente com o professor da disciplina apresentamos a formalização de maneira dialogada, tendo em vista algumas informações que precisariam ser frisados para os estudantes, como delineia Fleming e Gonçalves (2006, p. 247).

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F. Podemos considerar a função composta $F \circ g$.

Pela regra da cadeia, tem-se:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Isto é, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Tem-se então,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C \quad (1)$$

Fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ e substituindo na expressão (1), vem:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C.$$

Buscamos deixar da forma mais clara a explanação, usamos termos como os de Stewart (2013, p. 369) quando explicava em sua obra uma das situações envolvendo a substituição simples, dizendo que para resolvermos uma integral envolvendo a técnica "usamos a estratégia de resolução de problemas de *introduzir alguma coisa extra.* Aqui o "alguma coisa extra" é uma nova variável". Este fato pode ser visualizado acima, no processo de se chegar à fórmula.

Ainda sobre o procedimento, o professor da disciplina de Cálculo II destacou que para aplicar o processo seria interessante sempre tomar o cuidado de escolher a função mais conveniente, recaindo assim em um caso simples para a respectiva solução. Feito considerações finais sobre a situação, passou-se para o problema posterior.

Problema 2 (Oficina 4): Para uma certa mercadoria, a função custo marginal é dada por $C'(x) = 3\sqrt{2x+4}$. Se o custo geral for zero, determine a função custo total?

Nesta segunda situação, visamos requerer dos estudantes a prática da técnica da substituição simples, dessa vez partindo do pressuposto da compreensão da primitiva de uma função, usando para isso um problema contextualizado.

Após a solicitação da leitura individual foi pedido que formassem outros grupos ou poderiam continuar com a mesma formação. Logo em seguida, foi solicitado que escolhessem um de seus integrantes e fizesse a leitura para os demais.

Algo relevantemente notado é que a estudante que executava a leitura do grupo 2, logo que concluiu o ato expressou aos colegas sobre a necessidade de integrar, precisando fazer o processo de volta na expressão, isto é, a percepção da primitiva requerida.

Os estudantes do grupo 2 começaram a conversar sobre o problema, se questionando sobre de que se tratava aquela aplicabilidade do custo marginal, em que tentamos induzi-los a compreender a ideia partindo de conceituações apresentadas ao longo das oficinas.

Esta apresentação de um problema envolvendo outras áreas do conhecimento chama atenção, pois além dos estudantes trabalharem as conceituações do conteúdo estudado, podem visualizar sua presença além do contexto meramente matemático, deixando evidente o quanto o problema pode fazer ponte entre as áreas. Como valorização do problema, Onuchic e Allevato (2011, p.81) pontuam que:

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Enxergamos assim o potencial que o problema pode ter, quando este proporciona discussões e conclusões, sem aquela direção de apenas uma resolução mecânica.

No processo de resolução, após organizarem a integral para a aplicação, houveram alguns questionamentos, conforme mostrado no trecho de um diálogo do grupo 1:

E3 – No caso vamos substituir de novo por u?

E1 – Eu acho que é só integral, né não?

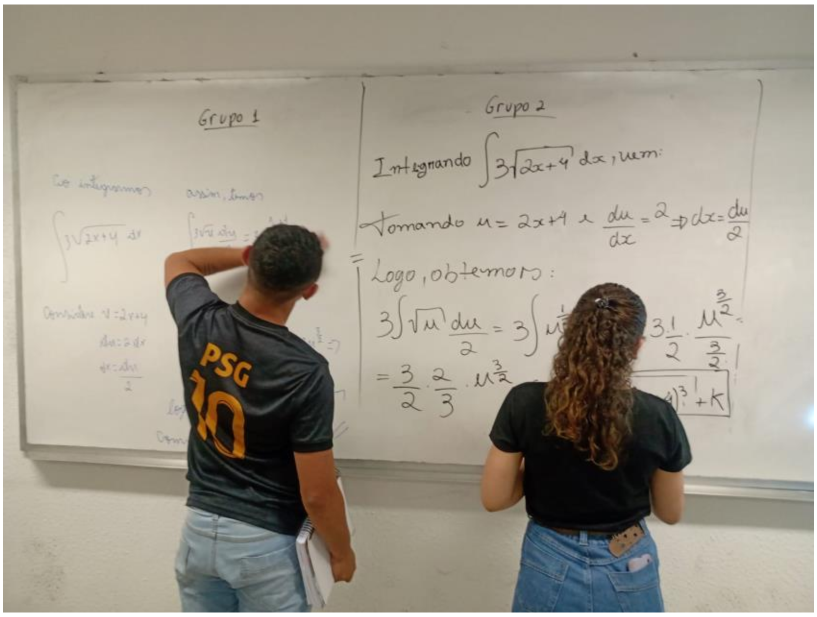
Essas indagações deram início ao domínio da compreensão da técnica discutida. Os estudantes, por alguns instantes tiveram dúvidas quanto a concluir a disponibilização da técnica, mas com a intervenção a fim de propiciar eles lembrarem do problema anterior, conseguiram compreender bem o caminho para findar a solução.

A condução descrita acima foi bem interessante, pois já conhecendo um pouco das informações que os estudantes continham para desenvolver o problema, pudemos chegar no ponto em que Gonçalves (2019) descreve como crucial para o estudante entender um conceito novo de forma significativa, isto é, quando temos esse saber a respeito do nível de conhecimentos prévios deles.

Nessa vertente, o diálogo anterior nos leva a perceber um aprendizado se constituindo, porque este momento acontece justamente “[...] quando o aluno é capaz de fazer relações de forma clara entre o conhecimento já existente em sua estrutura cognitiva com o novo conhecimento” (GONÇALVES, 2019, p. 8).

Concernente a apresentação das resoluções no quadro achamos importante dizer que houve uma interação entre os membros do grupo 1, ou seja, enquanto um explicava o processo resolutivo o outro escrevia na lousa.

Figura 33: Apresentação da resolução na lousa



Fonte: Acervo das disciplinas

Nessa situação, os estudantes conseguiram realizar o processo até se chegar a uma expressão em função da constante, faltando apenas concluir o que o enunciado do problema se propunha. Com isso, aproveitamos a oportunidade e fizemos um consenso com eles, promovendo essa compreensão.

Essa fase é muito importante, de acordo com Onuchic e Allevato (2014, p. 46) o consenso "é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimentos acerca do conteúdo".

Diante disso, primeiramente foi discutido com os estudantes sobre o que seria função custo, naquela situação, cuja seria aquela dada pela expressão primitiva e necessário fazer o processo de inversão da derivada, denominada integral, conforme esboçado por eles no quadro:

$$C'(x) = 3\sqrt{2x+4} \Rightarrow \int C'(x)dx = \int 3\sqrt{2x+4}dx \Rightarrow C(x) = \int 3\sqrt{2x+4}dx$$

Utilizando a técnica da substituição simples, foi chamado de $u = 2x + 4$. Assim, ficando com a derivada $\frac{du}{dx} = 2$ e resultando em du $= 2$dx. Percebido que o valor que estava na integral era constante diferente de 2, os estudantes então a retiraram para a parte externa da integral. Com a mudança de variável, obteve-se $dx = \frac{du}{2}$.

Reescreveram, então, a expressão original em função de u:

$$\int 3\sqrt{2x+4}dx = 3\int \sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{3}{2}\int \sqrt{u}\,du. \ (*)$$

Utilizou-se a propriedade da raiz na função integrando da integral encontrada:

$$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du.$$

Aplicando a propriedade de potência da integral e expressando em função de x, obteve-se:

$$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(2x+4)^{\frac{3}{2}}.$$

Substituindo em (*),

$$\frac{3}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+4)^{\frac{3}{2}} = (2x+4)^{\frac{3}{2}} + k \implies C(x) = (2x+4)^{\frac{3}{2}} + k.$$

Ao lançarmos um questionamento aos estudantes se o problema encerraria na última expressão, eles leram o enunciado novamente e viram que este possuía uma informação a mais, isto é, que o custo sendo zero, teriam que $C(0) = 0$ e deveriam fazer o que foi consentido como:

$$C(0) = (2(0)+4)^{\frac{3}{2}} + k \implies 0 = (4)^{\frac{3}{2}} + k \implies 0 = 8 + k \Rightarrow k = -8.$$

Visto que acharam um resultado para a constante buscaram voltar a expressão em função desta constante e encontraram a função de custo desejada.

$$C(x) = (2x+4)^{\frac{3}{2}} - 8.$$

Embora os estudantes não tenham concluído a resolução de imediato, visamos não apresentar de maneira direta a continuação desse processo, tentamos extrair dos estudantes essa conclusão. Pensamos no fato de que:

> Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente (ONUCHIC, 1999, p.208).

Tendo em vista todas essas reflexões, para finalizar o encontro, fizemos algumas ponderações necessárias como relatar importância da leitura dos problemas quantas vezes fosse preciso, para que não houvesse desatenções no momento da resolução e eles sempre pudessem chegar no almejado. Além disso, agradecemos ao professor da disciplina de Cálculo II pela participação naquele encontro.

Analisando esta oficina, um ponto positivo que encontramos trata-se de que os problemas deste encontro permitiram averiguar o quanto a visão apenas manipulatória está enraizada nos estudantes, sem muitas vezes haver um olhar para a ideia aplicacional de um problema, ou seja, sem que haja uma visualização crítica para a respectiva situação imposta.

Nesse viés, pensamos que é importante sempre oferecer um olhar mais apurado para a postura do estudante enquanto construtor de seu conhecimento e o que estamos oferecendo, pois assim será possível analisarmos se o efeito surtido é de fato contribuinte.

Nesse contexto, em linhas gerais, compactuamos com a fala de Souza (2013, p.44) quando diz que “se o professor não compreender a matemática, tampouco compreender seus alunos, ele será apenas um transmissor dos livros didáticos. Suas aulas serão repetições de ideias de terceiros e dessa forma não ocorrerá a aprendizagem com entendimento”.

E isto é algo que não deve estar no rol de nossos pensamentos enquanto profissional da educação, uma vez que aceitar o compromisso desse trabalho é conscientizar-se de uma jornada diária de desafios que é necessário encarar e buscar vencê-los com êxito. Tomando essa motivação nos propomos a estar sempre melhorando as atividades que foram propostas durante as oficinas.

5.2.5 Episódio da quinta oficina

A quinta oficina ocorreu no dia 15 de outubro de 2022 de forma virtual, via Google Meet. Contamos com a participação de dois estudantes.

Pedimos que um deles lesse o problema em voz alta, o qual estava disponibilizado na tela da videochamada. Foi esperado se havia alguma dúvida, mas eles não declararam ter. Depois disso, solicitamos que começassem a resolução.

Ressaltamos que o processo de solução do problema ocorreu por meio da disponibilização da lousa digital do Meet e que em decorrência dos estudantes relatarem problemas com o acesso ao aplicativo da lousa, alegando ser um problema em seus celulares, ficou acordado que o professor mediador das oficinas abrisse uma lousa interativa e eles fossem comentando a resposta, enquanto o pesquisador iria escrevendo.

Posto isto, demos, de fato, início ao processo. Apresenta-se, na sequência, o problema 1 proposto para aquela oficina:

Problema 1 (Oficina 5): Calcule $\int x \cdot senxdx$.

Este problema requeria dos estudantes a percepção deles para a presença de duas funções. E, com isso, levá-los a captarem a necessidade da utilização de uma outra técnica, notando que a substituição simples não era suficiente.

Compartilhamos aqui um sentimento ocorrido ao longo da preparação dos problemas. A seleção desse, assim como os outros, foi bem desafiador, pois precisávamos alancar os objetivos que tínhamos traçado.

