UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I — CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ELVIRA CARMEN FARIAS AGRA LEITE

CAMINHOS PARA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS POR MEIO DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E DO DIALOGISMO EM AULAS DE CÔNICAS

CAMPINA GRANDE – PB
2022

ELVIRA CARMEN FARIAS AGRA LEITE

CAMINHOS PARA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS POR MEIO DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E DO DIALOGISMO EM AULAS DE CÔNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Linha de Pesquisa: Cultura Científica, Tecnologia, Informação e Comunicação.

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

CAMPINA GRANDE – PB

2022

L533c Leite, Elvira Carmen Farias Agra.
Caminhos para produção de significados por meio de representações semióticas e do dialogismo em aulas de cônicas [manuscrito] / Elvira Carmen Farias Agra Leite. - 2022.
309 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Aprendizagem em Matemática. 2. Semiótica. 3. Interações discursivas. I. Título

21. ed. CDD 327.7

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

ELVIRA CARMEN FARIAS AGRA LEITE

CAMINHOS PARA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS POR MEIO DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E DO DIALOGISMO EM AULAS DE CÔNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Linha de Pesquisa: Cultura Científica, Tecnologia, Informação e Comunicação.

Aprovada em: 19/12/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida
(Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba

Profª. Dra. Maria Alves de Azerêdo
Universidade Estadual da Paraíba

Prof. Dr. Luís Havelange Soares
Instituto Federal da Paraíba

Ao meu grande amor Manoel Leite. À minha *amada mestra* — e mãe — Maria de Lourdes. Ao meu amorzão José Agra.

AGRADECIMENTOS

Muitos foram os que contribuíram nesta minha caminhada, com orações e palavras de incentivo, sem as quais, certamente, seria impossível a realização desta pesquisa. Por ser a gratidão, uma das mais belas virtudes, aquela que nos permite reconhecer o valor dos mais simples gestos, quero deixar aqui o meu mais sincero e profundo agradecimento àqueles que se fizeram presentes durante esse tempo de dedicação e renúncia.

Primeiramente agradeço a Deus, sem o qual eu jamais teria sequer existido, por todas as bênçãos presentes na minha vida e por me permitir chegar até aqui. E a Maria Santíssima, por me proteger em cada passo dessa caminhada.

Ao meu pai José Agra (*in memoriam*), meu eterno amorzão; à minha mãe Maria de Lourdes, a mulher mais generosa e altruísta desse mundo, a quem carinhosamente presenteei com a minha aprovação no Mestrado.

Ao meu marido, Manoel, meu grande incentivador, por todo amor, companheirismo, amizade e compreensão a mim dedicados.

Aos meus filhos amados Maria Luiza e Neto, que dividiram a mãe com as salas de aulas, com os livros e com tantas demandas inerentes ao universo acadêmico, apoiando-me e celebrando cada nova conquista, vocês são a presença real de Deus em minha vida.

Aos meus irmãos Rossandro e Giscard, por fazerem parte da minha base, da minha história, da família que Deus nos presenteou.

Ao PPGECEM–UEPB e seus professores, que muito me ensinaram ao longo dos últimos anos. Em especial ao Professor José Joelson Pimentel de Almeida e Professor Aníbal de Menezes Maciel, que me possibilitaram cursar suas disciplinas, ainda como aluna especial, sendo minhas primeiras referências na pós-graduação.

Aos membros do grupo de pesquisa Leitura e Escrita em Educação Matemática — LEEMAT, pelos momentos de troca de experiências ao longo de nossas reuniões.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, pelo acolhimento e apoio à minha pesquisa, tornando ainda mais satisfatória sua realização. Aos professores Cicero da Silva Pereira e Joab dos Santos Silva, pela extensão da amizade iniciada na graduação, que possibilitou relevantes contribuições à minha pesquisa e que ultrapassa as fronteiras acadêmicas.

Aos membros da banca examinadora Professor Luís Havelange Soares e Professora Maria Alves de Azeredo, que prontamente aceitaram o convite para avaliarem este trabalho, trazendo-lhe importantes contribuições. Grata pela leitura carinhosa e atenta dessas páginas, pelos apontamentos extremamente relevantes no Exame de Qualificação e pelas palavras edificantes e enaltecedoras na Defesa.

Finalmente, agradeço — mais uma vez — ao Professor José Joelson Pimentel de Almeida, meu orientador, por ser um dos meus maiores incentivadores ao longo de todo esse percurso. Agradeço pela orientação, pelos inúmeros ensinamentos e pelas risadas tão necessárias nos momentos em que precisei desse alívio. Agradeço toda a compreensão e paciência nesses difíceis anos em que desenvolvemos a nossa pesquisa. Juntos pudemos converter todas as dificuldades em possibilidades. Agora o sonho se tornou realidade. Que venham os próximos!

"A música não está nas notas,
mas no silêncio entre elas."
(Mozart)

RESUMO

O presente trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa cujo objetivo geral é investigar sobre a compreensão do conteúdo de cônicas, em seus variados registros de representação, por meio das interações discursivas em aulas remotas. Para alcançarmos nosso objetivo, ancoramo-nos em pesquisadores como Saussure, Frege, Peirce e Raymond Duval, na compreensão de Semiótica, da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e de alguns elementos acerca das condições nas quais ocorre a aprendizagem em Matemática; em Gómez-Granell e Almeida com reflexões sobre a linguagem matemática e a produção de significados nas aulas de Matemática; E no que diz respeito ao dialogismo, os pressupostos são os de Bakhtin, entre outros autores que colaboraram para o entendimento dos conceitos utilizados. Nossa investigação caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, realizada em uma turma de 29 alunos do 3º ano do Ensino Técnico Integrado ao Médio, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, campus Campina Grande, em período de ensino remoto emergencial, decorrente da pandemia de COVID-19. Os dados foram coletados através de gravações das aulas sobre cônicas, ministradas durante o 4º bimestre dessa turma, juntamente com o material produzido pelo seu professor e as respostas referentes à avaliação do conteúdo, produzidas pelos alunos. A partir deste cenário, e dos autores com os quais a pesquisa dialogou, analisamos os resultados, buscando possíveis relações entre os aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a compreensão dos enunciados em situações concretas de comunicação, por meio da produção e das articulações enunciativas utilizando a Análise Dialógica do Discurso. Os resultados nos mostraram que, em relação à mobilização dos registros de representação das cônicas, a grande maioria dos alunos conseguiu realizar conversões entre registros da elipse e da parábola em um sentido de conversão, alcançando resultados satisfatórios no instrumento avaliativo, enquanto a minoria conseguiu realizar a conversão entre os registros da hipérbole nos dois sentidos, não alcançando a compreensão integrativa dessa representação e que os alunos que se dispuseram a representar as cônicas graficamente, como uma representação auxiliar, tiveram melhores resultados nos tratamentos algébricos. Em relação às situações de interação discursiva, os resultados nos mostram que estas, e mesmo os silêncios, podem contribuir ou limitar a aprendizagem do conteúdo de cônicas em aulas remotas, conforme sejam bem direcionadas e incentivadas ou quando ausentes ou restritivas, sendo de fundamental importância a condução do professor para alcançar os objetivos definidos para o conteúdo e possibilitar melhores resultados na mobilização dos registros de representação semiótica das cônicas.

Palavras-chave: aprendizagem em matemática; semiótica; interações discursivas.

ABSTRACT

The present work presents the results of a research whose general objective is to investigate the understanding of the content of conics, in its varied representation registers, through discursive interactions in remote classes. In order to reach our objective, we are anchored in researchers such as Saussure, Frege, Peirce and Raymond Duval, in the understanding of Semiotics, the Theory of Semiotic Representation Registers and some elements about the conditions in which learning in Mathematics takes place; in Gómez-Granell and Almeida with reflections on mathematical language and meaning production in Mathematics classes; And with regard to dialogism, the assumptions are those of Bakhtin, among other authors who collaborated for the understanding of the concepts used. Our investigation is characterized as a qualitative research, carried out in a group of 29 students of the 3rd year of Technical Education Integrated to the Medium, of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Paraíba, Campina Grande campus, in a period of emergency remote teaching, resulting from the COVID-19 pandemic. Data were collected through recordings of classes on conics, taught during the 4th two-month period of this group, together with the material produced by their teacher and the answers referring to the evaluation of the content, produced by the students. From this scenario, and from the authors with whom the research dialogued, we analyzed the results, seeking possible relationships between the aspects of the Theory of Semiotic Representation Registers and the understanding of utterances in concrete communication situations, through production and articulations enunciative statements using Dialogic Discourse Analysis. The results showed us that, in relation to the mobilization of conic representation records, the vast majority of students were able to convert between ellipse and parabola records in a conversion direction, achieving satisfactory results in the evaluative instrument, while the minority managed to perform the conversion between the registers of the hyperbola in both directions, not reaching the integrative understanding of this representation and that the students who were willing to represent the conics graphically, as an auxiliary representation, had better results in the algebraic treatments. Regarding discursive interaction situations, the results show us that these, and even silences, can contribute or limit the learning of conics content in remote classes, depending on whether they are well directed and encouraged or when absent or restrictive, being of fundamental importance the teacher's guidance to achieve the objectives defined for the content and enable better results in the mobilization of records of semiotic representation of conics.

Keywords: learning in mathematics; semiotics; discursive interactions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AENP	Atividade de Ensino Não Presencial
An	Aluno identificado pelo número n
ANA	Avaliação Nacional da Alfabetização
ANEB	Avaliação Nacional da Educação Básica
ANRESC	Avaliação Nacional de Rendimento Escolar
Ax	Aluno não identificado na transcrição da aula
ADD	Análise Dialógica do Discurso
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAP	Compreensão Ativa Plena
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CI	Conteúdo de Circunferência
CLAGANP	Comissão Local de Acompanhamento e Gestão de Atividades Não Presenciais
CO	Conteúdo de Cônicas
COVID-19	Coronavirus Disease 2019
CONSUPER	Conselho Superior do IFPB
CP	Compreensão Passiva
EaD	Educação à Distância
ECMAT	Encontro Cajazeirense de Matemática
EG	Equação Geral
EL	Conteúdo de Elipse
EMBRAPII	Empresa Brasileira de Pesquisa e Inovação Industrial
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática ou Exame Nacional do Ensino Médio, dependendo do contexto

EPBEM	Encontro Paraibano de Educação Matemática
ER	Equação Reduzida
ERE	Ensino Remoto Emergencial
EUA	Estados Unidos da América
HI	Conteúdo de Hipérbole
IFPB	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LAMPIÃO	Laboratório de Aplicações Móveis, Pesquisa e Inovação
LEEMAT	Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de Pesquisa
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
MEC	Ministério da Educação e Cultura
MMM	Movimento da Matemática Moderna
OMS	Organização Mundial de Saúde
P	Professor
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGECEM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
PROFNIT	Propriedade Intelectual e Transferência de Tecnologia para a Inovação
PRP	Programa de Residência Pedagógica
PSCT	Processo Seletivo de Cursos Técnicos
RA	Representação Algébrica
RG	Representação Gráfica
RLN	Representação em Língua Natural
RRS	Registros de Representação Semiótica

SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SISU	Sistema de Seleção Unificada
T	Tratamento
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TDIC	Tecnologia Digital da Informação e Comunicação
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UNEMAT	Universidade do Estado de Mato Grosso
UNESCO	Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura

LISTA DE SÍMBOLOS

β	Beta
e, g	Retas concorrentes oblíquas
V	Vértice
C, C_n	Centro da circunferência
P	Ponto
P_n	Pontos do plano
r	Raio da circunferência
Ox	Eixo das abscissas
Oy	Eixo das ordenadas
xOy	Sistema de eixos coordenados
x_1	Abscissa do centro da circunferência, elipse e hipérbole
y_1	Ordenada do centro da circunferência, elipse e hipérbole
A_1, A_2	Vértices da elipse (eixo maior)
B_1, B_2	Vértices da elipse (eixo menor)
F_1, F_2	Focos da elipse e da hipérbole
F	Foco da parábola
O	Origem dos eixos coordenados
$2a$	Medida do eixo maior da elipse ou da hipérbole
a	Medida do semieixo maior da elipse ou da hipérbole
$2b$	Medida do eixo menor da elipse ou da hipérbole
b	Medida do semieixo menor da elipse ou da hipérbole
$2c$	Distância focal
d	Reta diretriz da parábola
p	Parâmetro da parábola

SUMÁRIO

1 TRAÇANDO EIXOS

A palavra é uma espécie de ponte lançada entre mim e os outros. Se ela se apoia sobre mim numa extremidade, na outra apoia-se sobre o meu interlocutor. A palavra é o território comum do locutor e do interlocutor.[1]

Utilizamos as palavras da abertura deste capítulo para criar um elo (uma "ponte") em que, de um lado, estão as palavras e vozes contidas no texto da presente pesquisa e, na outra extremidade, o leitor (interlocutor), que se dispõe a lê-las.

Para que esse nosso território, que agora se torna comum, seja amplamente compartilhado e compreendido, acreditamos ser necessária a descrição do percurso pessoal e acadêmico que trilhei, momento em que peço licença para tecer algumas palavras em primeira pessoa, apoiando-as em uma extremidade e lançando-as em um caminho que almeja o alicerce da compreensão.

1.1 Sobre minha extremidade da ponte

Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira às 4 horas da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática.[2]

Desde os tempos de escola sempre tive uma grande paixão pelos conteúdos matemáticos. Professores me inspiravam e sempre me incentivaram a progredir em meus estudos. Eu era a aluna que amava fazer cálculos, resolver problemas e, vez por outra, participar de Olimpíadas de Matemática.

Enveredei por outra área bem diferente, o Direito, e passei anos distante daquela antiga paixão. Até que a Matemática veio me resgatar, através das vozes de amigos, quando insistiam para que eu ajudasse seus filhos com os conteúdos em que tinham dificuldade em Matemática. As vozes de cada um desses amigos eram consonantes: "a Matemática é muito difícil", vozes estas que ecoavam diante de seus filhos e me inquietavam por ver essa concepção ser transmitida aos pequenos, sem que lhes fosse dada a oportunidade de formar suas próprias opiniões.

Essa inquietação me fez tentar mostrar o lado que eu conhecia (e que era apaixonada) de uma Matemática interessante, desafiadora, divertida. A chama foi então reacendida em mim e, com ajuda e insistência do meu marido, decidi voltar aos bancos da universidade e fazer o curso de Licenciatura em Matemática.

Ingressei em 2016 no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), campus Campina Grande. Desde o início do curso fui me envolvendo

[1] Bakhtin (2006).
[2] Freire, Gadotti e Torres (1991).

com monitorias e projetos de Iniciação Científica e foi quando comecei a ver que nesse universo havia muito mais do que os cálculos que eu amava fazer: fui apresentada por meus professores Me. Cicero da Silva Pereira e Dr. Luis Havelange Soares à Educação Matemática.

A partir de então foram cursos, congressos, seminários e encontros na área, que começaram a alicerçar a construção de uma nova professora/pesquisadora que almejava assumir seu papel de educadora matemática o mais breve possível. Dentre esses eventos, destaco a participação nos Seminários de Leitura e Escrita em Educação Matemática[3], promovida pelo Grupo de Pesquisa LEEMAT[4], grupo este do qual eu faria parte com o meu ingresso na pós-graduação mais adiante relatado, mas que se revela como meu primeiro contato com a pós-graduação na área e um passo importante para a escolha desse futuro caminho.

Em continuidade, ingressei no Programa de Residência Pedagógica (PRP) da CAPES[5] no IFPB, em que tive a oportunidade de estar em sala de aula nos Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio daquele instituto, em turmas do 1º ao 3º ano, fazendo-me ter um contato mais próximo com a realidade da sala de aula. Unindo essa experiência à anteriormente adquirida com os Estágios Supervisionados nas turmas do Ensino Fundamental, pude ter uma noção do quanto todas as leituras e estudos na área da educação têm a contribuir com processos de ensino e aprendizagem da Matemática e o quanto eu ainda precisava me empenhar nesse processo de (re)construção pessoal.

Durante um dos encontros regionais que participei, o X Encontro Paraibano de Educação Matemática (EPBEM), que na edição de 2018 foi realizada junto com o V Encontro Cajazeirense de Matemática (ECMAT), na cidade de Cajazeiras – PB, tive a oportunidade de assistir à palestra intitulada "Conhecimento Didático-Matemático do Professor na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico"[6]. Essa palestra abriu caminhos para que eu procurasse conhecer alguns dos conceitos ali presentes e foi então que conheci a Semiótica.

A partir disso fui construindo um caminho para meu tema de pesquisa. Ao mesmo tempo em que escrevia meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), ingressei como aluna especial no Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), na disciplina de Tópicos Especiais em Geometria, ministrada pelo Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, que viria a ser meu orientador.

Minha escolha já delineava a ideia de trabalhar com Geometria e, na referida disciplina, em vários momentos, discutimos sobre a Semiótica (de Peirce e Saussure), que

[3] Palestra "Experimento Didático: um caminho metodológico para a investigação em Educação Matemática", ministrada pelo Prof. Dr. Wellington Lima Cedro.
[4] Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de Pesquisa (LEEMAT)
[5] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.
[6] Palestrante: Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho, da Universidade Federal de Pernambuco, Campus do Agreste da UFPE.

corroboravam o que eu pretendia. No semestre seguinte, também como aluna especial, na disciplina de Ensino-Aprendizagem de Matemática para o Ensino Médio, ministrada pelo Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel, tive a oportunidade de estudar um pouco mais sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, que eu vinha pesquisando e, assim, reafirmar o caminho que vinha sendo construído nesse processo.

Depois disso, enquanto elaborava meu TCC, participei da seleção para o Mestrado do PPGECEM, e aqui estou traçando essa minha pequena trajetória, ainda embrionária, de educadora matemática, enquanto enfrento os desafios de lecionar para minhas primeiras turmas e almejo que estas palavras aqui escritas encontrem apoio sobre o meu interlocutor, estabelecendo essa ponte que a partir de agora nos conecta em um território comum, por meio da presente pesquisa e dos trajetos pessoais, acadêmicos e profissionais que vêm sendo delineados no meu caminho.

1.2 Motivação e Justificativa

A Matemática e a busca por diferentes metodologias que possam contribuir com o professor nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, enquanto componente curricular, sempre foram foco de inúmeras pesquisas na área da Educação Matemática. As dificuldades para a aprendizagem da Matemática e o fracasso escolar muitas vezes são associados a sua natureza abstrata e linguagem excessivamente formal. Nossa motivação parte da incessante vontade de poder contribuir no campo da Educação Matemática com a diminuição de algumas dessas dificuldades, conforme discorremos adiante.

1.2.1 A Matemática é difícil (e chata!)

Nas civilizações antigas nos deparávamos com a Matemática utilitária e essencial para o bom desenvolvimento dos diversos povos ao longo da história. A Matemática era essencial, necessária, presente.

Nos tempos atuais essa situação não é diferente. Segundo Gómez-Granell (1996), saber Matemática na sociedade moderna é uma necessidade imperativa, uma vez que vivemos inseridos em um contexto que demanda a cada dia um conhecimento matemático mais complexo e em que as ciências apresentam um caráter cada vez mais matemático. Mesmo diante dessa necessidade apontada por essa autora, a Matemática continua inacessível à grande parte das pessoas em todo o mundo e "a maioria das pessoas acha matemática 'difícil e chata' e se sente insegura de sua capacidade de resolver mesmo problemas fáceis de cálculo" (Ibid., p. 258).

Acreditamos que essa concepção da Matemática está associada ao fato de muitas pessoas ainda considerarem a Matemática como algo destinado a mentes privilegiadas (DEVLIN, 2004), por seu caráter abstrato e linguagem formal específica, bastante diferente da linguagem natural. Aliadas a essa concepção, as dificuldades no ensino e aprendizagem da Matemática estão presentes nas nossas salas de aula, em que, conforme aponta D'Ambrosio (2012, p. 72), encontramos

> [...] carteiras cartesianamente dispostas, professores na frente, quadro-negro como foco único de curiosidade e de atenção intelectual. O material de ensino é composto por livros e cadernos padronizados, listas de chamada organizadas por critérios rígidos, testes, tarefa, elogios e críticas públicas, notas com prêmios ou punições, e outras características mais. Aluno feliz que faz o que gosta e quer, rende muito. Mas o resultado é praticamente o mesmo, em todos os níveis de escolaridade e em todas as disciplinas: o aluno é massacrado no seu comportamento, agredido na sua inteligência e tolhido na sua criatividade.

Práticas pedagógicas que permanecem estruturadas dessa forma, através da transmissão unilateral de conteúdos, no estudo de objetos matemáticos isolados e que não apresentam relação entre si, na repetição de exercícios, repletos de formalismo, na apresentação verbal de conteúdos, desvinculados dos saberes trazidos pelos alunos e de seu cotidiano, na memorização de fórmulas, que não fazem sentido para os alunos, mostram-se ineficazes para manter o interesse destes nos conteúdos apresentados nas aulas de Matemática.

A BNCC já incorporou o pensamento do autor quando apresenta em seu texto:

> [...] colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. [...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio — impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2017a, p. 527-528).

Podemos perceber mudanças ocorridas nas nossas salas de aula, como a busca da associação dos objetos matemáticos com o cotidiano dos alunos, ou a interligação desses objetos com o concreto[7]. Entretanto, mesmo em meio a mudanças nas abordagens metodológicas de ensino, ainda é predominante no ambiente escolar uma Matemática distante dos anseios dos alunos e de sua compreensão, havendo grande necessidade de mudança dessa situação para o fortalecimento da autonomia e da criticidade dos alunos, para que estes possam se tornar indivíduos reflexivos e coautores de seu conhecimento.

De acordo com Santos e Nacarato (2018), a mudança no processo de ensino demanda inovação nos procedimentos didático-pedagógicos do professor e da escola, devendo-se traçar o perfil dos estudantes, com seus anseios e aspirações, e buscar novas

[7] Referimo-nos às aplicações dos conceitos matemáticos em objetos concretos, não se confundindo os objetos abstratos da Matemática com os objetos físicos, concretos. Nacarato (2005) trata o material concreto como material didático manipulável utilizado no ensino da Matemática.

estratégias para que eles possam *aprender a aprender.* Nesse sentido, devem-se priorizar tarefas e intervenções adequadas, propostas pelo professor, no sentido de potencializar os processos de significação.

Quando falamos em dificuldades para a aprendizagem da Matemática, muitas são aquelas que permeiam o cotidiano da sala de aula e vão se tornando mais aparentes conforme nossa vivência. A mudança da concepção de que a Matemática é *difícil e chata*, que é tradicionalmente transmitida a nossas crianças e jovens, ainda é uma difícil conquista. Dito isso, destacamos que especial atenção merece ser dada à aprendizagem da Geometria, conforme discorremos a seguir.

1.2.2 O esquecimento da Geometria

De acordo com Lorenzato (2010, p. 57), "a matemática se constitui de diferentes tipos de conteúdos, cada um com seu vocabulário, símbolos, normas e modo de pensar". Enquanto a aritmética é *pontual e numérica* a álgebra é *generalista e literal* e a geometria compreende as *formas*.

O estudo dividido em aritmética, álgebra, geometria e trigonometria no Brasil teve início no ano de 1808, com a vinda da Família Real e criação da Academia da Marinha (CALDATTO; PAVANELLO, 2015), tendo a Reforma Francisco Campos, de 1931, interligado o ensino desses ramos da matemática em uma única disciplina (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

O objetivo do ensino da geometria passava a ser a utilização de metodologias centradas no caráter intuitivo experimental, causando dificuldades aos professores acostumados ao modelo tradicional do ensino da matemática, em sua maioria sem formação.

Apesar dessa unificação, Lorenzato (2010) observa que certas questões geométricas não podem ser resolvidas com uso da Aritmética e da Álgebra, sendo necessário o desenvolvimento do pensamento geométrico, que é possível através do estudo da Geometria, tornando-o essencial para os estudantes.

Apenas nos anos de 1934 e 1935 com a criação das Universidades de São Paulo e do Rio de Janeiro, os professores secundários, mesmo em número insuficiente para suprir a demanda, passam a ter formação. Na reforma Capanema, 1942, promovida pelo ministro Gustavo Capanema, a geometria é ainda abordada nas quatro séries iniciais, intuitivamente nas duas primeiras e dedutivamente nas duas últimas. A geometria é bastante priorizada no segundo ciclo, sendo programada para todos os anos, incluindo-se ainda trigonometria no 2º ano e geometria analítica no 3º ano (PAVANELLO, 1989).

Mesmo diante da necessidade do desenvolvimento do pensamento geométrico, ainda encontramos muitas dificuldades para o ensino da geometria, deparando-nos com problemas historicamente presentes. De acordo com Carvalho (2012), na década de 1950 houve o fomento das reformas curriculares nos países desenvolvidos. Em 1951, o ministro da educação, Simões Filho, insatisfeito com o ensino nos cursos secundários incumbe a congregação do Colégio Pedro II da elaboração de novos programas (PAVANELLO, 1993).

Em 1960 o Movimento da Matemática Moderna (MMM) provocou mudanças significativas nos currículos de matemática das escolas em muitos países, inclusive no Brasil. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)[8], a matemática ensinada nessa época priorizava a formalidade da sua linguagem, aproximando a matemática escolar da matemática pura[9], focando nas abstrações que lhe são internas, e afastando-a da realidade dos alunos.

Gómez-Granell (1998) apresenta como razões para a introdução dessa matemática nos currículos a introdução das últimas descobertas científicas pelos matemáticos, reforçando o poder de sua disciplina; a incorporação dos últimos avanços científicos e tecnológicos para atender as demandas atuais para uma educação moderna, fazendo-se necessário ao corpo docente responder a essas demandas dos pais; a crença na modificação das técnicas didáticas para resolver os problemas de aprendizagem etc. Isso fez com que conteúdos matemáticos altamente formalizados fossem adaptados e deformados para ensinar alunos do primário sem que ninguém, nem mesmo os professores soubessem qual era a sua utilidade.

Dessa forma, priorizavam-se a teoria dos conjuntos e as estruturas algébricas, uma vez que a geometria deveria ser trabalhada sob o enfoque das transformações, e, como muitos professores não dominavam o assunto, deixaram de ensinar geometria. Conforme nos dizem Caldatto e Pavanello (2015, p. 120), "[...]um dos principais legados da Matemática Moderna para o processo educacional no Brasil foi o abandono da geometria na escola básica que perdura até meados da década de 2010".

Esse movimento teve grande influência nos livros didáticos. Lorenzato (2010) afirma que a geometria foi deixada de lado nos currículos, gerando defasagem no desenvolvimento do pensamento geométrico. Em 1980 essa realidade começou a mudar, gerando novas discussões curriculares através da recomendação estadunidense pela "compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, na aprendizagem da matemática" (BRASIL, 1997, p. 20). Mas, apesar das mudanças, ainda se nota o "predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais, a formalização precoce de conceitos e a pouca vinculação da Matemática às suas aplicações práticas". (Ibid., p. 21).

Indo contra a fragmentação da Matemática nos currículos e consequente *esquecimento* da geometria, Lorenzato (2010, p. 60) defende que "todos os campos da matemática previstos no currículo oficial devem ser ensinados, e mais, de modo integrado", possibilitando a compreensão do todo e não meramente das partes,

[8] Brasil (1997).

[9] A matemática pura trata do estudo teórico de conceitos matemáticos inteiramente abstratos, sem se preocupar com sua aplicação prática, sendo voltada a seu próprio desenvolvimento científico.

realizando o ensino integrado da aritmética, geometria e álgebra. Essa integração só é possível identificando-se os pontos de conexão entre essas áreas.

No ano de 1996 a lei Federal Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, institui a educação básica obrigatória e gratuita dos quatro aos dezessete anos, organizada em Pré-escola, Ensino Fundamental (em substituição ao 1º grau) e Ensino Médio (em substituição ao 2º grau) (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

Em 1998, em consonância com a mesma lei, foram editados os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, para que a abordagem da geometria euclidiana fosse realizada através de atividades experimentais. No mesmo ano é implementado pelo governo federal o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), como indicador da qualidade da educação básica ao final do Ensino Médio, que passou também a ser utilizado para o ingresso no ensino superior a partir de 2009. Outras avaliações em larga escala implantadas no Brasil a partir de 2005, foram o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), composto pela Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB), a Avaliação Nacional de Rendimento Escolar (ANRESC) — que busca avaliar a qualidade do ensino das escolas públicas referente ao Ensino Fundamental — e a Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA) — que avalia os níveis de alfabetização e letramento em Língua Portuguesa, alfabetização matemática e condições de oferta do Ciclo de Alfabetização das redes públicas (Ibid.).

Essas avaliações mostram que ainda não chegamos a resultados positivos em relação ao ensino da geometria euclidiana, apesar das tentativas de restabelecimento do ensino desta no Brasil (Ibid.).

As dificuldades para o ensino de geometria persistiram e encontramos reflexos dessas dificuldades até hoje em professores que não se sentem preparados para ensiná-la, por não a terem visto na educação básica, ou mesmo na própria formação de professores. Quando falamos sobre a Geometria Analítica então encontramos ainda maiores dificuldades, adiante relacionadas.

1.2.3 Reflexos sobre a Geometria Analítica

As dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem da geometria são históricas. Quando tratamos da Geometria Analítica, essas dificuldades se tornam ainda mais evidentes. Esse ramo da matemática, também chamado de geometria cartesiana[10], ou geometria das coordenadas, trata do estudo da geometria a partir de um sistema de coordenadas e dos princípios da álgebra e da análise[11]. Dessa forma, a classificação e descrição de objetos geométricos podem ser realizadas por meio da geometria analítica, através de um sistema de eixos coordenados, ou seja, o plano cartesiano[12].

[10] Disponível em <https://conhecimentocientifico.com/geometria-analitica/>. Acesso em 07 jul. 2022.
[11] Disponível em <https://www.marcelouva.com.br/geometria-analitica/>. Acesso em 07 jul. 2022.
[12] Na Geometria Analítica os números reais estão representados em uma reta, dessa forma, esses números representam a distância entre o ponto e a origem da reta. Os conteúdos abordados nesse ramo da

No Ensino Médio, a Geometria Analítica caracteriza-se por representar um salto epistemológico, entrelaçando Álgebra, Geometria e Aritmética, dificultando ainda mais o seu processo de ensino. Seu estudo, além do Ensino Médio, está presente em diversos cursos superiores como na Medicina, Física, Astronomia e Engenharia e em aplicações práticas do mundo moderno, como no sistema de localização e radares de aeroportos e aviões.

Na nossa atuação docente no Ensino Médio, pudemos observar a dificuldade dos alunos em lidar com diversas representações de um mesmo objeto matemático. A Geometria Analítica, no mesmo diapasão de muitos conteúdos da Matemática, está repleta de representações e, por isso, dentre outros motivos, amedronta e apresenta altos índices de incompreensão. Assim, como forma de buscar possibilitar uma melhor compreensão de seus conteúdos, acreditamos encontrar na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) um direcionamento para que seu ensino articule as diferentes representações de seus objetos, de forma que possibilitem seu entendimento e não apenas a memorização de equações e fórmulas que nada representam para os alunos.

Durante o XIII Encontro Nacional de Educação Matemática[13], participamos da sessão de Comunicações Orais de algumas pesquisas. Entre elas, a pesquisa de Santos (2014) nos chamou a atenção de modo peculiar. Em sua pesquisa, esse autor buscou compreender o motivo de os alunos do Ensino Médio apresentarem tantas dificuldades na aprendizagem de Geometria Analítica. Embasado em alguns trabalhos de pesquisa na área de Educação Matemática, o autor buscou dirimir suas inquietações investigando se os alunos do Ensino Médio após o ensino de Geometria Analítica, aprenderam a fazer a conversão entre os Registros de Representação Semiótica (RRS)[14] da elipse e em quais das passagens apresentaram maiores dificuldades.

Dessa forma, Santos (2014) utilizou em sua pesquisa um instrumento diagnóstico que pudesse mostrar como foi a aquisição do conhecimento pelos 28 alunos de uma turma de 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo, contendo questões sobre a elipse, elaboradas à luz da TRRS. Seus objetivos eram de

> investigar se, após terem passado por um ensino de Geometria Analítica, alunos mostram ter aprendido a fazer a passagem entre expressões algébricas, gráficos e textos em língua materna, no caso da elipse [...] e em quais das passagens mostram mais dificuldades (Ibid., p. 23).

matemática são: o estudo analítico do ponto, da reta e da circunferência, vetores e cônicas.

13 O XIII ENEM foi realizado no período de 14 a 17 de julho de 2019, na Arena Pantanal, cidade de Cuiabá. O evento é promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e nessa edição teve realização na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas – Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT).

14 A conversão entre registros de representação é fundamento essencial para a compreensão dos objetos matemáticos segundo Duval (2012). Mais adiante, na sessão 2.4, encontra-se uma melhor explicação sobre esse assunto.

No questionário diagnóstico, o autor fez uso de seis questões com os três tipos de registros relacionados à elipse em todos os sentidos de conversão: entre os registros gráfico, algébrico e em língua natural.

Em suas conclusões, o autor verificou que "todos os alunos que participaram desta pesquisa apresentaram uma compreensão limitada acerca das conversões esperadas", sendo os problemas mais comuns nas respostas "os tratamentos algébricos, as variáveis visuais do gráfico, as unidades significativas da equação reduzida e a interpretação das descrições em língua materna" (Ibid., p. 174).

A conclusão desse autor foi de que os alunos não conseguem realizar conversões entre os RRS da elipse. Algo que nos chamou a atenção em suas conclusões foi o fato que as aulas de Matemática acontecem através da utilização da língua natural, então esse tipo de registro não deveria, em hipótese, causar confusão nos alunos. Entretanto, o autor observou que o RRS da língua natural gerou grande dificuldade de compreensão por parte dos alunos.

> Os resultados com as questões que envolveram o uso da língua materna mostraram maiores dificuldades dos alunos para efetuarem as conversões, fato que nos surpreendeu e deixamos aqui um questionamento: será que professores valorizam o ensino de tópicos de Geometria Analítica com o uso frequente da língua materna? (SANTOS, 2014, p.179).

Remetemo-nos às dificuldades encontradas pelo autor à precariedade dos conhecimentos prévios dos alunos, evidenciados em tantas pesquisas na área de Educação Matemática. Dessa maneira, o ensino das cônicas não se refere tão somente ao próprio conteúdo, mas a uma série de conteúdos anteriores.

> Em nosso estudo, constatamos que alunos do Ensino Médio não desenvolveram aprendizagem para sequer localizar as coordenadas de um ponto no sistema cartesiano, nos remete a pensar que outros conteúdos como as funções em geral; rotação, translação, homotetia e tópicos que antecedem as cônicas como ponto, reta, plano, circunferências que dependem do sistema cartesiano para a formação e definições de conceitos também não foram desenvolvidos (Ibid., p.174.)

A dificuldade encontrada pelos alunos correspondente às conversões em que estavam envolvidos os registros em língua natural é um fato que levanta relevantes questões a serem analisadas e contribuíram ainda mais para nossa inquietação. Como explicar que a língua, utilizada para nos comunicarmos desde a mais tenra idade e, nesse caso específico, é usada prioritariamente nas aulas de Matemática, inserida na prática de ensino, esteja entre as maiores dificuldades desses alunos no ensino da Geometria Analítica? Afinal, como justificar que a dificuldade com a formalidade da linguagem matemática foi menos preponderante do que a dificuldade com a língua natural, utilizada em nosso cotidiano, aliada ao fato de que toda a comunicação que acontece em sala de aula acontece através dela?

Essa conclusão nos motivou a buscar compreender a razão das dificuldades para a compreensão do RRS da língua natural na Geometria Analítica. Dessa maneira, conforme a trajetória descrita na seção anterior, o caminho traçado para o delineamento desta pesquisa vem sendo construído há algum tempo, apesar da pouca experiência desta pesquisadora como educadora matemática. Utilizando como base a Semiótica e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), iniciamos a construção do nosso Projeto de Pesquisa, que foi unida aos pressupostos Bakhtinianos, por desafio do nosso orientador, para que buscássemos criar um diálogo entre a Semiótica e o Discurso presente nas aulas de Geometria Analítica no Ensino Médio.

Corroborando esse direcionamento, mais adiante veremos que as diversas representações dos objetos trabalhadas na Geometria Analítica são fundamentais para a mobilização dessas representações e para o processo de produção de significados por parte dos alunos.

Dentre os conteúdos da Geometria Analítica, escolhemos o de Cônicas para realizar esse estudo, pois, de acordo com Santos (2014), esse conteúdo por si já demanda uma grande quantidade de conhecimentos prévios como triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras, produtos notáveis, plano cartesiano, gráfico de funções, distância entre pontos, equações da circunferência e da reta, dentre outros.

E, nas palavras de Volpato e Cargnin (2016, p. 1), esse tema

> ainda é um conteúdo que apresenta dificuldades na compreensão pelos alunos do Ensino Médio e algumas vezes é deixado de lado por professores que "esquecem" desse conteúdo em seus planejamentos. E muitas das vezes quando são abordadas no ensino médio, os professores a apresentam [o conteúdo de cônicas] utilizando somente a sua representação algébrica.

Pesquisas em Educação Matemática, em especial sobre TRRS, nos apontam que uma pluralidade de Registros de Representação Semiótica é um fator importante para a aprendizagem em Matemática. Entretanto, essa mesma pluralidade pode gerar dificuldades na compreensão, quando esses registros não são abordados com naturalidade pelo professor em sala de aula, que muitas vezes prioriza apenas a representação algébrica em detrimento das demais representações.

Em outras palavras, possibilitamos ao aluno reconhecer os objetos da Geometria Analítica a partir de uma equação (representação algébrica), das figuras (representação geométrica), dos seus gráficos (representação gráfica) e de seus conceitos, denominações e enunciados (representação em língua natural)[15]. Nesse sentido, podemos ainda estimular o aluno a refletir sobre as relações entre as diversas representações e suas transformações, em busca da aprendizagem matemática e, para isso, apresentamos na nossa pesquisa os aspectos essenciais para a compreensão da TRRS.

[15] Esses tipos de representações não são exclusividade da Geometria Analítica. Aqui nos referimos ao fato de que o aluno pode dispor de representações diversas para acessar os conteúdos em questão dessa área.

Na seção seguinte apresentamos o problema de pesquisa que norteia nossa investigação.

1.3 Em busca de respostas

Quando nos referimos à Geometria Analítica, esta apresenta (ou pode apresentar) um salto epistemológico, por trazer um entrelace entre Álgebra, Geometria e Aritmética. Temos, então, uma grande e rica oportunidade de estudar as diversas representações dos objetos matemáticos. No campo da semiótica, por exemplo, significa reconhecer, a partir de uma equação (representação algébrica), os gráficos (representação gráfica) e as denominações, como reta, elipse, circunferência (representação em língua natural).

A partir dessas diferentes representações, podemos compreender as relações entre as mesmas, que identificam um mesmo objeto matemático, bem como, realizar transformações, que será o trabalho cognitivo de relacioná-las. Isto se estende, desde o campo básico dos entes fundamentais (ponto, reta e plano) até as representações destes conceitos ou objetos nas diversas atividades humanas. Tanta riqueza tem sido, de maneira geral, subtraída pelo fato de se tratar a Geometria Analítica com excessivo algebrismo, desprovido de significados, e sem a relação adequada com os objetos geométricos representados.

De acordo com Silva (2006), na aprendizagem de Geometria Analítica, muitos alunos apresentam dificuldades ao lidar com as diversas representações gráficas e algébricas de curvas planas, devido ao fato de desconhecerem a correspondência semiótica entre o registro das representações gráficas e da escrita algébrica.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) destacam que a Geometria Analítica possibilita a articulação entre a geometria e a álgebra, devendo o professor trabalhar o entendimento de figuras geométricas por meio de equações, e o entendimento de equações por meio de figuras geométricas, abandonando a apresentação de equações sem explicações fundadas no raciocínio lógico, evitando a memorização excessiva de fórmulas.

Evidenciamos, assim, a necessidade da utilização de diferentes Registros de Representação Semiótica (gráfico e algébrico) e do desenvolvimento de um trabalho didático que promova a articulação e a conversão entre esses registros.

Para fundamentar nossa pesquisa, trazemos, como referencial teórico dessa pesquisa, Frege (2011), Saussure (2008) e Peirce (1977, 1931-1935), na Semiótica; Duval (2003, 2009, 2011, 2012, 2014), com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Bakhtin (1993a, 1993b, 1997a, 1997b, 2002, 2006), com o discurso e o dialogismo; Gómez-Granell (1996, 1998), com a produção de significados em sala de aula, entre outros.

Subsidiados por esse aporte teórico, temos como objetivo geral de nossa pesquisa investigar sobre a compreensão do conteúdo de cônicas, em seus variados registros de representação, por meio das interações discursivas em aulas remotas. Para atingir esse objetivo, precisamos realizar atividades como: refletir sobre a importância da TRRS no processo de ensino de cônicas; investigar especificidades discursivas e de produção de significados no ensino de cônicas e possíveis consequências para a compreensão dos conceitos pelos discentes.

Dessa forma, buscamos responder à pergunta que fundamenta a nossa pesquisa: Quais são as dificuldades para a compreensão do conteúdo de cônicas, em seus variados registros, nas interações discursivas em aulas remotas?

Para responder a essa pergunta, desenvolvemos um trabalho de observação junto a uma turma do 3º Ano do Ensino Médio integrado ao Técnico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, campus Campina Grande, buscando respostas que pudessem contribuir para dirimir nossas inquietações.

1.4 Organização dos Capítulos

Para organização da pesquisa, dividimos nosso trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 2, apresentamos o referencial teórico que fundamenta o presente estudo, com as teorias acerca da Semiótica, ou seja, algumas das principais ideias sobre os estudos de Frege (2011), a Semiologia de Saussure (2008), a Semiótica de Peirce (1977) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Duval (2003, 2009, 2011, 2012, 2014).

No Capítulo 3, fazemos uma breve revisão sobre a linguagem e a língua materna com Machado (2001), a Teoria de Bakhtin (1993a, 1993b, 1997a, 1997b, 2002, 2006), com o discurso e o dialogismo e a linguagem matemática de Gómez-Granell (1996, 1998), com a produção de significados em sala de aula.

No Capítulo 4 apresentamos o estudo das cônicas e seus principais registros de representação semiótica.

No Capítulo 5, apresentamos detalhadamente a metodologia utilizada na pesquisa, as escolhas e os contextos envolvidos — a escola, o professor, o contexto da pandemia de COVID-19, a turma pesquisada e as aulas — e a forma de coleta e análise de dados.

No Capítulo 6, apresentamos uma breve descrição dos encontros observados na turma pesquisada, durante o 4º bimestre de 2020, sendo sete aulas síncronas e uma aula assíncrona.

No Capítulo 7, descrevemos as interações discursivas ocorridas durante a fase de coleta de dados e apresentamos a análise dos resultados dos dados coletados.

No Capítulo 8, apresentamos as considerações finais sobre a pesquisa realizada.

Ao final, apresentamos as Referências, os apêndices e anexos utilizados.

2 SOBRE OLHARES: TEORIAS ACERCA DA SEMIÓTICA

O que nos força a pensar é o signo. O signo é objeto de um encontro; mas é precisamente a contingência do encontro que garante a necessidade daquilo que ele faz pensar.[1]

Santaella e Noth (2017, p. 07) afirmam que "em um primeiro momento semiótica é a ciência dos sistemas e dos processos sígnicos na cultura e na natureza". Dessa maneira, a semiótica estuda as formas, os tipos, os sistemas de signos e os efeitos do uso dos signos, sinais, indícios, sintomas ou símbolos, desenvolvendo-se em processos de significação (Ibid.).

A palavra semiótica vem do grego antigo, onde *seméion* significa signo. Uma definição, que segundo Santaella e Noth (2017, p. 08) foi atribuída por Roman Jakobson aos medievais é a de que um signo é tido como "algo que está por algo", reduzindo seu significado a um dualismo entre o signo e seu objeto, ao qual ele se põe no lugar.

No sentido dado por Aurélio Agostinho (345–430), o signo é "uma coisa que, além da impressão que produz nos sentidos, faz com que outra coisa venha à mente como consequência dele", revelando o terceiro componente do signo: aquele que faz a conexão entre o signo e aquilo que ele representa na mente do intérprete do signo (SANTAELLA; NOTH, 2017, p. 08).

Dessa forma, o signo é aquilo que nos faz lembrar de algo e é perceptível aos nossos sentidos (SANTAELLA, 2006). O signo é essencial à linguagem e, consequentemente, à comunicação dos seres vivos, mesmo que não seja produzido apenas por eles.

Nós somos capazes de nos comunicar através da língua, dos sons, de imagens, gráficos, gestos, dos sentidos, entre outros. Dessa forma, a semiótica estuda os meios que possibilitam a comunicação, através dos signos, sejam estes verbais ou não–verbais. O Quadro 1 apresenta exemplos de signos classificados conforme o canal perceptivo.

Quadro 1 – Signos classificados conforme o canal perceptivo

Canal perceptivo	**Exemplos**
Visual (ou ótico)	imagens, esculturas, mercadorias, palavras escritas
Auditivo (ou acústico)	palavras da linguagem oral, gritos, música, buzinas, sirenes
Tátil	palavras "escritas" em braile, beijos, abraços
Olfativo	cheiro de flor, café, pão fresco, carne assada, perfume
Gustativo	paladar doce, ácido, amargo, sabor de vinho etc.
Térmico	sensação de calor, frio, morno etc.

Fonte: Santaella e Noth (2017, p. 11).

O verdadeiro estudo dos signos, conforme aponta Duval (2011, p. 28), teve início com a "elaboração de modelos de análise concernentes à diversidade dos signos e seu papel

[1] Deleuze (2006, p. 91).

no funcionamento da atividade científica e na comunicação".

De acordo com Pontes e Dionizio (2014) e Duval (2011), todos os trabalhos que tratam sobre a Semiótica tiveram contribuições de algum dos três modelos surgidos quase ao mesmo tempo, o de Peirce, entre 1890 e 1910 nos Estados Unidos, o de Saussure publicado em 1916 em Genebra, e os artigos de Frege, publicados em 1892 e 1894. Todos eles embasados em disciplinas diferentes para análise dos signos, pois Peirce apoia seu estudo nas ciências de um modo geral e na lógica, Saussure na Linguística e Frege na Matemática. Duval (2011) explica que cada um desses modelos difere na definição de signo, nos critérios de distinção de seus tipos, ou na descrição do funcionamento cognitivo que demandam.

Vejamos o quadro a seguir que apresenta os três problemas semióticos desses modelos:

Quadro 2 – Questões orientadoras das pesquisas de Peirce, Saussure e Frege

Peirce	**Saussure**	**Frege**
Como analisar a variedade dos tipos de representações no processo de interpretação de seu sentido?	O que constitui uma língua como um sistema comum de sentido, apesar das mudanças e variações resultantes de suas múltiplas utilizações?	Como explicar o progresso rigoroso e não tautológico do raciocínio matemático?

Fonte: Duval (2011, p. 29).

Partindo desses modelos, Duval (2011) questiona se eles seriam suficientes para explicar a atividade cognitiva necessária à aprendizagem matemática, sendo necessário adentrarmos as suas principais características para um direcionamento a respeito desse questionamento.

Dessa maneira, trazemos adiante um pouco sobre esses três modelos e, posteriormente, a TRRS.

2.1 Sobre o sentido e a referência

O título desta seção se refere à obra, de mesmo nome, de Gottlob Frege (1848–1925), filósofo alemão, que, de acordo com Miranda (2011), é seu artigo mais famoso. Segundo este autor, a obra "faz uma reflexão sobre a linguagem intimamente relacionada a problemas presentes em obras anteriores, particularmente na Conceitografia"[2] (Ibid., p. 12).

Frege procurou responder ao longo de seus estudos qual é a base do conhecimento aritmético. E, em seu projeto (o logicismo), buscou justificar as proposições da aritmética

[2] Conceitografia é um livro publicado por Frege em 1879. De acordo com Miranda (2011, p. 12), nele o autor pretende "construir provas para noções e princípios elementares da aritmética a partir de noções e princípios elementares da lógica".

a partir das leis e princípios lógicos, revelando que "a capacidade de pensar logicamente é a base do conhecimento aritmético" (Ibid., p. 11).

Segundo Duval (2011, p. 34), Frege não propôs uma definição de signo, mas, para ele, "os signos são escritas simbólicas em álgebra e em análise. Diferentemente de Saussure e Peirce, ele se interessou diretamente pelo modo de produção semiótica que possa ter valor ao mesmo tempo de prova e de descoberta matemática". Dessa forma, Frege retoma o dilema de Kant, de "como explicar como que um raciocínio matemático seja ao mesmo tempo logicamente rigoroso e cientificamente produtor de um novo conhecimento" (Ibid., p. 34).

Frege formula a oposição entre duas escritas: (i) $a = a$ (tautologia); (ii) $a = b$ (equivalência), explicando esta última, base do cálculo e do raciocínio matemático, através da distinção entre sentido e referência (DUVAL, 2011). Vejamos:

> A conexão regular entre o símbolo, seu sentido e a sua referência é tal que ao símbolo corresponde um sentido determinado, que por sua vez corresponde a uma referência determinada, enquanto à referência (a um objeto) não é só um símbolo que lhe corresponde. O mesmo sentido tem diferentes expressões em linguagens diferentes, até na mesma linguagem (FREGE, 2011, p. 23).

Nas palavras de Miranda (2011, p. 11)

> [...] a obra de Frege é fundamental para o desenvolvimento da filosofia no século XX, podendo ser considerada um marco inicial da filosofia analítica. Frege exerceu enorme influência sobre o pensamento de autores importantes dessa tradição, como, por exemplo, admitem explicitamente Wittgenstein e Carnap. Ele é também o responsável por inovações técnicas e conceituais que permitiram o grande desenvolvimento da lógica no século passado, desenvolvimento esse que é indissociável da história da tradição analítica. Além disso, a sua obra introduziu as questões e inaugurou o modo contemporâneo de fazer filosofia em diversas áreas, como, por exemplo, filosofia da lógica, filosofia da matemática e filosofia da linguagem, além de ter enriquecido sensivelmente o debate filosófico em áreas centrais como a epistemologia e a metafísica.

Segundo Pontes e Dionizio (2014), os estudos de Frege contribuíram para a distinção entre sentido e referência e, de acordo com o que afirma Miranda (2011, p. 18), sua obra apresenta muitas implicações para a filosofia da linguagem, e suas posições são vastamente defendidas ou refutadas por diversos autores. Para nosso estudo, concordamos com o posicionamento de Duval (2011, p. 35), quando afirma que

> O limite da contribuição de Frege é que ele considerou as escritas simbólicas utilizadas em álgebra e em análise como modelo de todas as representações utilizáveis em matemática e que ele não viu a importância dos outros sistemas semióticos para a matemática.

Conforme o entendimento de Frege, o discurso em língua natural para poder contribuir com o conhecimento (matemático) dos indivíduos precisaria se apresentar segundo um processo de substituição controlável (DUVAL, 2011). No entanto, entendemos que a utilização da língua natural nos discursos em sala de aula (ou nas diversas situações cotidianas) não se adéqua a essa situação e assim torna-se evidente a insuficiência desse modelo.

Passamos então para o próximo modelo na seção a seguir, em que tratamos de aspectos relacionados à Semiologia de Saussure.

2.2 Semiologia de Saussure

Outro modelo acerca da Semiótica é o que ficou conhecido como Semiologia, conforme abordamos nesta seção. Para compreendermos a origem desse modelo, julgamos necessário falar um pouco sobre a relação da Matemática e dos símbolos.

Almeida (2013, p. 89) afirma que "a Matemática é por sua própria natureza, a ciência dos símbolos". Segundo o pensamento de Cassirer, trazido por esse mesmo autor, um símbolo não tem existência real, mas apresenta um significado. Dessa forma, a evolução humana aponta para o pensamento simbólico como um comportamento moderno e o homem é caracterizado como um ser simbólico, fato observado ainda na era paleolítica, quando o homem utilizava símbolos em imagens feitas nas paredes das cavernas, através da representação de rituais, aparentemente mágicos, envolvendo a caça.

Ferdinand de Saussure (1857–1913), considerado o fundador da linguística moderna, desenvolveu a noção de *estrutura*, distinguindo *langue* (língua) e *parole* (palavra), a estrutura e o discurso produzido com ela e diferenciou estudos diacrônicos dos sincrônicos, em que os primeiros examinam uma linguagem ao longo do tempo e os últimos, examinam uma linguagem em um dado tempo (Ibid.). Esse autor lecionou três cursos de Linguística Geral nos anos de 1906–1907, 1908–1909 e 1910–1911, entretanto não deixou quase nada escrito e, de acordo com Pontes e Dionizio (2014), a escrita de seu livro com o mesmo nome só foi possível graças às anotações de alguns de seus estudantes[3].

Em sua obra, Saussure (2008, p. 37) afirma que "a Linguística é constituída inicialmente por todas as manifestações da linguagem humana", considerando que todas as formas de expressão estão intimamente relacionadas com outras ciências e que suas questões interessam a todas as áreas, pois a linguagem é mais importante que qualquer fator cultural. Dessa maneira, "a língua é um sistema de signos que exprimem ideias, e é comparável, por isso, à escrita, ao alfabeto dos surdos-mudos, aos ritos simbólicos, às formas de polidez, aos sinais militares, etc. Ela é apenas o principal desses sistemas" (Ibid., p. 47).

Pontes e Dionizio (2014, p. 217) explicam que "a preocupação de Saussure era fundar uma ciência da linguagem verbal, e não algo mais amplo que a Linguística. Para

[3] Cf. SAUSSURE, 2008, prefácio à primeira edição.

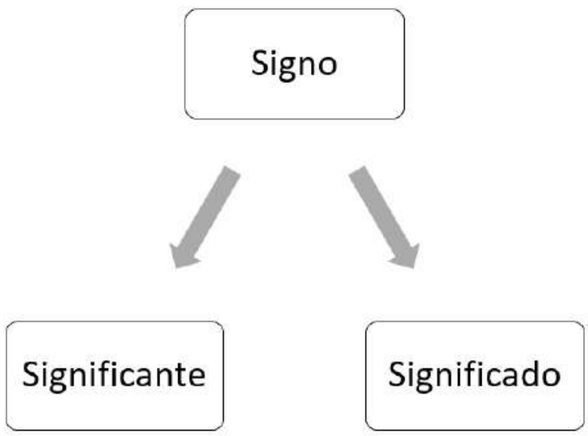
isso, porém, ele sentiu a necessidade de uma ciência mais abrangente, a que ele batizou de *semiologia*". Nesse viés,

> pode-se, então, conceber uma ciência que estude a vida dos signos no seio da vida social; ela constituiria uma parte da Psicologia social e, por conseguinte, da Psicologia geral; chamá-la-emos de Semiologia (do grego *semeîon*, "signo"). Ela nos ensinará em que consistem os signos, que leis os regem. [...] A Linguística não é senão uma parte dessa ciência geral (SAUSSURE, 2008, p. 47).

Dessa maneira, a Semiologia, para Saussure (2008), é uma área do conhecimento que se dedica a compreender os sistemas de significação desenvolvidos pela sociedade. Tem por objeto os conjuntos de signos, quer sejam eles linguísticos, visuais, ritos ou costumes. Um signo é tudo que representa algo, é a combinação do significado e o significante, ou seja, do conceito com o objeto em si. A Linguística é, então, uma parte dessa ciência, pois representa um sistema de signos verbais, enquanto aquela representa um sistema de signos gerais.

Pontes e Dionizio (2014) revelam que a maioria dos conceitos de Saussure são baseados em díades, excluindo o objeto de referência, diferentemente do que observamos nos estudos de Peirce, que considerava as estruturas dos fenômenos triádicas. Assim, na Semiologia signo é a combinação entre significado e significante, conforme apresentado na Figura 1:

Figura 1 – Signo para Saussure



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Para Saussure (2008, p. 128), o signo linguístico é a combinação entre conceito (significado) e imagem acústica (significante), apresentando dois princípios: i) a arbitrariedade, por ser o signo arbitrário em relação ao significado, não apresentando nenhuma ligação natural com a realidade; ii) "o caráter linear do significante", desenvolvendo-se numa mesma linha em cadeia, pois, por ter natureza auditiva, desenvolve-se no tempo, não sendo possível realizar a pronúncia de dois elementos simultaneamente, ao contrário do signo visual, em que há essa possibilidade.

Os trabalhos de Saussure apresentam uma grande contribuição para a Semiótica. É importante ressaltar que os termos Semiótica e Semiologia se referem ao mesmo campo de estudo, entretanto o termo Semiótica foi pacificado como o nome da ciência geral dos signos pela Associação Internacional de Estudos Semióticos em 1969[4].

Quanto ao modelo ora apresentado, Duval (2011, p. 32) afirma que

> O limite do modelo de Saussure deve-se ao fato de sua análise eliminar imediatamente a diversidade de enunciados que a língua permite produzir, assim como as operações discursivas que essa produção requer. Saussure começa separando o sistema semiótico que constitui uma língua e a utilização que os locutores dela fazem, para se interessar somente pela língua. Quando em didática falamos de «linguagem» é pelos discursos que nos interessamos e não pelo sistema semiótico.

Na seção a seguir tratamos de aspectos relacionados à Semiótica de Peirce.

2.3 Semiótica de Peirce

De acordo com Santaella (2006), Charles Sanders Peirce (1839–1914)[5] foi um cientista, químico, matemático, físico, astrônomo. Era ainda um estudioso da Biologia e da Geologia, realizando importantes contribuições no campo da Geodésia, Metrologia e Espectroscopia. Dedicou-se ainda à Linguística, Filologia e História e fez grandes contribuições à Psicologia.

---

4 Conforme informação disponível em <https://www.significados.com.br/semiologia/>.

5 De acordo com as informações disponíveis em <https://www.hup.harvard.edu/catalog.php?isbn=9780674138032>, os estudos de Peirce, a que aqui nos referimos, tratam da compilação de suas obras em *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, traduzida para o português no livro (Cf. PEIRCE, 1977). Essas obras incluíram os principais escritos de Peirce em filosofia geral, lógica (dedutiva, indutiva e simbólica), pragmatismo e metafísica, em que o volume VII contém artigos sobre ciência experimental, método científico e filosofia da mente e o volume VIII contém correspondências das revisões de Peirce, e correspondências e uma bibliografia de seus trabalhos publicados, discursos e correspondências publicadas e obras de outros autores que citam ou descrevem manuscritos de Peirce que não estão incluídos nos Volumes I–VIII de The Collected Papers. Muitos dos seus manuscritos nunca haviam sido publicados ou estavam espalhados em diversos periódicos. O trabalho de Peirce na ciência experimental desempenhou um papel importante em sua vida e na formação de sua filosofia. O volume II inclui seu único artigo publicado em psicologia experimental e duas peças curtas sobre gravidade, bem como a parte mais importante de *A Lógica de 1873* (em que o pragmatismo foi formulado pela primeira vez por escrito); *A Lógica do Desenho da História a partir de documentos antigos*, discussão do método histórico; *Economia da Pesquisa* (1879), contendo muitas reflexões pertinentes sobre a metodologia científica. Foi o primeiro filósofo e lógico original da América, e fundador da filosofia do pragmatismo. A bibliografia no Volume VIII lista cronologicamente todos os trabalhos publicados conhecidos de Peirce, dando uma visão clara do desenvolvimento de seu pensamento de 1860 a 1911. É mais completo do que qualquer outro publicado. No sítio <https://www.hup.harvard.edu/results-list.php?collection=1442> encontramos a informação de que os volumes I e II foram publicados em 01/01/1932, os volumes III e IV em 01/01/1933 e os volumes V e VI em 01/01/1935 (todos editados por Charles Hartshorne e Paul Weiss). Já os volumes VII e VIII foram publicados em 01/01/1958 (editados por Arthur W. Burks).

> Um cientista, portanto, ele jamais deixou de ser, tendo produzido contribuições importantes e originais na Matemática e outras ciências até poucos dias antes de sua morte, em 1914. No entanto, por trás de tudo isso, existia um fio condutor: sendo um cientista, Peirce era, acima de tudo, um lógico. Essa foi a grande e irresistível paixão de toda a sua vida. A quase inacreditável diversidade de campos a que se dedicou pode ser explicada, portanto, devido ao fato de que se devotar ao estudo das mais diversas ciências exatas ou naturais, físicas ou psíquicas, era para ele um modo de se dedicar à Lógica (Ibid., p. 3).

Começou a estudar Kant aos 16 anos, levando para a Filosofia o espírito da investigação científica, propondo aplicar na Filosofia os métodos de observação, hipóteses e experimentos que são praticados nas ciências, feitas as devidas adaptações e passou a ser considerado um filósofo depois da sua morte (SANTAELLA, 2006).

A mesma autora nos fala que

> [...] desde o começo do despertar do seu interesse pela Lógica, Peirce a concebeu como nascendo, na sua completude, dentro do campo de uma teoria geral dos signos ou Semiótica. Primeiramente, ele concebeu a lógica propriamente dita (aquilo que conhecemos como Lógica) como sendo um ramo da Semiótica. Mais tarde, ele adotou uma concepção muito mais ampla da Lógica que era quase coextensiva a uma teoria geral de todos os tipos possíveis de signos. Na última década de sua vida, estava trabalhando num livro que se chamaria Um Sistema de Lógica, considerada como Semiótica (Ibid., p. 20–21).

A partir dos estudos de Peirce, Santaella (2006, p. 2) nos explica que "a Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido" . Essa ciência surgiu quase ao mesmo tempo: nos EUA, na antiga União Soviética e na Europa Ocidental, após a Revolução Industrial, fazendo surgir uma "consciência semiótica", através da disseminação de linguagens e códigos. Afinal, "as linguagens estão no mundo e nós estamos na linguagem" (Ibid., p. 13).

Peirce (1977)[6] considerava a Lógica dentro do campo da teoria geral dos signos, dedicando os últimos 30 anos de sua vida a seu estudo. A semiótica peirciana pode ser considerada uma "Filosofia científica da linguagem" (SANTAELLA, 2006, p. 4).

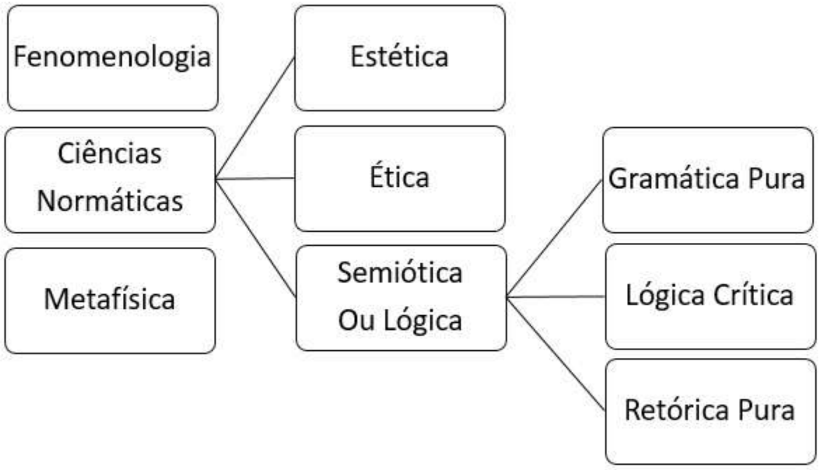
A partir do instante que Peirce percebeu a relevância de seus estudos para a história da filosofia, seus trabalhos nas diferentes áreas lhe pareceram parte de um sistema coerente. Dessa forma, estruturou sua classificação das ciências, passando a localizar a Semiótica ou Lógica neste sistema. Assim, deu prosseguimento a sua doutrina formal dos signos (Ibid.).

---

[6] Obra original:
PEIRCE, C. S. **The Collected Papers of Charles Sanders Peirce**. Charlottesville: Intelex Corporation, 1931–1935. Eletronic edition reproducing Vols. I–VI [C. Hartshorne and P. Weiss (eds.), Cambridge: Harvard University Press, 1931–1935]; Vols. VII—VIII [A. W. Burks (ed.), same publisher, 1958].

A Fenomenologia é a ciência que permeia a Semiótica de Peirce, e deve ser entendida nesse contexto. Assim, o edifício filosófico peirceano é organizado da seguinte maneira:

Figura 2 – Edifício filosófico peirceano



Fonte: Adaptada de Santaella (2006, p. 6).

Santaella (2006) aponta que, segundo essa arquitetura filosófica, as ciências normativas se desenvolvem sob a base da Fenomenologia, na seguinte sequência: Estética, Ética e Semiótica ou Lógica. A Estética é a ciência do que "é admirável", independente de razão, sendo a base para a Ética, que é a ciência da conduta. Com base em seus princípios, estão "a Semiótica, teoria dos signos e do pensamento deliberado" (Ibid., p. 31–32). E, finalmente, encontra-se a metafísica. A mesma autora, explica que:

> Foi só através da observação direta dos fenômenos, nos modos como eles se apresentam à mente, que as categorias universais, como elementos formais do pensamento, puderam ser divisadas. Pela acurada e microscópica observação de tudo o que aparece, Peirce extrai os caracteres elementares e gerais da experiência que tornam a experiência possível. Desse modo, sua pequena lista de categorias consiste de concepções simples e universais. Elementares porque são constituintes de toda e qualquer experiência, universais porque são necessárias a todo e qualquer entendimento que possamos ter das coisas, reais ou fictícias (SANTAELLA, 2006, p. 34).

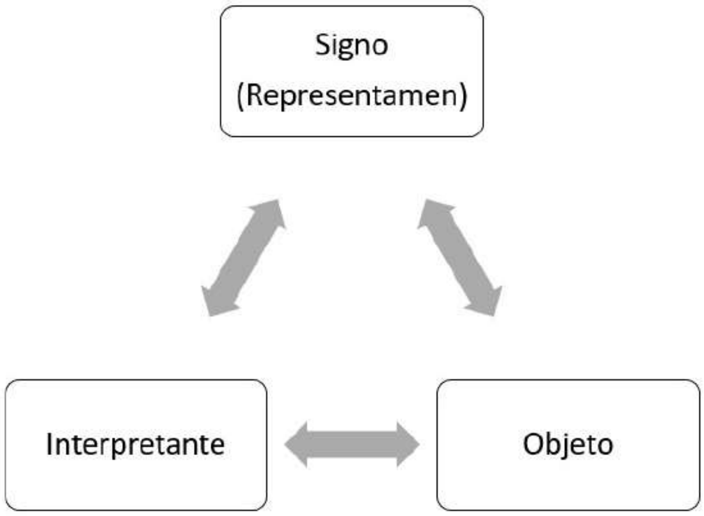
E explica ainda que entende-se por fenômeno:

> qualquer coisa que esteja de algum modo e em qualquer sentido presente à mente, isto é, qualquer coisa que apareça, seja ela externa (uma batida na porta, um raio de luz, um cheiro de jasmim), seja ela interna ou visceral (uma dor no estômago, uma lembrança ou reminiscência, uma expectativa ou desejo), quer pertença a um sonho, ou uma ideia geral e abstrata da ciência, a fenomenologia seria, segundo Peirce, a descrição e análise das experiências que estão em aberto para todo homem, cada dia e hora, em cada canto e esquina de nosso cotidiano (Ibid., p. 7).

A observação desses fenômenos possibilita o desenvolvimento das capacidades de contemplação, discriminação das diferenças e observações em classe abrangentes, necessárias para definir algumas classes (PONTES; DIONIZIO, 2014).

Após essa trajetória acerca da Semiótica peirceana, podemos adentrar à definição de signo no modelo discutido. Dessa forma, "um signo, ou *representamen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. [...] o signo representa alguma coisa, seu *objeto*" (PEIRCE, 1977, p.46). Segundo este autor, um signo gera um outro signo equivalente, chamado de *interpretante* na mente de alguém, conforme podemos observar na tríade peirceana ilustrada na Figura 3.

Figura 3 – Tríade peirceana



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Dessa maneira, a Semiótica de Peirce estabelece uma relação triádica entre objeto, representamen e interpretante, em que um objeto da realidade é representado por um signo (*representamen*) e gera uma representação mental (*interpretante*), fazendo com que se estabeleça a compreensão daquele objeto representado (PEIRCE, 1977). Em outras palavras:

> um Signo, ou *Representâmen*, é um Primeiro que se coloca numa relação triádica genuína tal com um Segundo, denominado seu *Objeto*, que é capaz de determinar um Terceiro, denominado seu *Interpretante*, que assuma a mesma relação triádica com seu Objeto na qual ele próprio está em relação com o mesmo Objeto. A relação triádica é *genuína*, isto é, seus três membros estão por ela ligados de um modo tal que não consiste em nenhum complexo de relações diádicas. Essa é a razão pela qual o Interpretante, ou Terceiro, não se pode colocar numa mera relação diádica com o Objeto, mas sim deve-se colocar-se numa relação com ele do mesmo tipo da assumida pelo Representâmen. [...] Um *signo* é um Representâmen com um Interpretante mental (Ibid., p. 63).

Vejamos a seguir um pouco mais sobre a concepção triádica dos fenômenos proposta por Peirce.

2.3.1 Concepção triádica dos fenômenos

Peirce (1977) baseou sua teoria em uma concepção triádica dos fenômenos, categorizando os signos em três tricotomias[7]:

> a primeira, conforme o signo em si mesmo for uma mera qualidade, um existente concreto ou uma lei geral, a segunda conforme seu objeto consistir no fato de o signo ter algum caráter em si mesmo, ou manter alguma relação existencial com esse objeto ou em sua relação com um interpretante; a terceira, conforme seu interpretante representá-lo como um signo de possibilidade ou como um signo de fato ou como um signo de razão. (PEIRCE, 1977, p. 51–52)

Dessa forma, ele garantiu que toda percepção dos fenômenos pudesse acontecer por primeiridade, secundidade e terceiridade, termos diferenciados para evitar confusões com outros existentes, limitando esses fenômenos ao número de três, cujas gradações são infinitas. No quadro a seguir, estão dispostas as três tricotomias de Peirce e os signos resultantes:

Quadro 3 – Tricotomias e signos resultantes

Relações	**1ª Tricotomia**	**2ª Tricotomia**	**3ª Tricotomia**
Primeiridade	Qualissigno	Ícone	Rema
Secundidade	Sinsigno	Índice	Dicente
Terceiridade	Legissigno	Símbolo	Argumento

Fonte: Elaborado pela autora com base em Peirce (1977), 2022.

Conforme explica Santaella (2006), primeiridade é a impressão inicial do signo. É tudo que está na mente de alguém no instante presente e imediato, é a primeira sensação, não devendo a qualidade de sentimento de um determinado objeto ser confundida com o próprio objeto. “A consciência em primeiridade é a primeira apreensão das coisas, que para nós aparecem” (Ibid., p. 46).

Secundidade é a distinção da impressão inicial, dando forma à realidade. É identificar a qualidade inicial como uma parte do fenômeno, associando-a à “factualidade do existir” (secundidade), que “está nessa corporificação material”. (Ibid., p. 46).

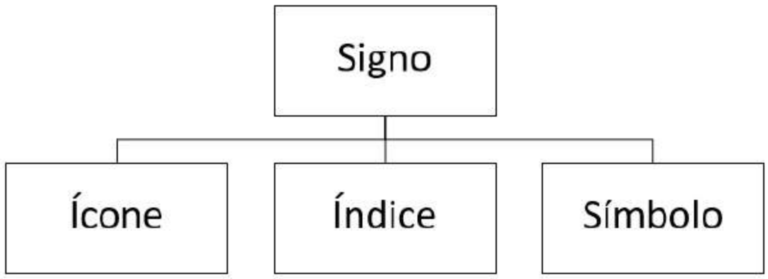
Terceiridade é a compreensão do objeto, chegando à conclusão do que o signo representa. É a interpretação do fenômeno, é o terceiro dos três elementos que constituem as categorias universais do pensamento e da natureza. É quando um objeto passa a representar alguma coisa (signo). “Finalmente, terceiridade, que aproxima um primeiro e um segundo numa síntese intelectual, corresponde à camada de inteligibilidade, ou

[7] Peirce (1977) descobriu que existem dez tricotomias e sessenta e seis classes de signos.

pensamento em signos, através da qual representamos e interpretamos o mundo” (Ibid., p. 50).

Analisando as tricotomias constantes no Quadro 3, a segunda delas diz respeito ao signo em relação a seu objeto e, segundo Duval (2011), é a mais relevante para a aquisição do conhecimento matemático. Destarte, em seu caráter interpretativo, o signo pode ser denominado conforme apresente características próprias a um objeto (ícone), seja afetado por um objeto (índice), ou que se refira a um objeto em virtude de uma associação arbitrária com ele (símbolo), conforme podemos observar no esquema da Figura 4.

Figura 4 – Signo, para Peirce



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

De acordo com Peirce (1977), essa é a divisão dos signos mais importante. Assim, apresentamos no Quadro 4 um pouco sobre essa divisão.

Quadro 4 – Segunda Tricotomia dos Signos

Ícone	**Índice**	**Símbolo**
É um signo que representa seu objeto por similaridade, possuindo características do próprio objeto, que possibilitam estabelecer relação de semelhança entre ambos. Como exemplos de ícones, podemos destacar as imagens, alguns diagramas, fotografias, desenhos etc., que guardem semelhanças com os objetos a que se referem.	É um signo que apresenta relação de causalidade com o objeto. Como exemplos temos o gingado de um marinheiro, as pernas arqueadas de um jóquei, o cheiro de fumaça, nuvens escuras, pegadas na areia, uma batida de porta, um relâmpago etc.	É um signo que denota um objeto de forma arbitrária, ou seja, o símbolo se refere a um objeto por convenção, em que seu significado lhe foi atribuído. É aquele que “consiste em ser uma regra que determinará seu Interpretante” (PEIRCE, 1977, p. 71). São exemplos, os símbolos religiosos, as palavras, as frases, os símbolos matemáticos etc.

Fonte: Elaborado pela autora com base em Peirce (1977), 2022.

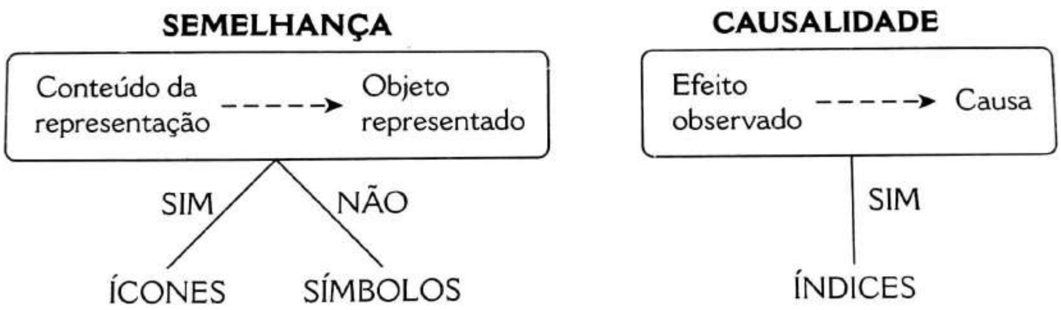
Peirce (1977, p. 11) nos diz que deve haver três classes de signos, devido à conexão tripla entre "signo, coisa significada, cognição produzida na mente".

> Pode haver apenas uma relação de razão entre o signo e a coisa significada; neste caso, o signo é um *ícone*. Ou pode haver uma ligação física direta; neste caso, o signo é um *índice*. Ou pode haver uma relação que consiste no fato de a mente associar o signo com seu objeto; neste caso, o signo é um nome (ou *símbolo*).

O mesmo autor considera o símbolo como "nome geral ou descrição que significa seu objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e o caráter significado" (Ibid., p. 10).

Na visão de Duval (2011, p. 33) a segunda tricotomia de Peirce é a mais relevante para a compreensão da aquisição do conhecimento matemático pelos alunos, por tratar das representações em função de sua relação com o objeto que evocam, em uma relação de semelhança ou causalidade, conforme esquema da Figura 5.

Figura 5 – Partição triconômica em função de sua relação com o objeto



Fonte: Duval (2011, p. 33)

Duval (2011, p. 33) argumenta que essa tricotomia é, na verdade, "uma justaposição segundo dois critérios: seja a similaridade entre o conteúdo de uma representação dada e o objeto representado, seja uma relação de causalidade entre a ocorrência de um fenômeno e o que pode ser a causa". Dessa maneira, o autor ressalta as limitações desse modelo, questionando-se se definições, enunciados e expressões simbólicas seriam consideradas o mesmo tipo de representação, pois essa segunda tricotomia não considera as propriedades específicas dos signos, ou seja, sua relação de referência com o objeto e não de causalidade. Ressalta ainda que

> A Matemática é o domínio do conhecimento no qual existe quase sempre, se não sempre, prioridade das representações sobre os objetos de conhecimento. E o ensino da matemática lembra brutalmente aos professores que a distinção entre os objetos matemáticos e suas múltiplas representações constitui uma das principais dificuldades de compreensão na aprendizagem (Ibid., p. 34)

Concordamos com Duval (2011, p. 36), quando em suas conclusões sobre qual desses modelos seria o mais adequado para a aquisição do conhecimento matemático ressalta que:

> Nenhum modelo é realmente utilizável. Certamente, cada um desses modelos considerou uma ideia essencial para poder analisar o papel dos signos e das representações no conhecimento em geral. Mas, os modelos propostos são inadequados em relação a tudo que podemos observar sobre o funcionamento e o desenvolvimento da atividade matemática.