Ao lermos o texto de Onuchic e Allevato (2011), encontramos as autoras abordando a primeira fase de um roteiro em que elas nos auxiliam na resolução do problema. Acerca disso, elas explicaram:

> *Preparação do problema* - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

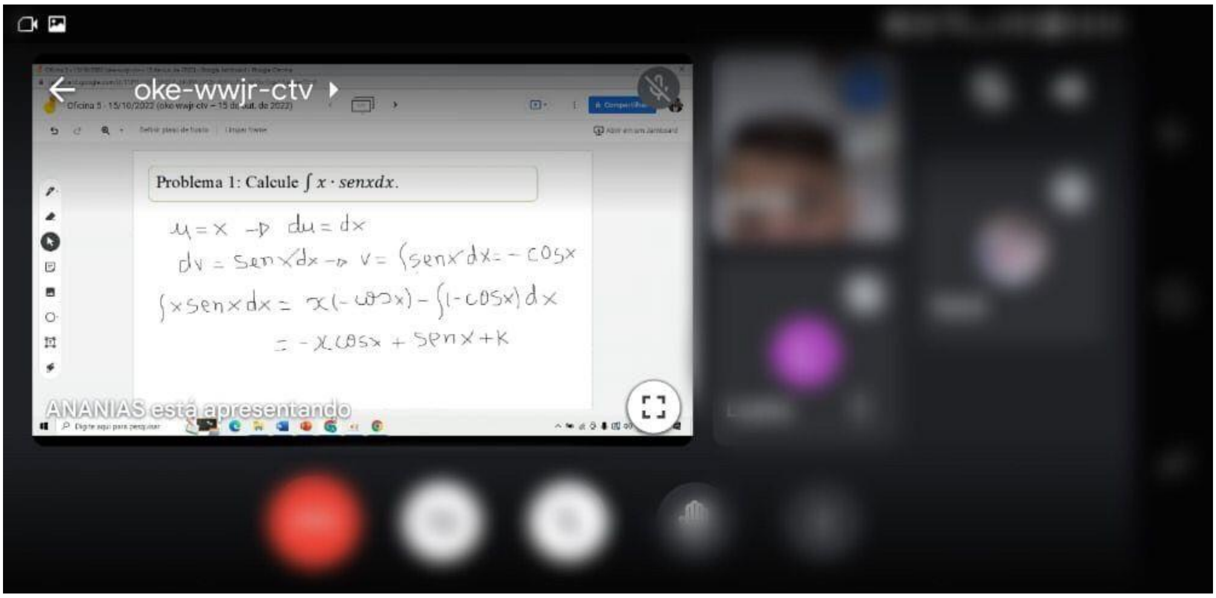
A reflexão desta fala nos proporcionou encarar o desafio e tentar ao longo dos encontros propiciar problemas que pudessem auxiliar o percurso de aprendizagem dos estudantes, sempre visando conhecer os envolvidos e oferecer a eles algo que fosse de fato favorável.

Concernente a aplicação da oficina, após os passos iniciais do roteiro como leituras e pedido para resolução do problema, começou a discussão deste. Ao serem interrogados sobre o que eles poderiam afirmar a respeito da resolução, o estudante comentou que integrais daquele tipo não poderiam ser resolvidos pelos conhecimentos tratados nas oficinas até então, mas sim pela técnica de integração por partes. Relatou ter visto em aula da disciplina de Cálculo II.

Esse fato nos chamou a atenção, pois estávamos buscando retratar os conteúdos antes de serem trabalhados na disciplina de Cálculo II, embora esta estivesse ocorrendo de forma simultânea. No entanto, como era notado o estudo da técnica deu-se continuidade com o processo de resolução, esperando-se poder auxiliar em alguma compreensão ainda não fixada.

Vendo que os estudantes ainda não possuíam um domínio da conveniência de utilizar as funções na aplicação da técnica, aproveitamos para evidenciar esse ponto. Finalizado esse processo, percebeu-se alguns detalhes para se chegar ao raciocínio.

Figura 34: Mediação da Resolução do Problema 1 – Oficina 5



Fonte: Acervo das oficinas

Não houve uma busca de consenso, apenas complementações para se findar o raciocínio do problema. Embora ficou sabido que os estudantes tinham visto em sala, mas decidimos mostrar a formalização da técnica, considerando que pelo relato deles era recente a primeira vez que por eles fora visto esse método de integração.

Antes de resolver de fato o problema, foi mostrado a expressão que origina a fórmula para desenvolver a técnica de integração por partes, conforme esboçada por Fleming e Gonçalves (2006). Assim, da regra do produto da derivada, teremos:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Uma primitiva de $[f(x) \cdot g(x)]'$ *é* $f(x) \cdot g(x)$. Aplicando a integral:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)dx + \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx \Longrightarrow \int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Daí, de uma maneira conveniente, chama-se uma das funções de uma variável, geralmente u, enquanto que a outra função de dv, ou seja, $u = f(x)$ e $dv = g'(x)dx$, em que substituindo em (*), tem-se:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu \;\; (**)$$

Conhecendo a expressão a ser utilizada, atenta-se para que a escolha seja feita de forma conveniente. Neste caso, toma-se:

$u = x$, então $du = dx$

$dv = senxdx$, então $v = \int senxdx = -cosx$

Com isso, utilizando a fórmula, vem:

$$\int x \cdot senxdx = x \cdot (-cosx) - \int -cosx \cdot dx$$

$$\int x \cdot senxdx = -x \cdot cosx + \int cosx \cdot dx$$

$$\int x \cdot senxdx = -x \cdot cosx + senx + k.$$

Os estudantes esboçaram sentirem-se mais confiantes ao ver outra vez essa estratégia de ensino. Foi também chamado a atenção para o fato de ser utilizado a trigonometria de forma constante no estudo das integrais. Para implementar mais a compreensão da técnica passou-se para o segundo problema.

Problema 2 (Oficina 5): Ache a área da região limitada pela curva $y = 2xe^{-\frac{x}{2}}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$.

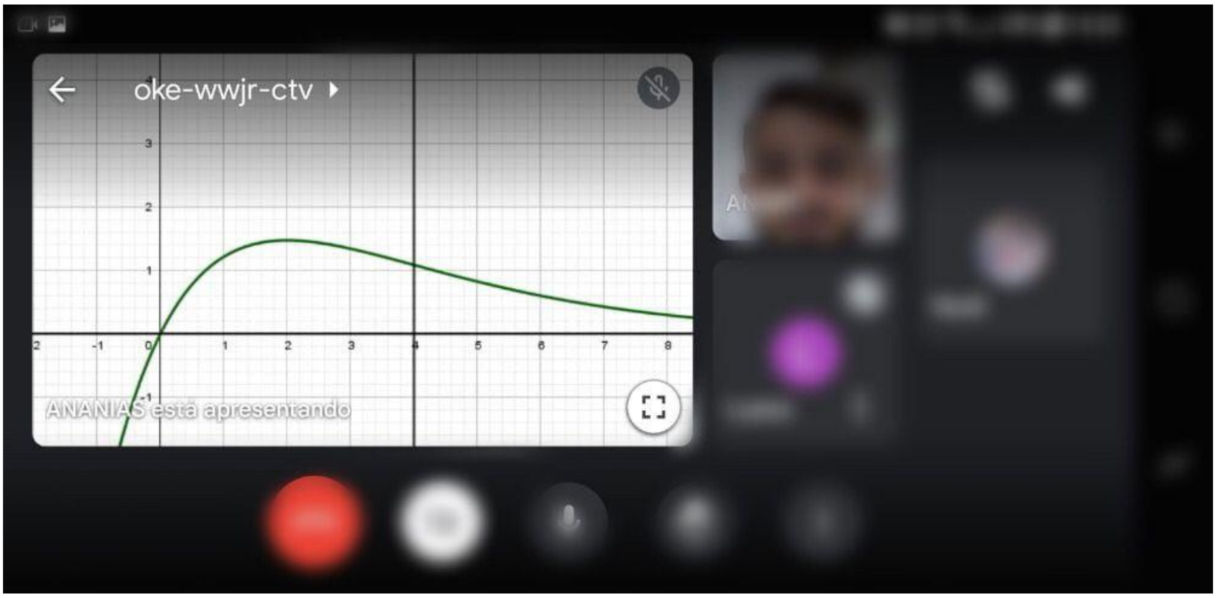
Enquanto o problema 1 propôs-se a uma compreensão apenas manipulatória da técnica de integração por partes, o segundo requeria dos estudantes uma visualização geométrica do que se pretendia construir.

Na etapa da resolução, um dos estudantes já identificava que esse tipo de problema, isto é, envolvendo áreas seria interessante utilizar o *GeoGebra* para construção do gráfico, em vez da forma manual.

Essa ação imediata é motivacional, pois observar o estudante captar informações e se comprometer a buscar ferramentas para desenvolver as resoluções mostra-se uma possível eficácia no processo que vem sendo desenvolvida com a aplicação da estratégia vigente.

Leal Junior e Onuchic (2015) expõe a relevância do problema, como um meio que possibilita os estudantes fazerem ligações com a conceituação matemática.

Figura 35: Discussão do gráfico do problema 2 via GeoGebra



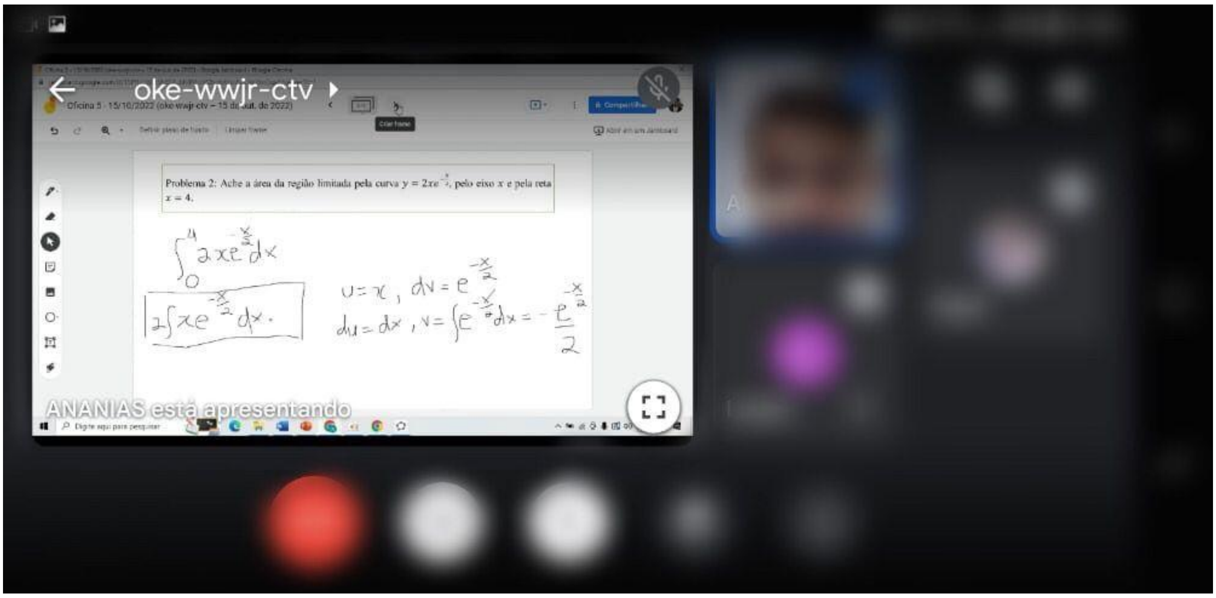
Fonte: acervo das oficinas

Interagimos com os estudantes para tal construção, sempre perguntando os passos que eles precisariam exercer para se chegar à imagem mostrada acima. Concluída a figura, aproveitamos a conversa para indagar que área interessaria a ser trabalhada.

E4 – A gente tem a área, né? Então, a gente vai calcular a integral de 0 a 4.

Vemos por essa fala que a interpretação geométrica auxilia bastante no entender das delimitações a ser consideradas para o estudo da área.

Figura 36: Resolução do problema 2 no Jamboard – Oficina 5



Fonte: Acervo das oficinas

Considerando o enunciado do problema chegou-se ao pensado pelos estudantes, conforme esboçado na figura acima, e reescrito abaixo:

$$\int_0^4 2xe^{-\frac{x}{2}}dx = 2\int_0^4 xe^{-\frac{x}{2}}dx. (i)$$

Expressado o que se pretendia com enunciado, primeiramente, foi resolvido a integral indefinida. Verificando a função integrando, ficou visível que foi preciso utilizar a integração por partes.

Assim, chamando $u = x,\ du = dx$.

Daí, $dv = e^{-\frac{x}{2}}dx$, $v = \int e^{-\frac{x}{2}}dx = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2e^{-\frac{x}{2}}$. Utilizando a fórmula, obteve-se:

$$\int xe^{-\frac{x}{2}}dx = x\cdot(-2e^{-\frac{x}{2}}) - \int -2e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$\int xe^{-\frac{x}{2}}dx = -2x\, e^{-\frac{x}{2}} + 2\int e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$\int xe^{-\frac{x}{2}}dx = -\,2xe^{-\frac{x}{2}} + 2\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}}.$$

Aplicando os limites de integração e substituindo em (i), chegou-se a:

$$2\int_0^4 xe^{-\frac{x}{2}}dx = 2\left[-2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4 = 2\left[\left(-2(4)e^{-\frac{4}{2}} - 4e^{-\frac{4}{2}}\right) - \left(-2(0)e^{-\frac{0}{2}} - 4e^{-\frac{0}{2}}\right)\right]$$

$$= 2[-8e^{-2} - 4e^{-2} + 4] = -24e^{-2} + 8.$$

Logo, a área correspondente foi dada por $-24e^{-2} + 8$.

Após a apresentação da solução, para finalizar aquela oficina informamos que seria enviado para grupo de *WhatsApp* da oficina um texto acerca da temática de Resolução de Problemas, a fim de uma discussão na oficina seguinte.

Sobre estes momentos vivenciados, em que foi trabalhado o conteúdo com a utilização de recursos tecnológicos nos fez perceber as potencialidades que estes trazem consigo. Neste caso, vimos que o Google Meet, o *GeoGebra* e o *Jamboard* proporcionaram ricas discussões e compreensões. Em suma, observando a discussão promovida através de meios como esses pudemos afirmar que o professor possui caminhos que podem contribuir de forma inovadora para a sua prática (GOMES; MOITA, 2016).

5.2.6 Episódio da sexta oficina

A oficina 6 aconteceu de forma presencial no dia 04 de novembro de 2022, em sala de aula da Universidade, campo de pesquisa. Nessa ocasião, contou-se com a participação de quatro estudantes.

Antes da realização do encontro foi solicitado via grupo de *WhatsApp*, conforme previamente informado na oficina anterior, a leitura de um texto acerca da Resolução de Problemas de autoria de Onuchic (1999), o qual retrata de forma pertinente a temática a fim de situar os estudantes no real sentido da Metodologia, considerando a importância dessa conversa tanto pensando no decorrer das oficinas, como em trabalhos futuros que estes possam vir a desenvolver.

Essa abertura de um momento para conversação acerca da estratégia de ensino se deu por dois motivos, o primeiro em decorrência dos estudantes relatarem não terem conhecimento sobre a metodologia e o segundo oferecer um acrescimento em suas estratégias para se trabalhar em sala de aula.

Para iniciar a oficina, procurou-se saber se os estudantes tinham feito a leitura solicitada. Tomando conhecimento que isso não ocorreu, foi disponibilizado os slides via Datashow para que pudessem realiza-la em classe, visando a promoção da discussão almejada.

Concernente a esse momento, que interrompia um pouco o trabalhar com os problemas para conhecer a essência do ato, os estudantes interagiam com relação os pontos que o texto abordava. Um ponto que eles comentavam ser interessante é a estratégia de ensino não se prender a apenas um ato de memorização de conceitos, mas sim a considerar o processo que os envolvidos teciam para se chegar ao desejado, independente de se chegar a solução correta.

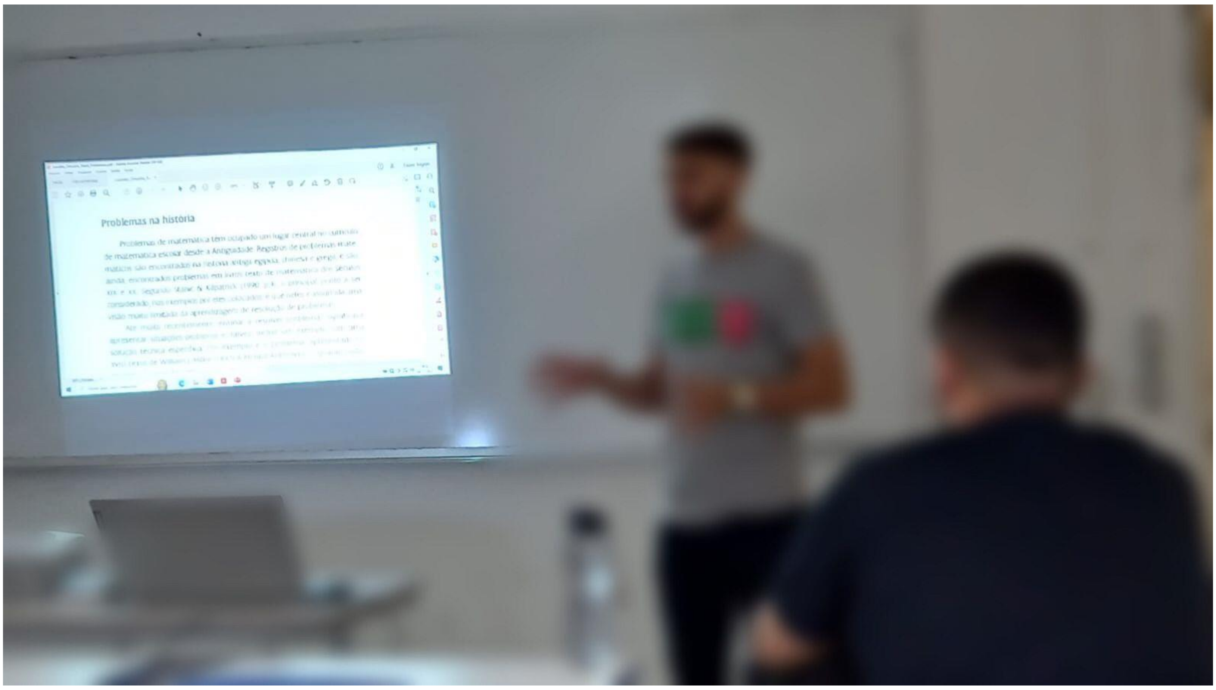
Quando era explanada acerca de características da Resolução de Problemas os estudantes comentavam sobre achar interessante a perspectiva de não entregar pronto um conhecimento, mas levar os estudantes a construírem a aprendizagem. Nesse momento, uma das estudantes interviu:

E1 – A metodologia tradicional ainda é forte.

Assim, sobre esse contexto de discussão de estratégias de ensino tradicional e disponibilizando uma metodologia diferenciada como a Resolução de Problemas, encontramos Bertotti Junior e Possamai (2021) explicitando a forma de organização de ambas as formas, enquanto a primeira foca em teoria depois exercitação, a segunda toma um problema para vivenciar um processo de ensino e aprendizagem com compreensão.

E com esse último pensamento, entendemos uma forma interessante de se trabalhar, pois vemos que ela pode contribuir para estudante enquanto construtor de seu conhecimento e o professor como alguém que conduzirá essa intermediação. A seguir, apresentamos a imagem esboçando o momento do rico diálogo que tivemos sobre a temática.

Figura 37: Discussão acerca da Metodologia Resolução de Problemas



Fonte: Acevo das oficinas

Para implementar a discussão com relação ao texto, foram feitos alguns questionamentos findando coletar as opiniões dos estudantes e saber como eles sentiam a metodologia. Nesse sentido, perguntamos, inicialmente: *O que você entende por Resolução de Problemas?*

Dois dos quatro estudantes participantes, proferiram:

E1- O que eu acho interessante é que não se preocupa só com o resultado, mas se preocupa com o processo. Então, isso faz uma diferença enorme".

E4- A Resolução de Problemas para mim é, entender como a gente pode chegar no resultado que um problema pede. Diferente de antigamente que matemática era "decorar". E hoje em dia a Resolução de Problemas traz um entendimento ao aluno, ao conhecimento, uma forma de fazê-lo entender como se chegar ao resultado, de como se dá o processo.

Estes comentários deram as oficinas um pouco de retorno quanto ao que vem sendo propostas nelas, pois é possível verificar pelo teor destas falas o quanto o estudante se sente mais motivado a buscar vivenciar seu processo, sem se preocupar com uma obrigatoriedade taxada de “certo” ou “errado”.

Acreditamos que o desenvolvimento das atividades ao longo dos encontros ocorridos começa a refletir no cerne da Resolução de Problemas, nos fazendo entender que o estudante começa a dimensionar um pouco o contexto que ele está vivenciando. Que sua conduta de resolver um problema não está fincada apenas em expressar cálculos, mas compreender uma situação imposta, isto é, que

> [...] o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas [...] (ONUCHIC, 1999, p.215).

Dessa forma, a pesquisa começa a apresentar resultados que achamos importantes para o contexto de aplicação da Resolução de Problemas, principalmente porque podemos notar o ensino e aprendizagem sendo viabilizado pela respectiva metodologia.

Ainda referente a última fala do estudante, ponderamos algumas considerações relacionadas a formatos de avaliações que confiamos ser de forma justa, ou seja, quando a forma avaliativa se propõe a tomar relevantes as estimas apresentadas pelos estudantes, em vez de desconsiderar todo um processo de solução por causa da ausência de algumas informações, como muitas vezes acontece.

Após fechar a primeira pergunta, prosseguimos na conversação, indagando: *Com base na vivência dessas oficinas e no texto lido, qual seu ponto de vista acerca do ensino da matemática através da Resolução de Problemas?*

Após propiciar uma segunda questão sobre a compreensão da metodologia, comentamos o porquê de trazer essa reflexão só em meados das oficinas, e não no início. Como foi destacado, em vez de já expressar muito o que essa metodologia tinha em sua ótica, resolveu permitir que os estudantes vivenciassem na prática e só então quando estes tivessem sentido um pouco disso poder dizer o que pensam a respeito.

Algumas das respostas deixou um ar de motivação como o quanto a metodologia pode ser contribuinte, como da estudante E1, observe:

E1- Eu acho que colaborou porque fez a gente voltar né? Voltar lá no Cálculo I e ver algumas coisas do Cálculo I, por exemplo, aqueles negócios de velocidade. Alguns conhecimentos que a gente tinha. Aí juntou os conhecimentos que a gente tinha com os que não tinha.

Uma outra fala curiosa, foi a do estudante E4, que além de comentar sobre eficácia da metodologia enfatizou que através das oficinas foi possível sanar dúvidas e acrescer o conhecimento:

E4 - A gente está conseguindo tirar muitas dúvidas a partir das oficinas, a gente teve a prova né? E eu nem estudei, mas aí eu conseguir tirar uma nota boa, então, tipo assim o método de Resolução de Problemas é muito eficaz, me ajudou bastante.

O breve debate travado acerca do texto foi bastante produtivo, pois os estudantes mostravam-se situar-se e sentir mais à vontade conhecendo um pouco da metodologia que eles aplicavam, em que eles exprimiam o sentimento de estar trabalhando sob a perspectiva.