Dessa maneira, Duval (2011) se refere aos signos e às representações como maneiras pelas quais podemos ter acesso aos objetos que ambos representam, que têm o papel de se colocar no lugar do objeto representado, sem que sejam confundidos com o próprio objeto. Entretanto, segundo o mesmo autor, signos e representações diferem pela natureza da relação com esse objeto representado. Assim, "a relação entre os signos e os objetos não contém nenhuma interação, mas é apenas uma relação de referência dependendo do sistema semiótico utilizado, a língua, um sistema de numeração, etc." (Ibid., p. 37), podendo haver ambiguidade ou dificuldade com as definições de signo. Com o maior desenvolvimento da linguagem matemática o mesmo autor afirma ser preferível falar em representações semióticas, pois estas apresentam duas características que não podem ser encontradas nos signos, quais sejam: (i) "elas têm uma organização interna que varia de um tipo de representação semiótica para outra" (Ibid., p. 37–38); (ii) "existem sempre várias maneiras de distinguir as unidades de sentido ou os níveis de organização" (Ibid., p. 38).

Para compreendermos um pouco mais sobre os estudos de Duval passamos, na seção seguinte, a falar sobre a TRRS.

2.4 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Duval (2011) apresenta em sua obra uma comparação entre os principais aspectos dos modelos de Frege, Saussure e Peirce, levantando o questionamento acerca de qual dos modelos apresentados seria mais apropriado para analisar a aquisição da aprendizagem matemática. Conforme visto na seção anterior, sua conclusão é que nenhum deles é suficiente, pois, mesmo tendo utilizado o papel dos signos e das representações para o conhecimento geral, apresentam limitações quando tratamos do desenvolvimento da atividade matemática, pois, para esse autor, a relação dos signos com o que eles significam é uma relação de referência e não de causalidade.

Dessa forma, adentramos aos estudos de Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, cujo enfoque é a construção de um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, a partir da mudança de registros de representação semiótica.

Duval (2014) evidencia diferenças entre a aprendizagem em matemática e em outras áreas do conhecimento. O autor afirma que as teorias que defendem que os processos de aquisição de conhecimento são os mesmos para a matemática e outras áreas ignoram dois pontos fundamentais, sejam a dificuldade da maioria dos alunos da educação básica na aprendizagem dos conteúdos matemáticos — o que não acontece da mesma maneira nas ciências baseadas na experimentação e observação — e a exigência da utilização de vários sistemas de representação para acessar os objetos matemáticos, que são abstratos.

Corroborando essa ideia, Damm (1999, p.137) afirma que:

> A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apresentação o uso de uma representação. Neste caso, a representação através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático.

Destacamos o fato de que a representação não é o próprio objeto, pois, como falamos, este é abstrato, mas é o seu representante, por meio do qual temos acesso a ele. Para Duval (2012) esse fato se constitui em um paradoxo cognitivo do pensamento matemático, pois a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual, uma vez que é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível.

Achamos relevante trazer em nosso texto o que nos apresenta o texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[8]:

> As competências que estão diretamente associadas a representar pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, uma vez que todas as áreas têm seus processos de representação, em especial nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática — verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas — e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio. (BRASIL, 2017a, p. 529).

No texto desse documento oficial, podemos observar a importância atribuída aos registros de representação para a aquisição das competências ligadas à área da Matemática e suas Tecnologias e promoção da aprendizagem matemática.

Na TRRS, Duval (2011) explica que deve haver uma diferenciação entre signo e representações, constantemente confundidos devido à sua função de se colocar no lugar

[8] BNCC: Seção 5.2. A Área de Matemática e suas Tecnologias.

do objeto que eles representam ou designam. Conforme observado na Seção 2.3, enquanto os signos apresentam uma relação de referência com os objetos, não apresentando com eles nenhuma interação, as representações semióticas são preferíveis para relacionar à linguagem matemática. Dessa forma, a representação semiótica é "produzida intencionalmente pela mobilização de um sistema semiótico de representação, a língua natural sendo o primeiro sistema semiótico", enquanto a não semiótica "é produzida automaticamente, de maneira não intencional, quando não se trata de instrumentos" (DUVAL, 2011, p. 38).

Dessa maneira, de acordo com Duval (2012, p. 269), as representações semióticas são "produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento", possibilitando a exteriorização das representações mentais dos indivíduos (fórmulas, gráficos, enunciados em língua materna, figuras geométricas, etc.).

Assim,

> [...] as representações semióticas são as frases em língua natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços. Muitas vezes associamos os signos a essas unidades elementares de sentido, que são apenas caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, ou os gestos da mão. O que equivale a considerar os signos como as «coisas» pelas quais é preciso começar para dar um sentido! (DUVAL, 2011, p. 38).

Julgamos necessário acrescentar que, para Duval (2003), o objetivo do ensino da Matemática na formação inicial[9] é contribuir para o desenvolvimento da capacidade de análise, raciocínio e visualização dos alunos e não formar futuros matemáticos, como muitos professores e instituições de ensino parecem almejar. Nesse sentido, o autor destaca a necessidade de uma abordagem cognitiva para tentar compreender as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentam na Matemática, apresentando duas questões preliminares fundamentais:

> 1. Quais os sistemas cognitivos são necessários mobilizar para ascender aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?
>
> 2. Esses sistemas cognitivos são os únicos a ser mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (geologia, astronomia, física, biologia, etc.) e práticos, ou, ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática? (Ibid., p. 12).

Questões históricas e epistemológicas são apontadas por Duval (2003) na tentativa de explicar as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos

[9] Compreendemos que a formação inicial mencionada por Duval é o que a LDB, Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, considera como educação básica, compreendida por pré-escola, ensino fundamental e ensino médio (BRASIL, 1996).

conceitos matemáticos. Entretanto, o autor enfatiza que atividade cognitiva para a compreensão da Matemática deve ser procurada em duas características: a importância primordial das representações semióticas e a variedade de representações semióticas que são utilizadas em Matemática — Registros de Representação — classificados em quatro tipos bem diferentes de registros, conforme o Quadro 5.

Quadro 5 – Classificação dos registros mobilizáveis no funcionamento matemático

Registros	Representação Discursiva	Representação não discursiva
MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural, associações verbais (conceituais), forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações e crenças; • dedução válida a partir de definição e teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva • apreensão operatória e não somente perspectiva; • construção com instrumentos.
MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: • numéricas; • algébricas; • simbólicas. Cálculo.	Gráficos cartesianos • mudanças de sistema de coordenadas • interpolação, extrapolação.

Fonte: Adaptado de Duval (2003, p. 14).

Para ser um registro de representação, um sistema semiótico deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais: a formação de uma representação identificável; o tratamento de uma representação; a conversão de uma representação, estas últimas são atividade cognitivas diferentes e independentes.

Segundo Duval (2003) tratamento é a transformação de uma representação semiótica em outra, correspondendo a uma transformação interna ao registro, não havendo alteração do tipo de registro. Como exemplo temos a resolução de uma equação, em que realizamos manipulações algébricas, modificando o formato da expressão anterior até chegarmos ao resultado desejado. Já a conversão é a transformação de uma representação semiótica em outra, na qual ocorre mudança de registro, mas se conserva o mesmo objeto de referência. Um exemplo é transformação da representação algébrica de uma função em sua representação gráfica.

As transformações de Registros de Representação Semiótica (RRS) podem ser observadas no Quadro 6.

Quadro 6 – Tipos de transformações de representações semióticas

Transformação	
Tratamento	**Conversão**
Permanece no mesmo sistema. Corresponde a procedimentos de justificação.	Muda de sistema, conservando a referência aos mesmos objetos.

Fonte: Duval (2003).

Nesse sentido, D'Amore e Bonomi (2012, p. 62) afirmam que:

> A construção do conhecimento matemático depende fortemente da capacidade de utilizar vários registros de representação semiótica dos referidos conceitos: representando-os em um dado registro; tratando tais representações no interior de um mesmo registro; fazendo a conversão de um dado registro para outro.

Nessa perspectiva, a TRRS preconiza que o fator essencial para que ocorra a aprendizagem em Matemática é a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação de um mesmo objeto. Para que ocorra uma conversão, segundo Duval (2003), é necessária a articulação entre as variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada registro. Dessa maneira, é necessário comparar a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada, verificando se esta última transparece na primeira, o que caracteriza uma congruência. Caso isso não ocorra, caracteriza-se a não-congruência. Ainda há a possibilidade de haver a heterogeneidade no sentido da conversão quando esta acontece espontaneamente em um sentido, mas não acontece com a mesma naturalidade quando invertemos o seu sentido. Para Duval (2009, p. 82):

> É preciso que um sujeito seja capaz de atingir o estado da coordenação de representações semioticamente heterogêneas, para que ele possa discriminar o representante e o representado, ou a representação e o conteúdo conceitual que essa representação exprime, instancia ou ilustra.

Na nossa concepção essa heterogeneidade pode ser agravada pelo fato de muitos professores e materiais didáticos priorizarem um registro de representação, mais especificamente o algébrico, não incentivando a prática de conversões, mas apenas os tratamentos deste registro, afastando do aluno a possibilidade de transitar espontaneamente entre as diversas representações de um mesmo objeto.

Nas palavras de Duval (2003, p.20):

> Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os casos mais

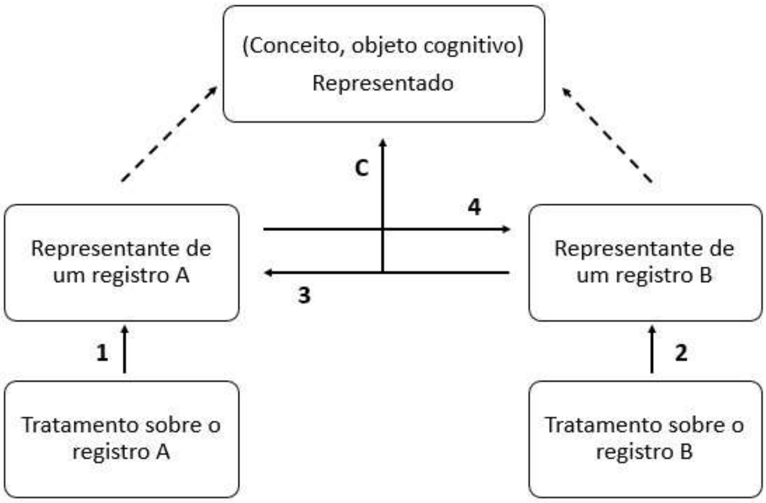
> frequentes. É preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis.

A existência dessa diversidade de registros de representação de um mesmo objeto matemático pode despertar no leitor o questionamento acerca de sua necessidade consequente coordenação entre esses registros. Duval (2012, p. 278) nos apresenta as respostas para esse questionamento quando aponta que a existência de vários registros de representação, possibilita a escolha da utilização daquela que permita uma maior economia de tratamento, uma vez que "[...] toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa", em que as representações possuem diferentes elementos, não sendo observados em diferentes representações os mesmos elementos. Dessa maneira, em determinadas situações um tipo de representação pode ser mais recomendado do que outro, permitindo efetuar de forma mais econômica seus tratamentos.

Para Duval (2009, p. 83), "a compreensão conceitual aparece ligada à descoberta de uma invariância entre representações semioticamente heterogêneas", sendo no modelo operatório que privilegia a função de objetivação (Figura 6), que a estrutura de representação deve ser analisada para compreensão do seu papel no funcionamento cognitivo do pensamento e não nos de expressão ou tratamento.

Dessa forma, a função de objetivação para Duval (2009, p. 88) é "essencial para analisar a relação entre a diversidade de registros e o funcionamento cognitivo do pensamento". Esse modelo descreve a estrutura de representação como uma correspondência entre dois sistemas de ações sobre objetos independentes. Dessa maneira, a conversão de registros de representação acontece entre dois registros de representação, não entre o sistema formado pelo objeto real e o sistema de representação. O modelo centrado nessa função está representado no esquema da Figura 6.

Figura 6 – Modelo de representação centrado sobre a função de objetivação



Fonte: Adaptada de Duval (2009)

Nas setas 1 e 2 estão representados os tratamentos a cada registro (transformações internas). Enquanto as setas 3 e 4 representam as conversões entre os registros A e B (transformações externas). Para que haja o que Duval chama de "compreensão integrativa" de uma representação é necessário que haja a coordenação entre esses registros em ambos os sentidos, chegando-se à seta C. Ressaltamos ainda que "o representante de um registro pode ser considerado como o representado de um outro registro" (Ibid., p. 89).

Duval (2003, p. 27) nos diz que, na articulação entre dois registros de representação de um objeto matemático, duas condições devem ser respeitadas:

> Primeiramente a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos de conversão; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não congruência.

Importante ressaltar que, de acordo com Duval (2009, p. 90), "para não confundir um objeto e sua representação [...] é necessário dispor de várias representações semioticamente heterogêneas desse objeto e coordená-las".

Isto posto, temos como utilizar a conversão dos RRS como instrumento de análise, através de um dado registro de partida, devendo este ser convertido em um registro de chegada, conservando as características do objeto matemático representado e respeitando a análise estrutural utilizada pelos linguistas desde Saussure (2008).

Finalizando a revisão dos pontos que acreditamos ser essenciais para a compreensão das teorias acerca da Semiótica, não poderíamos deixar de mencionar o destaque feito à TRRS pela BNCC[10] que apresenta dentre as competências específicas para o Ensino Médio a Competência Específica 4, que nos mostra o caráter vinculado à TRRS desse documento:

[10] Brasil (2017a). Seção 5.2.1: Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: Competências Específicas e Habilidades – Competência Específica 4.

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, 2017a, p. 538)

Na mesma seção, o documento oficial explica a referida competência da seguinte maneira:

> As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.
>
> Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece (BRASIL, 2017a, p. 538).

Observamos que a BNCC se refere às representações semióticas, seus tipos, estabelecimento de relações entre elas e desenvolvimento nos estudantes da habilidade de realizar conversões entre essas representações. Acreditamos que essa fundamentação para o documento oficial seja reflexo da importância atribuída à TRRS para a aprendizagem matemática, corroborando a ideia que procuramos apresentar na presente pesquisa.

Concluída essa discussão, passamos ao próximo capítulo, apresentando conceitos sobre as falas, de grande importância para nossa pesquisa.

3 SOBRE FALAS: LINGUAGEM E DIALOGISMO

Assim, o discurso escrito é de certa maneira parte integrante de uma discussão ideológica em grande escala: ele responde a alguma coisa, refuta, confirma, antecipa as respostas e objeções potenciais, procura apoio etc.[1]

Neste capítulo apresentamos o que é língua e linguagem, assim como aspectos relacionados à língua natural, à linguagem matemática, aos discursos na sala de aula e aos estudos de Bakhtin.

3.1 As relações entre Língua Materna e Linguagem Matemática

Maggio e Nehring (2014) afirmam que nas pesquisas fundamentadas na TRRS os registros de representação em língua natural são menos enfocados do que os gráficos e algébricos, sendo estes mais priorizados por professores e livros didáticos. Vimos no capítulo anterior, Quadro 5, que a língua natural é classificada como registro multifuncional de representação discursiva, dentre os registros mobilizáveis no funcionamento matemático e para tratarmos especificamente do registro de representação em língua natural, acreditamos ser essencial que entendamos o que são língua e linguagem.

Na atualidade muito se tem discutido acerca do significado de linguagem. Entretanto, essas discussões já eram feitas por filósofos como Platão e Aristóteles. Saussure abriu caminhos para uma nova visão acerca da linguística, e alguns estudiosos, como Bakhtin, não a consideram apenas como instrumento de comunicação, mas como algo inerente à natureza humana, que não pode ser criada e nem inventada.

D'Amore (2007, p. 244), baseado em Duval (1996), afirma que há pelo menos quatro formas diferentes de entendermos a palavra linguagem:

> • como *língua*, sistema semiótico com um funcionamento próprio (o italiano, o espanhol, por exemplo);
> • como diferentes *formas de discurso* produzidas usando uma língua (uma narração, uma conversação, uma explicação, por exemplo);
> • como função geral de *comunicação* entre indivíduos da mesma espécie (entre abelhas, por exemplo);
> • como uso de *código* qualquer, mais ou menos reconhecido e compartilhado socialmente (por exemplo, usa-se dizer: a linguagem das flores). (D'AMORE, 2007, p. 244)

Bakhtin (2006, p. 72)[2] afirma que "[...] para observar o fenômeno da linguagem,

[1] Bakhtin (2006, p. 123)

[2] De acordo com o prefácio da obra, escrito por Roman Jakobson, o livro foi publicado com a assinatura de V. N. Volochínov em Leningrado, 1929–1930, em duas edições sucessivas sob o título de *Marksizm i filossófia iaziká* (Marxismo e Filosofia da Linguagem). Posteriormente, descobriu-se que o citado livro e várias outras obras publicadas no final dos anos vinte e começo dos anos trinta com a autoria de Volochínov foram, na verdade, escritos por Bakhtin (1895–1975).

é preciso situar os sujeitos – emissor e receptor do som, no meio social. Com efeito, é indispensável que o locutor e o ouvinte pertençam à mesma comunidade linguística, a uma sociedade claramente organizada". Dessa forma, podemos esperar que seja possível o fenômeno da compreensão mútua dessa linguagem, diferentemente do que aconteceria caso os sujeitos não pertencessem à essa mesma comunidade.

De acordo com Machado (2001), a primeira língua que aprendemos é nossa língua materna, a qual utilizamos para exercer a comunicação. Desde o nascimento estamos expostos a ela e sentimos a necessidade de nos comunicar ao passo que vamos nos desenvolvendo. Silva, Pachêco e Costa (2018) explicam que as diferentes formas de comunicação são aprimoradas pelos seres ao longo da vida, sendo a língua realizada através da fala, em que há uma maior compreensão inicial. Santaella (2006) diz que a língua é um tipo de linguagem, ao passo que Saussure (2008) acredita que a língua tem o papel de manifestar a comunicação que se organiza no pensamento humano. Assim, Silva, Pachêco e Costa (2018, p. 23) concluem que a língua "é uma forma de comunicação organizada pelo pensamento e que varia de uma sociedade para outra". Os mesmos autores afirmam que

> a língua é a expressão do pensamento de forma fônica, verbal e escrita. E a linguagem se refere aos mais diversos tipos de comunicação e significados, o que inclui a linguagem verbal, a linguagem de sinais, o sistema codificado da moda, da culinária, meios de comunicação, como cinema, fotografias e muitos outros (Ibid., p. 23).

Podemos, dessa maneira, perceber que a linguagem é mais ampla do que a língua, pois a utiliza, mas não se encerra nela, fazendo uso de diversos recursos para concretização da comunicação, sendo esta a principal função da linguagem, para a qual utiliza um conjunto de signos — a língua — como código para que o emissor e receptor possam ter acesso à comunicação. Dessa forma, quando nos referimos à linguagem matemática, esta também utiliza signos próprios e se apoia na língua natural, que contribui para a atribuição de significados a essa linguagem (SILVA; PACHÊCO; COSTA, 2018).

Conforme vimos na classificação dos registros mobilizáveis no funcionamento matemático, Quadro 5, a língua natural (ou materna) é classificada como registro multifuncional de representação discursiva e é no discurso, presente no cotidiano da sala de aula, que procuramos compreender a razão das dificuldades nas interações entre professor e aluno, que gera o insucesso da comunicação e a consequente incompreensão dos diversos registros de representação.

De acordo com D'Amore (2007, p. 244), a comunicação é "*uma das maneiras possíveis* de entender a linguagem". Concordamos com Barboza (2011, p. 43) quando explica, fundamentado na perspectiva bakhtiniana, que o enunciado/enunciação se concretiza, além das palavras, pelos trejeitos expressões, envolvendo "a situação percebida ou realizada em palavras (o enunciado) e a situação presumida estabelecida em um contexto extra verbal". Dessa forma, cada enunciado é um conjunto de vários outros enunciados anteriores, que podem ou não atingir a seu objetivo de comunicação, através da sua compreensão ou incompreensão.

Para adentrarmos um pouco mais nessa discussão, trazemos a seguir aspectos relacionados à língua natural, ou materna.

3.1.1 Língua Materna

> *A comunicação pode ser entendida [...] como todas as formas de discursos, linguagens utilizadas por professores e alunos para representar, informar, falar, argumentar, negociar significados. Uma atividade não unidirecional, mas entre sujeitos, cabendo ao professor a responsabilidade de encorajar os alunos e neles despertar o interesse e a participação ativa.*[3]

A língua natural, ou materna, é definida por Machado (2001) como a primeira língua que aprendemos. No nosso caso, normalmente o português, cuja função é comunicar certos tipos de mensagens. Saussure (2008, p.24) define a língua como "um sistema de signos que expressam ideias". Além da capacidade de se fazer compreender, através dos processos linguísticos, que são os meios pelos quais desenvolvemos a capacidade de criar significados e, a partir daí, o processo de interpretação.

A Matemática e a Língua Materna apresentam, de acordo com Machado (2001), uma relação de impregnação mútua, ao passo que a compreensão das dificuldades no ensino daquela demandaria reflexões profundas, considerando a possibilidade de perda de significado (ou significação) na conversão entre essas linguagens tão distintas. Tal distinção pode gerar dificuldades na conversão dos elementos constantes em uma delas para a outra, quer seja pela deficiência na compreensão e interpretação de textos (Língua Materna), quer pela abstração e grande variedade de símbolos (Matemática), ambas as linguagens parecendo estranhas uma à outra. Dessa forma,

> [...] o ensino da Matemática e o da Língua Materna nunca se articularam para uma ação conjunta, nunca explicitaram senão relações triviais de interdependência. É como se as duas disciplinas, apesar da longa convivência sob o mesmo teto — a escola — permanecessem estranhas uma à outra, cada uma tentando realizar sua tarefa isoladamente ou restringindo ao mínimo as possibilidades de interações intencionais. (MACHADO, 2001, p. 15)

É inerente à Matemática o seu sentido abstrato, apesar de não lhe ser uma exclusividade. As características do cérebro necessárias para a sua compreensão, segundo Devlin (2004), são as mesmas necessárias à compreensão da linguagem e já se encontravam presentes antes mesmo de termos qualquer matemática. Dessa forma, segundo esse autor, a capacidade matemática nada seria além de uma variação na utilização da capacidade linguística. Apesar de ambas terem a mesma essência, o autor ressalta que a matemática continua sendo um entrave para muitos, que demonstram

[3] SANTOS, V. M. Linguagens e comunicação na aula de matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009, p. 117.

uma aparente incapacidade para lidar com esta, ao passo que crianças são fluentes em sua linguagem, tida inicialmente como “subproduto do poder de representação do cérebro” (DEVLIN, 2004, p.21) e, posteriormente, como forma de comunicação.

Estabelecendo uma ligação com a obra de Devlin (2004), destacamos a argumentação trazida por Boaler (2018) sobre as novas evidências da neurociência, mostrando que as diferenças cerebrais com que os indivíduos nascem não são tão importantes quanto as experiências de aprendizagem ao longo de suas vidas. Esta autora afirma que as evidências científicas são de que as boas experiências de aprendizado são daqueles que veem a vida de maneira positiva, que acreditam no seu potencial e que aproveitaram as melhores oportunidades de aprender. Dessa forma, acrescenta que não existe a ideia de “cérebro matemático” ou “dom matemático” (Ibid., p. 5), conforme a concepção ainda dominante, na qual os professores buscam separar os alunos que possuem o “gene da matemática” daqueles que não o possuem (Ibid., p. 79).

Almeida (2013, p. 89) afirma que “a Matemática é, por sua própria natureza, a ciência dos símbolos” e explica que, para a escola formalista, ela é um jogo entre esses símbolos e apresenta suas próprias regras, resultando no pensamento simbólico, que é uma forma de comportamento moderno. Ou seja, o símbolo é o elemento fundamental para a compreensão das ideias matemáticas, que só é possível com a devida interpretação destes símbolos. Corroborando essa ideia, Machado (2001, p.96) afirma que se concebe “a Matemática como um sistema de representação da realidade, construído de forma gradativa, ao longo da história, tal como o são as línguas”. O autor acrescenta ainda que

> uma questão das mais candentes no que concerne ao ensino tanto da Matemática como da Língua Materna é a legitimidade ou a conveniência da utilização de um sistema de signos de um modo predominantemente técnico, operacional, restrito a regras sintáticas, em contraposição a um uso que privilegie o significado dos elementos envolvidos, portanto sua dimensão semântica (Ibid., p. 109).

Gómez-Granell (1998, p. 35) relata que, na história da matemática, podemos encontrar vários exemplos de abandono da linguagem natural para utilização do símbolo formal em que encontramos um processo de “interação constante e não de filiação direta entre linguagem natural e simbólica”, esclarecendo que a linguagem natural até o final do século XIX ainda era muito utilizada para descrever as relações matemáticas. Machado (2001) aponta para a necessidade da compreensão da técnica e do significado para a aprendizagem matemática, ressaltando que muitas vezes a técnica é priorizada, através da repetição mecânica de algoritmos, em detrimento da compreensão dos significados envolvidos nesses processos. Dessa maneira, para a maioria das pessoas não haveria a necessidade de compreender com profundidade o que está intrínseco ao funcionamento da Matemática, mas tão somente uma compreensão geral de seu significado, sem o devido aprofundamento de significação dos símbolos apresentados.

Coll, Marchesi e Palacios (2004) dizem que para Vigotsky, nas relações entre pessoas e seu meio, aquelas modificam ativamente o ambiente através de ferramentas, transformando a natureza e a si mesmas. Algumas das transformações a que ele se referia diz respeito à utilização de sistemas de signos, caracterizados por seus significados, capazes de transformar a fala, o pensamento e a própria ação humana, como elemento de natureza essencialmente comunicativa.

> As ferramentas psicológicas incluem diversos sistemas de signos: sistemas de numeração, sistemas de símbolos algébricos, trabalhos de artes, esquemas, diagramas, mapas, desenhos e todo tipo de símbolos convencionais, mas é a linguagem que se torna, ao longo do desenvolvimento humano, o instrumento mediador fundamental da ação psicológica. (COLL; MARCHESI; PALACIOS, 2004, p.102)

Na visão de Gómez-Granell (1998, p. 35)

> A língua natural desempenha uma função primordial na criação de novos símbolos matemáticos, garantindo o vínculo com o objeto de referência e impedindo a perda de significado provocado por todo o processo de abstração; por outro lado, é essencial para devolver aos símbolos matemáticos um significado referencial, possibilitando assim uma das funções essenciais da matemática: penetrar nas ciências do mundo externo — física, química, biologia, economia, sociologia, psicologia — e na vida cotidiana.

Pelo que podemos observar, a Língua Natural (ou Materna), além de ser um dos registros de representação dos vários objetos matemáticos, também é imprescindível para manter a essência desses objetos, evitando perda de significados decorrentes da abstração da linguagem matemática formal.

Para Machado (1989), a matemática, por ser considerada como uma linguagem formal, se reduz à dimensão escrita. Porém, quando sua aprendizagem é considerada como a construção de um sistema de representação da realidade, a língua materna passa a ser emprestada à linguagem matemática, visto que esta não comporta a oralidade e aquela lhe fornece o suporte de significações representados pela fala.

Teorias cognitivas como as subsidiadas em Piaget e Peirce relacionam a aquisição do conhecimento matemático com os mesmos processos utilizados para a aprendizagem em outras áreas do conhecimento. Dessa maneira, os conceitos seriam adquiridos em uma progressão contínua, em que experimentações concretas dariam lugar a representações com figuras e à representação simbólica. Entretanto esse tipo de concepção não leva em conta dois aspectos fundamentais, quais sejam: a maioria dos alunos ainda apresenta grandes dificuldades para a aprendizagem de matemática, mesmo não apresentando essa dificuldade em outras áreas do conhecimento; a atividade matemática consiste "em uma determinada forma de ver, de definir, de designar, de passar de uma representação semiótica à outra do mesmo objeto matemático, etc., que é a condição cognitiva para poder compreender e utilizar os algoritmos" (Ibid., p. 37).

3.1.2 Linguagem Matemática

Os matemáticos são uma espécie de franceses. Sempre que lhes dizemos algo, eles traduzem para a sua própria língua e imediatamente convertem em algo completamente diferente.[4]

Segundo Gómez-Granell (1996), existe uma dependência entre o conhecimento matemático e uma linguagem de caráter formal, diversa da língua natural, cuja característica é eliminar referências ao contexto, abstraindo o essencial das relações matemáticas. A autora acrescenta que essa abstração é tamanha que na linguagem algébrica, considerada como a autêntica linguagem da matemática, as letras conferem uma generalização aos números, que já são abstratos por si mesmos. Dessa forma, a língua natural, cujo sentido é vago e impreciso, é traduzida para a linguagem matemática — formal, simbólica — e esta, muitas vezes, é confundida com a própria Matemática.

A história nos ajuda a compreender a necessidade do uso de símbolos para representar a Matemática, através das origens e evolução da álgebra. Nesse sentido, Nesselmann (1842 apud EVES, 2011, p. 206)[5] caracterizou as origens da álgebra em três estágios de desenvolvimento ao longo da história da Matemática:

> Primeiro se tem a *álgebra retórica* em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a *álgebra sincopada* em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da *álgebra simbólica*, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam. É razoavelmente preciso dizer que a álgebra anterior à época de Diofanto [...] era retórica.

A álgebra é fruto das contribuições de grandes civilizações, não sendo possível situar um período histórico do seu surgimento. Nos papiros egípcios[6], essenciais para a compreensão da matemática desse povo, já eram trabalhados problemas que são associados a nossa equação do 1º grau com uma incógnita. De acordo com Silva, Lima e Oliveira (2020, p. 350), "a álgebra babilônica é retórica, porém, os babilônicos possuíam maior conhecimento algébrico do que os egípcios, pois nos registros babilônicos encontramos além das equações lineares as equações quadráticas e cúbicas"[7].

Na Grécia, encontramos a conhecida álgebra geométrica, cujos principais representantes foram Pitágoras de Samos (570 a.C.–495 a.C.) e Euclides de Alexandria

---

[4] Goethe apud Gómez-Granell (1996, p. 57)

[5] NESSELMANN, G. H. F. **Die Algebra der Griechen**: nach den quellen bearbeitet. Berlin: Reimer, 1842. v. 1.

[6] O Papiro de Rhind ou Papiro Ahmes e o Papiro de Moscou juntos possuem cerca de 110 problemas matemáticos.

[7] A tábua matemática babilônia mais notável foi escrita aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C., conhecida como Plimpton 322.

(360 a.C.–295 a.C.), em que que figuras geométricas eram utilizadas para solucionar problemas algébricos[8] (Ibid.).

Diofanto de Alexandria introduziu no século III da nossa era uma nova forma de representar equações que ficou conhecida como a álgebra sincopada (Ibid.). Sua obra mais importante na álgebra é o livro *Arithmética*, que continha a resolução de 130 problemas que são associados a nossas equações de primeiro e segundo grau, equações cúbicas, equações determinadas com uma incógnita, equações de segundo grau indeterminadas e às vezes com mais de duas incógnitas (Ibid.).

A álgebra europeia fundamentou-se na álgebra arábica e se desenvolveu em grande parte na Itália, iniciando por volta de 1200, desenvolvendo-se lentamente até o século XIX, em que as descobertas foram impulsionadas. François Viète (1540–1603) introduziu vários símbolos na matemática, substituindo aos poucos as palavras nas equações e René Descartes (1596–1650) apresentou em sua obra *Discurso do Método*[9] o apêndice *La Géométrie* que, de certa maneira, apresentou ao mundo uma álgebra que tinha uma complexidade bem maior do que se compreendia até então, tornando conhecida a escrita de problemas algébricos com a utilização de símbolos e dando grande destaque às equações (SILVA; LIMA; OLIVEIRA, 2020).

Eves (2011) acrescenta que a maior parte da álgebra continuou retórica na Europa Ocidental até o século XV e apenas no século XVII a álgebra simbólica se impôs, não se tendo conhecimento sobre quando a álgebra grega deixou de ser geométrica para ser aritmética, mas que possivelmente tenha sido ainda no tempo de Euclides.

Já falamos sobre a necessidade cada vez maior em nossa sociedade atual do conhecimento matemático. Apesar disso, segundo Gómez-Granell (1996), a Matemática ainda é tida como inacessível para grande parte da população, estabelecendo-se um paradoxo. Para essa autora, apoiada em pesquisas sobre o tema, as dificuldades para o ensino e a aprendizagem da matemática são inúmeras e muitos a consideram como *difícil* e *inacessível*. Nesse sentido, "a matemática aparece como algo denso e enigmático até mesmo para pessoas cultas e instruídas, e não é difícil encontrar na literatura comentários de diversos autores relembrando a sua insatisfatória experiência com a aprendizagem matemática" (Ibid., p. 258).

Os alunos são levados a resolver problemas que parecem não ter sentido, causando incompreensão dos enunciados, confusão quanto ao conhecimento que a questão demanda, dúvidas sobre o que eles deveriam responder, e, ao mesmo tempo, a sensação de fracasso, por acreditarem que estão aquém do necessário para solucionar qualquer problema, ao passo que os pais desses alunos passam a desacreditar de suas potencialidades.

Concordamos com Gómez-Granell (1996) quando explica que a natureza do

[8] A maior obra de Euclides foi "Os Elementos", com 13 livros, em que os livros II e V são dedicados à álgebra.

[9] DESCARTES, R. **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences**. Leiden: Hachette et cie, 1637. v. 1.

conhecimento matemático é diferente de outras áreas do conhecimento, devido à abstração de seus conceitos, que se definem por métodos lógico-dedutivos de validação e não por indução. O caráter formal, abstrato, rigoroso e preciso da linguagem matemática difere da língua natural, imprecisa, e desconsidera o contexto da situação, extraindo o essencial das relações matemáticas, chegando a uma generalidade. Para a autora, a linguagem matemática tem como principal função "converter os conceitos matemáticos em objetos mais facilmente manipuláveis e calculáveis, possibilitando assim determinadas inferências, que de outro modo seriam impossíveis" (Ibid., p. 261). Dessa maneira:

> Poderíamos dizer, resumindo, que os símbolos matemáticos possuem dois significados. Um deles, estritamente formal, que obedece a regras internas do próprio sistema e se caracteriza pela sua autonomia do real, pois a validade das suas declarações não está determinada pelo exterior (contrastação empírica). E o outro significado, que poderíamos chamar de "referencial", que permite associar os símbolos matemáticos às situações reais e torná-los úteis para, entre outras coisas, resolver problemas. Isto é, o problema reside no fato de que, embora as expressões matemáticas façam, por um lado, referência a situações em que aparecem relações quantitativas — portanto, podendo ser matematizadas —, por outro, para que tais expressões pertençam ao domínio da matemática devem ser totalmente autônomas em relação aos contextos e situações específicas de referência (Ibid., p. 264).

A tendência da manipulação sintática de símbolos e regras, advinda das concepções formalistas, em que não são atribuídos sentidos para as operações que estão sendo realizadas ainda se encontra presente no cotidiano das salas de aula e nas falas dos professores. Essa forma de ensino descontextualizada, fundamentada na priorização do caráter sintático, na aplicação de regras desprovidas de significados, leva os alunos à incompreensão do que estão estudando devido à mera manipulação de fórmulas e equações que nada parece lhes comunicar.

Já as tendências semânticas, priorizam aspectos conceituais da matemática, possibilitando aos alunos a construção progressiva dos significados de seus objetos, a partir do conhecimento informal que trazem do meio em que vivem, com a utilização de procedimentos próprios não formais. Dessa maneira, de acordo com Gómez-Granell (1996, p. 267), a linguagem passa a ter papel secundário, pois, "se os alunos entendem o significado dos conceitos e procedimentos matemáticos, não têm nenhuma dificuldade de dominar a linguagem formal".

A aquisição do conhecimento científico e cotidiano são diferentes, conforme nos explica Gómez-Granell (1998, p. 19), pois

> [...] a aquisição do conhecimento científico envolve a aprendizagem de um método, uma forma de discurso que não é natural e que exige um esforço consciente e sistemático de explicitação e racionalização. A escola é a instituição fundamentalmente encarregada de colocar os indivíduos mais jovens em contato com o conhecimento científico e

> ajudá-los a construir o tipo de discurso que lhe é próprio. Como afirma Scribner (1977), o raciocínio formal requer o domínio de um gênero particular de discurso, fornecido pela escola. [...] Na escola ocorre uma espécie de "transposição didática" (Chevallard, 1991), mediante a qual os conteúdos científicos se transformam e se tomam decisões sobre o que, como ou quando ensinar, em função das próprias finalidades como instituição que controla a transmissão e circulação do saber.

A institucionalização da educação é uma conquista de nossa sociedade, mas também provoca, como consequência, a despersonificação do saber, em busca da transmissão de um saber "erroneamente denominado 'científico' que, na maioria das vezes não passa de um estereótipo desse conhecimento" (GÓMEZ-GRANELL, 1998, p. 20). Analisando trabalhos que tratam da aquisição da linguagem matemática por crianças, a autora observa que a construção dos significados matemáticos deve passar antes pela manipulação e pela ação e depois para a linguagem simbólica e que as crianças recorrem a desenhos e à língua natural para resoluções de problemas em certos níveis de desenvolvimento (GÓMEZ-GRANELL, 1996), o que não lhes garante a compreensão dos procedimentos formais da linguagem. Ambas as tendências parecem apresentar limitações, pois a manipulação de símbolos desprovidos de significados para os alunos não os permite apresentar uma aprendizagem dos objetos matemáticos relacionados a seu significado referencial, ao passo que manipular operações não-formais intuitivas não garante a aquisição da linguagem matemática.

Acrescentamos aqui as palavras de Almeida (2012, p. 93) quando diz que

> [...] não existe Matemática sem linguagem e não existe linguagem sem comunicação. Logo, aplicando-se a propriedade reflexiva, não existe matemática sem comunicação. Ao que nos interessa, fiquemos com a segunda propriedade: não existe matemática sem linguagem.

Quando nos referimos à matemática escolar, o domínio da sua linguagem pelos alunos é complexo devido a esse caráter sintático predominante. O início da álgebra simbólica com a utilização de letras para representar números por Francis Vieta, segundo Gómez-Granell (1998), acarretou uma independência do símbolo em relação a seu objeto, pois o significado do primeiro vai além do segundo. Dessa forma, Almeida (2012) ressalta que

> alguns pesquisadores costumam descrever linguagem matemática como sendo resultado da linguagem natural acrescida de características matemáticas (símbolos e vocabulário). Isto não é totalmente adequado, pois componentes da linguagem natural também podem possuir aspectos matemáticos, como é o caso de construções como "se e somente se", "se... então" e "A ou B", por exemplo. Isto demonstra que algumas dificuldades encontradas na linguagem matemática podem ter origem na linguagem ordinária ou natural (ALMEIDA, 2012, p. 97).

Sobre a linguagem matemática, Gómez-Granell (1998, p. 32), explica que

> • é abstrata e geral; tenta abstrair o essencial das relações matemáticas, eliminando qualquer referência ao contexto ou às situações particulares;
> • é um sistema de sinais autocontidos;
> • é rigorosa, precisa e não redundante;
> • exclui intenções, emoções e afetos;
> • é teórica, impessoal e atemporal;
> • sua finalidade fundamental não é facilitar a comunicação, mas a inferência.

Concordamos com a autora quando enfatiza que a matemática como linguagem precisa associar aspectos sintáticos e semânticos, constituindo-se em "uma forma de discurso específico que, embora guarde estreita relação com a atividade conceitual, mantém a sua própria especificidade como um discurso linguístico" (GÓMEZ-GRANELL, 1996, p. 274). Dessa forma, para que haja a aprendizagem matemática:

> 1. Os conceitos e procedimentos matemáticos devem ser ensinados de forma contextualizada [...]; 2. A resolução de problemas pode ser um instrumento de contextualização [...]; 3. Os procedimentos próprios, intuitivos ou não-formais são instrumentos para explorar o significado dos conceitos e procedimentos matemáticos [...]; 4. É necessário associar os símbolos matemáticos ao seu significado referencial [...]; 5. Aplicar modelos concretos [...]; 6. Utilizar e relacionar linguagens diferenciadas [...]; 7. Trabalhar os mesmos conceitos e procedimentos em diferentes contextos [...]; 8. Estimular a abstração progressivamente (Ibid., p. 275-281).

Observamos que todos esses passos constituem um longo processo que não diz respeito tão somente à linguagem matemática em si, mas a sua relação com outras linguagens, como a língua natural, sendo essencial a aproximação dessas linguagens para alcançarmos uma melhor compreensão de seus objetos.

De acordo com Almeida (2012), a Matemática possui uma linguagem própria e que também utiliza signos da língua natural, como as vogais que são utilizadas para representar constantes, as consoantes que são usadas para representar variáveis e os conectivos como "logo", "portanto", intercalando expressões matemáticas. O autor complementa que quanto mais aprendemos a linguagem matemática, esta vai se tornando mais repleta de simbologia e distante da linguagem natural, fazendo-se necessária a aproximação dessas duas linguagens, considerando os conhecimentos prévios dos alunos, os quais conjectura que sejam objetos das interações discursivas com todas as pessoas que lhes cercam.

Esse autor ressalta ainda a diversidade dos elementos presentes nos discursos matemáticos, acrescentando que

> A linguagem matemática, aquela utilizada para organização de dados matemáticos, desenvolvimento de uma expressão qualquer, comunicação de um problema ou de resultados, utiliza signos ($\forall$, $-$, $\sum$, $\notin$, π, $\pm$, f etc.), conectivos (logo, portanto, se, então...) e palavras

> diversas da linguagem ordinária, de acordo com a necessidade. É assim hoje, resultado de um desenvolvimento ocorrido ao longo de toda a história da humanidade (Ibid., p. 70).

A BNCC nos apresenta a ligação entre comunicação/diálogo/linguagem e representações matemáticas:

> Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (BRASIL, 2017a, p. 529).

As concepções acerca da Matemática — muitas vezes transmitidas de pais para filhos — de ciência inacessível e difícil, destinada a mentes privilegiadas, precisam ser transformadas a patamares que não a distanciem da maioria dos alunos, como comumente acontece, aproximando-a do seu cotidiano e realidade para que a aprendizagem venha a ocorrer, permeada de significados. Gómez-Granell (1998), fundamentada por pesquisas sobre conhecimento cotidiano, nos informa que este parece ser mais significativo do que o conhecimento formal.

Afinal, como afirma Almeida (2012, p. 94), Matemática e linguagem devem caminhar juntas para a aprendizagem, pois, do contrário se estaria ensinando coisas distintas, "desvinculadas da Matemática: uma seria a Matemática sem linguagem (um monstro incomunicável), outra seria uma linguagem sem Matemática (algo como vozes do além-desconhecido)".

3.2 Bakhtin e a Análise Dialógica do Discurso

Mikhail Mikhailovich Bakhtin nasceu no ano de 1895, em Oryol, Rússia, tendo estudado na Universidade de Odessa e de São Petersburgo, diplomando-se em História e Filologia[10]. Ele fazia parte de um pequeno círculo de intelectuais e de artistas, denominado de *Círculo de Bakhtin*.

No prefácio da obra Bakhtin (2006), Roman Jakobson[11] aponta para várias relações da linguagem que se complementam, apontando para a heterogeneidade e a pluralidade de sua natureza. Dessa forma, as discussões em torno da semiótica e do domínio ideológico dão forma às teorias bakhtinianas sobre linguagem. E explica que:

> Segundo Bakhtin, na estrutura da linguagem, todas as noções substanciais formam um sistema inabalável, constituído de pares indissolúveis e solidários: o reconhecimento e a compreensão, a cognição e a troca, o diálogo e o monólogo, sejam eles enunciados ou internos, a interlocução entre o destinador e o destinatário, todo signo provido de significação e toda significação associada ao signo, a

[10] O original *Marxismo e Filosofia da Linguagem* é do ano de 1929.
[11] JACKOBSON, R. Prefácio. In: BAKHTIN, M. M.; VOLOCHINOV, V. N. **Marxismo e Filosofia da Linguagem**. 12. ed. São Paulo: Hucitec, 2006.

> identidade e a variabilidade, o universal e o particular, o social e o individual, a coesão e a divisibilidade, a enunciação e o enunciado. (JAKOBSON apud BAKHTIN, 2006, p. 11).

Bakhtin (2006, p. 115) nos mostra a importância da palavra, pois esta comporta duas faces, já que apresenta uma orientação, procedendo de alguém e sendo destinada a alguém, sendo "o produto da interação do locutor e do ouvinte", ao passo em que afirma que

> Toda palavra serve de expressão a um em relação ao outro. Através da palavra, defino-me em relação ao outro, isto é, em última análise, em relação à coletividade. A palavra é uma espécie de ponte lançada entre mim e os outros. Se ela se apoia sobre mim numa extremidade, na outra apoia-se sobre o meu interlocutor. A palavra é o território comum do locutor e do interlocutor (Ibid., p. 115).

É importante ressaltar que os autores não se referem à palavra como o ato de materialização do som e acrescentam que "todas as manifestações verbais estão, por certo ligadas aos demais tipos de manifestação e de interação intersemiótica, a mímica, a linguagem gestual, os gestos condicionados, etc.", no que denomina "psicologia do corpo social", que se manifesta "nos mais diversos aspectos da enunciação sob a forma de diferentes modos de discurso, sejam eles interiores ou exteriores" (Ibid., p. 41).

Em sua obra, Brait (2018b, 2018c) nos apresenta os conceitos-chave para compreensão da obra de Bakhtin, entre eles as diferentes concepções da palavra, considerada como "signo ideológico, porque acumula as entoações do diálogo vivo dos interlocutores com os valores sociais" (BRAIT, 2018b, p. 178), atribuindo-lhe características como "pureza semiótica, possibilidade de interiorização, participação em todo ato consciente, neutralidade" (Ibid., p. 179). Ao mesmo tempo, movimenta a palavra entre abstrato — palavra gramaticalmente neutra — e concreto — enquanto ponte entre interlocutor e falante no diálogo. Para Bakhtin (1997a) a palavra está associada aos gêneros dos discursos dos sujeitos, pois sua utilização depende do gênero utilizado em cada situação.

Outro conceito-chave, imprescindível para a fundamentação dos estudos de Bakhtin, é o do diálogo. Sobre este conceito, o autor explica que:

> O diálogo, por sua clareza e simplicidade, é a forma clássica da comunicação verbal. Cada réplica, por mais breve e fragmentária que seja, possui um acabamento específico que expressa a posição do locutor, sendo possível responder, sendo possível tomar, com relação a essa réplica, uma *posição responsiva* (BAKHTIN, 1997a, p. 294).

Nos seus dizeres, o autor explica que o diálogo é a forma mais importante de interação verbal, referindo-se não somente à comunicação em voz alta, mas a qualquer comunicação verbal (BAKHTIN, 2006). As relações dialógicas, dessa maneira, se concretizam a partir de mais de um sentido de comunicação, são reflexo da relação emissão/recepção/resposta. Para que ocorra o diálogo, deve haver a reciprocidade entre interlocutores, em que enunciado e diálogo se relacionam de modo que todo enunciado demanda uma atitude responsiva do interlocutor. Dessa forma,

> [...] cada um dos elementos significativos isoláveis de uma enunciação e a enunciação toda são transferidos nas nossas mentes para um outro contexto, ativo e responsivo. A compreensão é uma forma de diálogo; ela está para a enunciação assim como uma réplica está para a outra no diálogo. Compreender é opor à palavra do locutor uma contrapalavra (Ibid., p. 132).

Brait e Melo (2018) ressaltam que os conceitos de enunciado e enunciação, centrais nos estudos da linguagem de Bakhtin, não estão prontos e acabados em suas obras, sendo retomados na discussão sobre gêneros do discurso. Os termos enunciado, enunciação e enunciado concreto apenas teriam sentido relacionados a outros termos que lhes garantam sentidos específicos. Assim, para Bakhtin enunciado é a produção verbal, ou como nos falam Brait e Melo (2018, p. 63), "unidade de significação contextualizada", enquanto a enunciação se trata da interação verbal.

Essas interações entre os interlocutores propiciam a compreensão do discurso entre os envolvidos, que se concretiza conforme apresentamos a seguir:

> Qualquer tipo genuíno de compreensão deve ser ativo deve conter já o germe de uma resposta. Só a compreensão ativa nos permite apreender o tema, pois a evolução não pode ser apreendida senão com a ajuda de um outro processo evolutivo. Compreender a enunciação de outrem significa orientar-se em relação a ela, encontrar o seu lugar adequado no contexto correspondente. A cada palavra da enunciação que estamos em processo de compreender, fazemos corresponder uma série de palavras nossas, formando uma réplica. Quanto mais numerosas e substanciais forem, mais profunda e real é a nossa compreensão. (BAKHTIN, 2006, p. 279).

De acordo com essa explicação, entendemos que não há compreensão sem que haja atitude responsiva do interlocutor, seja em consonância ou oposição ao enunciado inicial, o que gera novos enunciados no diálogo.

Outro conceito bakhtiniano discutido por Bezerra (2018) é o da polifonia. Nesse conceito, nossos enunciados se caracterizam por conter não apenas as nossas palavras, mas por estarem repletos das palavras dos outros, em diferentes graus, consciente ou inconscientemente, de acordo com a forma com que modificamos e internalizamos essas palavras em nossas falas.

Nesse contexto, Bakhtin (1997a) apresenta o sujeito como inacabado, que faz uso do eco das vozes de diferentes sujeitos para constituir o seu *eu*. Acrescenta que para o locutor a palavra se apresenta sob três aspectos, sejam eles como palavra que não pertence a ninguém (neutra), palavra que ecoa os enunciados dos outros (palavra dos outros), ou como palavra que passou a fazer parte de minha expressividade nas iterações discursivas (palavra minha). Dessa maneira, tudo chega à consciência a partir do outro, de forma que a constituição do *eu* é uma junção do *eu-para-mim* e *eu-para-o-outro*, *o-outro-para-mim*, conforme ilustrado na figura a seguir:

Figura 7 – Constituição do "eu" segundo Bakhtin

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

De acordo com Bezerra (2018, p. 194), o *eu* não pode ser solitário, pois "só pode ter vida real em um universo povoado por uma multiplicidade de sujeitos interdependentes e autônomos", que estabelecem relações dialógicas e se projetam um no outro, concluindo que a polifonia "é a posição do autor como regente do grande coro de vozes que participam do processo dialógico".

Mais um conceito bakhtiniano que julgamos necessário abordar no contexto da presente pesquisa é o de gêneros do discurso. Almeida (2012) defende a sua utilização nas aulas de Matemática, explicando que são vários os gêneros do discurso que permeiam essas aulas, desde aqueles que lhe são inerentes, como os teoremas, definições, expressões, listas de exercícios e enunciados de problemas, que possuem características próprias, diferentes de outras áreas do conhecimento. O autor ressalta ainda que outros gêneros podem ser acrescentados às aulas de Matemática, por estarem presentes no cotidiano dos alunos, como os croquis, tabelas nutricionais, panfletos, entre outros, podendo ainda o professor usar como recurso metodológico gêneros que busquem aproximar a dimensão sintática e semântica da linguagem utilizada nas aulas de Matemática, como o romance, poesia, música, entre outros.

No Quadro 7, a seguir, apresentamos os gêneros do discurso que podem estar presentes nas aulas de Matemática, de acordo com esse autor:

Quadro 7 – Gêneros do discurso que podem fazer parte de aulas de Matemática

Domínio social	**Esfera social de uso ou utilização do gênero**	**Portadores**	**Exemplos de gêneros**
Matemáticas acadêmicas	Matemáticos pesquisadores, professores ou estudantes universitários	Encadernações de teses, dissertações e monografias em geral; livros	Monografias; dissertações; teses; teoremas; demonstrações de teoremas.
Matemática do cotidiano	A sociedade como um todo	Jornais, revistas, *Internet*, panfletos, cartazes, *outdoors*, etc.	Indicadores de variação da inflação; Tabelas de desempenho de times em um campeonato; catálogos de preços; boletos bancários; faturas de consumo de água.
Conhecimentos diversos, transdisciplinares	A sociedade como um todo	Jornais, revistas, *Internet*, panfletos, cartazes, manuais de uso de eletrodomésticos etc.	Artigos de divulgação científica, notícias, resenhas, narrativas de enigmas, adivinhas, relatórios de atividades, manuais de instruções, etc.

Fonte: Almeida (2012, p. 60).

O mesmo autor esclarece ainda que, para a compreensão dos enunciados presentes nos discursos das aulas de Matemática, é necessário que haja uma atitude responsiva destas, de acordo com o que preceitua Bakhtin (1997a, p. 290). Dessa forma,

> de fato, o ouvinte que recebe e compreende a significação (linguística) de um discurso adota simultaneamente, para com este discurso, uma atitude responsiva ativa: ele concorda ou discorda (total ou parcialmente), completa, adapta, apronta-se para executar, etc., e esta atitude do ouvinte está em elaboração constante durante todo o processo de audição e de compreensão desde o início do discurso, às vezes já nas primeiras palavras emitidas pelo locutor. A compreensão de uma fala viva, de um enunciado vivo é sempre acompanhada de uma atitude responsiva ativa (conquanto o grau dessa atividade seja muito variável); toda compreensão é prenhe de resposta e, de uma forma ou de outra, forçosamente a produz: o ouvinte torna-se o locutor.

Essa atitude responsiva não necessariamente será a verbalização de uma resposta, pois pode ser muda, como no caso do cumprimento de uma ordem dada, ou pode ainda ser de ação retardada, no caso em que não acontece de imediato, entretanto, pelo que nos fala Bakhtin (1997a, p. 291), "cedo ou tarde, o que foi ouvido e compreendido de modo ativo encontrará um eco no discurso ou no comportamento subsequente do ouvinte".

Dessa forma, para Bakhtin(1997a, 2006), quem ouve apresenta uma compreensão ativa plena (CAP) se em resposta a seu interlocutor opuser um conjunto de palavras próprias, enquanto se o ouvinte não se posicionar quanto ao que ouviu, não apresentar nenhuma resposta, ou apresentando resposta, não responder com suas palavras sobre o que foi dito, a compreensão é passiva (CP), refletindo apenas o entendimento do significado do signo linguístico.

A compreensão de significados, bem como a concretização das relações dialógicas são diferenciadas a depender do repertório de leitura dos interlocutores, que notoriamente não é o mesmo para os diversos interlocutores envolvidos nas aulas de Matemática.

Almeida (2012, p. 65) afirma que "podemos pensar em uma linguagem da Matemática, em uma linguagem para se ensinar ou ainda uma linguagem para se aprender Matemática. São essas três diferentes, pois pressupõem códigos e relações distintos". Dessa forma, para o autor, muito da língua natural é utilizado para o ensino da Matemática, uma vez que se faz necessário o diálogo entre professor e alunos para a efetivação desse ensino, que ocorrerá através da troca de saberes desses sujeitos, a depender do repertório de leitura[12] dos alunos, de sua atitude responsiva e de seus diálogos interiores (que são em língua natural), acrescentando que "enquanto ocorre o diálogo vai se dando a aprendizagem" (Ibid., p. 66).

Feio (2009) nos leva a refletir sobre a linguagem utilizada pelo aluno durante a resolução de atividades passadas pelo professor, em que, em suas respostas, está dando forma às representações mentais daquele objeto trabalhado, enquanto as anotações da explicação das aulas de matemática para auxiliar a memória parecem ser ineficazes, já que muitas vezes os alunos não conseguem ler essa linguagem com facilidade. Dessa maneira, o autor afirma que muitos alunos relatam entender a explicação do professor em sala de aula, ao passo que em casa não conseguem lembrar de mais nada.

> Uma provável justificativa para este problema é o fato de que, durante a aula, a escrita simbólica da linguagem matemática torna-se compreensível através da fala do professor, porém quando o aluno abre o caderno em casa para estudar, não dispõe mais da fala do professor para dar sentido aos símbolos que ali estão escritos (Ibid., p. 50).

Por esse aspecto, torna-se evidente a importância da oralidade, o auxílio que a língua natural presta à linguagem matemática, servindo de suporte de significação natural para tornar compreensível a simbologia da linguagem formalizada escrita (Ibid.), afinal,

[12] Almeida (2012, p. 51), define repertório de leitura como "a complexa rede de conhecimentos e relações estabelecidas entre o que já se leu, viu, ouviu, tocou, sentiu, que permite a aprendizagem como uma cadeia de relações que se perfazem entre esse repertório que já se possui e um repertório em construção, sempre no devir".

"as linguagens formais surgem fundamentadas no princípio de que as línguas naturais admitem falhas e ambiguidades, pelo fato da palavra ser polissêmica" (Ibid., p. 50).

De acordo com Santos (2005, p. 118–119), para que ocorra a aprendizagem nas aulas de Matemática alguns fatores precisam ser considerados no contexto da comunicação:

> A necessária relação entre conteúdo e método no processo de ensino e aprendizagem em Matemática; a manifestação de diferentes formas de comunicação e os muitos significados de que se revestem as noções matemáticas na sala de aula; as dificuldades observadas entre alunos do ensino fundamental (decorrentes de conflitos entre linguagem corrente e linguagem matemática, do significado que o aluno intuitivamente atribui a um determinado conceito, da incompreensão de enunciados de problemas matemáticos etc.); a complementaridade entre dimensões sintáticas e semânticas na abordagem de noções matemáticas; a sintonia entre perguntas e respostas formuladas.

Bakhtin (1997a) entende que os usos da linguagem acontecem por meio de enunciados concretos únicos transmitidos pelos diversos sujeitos em suas relações. Ao passo que no diálogo os interlocutores se alternam em suas posições de fala, não havendo enunciados isolados, pois cada um deles é a junção dos enunciados que o antecederam e os que estão por vir.

Essa relação revela a importância do diálogo entre o eu e o outro através dos enunciados, que, para Bakhtin (1993a, 1993b), são atos singulares decorrentes de uma atitude responsiva em relação à realidade. Dessa maneira, esses enunciados, conforme conclui Pereira (2010), tecem sentidos através das interações com outros enunciados, mantendo relações dialógicas entre si, resultando no que Bakhtin (1997b) compreende por gêneros do discurso. Dessa maneira, "do ponto de vista da eventicidade, os enunciados são únicos, do ponto de vista da historicidade e das práticas interativas, eles são balizados pelos gêneros, que legitimam e significam a produção de novos enunciados" (PEREIRA, 2010, p. 150).

Sobre os gêneros do discurso Bakhtin (1997a, p. 279), fala que

> Todas as esferas da atividade humana, por mais variadas que sejam, estão sempre relacionadas com a utilização da língua. Não é de surpreender que o caráter e os modos dessa utilização sejam tão variados como as próprias esferas da atividade humana, o que não contradiz a unidade nacional de uma língua. A utilização da língua efetua-se em forma de enunciados (orais e escritos), concretos e únicos, que emanam dos integrantes duma ou doutra esfera da atividade humana. O enunciado reflete as condições específicas e as finalidades de cada uma dessas esferas, não só por seu conteúdo (temático) e por seu estilo verbal, ou seja, pela seleção operada nos recursos da língua — recursos lexicais, fraseológicos e gramaticais —, mas também, e sobretudo, por sua construção composicional. Estes três elementos (conteúdo temático, estilo e construção composicional) fundem-se indissoluvelmente no todo do enunciado, e todos eles são marcados pela especificidade de uma esfera de comunicação. Qualquer enunciado considerado isoladamente é, claro, individual, mas cada esfera de

> utilização da língua elabora seus tipos relativamente estáveis de enunciados, sendo isso que denominamos gêneros do discurso.

Os gêneros do discurso são os mais variados pois "cada esfera dessa atividade [humana] comporta um repertório de gêneros do discurso que vai diferenciando-se e ampliando-se à medida que a própria esfera se desenvolve e fica mais complexa" (BAKHTIN, 1997a, p. 279). Conforme Silveira (2005) a economia de símbolos, inerente à linguagem formal, é um de seus problemas de compreensão, podendo torná-la como uma língua estrangeira para quem não tem domínio da linguagem matemática, como no exemplo "f é função de A em $B \iff \forall x \in A, \exists y \in B|(x,y) \in f$, apresentado por Feio (2009, p. 51).

Abordados os conceitos que consideramos essenciais para o encaminhamento da nossa pesquisa, passamos à subseção seguinte em que discorremos sobre a Análise Dialógica do Discurso de Bakhtin.

3.2.1 Análise Dialógica do Discurso

De acordo com Paula (2013), no Brasil nós não praticamos a Análise do Discurso, mas Análises do Discurso, por causa da variedade de influências e abordagens aqui praticadas. A mesma autora afirma existirem vários "Bakhtins" devido ao vasto conhecimento das obras do seu Círculo, imerso às diferentes culturas e tradições, o que justifica a perspectiva brasileira.

Brait (2018a) nos diz que Bakhtin não propôs uma análise do discurso formalmente, mas que as obras do Círculo de Bakhtin foram responsáveis pelo nascimento de uma Teoria/Análise Dialógica do Discurso (ADD), que não apresenta uma definição acabada, mas que tem como embasamento "a relação entre língua, linguagens, história e sujeitos", ou que "diz respeito a uma concepção de linguagem, de construção e produção de sentidos necessariamente apoiadas nas relações discursivas empreendidas por sujeitos historicamente situados" (BRAIT, 2018a, p. 10). Segundo essa autora:

> As contribuições de bakhtinianas para uma teoria/análise dialógica do discurso, sem configurar uma proposta fechada e linearmente organizada, constituem de fato um corpo de conceitos, noções e categorias que especificam a *postura dialógica* diante do *corpus discursivo*, da metodologia e do pesquisador. A pertinência de uma perspectiva dialógica se dá pela análise das especificidades discursivas constitutivas de situações em que a linguagem e determinadas atividades se interpenetram e interdefinem, e do compromisso ético do pesquisador com o objeto, que, dessa perspectiva, é um sujeito histórico" (BRAIT, 2018a, p. 29).

A mesma autora complementa ainda que:

> Ninguém, em sã consciência, poderia dizer que Bakhtin tenha proposto *formalmente* uma teoria e/ou análise do discurso [...]. Entretanto,

> também não se pode negar que o pensamento bakhtiniano representa, hoje, uma das maiores contribuições para os estudos da linguagem, observada tanto em suas manifestações artísticas como na diversidade de sua riqueza cotidiana. Por essa razão, mesmo consciente de que Bakhtin, Volochinov, Medvedev e outros participantes do que atualmente se denomina *Círculo de Bakhtin* jamais tenham postulado um conjunto de preceitos sistematicamente organizados para funcionar como perspectiva teórico-analítica fechada [...] o conjunto das obras do *Círculo* motivou o nascimento de uma análise/teoria dialógica do discurso [...] (Ibid., 9–10).

Para Bakhtin, as relações dialógicas não podem ser separadas do campo do discurso, apesar de serem extralinguísticas, pois a linguagem só existe enquanto utilizada na comunicação dialógica dos que a usam e é nessa comunicação que vive a linguagem, chegando a substituir o termo "discurso" por "relações dialógicas". (BAKHTIN, 2002, p. 221).

Dessa forma, Paula (2013) nos fala sobre uma das características de abordagem dos estudos da linguagem do Círculo de Bakhtin: "a ADD não pode se centrar apenas externa nem, tampouco, apenas internamente", o que é complementado pelas palavras de Brait (2018a, p. 13):

> Excluir um dos polos é destruir o ponto de vista dialógico, proposto e explicitado pela teoria e pela análise, e dado como constitutivo da linguagem. É a bivocalidade de 'diálogo', situado no objeto e na maneira de enfrentá-lo, que caracteriza a novidade da Metalinguística.

Conforme Paula (2013), ao considerarmos Bakhtin como ADD, o estamos distinguindo de pensadores de outras perspectivas teóricas, sem apagar a singularidade de suas posições teóricas.

Bakhtin (2006, p. 128–129) afirma que a ordem metodológica para realizar o estudo da linguagem deve seguir os seguintes passos:

> 1. As formas e os tipos de interação verbal em ligação com as condições concretas em que se realiza.
> 2. As formas das distintas enunciações, dos atos de fala isolados, em ligação estreita com a interação de que constituem os elementos, isto é, as categorias de atos de fala na vida e na criação ideológica que se prestam a uma determinação pela interação verbal.
> 3. A partir daí, o exame das formas da língua na sua interpretação linguística habitual.

A ADD, segundo Pereira (2010), procura compreender os gêneros do discurso através das regularidades enunciativo-discursivas de que são constituídos e seu funcionamento. Conforme nos apresenta Brait (2018a), o trabalho metodológico, analítico e interpretativo com textos/discursos possibilita a análise de campos semânticos, bem como de organizações semânticas e articulações enunciativas, que caracterizam e indicam a heterogeneidade dos discursos e dos sujeitos neles presentes. Segundo a mesma autora, além da materialidade linguística, na ADD há a possibilidade de reconhecer os gêneros a que pertencem os textos, os gêneros que nele se articulam e as atividades em que eles se inserem. Assim,

> não há categorias a priori aplicáveis de forma mecânica a textos e discursos, com a finalidade de compreender formas de produção de sentido num dado discurso, numa dada obra, num dado texto [...]. As diferentes formas de conceber "enfretamento dialógico da linguagem" constituem, por sua vez, movimentos teóricos e metodológicos que se desenvolvem em diferentes direções. (BRAIT, 2018a, p. 13–14).

Outro aspecto importante para a compreensão do Círculo de Bakhtin é a relevância do sujeito nas relações dialógicas, conforme explicado a seguir:

> Para compreendermos a concepção teórica e analítica sugerida pelos trabalhos do Círculo de Bakhtin, devemos considerar ainda o sujeito. Para essa abordagem dialógica, o sujeito é, sempre, composto a partir e por meio do "outro". Assim, o "outro" é condição *sine qua non* para a existência do "eu" (PAULA, 2013, p. 253).

Dada a importância dos sujeitos envolvidos nas relações dialógicas, acreditamos ser esse o caminho que precisamos traçar para a busca de possíveis respostas para nosso problema de pesquisa, através do qual, utilizando a ADD, podemos atribuir a relevância dos interlocutores dos discursos que permeiam nossas aulas de Matemática.

3.3 Os discursos na sala de aula

A sala de aula é permeada por discursos diversos: temos o discurso do professor, dos alunos, dos gestores, do livro didático e aqueles discursos que estão presentes direta ou indiretamente na elaboração desses discursos. Todas essas vozes estão relacionadas a práticas discursivas que ocorrem em sala de aula, que emergem nas aulas de Matemática.

Em sua pesquisa de doutorado, Barboza (2011) nos fala sobre o desafio para o professor de abandonar práticas de ensino voltadas à transmissão de conhecimentos, que não priorizam a relação professor–aluno e aluno–aluno, e se voltar para práticas em que o diálogo possa levar à construção do conhecimento pelo aluno, acrescentando que:

> Esta questão está associada às concepções de ensino e, em minha opinião, uma grande maioria dos docentes considera que a aprendizagem de um determinado conteúdo de conhecimentos se concretiza quando o aluno consegue memorizar formas de resolver um exercício ou de como chegar a uma resposta correta, requer do professor realizar em sala de aula um discurso e a propor atividades voltadas para que o aluno se aproprie dos algoritmos (BARBOZA, 2011, p. 17).

Dessa maneira, o autor defende que a busca pela apropriação de algoritmos, com a finalidade de apresentar respostas corretas nos diversos instrumentos utilizados em sala de aula, faz com que o professor não leve em consideração a apreensão pelo aluno dos significados ou significações[13] das respostas encontradas, o que não atende à necessidade de inseri-lo na cultura para que possa utilizar os aprendizados escolares em seu contexto de forma crítica e reflexiva (Ibid.). Assim,

> A escola para ser um ambiente que favoreça as interações entre os alunos e entre estes e o professor, representante da cultura na qual se pretende inserir, torna necessário que os alunos desenvolvam significados aos fenômenos e aos símbolos específicos desta cultura, bem como desenvolvam hábitos de argumentar, de refletir e formas de pensar que os habilitem a participarem e a contribuírem ativamente da sua renovação. Acredito que estes significados seriam desenvolvidos tendo como ponto de partida o significado inicial atribuído pelo aluno às atividades e ao discurso do professor relativo ao conhecimento que está sendo abordado, tornando necessários momentos em que ocorram em sala de aula processos interativos e reflexivos. Nesta perspectiva, surge a necessidade de analisar como os alunos entendem o discurso do professor, se atribuem ou não um significado que favoreça a assimilação/construção dos significados referendados pela escola (BARBOZA, 2011, p. 18).

Conforme discutido na Seção 3.1.1, nós nos comunicamos via de regra utilizando a língua natural. E não poderia ser diferente quando falamos nas relações estabelecidas nas aulas de Matemática que, apesar de ter sua linguagem própria, necessita da língua materna para estabelecer os diálogos inerentes ao ambiente da sala de aula. Entretanto, podemos ressaltar que a diversidade de linguagens presentes em uma sala de aula pode ser uma barreira para o processo de aprendizagem. Por um lado, o professor que precisa utilizar uma linguagem acessível aos alunos, por outro os diferentes meios de onde esses alunos são oriundos, que podem refletir na dificuldade de interação.

> A relação entre os conhecimentos desenvolvidos nas experiências vivenciadas pelos alunos, incluindo aquilo que eles aprendem de matemática no cotidiano, a linguagem matemática praticada pela escola e o discurso do professor têm fortes implicações no processo de comunicação em sala de aula, desse modo, podem oferecer algumas alternativas para o posicionamento do discurso do professor em sala de aula de matemática, que possibilite aos alunos uma melhor compreensão desse discurso (BARBOZA, 2011, p. 20).

Para que haja a apreensão dos conteúdos é necessário que se estabeleça uma comunicação, em que a linguagem dos interlocutores possa ser compreendida. Comunicar-se é, antes de tudo, uma necessidade social e não poderia ser diferente no ambiente escolar. Mas, para que o aluno possa compreender os discursos do professor, este precisa se fazer claro e, ao mesmo tempo, instigar o aluno ao debate. As aulas e discursos que aproximem a Matemática do aluno são necessárias e

> [...] dependendo do discurso do professor, podem ocorrer processos interativos em que o aluno é provocado para o debate, e este somente será produtivo se o aluno desenvolver uma compreensão do discurso do

[13] Barboza (2011) pontua que Bakhtin não utiliza o termo significado, mas significação.

> professor que o leve a uma atribuição de significado. Por meio de perguntas estrategicamente efetuadas e da criação de um ambiente de discussão que promova interações entre os alunos e entre estes e o professor, o discurso pode levar a explicitações de como as situações problema foram resolvidas, a efetuar críticas sobre soluções particulares desenvolvidas, discutindo suas ideias e as dos colegas buscando soluções mais adequadas (BARBOZA, 2011, p. 21).

Ressaltamos que, nos dizeres de Almeida (2012, p. 68), "a linguagem matemática para se comunicar Matemática entre os matemáticos não é a mesma linguagem matemática utilizada em sala de aula para se ensinar e se aprender Matemática". Assim, é importante para os processos de ensino e aprendizagem que as práticas discursivas sejam valorizadas e impulsionadas em nossas salas de aula, fomentando a interação entre professor–aluno, aluno–professor e aluno–aluno para a compreensão das diversas vozes envolvidas nessas práticas e dos significados dos conteúdos matemáticos. Dessa forma,

> a Matemática se realiza em cada momento nos processos dialógicos que ocorrem no cotidiano das pessoas, quando discutem sobre algo envolvendo ideias matemáticas, o que necessariamente envolve algo de sua linguagem. Linguagem que é regida por uma sintaxe, com regras gramaticais quando lida, interpretada ou comunicada pela linguagem natural. O significado se produz quando o processo dialético entre linguagem natural e linguagem matemática se dá de modo confortável (ALMEIDA, 2012, p. 98–99).

A produção de significados, através dessa imbricação da linguagem matemática e da linguagem natural, possibilita a reflexão sobre as relações dialógicas existentes nas aulas de Matemática, permitindo-nos perceber as diversas vozes que ecoam em nossas salas de aula.

3.4 Interação e Silêncio

Laplane (2000) nos fala que a sala de aula é um ambiente idealizado como aquele em que se ensina e se aprende, através de troca de ideias, realização de atividades e debates. Porém, os padrões idealizados não condizem com a realidade da sala de aula. A escola apresenta-se incapaz de lidar com problemas como a heterogeneidade e diversidade próprias dessa instituição. Uma das questões inerentes a essa discussão continua sendo a do insucesso do aluno e a busca de suas causas.

Em sua pesquisa, a autora realizou a análise da interação e do silêncio em situações concretas da sala de aula, utilizando conceitos da Análise do Discurso e ideias de Bakhtin, ampliando, dessa forma, a noção de interação, para incluir episódios que envolvem o silêncio. Dessa forma, ressalta que

> algumas abordagens, como a etnografia da comunicação, discutem suas possíveis funções. Segundo os autores, o silêncio significa, intervém na estruturação de situações, possui conteúdo proposicional ou não, inclui gestos ou não. Ele pode também expressar significado gramatical, pode

> ser simbólico ou convencional. O silêncio pode ter valores positivos, indicando maior entendimento ou intimidade; ele pode não ser apenas uma ausência de palavras, mas uma presença ativa e realizar a necessidade defensiva de evitação. [...] Não obstante, o estatuto do silêncio e o lugar que ele efetivamente ocupa na estrutura comunicativa não estão suficientemente claros (Ibid., p. 64).

Não há como negar que o silêncio sempre esteve presente nas aulas de matemática. Quando nos referimos às atitudes responsivas dos alunos durante as aulas e discussões sobre os conteúdos ministrados, essas podem provocar no professor grande incerteza quanto à eficácia da metodologia utilizada e consequente aprendizagem por parte dos alunos.

Laplane (2000) explica que, na perspectiva discursiva, a noção do silêncio tem consequências para a concepção de linguagem. Dessa forma, a concepção difundida pela Análise do Discurso de que a linguagem é polissêmica, indeterminada, composta por diversos sentidos e vozes, influencia a concepção de silêncio, permitindo-nos suspeitar de seus sentidos fixos em relação às vozes nele existentes. Portanto, podemos prestar atenção ao fato de que quando alguém fala, alguém se cala e algo se cala, concluindo que onde há linguagem, há silêncio.

Por outro lado, Fanizzi (2008, p. 48–49), ressalta que "no decorrer do processo interativo, a atividade mental do *eu* de cada aluno será trocada pela atividade mental construída no grupo, entre todos os *eus* dos alunos e do professor".

Da mesma forma, nas palavras de Bakhtin (1993a, p. 117),

> a atividade mental do sujeito constitui, da mesma forma que a expressão exterior, um território social. Em consequência, todo o itinerário que leva da atividade interior (o 'conteúdo a exprimir') à sua objetivação externa (a 'enunciação') situa-se completamente em território social. Quando a atividade mental se realiza sob a forma de uma enunciação, a orientação social à qual ela se submete adquire maior complexidade graças à exigência de adaptação ao contexto social imediato do ato de fala, e, acima de tudo, aos interlocutores concretos.

Entretanto, não quer dizer que todos os alunos em situações de interação irão apresentar o mesmo desenvolvimento cognitivo, mas, em uma perspectiva bakhtiniana, o *eu* inicial se transformaria em um novo *eu*, resultante de uma produção coletiva — o *eu* coletivo, que sofre a influência da vivência de cada indivíduo (FANIZZI, 2008). Podemos observar o que foi dito na Figura 8, que se refere à transição entre esses sujeitos no processo de interação verbal:

Figura 8 – Transição entre a atividade mental do *eu* e a atividade mental do *nós*

Fonte: Fanizzi (2008, p. 49).

Compreendemos que a atividade interior que não se exterioriza em forma de enunciação existiu, mesmo sem que outros a tenham escutado. Dessa forma, no silêncio temos a atividade mental constituída da mesma forma que a expressão que não foi — ainda — submetida ao contexto social. Porém, a atividade interior, não exteriorizada, é considerada por Bakhtin como consciência primitiva — a atividade mental do *eu* — e, ao passo que as relações discursivas vão acontecendo, e o interlocutor exterioriza essa atividade mental, esta torna-se mais elaborada e complexa — atividade do *nós* — estando em permanente construção, a partir de novos conhecimentos adquiridos nas interações discursivas. Dessa forma,

> conforme o indivíduo interage com seu meio, aumentam suas possibilidades de assimilação, significação e compreensão do mundo. Nas relações interativas, o exercício de compreender o conteúdo da enunciação do interlocutor [...] desenvolve e aperfeiçoa a atividade do *eu* em direção à atividade do *nós* (FANIZZI, 2008).