Além disso, as falas nos comovem porque traz uma motivação quanto a relevância de trabalhar com a Resolução de Problemas, recaindo na consideração de Leal Junior e Onuchic (2015), quando falam que esta metodologia modifica as convicções que possuímos da Matemática, nos impulsionando a reflexões acerca de nossa conduta enquanto construtor de um conhecimento.

Depois do momento dialético, apresentamos o problema a ser trabalhado no encontro. Sendo assim, ao sanar e verificar que os estudantes tinham visto a técnica de funções racionais por frações parciais, foi proposto um problema que visava aprofundar um pouco mais a utilização do método, bem como envolvesse outra área de conhecimento, neste caso, uma aplicação na modelagem matemática.

Problema 1 (Oficina 6): Um lago pode ter no máximo 10 000 peixes, de forma que a taxa de crescimento dos peixes é conjuntamente proporcional ao número de peixes presentes e à diferença entre 10 000 e o número presente. O lago contém inicialmente 400 peixes e 6 semanas depois havia 3 000 peixes. Determine a equação que dá a população de peixes no lago em função do tempo.

Nessa situação, pôde-se observar que os estudantes iniciavam o processo de resolução sem se ater aos conceitos de Cálculo, executando raciocínios operatórios, mais precisamente associando a ideia de proporções presente na situação.

Em uma leitura grupal, eles buscavam informações que os auxiliassem na montagem da solução, identificando informações que os levavam pensar na utilização da regra de três simples. Isto foi iniciado quando feito uma releitura, em que um dos estudantes exprimiu:

E4: tem esse negócio aqui, conjuntamente proporcional.

Ao notar que após esta fala os estudantes começaram a discutir sobre o fato do que significava conjuntamente proporcional, tentamos intervir buscando fazê-los resgatarem conhecimentos prévios como é o caso de grandezas, estudados lá no Ensino Médio, tecendo alguns comentários que pudessem ser precisos quanto ao almejado.

Observado que o grupo se mostrava desmotivado quanto ao prosseguimento da resolução, foi feita a leitura do problema para os estudantes a fim de proporcionar o surgimento de alguma ideia na mente deles. Isto na tentativa de eles conseguirem chegar a alguma expressão que o fizessem ter conclusões.

Passados alguns minutos a estudante E1 fez algumas observações que envolvia proporções, dizendo sobre o crescimento de 2600 peixes em 6 semanas e o que deviam procurar saber era em quantos semanas teriam dez mil peixes. Em relação a esse pensamento, teve-se a ponderação de um dos estudantes:

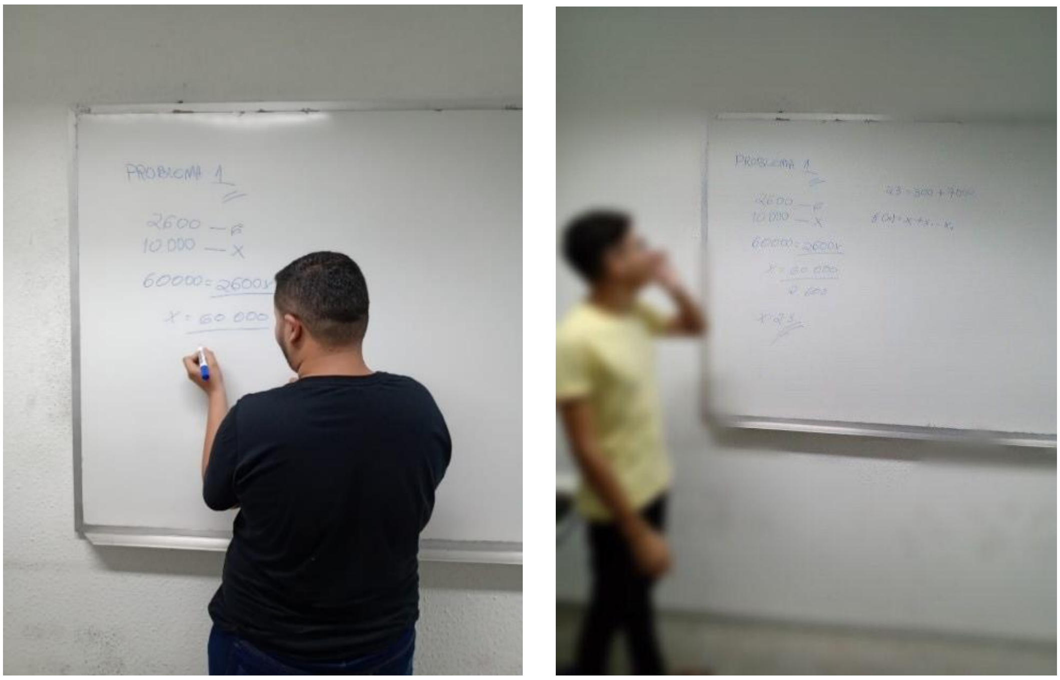
E7- A gente não quer o cálculo, a gente tem que descobrir uma função que ...

E1 – Eu sei, mas se eu soubesse o cálculo, a função seria mais fácil em minha cabeça.

Este diálogo leva a percepção de uma busca de uma junção de conceitos aritméticos para se poder fazer uma generalização.

O grupo então chegou à conclusão do que a estudante E1 tinha ponderado, expondo essa solução no quadro, quando chegada essa etapa.

Figura 38: Explanação do Problema 1 no quadro – Oficina 6



Fonte: Acervos das oficinas

Na fase de se trabalhar o consenso, aproveitamos o que fora pensado pelos estudantes, no que concerne à compreensão de proporções. Tomando como base a forma como os estudantes desenvolveram o problema nos fez lembrar da fala de Assis e Huanca (2016, p.8) expressando que:

> [...] ensinar através de Resolução de Problemas confere ao aluno a autonomia para escolher, da melhor forma, as estratégias que irá adotar em uma atividade; ele não necessita seguir os passos que o professor sugerir. O aluno tem liberdade sobre o método de resolver.

Por isso, quando for feito o momento de apresentação da resolução pelo professor é sempre importante tentar visualizar qualquer informação que for cabível, valorizando assim o que foi executado pelos estudantes. Feito esta ponderação a respeito de uma das características da Resolução de Problemas, apresentaremos a resolução do respectivo problema na sequência.

Seja $F(t)$ a função que representa a quantidade de peixes existentes no lago em relação ao tempo. A equação, em termos de derivada, que representa a taxa de crescimento dos peixes de forma proporcional tanto ao número de peixes presentes no lago e a diferença entre 10000 e essa quantidade será dada por:

$$\frac{dF}{dt} = kF(10000 - F),$$

em que k é uma constante de proporcionalidade.

Comentamos que para encontrar a função F bastava que fosse feito uma organização na equação descrita acima, de modo que fosse possível aplicar a integral em ambos os lados da igualdade, como apresentado a seguir:

$$\frac{dF}{F(10000 - F)} = kdt.$$

Daí, fizemos,

$$\int \frac{dF}{F(10000 - F)} = \int kdt \;\; \Rightarrow \;\; \int \frac{dF}{F(10\,000 - F)} = kt + C.(*)$$

Destacamos que para desenvolver a integral do primeiro membro da equação expressada em (*) necessitava-se escrever a fração na função integrando:

$$\frac{1}{F(10\,000 - F)} = \frac{A_1}{F} + \frac{A_2}{(10\,000 - F)}.(**)$$

Com isso, resolvendo,

$$\frac{1}{F(10\,000 - F)} = \frac{A_1}{F} + \frac{A_2}{(10\,000 - F)} \;\; \Rightarrow \frac{1}{F(10\,000 - F)} = \frac{A_1(10\,000 - F) + A_2F}{F(10\,000 - F)}$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{F(10\,000 - F)} = \frac{10\,000A_1 - A_1F + A_2F}{F(10\,000 - F)} = \frac{10\,000A_1 + (-A_1 + A_2)F}{F(10\,000 - F)}$$

E igualando os coeficientes, encontramos

$$\begin{cases} 10\,000A_1 = 1 \\ -A_1 + A_2 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $A_1 = \frac{1}{10\,000}$ e $A_2 = A_1 = \frac{1}{10\,000}$.

Voltando a integral em (**), foi feito as seguintes manipulações:

$$\int \frac{dF}{F(10\,000 - F)} = \int \frac{\frac{1}{10\,000}}{F} dF + \int \frac{\frac{1}{10\,000}}{10\,000 - F} dF$$

$$= \frac{1}{10\,000} \int \frac{1}{F} dF + \frac{1}{10\,000} \int \frac{1}{10\,000 - F} dF$$

$$\int \frac{dF}{F(10\,000 - F)} = \frac{1}{10\,000} \ln |F| - \frac{1}{10\,000} \ln|10\,000 - F|$$

$$= ln|F|^{\frac{1}{10\,000}} - \ln\ |10\,000 -\ F|^{\frac{1}{10\,000}}$$

$$\int \frac{dF}{F(10\,000 - F)} = \ln \left|\frac{F}{10\,000 - F}\right|^{\frac{1}{10\,000}} = \frac{1}{10\,000} \ln \left|\frac{F}{10\,000 - F}\right|. \ (***)$$

Substituindo (***) em (*), obtemos:

$$\frac{1}{10\,000} \ln \left|\frac{F}{10\,000 - F}\right| = kt + C \Longrightarrow ln \left|\frac{F}{10\,000 - F}\right| = 10\,000\, kt + 10\,000C$$

$$\left|\frac{F}{10\,000 - F}\right| = e^{10\,000\, kt + 10\,000C} \Rightarrow \frac{F}{10\,000 - F} = \pm e^{10\,000\, kt} e^{10\,000\, C}.$$

Chamando $C_1 = \pm e^{10\,000\, C}$, teremos:

$$\frac{F}{10\,000 - F} = C_1 e^{10\,000\, kt}. \ (****)$$

Encontrando as constantes C_1 e k. Como para o valor inicial $t = 0$, teremos o número de peixes F=400. Assim,

$$\frac{400}{10\,000 - 400} = C_1 e^{10\,000\, k(0)} \Rightarrow \ \frac{400}{9\,600} = C_1 \ \Rightarrow C_1 = \frac{1}{24}.$$

Como, para $t = 6$ semanas, teremos 3 000 peixes, obteremos:

$$\frac{3\,000}{10\,000 - 3\,000} = \frac{1}{24} e^{10\,000\, k(6)} \Rightarrow \frac{3\,000}{7\,000} = \frac{1}{24} e^{60\,000\, k}$$

$$\Rightarrow e^{60\,000\, k} = \frac{72}{7}.$$

Aplicando a propriedade de logaritmo, encontrou-se:

$$lne^{60\,000\, k} = ln\frac{72}{7} \ \Rightarrow 60\,000\, k = \ ln\frac{72}{7} \ \Rightarrow 10\,000\, k = \frac{1}{6} ln\frac{72}{7}$$

Portanto, substituindo em (****), chegou-se a equação desejada.

$$\frac{F}{10\,000 - F} = \frac{1}{24} e^{\frac{1}{6}t\, ln\frac{72}{7}} \Rightarrow \frac{F}{10\,000 - F} = \frac{1}{24} e^{ln\frac{72}{7}^{\frac{t}{6}}}$$

$$\frac{F}{10\,000 - F} = \frac{1}{24}\left(\frac{72}{7}\right)^{\frac{t}{6}}.$$

Sobre essa solução, os participantes das pesquisas ponderaram ser um processo que eles desconheciam totalmente. Essa reflexão foi levada em consideração para um segundo problema envolvendo a técnica repassado como exercício extra oficina para ser trabalhado no encontro posterior, partindo da percepção de que os estudantes ainda estavam em um conhecimento muito básico da técnica.

Nesse ponto, a Resolução de Problemas mostra-se bem clara, quando exprime que "[...] o docente necessita trabalhar na formulação da proposta do problema, levando em consideração o potencial do estudante e seus conhecimentos adquiridos a *priori*, o que lhe permitirá construir a própria aprendizagem" (LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2015, p. 963).