Em sua pesquisa, Fanizzi (2008) procurou analisar a medida com que componentes afetivos, sociais e culturais emergem das interações em sala de aula e a forma com que eles se relacionam com os conteúdos de Matemática e interferem na aprendizagem. A autora identificou que nas manifestações orais dos alunos esses componentes estavam presentes e não apenas os conteúdos diretamente relacionados ao conhecimento matemático.

Apesar de não ser considerado como manifestação oral, o silêncio também foi analisado pela autora, uma vez que as condições nas quais os enunciados são produzidos se agregam à situação verbal em uma perspectiva bakhtiniana. Corroborando essa ideia, Brait e Melo (2018, p. 67) afirmam que

> [...] o enunciado e as particularidades de sua enunciação configuram, necessariamente, o processo interativo, ou seja, o verbal e o não verbal

> integram a situação e, ao mesmo tempo, fazem parte de um contexto maior histórico, tanto no que diz respeito a aspectos (enunciados, discursos, sujeitos etc.) que antecedem esse enunciado específico quanto ao que ele projeta adiante.

Fanizzi (2008) ressalta que alguns alunos permanecem em silêncio nas aulas devido a sua insegurança, outros o fazem por opção. Dessa forma, o professor contribui para a aprendizagem da Matemática quando promove um ambiente de interação durante o processo de ensino, possibilitando aos alunos um ambiente de acolhimento, em que possa se sentir à vontade para exteriorizar sua atividade mental interior. A autora afirma ainda que todas as falas, e até mesmo o silêncio, têm potencial para a análise das interações discursivas ocorridas nas aulas de matemática.

Outro fator para o silêncio do aluno, apontado pela autora, é a ausência de finalidade em falar, que vai de encontro à atitude esperada pelo professor, que "exige do aluno respostas — preferencialmente corretas — às perguntas" (Ibid., p. 75).

Por outro lado, destacamos que

> apesar de o aluno não se expressar oralmente, ele ouve, reflete e se manifesta de outras maneiras (atividades por escrito, olhares, reações de concordância ou discordância nos trabalhos em grupo). No entanto, o silêncio também pode significar o distanciamento do aluno do processo de interação e de aprendizagem por uma recusa deliberada ou por apresentar dificuldades de diferentes origens (Ibid., p. 209).

Concordamos com a autora quando explica que "falar mais nas aulas de Matemática não significa necessariamente falar de Matemática e não se manifestar (silenciar) não significa obrigatoriamente ausência de reflexão sobre as ideias matemáticas" (Ibid., p. 197).

Alguns dos motivos que levam ao silêncio do aluno, apresentados por Fanizzi (2008) são:

- A insegurança no domínio do conhecimento matemático;
- A necessidade de um tempo maior de reflexão para apresentar uma resposta;
- O momento de tomada de decisão do aluno sobre o que falar e se realmente falaria o que desejava compartilhar com o grupo;
- A ausência de objetivação para o ato de fala;
- A falta de desejo de se manifestar oralmente, preferindo mais ouvir e menos falar;
- A preocupação com questões externas à aula;
- As representações que os alunos têm de Matemática, de professor de Matemática e de si mesmos frente à aprendizagem dos conceitos da área.

Acreditamos que a esses motivos podem ser acrescentados outros, que não tenham aparecido durante a pesquisa realizada por aquela autora. Cada contexto pode revelar razões diferentes, conforme seja a realidade dos alunos, do professor, da escola, do currículo, da turma e de tantos outros fatores internos e externos a cada situação.

Dito isso, damos continuidade à nossa pesquisa adentrando ao capítulo seguinte, em que trazemos as representações semióticas na Geometria Analítica.

4 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA GEOMETRIA ANALÍTICA

A representação é subjetiva: a representação de uma pessoa não é a mesma que a de outra. Apenas isso já deixa claro que há uma multiplicidade de representações associadas ao mesmo sentido.[1]

Pesquisas em Educação Matemática que se fundamentam na TRRS, bem como a revisão que fizemos anteriormente na Seção 2.4, nos revelam a importância das representações semióticas e a variedade delas na Matemática. Essa pluralidade de RRS é um fator importante para a aprendizagem em Matemática. Entretanto, essa mesma pluralidade pode gerar dificuldades na compreensão, quando esses registros não são abordados com naturalidade pelo professor em sala de aula.

Quando nos referimos à Geometria Analítica, a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação de seus objetos, fator essencial para que ocorra sua aprendizagem, pode ser dificultada caso os professores e materiais didáticos priorizem o registro algébrico e os tratamentos deste registro, causando fenômenos de não congruência nas conversões ou a heterogeneidade no sentido da conversão[2].

Neste capítulo, trazemos algumas considerações históricas sobre as cônicas e apresentamos um estudo sobre os RRS na Geometria Analítica, especificamente no conteúdo de Cônicas.

4.1 As cônicas de Apolônio

Dentre os conteúdos da Geometria Analítica, escolhemos o de Cônicas para realizarmos esse estudo. Recordando as especificidades do conteúdo, trazemos algumas considerações que achamos relevantes.

Boyer (1974), Eves (2011) e Roque (2012) explicam que três grandes matemáticos se destacaram durante o primeiro século da Idade Helenística, sendo eles Euclides, Arquimedes e Apolônio. Devido às obras desses matemáticos, o período de cerca de 300 a 200 a.C. ficou conhecido como "Idade Áurea" da matemática grega.

Conforme esses autores, pouco se sabe sobre a vida de Apolônio. Provavelmente tenha vivido no período compreendido entre 262 a 190 a.C., entre os reinos de Ptolomeu Euergetes e de Ptolomeu Filopater. Por ter havido na Antiguidade muitos Apolônios, esse matemático pode ser distinguido pelo uso do nome com que ficou conhecido Apolônio de Perga[3].

---

[1] Frege (2011, p. 24)

[2] Segundo Duval (2009) a heterogeneidade ocorre quando a conversão acontece naturalmente em um sentido, mas não acontece com a mesma naturalidade no sentido inverso.

[3] De acordo com Boyer (1974) houve cerca de 129 homens chamados Apolônio da antiguidade com biografias mencionadas em *Pauly Wissowa, Real-Enzyclopadie der Klassischen Altertumswissenschaft.*

A maior parte de suas obras desapareceu, como *Dividir em uma razão*, *Cortar uma área*, *Sobre secção determinada*, *Tangências*, *Inclinações*, *Lugares Planos* e *O Tesouro*, que incluía grande parte de suas obras e possivelmente muito do que hoje é conhecido por geometria analítica (BOYER, 1974).

Apenas dois de seus tratados se preservaram. Sua obra principal — *As cônicas* — é um tratado sobre essas curvas, que se sobressaiu sobre todos os textos anteriormente escritos sobre esse tema, incluindo *As Cônica*s de Euclides.

As secções cônicas eram conhecidas há um século e meio quando Apolônio escreveu esse tratado. Aristeu e Euclides já haviam escrito exposições gerais sobre esse tema, mas assim como *Os Elementos* de Euclides substituíram os textos anteriores, o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas. De acordo com Boyer (1974, p. 104), "*Os elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos".

A elipse, a parábola e a hipérbole, antes de Apolônio, eram obtidas como secções de diferentes tipos de cone circular reto, conforme o tipo do ângulo do vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio aparentemente teria sido o responsável por mostrar sistematicamente, pela primeira, vez, não ser necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e mostrou que variando a inclinação do plano que intersecta o cone podem ser obtidas as três espécies de seções cônicas, o que representou um importante passo para relacionar essas curvas (Ibid.).

Apolônio ainda provou que o cone não precisa ser reto, mas pode também ser oblíquo ou escaleno e substituiu o cone de uma só folha por um cone duplo, como dois cones de sorvete em sentidos opostos — com extensão indefinida — cujos vértices coincidem e os eixos estão sobre uma mesma reta (Ibid.). Acredita-se que o modelo matemático para a representação do movimento dos planetas é de Apolônio. Devido a essa contribuição[4], a curva considerada como duas hipérboles, passa a ser designada como uma mesma hipérbole de dois ramos.

Apesar de *As cônicas* de Apolônio constituírem uma obra de tamanha amplitude, algumas propriedades fundamentais das cônicas não aparecem, como é o caso dos focos e do conceito numérico que corresponda à excentricidade. Possivelmente algumas ou todas essas omissões se devam ao fato de terem sido tratadas em outro lugar, em obras perdidas de Apolônio ou de outros autores (Ibid.).

4.2 Cônicas e seus registros de representação

Para a construção da definição de cônicas, ao considerarmos duas retas não perpendiculares, oblíquas entre si, que se cruzam em um ponto e rotacionarmos uma

[4] Importante ressaltar que "os métodos de Apolônio, em *As Cônicas*, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1800 anos" (BOYER, 1974, p. 114).

dessas retas em torno da outra, mantendo o ângulo entre elas fixo, obtemos o que denominamos de superfície cônica de duas folhas[5], que, interseccionada por um plano, dependendo da sua direção, forma as diferentes cônicas. A figura a seguir mostra a formação da superfície cônica.

Figura 9 – Formação de uma superfície cônica de duas folhas

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

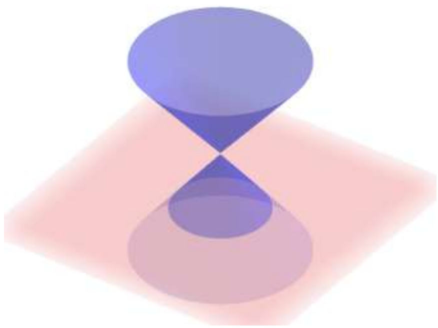
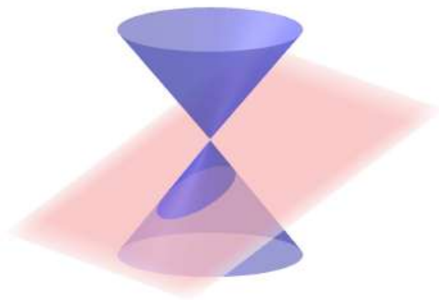
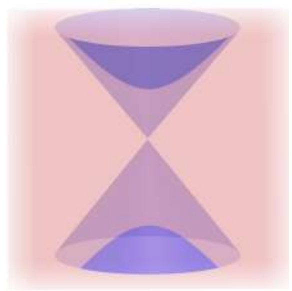
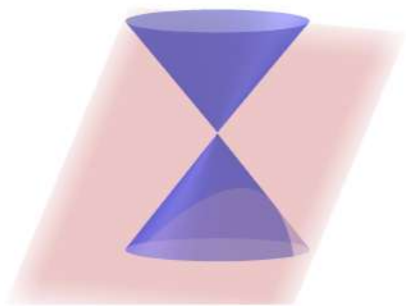
De acordo com Steinbruch e Winterle (1991), a partir da intersecção de um plano π com a superfície cônica de duas folhas, se o plano π não passa pelo vértice, a seção cônica poderá ser:

- uma *circunferência* se o plano π for perpendicular ao eixo e da superfície;
- uma *elipse* se o plano π for oblíquo ao eixo e interseccionando apenas uma das folhas da superfície cônica;
- uma *hipérbole* se o plano π for paralelo ao eixo e;
- uma *parábola* se o plano π for paralelo a uma geratriz da superfície g.

Podemos observar essas representações na Tabela 1.

[5] Em nossas observações, constatamos que muitos livros de Matemática do Ensino Médio trazem a introdução às cônicas como sendo obtidas pela interseção de um plano com um *cone circular reto*, *cone reto*, ou *cone duplo*. Em nosso entendimento, a forma de melhor definir a superfície formada por essas retas é *superfície cônica de duas folhas*.

Tabela 1 – Superfície cônica de duas folhas, interseccionada por um plano

Circunferência	**Elipse**
	
Hipérbole	**Parábola**
	

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Conforme observamos nas representações apresentadas, a partir da interseção de um plano com a superfície cônica de duas folhas, podemos obter as seções cônicas, sejam elas a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola[6].

Ainda segundo Steinbruch e Winterle (1991), se o plano π passa pelo vértice da superfície cônica, nós obtemos as cônicas degeneradas, sendo elas:

- um *ponto* se o plano π apenas tem o ponto V em comum com a superfície;
- uma *reta* se o plano π for tangente à superfície cônica;
- duas *retas* se o plano π forma com o eixo e um ângulo menor do que forma com a geratriz g.

Acrescentamos que autores, como Nascimento (2020), consideram a circunferência como um caso de cônica degenerada.

Optamos, entretanto, por incluir a circunferência[7] no presente estudo, apesar dos livros didáticos normalmente trazê-la em separado do conteúdo de cônicas.

[6] Cf. STEINBRUCH; WINTERLE, 1991.
[7] Cf. OLIVEIRA; VIEIRA; JUNIOR, 2015.

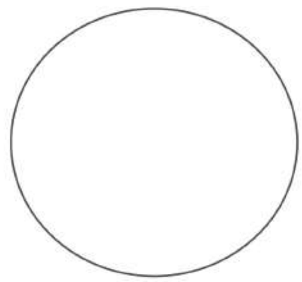
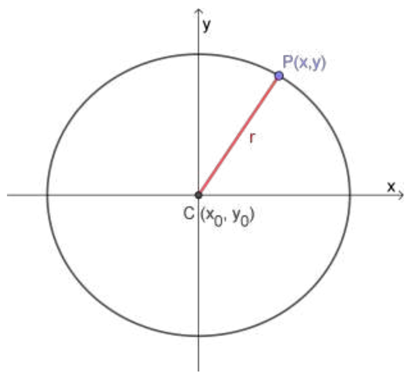
Registros de Representação da Circunferência

Na Geometria Analítica podemos encontrar alguns Registros de Representação Semiótica (RRS) do mesmo objeto matemático e os elementos presentes em cada um são primordiais para as transformações necessárias entre essas representações.

O primeiro caso que apresentamos é o da circunferência. De acordo com Muniz Junior (2018, p. 6), "se o ângulo β for reto, isto é, se o eixo do cone for ortogonal ao plano secante, então a seção resultante será uma circunferência".

Na Tabela 2 encontramos os registros de representação da circunferência.

Tabela 2 – Registros de Representação da Circunferência

<table>
<tr><th>Língua Natural</th><th>Representação Figural</th></tr>
<tr><td>Chamamos de circunferência de centro $C(x_1, y_1)$ e raio r o conjunto de pontos P_n em um plano que distam igualmente a C. A essa distância chamamos de raio r.</td><td></td></tr>
<tr><th>Representação Algébrica</th><th>Representação Gráfica</th></tr>
<tr><td>$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad (4.1)$$</td><td>
</td></tr>
</table>

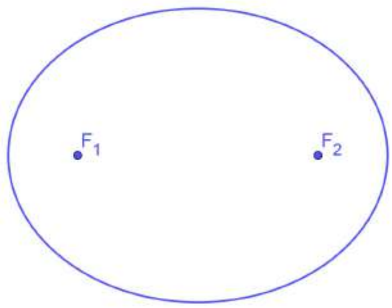
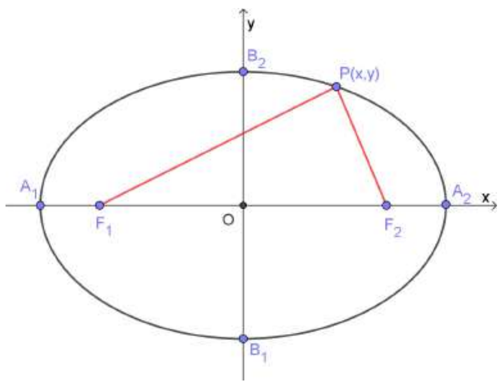
Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Registros de Representação da Elipse

O segundo caso que apresentamos é o da elipse. De acordo com Muniz Junior (2018, p. 6), "neste caso o plano de seção é oblíquo ao eixo vertical e à geratriz do cone e intercepta a superfície cônica em apenas uma folha".

Na Tabela 3 estão as representações da elipse.

Tabela 3 – Registros de Representação da Elipse

Língua Natural	**Representação Figural**
Chamamos de elipse o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2, denominados focos, é a constante $2a$, de modo que essa distância é maior que a distância entre os focos, dada por $2c$, isto é, $2a > 2c$.	
Representação Algébrica	**Representação Gráfica**
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad (4.2)$ ou $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1 \quad (4.3)$	

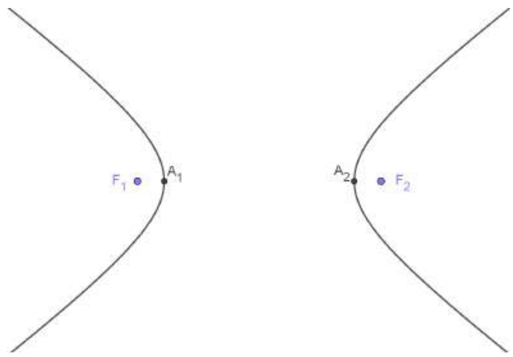
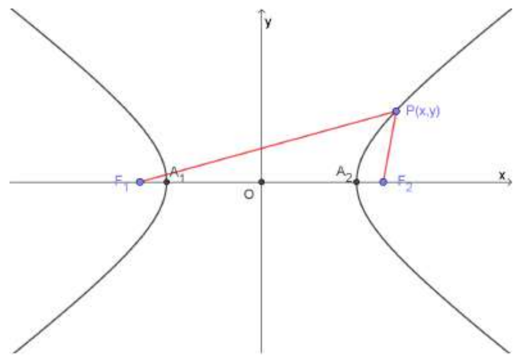
Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Registros de Representação da Hipérbole

O terceiro caso que apresentamos é o da hipérbole. De acordo com Muniz Junior (2018, p. 8), "neste caso o plano de seção é oblíquo ao eixo vertical e à geratriz do cone, mas intercepta a superfície cônica nas duas folhas".

Na Tabela 4 constam os RRS da hipérbole.

Tabela 4 – Registros de Representação da Hipérbole

Língua Natural	**Representação Figural**
Chamamos de hipérbole o conjunto de pontos P do plano cuja diferença das distâncias de P aos pontos F_1 e F_2 (em módulo) é constante e igual a $2a$ equidistantes do Centro. A essa distância chamamos de raio r.	
Representação Algébrica	**Representação Gráfica**
$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4.4)$ ou $\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4.5)$	

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

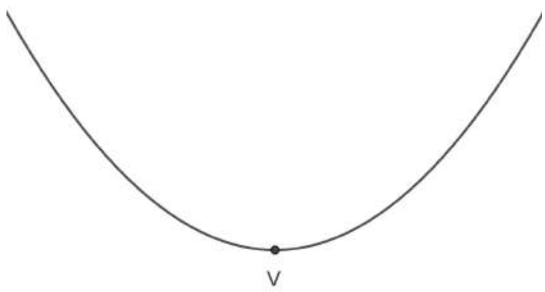
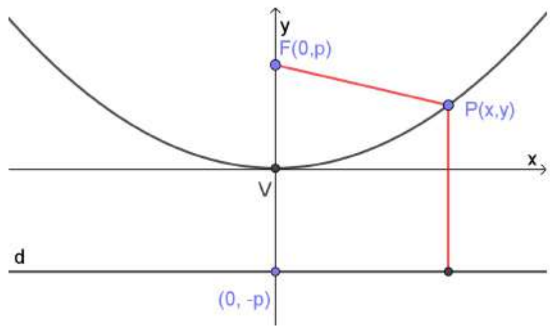
Registros de Representação da Parábola

O quarto caso que apresentamos é o da parábola. De acordo com Muniz Junior (2018, p. 8), "neste caso o plano de seção é paralelo à geratriz do cone, oblíquo ao eixo vertical e intercepta a superfície cônica em apenas uma folha".

Vejamos os RRS da parábola, presentes na Tabela 5[8].

[8] As representações em língua materna que descrevemos nas Tabelas 2, 3, 4 e 5 estão de acordo com o que é apresentado pelos livros didáticos do Ensino Médio. Nesse caso nós utilizamos as definições constantes do livro Giovanni *et al.* (2017).

Tabela 5 – Registros de Representação da Parábola

Língua Natural	**Representação Figural**
Considere em um plano uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Chamamos de parábola o conjunto de todos os pontos P do plano que são equidistantes de F e d.	
Representação Algébrica	**Representação Gráfica**
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad (4.6)$$ $$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0) \quad (4.7)$$ ou $$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (4.8)$$ $$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0) \quad (4.9)$$	

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

As diferentes formas de representar um mesmo registro se complementam e mostram que um registro apresenta determinadas características que não são observadas em outros. Dessa forma, a complementaridade de registros é importante para acessar todas as características de um objeto.

Ratificamos que a diversidade desses registros e a capacidade de mobilizar ao menos dois registros de representação são fatores determinantes para a aprendizagem matemática, segundo a TRRS.

5 DIRETRIZES METODOLÓGICAS

O desenvolvimento da linguagem aprofunda o desenvolvimento conceitual, pois o aluno utiliza a linguagem verbal e/ou escrita para expressar conceitos já adquiridos. No entanto, observa-se também que o uso da linguagem aliado à necessidade de explicar o entendimento em palavras para nós próprios e para outras pessoas aperfeiçoa o processo de construção de significados de conceitos, pois estes procedimentos linguísticos auxiliam a formar e a aprender conceitos.[1]

Neste capítulo descrevemos o percurso metodológico da investigação, as escolhas metodológicas, o cenário da pesquisa, os participantes da pesquisa, os procedimentos metodológicos na coleta e no tratamento de dados.

5.1 As escolhas da Pesquisa

Definimos procedimentos metodológicos guiados pelo marco teórico desta pesquisa, que possibilitassem a compreensão em torno dos processos de comunicação em matemática via oralidade, leitura e escrita, ou outras formas de representação.

Desenvolvemos uma investigação qualitativa, pois buscamos a forma que consideramos mais adequada para alcançar os objetivos da nossa pesquisa. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 47-51), na investigação qualitativa:

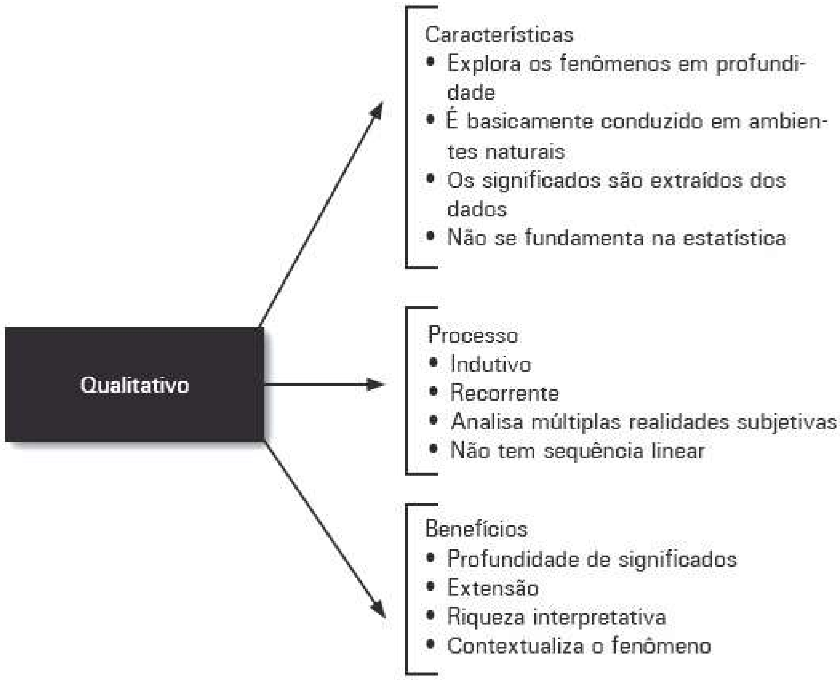
> 1. A fonte directa é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. [...] 2. A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais. [...] Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos. [...] 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. [...] 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objectivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstracções são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. [...] 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Nossa pesquisa se enquadra nos pontos citados por Bogdan e Biklen (1994) e, por isso, acreditamos ser a forma mais adequada para atingirmos nosso objetivo.

Corroborando essa escolha, trazemos o esquema descrito por Sampieri, Collado e Lucio (2013) que apresenta as características, processos e benefícios do método qualitativo:

[1] SANTOS-WAGNER, V. M. P. d. Tipos de registros e relatos de aulas e de experimentos de ensino. Projeto Pró-Ciências. Universidade Federal de São Carlos, Maio de 2000.

Figura 10 – Esquema do Enfoque Qualitativo



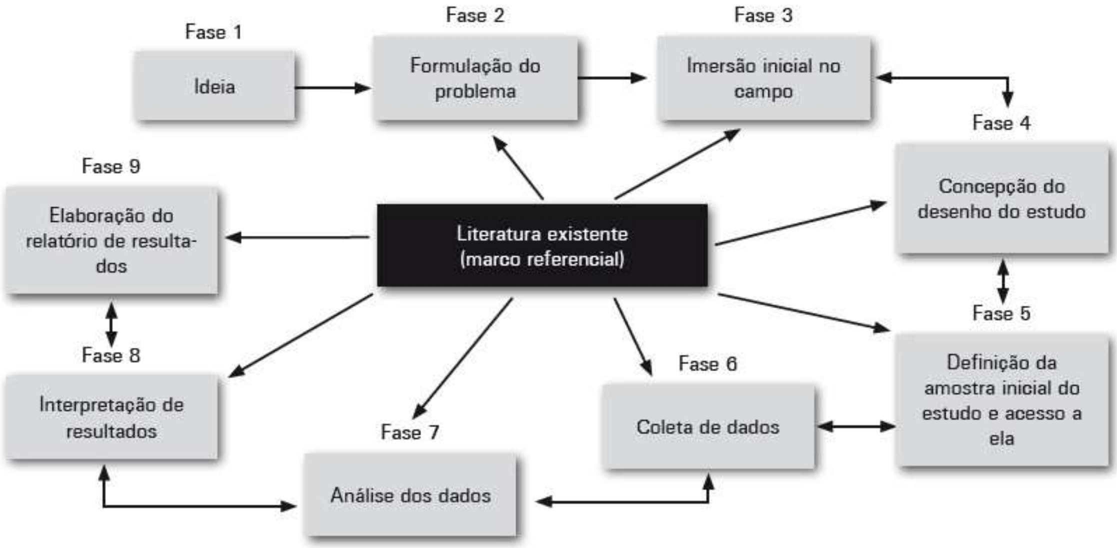
Fonte: Sampieri, Collado e Lucio (2013, p. 29).

De acordo com os mesmos autores, a pesquisa qualitativa se guia por áreas significativas da pesquisa, em que "é possível desenvolver perguntas e hipóteses antes, durante e depois da coleta e análise de dados". Assim, a investigação é mais dinâmica e varia de acordo com suas especificidades. Para compreender esse ciclo, os autores apresentam uma tentativa de definição das fases da investigação qualitativa, deixando claro "sua complexidade e flexibilidade são maiores" (Ibid., p. 33).

Na Figura 11, trazemos o esquema apresentado por esses autores, no qual elencam as fases constituintes do processo qualitativo.

Essas fases vão desde a ideia inicial da pesquisa até a interpretação e elaboração do relatório de resultados, passando por diversas fases em que o pesquisador atentamente procura relacioná-las ao marco referencial, mantendo a relação estrutural desse marco com todas as fases do processo. Ressaltamos que, apesar de uma aparente linearidade entre essas fases, a todo momento, o pesquisador tem a possibilidade de voltar para as etapas que considerar necessário revisitar, modificando as decisões tomadas, conforme o caminhar da pesquisa.

Figura 11 – Esquema do Processo Qualitativo



Fonte: Sampieri, Collado e Lucio (2013, p. 34).

Em relação aos dados da pesquisa, quando falamos na investigação qualitativa, é importante destacar que

> Os dados são simultaneamente as provas e as pistas. Coligidos cuidadosamente, servem como factos inegáveis que protegem a escrita que possa ser feita de uma especulação não fundamentada. Os dados ligam-nos ao mundo empírico e, quando sistemática e rigorosamente recolhidos, ligam a investigação qualitativa a outras formas de ciência. Os dados incluem os elementos necessários para pensar de forma adequada e profunda acerca dos aspectos da vida que pretendemos explorar (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 149).

Em nossa investigação, os dados foram coletados por meio de gravações das aulas, como forma de possibilitar uma melhor compreensão dos discursos envolvidos durantes as observações, sem perda de elementos significativos das falas oriundas dos sujeitos envolvidos nos diálogos dessas aulas.

5.2 Os contextos envolvidos: escola, professor, pandemia, turma e formato das aulas

Optamos por desenvolver nossa pesquisa no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), campus Campina Grande, em que tínhamos a possibilidade de escolha da turma a ser pesquisada, dentre os cursos ofertados naquele instituto.

A decisão pela turma ocorreu mediante análise dos horários das turmas de 3º ano com aulas no turno da tarde e posterior contato com o respectivo professor de Matemática, que, muito solicitamente, aceitou participar da investigação, colaborando em tudo o que foi necessário para o desenvolvimento desta pesquisa.

O professor é graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba – UEPB (2008), Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, com Educação Matemática como Área de Concentração, pela Universidade Estadual da Paraíba – UEPB (2012), Mestre em Matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba – UEPB (2015). Professor D 402 do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB. Possui experiência em Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, uso de software e TDICs no ensino e aprendizagem de matemática. Atua no Curso de Licenciatura em Matemática e na Especialização em Ensino de Matemática do instituto.

Acompanhamos as aulas correspondentes ao conteúdo de Geometria Analítica, ministradas pelo professor de Matemática da referida turma, durante o 4º Bimestre do ano letivo de 2020, que devido, à pandemia de COVID-19 e ao consequente reajuste do calendário letivo do instituto, aconteceu no ano de 2021.

Foram gravadas no total sete aulas, com duração entre 1h15min a 1h37min. Todas essas aulas aconteceram em formato remoto, de forma síncrona. Uma outra aula além dessas aconteceu de forma assíncrona. As aulas para esse período letivo foram contabilizadas em dobro, de acordo com o protocolo do instituto para as aulas em formato remoto. Assim, cada encontro foi equivalente à carga horária de três horas-aulas semanais.

Para atingir nossos objetivos investigamos possíveis relações entre a Educação Matemática, os aspectos teóricos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a compreensão dos enunciados em situações concretas de comunicação, por meio da produção e das articulações enunciativas da teoria de Bakhtin.

Dessa forma buscamos responder à pergunta que fundamenta a nossa pesquisa: Quais são as dificuldades para a compreensão do conteúdo de cônicas, em seus variados registros, nas interações discursivas em aulas remotas?

Após elencadas as categorias de análise buscamos fazer a interligação dos dados coletados de forma a estabelecer relações entre os discursos produzidos e as teorias, fundamentos dessa pesquisa, realizando uma análise dialógica do discurso, de forma a alcançar os objetivos propostos, conforme apresentado adiante.

5.2.1 O Instituto Federal da Paraíba

De acordo com as informações constantes no Portal IFPB[2], o Instituto Federal da Paraíba (IFPB) é uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação e Cultura (MEC), com 21 unidades espalhadas em todo estado, sendo considerado referência no ensino profissional no estado da Paraíba.

As unidades em funcionamento recebem a denominação de Campus, ou Campus Avançado. Dessa forma, os Campi são: Cabedelo, Cajazeiras, Campina Grande, Catolé

[2] Disponível em <https://www.ifpb.edu.br/institucional/sobre-o-ifpb>.

do Rocha, Esperança, Guarabira, Itabaiana, Itaporanga, João Pessoa, Monteiro, Patos, Picuí, Princesa Isabel, Santa Rita, Sousa e Santa Luzia. E os Campi Avançados são: Cabedelo Centro, João Pessoa Mangabeira, Soledade, Areia e Pedras de Fogo. Em João Pessoa está em funcionamento desde o ano de 2017, um Polo de Inovação credenciado Empresa Brasileira de Pesquisa e Inovação Industrial (EMBRAPII), atuando na área de Sistemas para Automação em Manufatura.

O IFPB oferece cursos presenciais e cursos à distância, nas modalidades: Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio, Subsequente, Superior, Especialização Técnica e Pós-Graduação *stricto sensu* e *lato sensu*. O instituto oferece ainda cursos de Formação Inicial e Continuada e diversos programas de Pesquisa, Extensão e Inovação, para estudantes, servidores e colaboradores.

Com a sua missão é a de "ofertar a educação profissional, tecnológica e humanística em todos os seus níveis [...] na perspectiva de contribuir na formação de cidadãos para atuarem no mundo do trabalho e na construção de uma sociedade inclusiva, justa, sustentável e democrática", apresenta os valores de ética, desenvolvimento humano, inovação, qualidade e excelência, transparência, respeito, compromisso social e ambiental[3].

Os principais documentos institucionais[4] do IFPB são o seu Estatuto[5], seu Regimento[6], que tem como objetivo disciplinar a organização e o funcionamento dos órgãos e unidades administrativas, bem como o rito dos procedimentos e serviços da Instituição; e o Regimento Geral do IFPB – 2010, que estabelece normas complementares ao Estatuto do IFPB e tem como objetivo disciplinar a organização e o funcionamento dos órgãos, unidades e serviços da Instituição.

No total são oferecidos 16 cursos de Pós-Graduação, 46 cursos de Graduação, 2 cursos de Especialização Técnica e 124 cursos Técnicos nos seus diversos Campi. No Campus Campina Grande, temos 3 cursos de Pós-Graduação (Mestrado em Propriedade Intelectual e Transferência de Tecnologia para a Inovação (PROFNIT), Especialização em Ensino de Matemática e Especialização em Docência para a Educação Profissional e Tecnológica), 6 cursos de Graduação (Tecnologia em Telemática e em Construção de Edifícios, Licenciatura em Matemática, Física e Letras – Língua Portuguesa e Bacharelado em Engenharia de Computação) e 11 cursos Técnicos[7].

No ano de 2006 iniciaram as atividades do campus Campina Grande, ofertando em 2007 o Curso Superior de Tecnologia em Telemática. Nas Figuras 12 e 13 apresentamos

[3] Disponível em <https://www.ifpb.edu.br/institucional/sobre-o-ifpb>.
[4] Disponível em <https://www.ifpb.edu.br/transparencia/documentos-institucionais>.
[5] Resolução N° 246, de 18 de Dezembro de 2015, que dispõe sobre o Estatuto do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, nos termos da legislação em vigor
[6] Regimento Geral do IFPB – 2017 – Este Regimento Geral estabelece normas complementares ao IFPB, publicado no Diário Oficial da União em 02 de fevereiro de 2016.
[7] Administração (PROEJA), Informática integrado e subsequente (noturno e integral), Edificações, Mineração integrado e subsequente, Manutenção e Suporte em Informática, Petróleo e Gás, Química e Segurança do Trabalho.

o campus Campina Grande em diferentes perfis.

Figura 12 – IFPB Campus Campina Grande

Fonte: https://www2.pbagora.com.br.

Figura 13 – Estrutura do IFPB Campus Campina Grande

Fonte: https://www.ifpb.edu.br.

A Infraestrutura do campus Campina Grande conta com Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), Laboratórios de Informática, Salas de aula climatizadas e amplas, Sala para os professores, Quadros com 3 divisórias, Tv em todas as salas, Ginásio Poliesportivo, Área de vivência, Pátio, Estacionamento, Refeitório, Biblioteca, Auditório, Miniauditório, conforme podemos ver algumas imagens a seguir.

Figura 14 – Ginásio do IFPB Campus Campina Grande

Fonte: http://www.ifpb.edu.br/noticias/2016/08/comeca-a-etapa-final-dos-i-jogos-intercampi/ginasio-campina-grande.jpg/view.

Figura 15 – Auditório do IFPB Campus Campina Grande

Fonte: http://www.ifpb.edu.br/campinagrande/noticias/2016/07/continuum-abre-festival-internacional-de-musica-no-campus-campina.

Figura 16 – Biblioteca do IFPB Campus Campina Grande

Fonte: https://estudante.ifpb.edu.br.

Figura 17 – Laboratório de Matemática do IFPB Campus Campina Grande

Fonte: Arquivo pessoal.

Representando mais uma grande conquista para o IFPB, no mês de outubro de 2022 o campus Campina Grande passou a ser a primeira da rede no estado a se tornar integrante da *Apple Distinguished School*, um grupo de escolas que usam ambientes de tecnologia para apoiar os objetivos de aprendizagem. Dessa forma, o Laboratório de Aplicações Móveis, Pesquisa e Inovação, ou LAMPIÃO, se juntou a aproximadamente 70 laboratórios existentes no campus para o desenvolvimento de atividades letivas, de pesquisa e extensão. Por esses motivos, o IFPB representa um ambiente favorável a pesquisas e privilegiado em relação a tantas outras instituições de ensino[8], fazendo-nos optar por ele na nossa própria.

5.2.2 A Pandemia de COVID-19

No ano de 2020, enfrentamos a Pandemia[9] de COVID-19, situação que modificou o cenário educacional do nosso país e do mundo.

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), COVID-19, do inglês *Coronavirus Disease 2019*, é a denominação da doença respiratória infecciosa causada pelo vírus SARS-CoV-2[10], que foi descoberto em dezembro de 2019, após casos registrados na China e que apresenta alto grau de contaminação, podendo levar à morte. Os sintomas mais comuns da COVID-19 são febre, tosse, dificuldade de respirar e, na maioria das vezes, sintomas leves que não requerem hospitalização[11].

Devido ao alto grau de proliferação do vírus e ao aumento de casos de mortes pela COVID-19 no Brasil e no mundo, no mês de março de 2020 muitas mudanças ocorreram no cenário nacional, por meio de decretos e outros atos normativos para enfrentamento da pandemia, através do isolamento social para contenção da doença. Comércio, empresas e escolas foram fechadas, ficando abertos apenas serviços essenciais.

Conforme nos fala Arruda (2020, p. 258):

> O isolamento social promoveu transformações econômicas severas imediatas, com a parada obrigatória de inúmeros setores, modificou nossa relação com a arte, devido à ausência do compartilhamento presencial de experiências de fruição e, no caso da educação, promove desconstruções sob a forma como o ensino e a aprendizagem são vistos socialmente.

Dentre esses atos normativos, estão a Lei Nº 13.979, de 6 de fevereiro de 2020, que dispõe sobre as medidas para enfrentamento da emergência de saúde pública de importância internacional, decorrente do coronavírus, responsável pelo surto de 2019 e a Portaria Nº 343, de 17 de março de 2020, que dispõe sobre a substituição das aulas

[8] Disponível em <https://estudante.ifpb.edu.br/noticias/campus-cg-e-reconhecido-como-a-primeira-/apple-school-do-ifpb>. Acesso em 24 out 2022.

[9] Segundo a OMS, pandemia é a disseminação mundial de uma nova doença e o termo passa a ser usado quando uma epidemia, surto que afeta uma região, se espalha por diferentes continentes com transmissão sustentada de pessoa para pessoa. Disponível em <https://www.bio.fiocruz.br/index.php/br/noticias/1763-o-que-e-uma-pandemia>. Acesso em 11 out. 2022.

[10] O SARS-CoV-2 é um betacoronavírus descoberto em amostras de lavado broncoalveolar obtidas de pacientes com pneumonia de causa desconhecida na cidade de Wuhan, província de Hubei, China, em dezembro de 2019. Pertence ao subgênero Sarbecovírus da família Coronaviridae e é o sétimo coronavírus conhecido a infectar seres humanos. Disponível em <https://www.gov.br/saude/pt-br/coronavirus/o-que-e-o-coronavirus>. Acesso em 11 out. 2022.

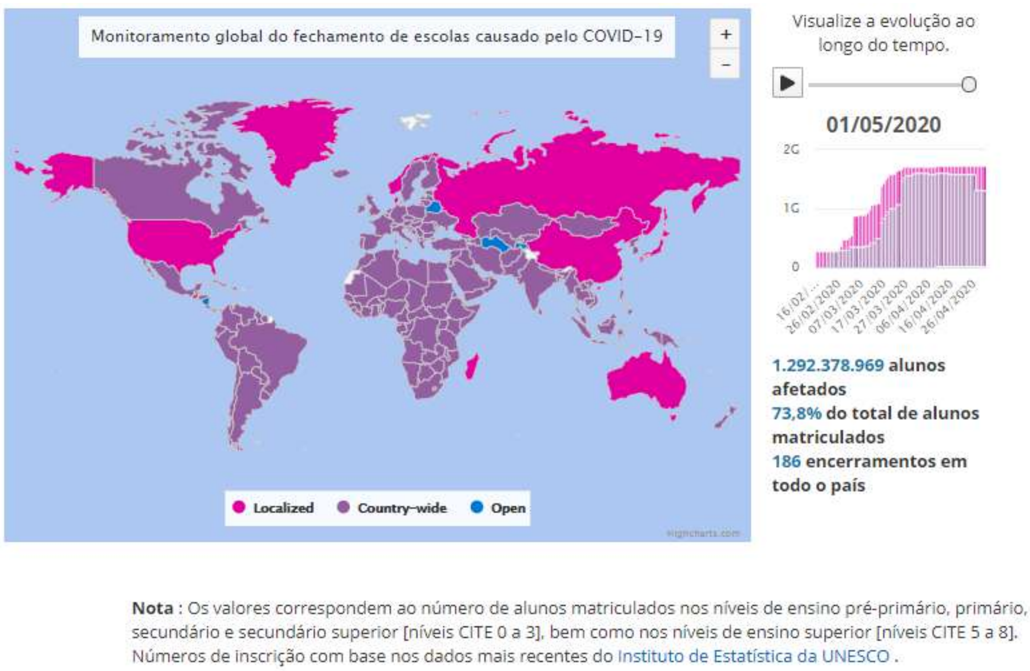
[11] Disponível em <http://www.pcdlegal.com.br/siglas/wp-content/themes/siglas-coronavirus/media/downloads/siglas.pdf>. Acesso em 11 out. 2022.

presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia do Novo Coronavírus — COVID-19[12].

Devido à quantidade de pessoas existentes no ambiente escolar, a escola foi considerada como um dos espaços com maior risco da transmissão da COVID-19, dessa forma, a Portaria n° 343, que tinha um prazo de vigência de 30 dias, foi prorrogado por mais 30 dias pelas portarias n° 345, de 15 de abril de 2020, e depois uma nova prorrogação pela nº 473 de 12 de maio de 2020. Após esse período, o Ministério da Educação publicou no Diário Oficial, de 16 de junho, a portaria nº 544, que dispôs sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais, enquanto durasse a situação de pandemia do novo coronavírus – COVID-19, revogando as portarias anteriores.

De acordo com o "Monitoramento global de fechamento de escolas causado pelo COVID-19", realizado com base nos dados do Instituto de Estatística da UNESCO, em 1 de maio de 2020, constatou-se que 1.292.378.969 de alunos foram afetados com o fechamento das escolas, representando 73,8% do total de alunos matriculados naquele ano.

Figura 18 – Monitoramento global de fechamento de escolas causado pelo COVID-19



Fonte: Unesco (2020)

No ápice dos fechamentos, no mês de abril de 2020, 91% dos estudantes do planeta foram afetados em 192 países.

[12] Podemos encontrar as informações sobre os atos normativos referentes à COVID-19 no endereço <http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/Portaria/quadro_portaria.htm>.

Diante desse cenário de afastamento dos alunos das escolas, surge o Ensino Remoto Emergencial (ERE), que segundo Oliveira, Corrêa e Morés (2020, p. 03) é

> o modelo de educação como aulas síncronas com uso de tecnologias digitais interativas via Internet e, por vezes, complementadas com materiais impressos, disponibilizados nas secretarias das escolas, com uma metodologia semelhante a do ensino presencial, incluindo horários fixos de aulas por períodos e com salas virtuais com o mesmo número de estudantes do modelo presencial.

Diferentemente dessa modalidade de ensino, a Educação à Distância (EaD) é regulamentada pelo Decreto nº 9057/2017[13] que dispõe em seu parágrafo 1º que

> considera-se educação a distância a modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorra com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com pessoal qualificado, com políticas de acesso, com acompanhamento e avaliação compatíveis, entre outros, e desenvolva atividades educativas por estudantes e profissionais da educação que estejam em lugares e tempos diversos. (BRASIL, 2017b).

Para Moreira e Schlemmer (2020) a EaD prioriza a construção e socialização do conhecimento pelo aluno através da utilização de materiais diferenciados e meios de comunicação, possibilitando que qualquer pessoa seja agente de sua aprendizagem, através da interatividade e do trabalho colaborativo, independente do tempo e do espaço.

Desta maneira, não há que confundir ERE com a modalidade EaD, cuja designação exige requisitos que não se apresentam no ERE, devido a seu caráter de urgência. Hodges *et al.* (2020) apresentam essa diferença no contraste das atividades planejadas para acontecerem no formato on-line, enquanto no ERE a mudança é temporária, devendo ser modificada para outro meio com a diminuição da emergência.

Moreira e Schlemmer (2020, p. 08) explicam que

> o termo remoto significa distante no espaço e se refere a um distanciamento geográfico. O Ensino Remoto ou Aula Remota se configura então, como uma modalidade de ensino ou aula que pressupõe o distanciamento geográfico de professores e estudantes e vem sendo adotada nos diferentes níveis de ensino, por instituições educacionais no mundo todo, em função das restrições impostas pelo COVID-19, que impossibilita a presença física de estudantes e professores nos espaços geográficos das instituições educacionais.

Dessa forma, para esses autores, o ERE apresenta as mesmas características do ensino presencial físico, é apresentado pelo mesmo professor, centra-se no conteúdo e apenas é transposto para os meios digitais e apesar do distanciamento geográfico, a aula acontece em um mesmo tempo, como se fosse o ensino presencial, com a presença digital do professor e dos alunos em uma sala de aula virtual. (Ibid.).

[13] O Decreto nº 9057/2017 regulamenta o art. 80 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

5.2.2.1 A Pandemia no IFPB

O IFPB suspendeu suas aulas presenciais, como todo o Brasil, em razão dos decretos nacionais no dia 17 de março de 2020. Mas ao contrário de outras instituições de ensino não passou imediatamente a disponibilizar aulas por meio digital, uma vez que para isso teve o cuidado de fazer um estudo sobre a viabilidade desse formato de ensino e da possibilidade de acesso dos seus estudantes.

Pesquisas, reuniões, criação de comissões e elaborações de pareceres, dentre outros atos foram realizados antes da decisão do retorno às aulas. As medidas necessárias para isso foram compiladas em duas resoluções do Conselho Superior (CONSUPER) do IFPB, sendo elas a Resolução nº 28 de 2020[14], que estabeleceu as fases de implementação gradual das atividades não presenciais e presenciais no âmbito do IFPB e a Resolução nº 29 de 2020[15], que estabeleceu os procedimentos para desenvolvimento e registro de Atividades de Ensino Não Presenciais (AENPs), durante o período de suspensão das atividades presenciais, no âmbito do IFPB, enquanto durasse a situação de pandemia do Novo Coronavírus – COVID-19.

Dessa maneira, com as medidas adotadas através dessas duas resoluções, foi possível a reorganização do calendário escolar e o retorno das atividades acadêmicas do IFPB, de forma gradual, seguindo as fases descritas no art. 2º da Resolução nº 28:

> Art. 2º O retorno das atividades acadêmicas no IFPB será organizado em fases de implementação das atividades acadêmicas e administrativas, sendo elas:
> a. Primeira Fase – Diagnóstico, planejamento e orientações;
> b. Segunda Fase – Ambientação de docentes e discentes;
> c. Terceira Fase – Oferta curricular de forma não presencial;
> d. Quarta Fase – Implementação gradual de atividades acadêmicas presenciais;
> e. Quinta Fase – Consolidação do ensino híbrido;
> f. Sexta Fase – Retorno ao ensino presencial.
> (INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA, 2020a, p. 02)

Para que essas fases fossem realizadas, o início das AENPs, de acordo com o art. 6º da mesma resolução, estava condicionado à viabilidade de os estudantes possuírem condição de conectividade para sua realização, levando o IFPB a lançar editais para concessão dos auxílios conectividade e aquisição de equipamentos.

A oferta curricular de forma não presencial ficou condicionado à apresentação de relatórios encaminhados à Comissão Local de Acompanhamento e Gestão de Atividades Não Presenciais do Campus (CLAGANP), que poderia autorizar o curso a ter o início da oferta de forma não presencial ou solicitar novas adequações, conforme o parágrafo único do art. 23 da Resolução nº 28/2020.

[14] Resolução nº 28 de 2020 – CONSUPER/DAAOC/REITORIA/IFPB – INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA (2020a)

[15] Resolução nº 29 de 2020 – CONSUPER/DAAOC/REITORIA/IFPB – INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA (2020b)

Dessa forma, o IFPB retomou suas aulas, dando início às AENPs no dia 31 de agosto de 2020[16], em que voltaram às aulas cerca de 2200 estudantes matriculados nos cursos oferecidos pelo IFPB em Campina Grande, seguindo o calendário 2020.1, através de atividades pela Internet. Os estudantes participaram de um treinamento sobre as plataformas virtuais que o Campus utilizaria para as aulas, o Moodle[17] e o Google Sala de Aula (ou *Google Classroom*).

O inciso I, do art 1º, da Resolução nº 29/2020 vem explicar que AENPs são o conjunto de atividades pedagógicas, realizadas, com mediação tecnológica ou não, a fim de promover o atendimento escolar essencial aos estudantes no contexto da pandemia COVID-19. Enumera ainda em seu inciso III, os recursos didático-pedagógicos que podem ser considerados para o desenvolvimento das AENPs:

> (a) encontro em sala de aula virtual (Google Sala de Aula e ou Moodle Presencial); (b) realização de webaula; (c) desenvolvimento de videoaula; (d) interação em chat e ou em grupos de redes sociais; (e) estudos por apostilamento de textos, pesquisas, projetos, entrevistas, experiências, simulações e outros; (f) produção de textos, com base nas experiências em projetos de pesquisa, relatórios executivos, leitura de livros e vídeos, entre outros; (g) resolução de lista de exercício; (h) desenvolvimento de e-books; (i) desenvolvimento de vídeos educativos de curta duração; (j) podcasts (arquivos de áudio).
> (INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA, 2020b, p. 02).

Assim, o instituto realizou adequações nos componentes curriculares para o ensino não presencial e passou a oferecer aulas síncronas, realizadas em tempo real, e aulas assíncronas, através de aulas gravadas e/ou materiais diversos postados nas plataformas. Outra importante decisão prevista na Resolução nº 29 foi a reabertura do prazo para a solicitação de ajustes de matrículas ou trancamento, para que não houvesse prejuízo aos estudantes nos componentes curriculares em que se encontravam matriculados.

5.2.3 A Turma

Para nossa pesquisa escolhemos uma turma do 3º Ano do Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio do IFPB campus Campina Grande.

Na turma havia 29 alunos matriculados, destes, o aluno A1 era oriundo do Processo Seletivo de Cursos Técnicos (PSCT) do ano de 2017 e os demais 28 oriundos do PSCT 2018.

Os alunos foram numerados e identificados pela letra “A”, seguida da numeração que atribuímos a cada um deles, na sequência de 1 a 29. Desses, havia oito alunos, sendo

[16] Disponível em <https://www.ifpb.edu.br/campinagrande/noticias/2020/08/campus-campina-retoma-aulas-nesta-segunda-feira-31>. Acesso em 13 out. 2022.

[17] O Moodle é um software livre utilizado na administração de atividades educacionais para aprendizagem on-line em vários países e já utilizado no IFPB através do Ambiente Virtual de Aprendizagem EaD e algumas atividades no Ambiente de Apoio aos Cursos Presenciais.

eles A1, A5, A8, A18, A20, A22, A26, A29 e vinte e uma alunas, sendo elas A2, A3, A4, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A19, A21, A23, A24, A25, A27, A28.

Por estarem no 3º ano, os alunos eram concluintes do curso técnico integrado, com conclusão prevista pelo calendário acadêmico para dezembro de 2020. Entretanto, devido à pandemia de COVID-19, a conclusão do curso foi adiada para 27 de maio de 2021.

Um fato a destacarmos é que na época das observações das aulas sobre cônicas, os alunos já haviam se submetido ao ENEM. O exame, que inicialmente seria aplicado em outubro e novembro do ano de 2020, com a pandemia de coronavírus e a suspensão das aulas presenciais do Ensino Básico, teve sua realização adiada pelo INEP[18] para os meses de janeiro e fevereiro de 2021[19]. Dessa forma os alunos do IFPB que haviam sido aprovados ainda precisavam concluir o curso técnico para ingresso nas universidades.

5.2.4 As Aulas

Conforme já mencionamos, as AENPs do IFPB, no contexto da COVID-19, foram regulamentadas pela Resolução nº 29/2020, que tratava inclusive dos recursos didático-pedagógicos que poderiam ser considerados para o desenvolvimento dessas atividades.

As aulas em formato presencial dessa turma, antes da pandemia, tinham duração de três horas-aulas semanais, que aconteciam nas quartas-feiras à tarde, a partir das 13h. Com a necessidade de aulas em formato remoto, devido à pandemia, algumas alterações foram feitas pelo instituto, com o intuito de possibilitar um melhor aproveitamento e rendimento dos alunos.

Algumas dessas alterações se referem à diminuição da duração da hora-aula remota e a possibilidade de os professores intercalarem, segundo a necessidade, aulas síncronas e assíncronas.

Dessa maneira, as aulas na turma pesquisada aconteceram em oito encontros remotos, enumerados de acordo com o planejamento do professor da Aula 17 até a Aula 24. Esses encontros estão descritos adiante no Capítulo 6, nesse envolvimento entre as falas dos participantes e os registros de representação semiótica inerentes aos objetos da geometria analítica.

---

[18] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

[19] O ENEM 2020 foi realizado nas formas impressa e digital no início do ano de 2021. O ENEM Impresso aconteceu nos dias 17 e 24 de janeiro de 2021. O ENEM Digital aconteceu nos dias 31 de janeiro e 07 de fevereiro de 2021. E a reaplicação da prova para pessoas afetadas por eventuais problemas de infraestrutura aconteceram nos dias 23 e 24 de fevereiro de 2021.
Nessa edição do ENEM os editais para o exame trouxeram cuidados com a profilaxia para os participantes. Os editais nº 54 e 55, de 28 de julho de 2020, que tratam do Enem impresso e digital, respectivamente, estabeleciam a obrigatoriedade do uso de máscara que cobrisse totalmente o nariz e a boca do participante, desde a sua entrada até sua saída do local de provas, com a possibilidade de utilização de máscara reserva para troca durante a aplicação. Esses editais foram baseados na Lei nº 14.019, de 2 de julho de 2020. Disponível em <https://www.correiobraziliense.com.br/euestudante/enem/2020/12/4896531-enem-2020-confira-as-datas-e-as-regras-para-a-prova.html>. Acesso em 13 out. 2022.

6 TRAMAS ENTRE OLHARES E FALAS: O (RE)CORTE DOS ENCONTROS

Neste capítulo fazemos uma breve descrição dos encontros observados na turma pesquisada, em que o professor optou por ministrar sete das oito aulas referentes ao 4º bimestre de forma síncrona, sendo apenas uma de forma assíncrona[1].

6.1 Aula 17: 1º Encontro

O 1º Encontro se refere à Aula 17 do planejamento do professor, que aconteceu no dia 24 do mês de março de 2021, com início às 13h20 e duração de uma hora e quinze minutos, cuja transcrição se encontra no Apêndice B.

Participaram deste primeiro encontro 11 alunos, sendo estes identificados por: A2, A4, A6, A8, A13, A14, A19, A22, A23, A25 e A27.

A aula iniciou com a explicação do professor sobre o andamento do componente curricular[2], pois o 4º bimestre letivo começaria na sexta-feira seguinte (26/03/2021), mas para não fazer uma junção de muitos conteúdos, ponto e reta fariam parte da atividade avaliativa referente ao 3º Bimestre, postada no *Google Classroom*, enquanto o 4º Bimestre seria exclusivo para cônicas, com início neste encontro.

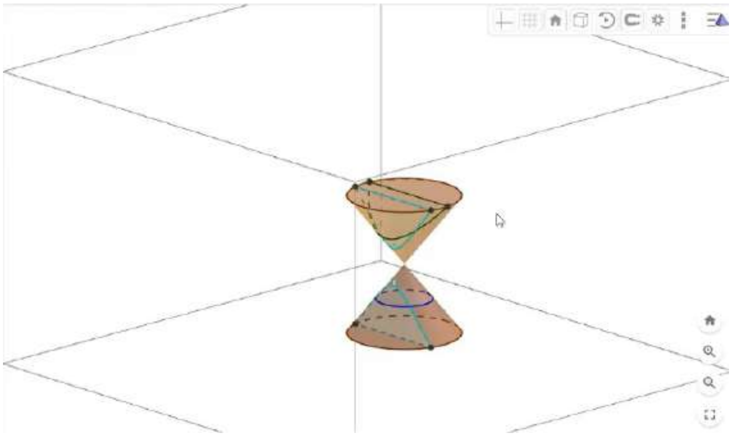
Para introduzir o conteúdo da aula, o professor indagou os alunos se eles tinham conhecimento do que seria uma superfície cônica ou se esse termo remetia a algum conceito que eles já conheciam.

A partir das ideias apresentadas pelos alunos (cone, figura espacial, chapeuzinho de aniversário) o professor começou a mostrar na tela, com o auxílio do software Geogebra a representação geométrica de uma superfície cônica de duas folhas e os diferentes objetos matemáticos formados quando um plano intersecta essa seção em diferentes posições.

[1] Para nossa pesquisa as aulas foram gravadas e as transcrições dessas gravações se encontram nos Apêndices B, C, D, E, F, G, H e I

[2] O conteúdo de Geometria Analítica na grade curricular é ministrado no 3º Bimestre. Porém, como os alunos iriam se submeter ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), pediram para que fosse feito o adiantamento do conteúdo de Análise Combinatória e Probabilidade na 3º Bimestre e Geometria Analítica passasse para o 4º Bimestre.

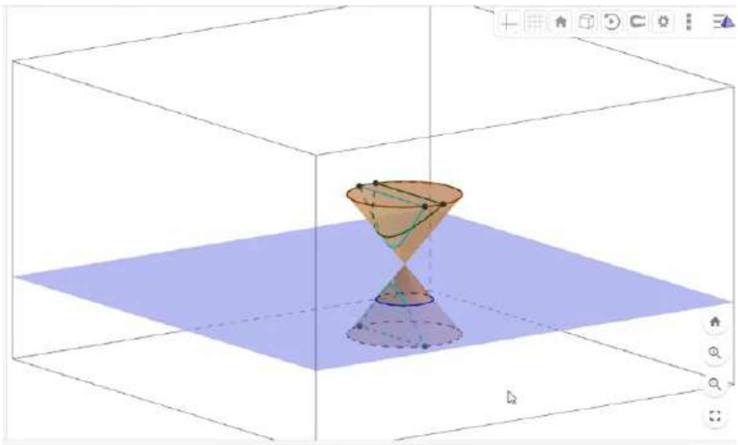
Figura 19 – Superfície cônica de duas folhas



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 17, 2021.

Enquanto falava, o professor movimentava o plano da construção, conforme suas falas, apresentando as imagens correspondentes a cada caso. Inicialmente, ele movimentava o plano para a posição horizontal, cuja interseção com a superfície cônica formava uma circunferência, conforme a Figura 20.

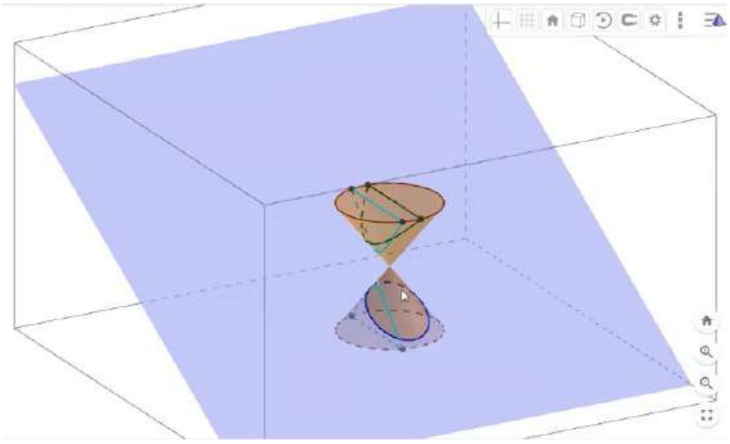
Figura 20 – Plano horizontal formando a circunferência



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 17, 2021.

Movimentando o plano mais para cima, ele mostrou quando a intersecção com a superfície cônica formaria apenas um ponto e, inclinando o plano, constituiria a elipse, conforme está na Figura 21.

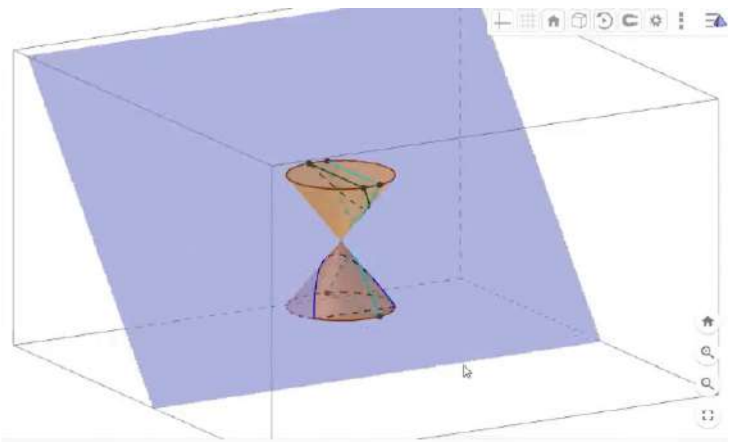
Figura 21 – Plano inclinado formando a elipse



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 17, 2021.

Explicou que se o plano tivesse a mesma inclinação da reta geratriz representaria a imagem da Figura 22, formando uma parábola.

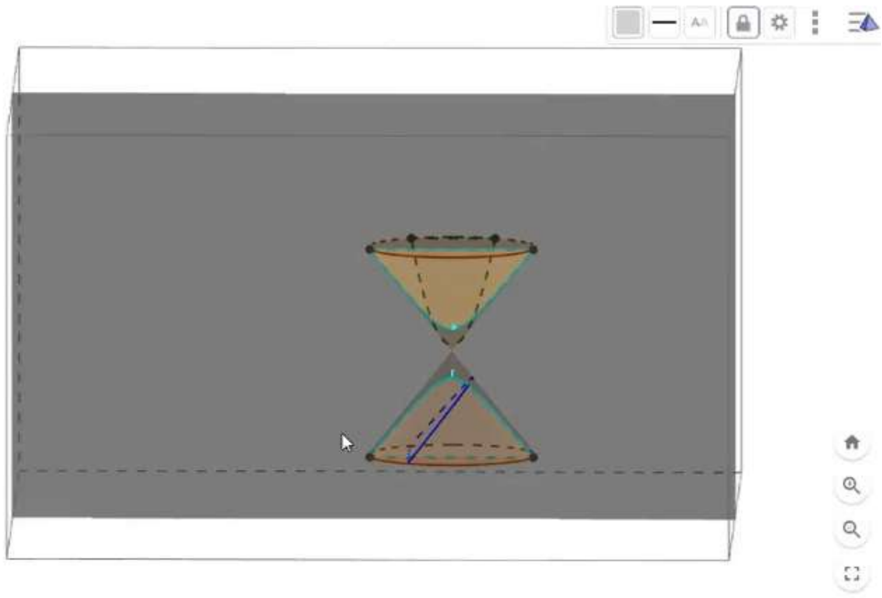
Figura 22 – Plano inclinado formando a parábola



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 17, 2021.

E com o plano vertical, conforme a Figura 23, ele apresentou a hipérbole.

Figura 23 – Plano vertical formando a hipérbole

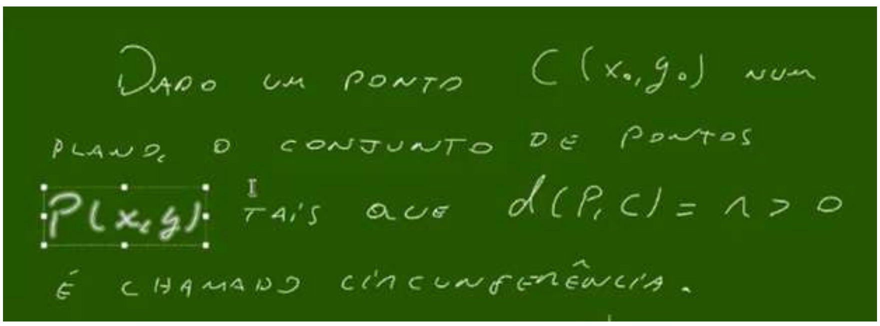


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 17, 2021.

A partir da apresentação das seções cônicas, iniciou a aula sobre a primeira delas, ou seja, a Circunferência, apresentando seus elementos e seus registros de representação.

Em continuidade, o professor questionou os alunos sobre pontos presentes na circunferência e sua relação com o ponto central, para chegar a uma definição de circunferência, segundo o que escreveu *Dado um ponto* $C(x_0, y_0)$ *num plano, o conjunto de pontos* $P(x, y)$ *tais que* $d(P, C) = r > 0$ *é chamado circunferência*, apresentando aos alunos a representação em língua natural da circunferência, conforme apresentado na Figura 24.

Figura 24 – Definição de circunferência

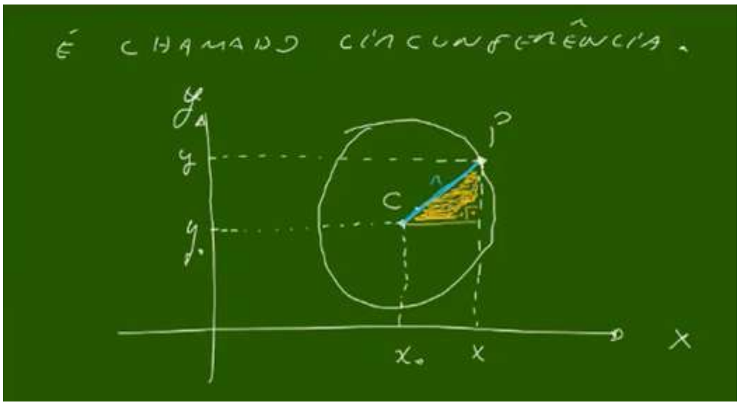


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 17, 2021.

A partir da definição, o professor ampliou a discussão, esboçando a circunferência do plano cartesiano, apresentando a representação gráfica da circunferência, conforme a

Figura 25.

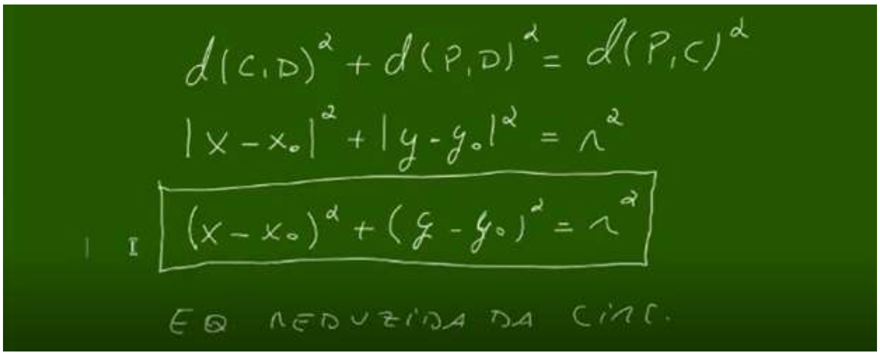
Figura 25 – Esboço da representação da circunferência no plano cartesiano



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 17, 2021.

Os passos seguintes foram para dedução da equação reduzida (ER) da circunferência a partir de sua representação no plano cartesiano xOy, com a utilização do Teorema de Pitágoras e da distância entre pontos, já estudados anteriormente, chegando a sua representação algébrica, na forma de ER.

Figura 26 – Equação reduzida da Circunferência



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 17, 2021.

Depois disso o professor passou a resolver exemplos com essas representações, sempre fazendo questionamentos aos alunos.

Para finalizar o encontro, o professor resolveu a questão 18, c, pág. 72 do livro Iezzi *et al.* (2016), adotado pelo instituto[3] , que utilizava o completamento de quadrados para sair da EG de uma circunferência[4] e chegar a sua ER.

[3] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: Ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

[4] O livro não trata da a circunferência como uma das seções cônicas. Esse conteúdo é apresentado à parte das cônicas.

Verificamos que oito alunos participaram da aula com respostas ou questionamentos, enquanto os demais não se pronunciaram em nenhum momento.

6.2 Aula 18: 2º Encontro

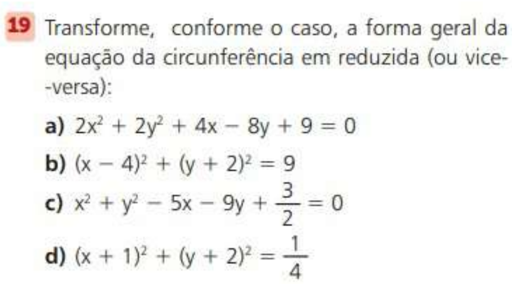
O 2º Encontro se refere à Aula 18 do planejamento do professor, que aconteceu no dia 07 do mês de abril de 2021, com início às 13h39 e duração de uma hora e vinte e cinco minutos, cuja transcrição se encontra no Apêndice C.

Participaram deste encontro 13 alunos, sendo estes identificados por: A2, A6, A8, A12, A13, A19, A21, A22, A23, A25, A26, A28 e Ax[5].

A aula iniciou com uma breve revisão sobre o conteúdo de circunferência, visto na aula anterior, voltando à resolução de questões em que era necessário fazer tratamento algébrico de completamento de quadrados nas EG para chegar às ER dessa cônica.

O exemplo escolhido pelos alunos foi a questão 19, c, da página 72, esse exemplo foi escolhido pelos alunos por conter fração, que eles consideraram mais difícil.

Figura 27 – Atividade da página 72 do livro



19 Transforme, conforme o caso, a forma geral da equação da circunferência em reduzida (ou vice-versa):

a) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 9 = 0$

b) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$

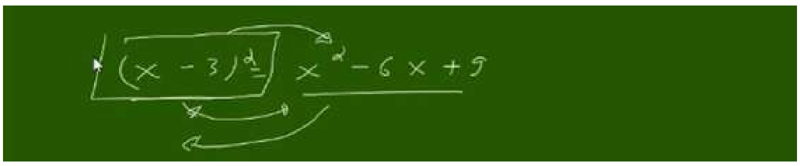
c) $x^2 + y^2 - 5x - 9y + \frac{3}{2} = 0$

d) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{4}$

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 72).

O professor retomou a explicação do método de completamento de quadrados na EG para chegar à ER da circunferência, explicando que esse procedimento é feito como tratamento inverso do desenvolvimento do quadrado da soma ou da diferença.

Figura 28 – Completamento de quadrados

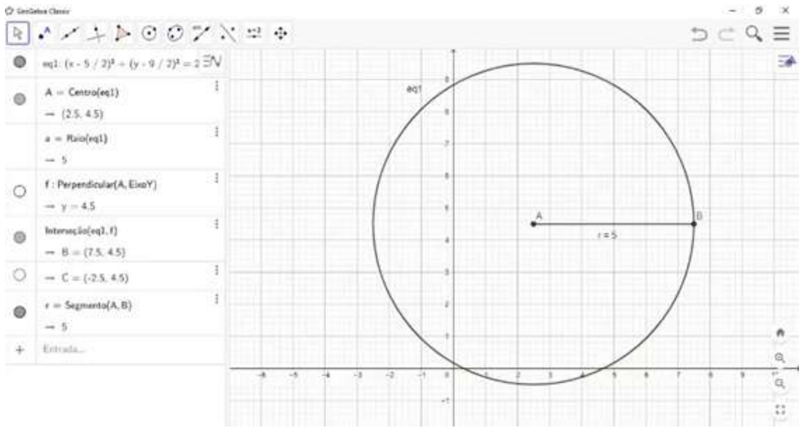


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 18, 2021.

5 Utilizamos a sigla Ax, pois não foi possível identificar na gravação o outro aluno participante da aula.

Dessa forma, desenvolveu o restante dos tratamentos algébricos, chegando à ER da circunferência, esboçou o gráfico dessa cônica e fez sua RG com o auxílio do Geogebra, conforme Figura 29.

Figura 29 – Representação Gráfica da circunferência – Aula 18

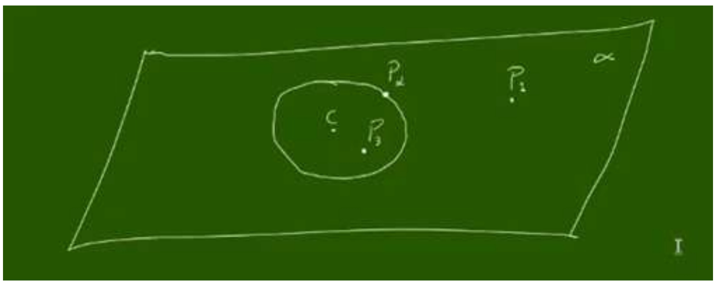


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 18, 2021.

A partir desse ponto, o professor iniciou o conteúdo de "Posições relativas", abordando as posições relativas entre:

- Ponto e Circunferência;

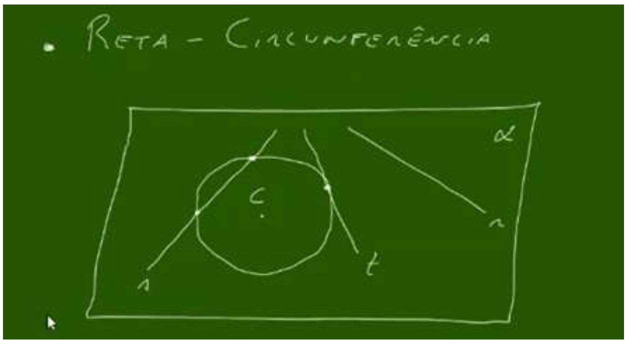
Figura 30 – Posições relativas entre Ponto e Circunferência



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 18, 2021.

- Reta e Circunferência;

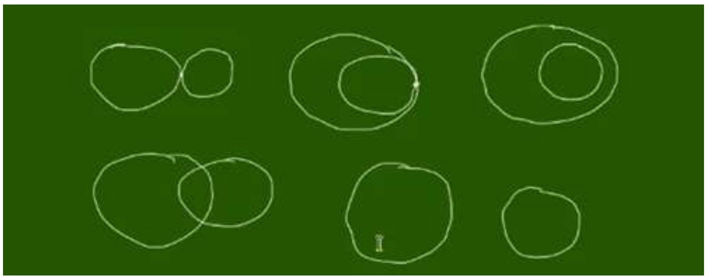
Figura 31 – Posições relativas entre Reta e Circunferência



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 18, 2021.

- Circunferência e Circunferência.

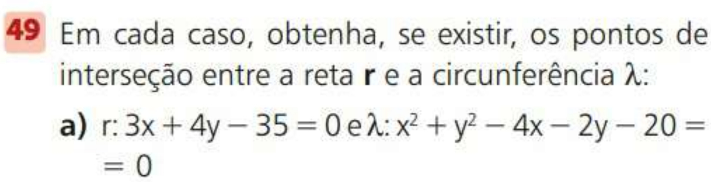
Figura 32 – Posições relativas entre Circunferência e Circunferência



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 18, 2021.

Passou à resolução da atividade 49, da página 72 do livro didático, para determinar a interseção, caso existisse, de reta com circunferência, representada na Figura 33:

Figura 33 – Questão de Posições relativas entre Reta e Circunferência



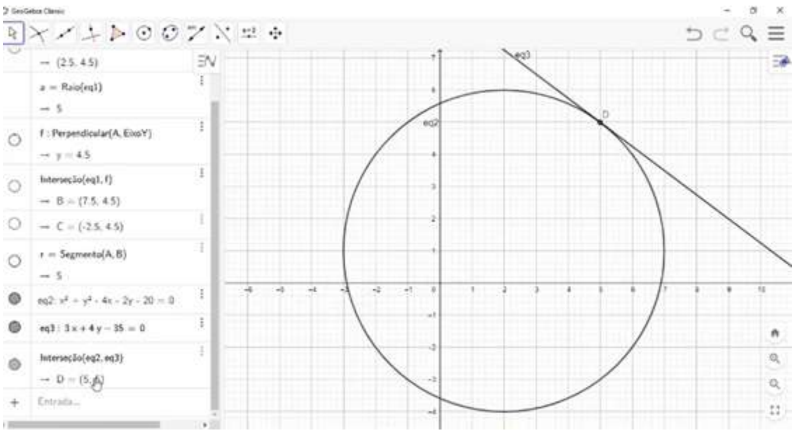
49 Em cada caso, obtenha, se existir, os pontos de interseção entre a reta **r** e a circunferência λ:

a) r: $3x + 4y - 35 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 =$
$= 0$

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 79).

Cuja RG é a apresentada na Figura 34:

Figura 34 – RG da Questão 49, item a



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 18, 2021.

O professor finalizou a aula, sugerindo a leitura do exemplo 13, da página 83, para ser discutido no próximo encontro.

6.3 Aula 19: 3º Encontro

O 3º Encontro se refere à Aula 19 do planejamento do professor, que aconteceu no dia 14 do mês de abril de 2021, com início às 13h37 e duração de uma hora e vinte e três minutos, cuja transcrição se encontra no Apêndice D.

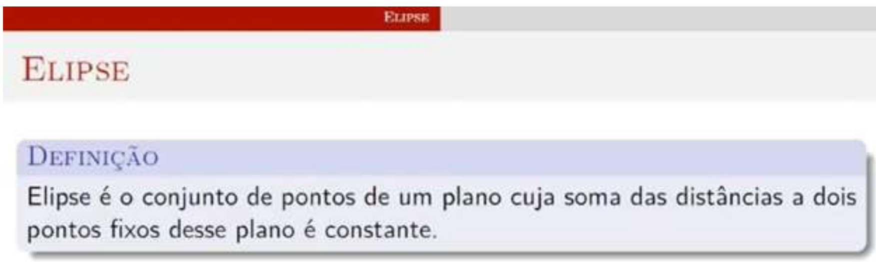
Participaram deste encontro 15 alunos, sendo estes identificados por: A2, A4, A8, A10, A13, A18, A19, A21, A22, A23, A24, A25, A26, A27, A28.

A aula iniciou e nos seus primeiros vinte e três minutos o professor tirou algumas dúvidas sobre uma atividade avaliativa deixada para os alunos na plataforma *Google Classroom* sobre o conteúdo de ponto e reta, referente ao bimestre anterior.

Após os esclarecimentos das dúvidas, teve início a aula com o conteúdo de Elipse.

O professor iniciou a aula com a definição dessa cônica, apresentando a sua representação em língua natural (RLN), conforme a Figura 35:

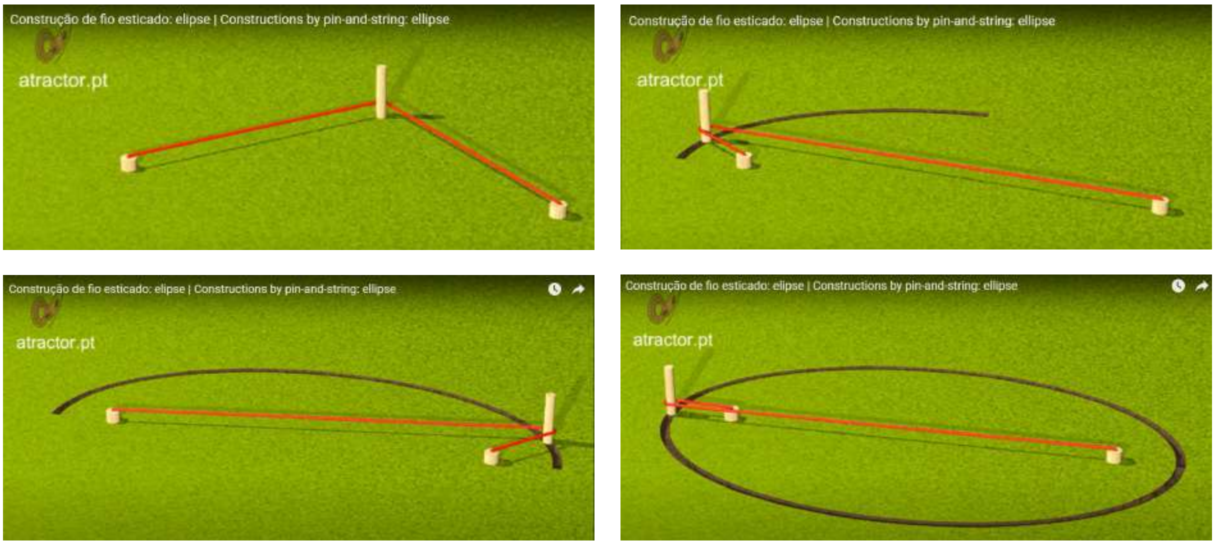
Figura 35 – Representação em Língua Natural da Elipse



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

Antes de continuar com a explicação, o professor apresentou na tela um vídeo sobre a construção da elipse usando fio esticado, denominado "método do jardineiro"[6].

Figura 36 – Método do Jardineiro – Construção da Elipse

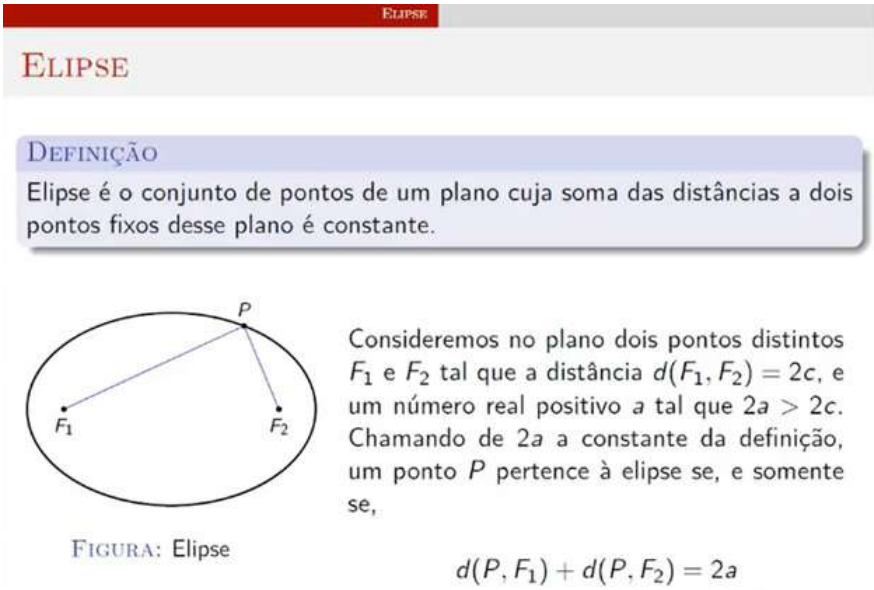


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

Feitos os comentários a respeito do vídeo, o professor apresentou a definição formal de elipse e seus elementos, explicando também o que é a sua excentricidade e em que esse valor reflete nas características dessa cônica.

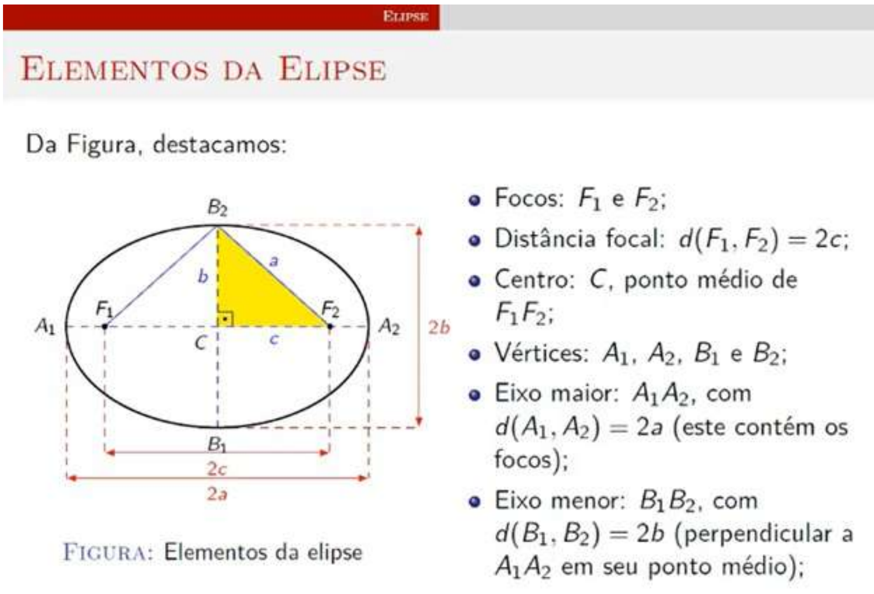
[6] Disponível em <https://youtu.be/RYV-uBWdb8Y>. Acesso em 14 abr 2021.

Figura 37 – Definição formal da Elipse



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

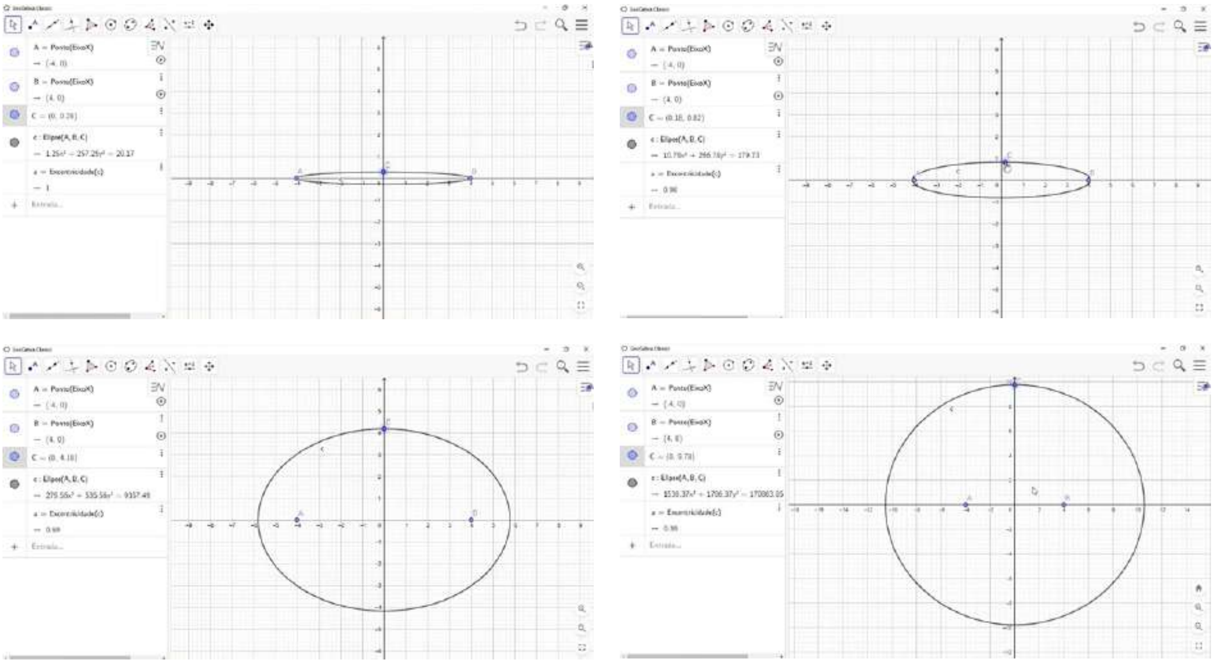
Figura 38 – Elementos da Elipse



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

No Geogebra o professor simulou para os alunos o formato de algumas elipses variando o valor numérico de sua excentricidade, sempre fazendo questionamento aos alunos e mostrando a diferença entre elas, conforme Figura 39.

Figura 39 – Excentricidade da Elipse



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

O professor mostrou a partir da RG da elipse que quando sua excentricidade vai se aproximando de 1, ela vai ficando mais "achatada" e quando vai se aproximando de zero, ela vai ficando mais arredondada.

Depois disso, utilizando a RG da elipse no plano cartesiano, com centro na origem dos eixos coordenados, o professor deduziu a ER dessa cônica, quando o eixo maior está no eixo Ox e quando o eixo maior está no eixo Oy.

Figura 40 – Equação Reduzida da Elipse com centro na origem

Dividindo ambos os membros por a^2b^2, tem-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(i)

De forma análoga a discussão para 1° Caso, obtemos

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(ii)

Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

Foram resolvidos dois exemplos do material de aula. No primeiro foi apresentada a RLN de uma elipse com eixo maior no eixo Ox e eram pedidas a RA e a RG dessa cônica, conforme Figura 41.

Figura 41 – Enunciado do Exemplo 1 – Elipse com eixo maior em Ox

Exemplo

Determine a equação reduzida da elipse de focos $F_1(-4,0)$ e $F_2(4,0)$, sabendo que o comprimento do eixo maior é 10. Determine os elementos da elipse e esboce seu gráfico.

Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

No segundo exemplo, foi dada a RA de uma elipse com eixo maior no eixo Oy e eram pedidos a RG e seus elementos, conforme Figura 42.

Figura 42 – Enunciado do Exemplo 2 – Elipse com eixo maior em Oy

Exemplo

Dada a equação reduzida da elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, determine os elementos da elipse e esboce seu gráfico.

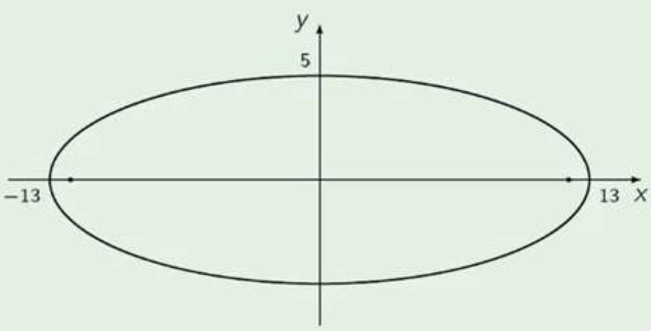
Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

Ao final da aula, o professor deixou como atividade o exemplo 3 do material de aula. Esse exemplo fornecia a RG de uma elipse e pedia a sua RA e seus elementos, conforme Figura 43.

Figura 43 – Enunciado do Exemplo 3 – Elipse

Exemplo

Determine a equação reduzida da elipse representada na figura, seus elementos e esboce seu gráfico.



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 19, 2021.

6.4 Aula 20: 4º Encontro

O 4º Encontro se refere à Aula 20 do planejamento do professor, que aconteceu no dia 21 do mês de abril de 2021, com início às 13h35 e duração de uma hora e vinte e três minutos, cuja transcrição se encontra no Apêndice E.

Participaram deste encontro 11 alunos, sendo estes identificados por: A2, A4, A8, A12, A13, A14, A21, A22, A23, A25, A27.

A aula iniciou com A25 perguntando sobre a resolução de uma questão da atividade avaliativa referente ao 3º bimestre, que os alunos não conseguiram fazer sobre o conteúdo de retas. Por causa de outros compromissos, o professor não tinha como explicar a resolução naquela aula, mas disse que o faria no encontro seguinte.

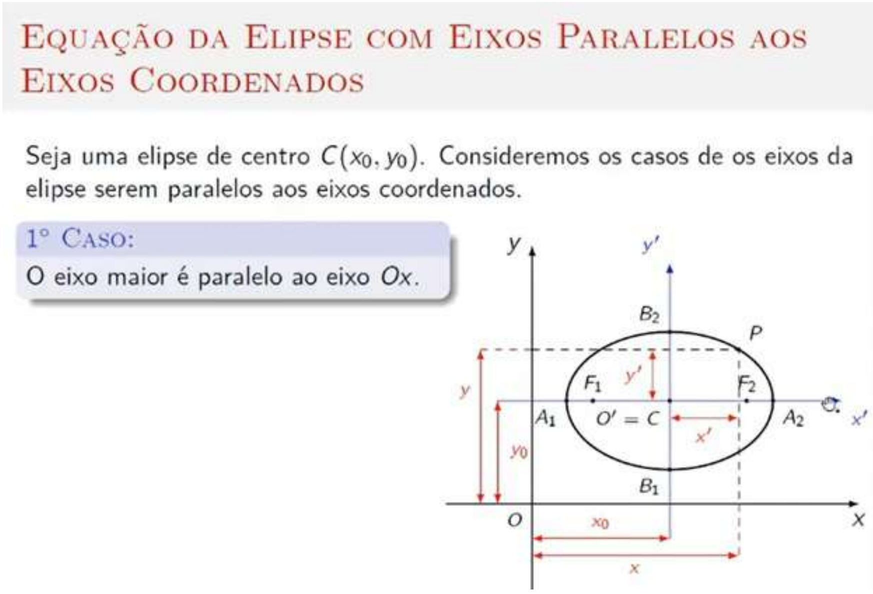
Enquanto os alunos iam entrando na aula aos poucos, o professor passou alguns minutos conversando com os alunos sobre o resultado deles no SISU[7]. Dentre os alunos que estavam na aula e quiseram falar, A21 e A25 foram aprovadas para o curso de Licenciatura em Matemática do IFPB, A2 para o curso de Arquitetura e Urbanismo da UFPB, A23 para o curso de Serviço Social da UEPB, A8 está na lista de espera de Engenharia Civil da UFCG e A14 e A22 não conseguiram passar para Engenharia Civil, mas disseram que iriam tentar no ano seguinte. Com a conversa, o professor se mostrou alegre com a conquista dos alunos, parabenizando-os, e então deu prosseguimento à aula, fazendo um resumo sobre o que foi trabalhado na aula anterior e perguntou aos alunos se eles haviam feito o exemplos 3 (Figura 43), conforme ele havia solicitado. Como não houve quem tivesse feito, o professor passou à resolução da questão.

Pelas variáveis visuais do gráfico o professor foi retirando todas as informações que ele precisava para a conversão desse RRS na RA e determinar todos os elementos dessa cônica.

Dando sequência ao conteúdo, o professor passou a explicar que nem sempre a elipse vai apresentar centro na origem dos eixos coordenados, sendo necessário introduzir um novo sistema cartesiano $O'x'y'$, em que os eixos da elipse estariam paralelos aos eixos coordenados do sistema Oxy.

[7] O SISU é uma plataforma digital que utiliza as notas do Enem como meio de seleção dos candidatos aos cursos superiores de instituições públicas.

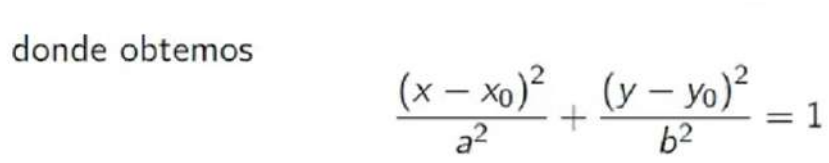
Figura 44 – Elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 20, 2021.

Diante disso, uma de suas equações passaria a ser

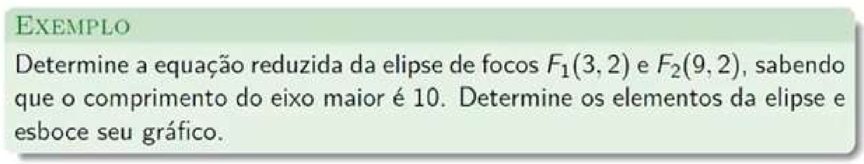
Figura 45 – Elipse com eixo maior paralelo a Ox



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 20, 2021.

Com isso passou à resolução do Exemplo 1, Figura 46.

Figura 46 – Exemplo 1 – Elipse com eixo maior paralelo a Ox



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 20, 2021.

Após essa resolução, o professor passou a resolver o Exemplo 2, Figura 47:

Figura 47 – Elipse com eixo maior paralelo a Oy

Exemplo

Dada a equação reduzida da elipse $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$, determine os elementos da elipse e esboce seu gráfico.

Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 20, 2021.

Ele ia passar como atividade o Exemplo 3, Figura 48, mas como a questão precisava de uma explicação sobre completamento de quadrados na equação da elipse, então ele resolveu passar como atividade o Exemplo 4, Figura 49.

Figura 48 – Exemplo 3 – Equação geral da elipse

Exemplo

Determine a equação reduzida elipse cuja equação geral é

$$9x^2 + 16y^2 - 90x - 160y + 481 = 0$$

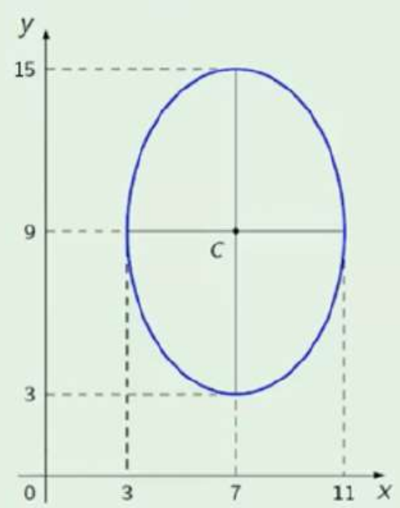
Determine também seus elementos e esboce o gráfico.

Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 20, 2021.

Figura 49 – Exemplo 4 – Representação Gráfica da Elipse

Exemplo

Determine a equação reduzida da elipse cujo gráfico é apresentado a seguir.



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 20, 2021.

Finalizando a aula, o professor deixou como sugestão de leitura as páginas 96 e 97 do livro, que traziam um pouco sobre as órbitas dos planetas, o modelo heliocêntrico, Copérnico, a excentricidade da Terra e da Lua, as órbitas elípticas e as características dos planetas do sistema solar.

6.5 Aula 21: 5º Encontro

O 5º Encontro se refere à Aula 21 do planejamento do professor, que aconteceu no dia 28 do mês de abril de 2021, com início às 13h35 e duração de uma hora e dezessete minutos, cuja transcrição se encontra no Apêndice F.

Participaram deste encontro 12 alunos, sendo estes identificados por: A2, A4, A7, A8, A10, A13, A14, A21, A22, A23, A25, A27.

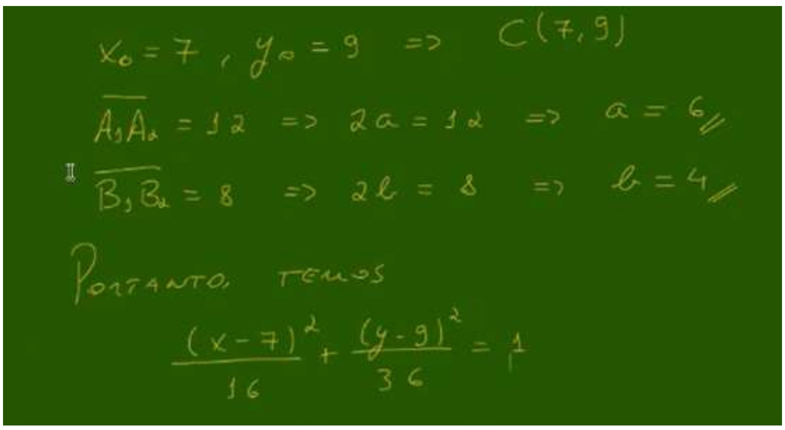
A aula iniciou com o professor fazendo a resolução de uma questão da atividade avaliativa referente ao 3º bimestre solicitada pelos alunos na aula anterior sobre o conteúdo de retas.

Dando continuidade ao conteúdo de cônicas, o professor fez um momentos para resolução de questões em que os alunos tivessem ficado com dúvidas.

A primeira questão foi solicitada por A22, referindo-se ao Exemplo 4 da aula anterior, Figura 49, em que era fornecida a RG de uma elipse com o centro fora da origem e se pedia para determinar a ER dessa cônica.

Para explicar a resolução do exemplo, o professor voltou os slides do material de aula, onde mostrava a translação dos eixos e como primeiro caso o da elipse cujo eixo maior era paralelo a Ox, apresentando a resolução da Figura 50.

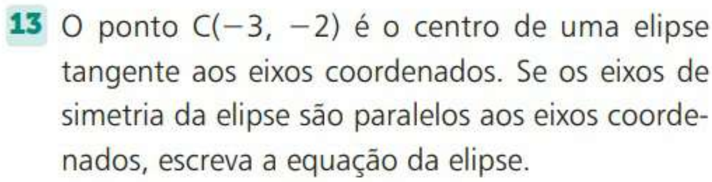
Figura 50 – Resolução do Exemplo 4 – Elipse



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 21, 2021.

Dando prosseguimento à aula, A2 pediu para que o professor resolvesse a questão 13 da página 95 do livro didático, cujo enunciado está na Figura 51.

Figura 51 – Enunciado da Questão 13 – Elipse

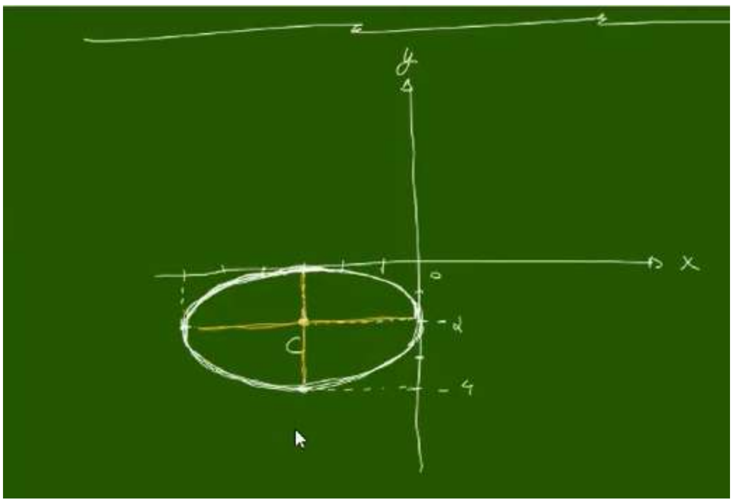


13 O ponto C(−3, −2) é o centro de uma elipse tangente aos eixos coordenados. Se os eixos de simetria da elipse são paralelos aos eixos coordenados, escreva a equação da elipse.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 95).

A questão consistia na RLN de uma elipse com o centro no ponto $(-3, -2)$ e pedia a ER, ou melhor, a conversão da RLN para a RA dessa cônica. Na sua resolução o professor falou que a chave da interpretação do enunciado está no fato de ter sido dito que essa elipse é tangente aos eixos coordenados, fazendo o esboço da Figura 52 enquanto explicava a questão.

Figura 52 – Esboço da Questão 13 – Elipse



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 21, 2021.

A próxima questão foi pedida por A25, a questão 15 da mesma página do livro.

Figura 53 – Enunciado da Questão 15 – Elipse

15 A metade do eixo maior de uma elipse mede 5 cm e a distância focal é de 4 cm, sendo (2, 1) o centro dessa elipse. Se o eixo menor é paralelo ao eixo coordenado Ox, escreva a equação reduzida dessa elipse.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 95).

A questão apresentava a RLN de uma elipse de centro $(1, 2)$ e pedia a ER dela (sua RA). A aluna não havia entendido o que significava dizer que o eixo menor era paralelo ao eixo Ox, fazendo com que o professor mostrasse na tela duas imagens da mesma página do livro, para que ela observasse do que se tratava e a diferença entre essas imagens.

A25 pediu para que o professor resolvesse algum item questão 54, referente ao conteúdo de posições relativas entre reta e circunferência. Quando o professor disse que iria resolver o item "a" ela pediu para que fosse o item "b" porque parecia ser mais difícil, devido à fração.

Figura 54 – Enunciado da Questão 54

EXERCÍCIOS FAÇA NO CADERNO

54 Em cada caso, por meio do cálculo da distância entre o centro da circunferência λ e a reta **r**, apresente a posição de **r** em relação a λ:

a) r: $x + 2y + 3 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$

b) r: $x - 2y - 3 = 0$ e λ: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

c) r: $3x + y - 4 = 0$ e λ: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 10$

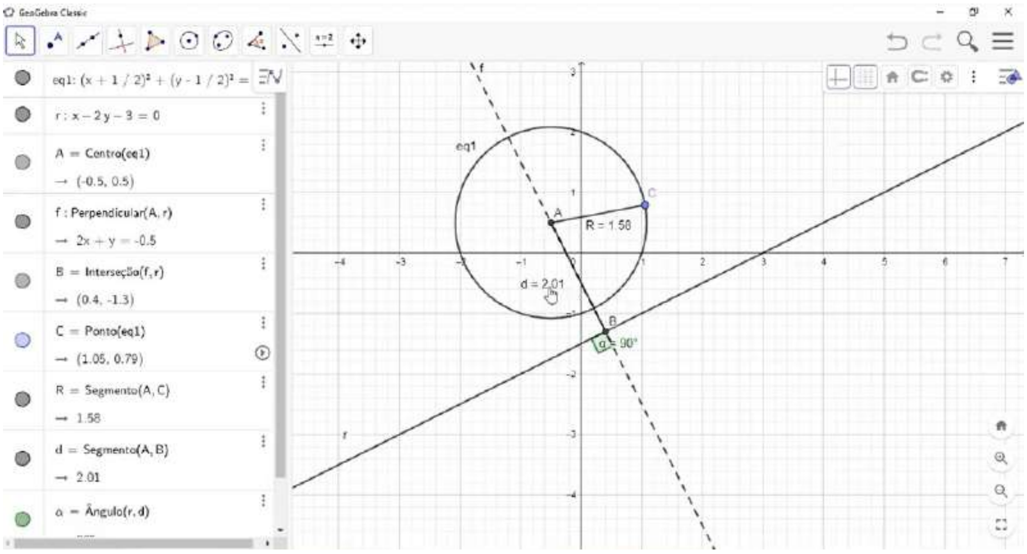
d) r: $4x - 3y - 24 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 24x + 4y + 99 = 0$

e) r: $x - 2 = 0$ e λ: $4x^2 + 4y^2 - 25 = 0$

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 81).

A resolução ocupou o restante da aula, sendo representada sua finalização na Figura 55.

Figura 55 – Resolução da Questão 54 – Circunferência



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 21, 2021.

Ao final da aula o professor informou que postaria uma atividade na plataforma e lamentou por não ter tido a participação de alguns alunos que, apesar de estarem online, não se manifestaram em nenhum momento.

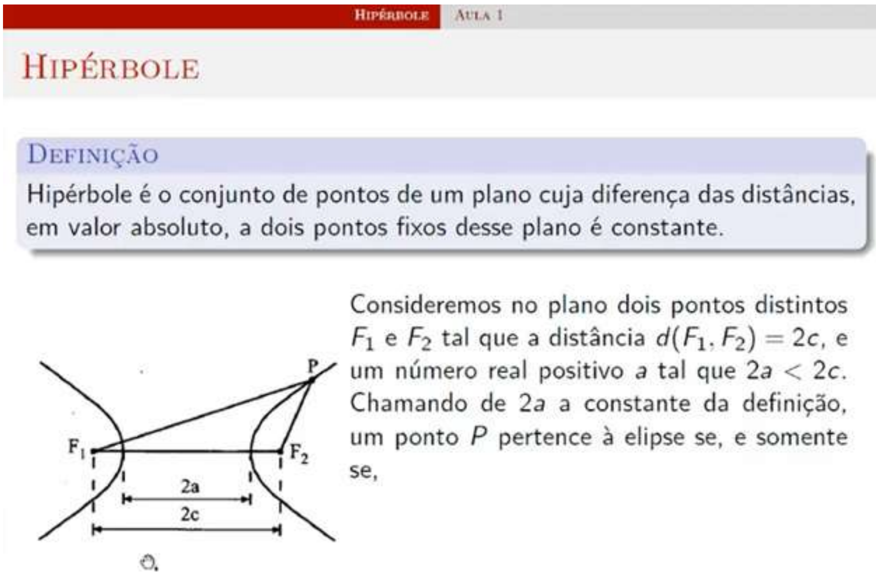
6.6 Aula 22: 6º Encontro

O 6º Encontro se refere à Aula 22 do planejamento do professor, que aconteceu no dia 05 do mês de maio de 2021, com início às 14h12 e duração de uma hora e treze minutos, cuja transcrição se encontra no Apêndice G.

Participaram deste encontro 11 alunos, sendo estes identificados por: A2, A6, A8, A9, A12, A15, A21, A22, A23, A25, A28.

A aula iniciou com o professor indo direto para a apresentação da tela com a definição de Hipérbole.

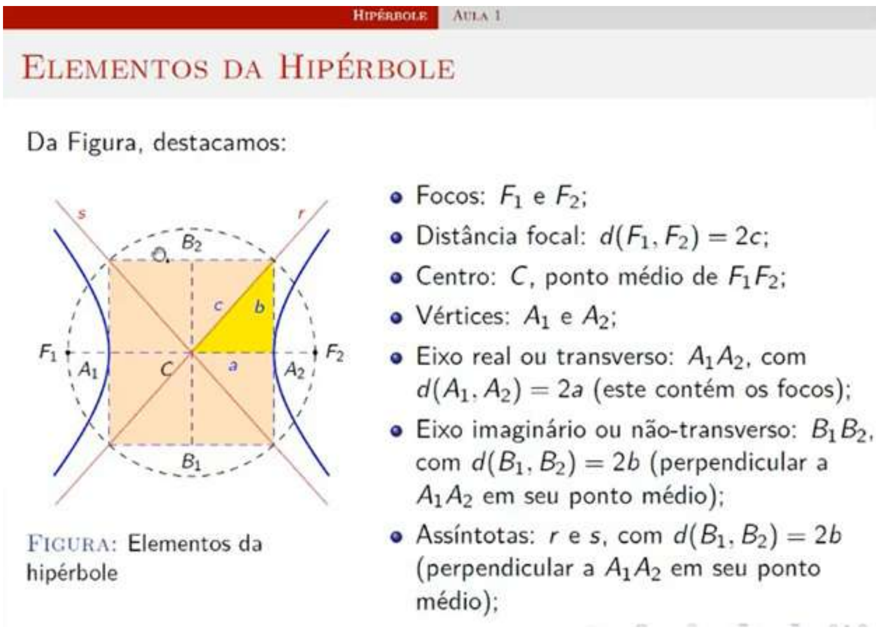
Figura 56 – Definição formal da Hipérbole



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

O professor falou sobre as diferenças entre essa cônica e a elipse e apresentou na tela seus elementos, enquanto comentava sobre cada um deles, destacando o retângulo da imagem que tangencia os ramos da hipérbole e que as assíntotas que aparecem na Figura 57 passam pelos vértices do retângulo, enfocando que essa estrutura ajudaria bastante na construção das hipérboles.

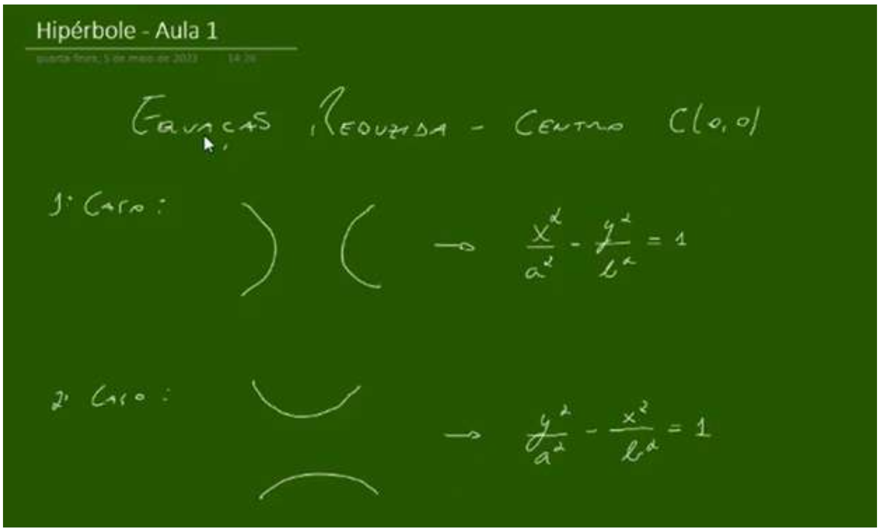
Figura 57 – Elementos da Hipérbole



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

Depois disso, deduziu a ER da Hipérbole com centro na origem dos eixos coordenados, apresentando um esboço do comportamento dessa curva, conforme a Figura 58.

Figura 58 – Equações da Hipérbole com centro na origem

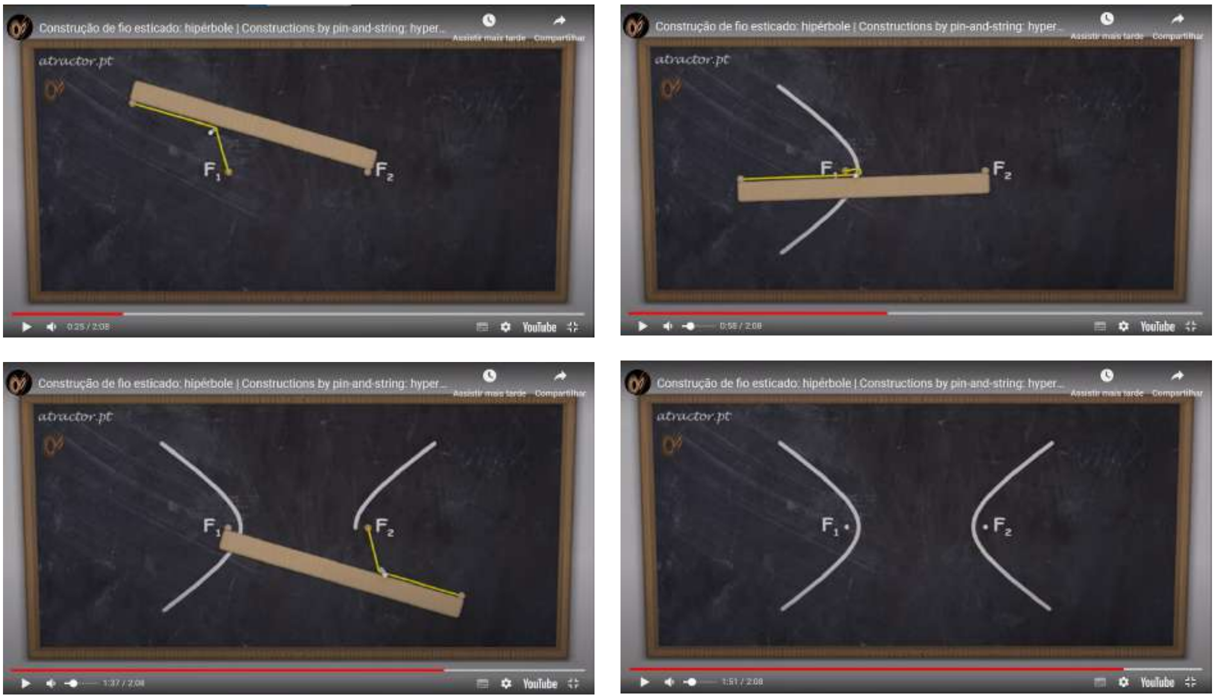


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

O professor explicou que, da mesma forma que fez com a elipse, apresentando um vídeo sobre sua construção, iria apresentar um vídeo com a construção da hipérbole[8], conforme imagens capturadas da transmissão, na Figura 59.

8 Disponível em <https://youtu.be/ETV_bWAPOqU>. Acesso em 05 maio 2021.

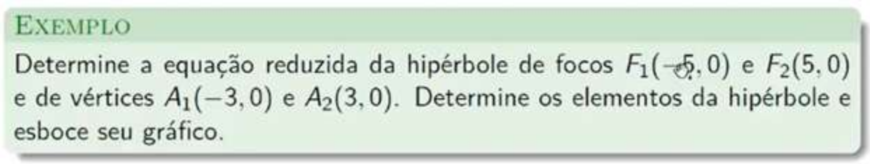
Figura 59 – Construção da Hipérbole



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

Após a discussão sobre o método de construção, o professor resolveu um exemplo de conversão da RLN para RG e RA da hipérbole, do seu material de aula, encontrando ainda as equações de suas assíntotas.

Figura 60 – Exemplo 1 – Hipérbole



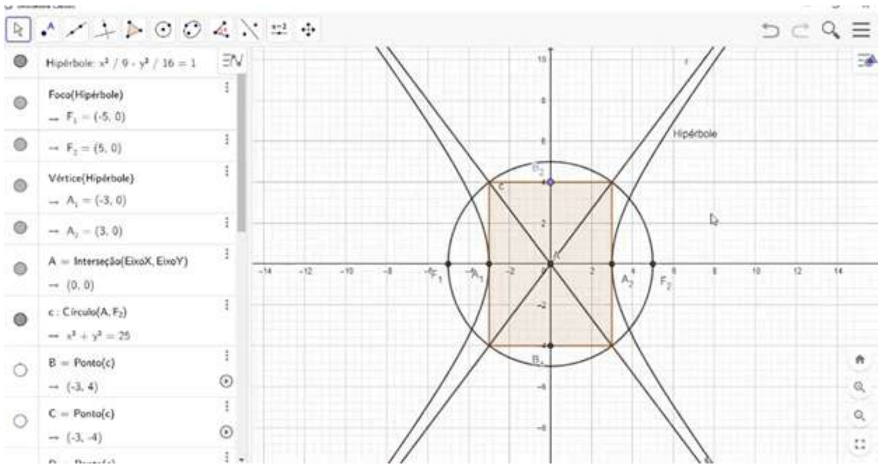
EXEMPLO

Determine a equação reduzida da hipérbole de focos $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$ e de vértices $A_1(-3, 0)$ e $A_2(3, 0)$. Determine os elementos da hipérbole e esboce seu gráfico.

Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

Após a resolução da questão na lousa digital, o professor construiu a RG da hipérbole no Geogebra, conforme a Figura 61.

Figura 61 – Representação Gráfica da Hipérbole – Exemplo 1

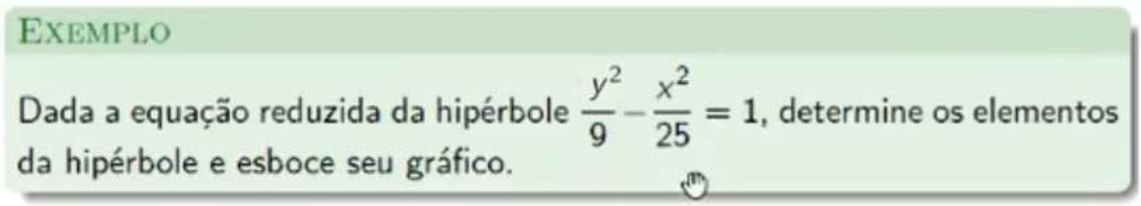


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

Destacou ainda que a hipérbole é a curva e não todos esses elementos, que são acessórios à construção.

Dando continuidade, informou aos alunos que iria deixar o exemplo 2 como atividade.

Figura 62 – Enunciado do Exemplo 2

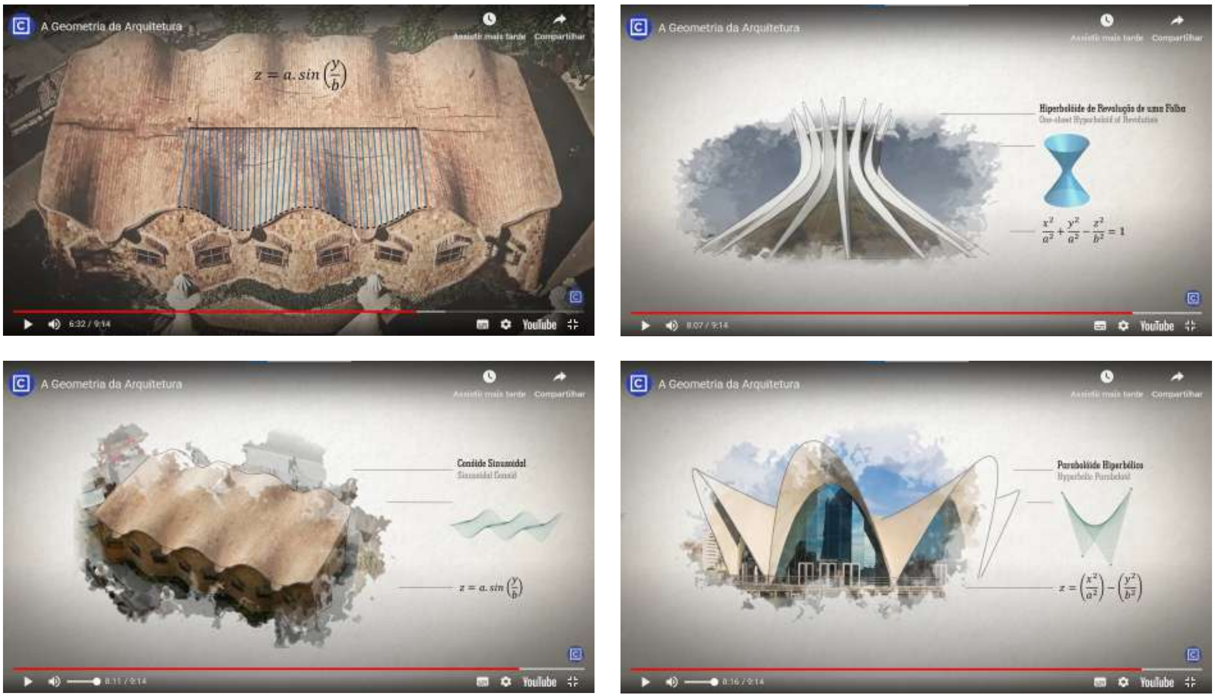


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

Depois disso, o professor disse que havia separado mais um vídeo interessante sobre a Geometria da Arquitetura[9], que apresentamos algumas capturas de tela na Figura 63.

[9] Disponível em <https://youtu.be/M6p1HDtLWmk>. Acesso em 05 maio 2021.

Figura 63 – Construção da Hipérbole

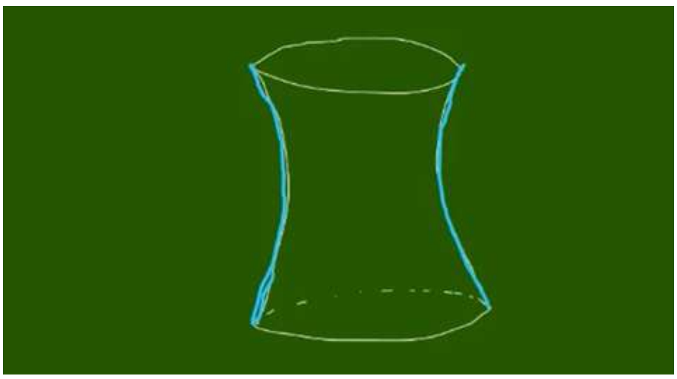


Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

No vídeo, podemos observar que é possível gerar superfícies curvas utilizando retas. E como pesquisa, para aprofundamento, o professor sugeriu que os alunos assistissem novamente a esse vídeo e lessem um pouco sobre superfície regrada e duplamente regrada.

Ele acrescentou ainda que em uma tarde estava pensando na turma e fez uma construção para mostrar na aula, utilizando palitos de churrasco e liguinhas de cabelo para fazer as devidas amarrações, e construiu a estrutura de uma hipérbole, como se tivesse feito uma rotação dessa curva, cuja ideia está representada na Figura 64.

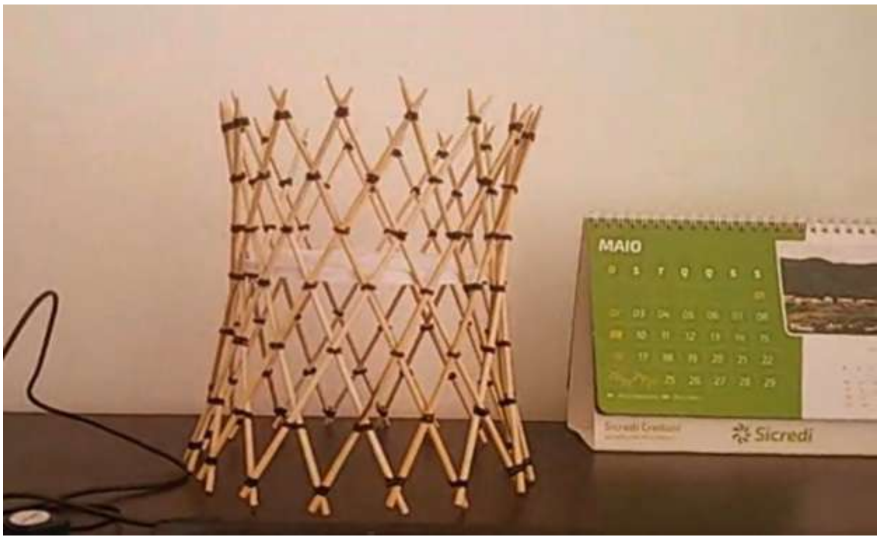
Figura 64 – Esboço da construção feita pelo professor



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

Foi explicado pelo professor que a ideia de fazer essa construção e apresentar o vídeo surgiram a partir do questionamento de um dos alunos na aula introdutória às superfícies cônicas sobre a construção de determinadas obras arquitetônicas.

Figura 65 – Objeto construído pelo professor em material concreto



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 22, 2021.

O professor lamentou não estarem em aulas presenciais para poderem construir outros materiais como esse, o que traria uma ligação bem interessante entre o curso técnico dos alunos e a Engenharia, através de discussões matemáticas.

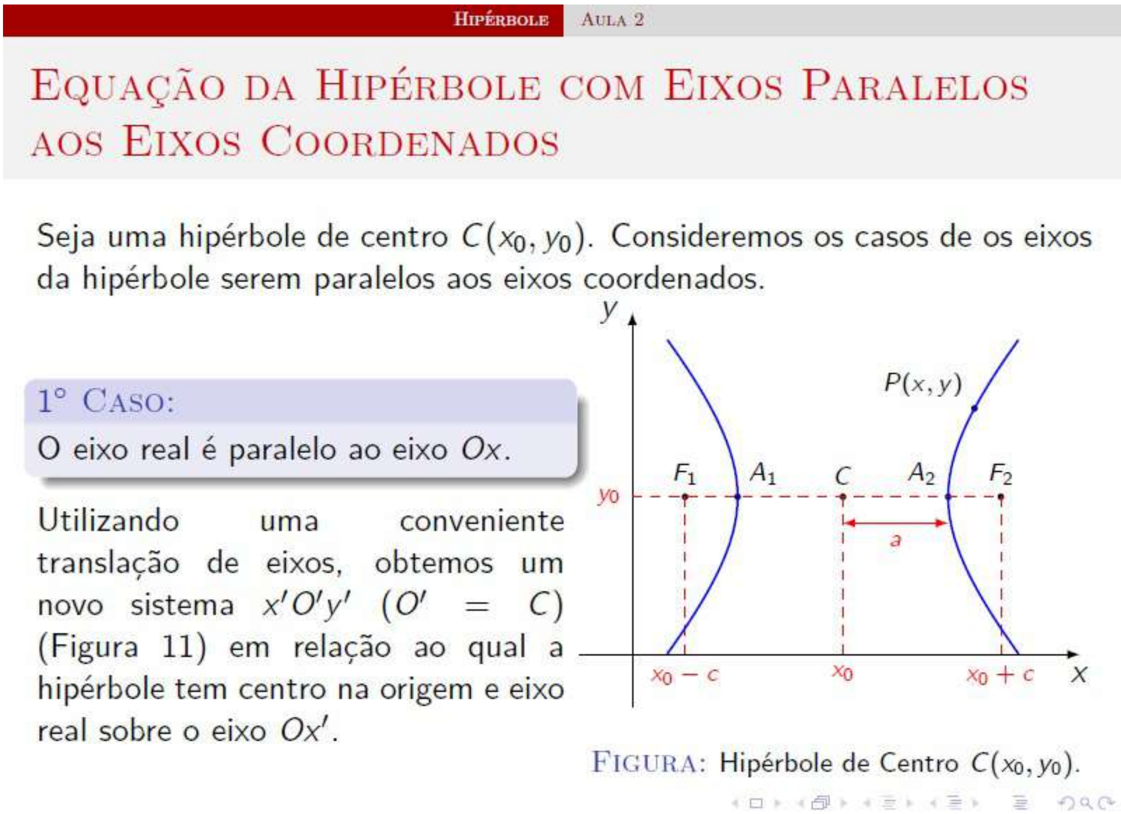
6.7 Aula 23: 7º Encontro

O 7º Encontro se refere à Aula 23 do planejamento do professor, programada para o dia 12 do mês de maio de 2021, com a postagem do material no site do professor e na plataforma *Google Classroom*, cujo material na íntegra se encontra no Apêndice H.

Essa aula corresponde à única aula assíncrona disponibilizada pelo professor, já que todas as demais foram síncronas.

Não há como precisar a quantidade de alunos que de fato acessaram o material.

Figura 66 – Material da Aula 23



Fonte: Dados da Pesquisa.

O conteúdo dessa aula foi sobre a hipérbole cujo centro não se encontra na origem dos eixos coordenados, suas representações gráficas e algébricas e ao final apresentava algumas questões para os alunos praticarem.

6.8 Aula 24: 8º Encontro

O 8º Encontro se refere à Aula 24 do planejamento do professor, que aconteceu no dia 19 do mês de maio de 2021, com início às 14h14 e duração de uma hora e trinta e seis minutos, cuja transcrição se encontra no Apêndice I.

Participaram deste encontro 10 alunos, sendo estes identificados por: A2, A4, A8, A10, A12, A13, A22, A23, A25, A27, A28.

A aula iniciou com o professor justificado a necessidade de ter feito a aula anterior assíncrona, explicando que o material postado na plataforma se referia à continuação do conteúdo de Hipérbole, onde tratava do caso da hipérbole cujo centro não está na origem do sistema. Em seguida perguntou aos alunos se alguém havia tido alguma dúvida sobre o material ou sobre as questões deixadas como atividade.

Diante da dúvida de A2 em relação à questão 22 do livro, o professor iniciou sua resolução.

Figura 67 – Enunciado da Questão 22 – Hipérbole

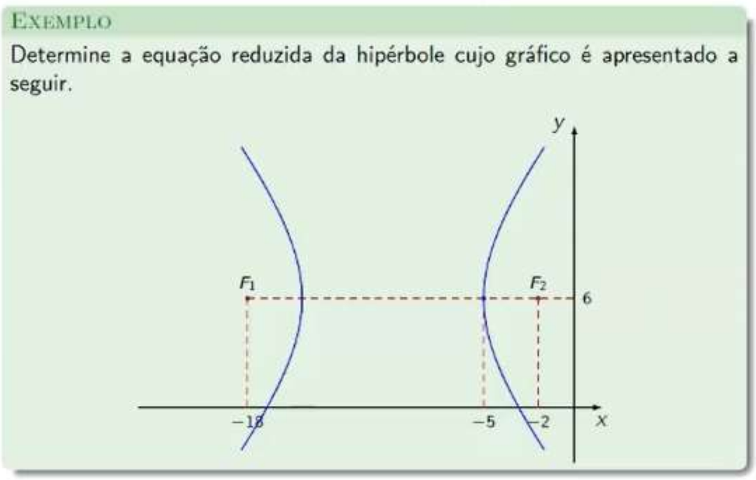
22 Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $3x^2 - y^2 = 300$.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 103).

O enunciado da questão apresenta a RA de uma hipérbole, segundo vem escrito no próprio texto. Porém como a RA não estava na forma que foi estudada em aula, o professor mostrou o tratamento necessário para que a RA dessa cônica passasse para o formato da ER conhecida, terminando a resolução da questão com a identificação das coordenadas dos seus focos.

A25 pediu que o professor resolvesse o último exemplo do slide, dizendo que confundiu muito o conteúdo de hipérbole com elipse.

Figura 68 – Exemplo 4 – Hipérbole



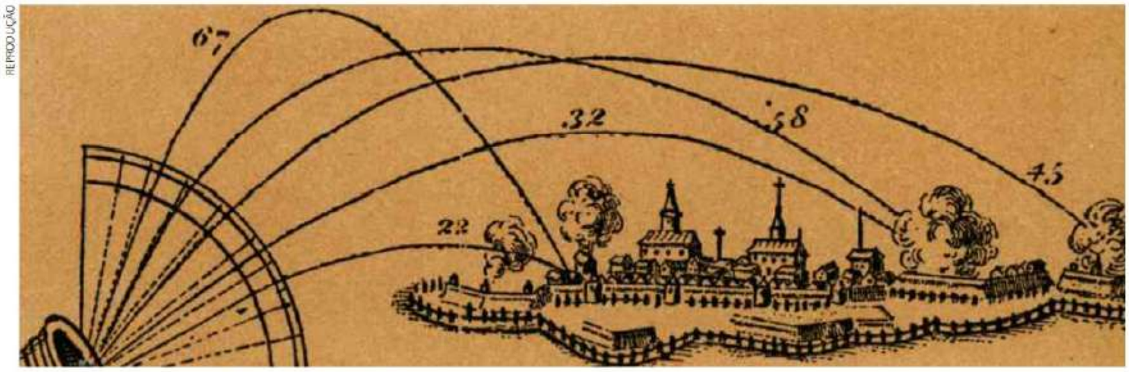
Fonte: Dados da pesquisa.

A questão consistia na conversão da RG para a RA, por meio da ER da hipérbole. Dessa forma, o professor passou a extrair todas as variáveis visuais do gráfico para identificar todos os seus elementos, chegando à resolução da questão.

Como não houve mais dúvidas dos alunos, o professor deu continuidade à aula, iniciando o conteúdo de Parábola.

Para iniciar o estudo dessa cônica, utilizou exemplos de representações de parábolas em situações concretas apresentadas no livro didático, como o lançamento de uma bala de canhão e o jato de água jorrado por uma fonte, conforme as Figuras 69 e 70.

Figura 69 – Trajetórias parabólicas de balas de canhão



Gravura que mostra trajetórias parabólicas de balas de canhão. Os números, próximos a cada parábola, indicam a inclinação do canhão em relação à direção horizontal.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 106).

Figura 70 – Cartões postais cujas formas se assemelham a parábolas

Lago do parque do Ibirapuera, São Paulo (SP), em 2012.

Ponte Juscelino Kubitschek, Brasília (DF), em 2010.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 107).

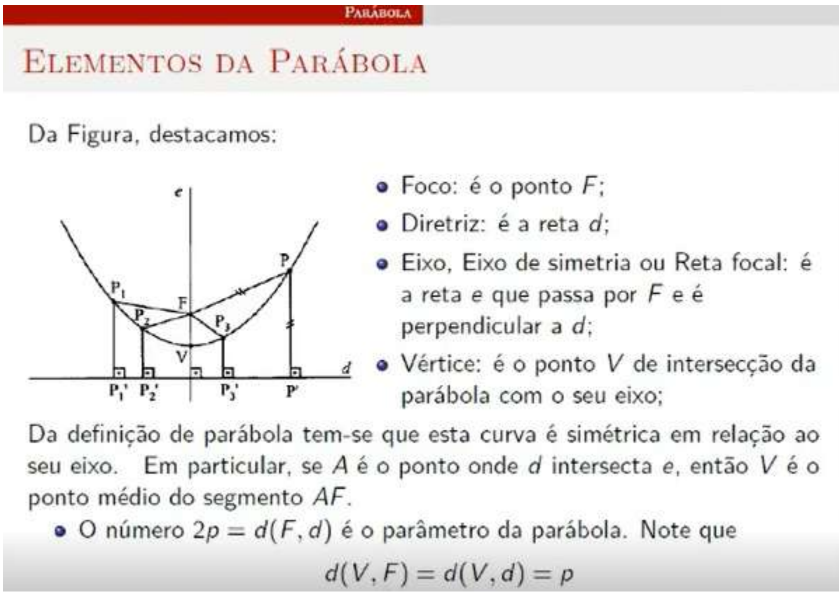
O professor apresentou a definição de Parábola.

Figura 71 – Definição de Parábola

Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 24, 2021.

E seus elementos.

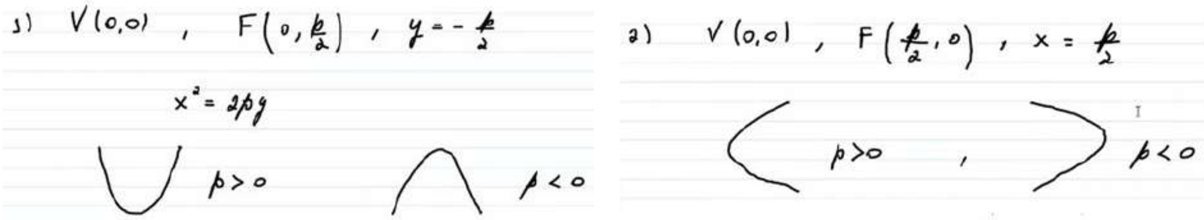
Figura 72 – Elementos da Parábola



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 24, 2021.

Apresentando ainda as suas equações reduzidas e as posições dessa cônica, conforme a Figura 73.

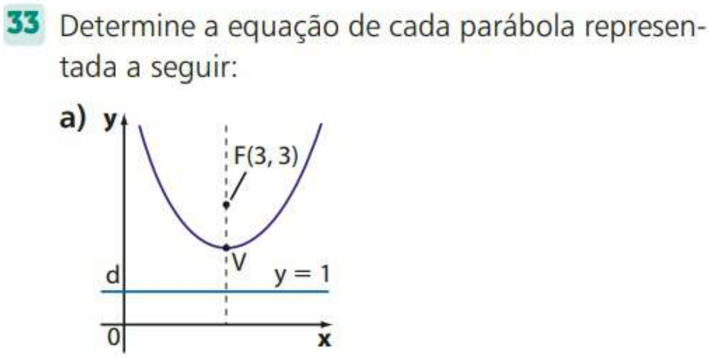
Figura 73 – Posições da concavidade da Parábola



Fonte: Captura da tela da gravação da Aula 24, 2021.

E explicou sobre a reta diretriz e o parâmetro da parábola, passando a resolver a atividade 33 do livro didático, em que era fornecida a RG da parábola e se pedia para representá-la algebricamente, por meio de sua ER.

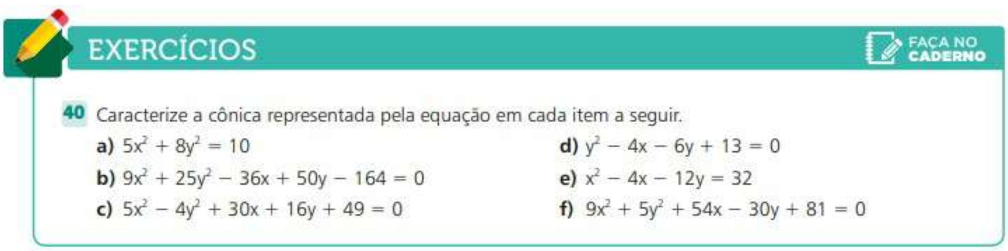
Figura 74 – Enunciado da Questão 33 – Parábola



Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 112).

Após explicar minuciosamente, identificando todas as variáveis visuais do gráfico, como nas outras cônicas, para conversão desse RRS em sua RA, o professor finalizou a aula conversando um pouco sobre a questão 40, e como proceder a identificação de uma cônica, dada sua RA.

Figura 75 – Enunciado da Questão 40 – Identificação das Cônicas


EXERCÍCIOS — FAÇA NO CADERNO

40 Caracterize a cônica representada pela equação em cada item a seguir.

a) $5x^2 + 8y^2 = 10$

b) $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$

c) $5x^2 - 4y^2 + 30x + 16y + 49 = 0$

d) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

e) $x^2 - 4x - 12y = 32$

f) $9x^2 + 5y^2 + 54x - 30y + 81 = 0$

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 118).

Passou a desenvolver tratamentos na RA da cônica do item “e”, enfatizando que já poderia identificar que se tratava de uma parábola pelo fato do y não estar elevado ao quadrado, mas passando à resolução passo a passo, por meio do completamento de quadrados, e deixando como sugestão de atividade o item “d” da mesma questão.

6.9 Foco no Professor Provocador

Já fizemos uma breve descrição do professor responsável pela turma pesquisada no capítulo anterior[10]. Porém, ao final da descrição dos encontros observados durante a fase de levantamento de dados, achamos imprescindível tecer algumas palavras adicionais acerca desse profissional e voltamos a falar um pouco mais sobre esse professor, grande aliado da nossa pesquisa, pelo esmero com que prepara o material para ser utilizado em suas aulas, pela forma com que as conduz, bem como por compreender como criar possibilidades para obtenção de dados durante os encontros, que em muito nos auxiliaram nessa fase.

Dessa maneira, ressaltamos o trabalho diferenciado do professor, através da riqueza do material produzido nas aulas, da utilização de diversas metodologias, da potencialidade do material produzido, da interação com os estudantes, das provocações aos diálogos e sua relevância para que estes fossem estabelecidos. Ressaltamos ainda a variedade dos registros de representação semióticas mobilizados pelo professor em suas aulas, permitindo aos alunos transitarem entre esses registros de forma constante e natural.

Concordamos com Fanizzi (2008, p. 74) quando ressalta que

> o professor que estimula seus alunos a se manifestarem em sala de aula, a apresentarem suas questões, dúvidas e comentários significativamente, contribui para a aprendizagem da Matemática, bem como para o fortalecimento do reconhecimento de cada um no grupo, isto é, da função socializadora da interação. Com isso, o professor representante da categoria interativo/dialógico seria o mais indicado para alcançar êxito em sua ação de ensinar.

Com essas palavras, ratificamos o destaque ao papel primordial desse profissional na nossa pesquisa, pois os dados que obtivemos durante as observações das aulas se devem à sua disponibilidade e dedicação durante a condução das explicações e discussões com os alunos, provocando a todo momento interações discursivas, repletas de possibilidades para nossa análise.

Entendemos que nada, ou muito pouco, poderíamos ter feito na pesquisa se os diálogos não tivessem existido através de suas provocações.

Nas tramas, o foco está no professor.

[10] Capítulo 5, Seção 5.2.

7 CONSTRUINDO PONTES: ANÁLISE DOS DADOS

[...] *aquele que pratica ato de compreensão (também no caso do pesquisador) passa a ser participante do diálogo, ainda que seja num nível específico.*[1]

Conforme Pereira (2010, p. 159) apresentou em seu estudo, para a análise do discurso, segundo a teoria de Bakhtin, é necessário revisitar os dados quantas vezes forem necessárias em busca de regularidades de gêneros, uma vez que, "em uma análise bakhtiniana da linguagem, não há categorias pré-estabelecidas a partir das quais o pesquisador enquadra e analisa seus dados [...] haja vista seu caráter heterogêneo, polifônico, pluriestilístico, interdiscursivo e dialógico".

Neste capítulo apresentamos a análise dos dados da nossa pesquisa, com os comentários e análises que julgamos pertinentes, à luz do referencial teórico.

7.1 Compreensão das Falas

[...] *o real se apresenta para nós semioticamente, o que implica que nosso discurso não se relaciona diretamente com as coisas, mas com outros discursos, que semiotizam o mundo.*[2]

Os episódios que a seguir serão apresentados se referem a trechos de diálogos extraídos das sete aulas gravadas na turma pesquisada, em momentos que consideramos relevantes para nossa análise. Os momentos se referem à explicação de conteúdos ou resolução de questões, em que a todo momento o professor solicitava a participação dos alunos, respondendo a seus questionamentos ou informando algum ponto de dúvida[3].

Para iniciarmos a análise das situações, observamos que, de forma geral, o professor utiliza a seguinte estratégia para facilitar a compreensão do conteúdo nas aulas ministradas:

- Faz do ambiente virtual um local de livre comunicação com os alunos, deixando-os à vontade para interagir e incentivando sua participação;
- Investiga o conhecimento prévio dos alunos;
- Utiliza a linguagem próxima aos alunos, oferecendo condições enunciativas propícias a fortes interações discursivas;

---

1 Bakhtin (1997a, p. 355)

2 Fiorin (2018, p. 167)

3 Os diálogos apresentados neste capítulo são compostos por discursos orais do professor e dos alunos ou por diálogos através da digitação no *chat* do *Google Meet*. Foram retirados dos discursos orais os vícios de linguagem, para tornar o texto mais enxuto, possibilitando uma melhor compreensão por parte do leitor. Nos discursos escritos, através do *chat*, mantivemos a integralidade do que foi digitado.
Como recurso gráfico, para que o leitor possa distinguir entre essas duas formas de discurso dos alunos, após a identificação do aluno, utilizamos o símbolo [a] para identificar que nos referimos à transcrição do áudio e o símbolo [c] para identificar que nos referimos à transcrição do *chat*.

- Quando se trata de continuidade do conteúdo da aula anterior, faz um resumo do que foi visto, estabelecendo a sequência do assunto;
- Apresenta o objeto matemático, por meio de sua definição (RLN), suas características e elementos;
- Representa graficamente (RG) a cônica trabalhada para identificação das variáveis visuais do gráfico;
- Deduz a partir das variáveis existentes a representação algébrica (RA) da cônica, realizando os tratamentos necessários (T) e chegando a sua equação reduzida;
- Mostra como identificar algebricamente os elementos da cônica;
- Faz o passo a passo do tratamento realizado, repetindo ao final do processo o caminho percorrido, para ter um alcance maior;
- Relaciona o conteúdo da aula com situações do cotidiano;
- Utiliza softwares e materiais concretos para mostrar aplicações do conteúdo que está sendo apresentado;
- Incentiva a interação discursiva com os alunos.

Diante dessas estratégias, passamos a analisar algumas situações, em que aconteceram interações discursivas nas aulas sobre cônicas.

7.1.1 O chapeuzinho de aniversário

Vejamos o seguinte diálogo, a que chamaremos de (E17, CO, CF–S1)[4], que se refere à aula introdutória ao conteúdo de cônicas.

> P: [...] Então para começar esse nosso papo aqui de cônicas, eu queria perguntar inicialmente a vocês se vocês têm conhecimento do que é uma superfície cônica para vocês, o que é uma superfície cônica ou se esse termo remete a um conceito que vocês já conhecem.
>
> [o professor esperou os alunos se manifestarem]
>
> A2[a]: Cônica me faz lembrar, professor, de cone, né? Da figura espacial.
>
> P: Isso, muito bem! Cone: olha aí que coisa boa.
>
> A25[a]: Eu só lembrei daquele chapeuzinho de aniversário.
>
> P: Isso. É um clássico exemplo de uma superfície cônica, quando a gente pensa no cone, obviamente, eu estou tomando ali, ele tem uma certa altura, né? Então que tal a gente expandir um pouco

[4] Utilizamos a sintaxe: (Ex, Y, W–Sz) para identificar que o diálogo aconteceu no Encontro referente à Aula nº x, que se tratava do Conteúdo Y, Categoria W, sendo essas categorias CF (Compreensão das Falas) ou VS (Vozes do Silêncio), na Situação nº z. Para os conteúdos utilizamos as siglas *CO* para cônicas no geral, *CI* para circunferência, *EL* para elipse, *HI* para hipérbole e *PA* para parábola.

mais essa ideia pessoal? Então, imaginem a seguinte figura: eu vou compartilhar com vocês a tela para gente filosofar um *poquito*. Quando aparecer aí vocês me avisem, por favor. [o professor compartilhou a tela com o *Geogebra Classic*, apresentando uma construção da superfície cônica de 2 folhas, conforme a captura de tela adiante]

A13, A25[a]: Apareceu!

P: Então, imagina essa superfície cônica aqui. Como vocês podem observar é como se nós tivéssemos dois cones um sobre o outro [professor faz o gesto de um cone sobre o outro com as mãos]. De que maneira nós podemos obter essa imagem? Imaginem vocês, pessoal, uma reta aqui onde eu estou passando meu mouse [o professor passa o mouse sobre a reta geratriz da superfície cônica]. E nós tomássemos um ponto dessa reta. Suponha esse ponto aqui. E nós fôssemos girando a reta, segurando nesse ponto. Então vou até fazer aqui como se fosse com a minha caneta [o professor pegou uma caneta na mão e faz o movimento de giro para a tela, mostrando o movimento de rotação para os alunos]. Estou com a minha reta, estou com a minha caneta e vou girando assim, olha! Percebem? Girando de que maneira, professor? Até, por exemplo esse ponto aqui [apontou para a extremidade da caneta] fazer o caminho de um círculo. Olha só! [fez o movimento circular na caneta]. De que maneira geral até por exemplo esse ponto aqui está fazendo o caminho de um círculo? Olha só.

P: Bem, o que a gente obtém com isso é exatamente essa imagem que está aqui [mostrou novamente a imagem do compartilhamento de tela]. Essa reta que está fazendo esse papel é exatamente a geratriz: ela gera essa nossa superfície cônica. É interessante chamar a atenção do seguinte para vocês, pessoal, como inicialmente nós consideramos uma reta, essa minha caneta está fazendo o papel de reta, esse cone, essa superfície cônica não tem esse fim, tá pessoal? [destacando que na imagem compartilhada a superfície cônica está limitada]. Ela continua infinitamente para cima e continua infinitamente para baixo porque a gente está como geratriz uma reta [aqui ele deixou subentendida a definição de reta] ok? Se fosse um segmento tomando o ponto médio eu teria essa imagem finita aí [mais uma vez se referindo à construção compartilhada], dentro de uma região. Então, olha só, essa é a nossa superfície cônica. O que é que nós vamos começar a pensar com essa superfície cônica? Imaginem vocês tendo essa imagem e considerando um plano e esse plano "cortando", ou seja, interceptando a minha superfície cônica. Pessoal, estou chamando atenção aqui: o tempo todo falando "superfície", "superfície", "superfície" porque isso aqui é <u>oco</u>, tá? [o professor girou um pouco a construção para dar uma visão superior do objeto]. É só o "chapeuzinho de aniversário" para cima, o "chapeuzinho aniversário" para baixo [conforme a noção apresentada pela aluna A25, quando P perguntou sobre o que eles entendiam por cônicas], claro, imaginem isso infinito para cima, infinito para baixo. Então nós vamos agora imaginar um plano intersectando essa minha superfície cônica. Percebam: esse plano poderia ser mais inclinado, menos inclinado, poderia ser um plano vertical, um plano horizontal... [enquanto falava, o professor movimentava o plano da construção, conforme suas falas].

P: E aí o que a gente vai fazer agora é exatamente imaginar essas possíveis intersecções. Pessoal, aqui como vocês podem observar, eu tenho b igual a zero, não sei se na imagem está bem visível.

> Está visível para vocês aqui *b* igual a zero, pessoal? [o *b* a que ele se referiu estava marcando zero, em um controle deslizante da janela geométrica do Geogebra]. Isso significa que o nosso plano está horizontal, tá certo? Um plano horizontal. Quando a gente toma o plano e a intersecção do plano com a superfície vai me dar essa imagem que eu estou passando mouse aqui em cima. Estão vendo? Essa imagem azul aqui!
>
> A25[a]: Um círculo azul, né?
>
> P: Isso! Em azul! Só a linha, tá pessoal? Nesse caso, a intersecção do plano com a superfície cônica gerou que imagem?
>
> A22[a]: Um círculo?
>
> A25[a]: Um círculo!
>
> P: Sim? Sim! Eu vou concordar com vocês, mas eu vou fazer uma pergunta quando vocês dizem para mim "círculo", na cabeça de vocês a imagem que vocês têm de círculo, esse conceito, é da imagem que tem a região [aqui usa o termo região em substituição a lugar geométrico] que compreende a "região" [aqui ele usou o termo para se referir à área] ou é simplesmente a linha? Aliança, por exemplo [P retirou sua aliança do dedo e mostrou na tela para que os alunos compreendam].
>
> A22[a]: A linha!
>
> A25[a]: É só a linha!
>
> [P ia retomar o diálogo quando foi interrompido por A2]
>
> A2[a]: Então seria uma circunferência, né professor?
>
> P: Isto! (E17, CO, CF–S1, grifo nosso).

Esse diálogo ocorreu na aula introdutória ao conteúdo de cônicas, em que o professor instigou os alunos a partilharem de sua vivência, seu conhecimento cotidiano advindo do contexto cultural em que estão inseridos para apresentarem as representações mentais sobre a superfície cônica de duas folhas e expressarem esse entendimento. A partir da ideia de A2 e A25, o professor apresentou a representação imagética de uma superfície cônica limitada, para que os alunos atingissem a compreensão do que ele se referia, esclarecendo que esse objeto está limitado pela representação, mas matematicamente ele é infinito.

Nesse diálogo os enunciados do professor são claros. Ele busca o conhecimento dos alunos para introduzir o conteúdo e obtém atitudes responsivas. Essas respostas vão subsidiar novas informações, a ponto de irem se aproximando cada vez mais do que ele tentava tornar compreensível.

Para que a aula fosse mais compreensível, foram apresentadas a construção no Geogebra e analogias a objetos do cotidiano, gestos, bem como a ligação do conteúdo trabalhado com a educação básica.

Percebemos ainda alguns elementos presentes nas aulas online, como "vou compartilhar a tela com vocês", "quando aparecer aí vocês me avisem", "apareceu", dentre outros termos vão permear todas as demais aulas descritas.

Quando A22 e A25 falaram em círculo, muito provavelmente estavam confundindo as duas formas círculo e circunferência, o que foi prontamente observado pelo professor, fazendo-o voltar ao conceito de cada um e nos permitindo estabelecer conexões com o referencial teórico. Quando observamos os diálogos, é fácil compreender que os alunos demonstraram entendimento sobre o que o professor estava tentando explicar em suas respostas ao questionamento. A possibilidade de identificarem o objeto gerado a partir da representação figural apresentada complementa o discurso do professor, propiciando as atitudes responsivas apresentadas pelos alunos e, posteriormente, aprimoradas, chegando ao objeto matemático formado nas palavras de A2.

7.1.2 Nuvem de palavras

Na segunda situação, o professor tentou trazer o conhecimento prévio dos alunos sobre a definição e os elementos da circunferência.