A optação por deixar o problema para o encontro posterior deu-se por conta do horário, alguns estudantes participantes não residiam na cidade do campus onde está sendo o funcionamento das oficinas presenciais e precisavam fazer o deslocamento.

5.2.7 Episódio da sétima oficina

A oficina sete e última ocorreu de forma presencial no dia 16 de dezembro de 2022. Contou-se com a participação de quatro estudantes.

Em primeiro momento, foi conversado com os alunos acerca de um problema que tinha sido solicitado para resolução após a última oficina, em que a proposta era ser desenvolvido nesta, o qual fora disponibilizado no grupo de *WhatsApp*. Em respostas, os estudantes disseram não ter tentado a busca por solucioná-lo.

Diante disso, buscamos articular uma resolução fazendo questionamentos que pudesse resgatar dos estudantes algumas informações que fossem úteis no processo, tendo em vista que o assunto do problema já ter sido trabalhado pelo professor da disciplina. Observe essa situação, descrita na sequência.

Problema 2 (Oficina 6): Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de tal forma que se v m/s for a velocidade após t s, então

$$v = \frac{t+3}{t^2 + 3t + 2}.$$

Ache a distância percorrida pela partícula desde o instante em que t = 0 ao instante em que t = 2.

Este problema consistia em destacar a interpretação da integral definida como o cálculo de distância. Almejou-se enfatizar o abordado por Stewart (2013), em que há uma consideração de um objeto em movimento no sentido positivo que pode ser conjecturado como “a área sob a curva da velocidade é igual à distância percorrida”.

Como primeira pergunta, buscou-se saber se ao olhar para o problema era possível destacar a associação a resolução por algum conteúdo. Uma das estudantes respondeu *“por frações parciais”*. Elogiamos o comentário.

Nesse enfoque, tentamos, em primeiro momento, verificar se o fato de o problema falar sobre velocidade significava algo para eles, obtendo uma resposta sobre associação com derivadas. Expôs assim as primeiras informações nos slides:

Partindo dos conhecimentos de derivada concluímos juntamente com estudantes uma das notações de velocidade em termos de derivadas $v = \frac{ds}{dt}$. Com isso, reescrevemos a expressão do enunciado do problema como:

$$ds = \frac{t+3}{t^2+3t+2}dt.$$

Comentando sobre como seria possível voltar a expressão s, foi considerado que precisávamos trabalhar a ideia de primitiva, isto é, usando a manipulação de aplicação da integral, neste caso em ambos os membros da expressão, ficando:

$$\mathrm{s} = \int \frac{\mathrm{t}+3}{\mathrm{t}^2+3\mathrm{t}+2}\mathrm{dt}.$$

Ao saber dos estudantes o que fazer na sequência, foi comentado a necessidade de encontrar as raízes do denominador da expressão fracionária, cuja era a função integrando e logo depois a busca por encontrar as constantes. Nesse sentido, fizemos o reconhecimento da necessidade da aplicação da técnica por frações parciais, resultando:

$$\frac{\mathrm{t}+3}{\mathrm{t}^2+3\mathrm{t}+2} = \frac{\mathrm{t}+3}{(\mathrm{t}+1)(\mathrm{t}+2)} = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{t}+1} + \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{t}+2}.$$

Por conseguinte, os estudantes afirmaram que na sequência precisava-se buscar as constantes:

$$\frac{\mathrm{t}+3}{\mathrm{t}^2+3\mathrm{t}+2} = \frac{\mathrm{A}_1(\mathrm{t}+2)+\mathrm{A}_2(\mathrm{t}+1)}{(\mathrm{t}+1)(\mathrm{t}+2)} = \frac{\mathrm{tA}_1+2\mathrm{A}_1+\mathrm{tA}_2+\mathrm{A}_2}{(\mathrm{t}+1)(\mathrm{t}+2)}$$

Eliminar os denominadores:

$$t+3 = tA_1 + 2A_1 + tA_2 + A_2$$

$$t+3 = (A_1+A_2)t + (2A_1+A_2)$$

Igualar termo a termo:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 2A_1 + A_2 = 3 \end{cases}$$

Daí, resolvemos então o sistema, encontrando $A_1 = 2$ e $A_2 = -1$. Depois substituímos na expressão original:

$$\frac{t+3}{t^2+3t+2} = \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t+2}.$$

Aplicando a integral em ambos os membros, encontramos:

$$\int \frac{t+3}{t^2+3t+2}dt = \int \frac{2}{t+1}dt - \int \frac{1}{t+2}dt = 2\ln|t+1| - \ln|t+2| + C$$

$$= \ln|t+1|^2 - \ln|t+2| + C$$

$$= ln\frac{(t+1)^2}{|t+2|} + C.$$

Os estudantes foram indagados se o problema pararia na última resposta, os quais destacaram a necessidade de encontrarem o cálculo da distância. E, então resolvemos:

Para $t = 2 \implies ln\frac{(2+1)^2}{|2+2|} + C = ln\frac{9}{4} + C.$

Para $t = 0 \implies ln\frac{(0+1)^2}{|0+2|} + C = ln\frac{1}{2} + C.$

Logo, ficou concluído que para achar a distância far-se-ia

$$S(2) - S(0) = ln\frac{9}{4} - ln\frac{1}{2} = ln\frac{9}{2},$$

deixando claro o que se pretendia com o problema

Após toda essa construção de um problema relacionado a uma técnica em oficina anterior e antes mesmo de iniciar a apresentação do primeiro problema para aquele encontro, orientamos mais uma vez que os estudantes buscassem a construção das soluções dos problemas de maneira livre sem se prender a um assunto específico.

Problema 1 (Oficina 7): Um tanque de armazenamento de água tem a forma de um cilindro com diâmetro de 10 m. Ele está montado de forma que as secções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 m, qual a porcentagem da capacidade total usada?

Nesse problema inicial, buscamos promover nos estudantes uma visão geométrica do problema para só então partir para o algebrismo. Instigamos os estudantes a procurarem elaborar a solução da forma como lhes convinham, mas eles demonstravam estar sem ideias.

Um dos primeiros pensamentos do grupo I, após fazerem a leitura entre eles, foi focar em uma expressão contida no enunciado do problema *"secções transversais circulares"*. Ambos começavam a raciocinar sobre o formato do círculo que se tinha no cilindro, destacando independente fazendo uma associação com o diâmetro fornecido na questão.

Ao notar essas discussões, pedimos que lessem de novo problema e atentamos para essa presença do informe do diâmetro no enunciado, indagando se aquilo tinha algum significado para eles, se remetia a algum fato. Foi então sugerido que eles utilizassem o *GeoGebra* a fim de obterem uma visualização mais precisa.

Para a construção, eles precisariam lembrar da expressão algébrica que corresponde a uma circunferência, os quais de imediato mostravam-se alheios de como se dava esse formato. Ao dialogar com eles lembravam-se do comprimento da circunferência, mas na continuidade da conversa conseguiram assimilar a equação.

Pesquisador: Envolve o x e o y, a expressão.

E4- Seria r igual a raiz de x mais y?

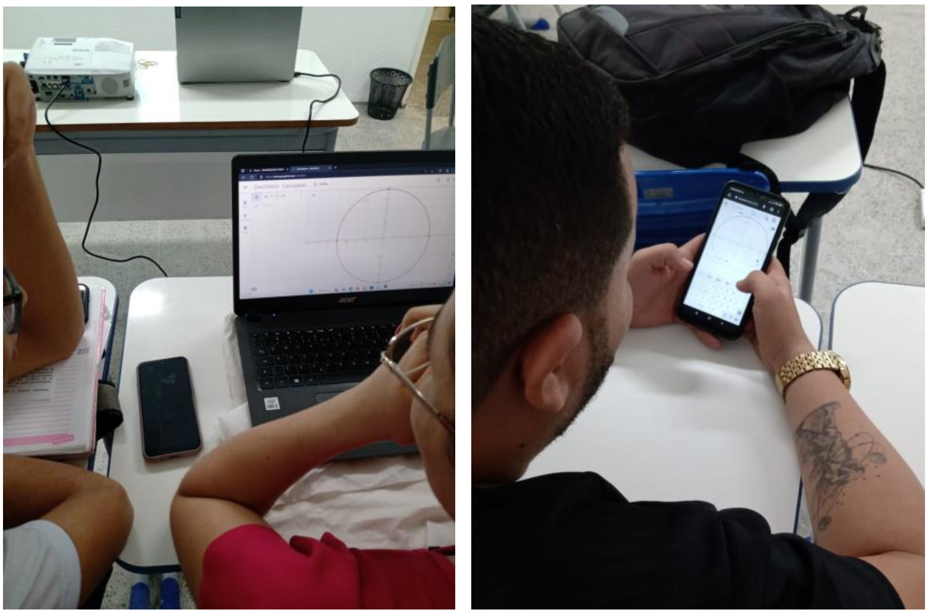
Os estudantes martelaram um pouco, destacando ter raiz envolvido. Ao tentar possibilitá-los uma possível lembrança, sugerimos que analisassem essa expressão falada por eles, se formariam um círculo. Quando notaram que não, indagamos sobre o que eles necessitariam escrever no comando do *GeoGebra* para gerar uma circunferência. Então uma estudante disse:

E3 – precisaria ser ao quadrado né?

Com essa fala começaram a descrever isso, concluindo a equação que precisariam e assim conseguiram a expressão, construindo a figura.

Enquanto o grupo 1 conseguiu captar a ideia depois de uma conversação com eles, tentamos instigar o grupo 2, o qual demorou um pouco mais perceber essa presença do círculo no problema. A seguir, mostramos a execução dessas informações no *software* matemático *GeoGebra*.

Figura 39: Construção do Círculo no GeoGebra

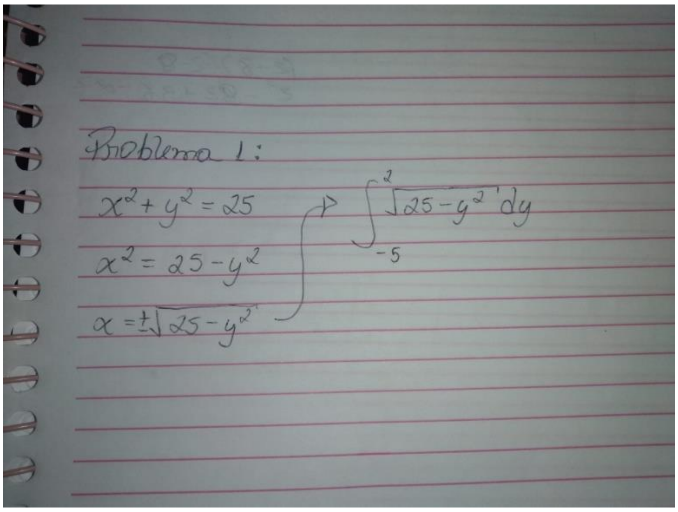


Fonte: Acervo das oficinas

Depois de feito o desenho os alunos foram incitados a tentar pensar na continuidade da resolução. Como eles observaram que se tratava de um reservatório podia-se trabalhar a ideia de área da região do círculo até a determinada delimitação.

Eles entenderam as delimitações dos problemas e conseguiram enxergar uma via que seria usar o estudo da integral definida, achando os limites de integração. Continuaram tentando resolver, mas chegaram a um ponto que disseram não desejar continuar, desse modo, encerramos o processo de resolução. A solução até o procedimento que eles conseguiram fazer pode ser visto na figura a seguir.