> P: [...] vamos para a primeira situação, que é exatamente aquela da circunferência. Vocês conseguem lembrar definição de circunferência para mim?
>
> [silêncio]
>
> P: Pessoal definição de circunferência?
>
> A25[a]: Eu não lembro não.
>
> P: Quais são as características de um ponto que pertence à circunferência?
>
> A25[a]: O raio?
>
> A14[c]: Raio.
>
> P: Hum, entendi. Vou voltar um pouquinho, um pouco atrás aqui. Vamos começar fazendo alguns desenhos para vocês.
>
> A25[a]: Quando eu lembro de circunferência eu lembro do ciclo trigonométrico.
>
> A8[a]: Linhas curvas.
>
> P: Tem um bocado de conceito aí soltos e vamos dar uma arrumada nisso tá?
>
> A27[a]: Professor, eu acho que a ideia de continuidade também.
>
> P: Já apareceu um outro conceito que "vixe" dá pano para manga esse negócio chamado continuidade viu? Mas não vamos entrar nesse "trem" aí de continuidade ainda não né? Quando vocês estiverem, em breve, fazendo o curso conosco aqui de Matemática — olha como eu sou uma pessoa de fé — aí a gente vai estudar essa continuidade que você está falando, aí vai ter outra característica né? Deixa eu compartilhar com vocês a tela pra gente colocar esse monte de conceitos, vamos acertar a ordem aqui tá bom?
>
> A4[c]: Aproximadamente é uma característica? [querendo dizer "proximidade"]
>
> A25[a]: Professor, A4 tá perguntando [no chat] se a proximidade é alguma característica.
>
> P: Proximidade, vamos ver se esse "trem" proximidade... apareceu outra palavra aqui, a gente inclusive podia até brincar aqui com uma

> nuvem de palavras. Então vamos fazer o seguinte eu vou desenhar aqui uma circunferência, obviamente não vamos aqui ficar pensando na perfeição. Vamos lembrar de alguns elementos, a gente faz uma revisão de geometria plana e depois eu venho para analítica. Uma circunferência é essa linha branca que eu fiz aqui. Esse ponto C a gente chama de quê? Ele é o quê da circunferência?
>
> A25, A22[a]: O raio?
>
> P: Centro, é o centro da circunferência, tudo bem? Quando eu estou num ponto sobre a linha, ou seja, na circunferência, o segmento $\overline{CP}$, este sim é o raio. Ou seja é a distância do ponto até a nossa circunferência, até o nosso centro. A gente chama isso de r minúsculo normalmente né? Ou R maiúsculo, como vocês queiram. Vou colocar um r minúsculo.
>
> P: Quando nós tomamos dois pontos da circunferência, mas o segmento $\overline{AB}$ não passa pelo centro, esse segmento $\overline{AB}$ a gente chama de quê?
>
> Ax[a]: Diâmetro.
>
> A14[c]: Origem, corda, diâmetro.
>
> A25[a]: A14 colocou [no chat] que era corda.
>
> P: Quem foi que colocou corda?
>
> A25[a]: A14.
>
> P: Muito bem senhorita! Corda! (E17, CI, CF–S2).

Enquanto A25 afirmou não lembrar a definição de circunferência e o professor perguntou sobre as características de um ponto pertencente a essa cônica, começaram a surgir vários nomes como raio, linhas curvas, ciclo trigonométrico, continuidade, diâmetro, origem, nas palavras do professor, poderia ter sido feita uma nuvem de palavras[5]. A maioria dessas palavras têm relação com a circunferência, mas talvez os alunos as tenham associado ao conteúdo, sem saber diferenciar o que cada um desses elementos representava ao certo. Esse fato é facilmente observado quando A22 e A25 afirmam que o ponto central da circunferência é o raio e não o centro. Ou mesmo quando A14 digitou no chat algumas palavras até chegar em uma que pudesse satisfazer a pergunta do professor.

Percebemos que, embora pareça que os alunos não tenham apresentado respostas adequadas do ponto de vista matemático, eles têm atitudes responsivas, pois dialogam sobre o assunto e, mesmo não tendo atingido aquilo que o professor pretendia do conteúdo matemático trabalhado, em meio a tantas palavras lançadas sem localização exata, os alunos tiveram atitudes responsivas, respondendo através do áudio e do chat e dialogando sobre o assunto.

7.1.3 Respondendo no chat

Para deduzir a ER da circunferência, o professor utilizou a RG dessa cônica, com todos os seus elementos, mostrando a relação existente entre esses elementos.

[5] Nuvem de palavras, *Tag cloud* ou *Word cloud* é um gráfico digital, que descreve visualmente um assunto e mostra o grau de frequência das palavras em um texto. Quanto mais a palavra é utilizada, mais chamativa é a sua representação no gráfico, sendo muito útil para trabalhar palavras-chave.

> P: [...] Vejam, quando a gente tem essa imagem do jeito que está montada, nós podemos observar aqui um triângulo retângulo.
>
> P: Até pintei ele aqui para ficar bem visível para vocês. Ora, se nós temos um triângulo retângulo, então podemos utilizar o teorema de... como é o nome do "senhorzinho" lá?
>
> A25, A22[a]: Pitágoras?
>
> P: Teorema de Pitágoras! Para isso eu vou simplesmente chamar esse ponto aqui pessoal de D, tá? Ora, pelo Teorema de Pitágoras, a distância de C até D ao quadrado, mais a distância de P até D ao quadrado é igual à distância de P até C ao quadrado, ou seja, b ao quadrado mais c ao quadrado é igual a a ao quadrado [$b^2 + c^2 = a^2$]. Beleza para todo mundo? Fazendo uso do teorema de Pitágoras o que nós temos é isso aí. O computador parece que não está querendo trabalhar, vou sair e voltar de novo e ver se ele vai querer trabalhar ou não. Agora sim! Mas colocando essas distâncias em termos de coordenadas, como é que vai ficar para a gente aqui pessoal? Lembra que isto aqui vai ficar "raiz de", como está elevado ao quadrado nós vamos poder eliminar aqui a raiz com o quadrado. Claro, o termo que está dentro, ou seja, o radicando, ele é positivo. Então vamos escrever isso aqui. Como é que fica, pessoal, essa distância de C até D?
>
> [silêncio]
>
> A14[c]: $x - x_0$.
>
> P: Pessoal, alguém por aí? Vamos, nós conversamos sobre isso lá nas nossas primeiras aulas. Como é que vai ficar essa distância? C para D?
>
> [Nenhum aluno respondeu oralmente. A14 havia digitado no chat $x - x_0$, porém sua resposta não foi vista pelo professor, nem transmitida pelos demais alunos]
>
> P: É a diferença entre os x, pessoal. x menos x_0. Lembra que essa diferença, ela ficou em módulo por qual motivo?
>
> [silêncio]
>
> P: Por que é que a gente usa módulo pessoal?
>
> A22[a]: Para o resultado ficar positivo.
>
> P: Exato, porque podia ser que o D estivesse desse lado, tudo bem? De forma análoga, como é que vai ficar a distância de P para D?
>
> A25[a]: y menos y zero [$y - y_0$], ao contrário.
>
> P: Então para evitar isso a gente faz o quê? Módulo né? Para não ter problema. E quem é a distância de P até C? Já está até escrito no texto.
>
> A25[a]: x menos x zero [$x - x_0$].
>
> A22[a]: É o raio?
>
> P: Exatamente, é o raio, olha! (E17, CI, CF–S3).

Aqui os alunos precisavam do conhecimento de distância entre pontos, conteúdo visto anteriormente ao de cônicas.

Como houve um aparente silêncio a seu questionamento, o professor acabou achando que os alunos não estavam lembrados do conteúdo e respondeu que a distância entre as abscissas era a diferença entre x e x_0. Nesse caso, observamos que A14 havia indicado a resposta corretamente no chat, fazendo a diferença entre as abscissas dos pontos em questão. Tal fato nos mostra uma situação característica das aulas remotas, em que uma resposta é enviada pelo chat, mas, por estar apresentando a tela do computador, o professor não conseguiu vê-la. Os demais alunos, mesmo que a tenham visto, não informaram ao professor.

Observamos que a ausência de resposta oral, não significa ausência de resposta. Esse silêncio era aparente, fez parecer que não tinha havido atitude responsiva por parte dessa aluna ou de qualquer outro.

Dessa forma, nesse diálogo, A14 compreendeu o enunciado e teve uma atitude responsiva, digitando no chat a resposta ao questionamento do professor. Nesse mesmo sentido, A22 e A25 demonstraram compreensão do motivo pelo qual precisariam utilizar o módulo na distância, finalizando com A22 identificando o raio da circunferência.

7.1.4 Confusão de sinais

Na situação do diálogo a seguir o professor havia realizado tratamentos na EG da circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ para chegar a sua ER, cuja representação seria $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$. Ele estava na finalização desse tratamento e já havia explicado como identificar as variáveis da ER de uma circunferência.

> P: Olha quanto é que ficou agora no segundo membro: mais quatro, menos quatro zera, fico apenas com nove, ou seja, essa equação geral tem essa representação como equação reduzida. Então me digam pessoal, neste caso, quem é o centro?
>
> A25[a]: Nove.
>
> P: Eita!
>
> A25[a]: É não?
>
> A22[a]: Menos dois e três?
>
> P: Quase. Lembra de trocar o sinal!
>
> A25[a]: Dois e menos três.
>
> P: Dois e menos três! E o raio?
>
> A22, A25[a]: Nove.
>
> P: Quanto?
>
> A2[a]: Nove... três.
>
> P: Três!
>
> A2[a]: É três!
>
> P: Lembra que aqui eu tenho r ao quadrado: r ao quadrado igual a nove, r igual a três. (E17, CI, CF–S4).

Aqui novamente A25 confundiu o centro da circunferência com alguma medida, possivelmente estava confundindo com a medida do raio, mesmo que ainda não fosse esse o seu valor. A25 mostrou não ter clareza de que o centro é um ponto e, como tal, apresenta sua representação em forma de par ordenado.

A22 procurou identificar os valores de x e y, porém ainda confundindo os sinais dos números com os sinais da equação. Quando o professor alertou para o sinal, A25 prontamente respondeu, demonstrando ter compreendido quais seriam as coordenadas do centro.

Porém, com o questionamento sobre a medida do raio, ambos A22 e A25 novamente demonstraram uma certa confusão quanto à identificação do valor que o professor buscava, uma vez que na ER a medida do raio aparece elevado ao quadrado. Logo A2, que também iria apresentar a mesma resposta que os colegas, sem interferência do professor, identifica corretamente o valor do raio.

Observamos nesse diálogo a alternância dos interlocutores, com diferentes posicionamentos, aprimorando suas respostas conforme compreendiam o caminho que levaria aos elementos da cônica em questão.

7.1.5 Primeiro o concreto

Nessa situação o professor incentivou os alunos a pensarem de forma simples, desvinculada da linguagem matemática, imaginando uma situação em um material concreto, uma folha de papel, o que depois eles poderiam representar matematicamente.

> P: Uma reta do plano... imagine que você tem aqui um caderno, vamos lá, uma folha de papel aqui [ele mostrou uma folha de papel na câmera], a circunferência [mostrou com as mãos que a circunferência estaria na folha], o que pode acontecer com essa reta?
>
> [silêncio]
>
> P: Pensem de maneira simples, não pensem na linguagem matemática rebuscada não! Pense literalmente em desenho, tem uma circunferência numa folha, você traça uma linha reta.
>
> A8[a]: Vai... ultra... é... como é a palavra? Vai ultrapassar a circunferência... passar por dentro dela.
>
> P: Estou entendendo! Daqui a pouco a gente coloca os nomes bonitinhos, beleza? Só tem essa possibilidade?
>
> A25[a]: Acho que tem a possibilidade dela ficar... da reta ficar dentro da circunferência. Tem?
>
> P: Entendi, tem mais alguma possibilidade? Daqui a pouco a gente arruma esses argumentos, tá? Não estou preocupado agora com... [A8 tentou falar algo, mas não deu para entender]
>
> P: Diga lá, A8!
>
> A2[a]: E também fora da circunferência, professor!
>
> P: Já são duas possibilidades, então tem mais alguma?
>
> A8[a]: Passar pelo centro da circunferência?
>
> P: Passar pelo centro da circunferência já entra naquela primeira possibilidade dela passar por dentro da circunferência. O quanto por dentro... [fez gesto que não importa] Mas tem uma terceira possibilidade?
>
> A3[a]: Que ela pode só tocar na extremidade da circunferência?
>
> P: Nesse caso quando ela só toca a gente chama de quê?

> A2[a]: De tangente, se eu não me engano...
>
> A25[a]: De tangente!
>
> P: Exato! Então vejam: a gente poderia ter uma reta externa à circunferência, eu vou chamar de reta r tá? Eu poderia ter uma reta só tocando a circunferência, nesse caso seria uma reta tangente à circunferência e poderia ter uma reta que corta a circunferência separando aí em dois arcos né? Duas partes... nesse caso a gente chama de reta secante. Reta r, s e m. (E18, CI, CF–S5).

Nesse diálogo observamos que diante dos vários questionamentos do professor, os alunos vão mostrando sua compreensão revelada nas atitudes responsivas que dão continuidade às interações dialógicas, de acordo com Bakhtin (1997a, 2006), pois ouvem o enunciado do interlocutor e a ele opõem um conjunto de palavras próprias, como resposta.

A8 por meio do diálogo estabelecido, demonstrou uma interação discursiva que nos leva a afirmar que a uma atitude responsiva de sua parte, principalmente quando imaginou uma reta ultrapassando a circunferência no plano, em que estaria secante a ela.

Quando A25 acreditou na possibilidade de uma reta ficar dentro da circunferência, a aluna não lembrou de considerar o fato das retas serem infinitas. Talvez ela estivesse acessando a representação em sua mente de segmentos de retas, que poderiam estar na superfície limitada pela circunferência.

A2 apresentou outra alternativa para a posição relativa entre reta e circunferência, em que aquela seria externa a esta. Enquanto A3 e A2 compreenderam que a reta poderia apenas tangenciar essa circunferência, apesar de ainda estarem em dúvida quanto ao termo a ser utilizado, A25 repetiu o que havia sido dito, em uma atitude responsiva de concordância.

Observamos nessa situação que o professor possibilitou a compreensão dos alunos, dando-lhes a oportunidade de extravasarem nas repostas, conforme fossem fazendo conjecturas, sem que precisassem se preocupar com a linguagem matemática formal. Corroborando o posicionamento do professor lembramos Machado (1989), quando ressalta que a matemática, como uma linguagem formal, se reduz à dimensão escrita, mas a língua materna lhe fornece o suporte de significações representados pela fala.

7.1.6 Quando o "a" é curtinho

Nessa situação o professor questionou os alunos a respeito das características da elipse presentes na sua ER.

> P: Foi o contrário, nós temos a equação pronta [RA] e aí vamos determinar os elementos e fazer o gráfico [RG]. Está melhor. Vamos lá para passar esses dados para lá: x mais três, y menos três, quatro, dezesseis. Foi isso? Foi [falando consigo mesmo]. Vamos lá com calma. Olhando para a equação, vocês me dizem que a elipse está na horizontal ou na vertical? $\left[\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{16}\right]$.

> A2[a]: Eu creio que na vertical.
>
> P: Por quê?
>
> A2[a]: Porque estou achando o a tão curtinho.
>
> P: Exatamente, você vai olhar para o maior valor. Olhou para o maior valor. O maior valor está no denominador da parcela que tem o x ou que tem y? Nesse caso no y. Portanto, a gente já sabe que ela tem esse formato [vertical]. Ok? Se tem esse formato pessoal, a ao quadrado vale dezesseis, portanto, quanto vale o a?
>
> A2[a]: Quatro.
>
> P: b ao quadrado vale quatro, portanto o b vale?
>
> A2[a]: Dois.
>
> P: Eu tenho o a e tenho o b, então posso encontrar c. Dezesseis igual a quatro mais c ao quadrado, ou seja: c ao quadrado... ou seja c é a raiz de doze. E se eu não quiser simplificar? Dá para simplificar, lembrando que o doze é quatro vezes três. O quatro tem raiz quadrada inteira. Então dois raiz de três. Tenho a, tenho b e tenho c, mas da equação ainda consigo tirar outra coisa: eu consigo tirar quem é o centro. Quem é o centro, pessoal? Quais são as coordenadas do centro?
>
> A22[a]: Três e menos três.
>
> P: Lembrem sempre de trocar o sinal. Olha a equação: x menos x zero, y menos y zero. Então se eu tenho aqui x mais três, significa que o menos x zero vale três, portanto, x zero vale menos três. Lembrem sempre de trocar o sinal. Isso vai ficar valendo sempre. A gente já fez isso em circunferência, estamos fazendo isso em elipse. Vamos fazer em hipérbole e vamos fazer em parábola, tudo igual. (E20, EL, CF–S6).

Quando A2 visualizou, na RA da elipse, a existência do que ela chamou de um valor "curtinho" do a, demonstrou compreender que podemos identificar que o eixo maior da elipse seria paralelo ao eixo Oy. Assim, ela estava conseguindo extrair informações importantes desse RRS, enxergando a posição vertical da cônica, conforme eles discutiram na aula. A2 demonstrou ter segurança na mobilização da RA, identificando variáveis importantes da elipse, sendo capaz de argumentar com suas palavras a forma particular com que compreendeu.

Observamos também que A22 ainda não assimilou integralmente a forma de representar a ER da elipse, confundindo o que é sinal da coordenada do centro e o que é sinal da RA da ER, porém interagiu no diálogo, dando continuidade às relações discursivas nessa aula.

7.1.7 Dois sentidos para a hipérbole

Na seguinte situação nos deparamos com um caso de ambiguidade em relação ao termo "horizontal" utilizado para descrever a posição da hipérbole.

> P: Então vamos fazer um exemplo de determinação da equação reduzida da hipérbole e todos os seus elementos. E a construção de seu gráfico, com todos os seus elementos. Então o exemplo que nós

> vamos fazer é esse: determinar a equação da hipérbole de focos menos cinco, zero e cinco, zero. E vértices menos três, zero e três, zero. Determinar os elementos da hipérbole e esboce o gráfico. Menos cinco, cinco, menos três, três. Vamos usar no primeiro exemplo. Hipérbole. Foco um: menos cinco, zero. Foco dois: cinco, zero. Vértice A_1: menos três, zero. Vértice A_2: três, zero. Então vamos fazendo aqui todos os passos e retirando todos os elementos que a gente tem. Vou começar já aqui com o nosso gráfico. Um, dois, três, quatro, cinco: aqui está o meu foco um. Um, dois, três, quatro, cinco: aqui está o meu foco dois. Vértice um no menos três. Vértice dois no três. Percebam, da forma que a gente montou vocês acham que a nossa hipérbole vai ficar, vou chamar dessa forma também, na horizontal ou na vertical?
>
> A25[a]: Acho que na vertical.
>
> P: Vamos voltar aqui para os nossos slides. Olha a situação aqui: foco, vértice, vértice, foco [voltou para o esboço]. Foco, vértice, vértice foco. Então, a nossa hipérbole vai ficar nessa posição, tá? Com o eixo real na horizontal, ou seja, ela vai ficar assim. Só não vou fazer agora.
>
> A25[a]: Ah tá, professor. Eu estava pensando que era o "desenhozinho" da hipérbole que ia ficar na vertical.
>
> P: Entendi, foi falha na minha comunicação: eixo real na horizontal. Eixo real na vertical, beleza? Então a gente vai ter eixo real na horizontal. Vejam que dessa construção, obviamente, a gente já tira aqui o centro. Estamos trabalhando, claro, com centro em zero, zero. Bem. Quais são as letras que a gente está trabalhando, que a gente já pode determinar só olhando para essas informações. Lembra que, para uma hipérbole, eu preciso descobrir quem é a, quem é b e quem é c. Será que a gente consegue tirar uma informação a partir daqui? Vamos voltar para lá para vocês ficarem paquerando. Olha para cá e me tirem as informações que estão lá.
>
> A2[a]: a no caso vai ser três, não é?
>
> P: E o que mais?
>
> A2[a]: c cinco.
>
> P: c cinco. Então temos a igual a três, c igual a cinco, ok? (E22, HI, CF–S7).

Após o professor marcar os pontos, A25 não identificou que pela posição dos vértices e dos focos a hipérbole estaria na "horizontal", conforme o questionamento do professor, que voltou ao material dos slides para mostrar que a posição não era a que ela estava afirmando. Sempre que acontecia em aula algum momento em que os alunos não conseguiam lembrar de algum conteúdo anterior o professor voltava a apresentar os slides que se referiam ao conteúdo em questão.

Porém A25 deixou claro que enquanto o professor estava se referindo ao eixo real da hipérbole — na posição horizontal — ela estava se referindo à posição do desenho dessa cônica, que para ela era o que estava sendo perguntado. Ambos estavam falando sobre a posição mas se referindo a objetos diferentes. No diálogo os interlocutores mudaram de posição, explicando melhor sobre o que se referiam. Dessa maneira, uma CAP do significado quer dizer que os sujeitos interlocutores estão em uma posição limite no diálogo, independente de concordar ou não com o que o outro está dizendo. Segundo Bakhtin (1997a), o ouvinte que compreende a significação de um discurso apresenta uma atitude responsiva ativa, seja concordando ou não, através de uma réplica, quando os papeis dos interlocutores se alternam e o ouvinte se torna o locutor. Dessa forma, o diálogo é caracterizado pela alternância dos sujeitos falantes, através da transferência da palavra ao outro.

7.1.8 Encontrando o ponto médio

Nessa situação o professor iniciou a resolução de um exemplo que fornecia a RG de uma hipérbole e foi fazendo com os alunos a identificação das variáveis visuais do gráfico. Dessa forma, ele questionou sobre as coordenadas do centro dessa hipérbole, cujos focos estavam localizados nos pontos $(-2, 6)$ e $(-18, 6)$.

> P: [...] Para determinar a equação, eu preciso de x zero e y zero, mas esse é o centro. Depois eu preciso de a e preciso do b. Voltemos para a imagem [...] Olhando para essa imagem, vocês têm como me dizer qual é o centro?
>
> [silêncio prolongado]
>
> P: Entendi! <u>O silêncio também responde muita coisa</u>. Vou fazer o seguinte: vou voltar na imagem...
>
> A2[a]: Professor, seria treze e cinco?
>
> P: Quanto?
>
> A2[a]: Seria treze e cinco?
>
> P: Treze e cinco. Vou gravar para ver se é isso tá bom? Olha quando estudamos hipérbole, o centro, leia aqui para mim, por favor, pessoal, o que é o centro.
>
> A25[a]: O ponto médio de F_1 e F_2.
>
> P: Ponto médio de F_1 e F_2. Muito bem. Voltemos lá para frente. Quem é o ponto médio de F_1 e F_2? Aí vê se bate com aquele valor que você tinha me dito agora há pouco. Quem é o x do F_1?
>
> A2[a]: Eu acho que aqui é ( ) e seis.
>
> P: O seis eu entendi. O primeiro número foi que eu não entendi.
>
> A2[a]: Quinze. Quinze e seis.
>
> P: Quinze. Positivo? É isso mesmo?
>
> A25[a]: Não é dez não?
>
> P: Olha para o sistema cartesiano aqui. À esquerda da origem os valores são todos negativos, então x tem que ser um x negativo aqui.
>
> A25[a]: Não professor. Menos dez.
>
> P: Melhorou né? Menos dez e seis. Beleza para vocês, por que o sinal negativo?
>
> A25[a]: Sim.
>
> P: Só por curiosidade. Como foi que você chegou no valor menos dez?
>
> A25[a]: Menos dezoito, menos dois.
>
> P: Isso.

> A25[a]: Aí dá menos vinte. Aí não é o ponto médio? Aí divide por dois. (E24, HI, CF–S8, grifo nosso).

Observamos que A2 ainda apresentava algumas dúvidas sobre o conteúdo anterior ao de cônicas, pois inicialmente informou coordenadas que não faziam sentido, mas depois já foi se aproximando um pouco mais do que seriam as coordenadas do centro em sua ordenada. A aluna confundiu o sinal dos números no eixo Ox, também não identificando corretamente a abscissa do centro dessa hipérbole. Dessa forma, o professor pediu para alguém reler a definição do centro da hipérbole, para que esse enunciado pudesse ser compreendido por todos.

Então A25 continuou o diálogo, não apenas identificando corretamente as coordenadas do centro, mas ao ser questionada pelo professor, explicou o procedimento que precisaria ser feito para determinação do ponto médio entre os focos dessa cônica.

Quanto a nosso grifo na fala do professor, consideramos de grande importância para essa pesquisa, especialmente em um contexto de interações discursivas nas aulas remotas em tempo de pandemia. Conforme o professor tão bem expressou, "o silêncio também responde muita coisa" e esse silêncio, ou melhor, esses silêncios, que muito têm a nos dizer serão analisados na próxima seção.

7.2 Vozes dos Silêncios

O silêncio também responde muita coisa.[6]

Conforme já abordamos neste estudo, Bakhtin (1997a) considera que a compreensão do discurso do interlocutor acontece mediante atitudes responsivas, podendo ser de concordância ou não. Essa forma de interagir com o sujeito, alternando-se as posições de falante e ouvinte em suas formas de argumentar representariam o que o autor chama de compreensão ativa plena. Para esse autor, quando o enunciado do interlocutor se encerra por si mesmo, sem a manifestação do ouvinte, em atitude "que não comporta nem o esboço de uma resposta, como seria exigido por qualquer espécie autêntica de compreensão" (BAKHTIN, 2006, p. 72) configura-se a compreensão passiva.

Quando falamos nos silêncios oriundos de uma sala de aula, especificamente nas aulas de matemática, sua origem nos revela muito mais variáveis do que apenas a falta de apreensão conceitual de um objeto, ou algum problema de decodificação dos signos linguísticos expressos pelo interlocutor, com a finalidade de explicar determinado conteúdo. Os silêncios falam, muitas vezes, mais do que uma réplica.

Com a observação dos dados da pesquisa, refletimos sobre algumas das possíveis causas que levariam os alunos a silenciar nas aulas online:

[6] Discurso do Professor pesquisado (E24, HI, CF–S8).

- Falta de atenção pontual, ou seja, o aluno se desconcentrou por algum motivo no momento em que o professor fez determinada pergunta;
- Falta de foco (o aluno não estava prestando atenção no contexto geral da aula, levando-se por distrações, uma vez que não estava sendo observado pelo professor pois sua câmera está desligada. Esse fato em uma aula presencial seria facilmente percebido pelo professor, como na situação de um aluno de cabeça baixa dormindo, por exemplo);
- Tempo que o aluno leva para fazer o cálculo solicitado, seja cálculo mental, seja na calculadora;
- Tempo que o aluno demora para acessar o conhecimento prévio, que pode não estar tão acessível no momento da pergunta, mas que vai ser lembrado com o transcorrer do diálogo;
- O aluno se esconde do professor atrás da câmera. Esse fato pode ser devido à timidez, ou algum tipo de desconforto para interagir no meio digital. Na aula presencial seria aquele aluno que desvia o olhar do professor para não ser chamado por ele para responder determinado questionamento. Na aula remota síncrona, o desvio do olhar equivale a não ligar a câmera nem o microfone. Assim, mesmo que o professor chame o nome de algum aluno, sempre pode haver a justificativa que no momento ele havia dado uma saída da frente da tela;
- Dúvida ou incerteza quanto ao conteúdo atual. O aluno não dispõe de argumentos para responder por não estar compreendendo o assunto;
- Dúvida quanto ao conteúdo pretérito que não foi aprendido de forma satisfatória ou em que apenas houve a memorização, perdendo-se com o tempo.

Ressaltamos que o silêncio pode estar associado a outro fator, que não algum desses, ou, ainda, ser uma junção dessas razões e não exclusividade de uma delas, pois, conforme Fanizzi (2008, p. 75)

> O silêncio pode ter sido construído ao longo dos anos de escolaridade e não reflete necessariamente a reação a uma única situação, que envolve as habilidades matemáticas e as crenças do aluno. Muitas vezes, para o aluno, silenciar é uma atitude inerente ao processo de aprendizagem.

Algumas dessas causas são mais difíceis de se concluir, dependendo do contexto, pois, com a câmera desligada, não há como saber se o aluno estava prestando atenção na aula ou não. Inclusive em época de aulas remotas, a experiência fez com que os professores percebessem que além dessas causas, outra acontecia com frequência em muitos ambientes:

aquele aluno que entra no ambiente virtual apenas para marcar presença, mas que nem sequer permanece no mesmo ambiente físico que sua tela.

Vamos então apresentar algumas situações observadas nas aulas da turma pesquisada.

7.2.1 Completamento de quadrados

Nessa primeira situação o professor estava retomando o tratamento de completamento de quadrados para sair da EG da circunferência e chegar no formato da sua ER.

> P: Bem, a segunda parte que nós fizemos na aula passada, o finalzinho da aula passada, era determinar o termo que completa os quadrados em cada caso. Alguém recorda aí para mim como foi que nós fizemos isso! Vamos primeiro para essa parte aqui, olha. Como foi que nós fizemos isso, pessoal?
>
> [silêncio]
>
> A25[a]: Tem aqui que ficou com... esse 5 ficava em cima, sobre 2... é... igual ao valor... peraí deixa eu ver...
>
> P: Então nós pegamos o termo central aqui e eu tenho que estar apenas com x e dividimos por dois. Nos outros exemplos que fizemos, era seis por dois [6 dividido por 2], por exemplo, né? Oito por dois, onde a divisão é inteira, ou seja... três, quatro, pegamos o resultado e elevamos ao quadrado. Bem, como aqui a divisão não é inteira, é racional, né? Nós vamos simplesmente elevar ao quadrado. Quanto dá cinco meios ao quadrado, pessoal?
>
> [silêncio]
>
> A25[a]: Dá dez sobre quatro... não...
>
> P: Quanto?
>
> A2[a]: Vinte e cinco sobre quatro!
>
> P: Vinte e cinco sobre quatro, beleza! Ou seja, nesse primeiro par de termos quem nós vamos acrescentar para completar o quadrado é o cinco x, desculpa... o vinte e cinco sobre quatro. Então vamos ficar com x ao quadrado menos cinco x mais vinte e cinco sobre quatro. Vamos fazer o processo análogo para os termos que estão com y, ou seja, essa parte aqui [apontou o cursor na tela]. Quem é que a gente vai pegar para elevar ao quadrado?
>
> A25[a]: Nove!
>
> P: Tá, vamos fazer nove sobre dois... elevando isto ao quadrado dá quanto?
>
> [silêncio]
>
> P: Quanto, pessoal?
>
> A2[a]: Oitenta e um sobre quatro.
>
> P: Oitenta e um sobre quatro, ou seja, o termo que nós vamos utilizar para completar o quadrado aqui é este. (E18, CI, VS–S1).

Na situação observamos que os silêncios podem estar demonstrando insegurança para responder os questionamentos do professor, uma vez que o procedimento não mais resultava em números inteiros, mas em números racionais. Esse fato é observado nas pausas feitas por A25 ao tentar chegar à resposta. Quando A2 a ajudou e completou a resposta, mostrando que houve o entendimento.

7.2.2 Vantagens da equação reduzida

Nessa segunda situação o professor relembrou aos alunos os dados que podem ser extraídos da ER de uma cônica.

> P: [...] Então vejam, saímos aqui da forma geral para forma reduzida, então vamos lembrar o que eu conversei com vocês na aula passada: qual a vantagem de escrevermos a equação na forma reduzida? É que a forma reduzida nos dá quais são as coordenadas do centro e qual é a medida do raio, então, nesse caso, pessoal, quais são as coordenadas do centro? Centro C?
>
> [silêncio]
>
> P: Diz aí ou deu um apagão aí na mente de vocês?
>
> [silêncio]
>
> P: A equação geral é x menos x zero [x_0] ao quadrado, y menos y zero [y_0] ao quadrado igual a r ao quadrado, onde esse x_0 é a abscissa e esse y_0 a ordenada do centro, neste caso quem está fazendo papel de x_0?
>
> A2[a]: Menos cinco meios e menos nove meios?
>
> P: Lembra de trocar o sinal, olha! Menos x_0 igual a menos cinco meios, portanto x_0 igual a cinco meios, beleza? Lembra de trocar o sinal! Cinco meios, nove meios, e quem é o raio, pessoal, dessa circunferência?
>
> A2[a]: Cinco. (E18, CI, VS–S2).

Os silêncios dessa situação parecem demonstrar que os alunos não assimilaram a forma da equação reduzida da circunferência, não tendo meios para responder, por não terem compreendido seus elementos. Quando o professor relembrou o formato, dizendo aos alunos cada elemento que compõe a equação, A2 tomou a iniciativa de responder, ainda fazendo confusão entre o que é elemento da própria equação e o que é elemento da cônica.

Observamos que o professor procurou repetir os conceitos, as explicações e as regras, dando oportunidade ao aluno de ouvir essas informações mais de uma vez, para que aquilo pudesse fazê-lo se lembrar do caminho que estava tomando, compreender o que ainda não havia sido compreendido, ou ouvir novamente o signo linguístico, que pode assumir outra perspectiva para sua compreensão.

7.2.3 Jogo de bola de gude

Na explicação sobre posições relativas entre ponto e circunferência, o professor, além da linguagem matemática, utilizou a linguagem do cotidiano, levando ao escopo da aula um exemplo que possibilitava aos alunos visualizarem a situação pretendida, como forma de facilitar a construção de uma representação mental dessa situação.

> P: Considere aqui um plano alfa, e nesse plano que você considere uma circunferência. Se você tivesse que marcar aqui um ponto nesse plano, quais seriam as possibilidades que a gente teria para marcar um ponto nesse plano? Quais seriam as possíveis posições que ele ocuparia?
>
> [silêncio]
>
> P: Imagine se vocês estão com esse ponto... seja uma... eita eu vou lembrar agora do tempo que eu jogava bola de gude... é o novo! A gente brincava muito de triângulo em bola de gude, não sei se ainda brincam... "bila", como o pessoal chama, ou bola de gude. Tem uma brincadeira chamada "triângulo", onde a gente jogava nossa bola aqui [ele fez o desenho na lousa, com setas indicativas] o objetivo era acertar as bolas aqui para elas saírem e a gente poder levar essa bola para casa. Bem, se eu lanço essa bolinha aqui, na direção desse triângulo, quais as possíveis posições que essa bolinha poderia parar? Pense em analogia, imagine que o ponto que eu quero, um ponto P, eu vou jogar esse ponto P nesse plano, em quais possíveis posições ele poderia parar aqui nesse plano?
>
> [silêncio]
>
> P: Gente, vocês estão aí?
>
> A25[a]: Tamos sim.
>
> P: Gente, por um momento eu pensei que estava só eu aqui. Pessoal, o ponto P só tem três posições possíveis: ou ele está fora da circunferência, é um ponto externo à circunferência... vou aqui chamar de P_1; ou ele "mora" na circunferência [ele chamou de P_2]; ou ele é um ponto interno à circunferência [chamou de P_3]... só essas três possibilidades. Se um ponto está no plano, ou ele é externo, ou pertence à circunferência, ou é interno à circunferência. (E18, CI, VS–S3).

Observamos que, quando nos referimos a aulas remotas, os professores parecem ficar muito tempo sozinhos em suas explicações, como em um monólogo.

Muito tempo sem interação, sem sequer uma interrupção. Sem as interrogações aparecendo no semblante dos alunos, já que estes não aparecem em câmeras desligadas e os ícones que aparecem na tela para representá-los, ou são suas iniciais, signos genéricos de algum objeto/série de sua preferência ou suas fotografias, estampando rostos bonitos e sorridentes, onde não cabem dúvidas ou interrogações nos semblantes.

Silêncios não dizem nada, ou, ao contrário, que muito revelam, o que, algumas vezes, pode ser bem preocupante.

Nessa situação por duas vezes houve silêncio que não remetia à incompreensão do enunciado, mas ao tempo destinado aos alunos pensarem na resposta e decidirem se iriam ou não socializá-la com a turma, e ainda decidirem se iriam ligar o microfone para falar, ou digitar no chat. Assim, mesmo a aluna A25 afirmando que eles estão ali sim, ninguém respondia, ninguém participava, atribuindo ao professor uma aula quase em forma de monólogo e a sensação constante de uma sala vazia.

7.2.4 A órbita dos planetas

Nessa aula sobre elipse, o professor falava sobre a excentricidade e as características dessa cônica segundo a mudança desse valor e passou a falar sobre a sua relação com a órbita dos planetas.

> P: O que é que aconteceu com a elipse quando estava ficando próxima de um a excentricidade? E o que é que está acontecendo com a elipse quando essa excentricidade está ficando próxima de zero? Estou indo para perto de um, olha, o que é que está acontecendo com a elipse? [O professor manipulou a elipse, modificando sua excentricidade em uma construção no Geogebra]
>
> [A22 tentou falar alguma coisa, mas não foi compreensível na gravação]
>
> P: Vou deixá-la bem aqui, bem mais perto de zero. Essa elipse está parecendo o que agora?
>
> A2, A22[a]: Uma circunferência.
>
> P: Uma circunferência!
>
> [P abriu um novo arquivo, com outra construção no Geogebra, usando controles deslizantes para variar os valores do a e do b]
>
> P: Essa aqui dá para a gente ilustrar bem. Vejam que quanto mais próximo de zero mais arredondada, mais próxima do círculo está ficando a nossa elipse. Quanto mais próximo de um, estão vendo lá? 89, 90, 91, 92... quanto mais achatada, mais próxima de um. Então essa nossa excentricidade ela nos diz sobre o achatamento da nossa elipse. Quanto mais próximo de um, mais achatada. Quanto mais próximo de zero, mais arredondada. Lembra aqui das aulas de Física um pouco. E sobre a órbita dos planetas. Com certeza vocês já ouviram falar sobre como é a órbita dos planetas e como é o percurso dela. Tem um percurso aproximadamente o quê?
>
> [silêncio]
>
> P: Ih faltaram outra aula foi?
>
> [silêncio]
>
> P: Pessoal, estão aí? Vem cá, deixa eu ver se eu não caí aqui... a internet [P foi olhar “para os rostos dos alunos”]
>
> A27[a]: Não, a gente tá aqui sim.
>
> P: Ah, estão aí? Pensei que não estavam, mais.
>
> A27[a]: Eu só não entendi a pergunta.
>
> P: Vamos por aqui [P abriu a janela do *OneNote* e começou a desenhar]. Sol, Terra. A Terra gira em torno do Sol. Não vai ficar bonito [P se referiu ao desenho que estava fazendo], mas vale. Qual é a linha pela qual a gente faz esse percurso?
>
> [silêncio prolongado]
>
> P: Nada? Ou nesses novos tempos o Sol voltou a girar em torno da Terra, como era na Idade Média?
>
> A27[a]: Acho que não voltou não, professor!
>
> P: Não né? A Terra continua girando em torno do Sol. Pessoal, a gente tem aqui uma trajetória elíptica.
>
> A27[a]: Eu ia falar isso, mas eu pensei que ia ser idiota.

> P: Não, é isso mesmo! Não fique com medo de falar não. Aqui não vai ter nada errado, certo? Só que essa trajetória elíptica, quando depois vocês derem uma olhadinha lá para relembrar, vocês vão ver que ela é quase circular. Porque a sua excentricidade está próxima de zero. (E19, EL, VS–S4).

Esse silêncio nos parece se referir à falta de compreensão do enunciado do interlocutor pelos alunos, explicitado na fala de A27, quando informou não ter entendido a pergunta. Os alunos vinham participando da aula e no entanto deixaram de responder. Aparentemente não identificaram o que o assunto que estava sendo falado (excentricidade) tinha a ver com o questionamento feito em seguida, causando momentos de silêncio. Quando o professor forneceu a resposta que pretendia, A27 (e talvez outros alunos também) percebeu que estava pensando corretamente, porém ficou com receio, mesmo o professor deixando a turma bem à vontade para responder, de "ser idiota", como ela mesma falou. Não compreendendo a pergunta do professor, o receio de estar indo distante do que foi perguntado fez com que a aluna preferisse silenciar para não cometer um erro diante de todos.

7.2.5 Posições relativas

Na presente situação o professor precisava que os alunos lembrassem dos conceitos trabalhados na aula de posições relativas entre reta e circunferência.

> P: Lembrando: esse cálculo foi o cálculo da distância do centro até a reta. Vamos lá. Essa é a distância do centro até a reta [2,01]. Essa é a medida do raio [1,118]. Qual a relação que existe que a gente pode estabelecer entre o raio e a distância do centro até a reta?
>
> [silêncio]
>
> P: Hein pessoal?
>
> A22[a]: Que a reta é externa?
>
> P: Vamos chegar aí! Logo, a distância do centro até a reta foi maior que o raio. Portanto, a reta é externa à circunferência (E21, CO, VS–S5).

Nessa situação, podemos acreditar que o silêncio traduz o tempo que o aluno demora para acessar o conhecimento prévio, que pode não estar tão acessível no momento da pergunta, mas que vai ser lembrado com o transcorrer do diálogo, já que havia pouco tempo que o conteúdo de posições relativas entre reta e circunferência tinha sido trabalhado por eles e não era necessário um raciocínio muito complexo para chegar à conclusão da resposta.

7.2.6 Respondendo mentalmente

Nessa situação, o professor estava se despedindo da turma ao encerrar a aula e aproveitou para chamar a atenção dos alunos que, apesar de estarem online, não participam em nenhum momento da aula.

> P: Só alegria! Olha o livrozinho ali. Então acredito que por hoje... olha, não escutei a voz de um bocado de gente aqui: A27, A21, A23, A4, A8... opa, A8 eu ouvi, A14 eu vi o texto dela no chat.
>
> A27[a]: Professor eu estou aqui. É só porque eu sou tímida [a aluna não ligou a câmera ou o microfone durante a aula].
>
> P: Oh rapaz. Mas tem alguma dúvida?
>
> A4[a]: É não professor, é porque o senhor e A25 conversam tão bem que a gente não quis atrapalhar, entendeu?
>
> A25[a]: Que conversa, oxe!
>
> P: Tá certo, dona A4, mas não tem problema não. Atrapalhe quantas vezes sentir vontade, tá bom?
>
> A27[a]: Inclusive, professor, eu respondia algumas vezes em silêncio. O senhor perguntava e eu respondia sem ligar o microfone. É assim que funciona por aqui responder.
>
> A25[a]: Respondia mentalmente [risos].
>
> P: [risos] Mas compartilhe essas suas respostas conosco, tá certo, A27?
>
> A27[a]: Tá certo.
>
> P: Vem aqui participar conosco para se divertir um pouquinho (E21, CO, VS–S6).

O professor sempre deixou os alunos bem à vontade para participação nas aulas, mas A27 ao ter seu nome mencionado quis manifestar sua presença e o fato de não falar por ser "tímida", mas que respondia mentalmente aos questionamentos, enquanto A4 afirmou que não participava da aula para não atrapalhar as interações entre o professor e A25.

Podemos associar a atitude de A27 diante dessa situação às palavras de Fanizzi (2008, p. 74), quando afirma que

> O ato de expressar-se oralmente é um ato de coragem, uma vez que revela pensamentos, desejos e juízos de valor e, nesse sentido, o silêncio pode ser caracterizado pela falta de confiança em si próprio frente ao conhecimento matemático, provocada por aquilo que ainda não se sabe, pela crença de que a Matemática é acessível apenas a alguns, pela representação de professor de Matemática como uma pessoa austera, rígida etc.

Enquanto a atitude de A4 pode demonstrar que seus momentos de silêncio não representavam dúvida, insegurança ou timidez, mas tão somente a falta de desejo de se manifestar oralmente, optando por não falar e apenas ouvir os diálogos dos outros.

Podemos ainda fazer uma ligação do comportamento de A4 ao que nos diz Fanizzi (2008, p. 75)

> O aluno opta por não falar não por insegurança e sim por opção, contrariando, em geral, o desejo do adulto de que se manifeste oralmente. Ampliando as concepções sobre silêncio, a perspectiva discursiva crê que um episódio de silêncio não pode ser julgado pontualmente, devendo-se levar em consideração a história escolar do aluno.

Lembramos também o que observamos na Situação (E17, CI, CF–S3), em que a aluna A14 preferiu não se manifestar oralmente, respondendo ao questionamento do professor no chat, dando a impressão de um falso silêncio para quem não havia visto a sua resposta escrita no chat.

7.2.7 Identificando elementos da parábola

Observemos a seguinte situação.

> P: [...] Aproveitar o embalo para determinar logo quem é p sobre dois. Quem é p sobre de dois, pessoal?
>
> [silêncio]
>
> P: Um sobre dois dividido por dois. Repete a primeira multiplica pelo inverso da segunda: um sobre quatro. O que é que isso significa? Vamos lá? Vou fazer aqui primeiro só um esboço. Depois vamos no Geogebra tá? Concavidade voltada para cima. Foco. Diretriz. Que distância é essa que eu coloquei a chave?
>
> [silêncio]
>
> P: Pessoal, essa distância é sempre o p sobre dois, tá? Então um sobre quatro. Ou se você quiser...
>
> A25[a]:Um sobre dois.
>
> P: Sobre quatro, tá? É sempre o p sobre dois, tudo bem? E essa distância também é um sobre quatro. Dito isso, quem vai ser o foco?
>
> [silêncio prolongado]
>
> P: Meninas?
>
> A25[a]: Zero e um sobre quatro?.
>
> P: Exatamente. E quem vai ser a minha diretriz?
>
> [silêncio]
>
> P: Se ela está na horizontal é x igual ou y igual?
>
> [silêncio]
>
> P: y, meu povo! Igual a quanto? Que distância é essa?
>
> A25[a]: Um sobre quatro?.
>
> P: Um sobre quatro, mas ele é positivo ou negativo? Aqui está o eixo x.
>
> A25[a]: Negativo.
>
> P: Negativo. Então veja que a ideia é muito parecida com o que a gente já fazia com a elipse, muito parecida com o que a gente já fazia em hipérbole. É reconhecer onde estão os elementos e, a partir daí, ir tirando os valores que a gente quer (E24, PA, VS–S7).

Nessa situação, os silêncios parecem representar o tempo que os alunos levam para determinar os resultados e falar essas respostas.

A nosso ver, o silêncio, por mais curto que seja em uma aula remota, parece ter seu tempo ampliado pelo fato de professor e alunos não estarem em um mesmo ambiente, em que se poderia notar um aluno tentando fazer o cálculo mentalmente, outro com jeito de que não quer responder, ou de o professor observar essas reações enquanto aguardaria pacientemente uma atitude qualquer.

Na aula remota não há vozes ou reações perceptíveis, pois os ícones que representam os alunos são inertes, sorridentes, silenciosos. O tempo de espera se prolonga demais, mesmo que tenham passado somente alguns segundos.

O silêncio também grita aos ouvidos de qualquer professor que esteja aguardando alguma resposta dos alunos em uma aula remota.

7.3 Foco nos Registros de Representação Semiótica

Nesta seção faremos a análise de algumas questões contidas na atividade avaliativa da disciplina de Matemática 3, elaborada pelo professor da turma, cujas respostas consideramos mais pertinentes para atingir nosso objetivo.

A atividade avaliativa para conclusão do 4º bimestre foi postada no *Google Classroom* para os alunos e constava de um formulário[7] com 4 questões[8] aqui representadas por Q1, Q2, Q3 e Q4, referentes ao conteúdo de cônicas. A atividade foi realizada pelos alunos, com o prazo de entrega de uma semana, por meio da postagem das fotografias das respostas de cada questão na plataforma. Devido ao fato dessas fotografias terem sido produzidas pelos próprios alunos, cada um utilizou a ferramenta que dispunha para isso. Por esse motivo, podemos encontrar diferentes tipos de resolução, qualidade, brilho, iluminação, contraste, entre outros aspectos, nas imagens que fazem parte dos dados da nossa pesquisa.

Desse modo, os alunos poderiam realizar a atividade em suas casas no horário que considerassem mais oportuno e com acesso ao material disponibilizado pelo professor na plataforma, em seu site, do próprio livro didático[9], ou mesmo de outros materiais que julgassem necessários.

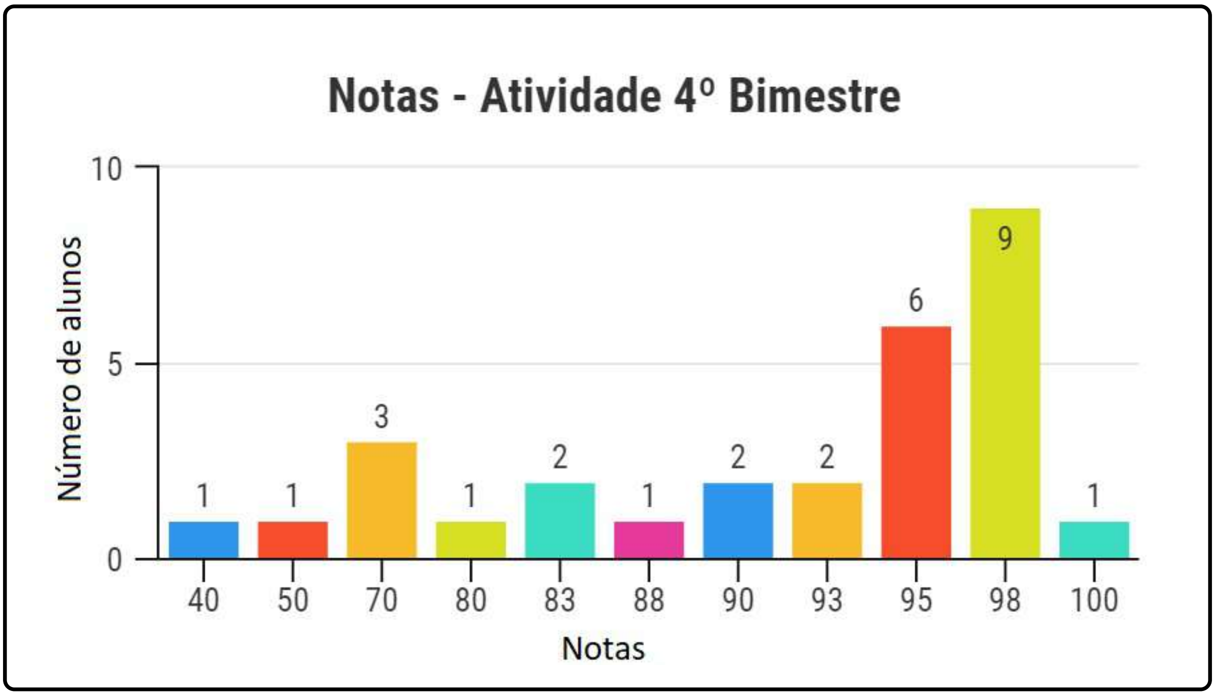
Foram enviadas 29 respostas à atividade. Como se tratava de uma atividade avaliativa para encerramento do bimestre, aos alunos foram atribuídas notas pelo professor, dispostas na Figura 76, conforme os critérios estabelecidos para o componente curricular.

[7] Tornou-se muito comum na pandemia a realização de atividades através de formulários (*Google Forms*), plataforma que possibilita a criação de questões para receber as respostas objetivas, subjetivas, através de arquivos anexados, etc., em que se pode programar um determinado prazo e, a critério do professor, a plataforma não são aceita respostas fora desse prazo, tornando o formulário indisponível para novos recebimentos.

[8] No formulário constavam cinco questões, conforme podemos observar no Anexo A, pois a primeira questão era para ser preenchida com o e-mail do aluno. A sequência das questões da avaliação diverge da sequência que apresentamos, pois para os alunos as questões tiveram início com o enunciado das duas circunferências, na pesquisa representada por Q1, mas que no formulário representa a segunda questão e assim por diante. Optamos por manter a contagem realizada por todos os alunos, ou seja, quatro questões aqui chamadas por Q1, Q2, Q3 e Q4, já que suas respostas estavam todas baseadas nessa numeração.

[9] Iezzi *et al.* (2016).

Figura 76 – Resultado da atividade avaliativa atribuído pelo professor



Fonte: Dados da Pesquisa.

As notas variaram de 40 a 100 pontos, tendo a maior concentração de resultados acima de 90. Quanto a nossa pesquisa, passamos a analisar as questões em relação a nosso aporte teórico, especificamente em relação à TRRS, que adiante apresentamos.

7.3.1 Questão 1: Circunferência

7.3.1.1 Apresentando a questão

Figura 77 – Enunciado da Questão 1

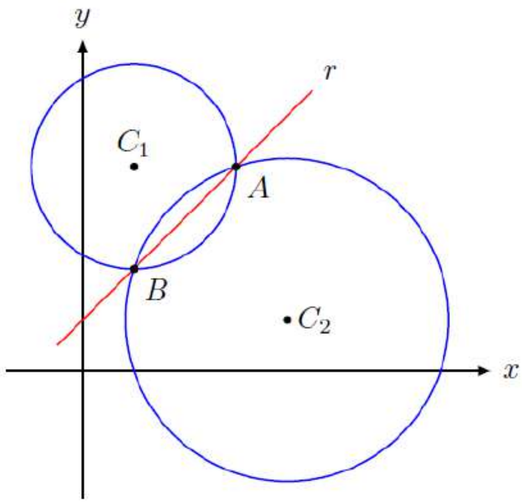
As equações das circunferências da figura são:

$$(I) \; : \; x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$
$$(II) \; : \; x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

a) Ache as coordenadas dos pontos A e B;

b) Determine a equação da reta r;

c) Calcule a área do quadrilátero C_1AC_2B.



Fonte: Dados da pesquisa.

A Questão 1 (Q1) consiste na representação gráfica de duas circunferências secantes, cujos centros estão fora da origem dos eixos coordenados (representados por C_1 e C_2), e cujos pontos de intersecção são representados por A e B, pontos estes que determinam a reta r.

São informadas as equações gerais das duas circunferências — representação algébrica (RA) — e pede-se para (a) que sejam encontradas as coordenadas dos pontos A e B; (b) a equação da reta r e (c) a área do quadrilátero C_1AC_2B.

Optamos por não analisar Q1, uma vez que não são encontrados nessa questão elementos que remetam ao objetivo da nossa pesquisa, já que as operações necessárias a sua realização são: resolução de sistema de equações com duas incógnitas, resolução de equação polinomial do 2º grau, cálculo do coeficiente angular da reta e determinação de sua equação, cálculo de área de quadrilátero.

Apesar de estarem presentes na questão a RG e a RA das duas circunferências, e de ser um caso de posições relativas entre duas circunferências, para a realização da questão apenas são necessários tratamentos dos conteúdos citados, que são anteriores ao de cônicas, não havendo necessidade da conversão entre registros de representação, que pudesse contribuir para o nosso estudo.

7.3.2 Questão 2: Elipse

7.3.2.1 Apresentando a questão

Figura 78 – Enunciado da Questão 2

Determine todos os elementos da elipse $25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0$.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Questão 2 (Q2) apresenta em seu enunciado a RA de uma elipse, por meio de sua equação geral (EG), e pede para que sejam determinados todos os seus elementos.

Apesar de não haver a necessidade expressa da conversão de RRS para a determinação dos elementos das cônicas, conforme foi trabalhado pelo professor, é importante fazer a RG, como forma de facilitar a identificação desses elementos através das variáveis visuais do gráfico, o que fez com que alguns alunos realizassem essa conversão, como meio auxiliar para resolução da questão.

A RA em questão é a equação geral $25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0$, de onde o aluno não conseguiria determinar as coordenadas do centro e os demais elementos. Para resolução da questão era necessário realizar tratamentos algébricos, inerentes ao RRS, para chegar à equação reduzida (ER) da elipse, de onde se tornariam mais visíveis as coordenadas do centro e as medidas dos semieixos.

Os possíveis caminhos para realizar a atividade seriam:

- Realização de tratamento dentro da RA para determinação da ER da elipse, por meio de completamento de quadrados e demais operações algébricas;
- Chegar à ER da elipse na forma:
$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$
- Concluir que o centro da elipse C não está na origem dos eixos coordenados e suas coordenadas são $C(3, 1)$;
- Identificar que o maior denominador está abaixo do termo do y, dessa forma a ER dessa cônica é da forma da Equação 4.3
$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$
- Identificar que o eixo maior da elipse $2a$ é paralelo ao eixo Oy;

- Como $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$, temos que $2a = 10$, portanto a medida do eixo maior equivale a 10 u.c.;
- Identificar que o eixo menor da elipse $2b$ é paralelo ao eixo Ox;
- Como $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$, temos que $2b = 8$, portanto a medida do eixo menor equivale a 8 u.c.;
- Determinar o valor de c utilizando o Teorema de Pitágoras, chegando a $c = 3$, portanto o eixo focal equivale a $2c = 6$ u.c.;
- Determinar algebricamente os demais elementos da elipse ou fazer a conversão da RA para a RG dessa cônica obtendo os demais elementos;
- Representar no gráfico o ponto que representa o centro, com as coordenadas já identificadas;
- Traçar o eixo maior paralelo ao eixo y, com medida 5 para cima e 5 para baixo, a partir do centro;
- Traçar o eixo menor paralelo ao eixo x, com medida 4 para a esquerda e 4 para a direita, a partir do centro;
- Marcar os focos no eixo maior, com medida 3 para cima e 3 para baixo, a partir do centro;
- Traçar a cônica passando pelas extremidades marcadas;
- Determinar que as coordenadas dos vértices são: $A_1(3,-4)$, $A_2(3,6)$, $B_1(-1,1)$ e $B_2(7,1)$;
- Determinar que as coordenadas dos focos são: $F_1(3,-2)$, $F_2(3,4)$;
- Calcular a excentricidade como $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$.

O tratamento algébrico para chegar à ER da elipse é da forma:

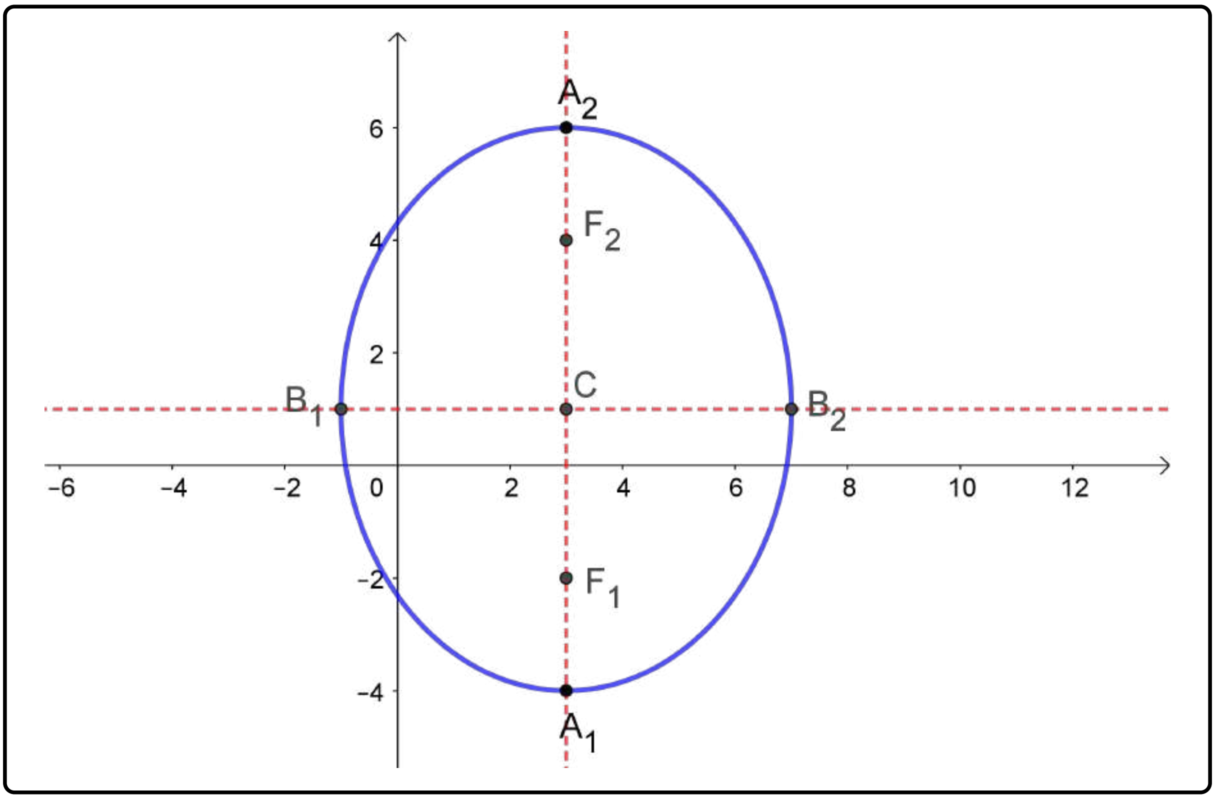
$$
\begin{aligned}
&25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0\\
&25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y = 159\\
&25x^2 - 150x + 16y^2 - 32y = 159\\
&25(x^2 - 6x) + 16(y^2 - 2y) = 159\\
&25(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 2y + 1) = 159 + 225 + 16\\
&25(x-3)^2 + 16(y-1)^2 = 400\\
&\frac{25(x-3)^2}{400} + \frac{16(y-1)^2}{400} = \frac{400}{400}
\end{aligned}
$$

Dessa forma, temos que a RA da elipse na forma da sua ER é dada por:

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1 \tag{7.1}$$

A conversão da RA, representada na Equação 7.1 para a RG dessa elipse é:

Figura 79 – Representação Gráfica da Elipse da Questão 2



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

A partir da RG apresentada na Figura 79, o aluno facilmente poderia identificar suas variáveis visuais e determinar os elementos da elipse, sejam eles, a medida do semieixo focal, as coordenadas dos vértices, dos focos e a excentricidade.

Dessa maneira o sentido de conversão da Q2 é: RA→RG→RA.

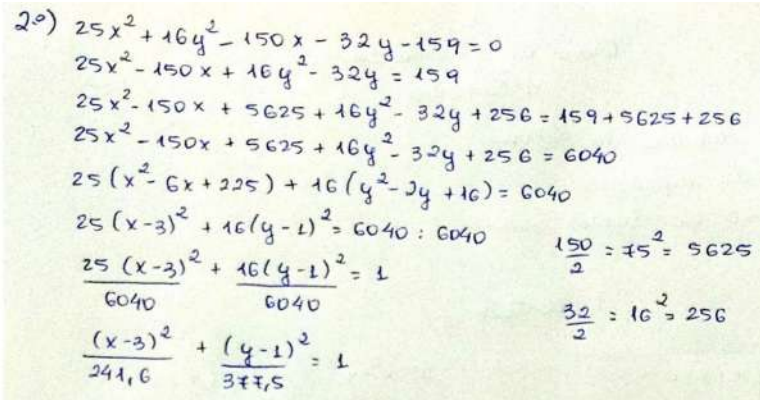
7.3.2.2 Respostas apresentadas

Apresentamos a seguir algumas resoluções que consideramos importantes para atingir o objetivo da nossa pesquisa.

Analisando a resposta da Q2, apresentada pela aluna A2, observamos o seguinte procedimento para determinação da ER da elipse a partir da EG: que A2 se confundiu na hora do completamento dos quadrados. Apesar dela lembrar que precisaria dividir o $150x$ e $32y$ por dois, ela esqueceu o fato que no desenvolvimento do quadrado da diferença

$(u-v)^2$ obtemos $u^2-2uv+v^2$, não bastando dividir $150x$ ou $32y$ por dois[10]. Dessa forma, não bastava ter dividido esses resultados por dois para obter o valor de v e elevá-lo ao quadrado, como ela fez, mas também precisaria dividir o resultado obtido pelo valor de u.

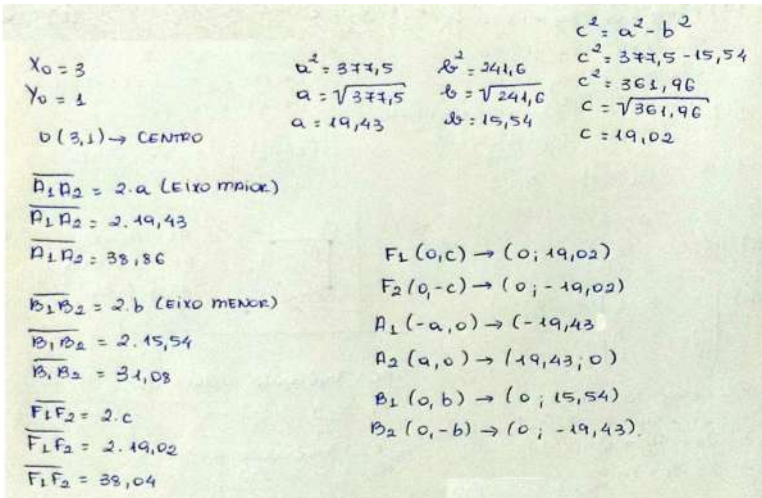
Figura 80 – Resolução da Questão 2 – RA – Aluna A2



Fonte: Dados da Pesquisa.

Assim, errando no tratamento, a aluna não chegou à ER que a questão pedia, apresentando valores para os elementos da elipse, como centro, focos, vértices, etc. diferentes do resultado esperado para essa cônica.

Figura 81 – Resolução da Questão 2 – Elementos – Aluna A2



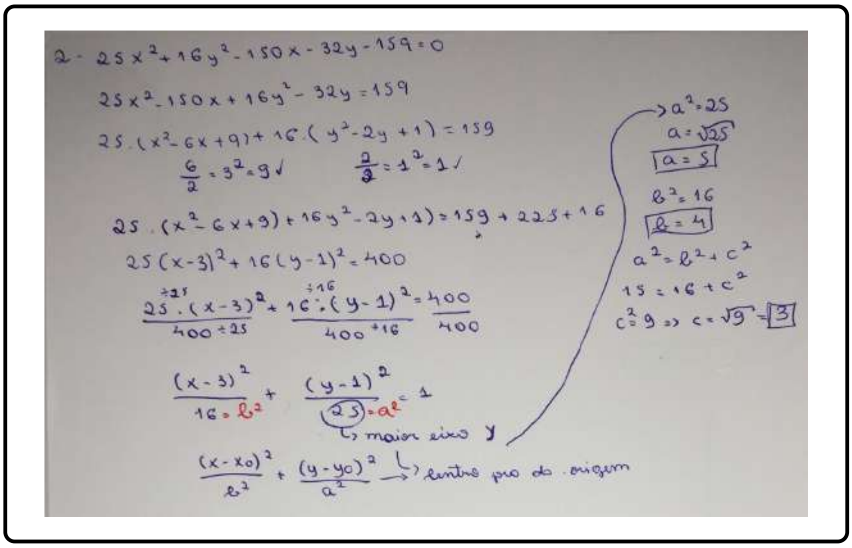
Fonte: Dados da Pesquisa

[10] Aqui não estamos utilizando a representação $(a-b)^2$ para que não haja confusão com o a e o b utilizados para representar os semieixos da elipse. Dessa forma, aqui o quadrado da diferença está representado por $(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$.

Um detalhe que consideramos importante ressaltar é que a aluna não tentou fazer a RG da elipse, mas apenas resolver a questão por meio de tratamento algébrico. Esse fato nos leva a refletir se ela teria percebido que havia divergências entre esses elementos caso tivesse tentado fazer a RG elipse.

Analisando a resposta da Q2 apresentada pela aluna A3, observamos na Figura 82 o seguinte procedimento para determinação da ER da elipse a partir da EG:

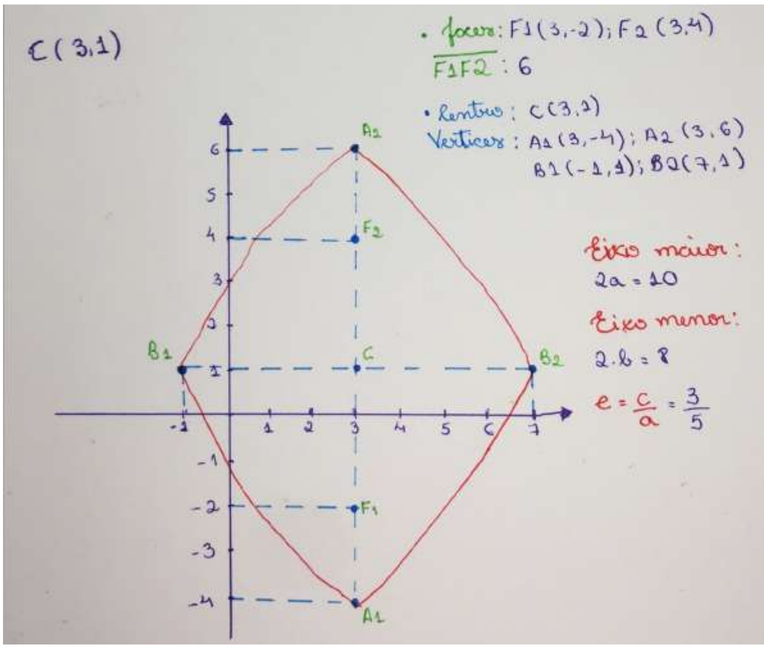
Figura 82 – Resolução da Questão 2 – RA – Aluna A3



Fonte: Dados da Pesquisa.

A aluna utilizou a RG da elipse e, apesar de ter feito um esboço não muito parecido com o formato curvo da cônica, demonstrou ter identificado coerentemente as variáveis visuais da representação dessa elipse, conseguindo extrair seus elementos.

Figura 83 – Resolução da Questão 2 – RA e RG – Aluna A3

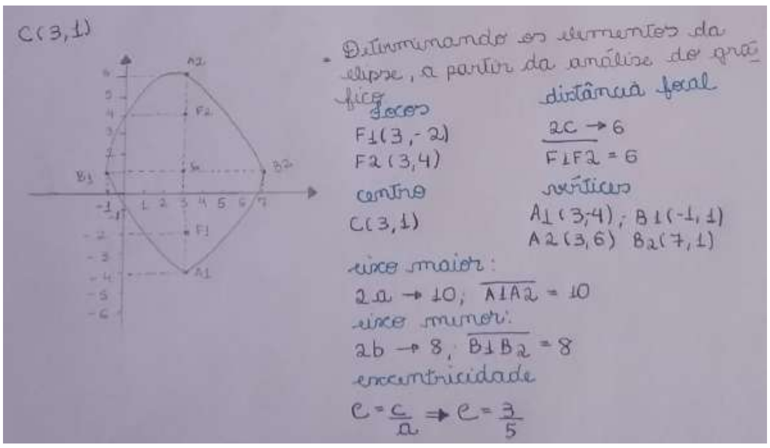


Fonte: Dados da Pesquisa

A aluna identificou corretamente o centro, os focos e os vértices, representando na figura a posição do eixo maior paralelo ao eixo Oy, mostrando que conseguiu compreender seus elementos.

Esse mesmo caso processo foi realizado por A17, cuja RG da elipse foi a seguinte:

Figura 84 – Resolução da Questão 2 – RA e RG – Aluna A17

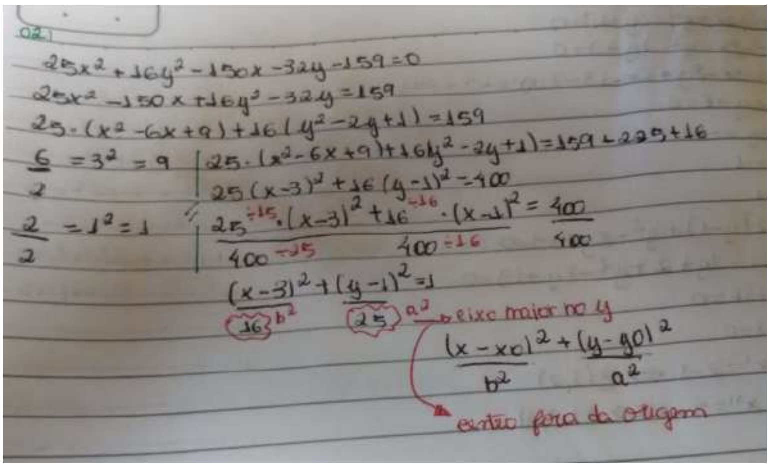


Fonte: Dados da Pesquisa

Da mesma maneira, a aluna conseguiu identificar com sucesso as variáveis visuais do gráfico extraindo seus elementos e retornando à RA.

A aluna A15 apresentou a seguinte solução para a questão:

Figura 85 – Resolução da Questão 2 – RA – Aluna A15

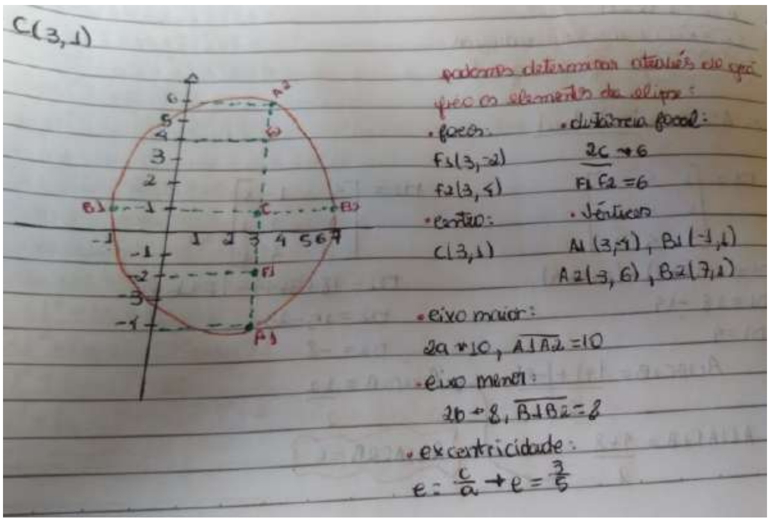


Fonte: Dados da Pesquisa

Observando a primeira parte da questão, temos que A15 realizou o tratamento para chegar até a RA na forma de sua ER de modo correto. Realizou o completamento de quadrados e chegou à equação esperada.

No entanto, dando continuidade à questão, a aluna utilizou a RG da elipse não como forma de auxiliar na resolução da questão, mas como fim. Nos parece que a aluna achava que deveria fazer a RG da cônica e acabou por fazê-la, conforme a Figura a seguir:

Figura 86 – Resolução da Questão 2 – RG – Aluna A15



Fonte: Dados da Pesquisa

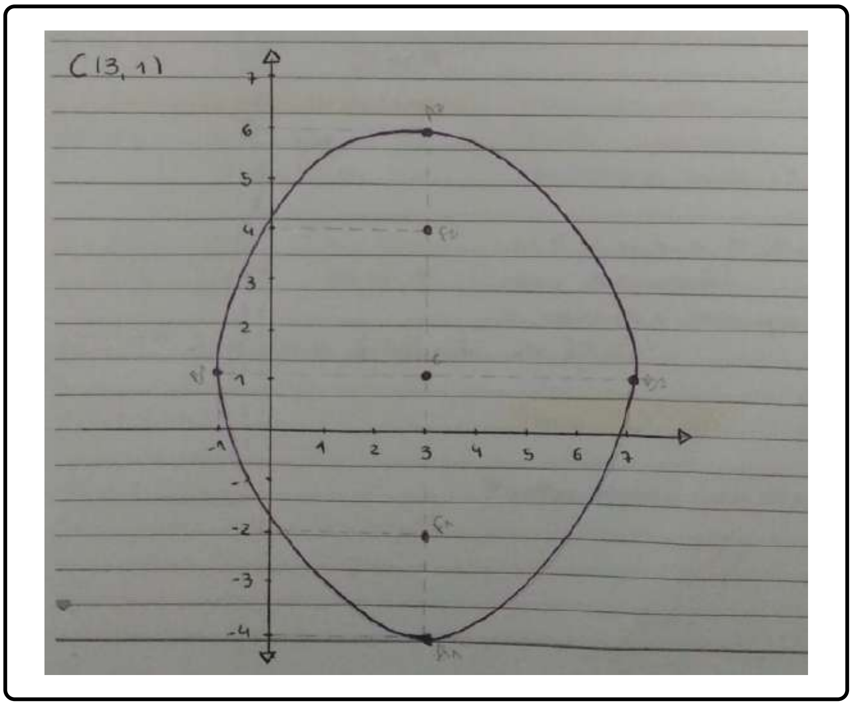
Apesar de observarmos que as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices estão corretas, a RG da cônica em questão não condiz com as características que esta deveria apresentar e a aluna deveria ter observado isso. Quando falamos em "centro", mesmo que não seja no contexto específico da Geometria Analítica, sabemos que esse signo nos remete a algo que esteja em uma posição central, posição relativa ao meio, ou equidistante a alguma extremidade.

Quando observamos o "centro" dessa elipse em uma posição notoriamente divergente para suas extremidades, percebemos que algo se perdeu na compreensão desse elemento. Da mesma forma podemos destacar a posição relativa aos eixos maior e menor em relação a seus vértices.

Dessa forma, acreditamos que a RG da elipse não logou êxito, considerando que A15 não conseguiu realizar a conversão entre RA e RG da elipse com sucesso.