Figura 40: Desenvolvimento do Problema 1 – Oficina 7

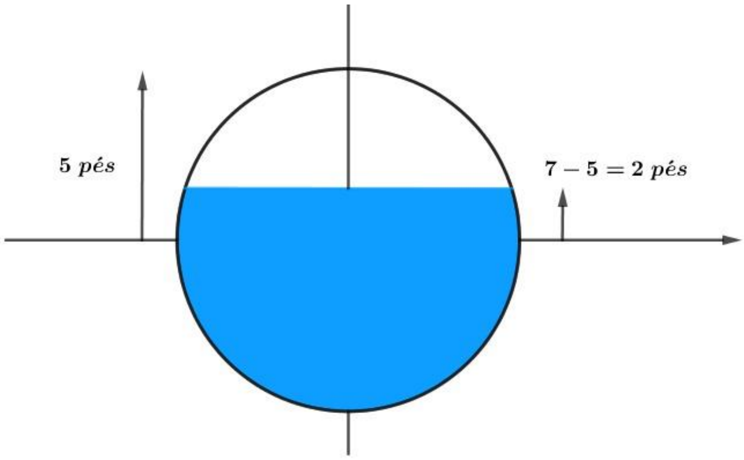


Fonte: Acervo das oficinas

Diante desse fato, devemos ser conscientes de que essa perspectiva de ensino e aprendizagem não se exige que os estudantes resolvam a todo o custo os problemas, mas que a eles seja dado condições para essa ocorrência, pois como expressam Leal Junior e Onuchic (2015) o foco principal reside no que foi produzido pelos envolvidos, destacando assim conceitos que eles utilizaram para tal construção, e não a resposta em si.

Partindo desse contexto, atentamos para iniciar as informações, com isso apresentamos o gráfico que eles tinham construído:

Figura 41: Gráfico do problema 1 – Oficina 7



Fonte: Elaborado pelo autor

Em conversa com os estudantes, foi percebido que o problema desejava determinar a porcentagem da área do círculo descrito na figura acima, tendo em vista que a área ocupada correspondia a mesma do volume. Assim, para ser calculado a área foi dito que seria necessária uma função integrando, no caso, usar a expressão que descreve o círculo deixando-a como uma expressão explícita, como pode ser mostrada abaixo,

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25 - y^2},$$

Ou ainda, enunciada como:

$$f(y) = \sqrt{25 - y^2}.$$

Daí, chegamos a uma compreensão juntamente com os estudantes que a função a ser considerada para integrar iria até a altura do volume, isto é, tendo como limites de integração $y = -5$ e $y = 2$. Sobre esse início do desenrolar da resolução, uma estudante comentou que imaginava ter algum detalhe que ela achava que levaria ela a ter essa percepção inicial.

Continuando então a resolução, como tratava-se de duas partes no gráfico, obtivemos:

$$2\int_{-5}^{2}\sqrt{25-y^2}\,dy.$$

Entre conversas com os estudantes, deixamos nítido a necessidade de trabalhar primeiramente a integral indefinida para só depois aplicar os limites de integração. Fleming e Gonçalves (2006), evidenciam este fato ao longo de algumas resoluções envolvendo integral definida.

Visualizando a forma como as autoras trabalham o processo de integração, percebemos algo bem interessante, pois acreditamos que além de deixar as manipulações matemática de uma maneira bem detalhada, ainda ajuda para que o estudante não se perca durante o seu desenvolvimento.

Continuando, fizemos uma alusão a necessidade do uso da substituição trigonométrica envolvendo $\sqrt{a^2-x^2}$, aplicando logo em seguida.

$$y = 5\,\mathrm{sen}\,\theta \;\Rightarrow dy = 5cos\theta d\theta$$

$$2\int\sqrt{25-y^2}dy = 2\int\sqrt{25-25sen^2\theta}\,(5cos\theta)d\theta = 2\int\sqrt{25(1-sen^2\theta)}\,(5cos\theta)d\theta$$

Tomando-se $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$,

$$2\int\sqrt{25(1-sen^2\theta)}\,(5cos\theta)d\theta = 2\int\sqrt{25cos^2\theta}(5cos\theta)d\theta$$

$$= 2\int 25cos^2\theta d\theta = 50\int cos^2\theta d\theta\;(*)$$

Considerando a substituição trigonométrica:

$$cos^2\theta = \frac{1}{2}+\frac{cos2\theta}{2}$$

Substituindo em (*), chegamos a:

$$50\int cos^2\theta d\theta = 50\int\left(\frac{1}{2}+\frac{cos2\theta}{2}\right)d\theta = 50\left(\int\frac{1}{2}d\theta+\int\frac{cos2\theta}{2}d\theta\right)$$

$$= 50\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\frac{sen2\theta}{2}\right) = 50\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{sen2\theta}{4}\right).$$

Os estudantes foram lembrados de uma expressão para $sen2\theta$ que corresponde a $sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$. Nesse instante, fizemos uma ponderação quanto a necessidade de lembrar das identidades trigonométricas. Com isso, gerou-se:

$$50\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{sen2\theta}{4}\right) = 50\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{2sen\theta cos\theta}{4}\right).\;(**)$$

Encontrando θ em função de y:

$$y = 5sen\theta \Longrightarrow sen\theta = \frac{y}{5} \Longrightarrow \theta = arcsen\left(\frac{y}{5}\right)$$

Depois encontrando $cos\theta$ em função de y:

$$cos\theta = \sqrt{1 - sen^2\theta} \Rightarrow cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{5}\right)^2} \Rightarrow cos\theta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{25}}$$

$$cos\theta = \sqrt{\frac{25 - y^2}{25}} \Rightarrow cos\theta = \frac{\sqrt{25 - y^2}}{5}.$$

Assim, encontramos:

$$50\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{2sen\theta cos\theta}{4}\right) = 50\left(\frac{1}{2}arcsen\left(\frac{y}{5}\right) + \frac{2\frac{y}{5}\frac{\sqrt{25 - y^2}}{5}}{4}\right)$$

$$50\left(\frac{1}{2}arcsen\left(\frac{y}{5}\right) + \frac{2(y\sqrt{25 - y^2})}{100}\right) = 25arcsen\left(\frac{y}{5}\right) + y\sqrt{25 - y^2}.$$

Substituindo os limites de integração y=-5 e y=2, resultou em:

$$2\int_{-5}^{2} \sqrt{25 - y^2}\, dy$$

$$= \left[25arcsen\left(\frac{2}{5}\right) + 2\sqrt{25 - 2^2}\right] - \left[25arcsen\left(\frac{-5}{5}\right) + (-5)\sqrt{25 - (-5)^2}\right]$$

$$= 25arcsen\left(\frac{2}{5}\right) + 2\sqrt{21} - 25arcsen(-1).$$

Como $arcsen\left(\frac{2}{5}\right)$ =0,41151..., $\sqrt{21}$ =4,58257... e $arcsen(-1)$ =-1,57079..., a área ocupada pela água expressou-se como:

$$25arcsen\left(\frac{2}{5}\right) + 2\sqrt{21} - 25arcsen(-1)$$

$$= 25(0{,}41151...) + 2(4{,}58257...) - 25(-1{,}57079...) \cong 58{,}7.$$

Para calcular a porcentagem que corresponde a quantidade de área expressa no enunciado do problema, usamos esse valor sobre a área total, que é $A = (5)^2\pi = 25\pi$.

Com isso, $\frac{58,7}{25\pi} = \frac{58,7}{78,54} = 0{,}748 = 74{,}8\%$.

O desenrolar deste primeiro problema proporcionou um conjunto de informações para os estudantes, os quais puderam retomar alguns conceitos trigonométricos muito úteis para aplicabilidade.

Necessitamos ser conscientes de que nessa vertente de ensinar através da Resolução de Problemas novos conceitos precisam ser concebidos mediante o trabalhar com um problema proposto (GONÇALVES, 2019). Mesmo que por vezes a resolução de um problema não ocorra, mas precisamos oferecer artifícios que venham a contribuir para que uma maturidade venha a existir e possa favorecer desenvolvimentos futuros.

Problema 2 (Oficina 7): Calcule a integral indefinida $\int \frac{dz}{(z^2-6z+18)^{\frac{3}{2}}}$.

Após a exposição de toda a solução do problema anterior e formalização para os casos em que se pode dispor da substituição trigonométrica, esta segunda situação tinha finalidade de trabalhar nos estudantes a ideia da manipulação matemática recaindo em um dos casos mostrados anteriormente.

Depois dos passos inicias, leitura individual à solicitação da resolução do problema, deu-se início a uma observância do empenho das equipes. Nesse momento, identificou-se os estudantes demonstrarem dificuldades em pensar em alguma estratégia para ligar alguma informação e consolidar algum resultado. Assim, buscamos motivar os licenciandos a observarem a expressão que se encontrava dentro dos parênteses, mas eles alegavam nada perceberem que pudesse ser feito.

Mesmo os estudantes não terem conseguido realizar procedimentos para a resolução do problema, optamos por promover indagações para que se pudesse resolver, em vez de apenas apresentar a solução. Dessa forma, inquirimos se os estudantes conseguiam enxergar se seria possível exprimir a expressão dada no denominador em alguns dos casos que se trabalha substituição trigonométrica, como foi apresentado anteriormente.

Observando uma não visualização do problema, apontamos o caso $\sqrt{a^2+x^2}$. Ainda não obtendo uma reação dos estudantes, quanto ao passo seguinte, realizamos a manipulação matemática, até se chegar onde desejava usar o caso pretendido, como mostrada a seguir:

$$\int \frac{dz}{(z^2-6z+18)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dz}{[z^2-6z+9+9]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dz}{[(z-3)^2+9]^{\frac{3}{2}}}.$$

Para saber se havia sido compreendido a manipulação efetuada, foi feito o seguinte questionamento acerca da última expressão acima:

Pesquisador: Por quê se usamos o 3 em $(z-3)^2$*?*

E1- Porque 3^2 *fica 9.*

Puxando o gancho da conclusão, fizemos fechamos a ideia do artifício utilizado para se chegar a respectiva expressão.

Prosseguindo, fizemos $z - 3 = 3tg\theta \Longrightarrow z = 3tg\theta + 3,\ dz = 3sec^2\theta d\theta$. Com isso, chegamos a:

$$\int \frac{dz}{[(z-3)^2+9]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dz}{[(3tg\theta)^2+9]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dz}{[9tg^2\theta+9]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nessa parte os estudantes começavam a demonstrar alguma relação com o problema anterior. Foi quando perguntamos qual das relações trigonométricas poderíamos utilizar na respectiva situação, a estudante respondeu:

E1- $tg^2\theta + 1 = sec^2\theta$.

Apreciamos a resposta, pois entendemos que é muito importante quando há uma recordação de conhecimentos necessários para aprendizados posteriores. Continuando, fizemos:

$$\int \frac{dz}{[9tg^2\theta+9]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dz}{(9sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{3sec^2\theta d\theta}{27sec^3\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{sec\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int cos\theta d\theta = \frac{1}{9} sen\theta + C.\ (*)$$

Ressaltamos que mesmo os estudantes não terem persistido na solução, mas quando feito perguntas eles buscavam apresentar alguma consideração. Pontuamos aqui o quanto é relevante que estejamos, enquanto mediadores nesse processo, assumindo posturas em relação ao nosso trabalho como alega Onuchic e Allevato (2011), pois não devemos simplesmente oferecer algo pronto de acabado aos estudantes, mas sim buscar estratégias de impulsioná-los para que estes venham a aprender o almejado.

Dando continuidade, comentamos que era necessário encontrar o $sen\theta$ em função de z. Nessa vertente, fez-se $z = 3tg\theta + 3$, que é equivalente a:

$$z = 3\frac{sen\theta}{cos\theta} + 3 \Longrightarrow zcos\theta = 3sen\theta + 3cos\theta$$

$$zcos\theta - 3cos\theta = 3sen\theta \Longrightarrow sen\theta = \frac{(z-3)cos\theta}{3} (**)$$

Usando uma outra relação fundamental, no caso $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, fizemos:

$$\left(\frac{(z-3)cos\theta}{3}\right)^2 + cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \frac{(z-3)^2cos^2\theta}{9} + cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{(z-3)^2}{9} + 1\right)cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \frac{(z-3)^2+9}{9}cos^2\theta = 1$$

$$cos^2\theta = \frac{9}{(z-3)^2+9} \Longrightarrow cos\theta = \frac{3}{\sqrt{(z-3)^2+9}}.$$

Substituindo em (**), encontramos:

$$sen\theta = \frac{(z-3)cos\theta}{3} = \frac{(z-3)\frac{3}{\sqrt{(z-3)^2+9}}}{3} = \frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+18}}.$$

Substituindo $sen\theta$ em (*), obtivemos:

$$\int \frac{dz}{(z^2-6z+18)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9}\frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+18}} + C.$$

Sabemos que na Resolução de Problemas é necessário que estejamos sempre preparados para diversas situações, enquanto professores mediadores nesse processo. Raciocinamos que embora haja a possibilidade de os estudantes não concluírem o solucionamento de um problema, mas devemos auxiliar nas dificuldades para que isso não venham calhar com um empecilho para a desenvoltura do aprendizado como sugerem Leal Junior e Onuchic (2015).

Construído o processo de resolução, conduzimos a oficina a um momento final com relação a todos os momentos vivenciados durante o período de execução das atividades proposta, visando verificar considerações gerais das oficinas, expondo as experiências principalmente no sentido do partir de um problema para compreender conceitos.

Diante de tantos aspectos curiosos ao trabalharmos através da Resolução de Problemas citamos um que é notório, trata-se de que "a fonte inicial e principal dos problemas é o fato de que, permanentemente o problema coloca desafios para o homem e ele responder, com sua inteligência, sua capacidade de abstração e intuição" como explica Huanca, Silva e Souza (2021, p.11).

E sem dúvidas enxergamos esta característica como algo condutor em um processo que se deseja promover ensino e aprendizagem, pois nesta direção estaremos proporcionando aos estudantes trilhar um caminho de uma construção sólida.

Concernente aos problemas desta última oficina, escolhemos alguns mais avançados levando em consideração que os estudantes já tinham visto a técnica de integração por substituição trigonométrica, mas notamos que houveram muitas dificuldades. No entanto, buscamos contribuir para que possíveis dúvidas fossem sanadas e findassem nosso percurso traçado de maneira bem proporcionada.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa objetivou estudar as Técnicas de Integração através da Metodologia de Resolução de Problemas com a utilização de recursos tecnológicos. Pensamos nesta proposta visando trazer contribuições significativas para o contexto do ensino do Cálculo, mais precisamente o integral.

Para que pudéssemos nos orientar ao longo dessa construção criamos a seguinte pergunta norteadora: De que maneira a Metodologia de Resolução de Problemas com auxílio de recursos tecnológicos pode contribuir para o ensino e aprendizagem das Técnicas de Integração com compreensão?

Buscamos no decorrer do estudo conduzir os estudantes através da Resolução do Problemas na tentativa de contribuir no ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, pudemos apreciar e vivenciar experiências marcantes que podem ter sido úteis para os estudantes quanto para pesquisadores que venham a ler o trabalho.

Um primeiro aspecto observado de forma assídua durante todos os encontros trata-se da insegurança dos estudantes no processo de resolução de problemas. Este fato ficou evidente, pois de acordo com a postura dos estudantes percebemos um hábito comum de recepcionar conteúdos para só então aplicar em exercícios.

Nessa vertente, a Resolução de Problemas trouxe um formato de estudo que não só se constituiu como algo novo para os estudantes, mas também bastante desafiador. Ressaltamos que essa metodologia faz com que saiamos da zona de conforto, pois as vezes apenas repassamos conteúdos, algo que se mostrou muito oportuno e enriquecedor ao longo do estudo.

Um segundo ponto muito pertinente na pesquisa foi a contribuição que os recursos tecnológicos proporcionaram. Destacamos que alguns problemas dispuseram dessas tecnologias e que isso resultou em possibilidades cruciais para a aprendizagem almejada, tais como a interação entre os participantes com o uso do *Jamboard*, nas oficinas virtuais a visualização de detalhes primordiais dos problemas com o *GeoGebra*, que muitas vezes de forma manual não poderia ser percebido, seja de forma virtual ou presencial.

Além disso, algo que ficou muito perceptível na vivência foi o fato dos estudantes se sentirem à vontade em cada etapa, sem se ater a uma necessidade obrigatória de apresentar resultados corretos de problemas. Algo que alcança um dos anseios da metodologia empregada.

Diante de tudo isso, podemos chegar à conclusão que a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode proporcionar benefícios no aprendizado em vários aspectos. Ela põe a Matemática sob uma ótica que se aprende os conteúdos da área enquanto resolve problemas, promove uma relação de parceria efetiva entre estudante e o professor, os quais constroem aprendizados que podem ser sólidos.

Nessa vertente, esperamos que além de poder apresentar uma forma de se trabalhar conteúdos matemáticos de forma dinâmica e atrativa, que essa pesquisa possa contribuir para a literatura que visa desenvolver estudos voltados para a compreensão do Cálculo Integral visando uma metodologia alternativa que seja promissora como é o caso da Resolução de Problemas.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; VIEIRA, G. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**: Revista de Investigação em Educação Matemática, Lisboa, v. 25, n. 1, p. 113-131, jun. 2016. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22926/16992. Acesso em: 02 dez. 2021.

ALVES, F. R. V. INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS COM O GEOGEBRA: um contributo da engenharia didática. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco**, Vitória, v. 6, n. 2, p. 81-89, jan. 2017. Disponível em: https://ojs2.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/380/617. Acesso em: 14 fev. 2022.

ALVES, F. R. V; LOPES, M. A. Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software geogebra. **Revista do Instituto Geogebra de São Paulo**, São Paulo, v. 2, n. 1, p. 05-21. 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/12524. Acesso em: 15 fev. 2022.

AMORIM, F. V.; SOUSA, G. C.; SALAZAR, J. V. Atividades com o Geogebra para o ensino de Cálculo. In: CONFERêNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais [...].** Recife: 2011. p. 1-12. Disponível em: http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1649. Acesso em: 05 fev. 2023.

ASSIS, M. A. P.; HUANCA, R. R. H. A formação continuada do professor de matemática: explorando possibilidades através da resolução de problemas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, n. 12, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016.

B. JUNIOR, J. B. O aplicativo Kahoot na educação: verificando os conhecimentos dos alunos em tempo real. In: Challenges 2017: Aprender nas Nuvens, Learning in the Clouds (15 ed.). Braga - Portugal: Universidade do Minho – UMINHO. v. 10, 1587-1602.

BARROSO, N. M. C. *et al.* Uma sequência didática baseada em realimentação para o ensino da integral. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. São Paulo: Papirus, 2013. p. 89-113.

BERTOTTI JUNIOR, V. I.; POSSAMAI, J. P. Resolução de problemas no Ensino Superior – uma análise na visão dos acadêmicos. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 21, n. 10, p. 184-208, jan. - abr. 2021. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6272/4295. Acesso em: 03 fev. 2023.

BEZERRA, C. A. **Proposta de abordagem para as Técnicas de Integração usando o software GeoGebra**. 2015. 85 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/12961. Acesso em: 15 fev. 2022.

BITTENCOURT, P. A. S.; ALBINO, J. P. O uso das Tecnologias Digitais na Educação do Século XXI. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 12, n. 1, p. 205-214, jan. 2017. Disponível em: https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/9433. Acesso em: 26 out. 2021.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, v.12, 1994.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; CHIARI, A. S. S. **A utilização das Tecnologias Digitais na Licenciatura em Matemática a distância na América Latina:** um mapa em construção. In: XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2015, Tuxtla Gutiérrez. Anais do XIV CIAEM- IACME. Tuxtla Gutiérrez: CIEM, 2015. p. 1-12. Disponível em: https://ciaem-iacme.org/memorias-ciaem/xiv/. Acesso em 27 jan. 2023.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G.P. Informática e Educação Matemática. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento. 1.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: U.S.A., Springer, 2005. v. 39.

BRASIL, **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/Secretaria de Educação Básica.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006, 137 p. (Orientações curriculares para o ensino para o ensino médio; volume 2)

BUENO, R. W. S. **A Construção Histórica do Conceito de Integral**. Ponta Grossa: Atena, 2021. 54 p. Disponível em: https://www.atenaeditora.com.br/post-ebook/4641. Acesso em: 04 fev. 2022.

CHIARI, A. S. S. **O papel das tecnologias digitais em disciplinas de álgebra linear à distância**: possibilidades, limites e desafios. 2015. 206 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.

COURANT, R. ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

COXE, I. C. **Funções Racionais na integração**: da técnica e tecnologia à discussão de conteúdos básicos em um curso de licenciatura em matemática. 2013. 166 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontífica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013. Disponível em: http://pucmg.br/pos/ensino/index-padrao.php?pagina=4869. Acesso em: 05 jan. 2022.

D'AMBRÓSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 97-115.

EVES, H. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, N. C; SILVA, L. E.; MARTINS, E. R. Resolução de Problemas no Ensino Superior. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Orgs). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 189-220.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GOMES, L. L.; MOITA, F. M. G. S. C. O uso do laboratório de informática educacional: partilhando vivências do cotidiano escolar. In: SOUSA, R. P. et al (orgs.). **Teorias e Práticas educacionais.** Campina Grande: Eduepb, 2016, p. 151-174. Disponível em: https://books.scielo.org/id/fp86k. Acesso em: 27 mai. 2023.

GOMES, R. D.; SILVA, A. F.; MOITA, F. M. G. S. C. A utilização do Jamboard na prática docente: um olhar para o ensino da equação do 2º grau. In: FERREIRA, J. W. C. (Org.). **Educação Matemática e Práticas Pedagógicas:** diálogos entre teoria e sala de aula. Tutóia: Diálogos, 2023, p. 28-50. Disponível em: http://www.editoradialogos.com/livros/educacao-matematica-e-praticas-pedagogicas-dialogos-entre-teoria-e-sala-de-aula/. Acesso em: 08 jun. 2023.

GONÇALVES, R. O Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas como metodologia para promover a aprendizagem significativa da Geometria Espacial. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 23., 2019, São Paulo. **Anais [...] .** São Paulo: e, 2019. p. 1-12. Disponível em: http://eventos.sbem.com.br/index.php/EBRAPEM/EBRAPEM2019/search/advancedResults. Acesso em: 13 dez. 2021.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HUANCA, R. R. H.; ALMEIDA, B. R. **O Ensino e a Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas na sala de aula: por quê?** Anais do III CONAPESC, Campina Grande/PB, v. 1, 2018. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/43252. Acesso em: 02 dez. 2021.

HUANCA, R. R. H.; SILVA, D. J. B.; SOUZA, P. Q. **Cálculo Diferencial sob a Perspectiva da Resolução de Problemas.** Campina Grande: Eduepb, 2021, 144p. Disponível em: https://zenodo.org/record/5128399#.YVzB59rMLIU. Acesso em: 16. nov. 2021.

KENSKI, V. M. Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 955-978, dez, 2015. https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/994.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Habra, 1994.

MACÊDO, M. J. F. G. **CÁLCULO II**. Mossoró: Edufersa, 2013. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/204263. Acesso em: 06 jan. 2022.

MAGALHÃES, G.; ALMEIDA, L. O uso do Geogebra em atividades de modelagem matemática: uma proposta para o ensino de cálculo. *In*: ENCONTRO PARANENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2017, Cascavel. **Anais do EPREM.** Paraná: SBEM, 2017. p.1-10. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/295/100. Acesso em: 3 mai. 2023.