A aluna A21 apresentou o mesmo tratamento dos demais para chegar à ER da elipse. Em relação à RG dessa cônica apresentou a representação a seguir:

Figura 87 – Resolução da Questão 2 – RG – Aluna A21

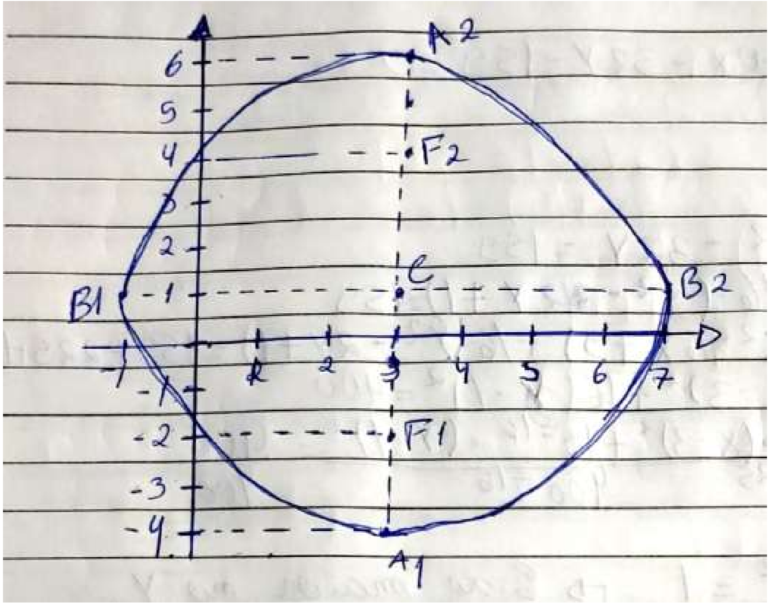


Fonte: Dados da Pesquisa

Dentre as respostas dos alunos, essa foi a RG que mais apresentou as características da cônica que representamos na Figura 79, mostrando o grau de compreensão do aluno na construção dessa representação.

Uma outra resposta apresentada, diz respeito à resolução feita pelo aluno A29, Figura 88, que apresenta a RG da cônica construída por esse aluno.

Figura 88 – Resolução da Questão 2 – RG – Aluno A29



Fonte: Dados da Pesquisa

Observando essa RG não conseguimos identificar, em um primeiro momento, qual o eixo maior ou o eixo menor da elipse, uma vez que esta aparenta estar com eixo maior paralelo ao eixo Ox, pelo traçado da curva e pelas medidas utilizadas na sua construção. Apenas quando observamos com mais atenção as abscissas e ordenadas traçadas nos eixos, podemos identificar as coordenadas dos vértices e focos, verificando que a construção não foi feita com medidas seguindo o mesmo padrão.

7.3.3 Questão 3: Hipérbole

7.3.3.1 Apresentando a questão

Figura 89 – Enunciado da Questão 3

Determine a equação reduzida, o centro, os vértices, os focos, as equações das assíntotas e esboce o gráfico da hipérbole de equação

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A Questão 3 (Q3) apresenta em seu enunciado a RA de uma hipérbole, por meio de sua equação geral (EG), e pede para que sejam determinados a equação reduzida, o centro, os vértices, os focos, as equações das assíntotas e que seja esboçado o gráfico dessa cônica.

Em termos da nossa pesquisa, nessa questão é necessária a conversão da RA para a RG da hipérbole cuja RA é dada por $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$. Para resolução da questão era necessário realizar tratamentos inerentes ao RRS para chegar à Equação Reduzida (ER) da hipérbole, de onde se torna mais visível a identificação das variáveis cognitivas da cônica.

Os possíveis caminhos para realizar a atividade seriam:

- Realização de tratamento para determinação da ER da hipérbole, por meio de completamento de quadrados e operações algébricas;
- Chegar à ER da hipérbole na forma:
$$\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$
- Concluir que o centro da hipérbole C não está na origem dos eixos coordenados e suas coordenadas são $C(2, -1)$;
- Identificar que o sinal negativo está no termo que tem o x^2, dessa forma a ER dessa cônica é da forma da Equação 4.5
$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$
- Identificar que a hipérbole tem eixo real paralelo ao eixo Ox;
- Como $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$, temos que $2a = 8$, portanto a medida do eixo real equivale a 8 u.c.;
- Identificar que o eixo imaginário da elipse $2b$ é paralelo ao eixo Ox;
- Como $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$, temos que $2b = 6$, portanto a medida do eixo imaginário equivale a 6 u.c.;
- Determinar o valor de c utilizando o Teorema de Pitágoras, chegando $c = 5$, portanto o eixo focal é $2c = 10$;
- Fazer a conversão da RA para a RG utilizando as variáveis do registro de partida dessa cônica, obtendo os demais elementos;
- Determinar as coordenadas: $A_1(2, -5)$, $A_2(2, 3)$, $B_1(-1, -1)$ e $B_2(5, -1)$;
- Determinar que as coordenadas dos focos são: $F_1(2, -6)$, $F_2(2, 4)$;
- A excentricidade $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$;

- Determinar o coeficiente angular da assíntota r e chegar à equação

$$r : \frac{-4x+5}{3}$$

- Determinar o coeficiente angular da assíntota s e chegar à equação

$$s : \frac{4x-1}{3}$$

Tratamento algébrico para chegar à ER da hipérbole:

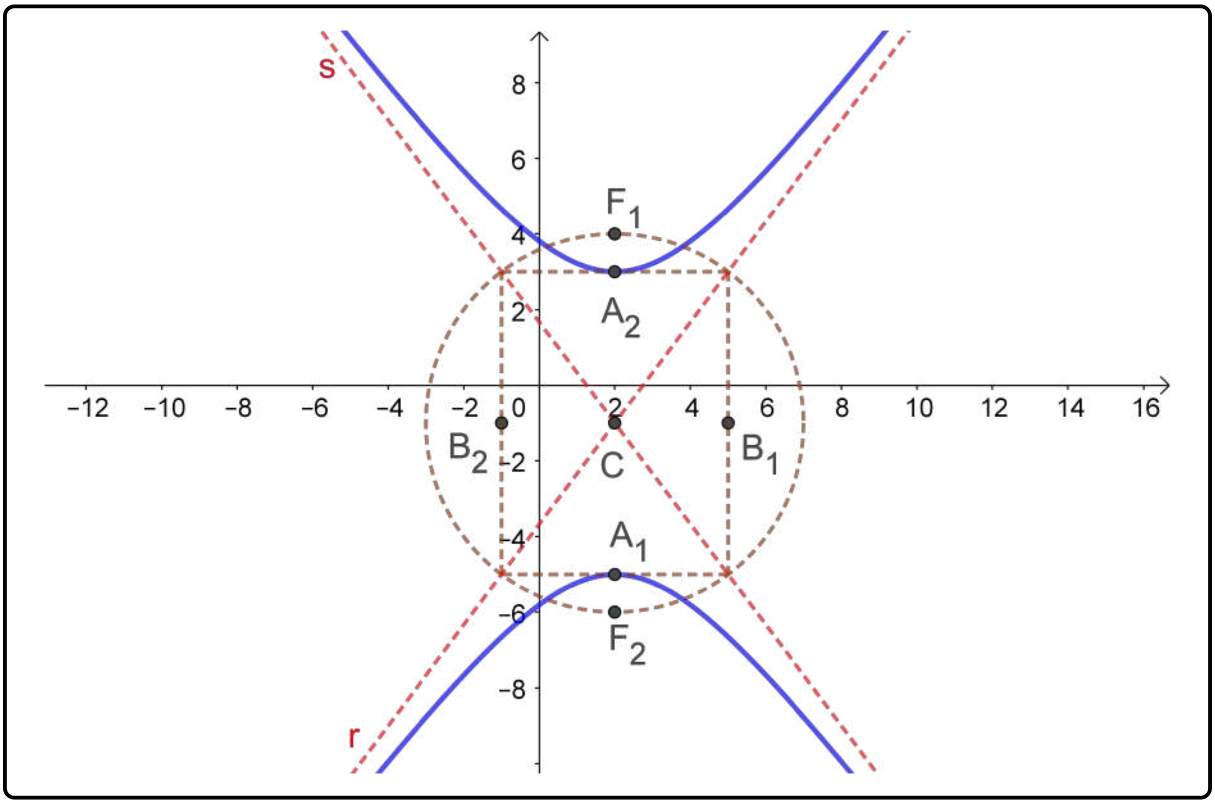
$$\begin{aligned}
&16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0\\
&16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y = -199\\
&16x^2 - 64x - 9y^2 - 18y = -199\\
&16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 2y) = -199\\
&16(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 2y + 1) = -199 + 64 - 9\\
&16(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = -144\\
&\frac{16(x-2)^2}{-144} + \frac{-9(y+1)^2}{-144} = \frac{-144}{-144}
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que:

$$\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1 \tag{7.2}$$

A conversão da RA, representada na Equação 7.2 para a RG da hipérbole é:

Figura 90 – Representação Gráfica da Hipérbole da Questão 3



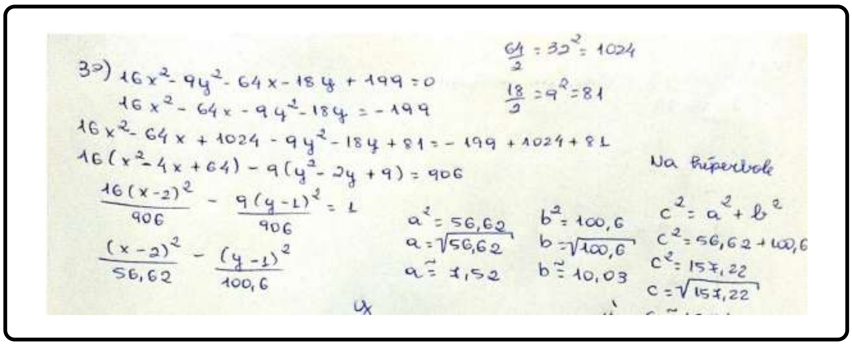
Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Dessa maneira Q3 apresenta dois tipos de conversão: RA → RG e RG → RA.

7.3.3.2 Respostas apresentadas

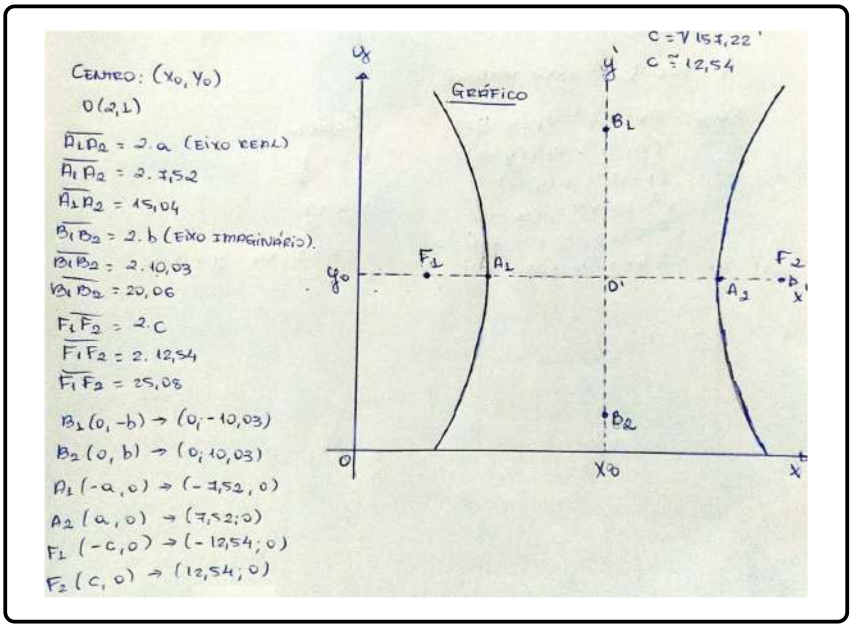
As Figuras 91 e 92 se referem à resolução apresentada pela aluna A2.

Figura 91 – Resolução da Questão 3 – RA – Aluna A2



Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 92 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluna A2



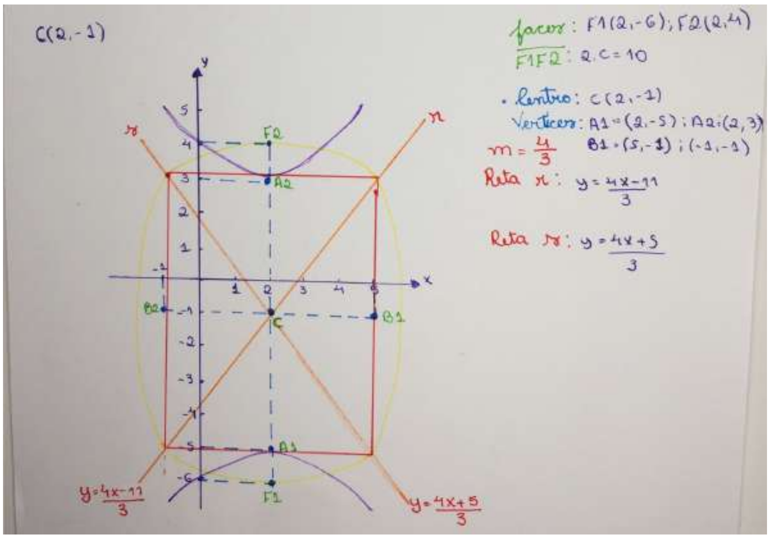
Fonte: Dados da Pesquisa

Pelo que observamos na questão, apesar da aluna ter construído o gráfico, na tentativa de construir a RG da hipérbole, o resultado não condiz com a solução apresentada na Figura 90.

Inicialmente observamos a posição da hipérbole, diversa da que deveria ter sido representada na questão. Isso se deve ao fato da aluna não ter compreendido o procedimento para completamento de quadrados, errando os cálculos necessários à resolução e, consequentemente, errando os valores de a e b encontrados, o sinal dos termos x e y e as coordenadas do centro.

Outra observação pertinente é que, diferentemente da Q2, em que falamos que se essa aluna tivesse utilizado a RG da elipse para validar o tratamento realizado no completamento de quadrados, desta vez ela utilizou a RG. Porém, como podemos observar na Figura 92, a aluna apenas representou uma hipérbole genérica, cuja abscissa do centro é x_0 e ordenada é y_0. Podemos observar também que as coordenadas dos elementos a que ela chegou não condizem como os representados na imagem. Podemos observar isso facilmente quando ela conclui no lado esquerdo da Figura que as coordenadas de B_1 são $(0, -b)$ e no gráfico esse vértice está acima do eixo Ox, não podendo jamais estar representado no ponto em que ela o representou.

Figura 93 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluna A3

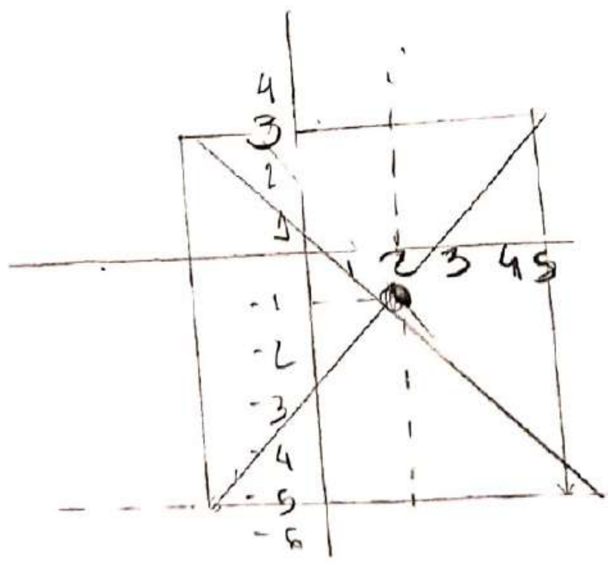


Fonte: Dados da Pesquisa.

A aluna A3 encontrou apenas um coeficiente angular e o utilizou nas duas retas, apesar de serem retas com posições distintas, ou seja, uma das assíntotas tem o ângulo $\alpha < 90°$, logo $m = \tan\alpha > 0$, enquanto a outra assíntota tem o ângulo $\alpha > 90°$, logo $m = \tan\alpha < 0$. Apesar desse erro a aluna representou corretamente a reta.

A aluna A10 apresentou o tratamento para encontrar a ER da hipérbole corretamente, porém a Figura 94 mostra o gráfico apresentado na questão.

Figura 94 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluna A3

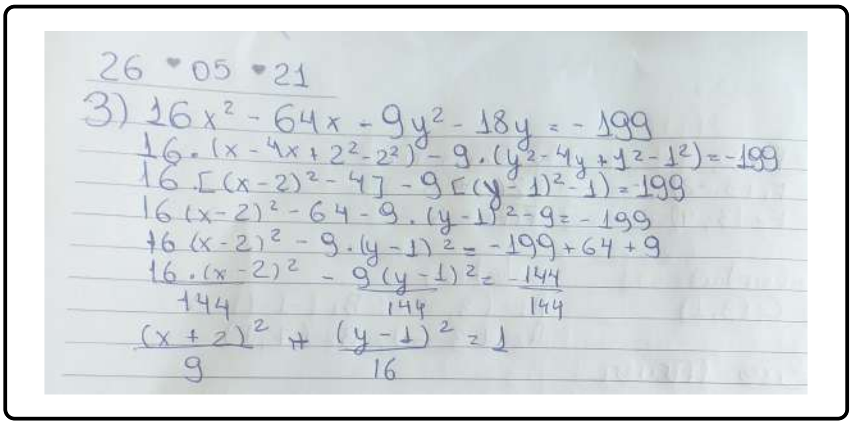


Fonte: Dados da Pesquisa

O gráfico apresentado pela aluna, cuja hipérbole nem aparece, demonstra que ela não conseguiu realizar a conversão entre os RRS. Apesar de ter chegado à RA corretamente a aluna não soube associar as variáveis do registro de partida às do registro de chegada, não obtendo sucesso em sua representação.

O aluno A20 apresentou o tratamento dessa questão conforme observamos a seguir:

Figura 95 – Resolução da Questão 3 – RA – Aluno A20



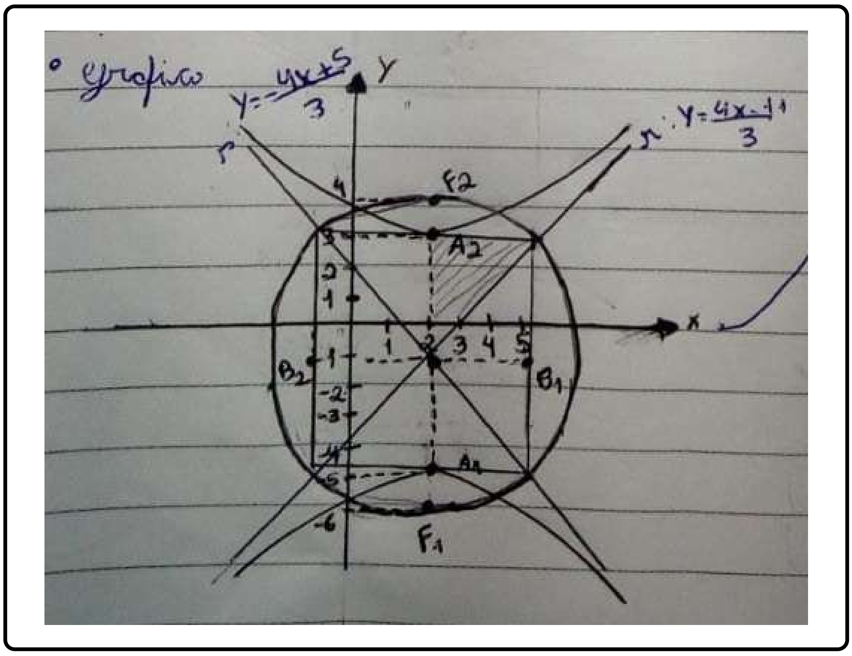
Fonte: Dados da Pesquisa.

Observamos que houve alguns equívocos na resposta do aluno. Desde o completamento do quadrado, em que o aluno ao invés de adicionar 64 e subtrair 64 para equilibrar a equação, ele pelo que está escrito, subtraiu 64 duas vezes. Da mesma forma o fez com o 9. Dessa forma, ao final a ER da hipérbole ficou com os sinais do termo do x e do y positivos, não sendo a representação de uma hipérbole, mas de uma elipse.

Esse fato nos remete à incompreensão por parte do aluno do RRS dessa cônica. O aluno ainda deixou de apresentar a RG da cônica, como era de se imaginar.

Essa é a RG apresentada pela aluna A23:

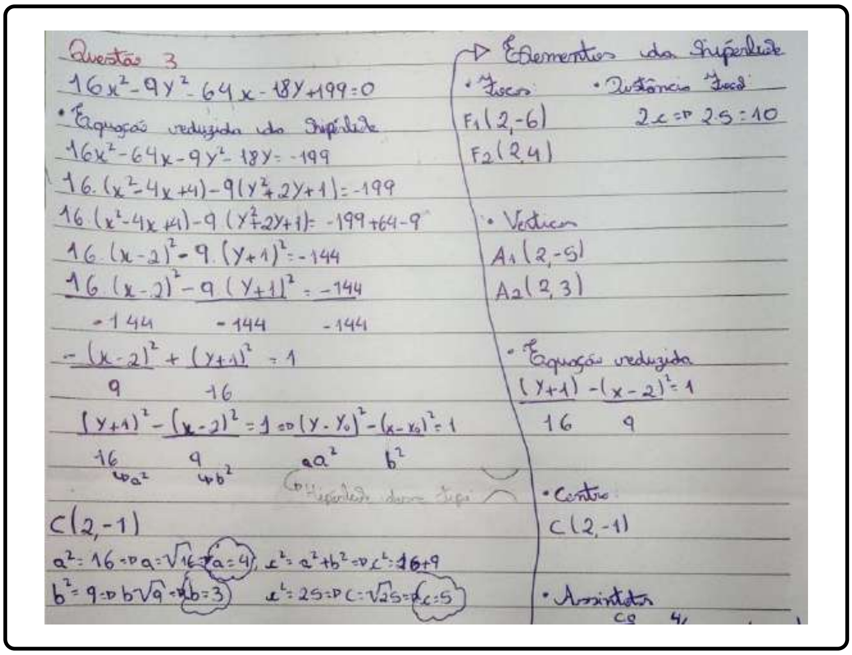
Figura 96 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluna A23



Fonte: Dados da Pesquisa.

Observando o caminho percorrido por A23c para resolução da questão, ela conseguiu realizar o tratamento dentro da RA para completamento de quadrados, bem como as demais operações, chegando até a ER da hipérbole. A aluna identificou corretamente os elementos dessa cônica, bem como a sua posição no plano cartesiano, uma vez que identificou corretamente a forma da ER.

Figura 97 – Resolução da Questão 3 – RA – Aluna A23

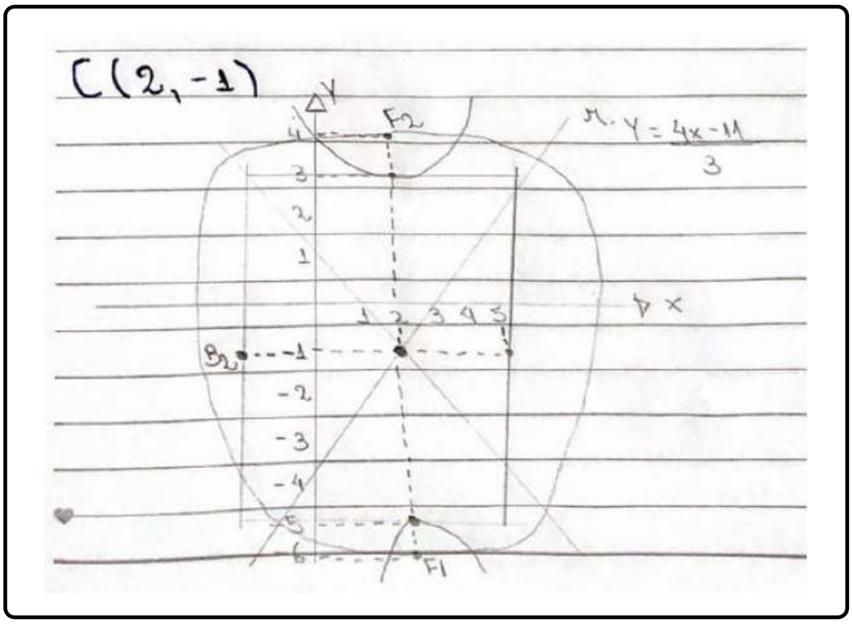


Fonte: Dados da Pesquisa.

Concluímos que A23 conseguiu realizar a conversão da RA para a RG de forma bem-sucedida.

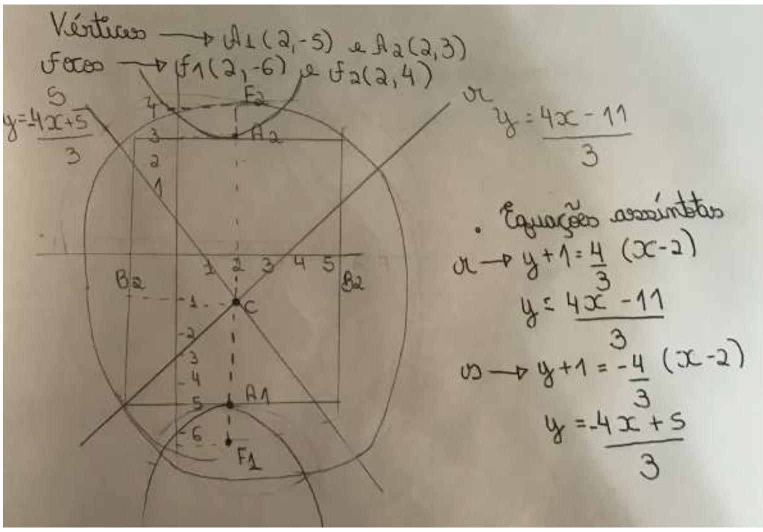
Os alunos A7, A8 e A18, parecem ter tido dificuldade em algumas características da hipérbole, uma vez que apresentaram as seguintes RG:

Figura 98 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluna A7



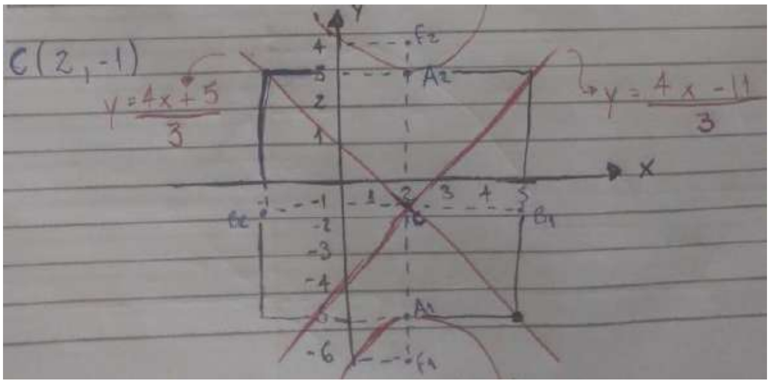
Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 99 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluno A11



Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 100 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluno A18

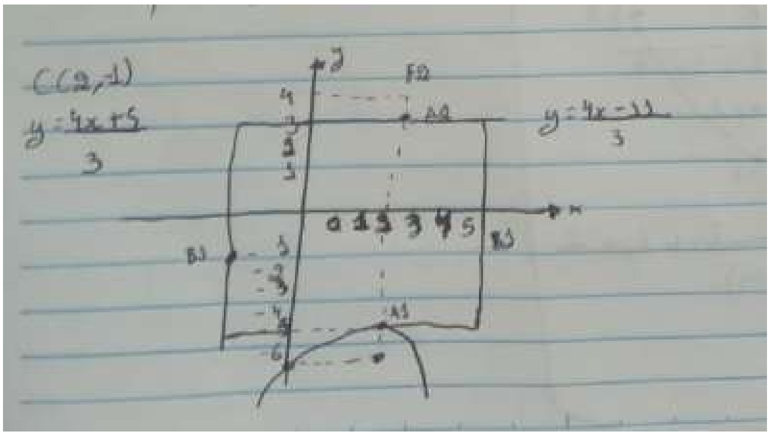


Fonte: Dados da Pesquisa.

Todos os três cometeram equívocos.

A aluna A19 na tentativa de representar graficamente a hipérbole da questão, fez a seguinte construção:

Figura 101 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluna A19

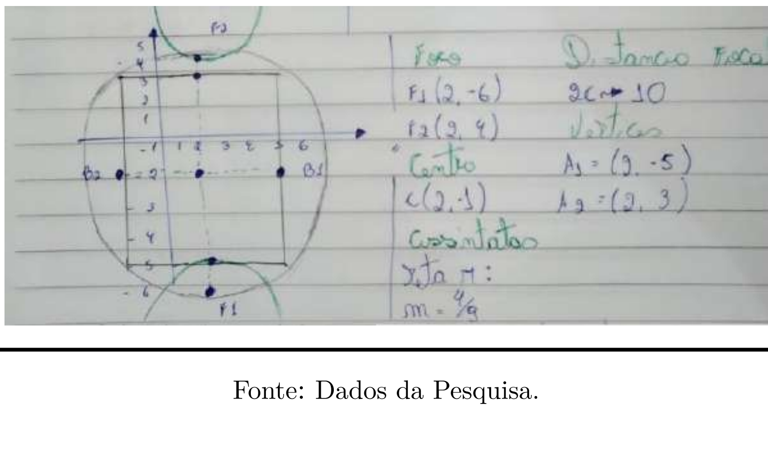


Fonte: Dados da Pesquisa

Ao que nos parece a aluna esqueceu ou não compreendeu que essa cônica tem dois ramos e não apenas um, como na figura. Apesar da aluna ter marcado os pontos dos vértices e dos focos nas coordenadas corretas, esqueceu de marcar o centro da hipérbole. A sua construção não ficou muito harmoniosa, ou mesmo parecida com o que deveria ser a representação da hipérbole, já que não há simetria entre os elementos. As equações das assíntotas estão representadas com o mesmo coeficiente angular, o que faria com que elas não tivessem a posição representada.

O aluno A26 apresentou a seguinte RG para a hipérbole:

Figura 102 – Resolução da Questão 3 – RG – Aluno A26



Fonte: Dados da Pesquisa.

Um dos ramos da hipérbole está representado corretamente com o ponto em que, pelas coordenadas encontradas pelo aluno, estaria representado o vértice A_1, enquanto o outro ramo da hipérbole não contém o vértice A_2, mas erroneamente passa pelo foco F_2. Concluímos que o aluno não soube representar graficamente essa cônica, com as variáveis do registro de representação.

7.3.4 Questão 4: Parábola

7.3.4.1 Apresentando a questão

Figura 103 – Enunciado da Questão 4

> *Determine a equação da parábola cujo vértice é o ponto* $(3,4)$ *e cujo foco é o ponto* $(3,2)$. *Determine também a equação de sua diretriz.*

Fonte: Dados da pesquisa.

A Questão 4 (Q4) apresenta seu enunciado em língua natural, informando as coordenadas do Vértice e do Foco de uma parábola e pede para que seja determinada a equação dessa parábola e da sua diretriz.

Em termos da nossa pesquisa, nessa questão, apesar de não terem sido fornecidas nem a RA nem a RG da parábola, foram fornecidos os dois pontos necessários para chegar à RG dessa cônica. A partir da RG, poder-se-ia chegar até a RA pedida na questão, que não especificava se seria a ER ou a EG. Para resolução da questão era necessário realizar tratamentos inerentes ao RRS para chegar à ER ou à EG da parábola.

Os possíveis caminhos para realizar a atividade seriam:

- Marcação do Vértice $(3,4)$ e do Foco $(3,2)$ no plano cartesiano;
- Identificar que o eixo de simetria $\overleftrightarrow{VF}$ é paralelo ao eixo Oy;
- Identificação da posição do Foco em relação ao Vértice: como o primeiro está abaixo do segundo, significa que a parábola tem sua concavidade voltada para baixo;
- Identificar que a parábola possui diretriz paralela ao eixo Ox;
- Identificar que a equação da parábola é da forma da Equação 4.7

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

- Fazer a RG da parábola que passa pelo vértice V e foco F;
- Determinar que a distância $\overline{VF}$ é de 2 u.c., portando a distância de V até a diretriz também é de 2 u.c.;
- Representar graficamente a reta diretriz;
- Identificar que a equação da reta diretriz d é $y = 6$;

- Sabendo que p é igual à distância do Foco até a diretriz d, concluir que $p = 4$;
- Determinar que $2p = 2 \cdot 4 = 8$;
- Representar os dados da RG na RA, chegando à ER

$$(x - 3)^2 = -8(y - 4) \tag{7.3}$$

- Em caso de desenvolvimento da ER da parábola representada, chegar à equação:

$$y = \frac{-x^2 + 6x + 23}{8} \tag{7.4}$$

ou

$$y = -\frac{x^2}{8} + \frac{6x}{8} + \frac{23}{8} \tag{7.5}$$

Tratamento algébrico para chegar à ER da hipérbole:

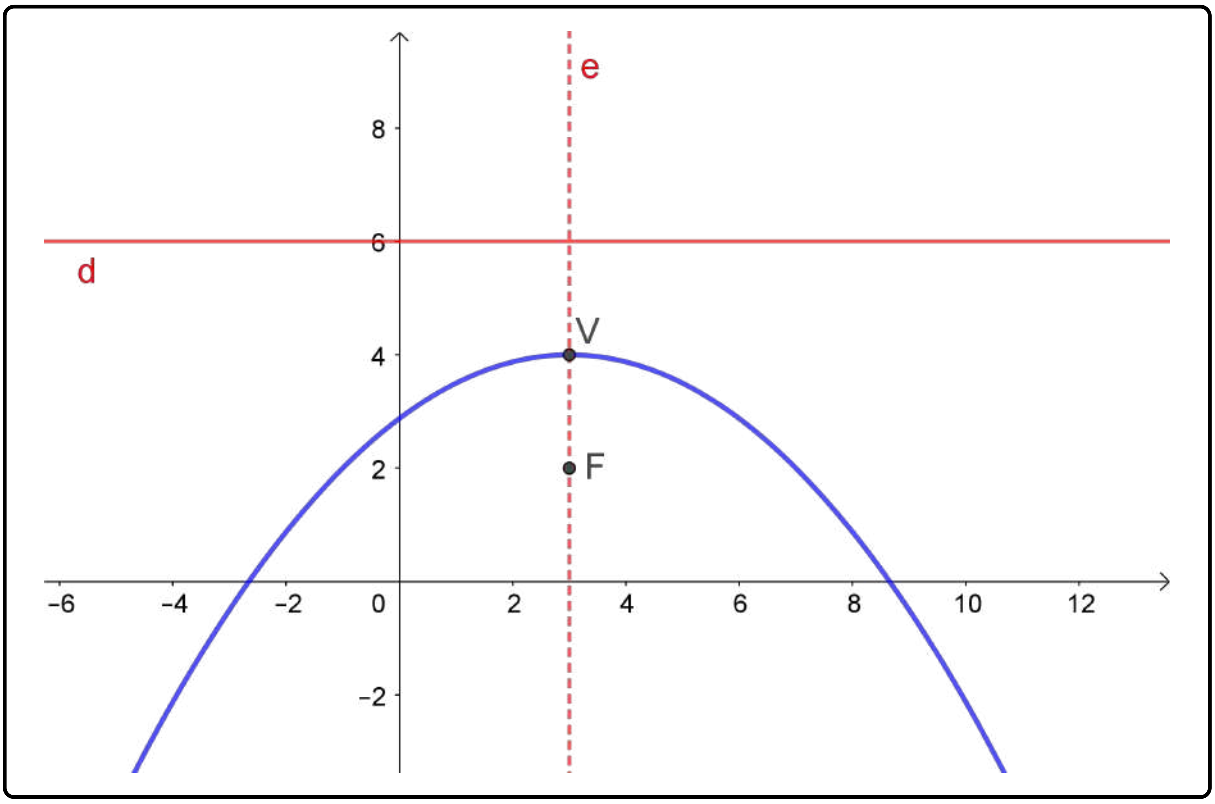
$$\begin{aligned}
&(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \\
&(x - 3)^2 = -8(y - 4) \\
&x^2 - 6x + 9 = -8y + 32 \\
&x^2 - 6x = -8y + 32 - 9 \\
&8y = -x^2 + 6x + 32 - 9 \\
&8y = -x^2 + 6x + 23
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que:

$$y = \frac{-x^2 + 6x + 23}{8}$$

A conversão da RA, representada na Equação 7.3 para a RG da hipérbole é:

Figura 104 – Representação Gráfica da Parábola da Questão 4



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

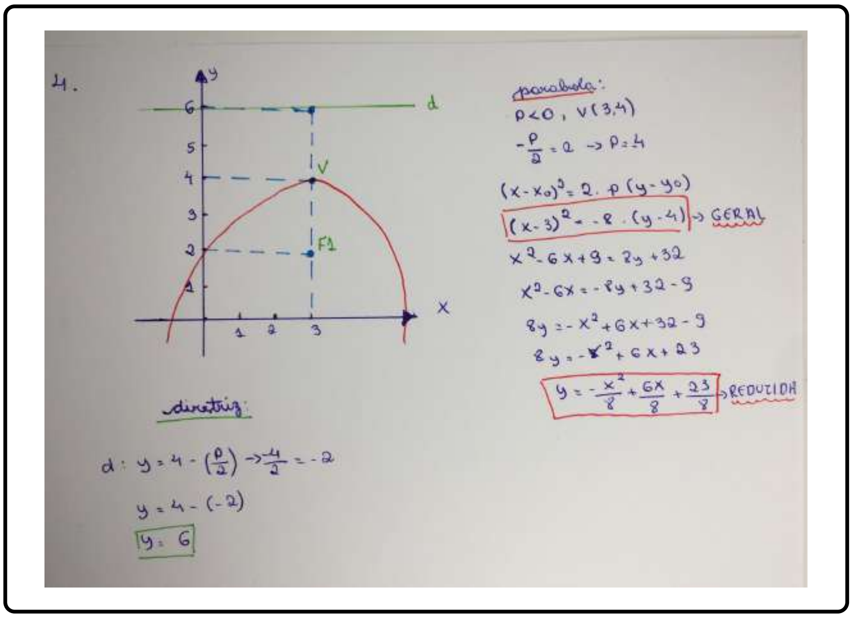
Dessa maneira o sentido de conversão da Q3 é: RA→RG→RA

7.3.4.2 Respostas apresentadas

Nas respostas apresentadas pelos alunos, identificamos que alguns tiveram dificuldades em relação a Q4, seja pela quantidade de elementos fornecidos para sua resolução, seja por não compreender como representar na forma algébrica diretamente os dados, sendo mais coerente primeiro representar graficamente a parábola, identificando a posição desses elementos no plano cartesiano, para assim determinar a posição dessa cônica e o formato de sua equação.

No caso da aluna A3, temos:

Figura 105 – Resolução da Questão 4 – RA e RG – Aluna A3



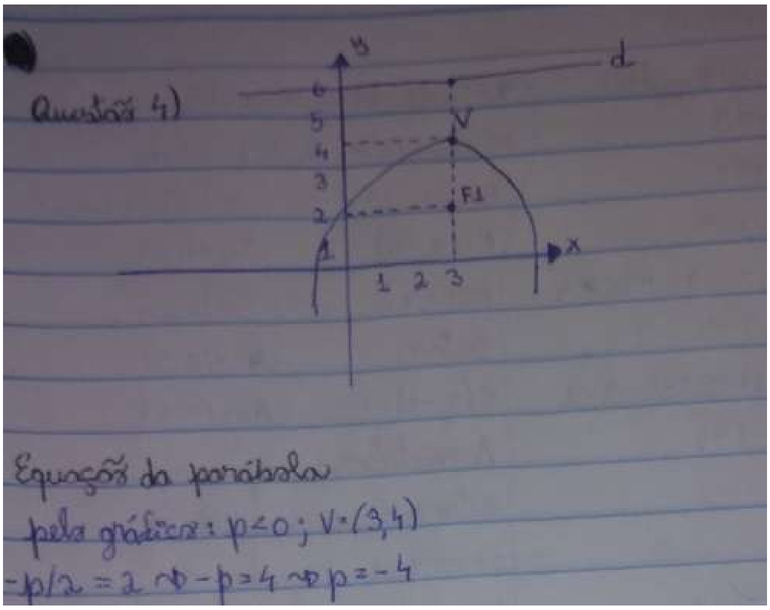
Fonte: Dados da Pesquisa

A aluna confundiu as nomenclaturas "equação reduzida" com "equação geral", trocando uma pela outra. Algo que observamos também é que mesmo tendo chegado à RA corretamente, A3 não compreendeu que o parâmetro p representa medida, representando-o como valor negativo.

Pela RG observamos que a aluna representou como ponto da parábola o ponto $(0, 2)$, que seria facilmente descartado fazendo-se a verificação necessárias, apesar disso, a RA foi a esperada para essa cônica.

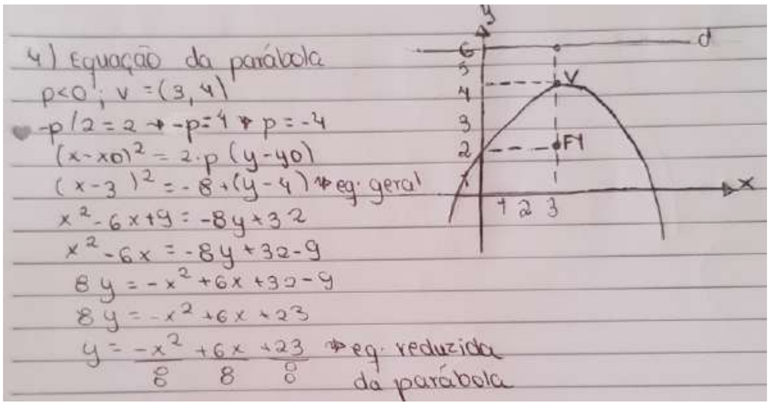
O mesmo tratamento para essas duas representações foi dado por A25 e A28 em suas resoluções, conforme as Figuras 106 e 107.

Figura 106 – Resolução da Questão 4 – RG – Aluna A25



Fonte: Dados da Pesquisa.

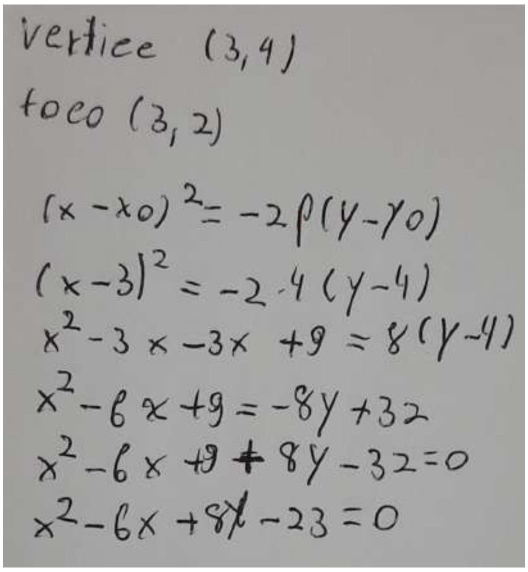
Figura 107 – Resolução da Questão 4 – RA e RG – Aluna A28



Fonte: Dados da Pesquisa.

Observamos que o aluno A22 decidiu resolver a questão sem utilizar a RG da parábola como meio auxiliar para chegar à RA dessa cônica, conforme solução a seguir:

Figura 108 – Resolução da Questão 4 – RA – Aluno A22

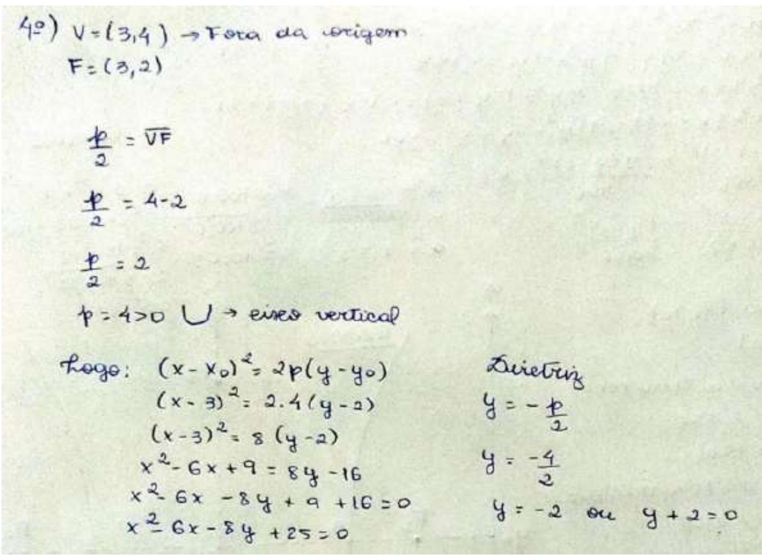


Fonte: Dados da Pesquisa

Apesar do aluno ter em algum momento de sua resolução esquecido o sinal, depois realizou o tratamento como se ele estivesse presente, chegando à equação geral da parábola, que não está no formato que apresentamos na nossa resolução, mas que com mais alguns passos representa o mesmo registro.

Outra aluna que preferiu não fazer a RG da parábola para chegar à RA, foi A2, conforme a solução:

Figura 109 – Resolução da Questão 4 – RA – Aluna A2



Fonte: Dados da Pesquisa.

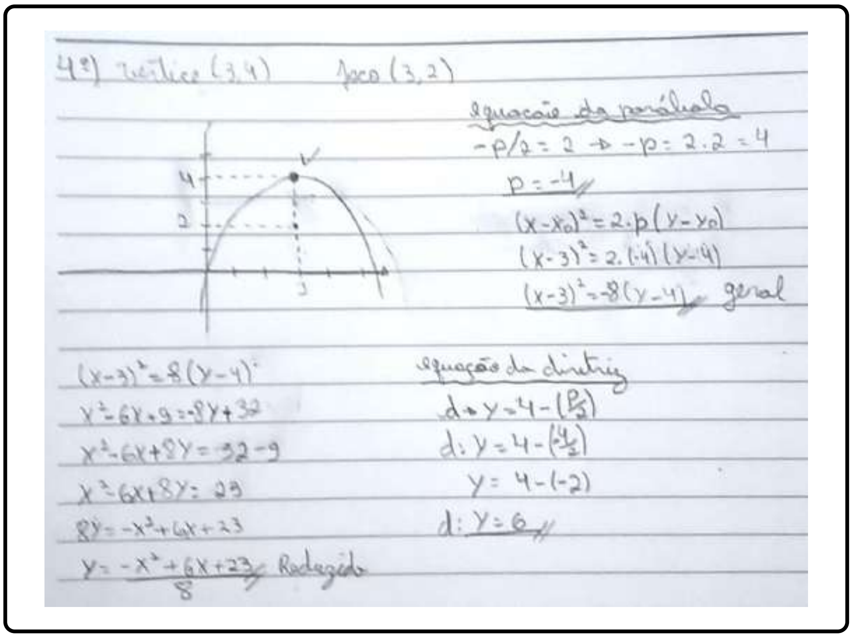
A aluna identificou corretamente o parâmetro, porém ao lado desenhou um símbolo que representa a concavidade da parábola voltada para cima, pois não identificou que o foco fica "dentro" da parábola e não fora. Isso seria facilmente identificado pela aluna se ela tivesse optado por fazer a RG da cônica com os dados que a questão havia fornecido.

Dessa forma a aluna optou pelo formato da equação cuja concavidade da parábola está voltada para cima. Outro erro cometido foi que a aluna substituiu as coordenadas do foco na equação e não as do vértice, como deveria ter feito, chegando a uma RA bem diferente da que representa a parábola com os dados fornecidos. Dando continuidade, a aluna também determinou a equação da diretriz d de forma equivocada.

Concluímos que A2 não conseguiu manipular os elementos da parábola para determinação de sua RA, fato que pode ter sido ocasionado pela decisão de não fazer a RG desse cônica.

O aluno A8 fez a RG da parábola como forma de chegar à RA.

Figura 110 – Resolução da Questão 4 – RA e RG – Aluno A8

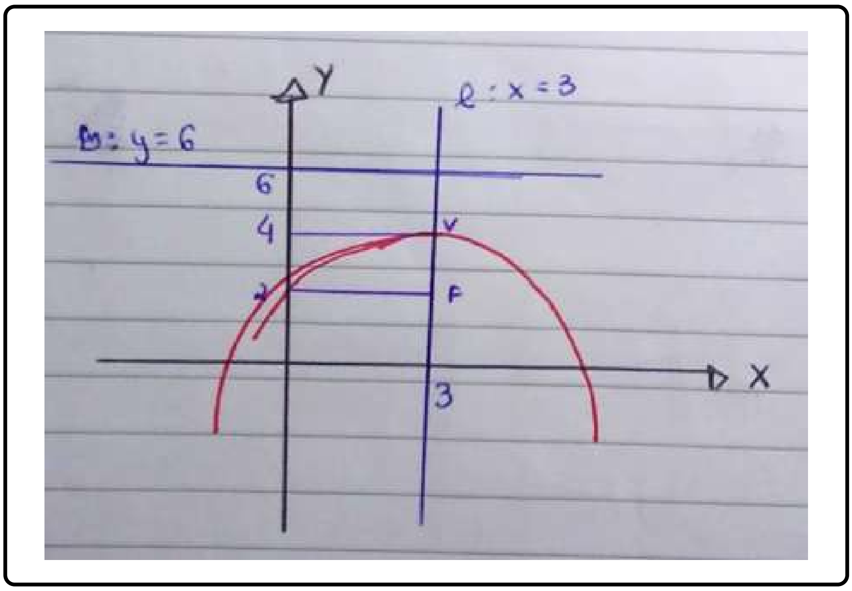


Fonte: Dados da Pesquisa.

Observamos que a construção ocorreu respeitando os elementos do registro de partida, de modo que o registro de chegada (RA) foi condizente com à representação da parábola em questão. A8, no entanto, como alguns outros alunos identificou incorretamente o parâmetro p como -4, não compreendendo que p é uma medida e não assume valores negativos. Porém, esse fato não interferiu na RA encontrada por A8.

A11 optou por representar graficamente a parábola para fazer sua conversão para a RA. Observamos que A11 utilizou corretamente os elementos fornecidos para chegar à RG dessa cônica. Um fato interessante é que no gráfico podemos observar que a aluna chegou a representar a parábola contendo o ponto $(0,2)$, porém reajustou seu traçado e fez com que a curva ficasse mais acima desse ponto. Acreditamos que ela conseguiu identificar que esse ponto não pertence à parábola.

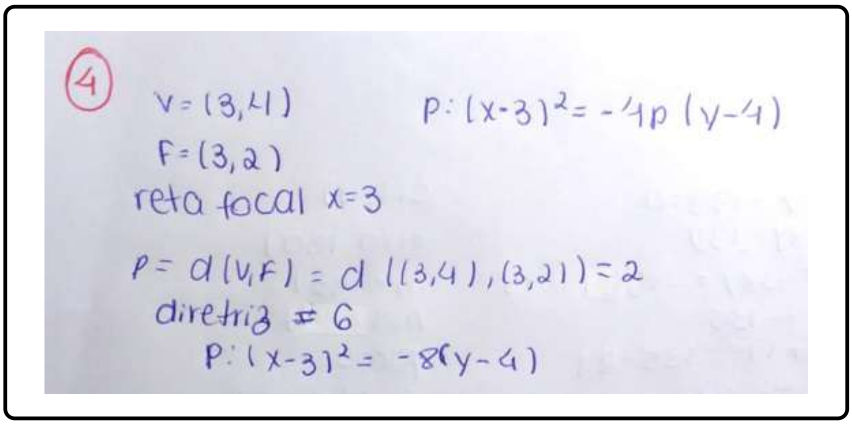
Figura 111 – Resolução da Questão 4 – RG – Aluna A11



Fonte: Dados da Pesquisa.

A aluna chamou o eixo de simetria de "reta focal", atribuindo-lhe corretamente sua RA e utilizou a equação $(x-x_0)^2 = -4p(y-y_0)$ para representar a parábola, encontrando $p = 2$.

Figura 112 – Resolução da Questão 4 – RA – Aluna A11



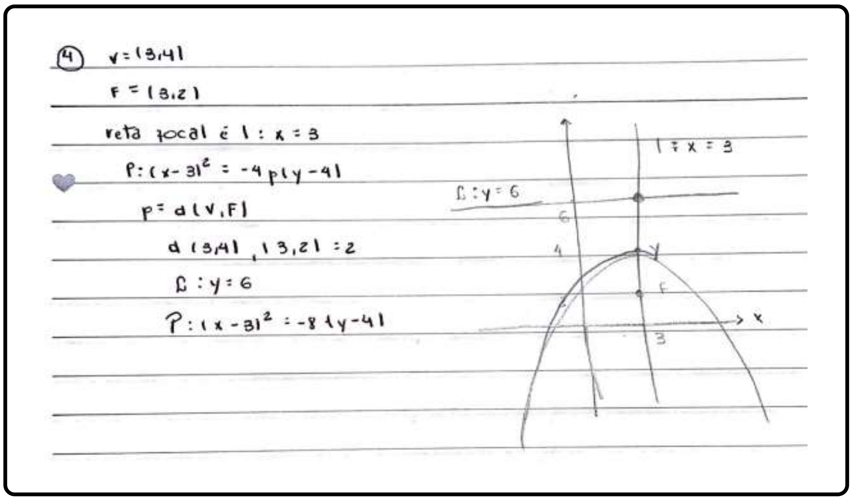
Fonte: Dados da Pesquisa.

Por essas características na resolução da aluna, observamos que ela não estudou pelo material disponibilizado pelo professor, nem pelo livro didático adotado pelo instituto, uma vez que essa nomenclatura não é utilizada em nenhum dos dois materiais.

Da mesma forma, o formato da equação não é o mesmo utilizado pelo professor, mas utilizado por outros autores.

O mesmo procedimento realizado por A11 foi utilizado por A12, com a mesma denominação de "reta focal" e a mesma representação da equação da parábola. Curiosamente até o mesmo ajuste no traçado da parábola foi realizado na sua representação.

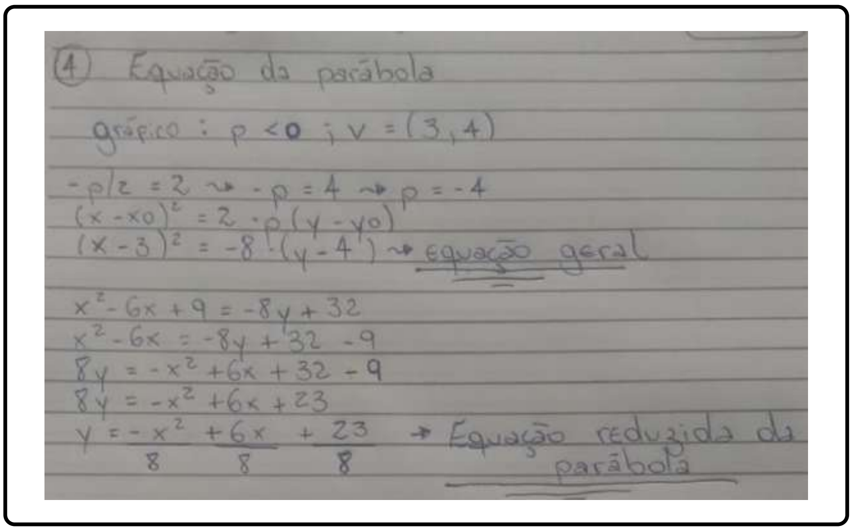
Figura 113 – Resolução da Questão 4 – RA e RG – Aluna A12



Fonte: Dados da Pesquisa.

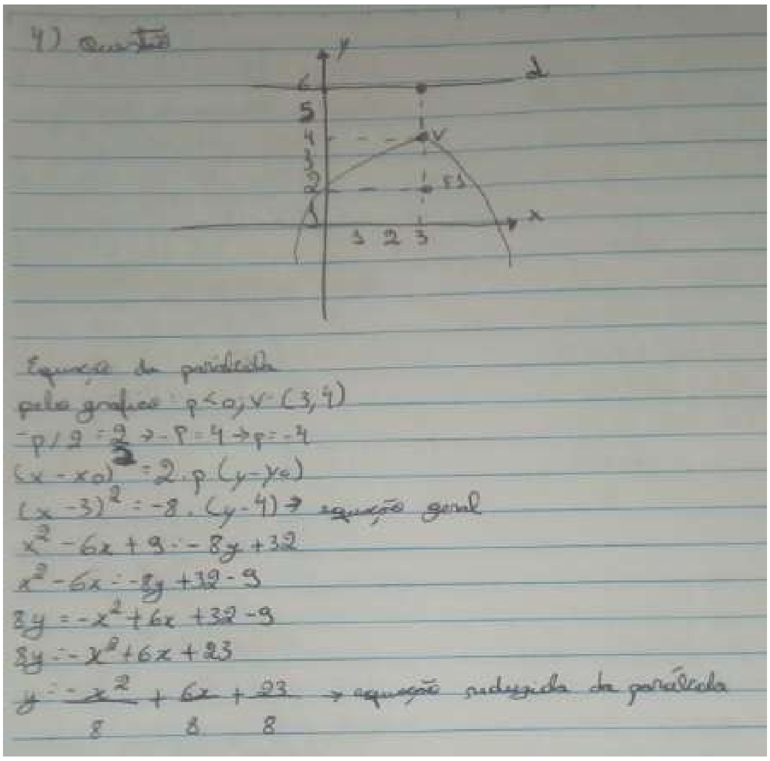
As respostas dos alunos A18 e A19 curiosamente foram idênticas à da aluna A28, inclusive na confusão entre a equação geral e a equação reduzida:

Figura 114 – Resolução da Questão 4 – RA – Aluno A18



Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 115 – Resolução da Questão 4 – RA e RG – Aluno A19



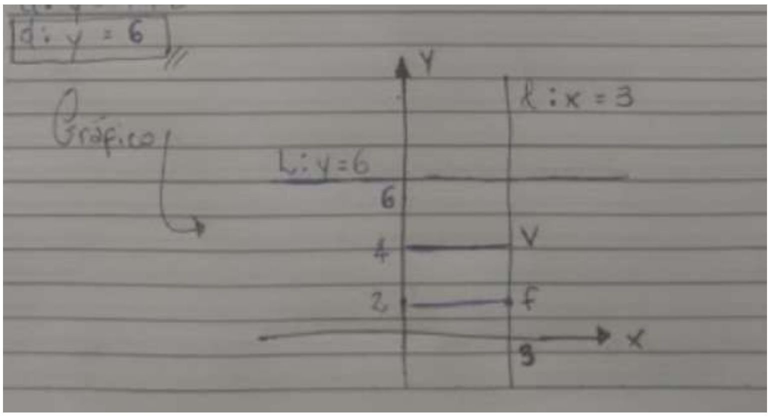
Fonte: Dados da Pesquisa.

Observando o tratamento cuidadosamente, podemos perceber que a mesma ordem dos passos no tratamento da RA foi realizado, inicialmente subtraindo-se 9 em ambos os membros, sem uma explicação lógica para tal procedimento nesse ponto da questão, uma vez que seria mais natural deixá-lo na forma em que estava, já que ele ficaria ao final no membro em que estivessem os termos x^2 e $-6x$.

Uma diferença entre as resoluções de A28 e A18, conforme podemos observar na Figura 107 é que o -8 está somando $(y-4)$ e não multiplicando, conforme o modelo da equação, fazendo-nos ter dúvidas a respeito de como A28 chegou na RA final.

Destacamos ainda que A18 não chegou a concluir a RG da parábola, traçando os pontos do vértice, do foco e as retas d e e, chamadas por ele de L e l, respectivamente, mas o aluno não arriscou traçar a curva no seu esboço, levando-nos a não ter certeza de sua compreensão acerca da posição assumida por essa cônica na questão.

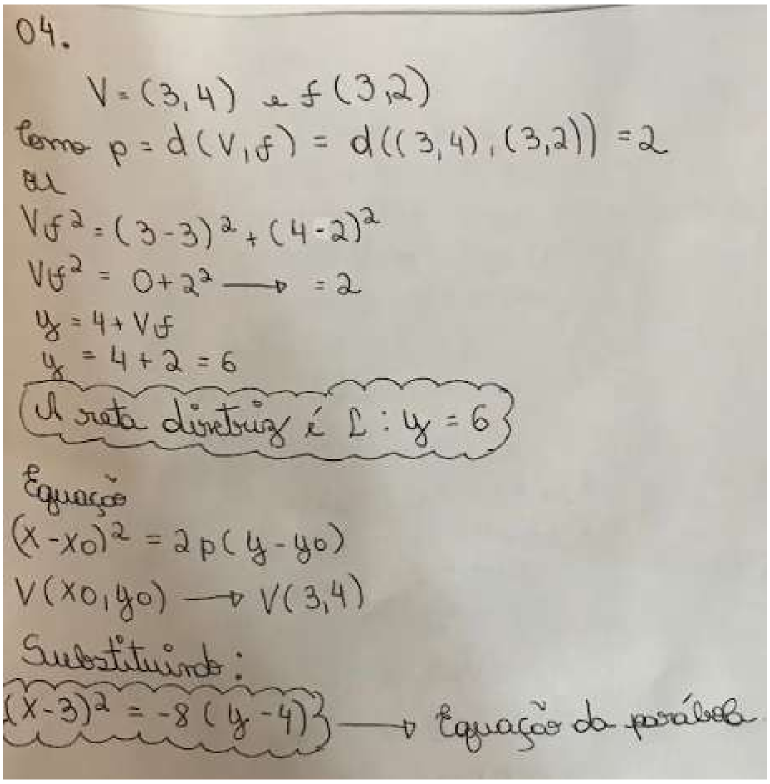
Figura 116 – Resolução da Questão 4 – RG – Aluno A18



Fonte: Dados da Pesquisa

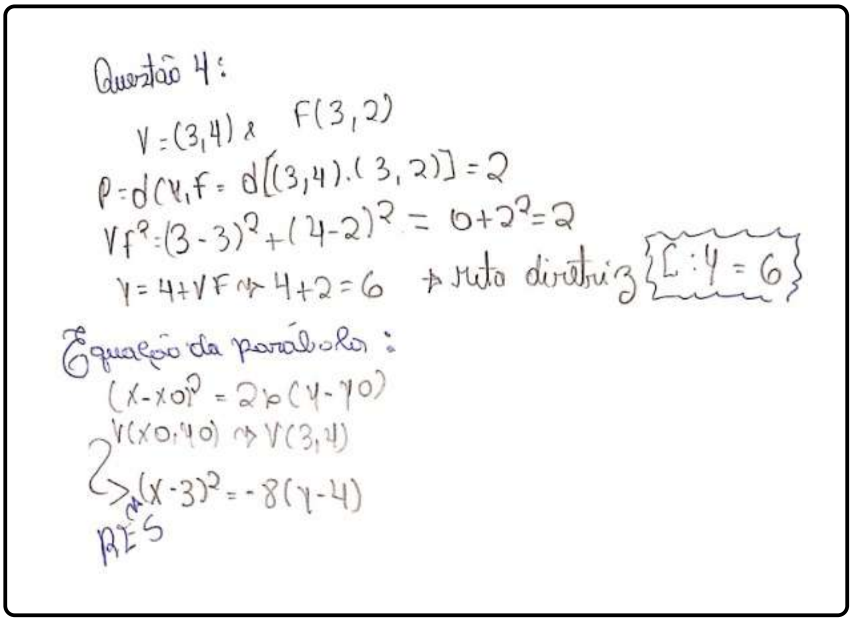
As alunas A10 e A24, apresentaram as mesmas respostas, inclusive com a mesma nomenclatura para a diretriz e o eixo de simetria.

Figura 117 – Resolução da Questão 4 – RA – Aluna A10



Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 118 – Resolução da Questão 4 – RA – Aluna A24

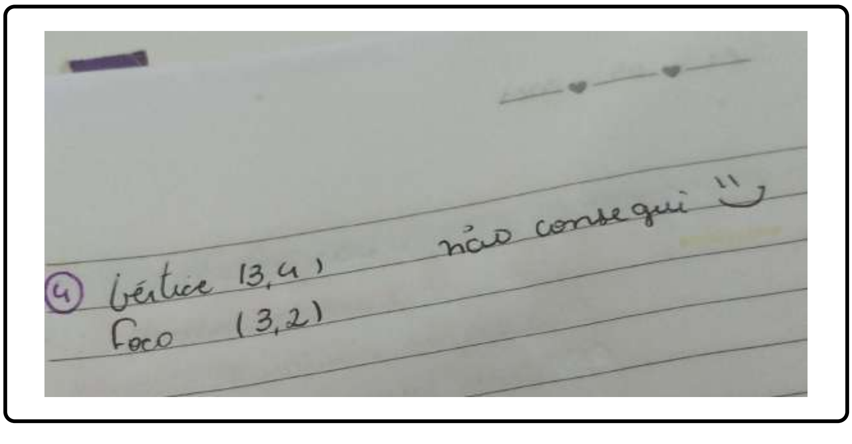


Fonte: Dados da Pesquisa.

Percebemos que ambas as alunas determinaram o valor do parâmetro $p = 2$. No entanto na hora de substituírem na ER da parábola de forma $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, ambas apareceram com um -8 em substituição a $2p$, sem nenhuma explicação de onde essa valor teria surgido.

Finalmente, a aluna A21 utilizou de signos linguístico e figural para dizer que não compreendeu a forma de realizar a RA ou mesmo a RG da parábola, apresentando um simpático sorriso na resposta enviada nessa questão.

Figura 119 – Resolução da Questão 4 – Mensagem – Aluna A21



Fonte: Dados da Pesquisa.

O que representaria esse sorriso? Que está tudo bem o fato de não ter conseguido? Um pedido de ajuda sorridente, mas que nunca havia sido expressado?

Uma certeza que tudo daria certo, apesar dessa falta de compreensão de uma questão específica? Muitos podem ser os significados de um signo em um contexto para determinados ouvintes/leitores. Quantas vozes estão presentes nesse sorriso?

Destacamos que essa aluna obteve nota 70 na avaliação, conseguindo pontuação máxima nas duas primeiras questões e quase a máxima na terceira. Talvez ela soubesse que apenas uma questão não seria suficiente para causar relevante prejuízo a seu rendimento. Talvez ela estivesse satisfeita com seu desempenho geral na atividade, diante das circunstâncias, afinal, conforme Duval (2003, p. 11),

> [...] o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

Isso é apenas um "talvez", que para o professor pode ter tido uma conotação diferente da nossa e também diferente da conotação de qualquer outro interpretante. Permanecemos nas conjecturas, enquanto o sorriso enigmático da aluna traz, em sua leveza, a conclusão da nossa análise.

7.4 Algumas Considerações sobre os Resultados

Após a análise das respostas enviadas pelos alunos na atividade avaliativa, apresentamos a seguinte tabela com os resultados obtidos em cada questão, levando em consideração os aspectos de nossa pesquisa.

Dessa forma, passamos a verificar se cada aluno conseguiu realizar a transformação de tratamento (T) ou conversão (Registro de partida → Registro de chegada), necessária a cada etapa da questão e verificar se houve mobilização dos RRS, de forma a caracterizar a aprendizagem matemática, segundo a teoria de Duval[11]. No caso das questões Q2 e Q4, em que não era requisito da questão a construção da RG da cônica, nós assinalamos se o aluno fez uso desse recurso, e a partir desse indicador se houve reflexo na realização da conversão dos registros.

A partir dessa disposição, elaboramos a tabela em colunas, com a identificação dos alunos, o número referente a cada questão, acompanhado do tipo de registro daquela etapa da questão e a transformação necessária. Assim, temos na ordem correspondente de transformações: Tratamento na Representação Algébrica — RA(T); Identificação dos Elementos na representação Algébrica — RA(El); Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica — RG→RA; Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica — RA→RG; Identificação dos Elementos Conversão da

[11] Para preenchimento da tabela, se o aluno realizou a transformação necessária na etapa utilizamos o signo (S), se não realizou (N), ou ainda se realizou de forma parcial (P), fazendo confusão com algumas variáveis do RRS em questão.

Representação Gráfica para a Algébrica — RG→RA(El); Tratamento para dedução da Representação Algébrica das Retas Diretrizes — RA(Dir).

Quadro 8 – Conversões e Tratamentos da Atividade Avaliativa

	Q2			Q3			Q4		
Aluno	RA(T)	RA(El)	RG→RA	RA(T)	RA→RG	RG→RA(El)	RA→RG	RG→RA(El)	RA(Dir)
A1	N	N	N	N	N	N	S	N	S
A2	N	N	N	P	N	N	N	N	N
A3	S	S	S	S	S	P	S	S	S
A4	S	S	S	S	S	P	S	S	S
A5	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A6	P	N	N	S	N	N	N	N	N
A7	S	S	S	S	S	P	S	S	S
A8	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A9	S	S	S	S	P	P	S	S	S
A10	S	S	N	S	P	S	S	N	S
A11	P	N	N	P	N	P	S	S	S
A12	S	S	S	S	N	P	S	S	S
A13	S	S	S	S	P	P	S	S	S
A14	S	S	S	S	P	P	S	P	S
A15	S	S	S	S	S	P	S	S	S
A16	S	S	S	S	S	P	S	S	S
A17	S	S	S	S	S	P	S	S	S
A18	S	S	S	S	S	P	S	P	S
A19	S	S	S	S	P	P	S	S	S
A20	S	S	S	P	N	S	S	N	S
A21	S	S	S	S	S	P	N	N	N
A22	P	N	N	S	S	P	S	N	N
A23	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A24	S	S	N	S	S	S	S	N	S
A25	S	S	S	S	P	S	S	S	S
A26	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A27	S	S	S	S	P	S	S	S	S
A28	S	S	S	S	P	P	S	S	S
A29	S	S	S	S	S	P	S	P	S

Fonte: Elaborado pela Autora, 2022.

Observando os resultados apresentados no Quadro 8, pudemos chegar a algumas conclusões, adiante descritas, iniciando pelas questões Q2 e Q4, que utilizam a RG como registro auxiliar da elipse e parábola para chegar a sua RA e, em seguida, as conclusões referentes à questão Q3, que trata especificamente da conversão entre a RG e a RA da hipérbole:

- Quanto à utilização da RG como registro auxiliar na resolução da questão Q2:

Tabela 6 – Conclusões sobre Q2

Fez a RG	Quantidade	Conseguiu realizar a conversão RG→RA
S	21	21
N	8	3

Fonte: Elaborada pela Autora, 2022.

Levando-se em consideração os resultados apresentados na Tabela 6, observamos que era facultativo ao aluno fazer a RG na Q2, porém esse procedimento foi amplamente orientado pelo professor em todas as aulas, como forma de utilizar essa representação como auxiliar na identificação das variáveis presentes no RA.

Observamos que dentre os 29 alunos que realizaram a questão Q2, 8 optaram por não construir a RG como representação auxiliar e tentaram identificar os elementos da elipse apenas dentro da própria RA. Desses 8 alunos, 5 não conseguiram realizar a questão da forma correta e apenas 3 conseguiram fazê-lo sem o auxílio do gráfico.

Por outro lado, 21 alunos construíram a RG da elipse como representação auxiliar para identificar seus elementos. Desses, todos os 21 conseguiram identificar os elementos corretamente, voltando para a RA.

Concluímos que os alunos foram capazes de mobilizar esses dois RRS de forma a apresentarem compreensão do objeto matemático, conforme nos aponta a TRRS.

- Quanto à utilização da RG como registro auxiliar na resolução da questão Q4:

Tabela 7 – Conclusões sobre Q4

Fez a RG	Quantidade	Conseguiu realizar a conversão RG→RA
S	18	18
N	8	5
P	3	3

Fonte: Elaborada pela Autora, 2022.

Levando-se em consideração os resultados apresentados na Tabela 7, observamos que na Q4 questão também era facultativo ao aluno fazer a RG da parábola, porém esse procedimento foi amplamente orientado pelo professor em todas as aulas, como forma de utilizar essa representação como auxiliar na identificação das variáveis presentes no RA.

Observamos que dentre os 29 alunos que realizaram a questão Q4, 8 optaram por não construir a RG como representação auxiliar e tentaram identificar os elementos da parábola apenas dentro da própria RA. Desses 8 alunos, 3 não conseguiram realizar a questão da forma correta e 5 conseguiram fazê-lo sem o auxílio do gráfico.

Por outro lado, 18 alunos construíram a RG da parábola como representação auxiliar para identificar seus elementos. Desses, todos os 18 conseguiram identificar os elementos corretamente, voltando para a RA. Concluímos que esses alunos foram capazes de mobilizar esses dois RRS de forma a apresentarem compreensão do objeto matemático, conforme nos aponta a TRRS.

Temos ainda que 3 alunos tentaram representar graficamente a parábola, mas apenas a representaram parcialmente, identificando seus elementos, deixando faltar alguns detalhes, como a curva. Como as demais variáveis visuais estavam presentes, não houve prejuízo para o desenvolvimento da questão, então esses alunos conseguiram voltar para a RA corretamente.

- Quanto à conversão necessária na resolução da Q3:

Tabela 8 – Conclusões sobre Q3

RA→RG	Quantidade	RG→RA
S	14	5
N	5	-
P	10	1

Fonte: Elaborada pela Autora, 2022.

Levando-se em consideração os resultados apresentados na Tabela 8, observamos que nessa questão era necessário fazer a conversão entre o RA e RG da hipérbole.

Observamos que dentre os 29 alunos que realizaram a questão Q3, 14 conseguiram fazer essa conversão conservando as variáveis significativas do registro de partida no registro de chegada. Entretanto desses, apenas 5 alunos conseguiram identificar seus elementos, voltando para a RA de forma totalmente correta. Não há que se falar no sentido contrário da conversão para os alunos que não conseguiram realizar a ida.

Temos ainda que 10 alunos tentaram representar graficamente a hipérbole, mas apenas conseguiram parcialmente, o que também prejudicou a volta, já que as variáveis visuais do gráfico não foram representadas por completo.

Nesse caso apenas 5 alunos conseguiram mobilizar os RRS nos dois sentidos de conversão, mostrando que a aprendizagem dessa cônica, de acordo com a TRRS aconteceu para um número bem menor de alunos do que a das demais cônicas.

8 AMPLIANDO O FOCO: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Cada enunciado é um elo da cadeia muito complexa de outros enunciados.[1]

Estabelecendo um elo de enunciados constantes na presente pesquisa, desejamos com eles ampliar o foco dos limites que nos foram apresentados durante todo o processo de sua realização.

Falar das dificuldades existentes no processo de aprendizagem da Matemática é algo que muito inquieta os educadores matemáticos e buscar compreender os fatores que levam a essas dificuldades transcendem os aspectos presentes na sala de aula.

Aliada a todos os fatores já existentes para a inquietação de tantos educadores espalhados pelo mundo, a Pandemia COVID-19 veio modificar a escola e o ambiente de estudo, que passou a transcender as paredes físicas de nossas instituições de ensino, invadindo nossas casas e nossa intimidade através do ensino remoto emergencial iniciado no Brasil, de modo que seus reflexos estão sendo sentidos, e ainda o serão por um bom tempo.

A partir dessa nova realidade da educação nacional, passamos a investigar sobre a compreensão do conteúdo de cônicas, em seus variados registros de representação, por meio das interações discursivas em aulas remotas, baseados no referencial teórico, especialmente na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2009, 2011, 2012, 2014) e na produção de significados em aulas de matemática, a partir as relações dialógicas explicadas por Bakhtin (1993a, 1993b, 1997a, 1997b, 2002, 2006).

Observamos as aulas do 4º bimestre do ano letivo de 2020, de uma turma do 3º ano do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, campus Campina Grande, nas quais percebemos o cuidado com que o professor procurou trabalhar os conteúdos, envolvendo os alunos em questionamentos, instigando-os ao diálogo, sem a preocupação inicial com a formalidade da linguagem matemática, para que esta fosse abordada em um segundo momento.

Foi possível identificar as oportunidades criadas para que os alunos pudessem ouvir, falar, refletir, relacionar o aprendizado a fatos e objetos do cotidiano, ter acesso a representações semióticas por meio de softwares, vídeos, entre outros recursos utilizados nessas aulas. Dessa forma, os signos linguísticos também poderiam assumir outra perspectiva que não apenas a sintática no processo de aprendizagem. Lembramos nos dizeres de Gómez-Granell (1998, p. 36) que "a linguagem simbólica não substitui a linguagem natural; ambas coexistem e a primeira adquire sentido em função de sua relação com a segunda".

[1] Bakhtin (1997a, p. 291).

Conforme vimos no decorrer de nossa pesquisa, linguagem matemática e linguagem natural unem-se nos discursos presentes nas aulas de Matemática. Esses discursos ocorrem em língua natural, mas não se encerram nela, há muito mais em uma aula de Matemática do que as falas nos revelam.

A nossa língua não se basta para o ensino, nem tão pouco a linguagem formal da Matemática, puramente composta apenas por símbolos se faz compreender sem que as falas sejam para ela alicerces.

Voltamos nosso olhar para a Geometria Analítica e observamos que muitas são as dificuldades dos alunos, sejam por falta de conhecimento prévio dos conteúdos que são necessários à sua compreensão, seja pela complexidade maior em relação à geometria apresentada anteriormente aos alunos, ou pelas dificuldades de compreensão agravadas pelas aulas remotas.

Procuramos responder a nossa questão de pesquisa: Quais são as dificuldades para a compreensão do conteúdo de cônicas, em seus variados registros, nas interações discursivas em aulas remotas?

Pela análise dos resultados obtidos na presente pesquisa, observamos que as aulas de Matemática têm grande potencial para desenvolvimento de relações discursivas que possibilitem aos sujeitos se relacionarem de forma intensa, dependendo da metodologia utilizada pelo professor e da qualidade de suas provocações. Os discursos que estão presentes na sala de aula são discursos de várias naturezas e de esferas diferentes. São linguagens matemáticas (representação algébrica, geométrica, numérica, tabular, entre outras), a linguagem escrita, a linguagem oral, gestual, a linguagem inerente aos softwares utilizados, como o próprio Geogebra. Todas essas linguagens estão presentes tanto na aula presencial, como em um contexto de aulas à distância devido à COVID-2019.

Quando falamos do contexto pandêmico, essas aulas necessariamente precisam se apresentar de maneira mais oralizada, uma vez que por mais que o professor escreva um determinado conteúdo em uma lousa física (que pode ser transmitida através de uma câmera), como aconteceria em uma sala de aula "convencional", há limites para o que se pode fazer no contexto das aulas remotas (como com a transmissão de uma lousa digital apresentada pelo *Google Meet*).

Ao que concerne à atuação do professor da turma pesquisada, durante nossas observações, destacamos a riqueza do material produzido em suas aulas, mostrando toda a sua compreensão dos processos de ensino e aprendizagem e sua disponibilidade para tornar esses processos naturais para os alunos. Sua intervenção, utilizando variados registros de representação, e suas provocações aos diálogos proporcionaram à nossa investigação dados bastante relevantes para análise, demonstrando que seu papel foi de fundamental importância para nosso levantamento de dados.

Em uma sala de aula presencial, uma construção com material concreto, como a desenvolvida pelo professor e apresentada no Encontro 22 (Figura 65), poderia ser, além de observada, manipulada pelos alunos e até mesmo construída a partir dessa ideia transformando-se em uma aula prática. Enquanto em uma aula remota a construção está limitada à observação, através da tela de um dispositivo eletrônico, oralizada pelo discurso do professor.

Do ponto de vista do nosso referencial teórico, conforme Bakhtin, quando ocorrem as interações discursivas, ocorre a compreensão. Esta, por sua vez, não necessariamente se realiza do ponto de vista da aprendizagem matemática, que depende de um conjunto de fatores e, por isso, nem sempre é eficaz. Todas as aulas e, no contexto da nossa pesquisa, as aulas de matemática, estão repletas de relações discursivas e até mesmo as interrupções no processo comunicativo fazem parte desse processo, por não haver o contexto de uma sala de aula ideal. Da mesma forma que as interrupções, os silêncios também fazem parte do processo comunicativo.

No contexto das aulas remotas, pode ser que, em um determinado momento, fique parecendo que os diálogos muitas vezes se concentram tão somente em um sentido — professor–aluno — especialmente quando nos referimos às aulas transmitidas através do *Google Meet*, mas o aluno está tendo essas interações discursivas. Não conseguimos afirmar, no caso das aulas à distância, muita coisa sobre um determinado aluno que não liga o microfone, não se manifestando pelo áudio ou mesmo pelo chat, mas com certeza não podemos afirmar que não está havendo interações discursivas.

O hábito dos alunos permanecerem nas aulas com câmeras e microfones desligados parece evidenciar que não há interações discursivas, mas estas são observadas na constante participação de alunos nos diálogos. Dessa forma, certamente está acontecendo essa interação com o discurso do professor e com o objeto do conhecimento, também inclusive por parte dos outros alunos que não participaram de forma oralizada.

As dificuldades técnicas presentes em aulas também remotas podem interferir nos processos de ensino e aprendizagem de matemática e também precisam ser consideradas em nossa pesquisa. Além daquelas que são inerentes à realidade das aulas presenciais, no ensino remoto emergencial os professores tiveram que se deparar com dificuldades que presencialmente não existiam como aqueles decorrentes de falha de conexão, velocidade de transmissão de dados, problemas técnicos de áudio, vídeo, apresentação de tela, configurações, falta de visualização dos alunos e suas mensagens no chat quando estavam apresentando a tela, necessidade de equipamentos e softwares mais atualizados, a ausência de grande parte dos alunos nas aulas ou a falta de manifestação daqueles que estavam presentes mas não ligavam as câmeras ou não participavam das discussões, dentre outras.

Nas salas de aula remotas surgem também os silêncios. Não apenas os que já existiam nas aulas de matemática, mas agora amplificados: silêncios que incomodam, que ecoam em uma aparente falta de interação. Entretanto, estamos apenas parando para observar a interação por meio do áudio, mas, certamente, outros alunos também interagem, mesmo que não seja por esse meio. É o que nos revela de forma muito significativa a situação descrita nos diálogos da Situação (E17, CI, CF–S2), quando a aluna respondeu ao questionamento do professor no chat, mas ninguém conseguiu perceber e a falsa impressão de silêncio se destacou naquele momento da aula. Ou mesmo na Situação (E21, CO, VS–S6), em que a aluna afirmou que não havia ligado o microfone, mas estava lá presente na aula, respondendo a tudo mentalmente pelo fato de ser tímida e também por não querer atrapalhar o diálogo que estava sendo desenvolvido naquele momento.

Em relação à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, quando comparamos os resultados da nossa pesquisa com os apresentados por Santos (2014), observamos que as dificuldades que os alunos apresentaram naquela investigação levaram o pesquisador a concluir que os alunos pesquisados tiveram compreensão limitada sobre as conversões entre os registros de representação constantes no instrumento utilizado na pesquisa, de forma que a língua natural foi o maior problema encontrado nas conversões entre os registros.

Em nossas conclusões, voltando a nosso referencial teórico, observamos, conforme os resultados analisados no Capítulo 7, Seções 7.3 e 7.4, que nas Questões 2 e 4, apresentadas no instrumento avaliativo do componente curricular de geometria analítica era facultativa a realização de conversões entre registros da cônica, como representação auxiliar à resolução de cada questão. Esse procedimento, no entanto, foi estimulado pelo professor em todas as suas aulas para melhor visualização dos elementos de cada cônica.

Dessa maneira, na Questão 2, conforme dados analisados na Tabela 6, todos os 21 alunos que realizaram esse procedimento e 3 dos 8 alunos que não o fizeram conseguiram chegar à solução esperada. Assim, $82,7\%$ dos alunos lograram êxito na resolução da questão.

Observando a Questão 4 pelo mesmo foco, conforme dados analisados na Tabela 7, 18 alunos que realizaram a conversão entre os RRS conseguiram chegar à solução esperada, enquanto 5 dos 8 alunos que não utilizaram a representação auxiliar e 3 dos que representaram parcialmente a cônica chegando a aproximadamente $89,6\%$ de alunos que lograram êxito na resolução dessa questão.

Finalmente na Questão 3, conforme dados analisados na Tabela 8, a questão requeria a conversão entre a representação algébrica e a representação gráfica da cônica e a volta dessa conversão, completando o modelo de representação centrado sobre a função de objetivação de Duval (2009). Observamos que 14 alunos conseguiram realizar o primeiro sentido da conversão e desses 5 realizaram a volta, retornando ao registro inicial. Dos alunos que conseguiram realizar o primeiro sentido parcialmente, apenas um conseguiu realizar a volta, por perder no primeiro sentido elementos significativos do registro de representação, enquanto os demais alunos não conseguiram sequer realizar o primeiro sentido de conversão. O resultado dessa questão é que 6 alunos, o que representa $20,7\%$ do total, completaram o caminho que Duval (2009) chama de compreensão integrativa de uma representação, conforme Seção 2.4, ilustrada na Figura 6.

Na relação entre os registros de representação semiótica das cônicas, concluímos, baseados nas Questões 2 e 4, que uma grande parte dos alunos conseguiu mobilizá-los, de forma a chegar à compreensão desses objetos matemáticos, conforme a TRRS e diferentemente dos resultados obtidos por Santos (2014) em sua pesquisa. Mas não podemos precisar quantos desses alunos realmente fizeram as questões, utilizando todo o conteúdo amplamente discutido em aula, ou se alguns deles pegaram a atividade pronta, apenas para cumprir com as exigências da disciplina.

Analisando a resolução das questões, podemos concluir que os alunos que se dispuseram a representar as cônicas graficamente, como uma representação intermediária/auxiliar, tiveram melhores resultados na sua representação algébrica, através da mobilização desses registros.

Entretanto, quando nos remetemos à Questão 3, o resultado foi bem diferente das questões anteriores, pois a maioria dos alunos não conseguiu realizar os dois sentidos de conversão. Esse fato nos leva a novos questionamentos, uma vez que esses resultados correspondem à mesma turma, com as mesmas aulas, discussões e orientações. O resultado pode ser decorrente especificamente ao tipo de cônica — hipérbole — que pode ter tido menor compreensão do que as demais trabalhadas em sala. Também pode decorrer do fato de ser necessária a realização dos dois sentidos de conversão, possibilitando aos alunos perderem algumas variáveis significativas da representação, tornando difícil a volta ao registro de partida. Outro motivo poderia ser o fato de que a questão se referia a uma hipérbole com centro fora da origem, conteúdo disponibilizado pelo professor no *Google Classroom* — Aula 23 — através de uma aula assíncrona e não em aula síncrona, como os demais conteúdos, podendo ter dificultado a compreensão dos alunos pela ausência da explicação do professor, ou mesmo havendo a possibilidade de muitos não terem dado importância a essa aula específica, deixando seu material de lado.

Quanto às situações de interação discursiva, conforme o dialogismo de Bakhtin, observamos que língua natural e linguagem matemática precisam estar aliadas nos processos de ensino e aprendizagem da geometria analítica. Conforme discutido em nosso referencial teórico, as dificuldades para a aprendizagem da Matemática perpassam as dificuldades específicas da área, adentrando também na comunicação que ocorre na sala de aula. A análise pura e simples da efetivação das conversões entre registros de representação das cônicas não nos parece suficiente para compreender as dificuldades que os alunos encontram para seu aprendizado, fazendo-nos voltar nosso olhar para as relações dialógicas presentes nas aulas de geometria analítica, com enfoque em nossa questão de pesquisa e nosso objetivo geral.

Concluímos que as dificuldades para a compreensão do conteúdo de cônicas, em seus variados registros, podem estar associados a esses objetos matemáticos e a suas representações por si mesmos. Podem ainda estar associadas à insuficiência de conhecimento prévio dos alunos, necessário para embasamento das manipulações algébricas e gráficas de seus registros de representação. Ressaltamos que essas dificuldades podem também ter sido agravadas pelas limitações inerentes às aulas em formato remoto e a todo o abalo emocional decorrente do período pandêmico.

Concluímos ainda que as próprias interações discursivas podem contribuir ou limitar a aprendizagem do conteúdo de cônicas em aulas remotas, conforme sejam bem direcionadas e incentivadas ou quando ausentes ou restritivas. Nesse aspecto, é de fundamental importância a condução do professor para alcançar os objetivos definidos para o conteúdo e para o processo de aprendizagem como um todo.

Concluímos, dessa forma, que atingimos nosso objetivo de investigar sobre a compreensão do conteúdo de cônicas, em seus variados registros de representação, por meio das interações discursivas em aulas remotas, ao analisarmos a compreensão desse conteúdo por meio do marco teórico da nossa pesquisa. A nosso ver as interações discursivas nas aulas remotas de geometria analítica contribuíram para melhores resultados na mobilização dos registros de representação semiótica das cônicas e, consequentemente, para seu aprendizado.

Por fim, destacamos a importância de estimular as relações dialógicas em sala de aula, possibilitando a criação de elos e incentivando a mudança no olhar dos nossos alunos, para que o processo de aprendizagem da geometria analítica, e da Matemática como um todo, possa ser realizado entre olhares e falas de sujeitos que se alternam em posições de fala, de escuta, de respeito e compreensão mútua. Dessa forma, podemos continuar construindo pontes que nos unam e nos fortaleçam, dando continuidade a esse belo caminho da Educação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. J. P. d. **Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de matemática**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2012.

ALMEIDA, M. de C. **O nascimento da matemática**: a neurofisiologia e a pré–história da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

ARRUDA, E. P. Educação remota emergencial: elementos para políticas públicas na educação brasileira em tempos de Covid-19. **EmRede – Revista de Educação à Distância**, v. 7, n. 1, p. 257–275, 2020. Disponível em: <https://www.aunirede.org.br/revista/index.php/emrede/article/view/621/575>. Acesso em: 16 ago. 2022.

BAKHTIN, M. M. **Para uma filosofia do ato**. Tradução Carlos Alberto Faraco e Cristovão Tezza [para fins didáticos]. Austin: [s.n.], 1993. Texto completo da edição americana Toward a philosophy of the Act. University of Texas Press.

_____. **Toward a Philosophy of the Act**. Translation and Notes by Vadim Liapunov. Edited by Michael Holquist and Vadim Liapunov. 1. ed. Austin: University of Texas Press, 1993.

_____. **Estética da Criação Verbal**. Tradução Maria Emsantina Galvão G. Pereira. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

_____. Gêneros do discurso. In: **Estética da Criação Verbal**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

_____. **Problemas da poética de Dostoiévski (1929)**. Tradução Paulo Bezerra. 3. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2002.

_____. **Marxismo e filosofia da linguagem**. 12. ed. São Paulo: Hucitec, 2006.

BARBOZA, P. L. **Compreensões do discurso do professor de matemática pelos alunos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Campina Grande, 2011.

BEZERRA, P. Polifonia. In: BRAIT, B. (Org.). **Bakhtin**: conceitos-chave. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018. p. 191–200.

BOALER, J. **Mentalidades Matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto editora, 1994.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 1974.

BRAIT, B. Análise e teoria do discurso. In: BRAIT, B. (Org.). **Bakhtin**: outros conceitos-chave. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2018. p. 9–32.

BRAIT, B. (Org.). **Bakhtin**: conceitos-chave. São Paulo: Contexto, 2018.

_____. **Bakhtin**: outros conceitos-chave. São Paulo: Contexto, 2018.

BRAIT, B.; MELO, R. d. Enunciado/enunciado concreto/enunciação. In: BRAIT, B. (Org.). **Bakhtin**: conceitos-chave. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018. p. 61–78.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Brasília, DF, 1996. Disponível em: <hhttp://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 07 jul. 2022.

_____. Matemática. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Ministério da educação: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEF, 2006.

_____. BNCC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017.

_____. Decreto nº 9.057, de 25 de maio de 2017. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Decreto/D9057.htm>. Acesso em: 21 set. 2022.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103–128, 2015.

CARVALHO, M. **Estágio na licenciatura em matemática**: observações nos anos iniciais. Petrópolis: Vozes, 2012. 21–33 p.

COLL, C.; MARCHESI, Á.; PALACIOS, J. **Desenvolvimento psicológico e educação**: psicologia evolutiva. Porto Alegre: Artes Médicas, 2004.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma introdução. Campinas: Papirus, 1999. v. 2, p. 135–153.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

D'AMORE, B.; BONOMI, M. **Matemática, estupefação e poesia**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

DELEUZE, G. **Proust e os signos**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2006.

DESCARTES, R. **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences**. Leiden: Hachette et cie, 1637. v. 1.

DEVLIN, K. **O gene da matemática**. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. v. 2, p. 11–33.

_____. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011. I.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** — Revemat, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 10 jul. 2020.

_____. Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em geometria. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 15–38.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FANIZZI, S. **A interação nas aulas de matemática**: um estudo sobre aspectos constitutivos do processo interativo e suas implicações na aprendizagem. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2008.

FEIO, E. d. S. P. **Matemática e linguagem**: um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

FIORIN, J. L. Interdiscursividade e intertextualidade. In: BRAIT, B. (Org.). **Bakhtin**: conceitos-chave. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018. p. 161–193.

FREGE, G. Sobre o sentido e a referência. **Fundamento** — Revista de Pesquisa em Filosofia, Outo Preto, v. 1, n. 3, p. 11–20, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/fundamento/issue/view/168/65>. Acesso em: 20 jul. 2021.

FREIRE, P.; GADOTTI, M.; TORRES, C. A. **A educação na cidade**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR, J. R.; BONJORNO, J. R.; SOUZA, P. R. d. C. **360º Matemática Completa: ensino médio**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2017. v. 3.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (Org.). **Além da alfabetização**: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 1996. v. 4, p. 257–282.

_____. Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In: RODRIGO, M. J.; ARNAY, J. (Org.). **Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores**. São Paulo: Ática, 1998. v. 2, p. 15–41.

HODGES, C. B.; MOORE, S.; LOCKEE, B. B.; TRUST, T.; BOND, M. A. The difference between emergency remote teaching and online learning. Educause, 2020. Disponível em: <https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/104648/facdev-article.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 22 ago. 2022.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: Ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA. Resolução nº 28 do Conselho Superior do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. **Portal do IFPB – Ministério da Educação**, João Pessoa, 2020. Disponível em: <https://www.ifpb.edu.br/orgaoscolegiados/consuper/resolucoes/ano-2020/aprovadas-pelo-colegiado/resolucao-no-28>. Acesso em: 30 ago. 2020.

_____. Resolução nº 29 do Conselho Superior do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. **Portal do IFPB – Ministério da Educação**, João Pessoa, 2020. Disponível em: <https://www.ifpb.edu.br/orgaoscolegiados/consuper/resolucoes/ano-2020/aprovadas-pelo-colegiado/resolucao-no-29>. Acesso em: 30 ago. 2020.

LAPLANE, A. L. F. d. Interação e silêncio na sala de aula. **Cadernos Cedes**, SciELO Brasil, v. 20, n. 50, p. 55–69, 2000. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ccedes/a/VfpJcsx8xbRWhkJFVTkrpMP/?lang=pt>. Acesso em: 26 dez. 2022.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3 rev. ed. São Paulo: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores).

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. **Revista da Faculdade de Educação**, v. 15, n. 2, p. 161–166, 1989.

_____. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 2001.

MAGGIO, D. P.; NEHRING, C. M. Registros de representação semiótica e prática discursiva no ensino do conceito de função. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 89–112.

MIRANDA, S. R. N. O artigo "sobre o sentido e a referência" de Frege. **Fundamento** — Revista de Pesquisa em Filosofia, Outo Preto, v. 1, n. 3, p. 21–46, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/fundamento/issue/view/168/65>. Acesso em: 20 jul. 2021.

MOREIRA, J. A.; SCHLEMMER, E. Por um novo conceito e paradigma de educação digital onlife. **Revista UFG**, v. 20, n. 26, 2020. Disponível em: <https://repositorioaberto.uab.pt/handle/10400.2/10642>. Acesso em: 10 out. 2022.

MUNIZ JUNIOR, F. H. M. **Seções cônicas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2018.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista da Educação Matemática**, 2005.

NASCIMENTO, K. F. d. **Luz, cônicas, reflexão**: uma sequência didática para o ensino de cônicas. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco. Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

NESSELMANN, G. H. F. **Die Algebra der Griechen**: nach den quellen bearbeitet. Berlin: Reimer, 1842. v. 1.

OLIVEIRA, R. M. de; CORRÊA, Y.; MORÉS, A. Ensino remoto emergencial em tempos de covid-19: formação docente e tecnologias digitais. **Revista Internacional de Formação de professores**, v. 5, p. e020028–e020028, 2020.

OLIVEIRA, U.; VIEIRA, A. C. C.; JUNIOR, J. C. J. R. **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica**. 1. ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2015.

PAULA, L. d. Círculo de Bakhtin: uma análise dialógica de discurso. **Revista de Estudos da Linguagem**, Belo Horizonte, v. 21, n. 1, p. 239–257, 2013. Disponível em: <https://https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/125169/ISSN0104-0588-2013-21-01-239-257.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 15 jan. 2022.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria**: uma visão histórica. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Campinas, 1989.

PAVANELLO, R. M. O abandono da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, n. 1, p. 7–17, 1993.

PEIRCE, C. S. **The Collected Papers of Charles Sanders Peirce**. Charlottesville: Intelex Corporation, 1931–1935. Eletronic edition reproducing Vols. I–VI [C. Hartshorne and P. Weiss (eds.), Cambridge: Harvard University Press, 1931–1935]; Vols. VII—VIII [A. W. Burks (ed.), same publisher, 1958].

_____. **Semiótica**. Tradução: José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 1977. Título original: The Collected papers of Charles Sanders Peirce.

PEREIRA, R. A. Os gêneros do discurso sob perspectiva da Análise Dialógica de Discurso do Círculo de Bakhtin. **Letras**, Santa Maria, v. 20, n. 40, p. 147–162, 2010.

PONTES, H. M. d. S.; DIONIZIO, F. A. Q. Concepções de Peirce, Frege, Saussure e Duval sobre Semiótica: uma trajetória. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 209–225.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAMPIERI, R.; COLLADO, C.; LUCIO, M. Definições dos enfoques quantitativo e qualitativo, suas semelhanças e diferenças. Penso, Porto Alegre, 2013.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. 1. ed. São Paulo: Brasiliense, 2006.

SANTAELLA, L.; NOTH, W. **Introdução à semiótica**: passo a passo para entender os signos e a significação. São Paulo: Paulus, 2017.

SANTOS, C. A. d.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica**: a fotografia e a escrita na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

SANTOS, J. C. d. **Um diagnóstico da aprendizagem da cônica elipse no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

SANTOS, V. d. M. Linguagens e comunicação na aula de matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 117–126.

SAUSSURE, F. D. **Curso de linguística geral**. São Paulo: Editora Cultrix, 2008.

SILVA, A. S. d. S.; PACHÊCO, F. F. F.; COSTA, G. H. d. C. **Diferentes comunicações da linguagem**: reflexões sobre dificuldades e facilidades para o conhecimento matemático. Curitiba: Appris, 2018.

SILVA, C. R. d. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SILVA, E. N.; LIMA, A. C. d. S.; OLIVEIRA, T. S. P. d. Estudo da álgebra: O desenvolvimento histórico da formalização simbólica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7, n. 20, p. 347–356, 2020.

SILVEIRA, M. R. A. d. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SOARES, F. d. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. d. Ensino de matemática no século XX: da reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **Horizontes**, Universidade São Francisco, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7–15, jan./jun. 2004.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 1991.

UNESCO. COVID–19: Impact on education. 2020. Disponível em: <https://en.unesco.org/covid19/educationresponse>. Acesso em: 07 out. 2022.

VOLPATO, M. A.; CARGNIN, C. As cônicas sob o olhar dos registros de representação semiótica nos livros didáticos de matemática. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2016.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

O(a) Sr.(a) está sendo convidado(a) a participar, voluntariamente, de uma pesquisa, intitulada provisoriamente de **A língua natural como registro de representação semiótica e a compreensão da linguagem matemática no estudo da geometria analítica,** de responsabilidade da pesquisadora **Elvira Carmen Farias Agra Leite,** mestranda do Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba**.** Ao participar, estará contribuindo com o material coletado para subsidiar os estudos acerca do processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica no 3º ano do Ensino Médio.

DESCONFORTOS, RISCOS E BENEFÍCIOS: Não haverá desconfortos ou riscos para quem se submeter à coleta dos dados, ou estes serão mínimos. Não haverá identificação individualizada (a exemplo de nome, matrícula, CPF, RG, etc.) e os dados da coletividade serão tratados com padrões éticos (conforme Resolução do Conselho Nacional de Saúde 466/2012) e científicos. Não haverá despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo, assim como não haverá compensação financeira relacionada à sua participação.

FORMA DE ACOMPANHAMENTO E ASSISTÊNCIA: A participação nessa pesquisa não implica necessidade de acompanhamento e/ou assistência posterior. Entretanto, caso queira, em qualquer etapa do estudo, o participante terá acesso aos responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas sobre os procedimentos utilizados.

GARANTIA DE ESCLARECIMENTO, LIBERDADE DE RECUSA E GARANTIA DE SIGILO: O(a) participante e seu responsável legal, quando se tratar de menor de idade, será esclarecido(a) sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar. O(A) Sr.(a) é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e sua recusa não irá acarretar qualquer ônus. Os pesquisadores irão tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Os resultados da pesquisa poderão ser utilizados pelos pesquisadores em publicações, periódicos, livros, eventos científicos, cursos, e outras divulgações acadêmico-científicas. A veiculação de voz dos sujeitos permanecerão confidenciais podendo ser utilizados apenas para a execução dessa pesquisa. O(A) Sr.(a) não será citado(a) nominalmente ou por qualquer outro meio, que o(a) identifique individualmente, em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo. Uma cópia deste consentimento informado, assinada pelo(a) Sr.(a) na última folha e rubricado nas demais, ficará sob a responsabilidade do pesquisador responsável e outra será fornecida ao(a) Sr.(a).

DA AUTORIZAÇÃO: Ao aceitar participar do estudo o(a) Sr.(a) autoriza a utilização gratuita pelos pesquisadores de: respostas de questionários e atividades realizadas durante a pesquisa, sejam escritas ou orais, resoluções de questões, textos ou fotografias produzidos pelo(a) participante; respostas concedidas em entrevista (escrita ou gravada), ou outras atividades realizadas durante a pesquisa que se façam necessárias.

Este termo de consentimento encontra- se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você. Este termo foi elaborado em conformidade com o Art. 228 da Constituição Federal de 1988; Arts. 2º e 104 do Estatuto da Criança e do Adolescente; e Art. 27 do Código Penal Brasileiro; sem prejuízo dos Arts. 3º, 4º e 5º do Código Civil Brasileiro.

CUSTOS DA PARTICIPAÇÃO, RESSARCIMENTO E INDENIZAÇÃO POR EVENTUAIS DANOS: A participação no estudo não acarretará custos para o participante e não lhe será fornecida nenhuma compensação financeira. Não é previsível dano decorrente dessa pesquisa ao(a) Sr.(a), e caso haja algum, não há nenhum tipo de indenização prevista.

DECLARAÇÃO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA: Declaro que fui informado(a) dos objetivos da pesquisa acima de maneira clara e detalhada e esclareci todas minhas dúvidas pela pesquisadora **Elvira Carmen Farias Agra Leite** que certificou que todos os dados desta pesquisa serão confidenciais, no que se refere a minha identificação individualizada, e deverão ser tornados públicos os dados do estudo através de algum meio. A pesquisadora se compromete, também, seguir os padrões éticos definidos na Resolução CNS 466/12. Também sei que em caso de dúvidas poderei contatar os pesquisadores através dos seguintes contatos: **Discente pesquisadora:** (83) 99138-3410. E-mail: elvira.leite@aluno.uepb.edu.br.

Campina Grande – PB, 01 de março de 2021.

Nome do Participante	RG	Assinatura do Participante da Pesquisa (DISCENTE)
Nome do Responsável Legal	RG	Assinatura do Responsável Legal (Caso o participante seja MENOR DE IDADE)
Pesquisadora		Pesquisadora

APÊNDICE B – TRANSCRIÇÃO DA AULA 17

Descrição:	**Aula 17**
Data:	**24/03/2021**
Início da aula:	**13h20**
Término:	**14h35**
Duração:	**01h15**
Participantes:	**Professor, Pesquisadora, 11 alunos (total de 13 pessoas)**
Alunos presentes:	**A2, A4, A6, A8, A13, A14, A19, A23, A22, A25, A27**
Conteúdo:	**Circunferência**

TRANSCRIÇÃO DA AULA

P: Olá boa tarde, vamos começar mais um encontro de Matemática 3, com esse pessoal elegante. Bem, a primeira informação da tarde aqui para vocês é que eu postei agora há pouco, faz poucos minutos, uma atividade para vocês, tá? Referente ao terceiro bimestre. Como eu tinha prometido serão separados em duas partes, né? Então a primeira que eu coloquei lá são três questões apenas, a segunda também vai ser três questões apenas: três e três. Então essa primeira fala trata sobre ponto e reta parte um: ou seja, basicamente [não dá para entender esse trecho da fala] equação da reta, a segunda aí vai ver distância entre ponto e reta, cálculo de área e posição relativa entre retas: paralelismo e perpendicularismo. A primeira bem curtinha, três questões, coisa bem rápida para vocês fazerem, não tem bicho de sete cabeças não, tá?

P: O prazo que eu coloquei para só como eu tinha dito também a vocês não tem esse negócio de agonia, prazo curto demais não. Para essa primeira vão ser cinco dias para segunda também serão 5 dias. Tranquilo?

A25[a]: Tranquilo!

P: São 3 questões, fazendo uma por dia vocês ainda ficam com dois dias de folga [risos do professor]. Boa tarde, aluno chegando por aí! [o professor ajeitou a câmera do notebook]. Bem, já estamos aqui no finalzinho, deixa só eu relembrar aqui do nosso calendário acadêmico. Em tese, em tese, o nosso 4º bimestre começa na sexta-feira, mas aí para não fazer uma junção, pessoal, de muitos conteúdos, para não misturar ponto e reta com cônicas, o que a gente já estudou de ponto e reta, ou seja, repete aquelas duas primeiras atividades. Eu já postei a primeira vai ser o conteúdo do terceiro bimestre, e o que a gente vir a partir de hoje é referente ao quarto, tá certo? Então fica separado cônicas só para o 4º. Vamos nós. Então para começar esse nosso papo aqui de cônicas, eu queria perguntar inicialmente a vocês se vocês têm conhecimento do que é uma superfície cônica para vocês, o que é uma superfície cônica ou se esse termo remete a um conceito que vocês já conhecem [o professor esperou os alunos se manifestarem].

A2[a]: Cônica me faz lembrar professor de cone, né? Da figura espacial.

P: Isso, muito bem! Cone: olha aí que coisa boa.

A25[a]: Eu só lembrei daquele chapeuzinho de aniversário.

P: Isso. É um clássico exemplo de uma superfície cônica, quando a gente pensa no cone, obviamente, eu estou tomando ali, ele tem uma certa altura, né? Então que tal a gente expandir um pouco mais essa ideia pessoal? Então, imaginem a seguinte figura: eu vou compartilhar com vocês a tela para gente filosofar um *poquito*. Quando aparecer aí vocês me avisem, por favor. [o professor compartilhou a tela com o Geogebra Classic, apresentando uma construção da superfície cônica de 2 folhas, conforme a captura de tela adiante]

A13, A25[a]: Apareceu!

P: Então, imagina essa superfície cônica aqui. Como vocês podem observar é como se nós tivéssemos dois cones um sobre o outro [professor faz o gesto de um cone sobre o outro com as mãos]. De que maneira nós podemos obter essa imagem? Imaginem vocês, pessoal, uma reta aqui onde eu estou passando meu mouse [o professor passa o mouse sobre a reta geratriz da superfície cônica]. E nós tomássemos um ponto dessa reta. Suponha esse ponto aqui. E nós fôssemos girando a reta, segurando nesse ponto. Então vou até fazer aqui como se fosse com a minha caneta ó [o professor pegou uma caneta na mão e faz o movimento de giro para a tela, mostrando o movimento de rotação para os alunos]. Estou com a minha reta, estou com a minha caneta e vou girando assim, olha! Percebe? Girando de que maneira, professor? Até, por exemplo esse ponto aqui [apontou para a extremidade da caneta] fazer o caminho de um círculo. Olha só! [fez o movimento circular na caneta]. De que maneira geral até por exemplo esse ponto aqui está fazendo o caminho de um círculo? Olha só.

P: Bem, o que a gente obtém com isso é exatamente essa imagem que está aqui [mostrou novamente a imagem do compartilhamento de tela]. Essa reta que está fazendo esse papel é exatamente a geratriz: ela gera essa nossa superfície cônica. É interessante chamar a atenção do seguinte para vocês, pessoal, como inicialmente nós consideramos uma reta, essa minha caneta está fazendo o papel de reta, esse cone, essa superfície cônica não tem esse fim, tá pessoal? [destacando que na imagem compartilhada a superfície cônica está limitada]. Ela continua infinitamente para cima e continua infinitamente para baixo porque a gente está como geratriz uma reta [aqui ele deixou subentendida a definição de reta] ok? Se fosse um segmento tomando o ponto médio eu teria essa imagem finita aí [mais uma vez se referindo à construção compartilhada], dentro de uma região. Então, olha só, essa é a nossa superfície cônica. O que é que nós vamos começar a pensar com essa superfície cônica? Imaginem vocês tendo essa imagem e considerando um plano e esse plano “cortando”, ou seja, interceptando a minha superfície cônica. Pessoal, estou chamando atenção aqui: o tempo todo falando “superfície”, “superfície”, “superfície” porque isso aqui é oco, tá? [o professor girou um pouco a construção para dar uma visão superior do objeto]. É só o “chapeuzinho de aniversário” para cima, o “chapeuzinho aniversário” para baixo [conforme a noção apresentada pela aluna A25, quando P perguntou sobre o que eles entendiam por cônicas], claro, imaginem isso infinito para cima, infinito para baixo. Então nós vamos agora imaginar um plano intersectando essa minha superfície cônica. Percebam: esse plano poderia ser mais inclinado, menos inclinado, poderia ser um plano vertical, um plano horizontal... [enquanto falava, o professor movimentava o plano da construção, conforme suas falas].

P: E aí o que a gente vai fazer agora é exatamente imaginar essas possíveis intersecções. Pessoal, aqui como vocês podem observar, eu tenho b igual a zero, não sei se na imagem está bem visível. Está visível para vocês aqui b igual a zero, pessoal? [o b a que ele se referiu estava marcando zero, em um controle deslizante da janela geométrica do Geogebra]. Isso significa que o nosso plano está horizontal, tá certo? Um plano horizontal.

Quando a gente toma o plano e a intersecção do plano com a superfície vai me dar essa imagem que eu estou passando mouse aqui em cima. Estão vendo? Essa imagem azul aqui!

A25[a]: Um círculo azul, né?

P: Isso! Em azul! Só a linha, tá pessoal? Nesse caso, a intersecção do plano com a superfície cônica gerou que imagem?

A22[a]: Um círculo?

A25[a]: Um círculo!

P: Sim? Sim! Eu vou concordar com vocês, mas eu vou fazer uma pergunta quando vocês dizem para mim "círculo", na cabeça de vocês a imagem que vocês têm de círculo, esse conceito, é da imagem que tem a região [aqui usa o termo região em substituição a lugar geométrico] que compreende a "região" [aqui ele usou o termo para se referir à área] ou é simplesmente a linha? Aliança, por exemplo [P retira sua aliança do dedo e mostra na tela para que os alunos compreendam].

A22[a]: A linha!

A25[a]: É só a linha!

[P ia retomar o diálogo quando foi interrompido por A2]

A2[a]: Então seria uma circunferência, né professor?

P: Isto! Normalmente, aí vejam, da forma como vocês vêm estudando desde a educação do Ensino Fundamental quando a gente define lá "circunferência", a gente estava falando da linha: "é o conjunto de pontos que equidistam de um ponto dado" [aqui ele retomou a definição de circunferência]. Quando a gente fala de "círculo", estamos falando da região limitada por uma circunferência, ou seja, que contém a área. Então, nessa situação [P retoma a imagem compartilhada do Geogebra] como temos apenas a linha, então temos a circunferência, tá certo? Agora, não é difícil, pessoal, vocês acharem na literatura, caso vão fazer uma procura em alguns livros, entenderem a circunferência como círculo, e o círculo como sendo "disco". Ou seja, quando você falasse só na linha ele chamaria de círculo e quando você fala num CD, por exemplo, tampando aquele buraquinho no meio, claro, você teria um disco. Isso vem muito da língua inglesa, tá? Das traduções de livros da língua inglesa. Lá círculo para eles é a linha e disco, o que tem área, tá bom? Então nessa intersecção, nós obtivemos aqui um disco, um círculo, circunferência... olha aí eu trocando as palavras! CIRCUNFERÊNCIA! [falou enfático]. O que é que aconteceria se esse plano ao invés de passar nessa altura, passasse exatamente onde esses dois cones se intersectam? Nós teríamos o quê? [esperou alguns segundos por uma resposta e ninguém responde, então complementa mostrando a construção do Geogebra] Imagine esse plano “subindo” tá? Vou ver se eu consigo fazer isso aqui tá? [começou a manipular o plano na construção, subindo e descendo] Não vou conseguir [a construção chegou próximo ao ponto que ele quer mas não o suficiente]. Imagina esse plano subindo, ele “cortando” mais em cima aqui, olha! Se ele cortasse exatamente aqui [mostrou com o cursor do mouse o ponto a que ele se referia. Nesse momento é interrompido por A25].

A25[a]: Acho que ficaria só um ponto.

P: Como?

A25[a]: Acho que ficaria só um ponto.

P: Só um ponto! [aprovando a resposta da aluna] Muito bem! Então se nós temos um pouco aqui abaixo, então um plano horizontal pode gerar, quando intersecta, pode gerar uma circunferência e também pode gerar um ponto. Agora vamos tomar outra situação né? Que tal agora esse plano ser inclinado? Vou inclinar pro nosso lado aqui, olha [inclinando o plano]

P: P, se eu inclinar demais fica aberto [ele falou como se fosse um aluno fazendo uma observação para ele]. Mas lembrem pessoal, essa superfície cônica ela é infinita para baixo, então ela não ficaria aberta. Entenda, ela continuaria fechada, tá bom? Então olha aí a nossa intersecção. Vou virar um pouco a superfície cônica. Essa imagem que aparece aqui em azul, pessoal, vocês reconhecem? Lembram do nome dela?

A22[a]: Elipse?

P: É uma elipse. O movimento dos planetas, a órbita deles segue uma órbita elíptica, não é assim? Estudaram isso em outras disciplinas aí.

A25[a]: É sim!

P: Então vejam, quando o nosso plano é um plano não horizontal, mas também não estou considerando ele vertical, tá certo? Um plano inclinado. A intersecção gera pra gente essa imagem que a gente chama de elipse. Observe que tanto para um lado, como para o outro [ele inclinou o plano na direção oposta na construção para comprovar o que está falando]. É só eu girar aqui e observar do outro lado. Então se o plano é horizontal eu posso ter uma circunferência, ou um ponto e se o plano é inclinado eu posso ter uma elipse. Mas o que é que aconteceria se ele tivesse a mesma inclinação da reta geradora? [mudou a inclinação na construção para que ficasse com a mesma inclinação da reta geratriz].

A22[a]: Uma palábora? [o aluno tentou falar como compreendia a palavra parábola]

P: Será hein? [A aluna A25 estava falando também ao mesmo tempo e o primeiro som que emite não é compreensível. Segue então negando].

A25[a]: Não, não, não.

P: Estou colocando de frente aqui para vocês. Estão enxergando ele aqui?

A25[a]: Uma parábola não?

P: Exato... O que eu vou fazer aqui é só ficar caminhando com ele [o plano], percebam: está sempre caminhando paralelo à reta geratriz, tudo bem?

A25[a]: Sim.

P: Então quando eu mexer agora nele vocês vão perceber que ele vai simplesmente ficando menor ou maior. A parábola vai ficando mais “fechada” ou não. Então uma parábola, e aí a gente já pode começar a pensar um pouquinho né? Quando a gente estudou parábola, função quadrática, lá no 1º ano, começaram no 9º ano, o professor dizia “ah, o gráfico de uma função quadrática é uma... [pausa] parábola”. Lá a gente simplesmente dava o nome né? “Ah o gráfico dessa função aqui é uma parábola”. Aqui em [Geometria] Analítica nós vamos ver que dada a definição de parábola nós vamos chegar naquela equação que gerava a função polinomial do 2º grau, certo? Continuemos. Então se nós temos um plano paralelo a nossa geratriz eu tenho então parábolas. E se nós tivéssemos agora um plano vertical?

P: Percebam, esse plano vertical, pessoal, ele é paralelo ao eixo de simetria: “P, o que danado é esse eixo de simetria?” [simulando uma pergunta de algum aluno]. Deixa eu tirar o plano, quando nós rotacionamos a nossa reta, gerando a nossa superfície cônica, a gente pode imaginar aqui no meio, passando pelo vértice uma reta vertical, tá bom? Essa reta vertical a gente vai chamar de eixo de simetria. Então o que a gente está traçando agora são retas paralelas ao eixo de simetria. Vamos ver qual é a imagem que ele [o plano] gera na superfície cônica. Está um verde claro, mas eu acho que ainda dá para ver, não é pessoal? E olha...

A25[a]: Dá pra ver sim.

P: ... tem em cima e tem em baixo, tá? Essa imagem com esse formato vocês já ouviram falar? Sabem qual o nome dela? [instantes de silêncio] Nunca?

A22[a]: [falou alguma coisa que não deu para entender].

P: Essa cidadã aqui, esse par de curvas é a hipérbole. Se nós virarmos a superfície cônica, obviamente fizermos alguns cortes aqui, vocês já viram imagem nos livros muito provavelmente de História e Geografia, em que aparece um objeto que tem, gerado por essa curva. Lembra aí para mim, alguém lembra o formato, vou chamar de chaminés tá? E energia atômica, de usina atômica. Lembra daquele formatozinho assim [o professor fez o movimento com as mãos].

A22[a]: Sim, sim, sim.

A25[a]: Sim.

P: Aquilo lá tem o formato de hipérbole. Ali a gente está pegando apenas uma parte dela e vai fazendo uma rotação. Às vezes quando a gente vê também na parede uma lâmpada ou um abajur, em que a lâmpada sai para cima e sai para baixo, fazendo um formato assim [movimento com as mãos] muito comum em parede, aquelas lampadazinhas de parede, também têm o formato de hipérbole, tá?

P: Então, quando temos a intersecção de um plano vertical com a superfície cônica isso me gera essas cidadãs, que são as minhas, a minha hipérbole [sendo interrompido pelo aluno A22].

A22[a]: Mas professor...

P: Oi.

A22[a]: Eu queria saber porque as estruturas são feitas desse modelo então, o que beneficia elas serem desse tipo.

P: Opa!!! Vamos chegar nelas quando formos estudar especificamente, deixa eu olhar pra carinha de vocês [o professor alternou a tela de apresentação para a tela que contém os ícones com as imagens dos alunos ou das iniciais de seus nomes que os representam], a hipérbole. Vamos fazer o estudo de cada uma dessas quatro que eu falei agora há pouco: circunferência, elipse, parábola e hipérbole, não necessariamente nessa ordem, tá? E vamos ver um pouquinho o que der tempo de algumas aplicações desses conceitos, beleza?

A22[a]: Ok, ok.

P: Massa! Pessoal, o que é que aconteceria se o nosso plano vertical passasse pelo vértice da nossa superfície cônica? [apesar de já ter feito esse questionamento antes, agora P se referia à passagem pelo vértice do plano vertical]. Vocês conseguem enxergar aqui? [ele girou a construção do Geogebra para que os alunos pudessem fazer conjecturas e aguardou um pouco. Como ninguém respondeu, ele continuou dizendo] vou mexer de novo [aguardou alguns segundos e novamente ninguém respondeu, então ele continuou]. Ele não passa pelo vértice... eu tenho essa curva aqui, estão vendo bem?

A22, A25[a]: Sim!

P: Agora vamos passar pelo vértice, qual a imagem que eu tenho?

A25[a]: Um ponto.

P: Um ponto só? Vou andar de novo! [o professor movimentou a construção em giro lentamente e respondeu] não fica um ponto não, fica um "X".

A25[a]: Ah, tá, é a visão desses 4 pontos [a aluna se referiu aos pontos que apareceram nas extremidades e centro da imagem projetada na construção].

P: Exatamente passando por aqui e por aqui [mostrou com o cursor do mouse]. E colocando obviamente na linguagem mais correta, nós temos um "par de retas concorrentes", tá certo? Eu acho que só ficou faltando eu falar aqui, no caso da parábola, se o nosso plano... ele não está querendo andar aqui por quê? [P está tentando manipular a construção sem conseguir]. Agora sim! Se o nosso plano da parábola passasse... vou colocar ele de lado... não quero você [ele ocultou um dos planos da figura]... quero só você... [ele conseguiu colocar a imagem na posição desejada]. O que aconteceria se ele passasse pelo vértice? Olha!

P: O que é que aconteceria pessoal, se ele passasse pelo vértice? [P movimentou a construção para melhor visualização] Esse aqui não, a imagem não está mostrando e não vai ficar muito bom para vocês identificarem, mas olha só: imagine que ele vai fechando, fechando, fechando, até chegar no zero, vocês percebem que aqui ele só toca na superfície? Aqui ele também só toca na superfície. Então na realidade ele está tangenciando a superfície, olha. Então nós teremos uma reta aqui. Uma reta que passa pelo vértice, só toca a superfície aqui desse lado. Bem, e o que é que nós vamos estudar aqui, claro, além desses quatro nomes que eu coloquei aí, né? Circunferência, elipse, parábola e hipérbole. Quando a gente obteve aqui nessa intersecção essas imagens clássicas: elipse — oval, circunferência — obviamente redonda, parábola e a hipérbole, uma para cima e uma para baixo, nós extrapolamos um pouquinho aqui e fomos verificar outros casos em que o plano era paralelo, o plano passava pelo vértice e encontramos esse par de retas concorrentes, uma reta, um ponto. Esses casos: par de retas concorrentes, reta e ponto, a gente chama de casos "degenerados", mas não vamos estudar aqui tá? Nós vamos estudar apenas os casos "não degenerados", acho que até essa frase nem esteja no livro de vocês, mas não impede da gente usar esse termo também aqui com vocês. Então nós vamos estudar apenas as situações em que as imagens são essas clássicas, tá? Circunferência, elipse, parábola e hipérbole [P fez gestos com as mãos para a câmera, simulando a representação figural desses objetos], não esses casos degenerados.

P: Bem, dito isso, então vamos para a primeira situação, que é exatamente aquela da circunferência. Vocês conseguem lembrar definição de circunferência para mim? [silêncio] Pessoal definição de circunferência?

A25[a]: Eu não lembro não.

P: Quais são as características de um ponto que pertence à circunferência?

A25[a]: O raio?

A14[c]: Raio.

P: Hum, entendi. Vou voltar um pouquinho, um pouco atrás aqui. Vamos começar fazendo alguns desenhos para vocês.

A25[a]: Quando eu lembro de circunferência eu lembro do ciclo trigonométrico.

A8[a]: Linhas curvas.

P: Tem um bocado de conceito aí soltos e vamos dar uma arrumada nisso tá?

A27[a]: Professor, eu acho que a ideia de continuidade também.

P: Já apareceu um outro conceito que "vixe" dá pano para manga esse negócio chamado continuidade viu? Mas não vamos entrar nesse "trem" aí de continuidade ainda não né? Quando vocês estiverem, em breve, fazendo o curso conosco aqui de Matemática — olha como eu sou uma pessoa de fé — aí a gente vai estudar essa continuidade que você está falando, aí vai ter outra característica né? Deixa eu compartilhar com vocês a tela pra gente colocar esse monte de conceitos, vamos acertar a ordem aqui tá bom?

A4[c]: Aproximadamente é uma característica? [querendo dizer "proximidade"]

A25[a]: Professor, A4 tá perguntando [no chat] se a proximidade é alguma característica. P: Proximidade, vamos ver se esse "trem" proximidade... apareceu outra palavra aqui, a gente inclusive podia até brincar aqui com uma nuvem de palavras. Então vamos fazer o seguinte eu vou desenhar aqui uma circunferência, obviamente não vamos aqui ficar pensando na perfeição. Vamos lembrar de alguns elementos, a gente faz uma revisão de geometria plana e depois eu venho para analítica. Uma circunferência é essa linha branca que eu fiz aqui. Esse ponto C a gente chama de quê? Ele é o quê da circunferência?

A25, A22[a]: O raio?

P: Centro, é o centro da circunferência, tudo bem? Quando eu estou num ponto sobre a linha, ou seja, na circunferência, o segmento $\overline{CP}$, este sim é o raio. Ou seja é a distância do ponto até a nossa circunferência, até o nosso centro. A gente chama isso de r minúsculo normalmente né? Ou R maiúsculo, como vocês queiram. Vou colocar um r minúsculo, ele é feio, mas vai ficar assim mesmo tá?

P: Quando nós tomamos dois pontos da circunferência, mas o segmento $\overline{AB}$ não passa pelo centro, esse segmento $\overline{AB}$ a gente chama de quê?

Ax[a]: Diâmetro.

A14[c]: Origem, corda, diâmetro.

A25[a]: A14 colocou [no chat] que era corda.

P: Quem foi que colocou corda?

A25[a]: A14.

P: Muito bem senhorita! Corda!

E quando nós temos um segmento $\overline{CD}$, não vou chamar de C [o ponto da circunferência] porque eu já tenho o C, $\overline{DE}$ [marcando os pontos D e E no desenho], onde o D e o E pertencem à circunferência e o segmento contém o C, como é que a gente chama esse danado desse $\overline{DE}$?

A2[a]: Diâmetro.

P: Então diâmetro. Vejam, se nós olharmos com carinho, o diâmetro tem quantos raios?

A25, A2, A22[a]: Dois.

P: Dois! Então vamos chamar tudo isso aqui de d. E aqui nós temos que o diâmetro vale dois raios.

P: Então esses são os elementos de uma circunferência: o centro, o raio, corda, diâmetro e um ponto pertencente à circunferência, que eu tomei aqui como o ponto P. Vou fazer outra circunferência aqui só pra gente conversar um pouco sobre essa definição que eu quero. Centro C, $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, o que é que a gente pode afirmar além, claro, dos pontos $P1$, $P2$, $P3$ e $P4$ pertencerem à circunferência? Qual outra coisa que eu posso afirmar?

A2[a]: Que eles são equidistantes ao raio?

P: Olha...

A2[a]: Ao ponto central?

P: Como é que a gente chama o ponto central? [ninguém respondeu] Centro! Esses pontos são equidistantes ao centro, ou seja, a distância de $P1$ até o centro é igual à distância de $P2$ até o centro e a distância de $P4$ até o centro, todas essas distâncias são iguais ao raio. Agora eu vou voltar à pergunta inicial: Qual é a característica desses pontos $P1$, $P2$, $P3$ e $P4$? Você acabou de falar, eu quero só que você reafirme.

A2[a]: Que eles são equidistantes ao centro. P: Muito bem, circunferência é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto dado no plano, ou seja, circunferência é o conjunto de pontos do plano que equidistam de um ponto dado, esse ponto é o centro. A gente pode chamar esse centro de C, pode chamar esse centro de O, não interessa! Interessa a característica dos pontos que pertencem à circunferência. Então como nossa amiga agora colocou, a circunferência, vou até colocar assim: dado um ponto C, vou colocar coordenadas nesse ponto dado x_0 e y_0, num plano um conjunto e pontos P, vamos dar coordenadas também a esse ponto P, a distância de P até o centro é o certo R positivo é chamado circunferência. Mas é interessante a gente chamar a atenção do seguinte, veja que a gente tem uma definição para circunferência que nada depende de coordenadas: é o conjunto de pontos do plano que equidistam de um ponto dado, acabou! Quando eu começo a colocar coordenadas: quem é esse ponto dado? Ah é um ponto C aí x_0, y_0. E o que são esses pontos que equidistam? Ah eu estou chamando P de x, y. Quando eu começo a colocar coordenadas eu estou entrando agora na geometria analítica. E qual o nosso objetivo? É pegar essa frase — veja que a gente está com a definição, com a linguagem corrente — vamos passar isso para uma representação algébrica, ou seja, a pergunta que eu quero responder aqui é: qual é a equação que representa uma circunferência?

P: Então vamos lá, já que colocamos coordenadas no centro e coordenadas no ponto, a situação que nós temos é essa aqui, olha, tomamos aqui um centro de coordenadas x_0, y_0, e nós consideramos todos os pontos P que equidistam dessa circunferência... desse nosso centro [desenhou a circunferência na lousa digital], essa distância aqui é exatamente aquele nosso raio, que foi colocada na definição.

P: Pessoal, até aqui tranquilo para vocês?

A25, A22[a]: Sim.

P: Então vamos dar continuidade se o meu computador quiser trabalhar aqui. Agora vai, espero né? Vejam, quando a gente tem essa imagem do jeito que está montada, nós podemos observar aqui um triângulo retângulo.

P: Até pintei ele aqui para ficar bem visível para vocês. Ora, se nós temos um triângulo retângulo, então podemos utilizar o teorema de... como é o nome do "senhorzinho" lá?

A25, A22[a]: Pitágoras?

P: Teorema de Pitágoras! Para isso eu vou simplesmente chamar esse ponto aqui pessoal de D, tá? Ora, pelo Teorema de Pitágoras, a distância de C até D ao quadrado, mais a distância de P até D ao quadrado é igual à distância de P até C ao quadrado, ou seja, b ao quadrado mais c ao quadrado é igual a a ao quadrado [$b^2 + c^2 = a^2$]. Beleza para todo mundo? Fazendo uso do teorema de Pitágoras o que nós temos é isso aí. O computador parece que não está querendo trabalhar, vou sair e voltar de novo e ver se ele vai querer trabalhar ou não. Agora sim! Mas colocando essas distâncias em termos de coordenadas, como é que vai ficar para a gente aqui pessoal? Lembra que isto aqui vai ficar "raiz de", como está elevado ao quadrado nós vamos poder eliminar aqui a raiz com o quadrado. Claro, o termo que está dentro, ou seja, o radicando, ele é positivo. Então vamos escrever isso aqui. Como é que fica, pessoal, essa distância de C até D? [silêncio]

A14[c]: $x - x_0$.

P: Pessoal, alguém por aí? Vamos nós, conversamos sobre isso lá nas nossas primeiras aulas. Como é que vai ficar essa distância? Ó C para D? [Nenhum aluno respondeu oralmente. A14 digita no chat $x - x_0$, porém sua resposta não foi vista pelo professor, nem transmitida pelos demais alunos]

P: É a diferença entre os x, pessoal. x menos x_0. Lembra que essa diferença, ela ficou em módulo por qual motivo? [silêncio] Por que é que a gente usa módulo pessoal?

A22[a]: Para o resultado ficar positivo.

P: Exato, porque podia ser que o D estivesse desse lado, tudo bem? De forma análoga, como é que vai ficar a distância de P para D?

A25[a]: y menos y zero [$y - y_0$], ao contrário.

P: Então para evitar isso a gente faz o quê? Módulo né? Para não ter problema. E quem é a distância de P até C? Já está até escrito no texto.

A25[a]: x menos x zero [$x - x_0$].

A22[a]: É o raio?

P: Exatamente, é o raio, olha! Pessoal, como isso aqui está em módulo ao quadrado, então eu já posso tomar entre parênteses, tá? Essa é a equação reduzida da circunferência. Então o que é que a gente consegue obter de informação de uma circunferência quando nós temos a sua equação reduzida? As coordenadas do centro e a medida do raio, ok?

P: Deixa eu fazer um exemplo rápido sobre isso aqui. Exemplo: determine a equação reduzida da circunferência de centro menos um e dois[$(-1, 2)$] e raio 3. Beleza pessoal? Determinar a equação reduzida da circunferência, conhecendo seu centro e o seu raio. Vamos com carinho! Eu sei que aqui é bem rápido de fazer, é bem direto, mas como é o primeiro que eu estou fazendo, vamos fazer com bastante carinho. Centro menos um e dois, ou seja o x zero vale menos um e o y zero vale dois e o raio três. Substituindo estas informações na equação reduzida o que é que nós vamos ter? Portanto — qual é essa equação? — x menos menos um. Se nós fôssemos fazer com todo o rigor a gente teria isso aqui tá pessoal? Mas já vou fazer logo a relação de sinal: x mais um [$(x + 1)$] ao quadrado mais y menos y_0 e y_0 é igual a 2, ao quadrado ok? Equação reduzida escrita, vamos esboçar o gráfico dessa circunferência? Esboce o gráfico da circunferência do exemplo anterior. Vamos nós! Claro que eu vou fazer aqui à mão livre e não vai ficar esse "balaio de gato" todo não, tá? Mas vamos lá! [escrevendo no plano cartesiano] menos um, menos dois. Vou até diminuir um pouquinho porque desse tamanho não vai dar. Menos um, dois. P: Então aqui está o nosso centro. A gente até já falou sobre isso nas aulas de distância [distância entre pontos] né? Toma cuidado pois o sinal é trocado tá? Raio 3, bem pessoal se o raio é 3, então 1, 2, 3... 1, 2, 3... 1, 2, 3... [marcando os pontos da circunferência], ou seja a nossa circunferência tem este esboço, né? Claro que vocês fazendo em casa vocês vão ter compasso, esquadros e tudo vai ficar mais bonitinho, mas o importante aqui já que é apenas um esboço é podermos identificar no plano cartesiano onde está localizada essa nossa circunferência. Que tal a gente fazer agora o contrário? Vejam: nesse exemplo aqui que fizemos a gente saiu do "dado o ponto e o raio", nós escrevemos a equação. Passamos para representação algébrica e da representação algébrica fomos para a representação geométrica. O próximo exemplo nós vamos fazer o contrário: vou dar para vocês a representação geométrica e é pedido que determine a representação algébrica e seus elementos, tá certo? Exemplo: determine a equação reduzida da circunferência representada na figura a seguir. Escreva seus elementos. Quando eu falo para escrever seus elementos pessoal, é para vocês destacarem quem é o centro e quem é o raio, certo? Ok pessoal, então aí está desenhada para vocês a nossa circunferência. Nosso objetivo então é escrever a equação reduzida dessa circunferência. Da forma que está o desenho quem é o centro dessa circunferência?

A25[a]: O C!

P: Quais são as coordenadas?

A22[a]: Cinco e menos dois?

P: Cinco e menos dois! E quem é o raio dessa circunferência?

A22[a]: Dois!

P: Dois! Recapitulando: um, dois, três, quatro, cinco! Um, dois negativo! Raio dois, esse comprimento aqui ó. Ora, se eu tenho o centro e eu tenho o raio, como é que vai ficar a nossa equação?

A25[a]: x... [pausa] P: Que mais?

A25[a]: x mais cinco, elevado ao quadrado.

P: Vou escrever aqui tudo o que você está falando e depois a gente discute. Vai lá!

A22[a]: Eu acho que é menos!

P: Nosso amigo acha que é menos, vou deixar um menos aqui (anotou o sinal abaixo do sinal de mais, sem apagá-lo). E depois?

A22[a]: Aí y mais dois, elevado à segunda, igual a 4.

P: Ok, então vamos fazer uma retificação aqui olha. Por que que aqui é menos? Lembra que aqui é x menos x zero [x˘x_0]? Quem está fazendo papel de x_0 é 5 então vai ficar x menos cinco e aqui eu tenho y menos y_0 quem está fazendo papel de y_0? Menos dois, por isso que vai ficar mais dois, beleza? Não estou vendo aqui.

A25[a]: Porque no outro exemplo tava positivo aí eu não tinha visto que fez relação de sinal.

P: Pronto, mas ficou compreensível né?

A25[a]: Ficou sim.

P: Ok, eu vou passar rapidamente no livro de vocês, ele resolve aqui alguns exemplos, tem alguns exemplos resolvidos né?

P: Determinar a equação da circunferência, conhecendo as extremidades do diâmetro. Bem, se a gente conhece as extremidades do diâmetro quem seria o centro? Ponto médio! Daí para frente é tudo o que a gente já viu. Calcula distância, encontra o raio e faz os cálculos [mostrando uma imagem do livro]. Uma imagem bem parecida com a que a gente fez agora há pouco olha. E vai ficar para vocês darem uma olhada esse problema aqui: obtenha a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos tal e tal. Veja foram dados aqui três pontos. Um problema dessa natureza a gente já fez 90

P: Equação da reta perpendicular passando pelo ponto médio de um segmento, é um segundo caminho. Num terceiro caminho é utilizando — e aí é uma das sugestões que o livro de vocês coloca — eu não faria por esse caminho, é utilizando a equação geral... a equação reduzida, desculpa. Veja a gente não tinha ferramentas para isso até então, a gente tava fazendo por distância ou por reta, agora que a gente tem a equação reduzida eu posso montar uma equação, duas equações, três equações e realizar um sistema por meio de subtração. Então fica para vocês darem uma olhada na resolução desse problema, tentem resolver dessa maneira.

Ele [o livro] coloca um segundo modo, que é pelas mediatrizes e tem esse terceiro modo que eu propus para vocês quando estudamos distância entre dois pontos. Então, uma mesma questão, três formas distintas de resolver.

P: Bem, vamos dar sequência aqui e pensar no seguinte: Conhecendo a equação reduzida [ER, como ele escreve na lousa digital] da circunferência, ou seja, x menos x zero aos quadrado, mais y menos y zero ao quadrado $[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$ podemos desenvolver as operações e obtemos o seguinte...

P: Veja só, a gente vai pegar essa equação e vai desenvolver esses cálculos, vamos lá?

Percebam que nessa primeira parcela eu tenho o quadrado da diferença. Isso vocês já fizeram bastante lá no Ensino Fundamental no 9º ano né? 8º, 9º e continuaram utilizado. O quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo. Então este é o desenvolvimento deste quadrado da diferença. Vamos repetir o processo para essa parcela aqui: quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro, vezes o segundo, mais o quadrado do segundo. Bem pessoal, esse r ao quadrado eu vou subtrair em ambos os membros ou como vocês costumam dizer né? Nós vamos "passar" para o primeiro membro, então vejam: esta equação é exatamente a mesma que esta [comparando as duas equações que estão na lousa], só que foi desenvolvida.

Nesta equação aqui [a equação geral] vamos agrupar alguns termos, então vou separar aqui na frente x ao quadrado, vou trazer para frente também o y quadrado, vou separar aqui atrás aqui $2x_0x$ menos $2y_0y$ e vou também separar o x ao quadrado, o x_0 ao quadrado, y_0 ao quadrado menos r ao quadrado. Pessoal, nós vamos chamar esse $-2x_0$ de a esse $-2y_0$ de b e esse x_0 ao quadrado mais y_0 ao quadrado $-r^2$ — de c. Por que é que eu posso fazer isso? Esse valor é conhecido então menos duas vezes ele é um número conhecido, da mesma forma isso é um número conhecido e isso é o número conhecido. Então fazendo as substituições por a, b e c a gente pode reescrever a equação da circunferência como x ao quadrado mais y ao quadrado mais ax mais by mais c igual a zero. Pessoal, essa aqui é a nossa equação geral da circunferência. Essa criança, tudo aqui — vou colocar o zero de volta — essa é a nossa equação geral da circunferência.

P: Então vejam, o caminhar aqui está muito parecido com o que nós vimos para reta né? Temos a equação, a equação reduzida, depois outros tipos de equação. Aqui é análogo: equação reduzida da circunferência, equação geral da circunferência. Façamos o seguinte: nosso primeiro exemplo aqui vai ser passar da reduzida para a geral tá? [tratamento em um mesmo registro de representação]. Exemplo: escreva a equação geral [ele chamou de EG] da circunferência cuja equação reduzida é dada por $(x-1)^2 + (x-4)^2 = 25$. Pessoal, percebam que aqui de novo eu estou sempre com esse objetivo: um formato "passa" para o outro, depois... [A22 interrompeu]

A22[a]: Aí não é y não, professor?

P: y! Vou trocar. Obrigado, querido! [continuou] A gente está num formato e passa para o outro, depois chega no outro e passa para "o um" [volta para o registro de partida], ou seja, estamos transitando pelas várias formas de representação, tá? [essa possibilidade de mobilização de vários registros caracteriza, segundo a TRRS, a aprendizagem do objeto matemático]. Anteriormente transitamos entre representação algébrica e representação geométrica [transformação de conversão], e aqui neste caso nós vamos transitar entre duas representações algébricas [transformação de tratamento], uma delas é a geral, a outra a reduzida. Neste caso escrevi a reduzida e vamos determinar a geral. Vamos lá! Como foi colocado ali no exemplo, na explicação acima, determinar uma equação reduzida [aqui ele se refere à equação geral] basta fazer os cálculos, né? Então vamos lá: o quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo [falou a regra para desenvolvimento do produto notável enquanto escrevia na lousa a forma algébrica $x^2 - 2x + 1$.

Esse primeiro aqui tranquilo para todo mundo? [silêncio] Pessoal?

A25, A2[a]: Sim.

P: Então vamos para o segundo parênteses: o quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo [escreveu na lousa a forma algébrica $y^2 - 8y + 16$]. O que a gente vai fazer agora é simplesmente organizar: $x^2 + y^2 - 2x - 8y$... vejam, trazendo o vinte e cinco para o primeiro membro eu vou ter dezessete menos vinte e cinco. Quanto dá isso pessoal? [silêncio]

A25[a]: Vinte e quatro.

P: Oi?

A25[a]: Não, pera, fiz ao contrário.

P: Veja aí! Dezessete menos vinte e cinco.

A25[a]: Menos oito.

A2[a]: Oito.

P: Menos oito! Então vejam, saímos da equação reduzida e fomos para a equação geral. Esse "passar" da equação reduzida para a geral é bem tranquilo porque você só está fazendo as operações. Que tal então fazermos o processo inverso? Ou seja, nós vamos dar para vocês a equação geral e vamos pedir a reduzida. Por que isso? Porque na reduzida eu consigo olhar direto quem é o centro e quem é o raio, ok? Então vamos fazer o processo inverso agora. [ele começou a escrever]: escreva a equação reduzida da circunferência de equação... [fez uma pausa] vamos pegar aqui no livro de vocês um do exercício [rolou o arquivo do livro na tela para escolher uma questão]. Essa "c" aqui vai resolver nossa vida, estão vendo aqui, pessoal? [referindo-se à questão 18, letra "c"]. x ao quadrado, y ao quadrado, mais seis, mais quatro [ele omitiu algumas partes da equação em sua fala, mas que está visível para observação dos alunos na tela e começou a escrever a equação na lousa], vamos fazer essa aqui tá?

P: Bem pessoal há duas formas pelo menos né? De resolvemos esse problema: uma delas é apelar para essas formas aqui olha o "a" é menos $2x_0$ ou seja $a = -2x_0$, então você olharia para cá e diz "ah, o a é isso!" [apontando o cursor para o -4], então você teria menos $-2x_0 = -4$ e aí você tira o x_0 [ele se referiu ao resultado anterior para a dedução da equação geral da circunferência].

P: Depois encontraria o y_0 depois vem para cá fazer a substituição aqui para encontrar o r. Bem, aqui eu vejo duas coisas particulares que eu não gosto: a primeira delas é que você vai ter que ficar memorizando o formato da equação, quem é o menos $2x_0$, quem é o menos $2y_0$, depois aquela equação x ao quadrado mais y_0 ao quadrado menos r ao quadrado, igualar com o último termo. Só que é muito mais interessante e muito mais construtivo no nosso processo de ensino-aprendizagem a gente usar o processo de "completamento de quadrados". Pessoal, completamento de quadrados vocês fazem desde o nono ano. Eu vou relembrar aqui e fazer a construção, caso vocês não lembrem bacaninha ou não consigam acompanhar. Na próxima a gente pode fazer mais alguns exemplos. Mas vamos lá fazer pelo completamento de quadrado: primeira coisa que nós vamos fazer é separar os termos que tem x e os termos que tem y. Percebam: nós agrupamos os termos que tem x e os termos que tem y e isolar o termo independente. Olhemos apenas para isso aqui: qual é o termo pessoal que está acompanhando apenas o x? [silêncio] Qual é o número que está acompanhando apenas o x?

A25[a]: Menos quatro.

[no chat A14 digitou -4]

A14[c]: -4.

P: Vamos pegar só ele, positivo, tá bom? Quatro! Nós vamos dividir por dois. Qual a resposta?

A25[a]: Dois.

P: Pegamos essa resposta e elevamos ao quadrado [falando consigo mesmo]: P, o que é que você está fazendo aí para a gente? Vai ficar assim olha: x ao quadrado menos $4x + 4$. Por que é que nós acrescentamos esse 4? Porque a parcela que ficou agora $-x$ ao quadrado menos x mais quatro é um trinômio quadrado perfeito, ou seja: x menos 2 ao quadrado, ok? Essa parcela a gente acrescentou o quatro e obteve então um trinômio quadrado perfeito. Veja o nome vem daí: completar "quadrado", nós completamos o quadrado perfeito. Na parcela do y, pensem no mesmo processo. Quem é que eu ia dividir por dois?

A25, A22[a]: O seis.

P: Quanto é que eu obtenho?

A25[a]: Três.

P. Elevando ao quadrado...

A22[a]: Nove.

P: Ou seja, y ao quadrado mais $6y$ mais 9 e isto aqui a gente pode escrever como sendo y mais três ao quadrado. Ou seja, isto aqui no meio que nós fizemos foi o processo para completar o quadrado: completamos o quadrado com mais quatro e completamos o quadrado com mais nove. Como vocês estudaram desde o sétimo ano, a equação ela é uma balança, ou seja, se eu acrescento temos ao primeiro membro, eu tenho que acrescentar esses mesmos termos ao segundo membro, a fim de que a minha equação não se altere, ou seja, nós vamos acrescentar no segundo membro o número quatro e o número nove. Se eu coloquei 4 no primeiro eu coloco quatro no segundo, se eu coloquei nove no primeiro eu coloco nove no segundo [membro].

P: Olha quanto é que ficou agora no segundo membro: mais quatro menos quatro zera, fico apenas com nove, ou seja, essa equação geral tem essa representação como equação reduzida. Então me digam pessoal, neste caso, quem é o centro?

A25[a]: Nove.

P: Eita!

A25[a]: É não?

A22[a]: Menos dois e três?

P: Quase. Lembra de trocar o sinal!

A25[a]: Dois e menos três.

P: Dois e menos três! E o raio?

A22, A25[a]: Nove.

P: Quanto?

A2[a]: Nove... três.

P: Três!

A2[a]: É três!

P: Lembra que aqui eu tenho r ao quadrado: r ao quadrado igual a nove, r igual a três. Pessoal, esse processo de completamento de quadrado só tem um jeito da gente ficar afiado nele é fazendo! Então lá no exercício tem algumas. Eu vou deixar anotado "faça essa", "faça essa", "faça essa" e a gente vai treinando esses completamento de quadrados. Ele será muito útil não apenas para circunferência, a gente vai repetir esses processo: circunferência, elipse, parábola, hipérbole, e quando vocês estiverem estudando — quem for fazer os cursos de exatas aí — o ENEM, for fazer os cursos de exatas e forem pagar certas cadeiras, vocês vão continuar usando esse processo para resolver os problemas dessas cadeiras, por exemplo, vetores em geometria analítica ou álgebra vetorial, depende de como a instituição chama a disciplina, então esse processo do completamento de quadrado a gente começando a treinar e aprender agora, a gente já usa para o resto do nosso terceiro ano e para nossa graduação, certo? Vou deixar então algumas questões sobre isso, o vídeo aqui está bem pausado, bem devagarzinho, vocês conseguem assimilar. Caso tenham dúvida ainda das questões que ficarem como exercício, vocês podem trazer as dúvidas para o próximo encontro e tiramos suas dúvidas. Por hoje, *solamente* a equação da circunferência reduzida e geral, só dois pontos. Perguntas?

A22[a]: Não professor.

P: Tranquilo né? Por hoje é só, pessoal!

A25[a]: Sim professor, antes do senhor ir embora, aquele... a atividade tem uma parte para colocar arquivo, a gente coloca tipo a foto do da resolução é?

P: Exatamente, cada um faz de punho? Bota a "fotinha" da folha e envia. Ok pessoal, então boa tarde para vocês, até mais, vou parar a gravação.

A2, A22[a]: Tchau.

APÊNDICE C – TRANSCRIÇÃO DA AULA 18

Descrição:	**Aula 18**
Data:	**07/04/2021**
Início da aula:	**13h39**
Término:	**15h04**
Duração:	**01h25**
Participantes:	**Professor, Pesquisadora, 13 alunos (total de 15 pessoas)**
Alunos presentes:	**A2, A6, A8, A12, A13, A19, A21, A22, A23, A25, A26, A28 e Ax**[1]
Conteúdo:	**Circunferência – Posições relativas**

TRANSCRIÇÃO DA AULA

P: Bem pessoal, para começar nosso papo aqui no encontro passado nós falamos sobre circunferência, equação da circunferência e equação geral da circunferência. Inclusive alguns livros chamam até aquela primeira equação da circunferência que eu escrevi "x menos x ao quadrado mais y ao quadrado igual a r ao quadrado" como equação cartesiana da circunferência. Se vocês quiserem chamar assim, não vai ter problema algum tá? E vimos a equação geral e na equação geral nós vimos como sair da cartesiana para geral e como sair da geral para cartesiana, ou seja, essa transição entre representações da equação da circunferência e também fazendo aqui um link com a sua representação geométrica. Então veja, a gente fez transição aqui das duas formas de representação algébrica, a cartesiana e a geral e também a passagem dessas representações algébricas para representação geométrica. Então a gente transitou aqui bem nesses temas, nas formas de representação da equação [tratamento dentro de um mesmo registro]. E aí eu falei para vocês lá no finalzinho da aula, quando a gente estava fazendo o completamento do quadrado — para passar da forma geral para a cartesiana, da reduzida, como queiram — a importância de você ficar fazendo alguns exemplos, para que pudesse assimilar o processo de completamento de quadrado e aí indiquei onde estaria no livro de vocês algumas questões. Tentaram fazer? [silêncio]

A2[a]: Professor eu não encontrei no mural não [do Google Classroom], o senhor colocou no mural?

A25[a]: Eu também não, viu, professor!

P: Não, na última aula eu falei quais eram as páginas que estavam no livro aí mostrei o livro, não cheguei a colocar, acho que não. Deixa até olhar aqui para tirar essa dúvida, tá certo? Estou abrindo o mural parará, pererê... não, não, coloquei só a página do capítulo e não as questões especificamente. Eu comentei no momento que... página sessenta e seis... vou até abrir aqui para vocês para mostrar para vocês. Como eram poucas questões dava para desenrolar. Deixa eu colocar aqui para vocês... compartilhar... [a tela com os alunos].

P: Está aparecendo para vocês já né?

A25[a]: Tá sim!

P: Então página 66 [ele rolou as páginas do livro na tela compartilhada], o capítulo do livro, e logo na sequência já aparece exercício na 67 e 68, já aparece e a de completamento de quadrado que eu falei para vocês, equação geral... eu queria um exemplo daqui. Se não me falha a memória... cadê você, cadê você? Uma dessas aqui foi a que fizemos como exercício durante a aula para vocês, então eu disse olha pessoal, está na página tal, tem o exercício, não marquei nenhuma questão específica. Mas vou fazer o seguinte: eu posso marcar aqui algumas questões "pessoal façam essa, essa e essa..." que sejam tranquilas para resolver tá? Alguém que, mesmo eu não tendo marcado, foi lá e tentou fazer?

A25[a]: Passou batido, professor. Esqueci de pegar os *prints*.

P: Passou batido... tá tranquilo, não tem estresse não. Bem, passamos mais de uma semana sem nos encontrar né? E também ninguém fez os exercícios. Vocês acham interessante a gente resolver mais um exemplo de completamento de quadrado para reavivar a memória de vocês?

A25, A12[a]: Sim!

P: Olha aí, eu faço essas perguntas já prevendo a resposta de vocês. Então vamos lá! Vamos pegar da mesma linha de exercícios aqui: "transforme em cada caso da forma geral para a reduzida". Vejam que são todas parecidas aqui da 17, 18, 19 são todas iguaizinhas aqui, não tem mistério não. Então vamos escolher qualquer uma dessas aqui... tchan tchan tchan... entre a 18 e a 19, escolham aí qualquer uma, pessoal.

A12: Dezenove.

A25[a]: Essa letra "c" da dezenove!

P: [risos] Por que letra "c"?

A25[a]: Não sei, achei ela... "coisada", mais "coisada" dos que as outras [essa era a única questão que apresentava fração no coeficiente].

P: Mais "coisada" do que as outras? [risos] Foi essa fração que chamou a atenção de vocês?

A12[a]: Ela... ela é diferenciada!

P: Essa fração aí chama a atenção, né? Ok, então vamos fazê-la, tá? Eu vou chamar aqui... deixa eu ver onde a gente estava [o professor está salvando o arquivo para a resolução da questão]. No caso é aula 2 desse bimestre, né? Aula 2 de circunferência. Mais um exemplozinho aqui, né? Vamos escrever a equação... é essa aqui: x quadrado mais y quadrado menos cinco x menos nove y... [começou a escrever] "x ao quadrado mais y ao quadrado... tudo positivo? Hum... menos cinco, menos nove... menos cinco x menos nove y mais três meios igual a zero". Bem pessoal, vamos relembrar aqui o processo que fizemos na aula anterior, tá? A primeira coisa que nós vamos fazer é associar os termos que estão com x, os termos que estão com y, o termo independente a gente "passa" para segundo membro, ou seja x ao quadrado menos cinco x mais y ao quadrado menos nove y igual a menos três meios. Bem, a segunda parte que nós fizemos na aula passada, o finalzinho da aula passada, era determinar o termo que completa os quadrados em cada caso. Alguém recorda aí para mim como foi que nós fizemos isso! Vamos primeiro para essa parte aqui, olha. Como foi que nós fizemos isso, pessoal? [silêncio]

A25[a]: Tem aqui que ficou com... esse 5 ficava em cima, sobre 2... é... igual ao valor... peraí deixa eu ver...