MALTEMPI, M. V.; MENDES, R. O. Tecnologias Digitais na sala de aula: por que não? In: Congresso Internacional TIC e Educação, IV, 2016. **Anais...** Lisboa. 2016. p. 86-96. Disponível em: http://ticeduca2016.ie.ulisboa.pt/?page_id=1369. Acesso em: 17 mar. 2023.

MELCHIORS, A.; SOARES, M. História do Cálculo Diferencial e Integral. **Maiêutica**, Indaial, v. 1, n. 1, p. 67-79, jan. 2013. Disponível em: https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/view/556. Acesso em: 04 jan. 2022.

MOÇO, P. P. **Discussões sobre a Resolução de Problemas enquanto estratégia metodológica para o ensino de matemática**. 2013. 114 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013. Disponível em: http://repositorio.furg.br/handle/1/4801. Acesso em: 29 dez. 2021.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 17-34.

MOTA, J. F.; ABAR, C. A. A. P. Uma proposta de articulação entre teoria e prática no estudo da integral definida. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 12-24, nov. 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/51080. Acesso em: 05 jan. 2022.

OLIMPIO JUNIOR, A.; VILLA-OCHOA, J. A. Coletivos pensantes e compreensão conceitual no Cálculo Diferencial e Integral: uma composição de olhares. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Orgs.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013, p. 141-174.

OLVERA, B. G. **Cálculo integral.** 2 ed. México: Editora Person, 2015.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213 - 231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739. Acesso em: 13 jan. 2022.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Revista Espaço Pedagógico**, Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 88-104, out. 2013. Disponível em: http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3509. Acesso em: 07 jan. 2022.

PALÚ, J.; SCHUTZ, J. A.; MAYER, L. Desafios da Educação em Tempos de Pandemia. Cruz Alta: Ilustração, 2020. 324 p. ISBN 978-65-991146-9-4.

PEREIRA, N. V.; ARAÚJO, M. S. T. Utilização de recursos tecnológicos na Educação: caminhos e perspectivas. Investigação, Sociedade e Desenvolvimento, [S. l.], v. 9, n. 8, pág. e447985421, 2020. DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i8.5421. Disponível em: https://researchgate.net/publication/343220209_Utilizacao_de_recursos_tecnologicos_na_Educacao_caminhos_e_perspectivas. Acesso em: 9 jul. 2023.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

PROENÇA, M. C.; OLIVEIRA, A. B.; DONEZE, I. S. **Encaminhamentos para o Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas**. Rio de Janeiro: Anpmat, 2022.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. A resolução de problemas no contexto do estágio curricular supervisionado: dificuldades e limites de licenciandos em matemática. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 9, n. 1, p. 119, 2014. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/135429. Acesso em: 17 mar. 2023.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/pt-br.php. Acesso em: 11 fev. 2022.

SANTOS, A. G. O Geogebra como recurso didático para a aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de outras por uma composição de isometrias ou homotetias. 2013. 107 f. (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFAL_823bb229581e07b4943b9c8455eefda3. Acesso em: 11 abr 2023.

SCHNEIDER, E. M. et al. O uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC): possibilidades para o Ensino (não)presencial durante a Pandemia da COVID-19. Revista Científica Educação, [s.l.], v. 4, n. 8, out., 2020. Disponível em: https://periodicosrefoc.com.br/jornal/index.php/RCE/article/view/123/109. Acesso em: 06 jul. 2023.

SILVA, C. C. R. O aprender e ensinar matemática em tempos de Covid-19: uma experiência de ensino com o uso do jamboard e meet no ensino remoto (2021). Disponível em:

https://www.researchgate.net/profile/Cilia-Silva/publication/353053892. Acesso em: 02 ago. 2021.

SILVA, E. A. As potencialidades da resolução de problemas e do GeoGebra em problemas de otimização do cálculo diferencial. 2020. 157f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2021. Disponível em: http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/4026#preview-link0. Acesso em: 03 fev. 2022.

SILVA, P. V. De "um para todos" a "todos para todos": As mudanças socioculturais da cultura de massas à cultura digital. In: VILAÇA, M. L. C.; ARAUJO, E. V. F. (Orgs.). **Tecnologia, Sociedade e Educação na Era Digital.** Duque de Caxias: UNIGRANRIO, 2016. P. 41-70. Disponível em: http://www.pgcl.uenf.br/arquivos/tecnologia,sociedadeeeducacaonaeradigital_011120181554.pdf. Acesso em: 27 out. 2022.

SILVA, R. T. **Atividades para estudo de integrais em um ambiente de Ensino Híbrido**. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

SILVA, I. P.; MOITA, F. M. G. S. C. Reflexão sobre o uso de recursos didáticos digitais no curso de Licenciatura em Matemática a distância. **Ead & Tecnologias Digitais na Educação**, Dourados, v. 7, n. 9, p. 16-27, mês, 2019. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/ead/article/view/10776/5449.pdf. Acesso em: 11 ago. 2022.

SILVA, A. P. C.; NASCIMENTO, E. F.; VIEIRA, A. R. L. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: obstáculos e dificuldades didáticas de aprendizagem. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracaju, v. 7, n. 2, p. 4-19, dez. 2017. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/137. Acesso em: 22 jan. 2023

SILVA, S. S. *et al* (org.). **Ferramentas para aprimorar sua aula on-line: durante o período de suspensão (covid-19).** Mafra: Unc, 2020. 18 p. Disponível em: https://unc.br/biblioteca/ebook/FERRAMENTAS%20PARA%20APRIMORAR%20SUA%20AULA%20ON-LINE.pdf. Acesso em: 02 jun. 2022.

SOARES, C. J. F. Google Meet no ensino e na aprendizagem da matemática em tempos da pandemia da COVID-19 em uma turma de licenciatura de matemática. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 9, n. 18, p. 103-121, 2021. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/19125. Acesso em 27 mai. 2023.

SOUZA, C. R. **Uma abordagem do ensino de Cálculo, incentivando o desenvolvimento de estilos de aprendizagem e proporcionando o entendimento das técnicas de integração**. 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontífica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013. Disponível em: http://pucmg.br/pos/ensino/index-padrao.php?pagina=4869. Acesso em: 14 fev. 2022.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 13.ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar Matemática com resolução de problemas. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 39-60, dez. 2015. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22923. Acesso em: 18 mar. 2022.

ZAMPIERI, M. T.; JAVARONI, S. L. A Constituição de Ambientes Colaborativos de Aprendizagem em Ações de Formação Continuada: abordagem experimental com geogebra. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 375-397, ago. 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/Nwsr5mCkgHXV43WKDn49Rmt/abstract/?lang=pt. Acesso em: 05 fev. 2023.

APÊNDICE A – DIAGNÓSTICO INTEGRAIS

A INTEGRAL

1. Para que serve a notação de Soma?
2. Em linguagem matemática, que símbolo é usado para representar uma soma?
3. Quais elementos devem ser considerados para calcular a área sob uma curva em uma região do plano cartesiano?
4. Explique como calcular com precisão a área de uma região do plano cartesiano.
5. Qual é a diferença entre o uso de retângulos inscritos e circunscritos no cálculo da área de uma região do plano cartesiano?
6. Qual é a partição do intervalo $[a, b]$?
7. Qual é a soma de Riemann, para uma função f dada no intervalo fechado $[a, b]$?
8. O que uma soma de Riemann representa geometricamente?
9. O que o limite de uma soma de Riemann representa geometricamente?
10. O que é uma integral definida?
11. Explique cada um dos elementos de uma integral definida na notação de Leibniz.
12. O que se entende por norma de partição?
13. Explique o que é uma integral própria e o que é uma integral imprópria.

INTEGRAL INDEFINIDA E DEFINIDA

1. O que representa $\int_a^x f(v)dv$?
2. Defina $F(x) = \int_a^x f(v)dv$?
3. O que o valor da equação $F(x) = \int_a^x f(v)dv$ representa geometricamente?
4. Enuncie o teorema que dá origem à derivada de uma função F que representa uma integral definida com um limite superior variável.
5. Enuncie o Teorema Fundamental do Cálculo.
6. O que é chamado de integral indefinida?
7. Para uma integral indefinida, o que estabelece o Teorema Fundamental do Cálculo?
8. O que é uma função primitiva?
9. O que C representa em uma integral?

10. Como é chamado o processo para determinar uma integral indefinida ou uma integral definida?

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1. Qual é o método de substituição algébrica para resolver integrais indefinidas?
2. Quando o método de substituição trigonométrica pode ser aplicado à solução de integrais indefinidas?
3. Escreva a fórmula para realizar a integração por partes de uma integral indefinida.
4. Indica a que tipo de funções se pode aplicar o método de integração por partes.
5. O que é conhecido como integração por racionalização?

ANEXO A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA PESQUISA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Cidade, ___________ de ____.

Ilmo Sr.

Prezado Diretor

Venho através deste, solicitar, por parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, campus Campina Grande, a autorização para realização da coleta de dados da pesquisa de meu orientando de Mestrado Acadêmico ____, na ____________________________, a partir da data do dia ___ de ___________ de _____.

Esta pesquisa que é intitulada: "TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E GEOGEBRA"**,** visa contribuir significativamente para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, que será desenvolvida com estudantes do __ período do curso de Licenciatura em Matemática, cursantes da "Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II".

Coloco-me à disposição para esclarecimentos que se fizerem necessários.

Atenciosamente,

____

(Orientador)

ANEXO B - TERMO DE CONSENTIMENTO E ESCLARECIDO – TCLE

Convidamos o(a) Sr(a) ____ para participar, como voluntário, da pesquisa intitulada ***Oficinas sobre Ensino de Cálculo via Resolução de Problemas e Geogebra***, que será realizada na Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (FECLI) – UECE, sob a responsabilidade do pesquisador Ananias Félix da Silva.

A pesquisa terá como principal objetivo trabalhar as técnicas de integração por meio da Metodologia Resolução de Problemas, amparando-se na utilização do Geogebra. Visando com isso verificar o quanto a metodologia pode favorecer para a aprendizagem de um determinado conhecimento.

Ao participar desta pesquisa caberá ao(a) Sr(a) autorizar ser observado(a), fornecer material escrito, bem como permitir a coleta de dados através de gravação de áudio e de vídeos, como também autorizar a utilização de imagens para fins desta pesquisa e publicações.

Ressaltamos a não obrigatoriedade de participar da pesquisa, podendo deixar de participar dela em qualquer momento de sua execução, sem que haja penalidades ou prejuízos. Como também destacamos que será garantido o sigilo dos dados obtidos nela, resguardando a privacidade dos participantes envolvidos na mesma.

Ao concluir a participação nas oficinas, será disponibilizado um certificado. Esperamos que com toda a vivência haja uma grande contribuição no crescimento de aprendizagem profissional e acadêmica do participante.

Qualquer dúvida sobre a pesquisa, o participante poderá entrar em contato com o professor-pesquisador.

Declaro que li e estou ciente das normas do que foi disposto acima e que voluntariamente aceito participar desta pesquisa.

Campina Grande, _____ de ___________________________ de 2022.

____

Assinatura do pesquisador responsável

____

Assinatura do Participante

ANEXO C – CERTIFICADO DAS OFICINAS

UEPB
Universidade Estadual da Paraíba

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM Mestrado Acadêmico

Certificado

CERTIFICAMOS QUE:

Participou das oficinas **"Ensino de Cálculo via Resolução de Problemas e GeoGebra"**, realizadas na Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (FECLI - UECE), nos dias 10 de setembro a 16 de dezembro de 2022, contabilizando uma carga horária de 14 horas. Tais oficinas fazem parte da pesquisa de campo do mestrando Ananias Félix da Silva.

Iguatu-CE, 16 de dezembro de 2022

Ministrante	Prof. Dr. Roger Huanca Orientador do Projeto	Prof. Dr. Silvanio de Andrade Coordenador do PPGECEM Mat. 122385-2