P: Então nós pegamos o termo central aqui e eu tenho que estar apenas com x e dividimos por dois. Nos outros exemplos que fizemos, era seis por dois [6 dividido por 2], por exemplo, né? Oito por dois, onde a divisão é inteira, ou seja... três quatro, pegamos o resultado e elevamos ao quadrado. Bem, como aqui a divisão não é inteira, é racional, né? Nós vamos simplesmente elevar ao quadrado. Quanto dá cinco meios ao quadrado, pessoal? [silêncio]

A25[a]: Dá dez sobre quatro... não...

P: Quanto?

A2[a]: Vinte e cinco sobre quatro!

P: Vinte e cinco sobre quatro, beleza! Ou seja, nesse primeiro par de termos quem nós vamos acrescentar para completar o quadrado é o cinco x, desculpa... o vinte e cinco sobre quatro. Então vamos ficar com x ao quadrado menos cinco x mais vinte e cinco sobre quatro. Vamos fazer o processo análogo para os termos que estão com y, ou seja, essa parte aqui [apontou o cursor na tela]. Quem é que a gente vai pegar para elevar ao quadrado?

A25[a]: Nove!

P: Tá, vamos fazer nove sobre dois... elevando isto ao quadrado dá quanto? [silêncio] Quanto, pessoal?

A2[a]: Oitenta e um sobre quatro.

P: Oitenta e um sobre quatro, ou seja, o termo que nós vamos utilizar para completar o quadrado aqui é este. Vou só circular o nove ali também para ficar parecido... a primeira parcela, nós trabalhamos com esse termo aqui... [mostrando com o cursor]. Então isso será reescrito como? y ao quadrado menos nove y mais oitenta e um sobre quatro. E aí vamos relembrar o que eu falei na aula passada, né? Nós temos uma equação a mais b igual a c [$a + b = c$]. Se eu acrescento ao primeiro membro um certo termo d, eu tenho que acrescentar o mesmo termo ao segundo membro para que a equação continue sendo uma equação, e não uma inequação... ou seja, para permanecermos com a igualdade, o termo que eu adiciono no primeiro membro eu também tenho que adicionar no segundo membro.

P: Como o termo adicionado no primeiro membro, ou melhor, os termos adicionados no primeiro membro, foram vinte e cinco sobre quatro e oitenta e um sobre quatro, eu tenho que adicionar esses mesmos dois termos no segundo membro. Então vou só repetir o menos três meios que eu já tinha, e aí eu vou acrescentar... pessoal se me permitem, eu vou apenas trocar de cor aqui... para ficar bem claro quem foi que eu acrescentei em ambos os membros, tá? Trocar aqui para amarelo ou azul... para ficar bem claro aqui que eu acrescentei o 25 sobre 4 e acrescentei o 81 sobre 4. Então eu tenho que acrescentar no segundo membro o 25 sobre 4 e o 81 sobre 4.

P: Antes que eu dê continuidade, pessoal até aqui tudo bem para vocês o processo?

A2[a]: Sim professor.

P: Então vamos lá... dando continuidade, e eu estou aproveitando para relembrar todos do que vocês viram no ensino básico, no Ensino Fundamental, vejam, quando eu tenho x ao quadrado, desculpa x menos dois ao quadrado: quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, quadrado do segundo... vou até colocar um três aqui para que os termos não fiquem iguais... [ele apagou o exemplo secundário que estava fazendo na lousa para explicar o desenvolvimento do quadrado da diferença].

P: Pronto! Ou seja, daqui pra lá, de lá pra cá [ele desenhou setas para indicar o sentido tratamento].

P: Esse termo é igual a esse. Então, se eu tenho o quadrado da diferença eu obtenho o trinômio quadrado perfeito. Se eu tenho um trinômio quadrado perfeito eu posso fatorar e escrever como um quadrado da diferença. Então vejam, vocês estudaram isso no 9º ano do Ensino Fundamental né? Trinômios quadrados perfeitos, fatoração... Então tudo isso aqui, que é um trinômio quadrado perfeito, pode ser fatorado. Como é que ele vai ficar escrito fatorado, pessoal? Vamos lembrar aqui os bons tempos: x esse termo aqui [apontou o cursor para o vinte e cinco quartos] ele é o quadrado do cinco meios, então é o cinco meios que vai aparecer aqui olha... "menos cinco meios ao quadrado". Essa primeira passagem aqui, tranquilo para todos vocês?

A25[a]: Aí por que, professor, o vinte e cinco sobre quatro não vai?

P: Ele vai! Vamos relembrar como é que a gente faz esses cálculos: "quadrado do primeiro menos duas vezes o primeiro, vezes o segundo, mais o quadrado do segundo", ok?

A25[a]: Ah sim!

P: Quando eu fizer esse cálculo, olha, simplifica, ou seja, esse trinômio quadrado perfeito se escreve de forma fatorada assim... eles são exatamente o mesmo... um está escrito na forma de trinômio quadrado perfeito e o outro na forma fatorada... diferença dos quadrados, beleza para você porque é que ele ficou cinco sobre dois e não vinte e cinco sobre quatro dentro dos parênteses?

A25[a]: Sim, sim, entendi!

P: De forma análoga, vamos fatorar o próximo tá? Então vai ficar "mais y menos"... pessoal, aqui eu quero chamar a atenção tá? O sinal que está ficando aqui no termo central, ou seja, este sinal [circulou o sinal do menos cinco meios] é este [circulou o sinal do cinco x]. Este sinal [circulou o sinal do termo que virá após o y e depois o sinal do nove y] é daqui. Então se no meu trinômio quadrado perfeito estivesse todo mundo com mais, aqui ficaria mais. O que é que vai ficar aqui dentro dos parênteses, pessoal? Aqui!

A25[a]: Nove sobre dois?

P: Exatamente! Nove sobre dois... deixa só eu organizar aqui... "y menos nove sobre dois ao quadrado igual"... vamos fazer a redução aqui dessas frações, vamos fazer essa redução. Quanto vai dar essa soma aí? Se vocês quiserem podem fazer MMC né? Menos seis mais vinte e cinco mais oitenta e um, quanto é que dá esse cálculo? [silêncio] Pessoal?

A25[a]: Cem!

P: Cem! Só cem?

A25[a]: Cem sobre quatro.

P: Isto: cem sobre quatro! Dá para simplificar, ou melhor, dá para dividir nesse caso aqui?

A25[a]: Dá!

P: Quanto?

A25[a]: Vinte e cinco!

P: Vinte e cinco! Então vejam, saímos aqui da forma geral para forma reduzida, então vamos lembrar o que eu conversei com vocês na aula passada: qual a vantagem de escrevermos a equação na forma reduzida? É que a forma reduzida nos dá quais são as coordenadas do centro e qual é a medida do raio, então, nesse caso, pessoal, quais são as coordenadas do centro? Centro C? [silêncio] Diz aí ou deu um apagão aí na mente de vocês? [silêncio] A equação geral é x menos x zero [x_0] ao quadrado, y menos y zero [y_0] ao quadrado igual a r ao quadrado, onde esse x_0 é a abscissa e esse y_0 a ordenada do centro, neste caso quem está fazendo papel de x_0?

A2[a]: Menos cinco meios e menos nove meios?

P: Lembra de trocar o sinal, olha! Menos x_0 igual a menos cinco meios, portanto x_0 igual a cinco meios, beleza? Lembra de trocar o sinal! Cinco meios, nove meios, e quem é o raio, pessoal, dessa circunferência?

A2[a]: Cinco.

P: Cinco! Lembra que eu tinha r ao quadrado igual a vinte e cinco, como r é maior ou igual que zero, r é igual a cinco. Então nós temos aqui o raio r é igual a cinco. Recapitulando, tínhamos a equação geral reescrevemos a equação, passamos para a equação reduzida. Da equação reduzida eu tiro as informações acerca da minha circunferência: que é o centro e o raio. Então para finalizar que tal então passamos para a representação geométrica dessa circunferência? Vejam o caminho: equação geral, equação reduzida por meio do completamento de quadrados, da reduzida observamos o centro e o raio, então vamos passar agora para a representação geométrica dessa circunferência. Vou fazer aqui um esboço, depois represento no Geogebra de maneira mais elegante tá? [ele desenhou um esboço do plano cartesiano na lousa] Cinco meios! Cinco meios passando para forma decimal dois e meio, né? Então... um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez [marcando a localização desses números no eixo das abscissas]. Então cinco meios: dois e meios. Nove meios? Quatro e meio! Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez [marcando a localização desses números no eixo das ordenadas]. Não está igualmente espaçada, não fica tão bom aqui na mesa digitalizadora, mas por hora vamos deixar assim, tá? Então, um, dois, três, quatro e meio... aqui eu tenho meu nove sobre dois. Então estas são as coordenadas do centro da nossa circunferência. E agora nós queremos um raio, quanto? Raio cinco.

P: E aí lembrem, pessoal, se você estiver com um compasso, obviamente, não vai ter aperreio algum, né? Se o raio é cinco, eu vou daqui [ele sinalizou a posição do cinco meios no eixo] até onde? [silêncio] Pessoal?

A22[a]: Sete e meio?

P: Sete e meio! Então, três, quatro, cinco, seis, sete e meio... então o raio vai vir até aqui! Vejam, cinco para direita e aqui só para ilustrar, né? Cinco direita, cinco esquerda, cinco em cima e cinco baixo... Estou falando cinco direita, cinco esquerda, só para que a gente comece a se habituar com essa questão de tantos para direita, tantos para esquerda, porque a gente vai usar muito isso quando estiver trabalhando com elipse tá? Parábola, hipérbole... então vem para cá olha, quatro e meio vai até o nove meios. Cinco, seis, sete, oito, nove e meia... vejam que não está igualmente espaçado, então não vai ficar uma circunferência bonita tá? Mas eu vou representar no Geogebra para vocês! Quatro e meio menos meio, vem até aqui assim... bem horrível a minha circunferência, mas é só para ilustrar a ideia tá?

P: Fazendo no caderno fica muito melhor que aqui na mesa digitalizadora e também usamos instrumentos de desenho né? Esquadros para fazer os eixos, régua graduada para fazer a graduação nos eixos e compasso para fazer a circunferência. Me permitam aqui só abrir o Geogebra rapidamente para a gente representar essa circunferência no Geogebra. Ok, então vou representar nas duas formas, tá? A equação geral... x ao quadrado... deixa eu escrever a reduzida aqui... x menos cinco meios ao quadrado mais y menos nove meios ao quadrado igual a vinte e cinco. Aqui está nossa circunferência, aqui a gente pode verificar centro "A", "eq1" [como ficou nomeada a equação da circunferência], e posso verificar também o raio "A", "eq1", ok pessoal? E aqui só para ilustrar o raio a gente pode pegar um ponto qualquer aqui da circunferência... aí eu vou tomar um eixo horizontal, né? Por que não? Isso eu tiro... isso eu tiro... [ocultando o ponto criado e os eixos no Geogebra] e depois fico só com o raio... com medida cinco, né? Vou trocar aqui para "raio" [ele renomeou o segmento criado] aí a gente pode colocar a medida nele. Ok, pessoal... então aqui uma representação um pouco mais elegante, né?

P: Se você olhar, a menos de ficar torto, as coordenadas aqui estão tranquilas [ele transitou entre as duas telas em que construiu a circunferência, mostrando as similaridades entre as construções]. Beleza pessoal, então centro dois e meio, quatro e meio, raio cinco! Dúvidas pessoal nessa construção?

A2[a]: Tranquilo, professor.

A25[a]: Não!

P: Ok, então vou marcar algumas questões lá no livro para vocês fazerem, mas vejam, vai seguir esse processo, e aqui eu vou reforçar mais uma vez: o processo de completamento de quadrado a gente vai usar na elipse, parábola e hipérbole e aí vocês já ficam habituados, fazem tranquilo e aí o pessoal que vai fazer Exatas vai ver Vetorial de novo, vai ver Cálculo I, provavelmente vai usar de novo essas informações, tá certo? Bem, vamos dar sequência no nosso conteúdo? Bem, a sequência do nosso conteúdo eu vou colocar simplesmente assim, olha: posições relativas — e aqui eu vou abrir alguns subcasos né... posições relativas — quando a gente estava trabalhando com retas nós tínhamos retas paralelas, retas coincidentes... concorrentes... e no caso de serem concorrentes elas podiam ser perpendiculares. Então basicamente a gente estava analisando de que maneira duas retas podiam se encontrar no plano. Agora nós vamos fazer posições relativas entre circunferência, que é o conteúdo que estamos lecionando agora, e aí: circunferência e ponto; circunferência e reta; e circunferência e circunferência. Deixa eu olhar pra carinha de vocês que agora tem algumas coisas que eu quero falar olhando pra carinha de vocês... [ele tirou a janela da apresentação e colocou nos participantes da reunião]. Vocês vão ver no livro de vocês várias condições e é interessante que façamos posteriormente... é... a gente possa construir essas várias condições aí de posições relativas entretanto o que eu vou fazer aqui é trabalhar com o conceito básico. O restante, é mera interpretação e uso dos conteúdos já estudados... a gente pode chegar a essas condições né, de posições relativas. Então vamos filosofar um pouquinho aqui...vamos aqui pegar o primeiro ponto: "ponto – circunferência", de maneira bem simples. Considere aqui um plano alfa, e nesse plano que você considere uma circunferência. Se você tivesse que marcar aqui um ponto nesse plano, quais seriam as possibilidades que a gente teria para marcar um ponto nesse plano? Quais seriam as possíveis posições que ele ocuparia? [silêncio] Imagine se vocês estão com esse ponto... seja uma... eita eu vou lembrar agora do tempo que eu jogava bola de gude... é o novo! A gente brincava muito de triângulo em bola de gude, não sei se ainda brincam... "bila", como o pessoal chama, ou bola de gude. Tem uma brincadeira chamada "triângulo", onde a gente jogava nossa bola aqui [ele fez o desenho na lousa, com setas indicativas] o objetivo era acertar as bolas aqui para elas saírem e a gente poder levar essa bola para casa. Bem, se eu lanço essa bolinha aqui, na direção desse triângulo, quais as possíveis posições que essa bolinha poderia parar? Pense em analogia, imagine que o ponto que eu quero, um ponto P, eu vou jogar esse ponto P nesse plano, em quais possíveis posições ele poderia parar aqui nesse plano? [silêncio]

P: Gente, vocês estão aí?

A25[a]: Tamos sim.

P: Gente, por um momento eu pensei que estava só eu aqui. Pessoal, o ponto P só tem três posições possíveis: ou ele está fora da circunferência, é um ponto externo à circunferência... vou aqui chamar de P_1; ou ele "mora" na circunferência [ele chamou de P_2]; ou ele é um ponto interno à circunferência [chamou de P_3]... só essas três possibilidades. Se um ponto está no plano, ou ele é externo, ou pertence à circunferência, ou é interno à circunferência.

Nessa situação, quando é que eu poderia, se eu desse a vocês a equação de uma circunferência, e der um ponto P de coordenadas x_0, y_0, qual o cálculo que vocês fariam? Imaginem vocês fazendo uma continha, tá? Usando o que a gente já estudou, qual o cálculo que vocês usariam e como vocês poderiam dizer se esse ponto está fora, pertence à circunferência, ou está dentro? [silêncio prolongado] Menino, deixa eu ver se esse povo tá aqui mesmo, peraí... [ele trocou a tela de compartilhamento da lousa com a tela em que aparecem os participantes da reunião]... É temos quinze aqui [pessoas]!

A2[a]: Fazendo a distância entre pontos, professor?

P: Certo, continue o raciocínio... vá que está chegando... faz a distância e aí?

A2[a]: Aí não sei não, professor, só sei que eu acho que é a distância...

P: Vamos fazer o seguinte, eu vou colocar números que aí eu acho que vai ficar mais fácil você argumentar. Suponha que essa minha circunferência — vou até trocar de cor aqui — ela tenha o raio três. E aí como você me disse, você calculou a distância entre quem? [fez uma pausa] Distância entre dois pontos, tudo bem, mas que pontos?

A25[a]: Se tem o centro e tem o ponto...

P: Certo...

A25[a]: Não aí faria tipo a distância entre o centro ou entre um ponto e outro?

P: É isso aí que a gente está querendo chegar!

A2[a]: Eu acho que é entre o centro e um ponto da circunferência.

A25[a]: Ele deu um ponto e ele deu... um...

P: O que é que aconteceria se eu calculasse a distância do centro até P_1?

[A22 tentou falar, mas o áudio foi interrompido pelo áudio de A8]

A8[a]: Ia dar maior que o raio, então saberia que não tava dentro da circunferência!

A25[a]: Ia dizer que tá dentro, é!

P: O que é que acontece com a distância de C até P_2?

A22[a]: Dá três!

A25[a]: Ela ia estar na linha da circunferência.

P: E a distância de C até P_3?

A25[a]: Estaria dentro.

P: Dentro! Ou seja, isso é menor que três. [enquanto os alunos respondiam o professor ia escrevendo na lousa]

P: Generalizem então agora! Quando é que um ponto é externo?

A25, A2[a]: Quando ele é maior do que o raio! [as alunas falaram ao mesmo tempo, se referindo a "ele" — ponto — e não à "distância entre o ponto e o centro"]

P: Exatamente! Quando é que ele [o ponto] pertence à circunferência?

A25[a]: Quando ele é igual ou menor... né... que o raio? Não, é igual!

P: Igual! E quando é que ele é interno? [ninguém respondeu] Quando é menor! Então vejam, não tem mistério. O que a gente está fazendo é simplesmente uma leitura da imagem aqui, estabelecendo algumas condições. Todos esses cálculos a gente pode fazer analiticamente pelas fórmulas que já estudamos, então ele [o ponto] vai ser externo quando a distância do ponto até o centro for maior que o raio; ele vai pertencer quando a distância for igual; e ele vai ser interior quando a distância for menor.

P: E aí é interessante chamar a atenção de vocês o seguinte: se eu desse para vocês a equação na forma geral e desse um ponto então, obviamente, você teria que passar para a [equação] reduzida para descobrir o centro para depois calcular a distância. Dada a distância, comparo com o raio que encontrei na reduzida e digo se ele é externo, interno ou um ponto da circunferência. Vejam que resolver problemas aqui é simplesmente fazer cálculos que a gente estudou. O importante aqui é exatamente essa interpretação... a conta pela conta a gente já fez isso... vocês já sabem calcular distância entre dois pontos, já sabem determinar centro e raio da circunferência... o restante é: faz o cálculo e compara, ok? Não tem mistério! Continuemos... então posição entre ponto e circunferência morreu! O segundo: entre reta e circunferência! Mesma ideia! Você tem um plano, um plano alfa. Nesse plano você tem uma circunferência de centro C, e aí o objetivo é traçar retas aqui. Traçar retas: riscar aqui esse nosso plano com retas. O que é que pode acontecer com essas retas quando eu traçar? Quais são as possíveis posições em relação à circunferência? Imagine lá que você tem um papel com uma circunferência desenhada [ele fez os contornos com as mãos]. Você pega uma régua e traçou! O que é que pode acontecer com essa reta?

A25[a]: No caso, tá fora do plano né?

P: Uma reta do plano... imagine que você tem aqui um caderno, vamos lá, uma folha de papel aqui [ele mostrou uma folha de papel na câmera], a circunferência [mostrou com as mãos que a circunferência estaria na folha], o que pode acontecer com essa reta? [silêncio] Pensem de maneira simples, não pensem na linguagem matemática rebuscada não! Pense literalmente em desenho, tem um círculo... uma circunferência numa folha, você traça uma linha reta.

A8[a]: Vai... ultra... é... como é a palavra? Vai ultrapassar a circunferência... passar por dentro dela.

P: Estou entendendo! Daqui a pouco a gente coloca os nomes bonitinhos, beleza? Só tem essa possibilidade?

A25[a]: Acho que tem a possibilidade dela ficar... da reta ficar dentro da circunferência. Tem?

P: Entendi, tem mais alguma possibilidade? Daqui a pouco a gente arruma esses argumentos, tá? Não estou preocupado agora com... [A8 tentou falar algo, mas não deu para entender]

P: Diga lá, A8!

A2[a]: E também fora da circunferência, professor!

P: Já são duas possibilidades, então tem mais alguma?

A8[a]: Passar pelo centro da circunferência?

P: Passar pelo centro da circunferência já entra naquela primeira possibilidade dela passar por dentro da circunferência. O quanto por dentro... [fez gesto que não importa] Mas tem uma terceira possibilidade?

A3[a]: Que ela pode só tocar na extremidade da circunferência?

P: Nesse caso quando ela só toca a gente chama de quê?

A2[a]: De tangente, se eu não me engano...

A25[a]: De tangente!

P: Exato! Então vejam: a gente poderia ter uma reta externa à circunferência, eu vou chamar de reta r tá? Eu poderia ter uma reta só tocando a circunferência, nesse caso seria uma reta tangente à circunferência e poderia ter uma reta que corta a circunferência separando aí em dois arcos né? Duas partes... nesse caso a gente chama de reta secante. Reta r, s e m. Vou fazer até o seguinte que vou chamar essa s de t, já de maneira sugestiva, né, t de tangente e essa reta s de secante aqui, já para facilitar até a nomenclatura para a gente.

P: Temos então três possibilidades aqui ou a reta é externa, ou a reta é tangente, ou a reta é secante ok? Externa, reta tangente, reta secante. Tá? Pensem agora de forma análoga ao que trabalhamos aqui e me digam o que é que vocês poderiam fazer, que tipo de cálculo vocês poderiam fazer para determinar se essa reta é externa, interna... se essa reta é secante ou tangente. [silêncio]

A2[a]: Quando tem dois pontos de interseção, dois pontos e eu acho que nenhum... acho que é isso.

P: Ok, então uma forma de fazermos isso seria verificando a intersecção entre a circunferência e a reta. Daqui a pouco a gente vai trabalhar com intersecção, tá certo? Uma das formas seria exatamente para fazer a intersecção entre reta e plano... se a intersecção for vazia é essa situação, é externa. Se a intersecção tiver apenas um ponto é tangente; se tiver dois pontos é secante. Então por interseção a gente poderia fazer isso. Então vou pensar como é que eu vou escrever aqui para vocês. Uma primeira coisa seria por intersecção, é um caminho. Intersecção remete a resolver o sistema, tá pessoal? Um sistema de equações que nesse caso não é um sistema de equações lineares... tem uma equação linear que é a reta, mas tem uma equação do segundo grau que é a circunferência, tá bom? Vou fazer um exemplo daqui a pouco sobre isso. Estudamos alguma outra coisa que poderia ser usada para fazer essa comparação e dizer se é externa e interna ou secante? Eu vou até dar uma sugestão: eu poderia comparar alguma coisa com raio? [silêncio prolongado] Qual é o outro tipo de distância que a gente estudou?

A2[a]: Distância entre ponto e reta?

P: Ponto e reta! [acenou positivamente com a cabeça] Eu vou passar um pouquinho aqui para poder a imagem ficar boa para mim. Fazer esse pontilhado aqui para cima já é um pouquinho mais chatinho [ele está desenhando na lousa]

P: Ok, nessa primeira situação aqui em que a reta é externa, o que é que está acontecendo com a distância? [silêncio] Hein pessoal?

A25[a]: É uma fora do raio... fora da circunferência...

P: Está fora da circunferência, então se eu fosse comparar com o raio, essa distância seria o quê?

A2[a]: Maior que o raio!

A25[a]: Maior que o raio!

P: Distância entre quem e quem? Nessa situação aqui que eu estou desenhando... [silêncio] Calcularia a distância entre quais elementos?

A2[a]: O ponto C e a reta r?

P: Exatamente! Então para saber se ela externa, nós calcularemos a distância do centro até a reta, se ela for maior que o raio, externa! O que acontece nessa segunda situação quando ela é tangente?

A2, A25[a]: Igual ao raio!

P: A distância do centro até a reta é igual ao raio e quando é que ela é secante? Agora ficou tranquilo né? Por analogia...

A25[a]: Menor que o raio!

P: Menor que o raio. Secante, é quando a distância do centro até a reta for menor que o raio. Pessoal, aqui para não haver confusão entre o raio e a reta r, me permitam fazer essa troca aqui tá? Vou chamar esse r aqui de “errezão”, R maiúsculo para o raio tá? Então a gente consegue determinar analiticamente... veja que aqui eu estou fazendo essa construção para o seguinte: a gente consegue determinar a posição entre ponto e reta... entre ponto e circunferência e entre reta e circunferência analiticamente. A gente não precisa construir o gráfico, não precisa esboçar o gráfico para dizer "o ponto mora fora", "o ponto mora na circunferência", "o ponto mora interior à circunferência". Não! A gente está aqui fazendo uma verificação analítica da coisa, verifica analiticamente se o ponto está fora, pertence, ou está dentro... se a reta é externa, tangente ou secante ok? É tanto que nesses problemas a gente normalmente coloca: resolva analiticamente... ou mostre analiticamente que... a gente não está pedindo para que você construa o gráfico e mostre que o ponto está fora, não! Queremos que você faça exatamente esses cálculos para verificar se é interno ou externo, ou pertence à circunferência... se a reta é externa, se é tangente ou se é secante. Então entre reta e circunferência, morreu!

P: A terceira situação agora. Vamos trabalhar agora com a possibilidade de duas circunferências. Aqui vai gerar um pouco mais de subcasos tá? "Circunferência –circunferência" [ele escreveu na lousa]. Novamente, mesma ideia: temos um plano alfa e temos nesse plano alfa uma circunferência de centro C_1. E aí você vai desenhar outra circunferência de centro C_2. Quais são as possíveis situações que podem ocorrer? [silêncio] Você já tem uma e vai desenhar a outra. Quais são as possíveis situações?

[A8 ia falar e o áudio foi interrompido pelo áudio de A25]

A25[a]: Uma parte da circunferência tocar tipo no raio, como se tivesse tipo juntando uma na outra, assim....

P: Tipo assim, fazendo um oito? [ele gesticulou em forma de um oito deitado]

A25[a]: É!

P: É uma possibilidade. Eu vou escrevendo aqui as possibilidades tá?

A8[a]: São as mesmas possibilidades de antes, né professor? É... uma...

P: Como?

A8[a]: As mesmas possibilidades de antes, uma maior do que o centro, nesse caso, uma menor e uma igual.

P: Pronto. Mas como vai ter mais casos, vamos fazendo os desenhos e daqui a pouco a gente chega em algumas coisinhas aí tá certo? Elas podem se tocar, beleza...

A25[a]: Ela pode se tocar também tipo essa partezinha que a parte da circunferência em cima do raio... em cima do centro entendeu? O meio de uma dentro da outra sem tá dentro. P: Assim? [ele desenhou a segunda imagem abaixo]

A25[a]: É.

P: Poderia estar completamente dentro também, não poderia?

A25[a]: Poderia.

P: Então poderia estar completamente dentro, dentro só tocando... poderia estar só tocando externamente, veja...tangenciando externamente, tangenciando internamente. Poderia também ficar assim né? Ó! Ou ainda nem se tocar.

P: Então percebam, elas podem não se tocar e serem externas, elas podem não se tocar e ser uma interna à outra e elas podem se tocar uma interna à outra ou se tocar externamente, tudo bem? Olha a quantidade de possibilidades aqui. Vamos pensar caso a caso, vou chamar esse aqui de "um" só para facilitar nossa conversa. Como é que vocês poderiam me mostrar analiticamente, que elas não se tocam e são assim internas? [silêncio] Enquanto vocês pensam eu vou fazer um desenho aqui para vocês me dizerem algo olha: centro, centro até aqui eu tenho raio um e até aqui eu tenho raio dois. O que acontece com o raio um mais o raio dois? [silêncio] E a distância de C_1 a C_2? Qual a relação entre esses números?

A3[a]: A distância de C_1 e C_2 é maior do que os dois raios.

P: Exatamente! É maior que a soma dos dois raios. Então se as distâncias de C_1, C_2 for maior que a soma dos dois raios, então as circunferências são externas, não se intersectam né? Ok? Não tem ponto comum e é uma externa à outra. Bem, no livro de vocês, ele termina colocando todas essas outras possibilidades, senão vejamos aqui.

P: Onde ele escreve C_1C_2 ele está dizendo distância, tá pessoal? Externa... tangente externamente... tangente internamente... secante... e aí vem as "conversinhas" todas bonitinhas, tá? Vejam que aquele caso em que elas não se tocam internamente ele nem coloca aqui, mas poderia, seria até mais interessante vocês acrescentarem essa situação, tá bom? Então vejam, tudo o que a gente precisa para saber a posição relativa entre ponto e circunferência, reta e circunferência e circunferência e circunferência, é uma análise da distância entre centros, raio, ponto, reta, ponto–ponto, ok? Então posição relativa entre circunferências nada mais é que você utilizar os conteúdos anteriores para resolver o nosso problema. Agora, vamos aqui pegar carona na frase de nossa aqui... acho que foi A8 que tinha colocado aqui a questão da intersecção. Então vamos resolver aqui um problema de intersecção. No caso nós vamos resolver dois, será que vai dar tempo para dois? Espero que dê.

[No momento da resolução de atividades a quantidade de pessoas havia diminuído para 13]

A2[a]: Professor, é A2!

P: Oi?

A2[a]: É A2, não é A8 não!

P: Ah, foi A2, desculpa, desculpa A2!

P: Então a gente vai fazer uma intersecção entre reta e circunferência e circunferência e circunferência, espero que dê tempo tá? Então vamos lá... vou pegar inclusive do livro de vocês aqui. Em cada caso, determine a posição relativa... obtenha se existir os pontos de intersecção entre reta e circunferência. Vamos fazer essa letra "a" aqui olha.

P: Determine se existir pontos de intersecção entre reta e circunferência. Circunferência no livro de vocês ele sempre chama de circunferência "lambda" tá? Tem livro que chama de circunferência "gama"... letras gregas... sem crise Então vamos para essa primeira aqui... exercício... 3... 4... menos 35. Essa aqui é a questão... resolvendo questões [ele estava escrevendo na lousa, a falava em voz alta o que estava pensando em escrever]. Aquela questãozinha qual é? É a questão 49... então vamos lá para a questão 49, letra a: a reta que ele nos deu foi 3, 4, menos 35 igual a 0 [ele falou dessa forma para lembrar dos coeficientes na hora da transcrição da equação, e escreveu na lousa $3x + 4y - 35 = 0$]... e a circunferência... 4, menos 2, menos 20... x ao quadrado mais y ao quadrado menos quatro x menos dois y, mais vinte igual a zero... se não for mais eu organizo aqui... [olhou a questão] é menos também... tudo menos... lembrem, o que nós estamos querendo aqui é determinar a intersecção entre a reta e a circunferência. Pessoal, determinar a intersecção é resolver o sistema três x mais quatro y menos trinta e cinco, igual a zero... x ao quadrado, y ao quadrado menos quatro x menos dois y menos vinte, igual a zero. Quando a gente estava resolvendo sistemas lineares a gente poderia fazer o método da soma, o método da adição, é... comparação, substituição e método do gráfico, né?

P: Vamos isolar aqui o método do gráfico que a gente não quer. Veja que a gente não consegue fazer aqui a adição porque a gente não consegue se livrar do x ao quadrado. O que nós podemos fazer aqui é usar a substituição, por exemplo, a gente pode isolar o x, na primeira equação [realizou os tratamentos para isolar o x na lousa]... isolar o x na primeira equação e substituir o valor de x na segunda equação.... então só para ficar bonitinho aqui vamos chamar essa primeira equação de "um", essa equação de "dois"... esse x que a gente determinou vamos chamar de estrela [escreveu um asterisco ao lado da igualdade do x e começou a escrever]

P: Então, substituindo estrela em dois, temos... carinho aqui viu pessoal para substituir, olha, se tudo aquilo é x, então tenho menos quatro x sobre três mais trinta e cinco sobre três ao quadrado... e eu substituí um x e coloquei ele aqui... maluco eu, né? Aqui ó... y tá? Senão eu não me livro do x né? Continuo com o danado do x.

P: Mais y ao quadrado menos quatro que multiplica o x, ou seja, menos quatro y sobre três mais trinta e cinco sobre três menos dois y menos vinte, igual a zero. Até aqui beleza para vocês? Isolamos o x em uma das equações, substituímos na segunda...

A2[a]: Beleza professor!

P: Vejam, a partir daqui, essa parte aqui inteira [ele se referiu à igualdade completa escrita na lousa] vocês resolvem com o que vocês estudaram até o nono ano.

Ou seja, basta você desenvolver esse quadrado da soma, fazer essa distributiva, reduzir os termos e encontrar o valor de y. Senão vejamos, olha... dezesseis y ao quadrado sobre nove menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, setenta vezes o segundo, então eu vou ter aqui setenta vezes quatro, quanto dá pessoal?

A12[a]: Como professor?

P: setenta vezes quatro.

A25, A2[a]: Duzentos e oitenta.

P: Duzentos e oitenta sobre nove y mais trinta e cinco ao quadrado... continhas aí quanto é que dá? Dá para puxar a calculadora aí, fiquem à vontade...

A25[a]: É qual professor?

P: Trinta e cinco ao quadrado.

A25, A12[a]: Mil duzentos e vinte e cinco. P: Sobre... nove! Tudo bem? Fizemos o quadrado desse primeiro aqui quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro, vezes o segundo mais o quadrado do segundo. Repetiu o y ao quadrado... fazendo agora a distributiva, nesta parcela aqui olha, nós vamos ter mais dezesseis y sobre três, menos quatro vezes trinta e cinco... dá quanto quatro vezes trinta e cinco? Já fizeram essa conta?

A25[a]: Cento e quarenta.

P: Cento e quarenta sobre três menos dois y... não vai caber aqui pessoal eu vou puxar aqui para baixo tá? Menos vinte igual a zero. Dá para simplificar essa coisa aqui né? Se a gente multiplicar tudo por nove. Multiplicar tudo por nove... vou fazer assim... x... nove.... multiplicando toda a equação por nove o que é que nós vamos obter?

A12[a]: Professor como é complicado! Eu tô entendendo mas é... é muita coisa!

P: Veja que é conta! Se a gente tivesse um probleminha... uma equação mais tranquila aqui não apareceria fração e não apareceriam todas essas frações. Do que é que vai depender? Só dessa equação aqui, olha. [Ele se referiu a $3x + 4y - 35 = 0$]. Por exemplo, vamos dar um exemplo aqui tranquilo, antes de eu terminar... se essa minha equação aqui fosse x mais y menos dois, igual a zero, tá bom?

A12[a]: Sim!

P: Vou até colocar um menos aqui para ficar tudo positivo para pensar no melhor dos cenários. Quem seria o x por exemplo? Seria y mais dois, correto?

A12[a]: Sim!

P: Se isso acontecesse, quando eu fosse fazer a substituição ia ficar y mais dois ao quadrado, mais y ao quadrado menos quatro que multiplica y mais dois menos dois y menos vinte, igual a zero... quadrado do primeiro duas vezes o primeiro, vezes o segundo, quadrado do segundo... y ao quadrado menos quatro y menos oito menos dois y menos vinte mais dois menos dois y menos vinte, igual a zero. Olha como ficou bem menor do que essa coisa feia aqui.

A25[a]: É porque a equação é... os números são altos.

P: Isso, é porque esta equação aqui.... vejam que a gente tem o quatro, o três e o quatro primos entre si, de tal maneira que eu não consigo simplificar aqui a fração... Se fosse um caso mais simples, a equação fica bem menor para resolver, olha: dois y ao quadrado menos quatro y mais quatro y — embora — eu teria aqui menos dois y menos vinte e oito igual a zero. Ou y ao quadrado menos y menos catorze igual a zero. E aqui faz o delta.

P: Então percebam, depende muito de como é dada a nossa equação, essa que tá no exercício, infelizmente, a gente tem ali o três, o quatro e o trinta e cinco, primos entre si, de tal maneira que a gente não consegue fazer uma simplificação para ficar menor né? Já está irredutível ali. Então, se podemos continuar aqui, vamos nós! [ele voltou a tela para continuar o exemplo que ele estava fazendo antes da fala de A12] Eu multipliquei aqui tudo por nove, lembra que eu vou tirar aqui... [ele se referiu aos denominadores] vai ficar só dezesseis... aqui fica só duzentos e oitenta y... aqui mil duzentos e vinte e cinco... multiplicando por nove, eu vou ter nove y ao quadrado... deixa eu ajeitar esse nove. Multiplicando essa parcela por nove, simplifica por três, beleza? Nove por três dá três... três vezes dezesseis, quarenta e oito y. Tranquilo? Menos nove por três dá três. Três vezes cento e quarenta dá quanto?

A25, A12[a]: Quatrocentos e vinte.

P: Nove vezes o dois eu vou ter... eu vou puxar logo para baixo, tá pessoal? Eu vou ter menos dezoito y e nove vezes o vinte, eu vou ter menos cento e oitenta, igual a zero. Pessoal, vamos reduzir os termos... os termos semelhantes. Quanto é que vai ficar a parcela que está com y ao quadrado? [silêncio] Junte só quem tem y ao quadrado... termos semelhantes...

A25[a]: Sete?

P: Estão com o mesmo sinal, ou com sinal contrário?

A12[a]: Sinal contrário.

P: Ó, eu tenho aqui este... $[-16y^2]$ e tenho este $[+9y^2]$.

A2[a]: Vinte e cinco, professor!

A25[a]: É, vinte e cinco.

P: Vinte e cinco! Olha aí! Agora vamos fazer só quem está com y, tá? Menos duzentos e oitenta, mais quarenta e oito... pode jogar na calculadora aí... menos duzentos e oitenta, mais quarenta e oito, menos dezoito.

A25, A2, A12[a]: Menos duzentos e cinquenta.

P: Menos duzentos e cinquenta y. Agora só os termos independentes, tá? Os termos que não tem y: mil duzentos e vinte e cinco menos quatrocentos e vinte menos cento e oitenta.

A25, A2[a]: Seiscentos e vinte e cinco.

P: Seiscentos e vinte e cinco?

A25[a]: Isso! P: ...mais seiscentos e vinte e cinco, igual a zero. Olha como a equação está ficando bem melhor agora. Esses números estão muito grandes, não dá para simplificar não?

A12[a]: Dá.

P: Por quanto?

A25[a]: Por cinco... ou cinquenta... não, cinquenta não dá não... por cinco!

P: Eu vou logo ajudar vocês [ele escreveu a divisão por 25 na lousa]. Quanto dá a primeira parcela?

A25[a]: Um... y ao quadrado.

P: A segunda parcela?

[A12 falou alguma coisa que não deu para entender]

A2[a]: Dez.

A25[a]: Dez.

P: Terceira parcela?

A2[a]: Vinte e cinco!

P: Dez... eu esqueci de escrever o y né? Deixa eu apagar aqui para escrever o y... está muito apertadinho. Bem, se você quiser aqui já está um trinômio quadrado perfeito, já resolve direto né? Mas se você quiser ir pelo delta também vai resolver. Vocês preferem que caminho?

A25[a]: Pelo delta.

P: Delta? Ok. Todo mundo lembra aí? b ao quadrado menos quatro ac... quem é o b?

A25[a]: Dez... menos dez. P: Então dez ao quadrado menos... quatro ac? Vai dar quanto?

A25[a]: Professor, não é... ah... já tá ao quadrado né?

P: Ó... b ao quadrado menos quatro vezes a vezes c [ele escreveu na lousa os números]: cem menos cem [escreveu o zero], ok?

A25[a]: Ok.

P: Ora, já que eu tenho o delta, quem é o y, lembram? Menos b mais ou menos a raiz de delta sobre dois a. Menos b, menos menos dez, eu tenho dez, beleza?

A25[a]: Beleza.

P: Mais ou menos a raiz de zero, que é zero. Sobre dois a, o a é um... duas vezes um: dois! É até bom aqui lembrar dos tempos do nono ano né? Quando o delta é zero a raiz é dupla, né? Cinco! [ele falou e escreveu o resultado do y]. Percebam que se eu lembrar do completamento de quadrado, isso é simplesmente y menos cinco ao quadrado igual a zero, portanto y igual a cinco... resolvia bem ligeirinho... mas se não lembrar... Ora, eu tenho aqui, só me permitam colocar isso embaixo... eu tenho aqui então que o y vale cinco.

P: Se o y vale cinco, eu posso encontrar o valor de x substituindo — e aí me permitam que eu vou tirar isso daqui para não ficar bagunçado [ele apagou alguns cálculos após a equação em que o x estava isolado] — posso substituir aqui! Ok? Então vamos lá, continuar né? Daí quem é o x? Lembrem que era menos quatro y, sobre três, mais trinta e cinco sobre 3. Quanto é que dá essa primeira parcela aqui pessoal? Vamos lá?

A25[a]: Vinte sobre três.

A2[a]: Vinte sobre três.

P: ...mais trinta e cinco sobre três... quanto é que vale o x?

A25[a]: Cinquenta e cinco... menos cinquenta e cinco sobre três.

P: Cuidado com os sinais!

A2[a]: Quinze sobre três.

A25[a]: É!

P: Quanto? [ele esperou a resposta simplificada] Cinco né?

P: Portanto — eu vou escrever resumido aqui para mim, já são quinze para as três — a intersecção entre a reta e a circunferência é o conjunto formado só por um ponto. Que ponto é esse? O ponto cinco, cinco [$(5, 5)$].

P: Pessoal, se a gente encontrou só um ponto, vocês poderiam me dizer qual é a posição relativa? [silêncio] Externa, secante ou tangente?

A22[a]: Tangente?

A25[a]: Tangente.

P: Tangente! Vamos aqui brincar um pouquinho... [ele passou para o Geogebra] Não sei se vocês chegaram a decorar qual era a equação... se não eu vou olhar aqui em cima: menos quatro, menos dois, menos vinte... tá! [enquanto digitava na janela de álgebra do Geogebra ele falava] x ao quadrado, mais y ao quadrado, menos quatro... menos dois... menos vinte... a reta três x, quatro y, menos trinta e cinco... eu acho que é isso.... três, quatro, menos trinta e cinco... exatamente! Olha que coisa linda, meu povo: ponto de interseção! [clicando nesta função do Geogebra]

P: Estão vendo aqui? [ele apontou o cursor para as coordenadas do ponto apresentadas na janela].

A25[a]: Sim.

P: Um único ponto de intersecção, se não tivesse... se na hora de você resolver aqui o problema — vamos voltar aqui para aproveitar para filosofar um pouco — isolou o x, substituiu, encontrou a equação do segundo grau na incógnita y, se o delta desse menor que zero, o que é que aconteceria com o y? O que é que aconteceria com a equação? Se o delta fosse negativo...

A2[a]: Não existiria, não? O resultado...

P: Exatamente... ou seja, não teria valor para y, né? A solução seria vazia. Se a solução é vazia significa que não [o áudio foi cortado pelo áudio de A25] teria ponto de intersecção... Oi?

A25[a]: Não, eu ia falar o que o senhor falou...

P: Então não teria ponto de intersecção, então a reta seria o quê em relação à circunferência? [silêncio]

A2[a]: Externa!

P: Externa! Se quando você chegasse na equação, calculasse o delta e o delta desce positivo, quantos valores de y a gente teria?

A2[a]: Dois!

P: Logo eu encontraria dois valores para x, logo eu teria quantos pontos?

A2[a]: Dois também!

P: E se eu tiver dois pontos de intersecção, a reta é o quê?

A2[a]: Secante.

P: Morreu Maria Preá! Vejam o que é que tem de geometria analítica no que a gente está moendo aqui! Só o começo: equação de reta, equação de circunferência... Resolver sistema? Daqui para baixo... [ele selecionou na lousa a parte do sistema até o valor de x encontrado] daqui até aqui não é geometria analítica... é simplesmente ensino fundamental... conta... tá bom? Resolver sistemas por substituição... [faz gesto com as mãos de “mais ou menos”] tranquilo... resolver uma equação polinomial do segundo grau... tranquilo. Achar o valor de x e y... tranquilo. Aqui [ele selecionou a resposta da questão com a representação de que a intersecção da reta s com a circunferência lambda é o ponto $(5, 5)$] a gente volta para geometria analítica... o que é que acontece se a gente tiver dois pontos? Secante! Vejam, a gente volta para geometria analítica para fazer a interpretação: se eu tiver dois pontos, secante; se eu tiver um ponto, tangente; se ele for um conjunto vazio, a reta é externa, beleza?

A2[a]: Beleza, professor!

P: Pelo avançar da nossa hora, eu posso fazer a interseção, entre duas circunferências na próxima aula, tá? Mas ela vai seguir o mesmo caminho, só para ilustrar para vocês... inclusive tem aqui um exemplo no livro de vocês da intersecção entre duas circunferências... deixa-me ver tá aqui mesmo... É... reta — circunferência [ele foi rolando as páginas do livro digital para localizar o exemplo], circunferência — circunferência, tá aqui ó! [mostrou na tela]

P: Quando é que eu vou ter a intersecção? Vou ter que montar um sistema, só que aqui vai ficar um pouco mais simples, porque a gente quando faz esse cálculo, a gente pode eliminar y ao quadrado. Então façam o seguinte, pessoal, leiam o exemplo treze da página oitenta e três e a gente discute esse exemplo ou um outro similar no próximo encontro, por quê? Porque aí vocês já vão ter feito a leitura e já vão ter alguma coisa assimilada aí do processo, tá bom? Então, leiam o exemplo treze da página oitenta e três e vamos discutir um exemplo parecido... o catorze também é a mesma linha, está vendo? E eu deixo essa semana algumas questões marcadas para vocês até aqui onde a gente estudou. Vocês vão perceber que no livro de vocês ele coloca tudo separadinho, né? Posição relativa: ponto e circunferência, reta e circunferência; e circunferência e circunferência, exercícios em blocos diferentes, mas como eu fiz aqui a apresentação para vocês, dá para notar que é simplesmente uma questão de análise de distância entre ponto e... ponto e ponto; e ponto e reta; e intersecção é resolução de sistemas, ok?

A2[a]: Certo, professor.

A25[a]: Ok!

P: Ah, outra coisa coloco hoje aquela segunda atividade que eu tinha prometido para vocês. Eu ia colocar na semana passada, mas como foi feriado... eu não vou botar nas férias para esses meninos não...eles depois ficam brigando comigo. Então eu coloco hoje e dou uma semana aí para vocês fazerem, tá bom? É suficiente uma semana?

A12[a]: Tá certo, professor.

A2[a]: Sim.

A25[a]: São três questões também, né?

P: Isso... só três questõezinhas é suficiente, beleza?

A25, A2[a]: Tá certo.

P: Ok, pessoal, por hoje, *solamente* e a gente conclui com isso o capítulo de circunferência... ou seja, na próxima aula eu volto só para fazer um exemplo, mas o capítulo de circunferência morreu! Então...

A2[a]: Professor, o senhor pode colocar na nossa sala de aula [se referindo ao Google Classroom] a aula da semana passada?

P: Posso sim, posso sim!

A2[a]: Tá joia então tá certo.

P: Se eu não colocar até amanhã, me lembra lá no grupo, por favor!

A2[a]: Tá certo.

APÊNDICE D – TRANSCRIÇÃO DA AULA 19

Descrição:	**Aula 19**
Data:	**14/04/2021**
Início da aula:	**13h37**
Término:	**15h**
Duração:	**01h23**
Participantes:	**Professor, Pesquisadora, 15 alunos (total de 17 pessoas)**
Alunos presentes:	**A2, A4, A8, A10, A13, A18, A19, A21, A22, A23, A24, A25, A26, A27, A28**
Conteúdo:	**Elipse**

TRANSCRIÇÃO DA AULA

[*Do início da gravação até o tempo de 23 minutos, o professor tirou algumas dúvidas sobre uma atividade deixada para os alunos no Google Classroom sobre o conteúdo de retas. Optamos por não transcrever esses diálogos por não se referirem ao conteúdo de cônicas*]

P: Então vamos para o nosso encontro de hoje, né? Bem, no encontro de hoje nós vamos entrar agora na segunda cônica, que é a nossa elipse. E aí vou fazer aqui apresentação para vocês do material e eu já vou logo avisando o seguinte, pessoal, o material da apresentação de hoje, vai ficar até melhor para vocês consultarem posteriormente, eu vou disponibilizar no site. Vocês podem ver, além do vídeo, vão poder ficar olhando o material umas 50 mil vezes. É muito do que já tem no livro, basicamente o que já tem no livro, só que está em resumo. O pessoal sempre diz professor, disponibiliza o material, é o mesmo que está no livro, só está resumido. Então vamos a ele [P começou a apresentação na tela]

P: A primeira coisa que a gente vai para elipse é a definição. Elipse é um lugar geométrico, tá pessoal? É um conjunto de pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

P: Antes de dar sequência aqui, me permitam mostrar um vídeo para vocês. Aqui a gente vai chamar essa construção, é a construção usando um fio esticado, e aí eu vou aproveitar para exatamente conversar um pouco sobre a definição. Olha só, essa construção, nós chamamos também de construção do jardineiro, o método do jardineiro. E aqui eu vou aproveitar para ficar conversando sobre a definição. Então imaginem aqui esse gramado verdinho como sendo o nosso plano. Poderia ser um plano não sendo apenas o piso, mas uma parede, um plano inclinado. Como você queira, um plano qualquer! O tampo da sua mesa [P levantou hipóteses, enquanto mostrava a figura].

P: Esse pontinho branco aqui, esse cilindro branco, representa um daqueles dois pontos fixos do plano, tá? Então esse ponto foi dado e esse ponto foi dado [P mostrou com o cursor do mouse os dois cilindros menores da imagem, que representavam os pontos a que ele se referia]

P: Esses são os pontos P cuja distância até o foco um, vou chamar de foco já, tá? Até F_1 e até F_2 são constantes. Vejam, quando eu começo a movimentar esse meu giz aqui, a distância, essa distância mais essa, é sempre o comprimento do barbante. Esse barbante não é um elástico, de tal maneira que o seu comprimento não se altera. Então percebam [P passou o vídeo para que os alunos observassem a movimentação realizada pelo giz]

P: Vocês estão percebendo que ele fica dando saltinhos? Vou parar [o vídeo]. Esse comprimento mais esse [P mostrou as partes do barbante] é o tamanho do barbante: constante [P mudou o giz de lugar e novamente mostrou as partes do barbante]. P: Esse mais esse: constante. Então esse ponto onde está a ponta do giz aqui, a distância até aqui mais a distância até aqui [mostrou na tela] é sempre constante. Então, todos os pontos que moram nessa linha escura têm essa característica da soma das distâncias aos pontos dados serem constantes. Então vejam qual é a imagem que a gente consegue fazer. E aqui é interessante, é uma sugestão que eu dou para vocês, vocês podem fazer essa construção usando o quê? Uma caixa de sapato, ou como você queira, uma ventosa, eu fiz uma certa vez aqui com uma caixa de sapato e aqui com alfinetes. Você coloca um alfinete aqui e amarra a linha, um alfinete aqui e amarra a linha, deixa um pouco folgadinha e com a sua caneta você vem deslizando o lápis. Vejam que fez [o desenho] para um lado. Vou voltar o vídeo, vai fazer primeiro de um lado... eu não tenho alfinete, eu poderia usar uma ventosa? Pode. Aqui eu poderia furar um papelão e amarrar embaixo, passar essa linha para outro lado também funciona. Vejam, foi feito um lado e agora está fazendo o outro.

P: Feita a construção, aí está. A sugestão é exatamente porque o jardineiro consegue fazer um canteiro em formato de elipse usando por exemplo duas pedras e uma corda e aqui a ponta da enxada, ou da colher de pedreiro ele consegue fazer o risco no chão em encontrar o nosso formato elíptico. Então como eu disse para vocês, esse ponto e esse são exatamente os focos e os pontos que moram aqui [P apontou com o cursor para a elipse] são os pontos que compõe a nossa elipse. Então ilustrada a nossa definição, essa daqui é a imagem da nossa elipse. Então aqui aquele primeiro "torozinho" branco estamos chamando de F_1 e o segundo de F_2 e os pontos que ficam caminhando aqui são os pontos da nossa elipse. Aqui só para formalizar os termos usando a notação da Geometria Analítica. A gente vai considerar dois pontos tal que a distância de F_1 até F_2 é constante. Essa distância aqui é $2c$ [enquanto P falava a definição, a apresenta na tela e vai apontando com o cursor do mouse para o que ele se referia].

P: E vamos considerar o número real a, tal que $2a > 2c$. Traduzindo essa informação, o barbante tem um comprimento maior do que a distância de F_1 até F_2, beleza? Ou seja, o barbante vai ter que ficar folgadinho, ele não vai poder ficar esticado. Chamando de $2a$ a constante da definição, ou seja o comprimento do barbante, um ponto P pertence à elipse se e somente se a distância de P até F_1 mais a distância de P até F_2 for igual a $2a$. Então vejam, saímos daquele vídeo, uma construção geométrica usando materiais manipulativos para agora uma usando a parte algébrica aqui da Geometria Analítica, definição de distância entre pontos igual a uma constante. Distância do ponto ao foco um, mais distância do ponto ao foco dois igual a $2a$.

P: Daquela figura, nós podemos tirar aqui alguns elementos. Um primeiro deles eu já disse que era foco, F_1 e F_2, mas vamos agora dar nomes aqui. F_1 e F_2 nós chamamos de focos. O $2c$, a distância de F_1 até F_2 a gente chama de distância focal. O centro da elipse é o ponto C, ou seja, o ponto médio entre os focos. Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 a gente chama de vértices. Percebam, A_1 e A_2 pertencem à reta determinada pelos pontos F_1 e F_2. E os pontos B_1 e B_2 pertencem à mediatriz de F_1, F_2. O segmento $overlineA_1A_2$ a gente chama de eixo maior. Então quando dissermos, por exemplo, a distância do eixo maior é dez, significa que daqui, do A_1 até o A_2 vale dez. Logo do C até o A_1 vale cinco, do C até o A_2 vale cinco.

P: O segmento $\overline{B_1B_2}$ a gente chama de eixo menor, ele é perpendicular, como já falei ele pertence à mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$. Então na imagem aqui a gente tem todas as informações: focos, vértices, centro, eixo maior, eixo menor, e aqui em vermelho eu deixei para vocês as medidas. Distância focal $2c$, medida do eixo maior $2a$, medida do eixo menor $2b$.

P: Ainda com base naquela figura, a gente pode perceber o seguinte, olha, se eu fizer do B_2 até o F_1, do B_2 até o F_2 também dá $2a$. Lembra que o comprimento do barbante, para fazer uso da nomenclatura que a gente estava fazendo uso agora há pouco, é sempre $2a$. Então se eu pegar exatamente o ponto B, eu vou ter a e a. Então, como $\overline{B_2F_1} + \overline{B_2F_2} = 2a$, como $\overline{B_2F_1} = \overline{B_2F_2}$, então $\overline{B_2F_2} = a$, logo o triângulo, esse triângulo aqui amarelo, é um triângulo retângulo, onde B_2F_2 mede a, este cateto mede c e este cateto mede b. Vejam, desse triângulo retângulo, usando o teorema de Pitágoras, eu tenho que $a^2 = b^2 + c^2$. É isso que eu escrevo aqui. Então, definimos os elementos. O último elemento que vamos definir aqui é a excentricidade: a excentricidade é um número real c sobre a $\left[e = \dfrac{c}{a}\right]$. Vamos entender então o que esse c sobre a nos diz sobre nossa elipse.

P: [P abriu o Geogebra na tela] Construir aqui uma elipse qualquer [P construiu uma elipse e foi modificando para chegar a um determinado formato pretendido]. E aqui vamos ver a excentricidade.

P: Pessoal, fiquem olhando para esse número aqui, tá? Zero ponto oito [P mostrou o valor na janela de álgebra do Geogebra].

[P começou a modificar na janela de geometria as dimensões do eixo menor da elipse, no eixo y, achatando a elipse]

P: O que é que está acontecendo com a excentricidade, pessoal?

A2[a]: Está aumentando, professor.

P: Ficando sempre mais próximo de quanto?

A2[a]: De um?

P: De um! Vamos voltar um pouco agora. O que é que está acontecendo com a excentricidade? [P aumentou a medida do eixo menor, tornando a elipse mais arredondada]

P: E agora? Vai ficar mais próximo de quem agora?

A2[a]: De zero?

P: De zero.

P: O que é que aconteceu com a elipse quando estava ficando próxima de um a excentricidade? E o que é que está acontecendo com a elipse quando essa excentricidade está ficando próxima de zero? Estou indo para perto de um, olha, o que é que está acontecendo com a elipse? [O professor manipulou a elipse, modificando sua excentricidade em uma construção no Geogebra]

[A22 tentou falar alguma coisa, mas não foi compreensível na gravação]

P: Vou deixá-la bem aqui, bem mais perto de zero. Essa elipse está parecendo o que agora?

A2, A22[a]: Uma circunferência.

P: Uma circunferência!

[P abriu um novo arquivo, com outra construção no Geogebra, usando controles deslizantes para variar os valores do a e do b]

P: Essa aqui dá para a gente ilustrar bem. Vejam que quanto mais próximo de zero mais arredondada, mais próxima do círculo está ficando a nossa elipse. Quanto mais próximo de um, estão vendo lá? 89, 90, 91, 92... quanto mais achatada, mais próxima de um. Então essa nossa excentricidade ela nos diz sobre o achatamento da nossa elipse. Quanto mais próximo de um, mais achatada. Quanto mais próximo de zero, mais arredondada. Lembra aqui das aulas de Física um pouco. E sobre a órbita dos planetas. Com certeza vocês já ouviram falar sobre como é a órbita dos planetas e como é o percurso dela. Tem um percurso aproximadamente o quê? [silêncio]. Ih faltaram outra aula foi? [silêncio] Pessoal, estão aí? Vem cá, deixa eu ver se eu não caí aqui... a internet [P foi olhar "para os rostos dos alunos"]

A27[a]: Não, a gente tá aqui sim.

P: Ah, estão aí? Pensei que não estavam, mais.

A27[a]: Eu só não entendi a pergunta.

P: Vamos por aqui [P abriu a janela do OneNote e começou a desenhar]. Sol, Terra. A Terra gira em torno do Sol. Não vai ficar bonito [P se referiu ao desenho que estava fazendo], mas vale. Qual é a linha pela qual a gente faz esse percurso? [silêncio prolongado]. Nada? Ou nesses novos tempos o Sol voltou a girar em torno da Terra, como era na Idade Média? A27[a]: Acho que não voltou não, professor!

P: Não né? A Terra continua girando em torno do Sol. Pessoal, a gente tem aqui uma trajetória elíptica.

A27[a]: Eu ia falar isso, mas eu pensei que ia ser idiota.

P: Não, é isso mesmo! Não fique com medo de falar não. Aqui não vai ter nada errado, certo? Só que essa trajetória elíptica, quando depois vocês derem uma olhadinha lá para relembrar, vocês vão ver que ela é quase circular. Porque a sua excentricidade está próxima de zero.

P: Então a órbita dos planetas tem trajetórias elípticas. Eita o velho Copérnico quase morrendo do coração com esse silêncio agora de vocês, não foi? Mas vamos lá, dando seguimento.

P: Então aqui está a explicação.

P: A excentricidade é responsável pela forma da elipse. Então elipses com a excentricidade próximas de zero são aproximadamente circulares, enquanto elipses com excentricidade próxima de um são mais achatadas. Fixada uma excentricidade, nós temos infinitas elipses com a mesma excentricidade. Aqui é importante chamar atenção, pessoal, para o seguinte, inclusive vai ter problemas no exercício que tratam sobre isso. Poderia ter uma elipse pequenininha, uma elipse maior, uma elipse maior... [P desenhou na tela algumas elipses como mesmo formato]. Todas com a mesma excentricidade. Suponha 0.8. Então vejam, a gente pode ter infinitas elipses com a mesma excentricidade. O que é que eu quero dizer com isso? Tem alguns problemas que quando eu disser para você: olha a excentricidade é 0,8, mas a medida do eixo maior é 10. Veja, excentricidade: oito sobre dez. Mas a excentricidade é c sobre a. Você não pode dizer que o a é oito e que o c é dez. Essa é uma das possibilidades, ok? Para esse caso particular esse a seria cinco. Tomar cuidado com os problemas que dizem: excentricidade vale tanto. Veja que existem infinitas elipses de mesma excentricidade. Vá atrás da próxima informação que tem no problema para não cometer um crime. Já estou antecipando esse crime porque já aconteceu tanto em outras turmas, que é possível que continue a acontecer. E é normal! Esquece, passa batido e não tem problema algum. Continuemos então com a nossa apresentação.

P: Até agora tudo que a gente estudou foi reta, procuramos encontrar uma equação para a reta, ou seja, representá-la algebricamente. Estudamos circunferência, procuramos determinar uma equação, ou seja, uma representação algébrica para a circunferência. Nada diferente então para uma elipse. Ou seja, uma vez que a gente consegue definir uma elipse, ela está num plano qualquer, a gente pode pensar em um sistema cartesiano nesse plano, então determinar uma equação cartesiana para essa nossa elipse. Vamos ver como é que acontece tá? Vamos dividir aqui em dois casos: um caso a gente vai ver na aula de hoje, quando o centro está na origem do sistema, e o outro caso nós vamos ver na próxima aula, quando o centro não está na origem do sistema. É interessante chamar atenção o seguinte: nós vamos ter apenas os casos em que nosso eixo focal está na reta do eixo Ox ou Oy, como queiram, mas sempre paralelo ao eixo Ox ou eixo Oy? Não! A gente poderia ter a elipse inclinada, mas nós não vamos estudar esse caso aqui tá? Mas quem for fazer depois essas coisas mais divertidas, quem for fazer Matemática, área de Exatas, pode estudar essas coisas. Então vamos lá para a equação reduzida. A gente vai fixar um sistema cartesiano ortogonal, considerando que o centro da elipse é a origem do sistema. E aí vamos trabalhar com dois subcasos: o primeiro deles é quando o eixo maior pertence ao eixo dos x, o eixo das abscissas, ou seja, essa situação aqui [ele mostrou na apresentação de slides o que estava falando]

P: Eu tinha uma elipse, em um plano qualquer, fui lá e coloquei num sistema cartesiano ortogonal, de tal maneira que o centro da elipse coincida com a origem do sistema. Ora, se eu coloco dessa maneira, o que eu ganho é que o foco 1 tem coordenadas. Lembrem: foco 1, foco 2, a distância $\overline{F_1F_2}$ era $2c$. Então esse pedacinho aqui é c, esse pedacinho aqui é c. Então, $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ [referindo-se às coordenadas dos focos]. Do centro até o A é o semieixo maior. Se do A_1 até o A_2 era $2a$, esse pedacinho aqui é a. Da mesma forma, esse pedaço é b. Então vejam que a gente também consegue atribuir aqui coordenadas agora a A_1, A_2, B_1, B_2, F_1 e F_2. Seja P um ponto da nossa elipse... vamos lembrar: qual era a característica dos pontos que pertencem à elipse? É que a distância do ponto P até F_1 somado com a distância do ponto P até F_2 é constante. E que constante é essa? $2a$. O ponto tem coordenadas (x, y). F_1 [tem coordenadas] $(-c, 0)$, F_2 [tem coordenadas] $(c, 0)$. Pessoal, essa aqui é a fórmula de distância, ou seja, a raiz.

P: Aplicando a fórmula de distância, nós vamos obter essa equação, só eliminando aqui esse termo ao quadrado vai ficar y ao quadrado passando isso aqui para o segundo membro eu tenho essa equação. Nosso objetivo aqui é nos livrarmos dessas raízes, então a gente pode elevar ambos os membros ao quadrado. Vejam, daqui para baixo é conta. Vamos lá! Elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo, nós vamos obter essa redução.

P: Eu estou passando isso aqui rápido pessoal, porque vocês vão poder ver isso cinquenta vezes no slide, e tem também no livro de vocês. Percebam que eu ainda tenho uma raiz. Para me livrar eu posso de novo elevar ao quadrado. Ou seja, elevando ao quadrado e desenvolvendo de novo essas potências, eu chego a essa expressão aqui embaixo.

P: Mas aí eu quero chamar atenção de uma coisa: veja que aqui eu tenho a diferença a ao quadrado menos c ao quadrado e de novo eu tenho a ao quadrado menos c ao quadrado só que como nós vimos lá naquele triângulo amarelo, ali a gente tinha o Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$. Ou seja, eu posso primeiro colocar o c no primeiro membro: $a^2 \breve{\ } c^2 = b^2$. Então eu posso substituir isto [ele apontou para o termo $(a^2 - c^2)$ da equação] por b^2 e isto por b^2. Então vai ficar: b dois, x dois, a dois, y dois, a dois, b dois [aqui ele se referiu à equação $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, sem utilizar a linguagem formal, e que pode causar ambiguidade na compreensão do aluno pela divergência do que se fala e do que está escrito].

P: Bem, o a é maior que zero, então o a^2 também o é, para todo arco não nulo. Sendo a e b positivos, então toda essa parcela [a^2b^2] é positiva, então posso dividir tudo por a^2b^2. Fazendo essa divisão, a gente encontra essa equação aqui pessoal.

P: Aí tenho uma coisa interessante para dizer para vocês, antes que esse silêncio nos corroa: A gente tem que fazer tudo isso toda vez? Não! Estou mostrando para vocês apenas como nessa equação. E é essa equação que nós vamos utilizar. Essa aqui é o que chamamos de equação reduzida da elipse no primeiro caso. Qual é o primeiro caso? O eixo maior está no eixo Ox e a origem é o centro da elipse. Então a equação é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. O segundo caso é quando o $\overline{A_1A_2}$, ou seja, o eixo maior está no Oy. Nesse caso o foco [F_1] está no $(0, -c)$ e [F_2] está no $(0, c)$. A elipse rotaciona. Em vez de estar assim eixo maior no Ox, ela está com o eixo maior no Oy.

P: Se nós fizermos cálculos análogos ao que fizemos para o caso 1, a gente vai encontrar também uma equação para esse segundo caso. E essa equação é essa aqui:

P: Qual a diferença da equação? Quando o eixo maior está no eixo Ox, o a está sobre o x [ambos ao quadrado] no denominador. Quando o eixo maior está no Oy, o a está no denominador do y [ambos ao quadrado]. Dito de outra forma, quando o eixo maior está sobre o eixo Ox, o maior valor do denominador, está no denominador do x. Vamos fazer alguns exemplos? Nos três exemplos que eu vou mostrar aqui para vocês a gente vai pedir tudo da elipse: todos os elementos e esboçar o gráfico. Assim a gente pode transitar desde a sua representação algébrica até a sua representação geométrica [P passou a ler o enunciado da questão].

P: Vou sair daqui e vou para o verde tá? [P se referiu à tela verde do OneNote, em que utiliza a mesa digitalizadora para resolver as questões] Quais foram as informações dadas? Ele disse que o Foco um está no ponto $(-4, 0)$, o Foco dois está no ponto $(4, 0)$ e o eixo maior mede

[$\overline{A_1A_2}$] 10. Primeira coisa: o que essa informação aqui me diz? É que o $2a$ mede 10, portanto o a mede 5. Quanto mede $\overline{F_1F_2}$?

A22[a]: Oito?

P: Oito! O que é que essa informação me diz? Lembrem: isso é distância focal! $2c = 8$. Portanto c vale...

A22[a]: Quatro.

P: Até aqui tranquilo?

A22[a]: Sim.

A25: Tranquilo!

P: O que é que nós temos mais? Se eu tenho o a e o b, C, eu posso encontrar o b utilizando o quê? [Silêncio prolongado. Então o professor voltou os slides até a o ponto que mostrava a imagem a que ele se referia]

A22[a]: Achando a hipotenusa?

P: Como é que a gente faz para achar a hipotenusa?

A25[a]: Pitágoras?

P: A hipotenusa a gente já tem, que é o a. Nossa amiga tinha falado alguma coisa que eu não escutei, desculpa.

A25[a]: Pitágoras.

P: Exatamente! Só toma cuidado olha: a hipotenusa eu já tenho, tenho este cateto [apontou para o c], e falta este [apontando para o b]. Então vamos lá: a ao quadrado igual a b ao quadrado mais c ao quadrado. O a eu tenho [escreveu na tela 25], o b eu não tenho, o c eu tenho [escreveu 16]. Ou seja, $b^2 = 25 - 16 \implies b^2 = 9$. Quanto vale o b? [silêncio] Pessoal?

A25[a]: Três.

P: Três. Vou voltar para aquela imagem onde tem um triângulo porque percebam, eu tenho a, tenho b e tenho c. São as informações que eu preciso para construir o gráfico. Senão vejamos [P desenhou na tela o plano cartesiano]: Foco 1, lembrem-se que ele me disse que era $(-4, 0)$, Foco 2 $(4, 0)$. Vejam, aqui é exatamente o c... quatro para um lado e quatro para o outro. Agora vamos colocar o a e o b. O a cinco, então cinco para a direita e cinco para a esquerda. Eu tenho aqui o A_1 e aqui o A_2. E o b é três, três para cima e três para baixo. Então aqui eu tenho nosso B_1 e aqui eu tenho nosso B_2. Então a gente pode fazer aqui um esboço da nossa elipse. Lembrem que para o nosso objetivo aqui ela não precisa ficar perfeita, mas tem que dar uma noção da nossa elipse.

P: Então, determinando o a, o b e o c eu consigo construir minha elipse. Eu determinei a representação geométrica dela, eu tenho condição de determinar todos os elementos. Centro, me digam os pontos, pessoal, rapidinho, acorda! [silêncio] Centro? [silêncio. P acenou para a tela, chamando a atenção dos alunos] Estão aí?

A25[a]: Não sei.

P: É sério? Centro?

A8[a]: Professor o senhor está querendo os pontos do Centro? [coordenadas do ponto]

P: Pois é.

A8[a]: $(0, 0)$.

P: [P escreveu as coordenadas do centro] A_1?

A8[a]: Era zero... eita, agora não me lembro quem era o a. P: Olha o ponto [P estava se referindo ao ponto representado no esboço que estava aparecendo na tela]

A25[a]: Cinco. P: Menos cinco e zero. A_2?

A25[a]: Cinco. P: Cinco. Só isso? A gente está no plano pessoal. Pontos no plano têm duas coordenadas: cinco e zero. B_1?

A25[a]: Menos três, zero.

A8[a]: Zero, menos três, na verdade.

P: Decidam.

A25[a]: Zero e menos três.

P: Zero e menos três. B_2? [silêncio] B_2?

A25[a]: Zero e quatro.

P: Quatro?

A25[a]: Não é não?

P: Conta aí.

A25[a]: É três, é três.

P: Foco 1 e Foco 2, me permitam escrever direto porque já deu no problema tá? $(-4, 0)$ e $(4, 0)$. Eixo maior 10, eixo menor 6, distância focal 8. E a excentricidade, pessoal? A excentricidade é c sobre a.

A25[a]: O a no caso é 10, não é?

P: O a é quanto?

A25[a]: Dez?

P: Dez é o eixo todo, o a é só a metade.

A25[a]: Cinco.

P: Certo. E o c?

A25[a]: Quatro.

P: Então quatro sobre cinco. Veja que dá exatamente aquele $0,8$ que eu estava colocando como exemplo agora há pouco. Então vamos lá: no problema foram dados focos e eixo maior, do eixo maior eu tirei o valor de a, dos focos eu tenho distância focal, eu tenho o valor de c, uso Pitágoras e encontro o valor de b, com a, b e c a gente consegue construir todo o gráfico. Do gráfico tirei cada um dos pontos, seus elementos e a excentricidade. Perguntas?

A25[a]: Não.

P: Ok. Hoje está divertido, temos dez [alunos] na aula.

A25[a]: É porque esta semana a gente está cheia de prova e atividades para entregar sexta-feira. P: Então vamos continuar. Sigamos aqui para o próximo exemplo, aqui no material viu? Segundo exemplo, nesse caso a gente vai dar a equação e pede para determinar os elementos. No primeiro deu alguns elementos e pediu a equação e o gráfico.

P: Eu vou fazer uma alteração aqui, trocar o quatro pelo nove, senão vai ficar sem graça. Então exemplo dois, nós já demos a equação da elipse.

P: Deixa eu chamar atenção de uma coisa aqui no início: estão vendo que ela está nesse formato? Ela é maior no eixo Ox, ou seja o eixo maior está no Ox. Quando isso acontece... eita esqueci de escrever a equação aqui, pessoal [se referindo ao exemplo anterior]. Vou escrever a equação aqui, olha: x ao quadrado sobre a ao quadrado. Quem era o a? Cinco [ele escreveu 25 abaixo do a] mais y ao quadrado sobre b ao quadrado igual a 1. Então esta é a equação da nossa elipse.

P: Percebam, o maior valor do denominador é o denominador do x ao quadrado. Nesse outro exemplo, observem que o maior denominador é o denominador do y ao quadrado mais.

A25[a]: Então a elipse vai ficar mais redondinha.

P: Ela vai ficar em pé.

A25[a]: Beleza.

P: Se o maior valor estiver sob o x ela fica deitada. Vamos usar esse termo aqui por enquanto tá? Quando eu digo deitada, significa que o eixo maior está no eixo Ox. Quando o maior valor do denominador é o do y, então o eixo maior está no Oy.

A22[a]: E se for igual?

P: Se for igual a gente não tem uma elipse, a gente tem uma circunferência. Vamos fazer um teste aqui com você só pra gente brincar, olha: x ao quadrado sobre 4 mais y ao quadrado sobre 4 igual a 1. Isso é x ao quadrado mais y ao quadrado igual a 4. Mas isso aqui é uma circunferência de centro na origem e raio 2. Se forem iguais [os denominadores] circunferência beleza? Para ser elipse os denominadores têm que ser diferentes. Aí eu quero chamar atenção, olha: percebam sinal "de mais", sinal "de mais" [P mostrou na tela as duas equações da elipse trabalhadas até o momento, mostrando o sinal que vem entre os termos de x^2 e y^2]. Por que você está enfatizando isso? Porque quando a gente for estudar outro tipo de cônica vai aparecer um "menos". Então vamos lá. Pessoal, quem é o a ao quadrado nesta equação? [P voltou para a equação do exemplo 2].

A25[a]: Um sobre quatro?

P: O a é sempre o maior na equação.

A25[a]: Um sobre nove!

P: Só o nove. Portanto o a vale três. E o b ao quadrado é 4, portanto o b vale 2. Ora se eu já encontrei o a e o b, portanto posso usar o nosso amigo Pitágoras para encontrar o valor de c. Vamos lembrar: a ao quadrado é igual a... [P foi interrompido com a pergunta do aluno]

A22[a]: Professor, não podia usar aquela fórmula que o senhor usou no início que $2c = a$? É isso? Essa que o senhor usou para descobrir o c é o quê?

P: Distância focal. $2c$ é igual à distância focal. A gente ainda não tem a distância focal.

A22[a]: Entendi. Pensei que em vez da distância focal ia ser igual a a.

P: Beleza! [P continuou de onde parou] ...b ao quadrado mais c ao quadrado. Eu tenho: o a vale três, então eu tenho nove, igual a quatro mais c ao quadrado. Ou seja, c ao quadrado igual a cinco, c igual à raiz de cinco. Só lembrando, como o denominador maior está no y, o a está no Oy [eixo]. Novamente temos o valor de a, o valor de b e o valor de c. Então podemos construir nossa elipse. Então três para cima, três para baixo, b, direita, esquerda, dois, dois.

Então vejam que aqui a gente já tem como fazer um esboço da nossa elipse. Lembrem aqui eu estou com A_1, A_2 eixo Oy, B_1, B_2 eixo Ox. E agora o foco? Lembrem que o foco é raiz de cinco. Se você estiver com a calculadora pode fazer que dá dois vírgula vinte e quatro $[2, 24]$. Mas se você estiver com o compasso você pode pegar essa medida aqui, que é a medida do semieixo maior com o compasso. Depois ponta seca no b e faz o transporte.

P: Então vamos aqui tirar todos os elementos: Centro $(0, 0)$, quem é o A_1 pessoal?

A25[a]: Menos três ou é menos quatro.

P: Menos três e zero. A_2?

A25[a]: Três e zero.

P: B_1?

A25[a]: Dois e zero.

P: Negativo.

A25[a]: Certo.

P: Vamos fazer uma troca aqui viu? [Apagou as coordenadas de A_1 e A_2]. $A_1 : (0, -3)$, $A_2 : (0, 3)$. B_2? Dois e zero. Foco 1? Menos c e zero. Foco 2: c e zero. Excentricidade: c sobre a, ok? [ele escreveu os valores na tela]. Só para lembrar aqui, o eixo maior a medida é 6, o eixo menor a medida é quatro. E distância focal: dois raiz de cinco. Alguma crise?

A25[a]: Não.

P: Por fim, fica para vocês fazer esse exemplo aqui.

P: No caso vou tirar da questão "esboce o gráfico" porque o gráfico já está esboçado. Rapidinho, a gente não vai resolver, mas só olhando para o gráfico, o que é que a gente tem? Quais são as informações que vocês conseguem retirar?

A25[a]: O a?

P: o a vale quanto?

A25[a]: Menos 13, não!

P: O a sempre é um valor positivo.

A27[a]: Treze.

P: E o b?

A22[a]: Cinco.

P: Cinco. Se eu tenho o a e o b, eu acho o c e o restante vai embora. Então fica aí para vocês esse terceiro exemplo aí. Perguntas?

A8[a]: Por que o senhor não coloca um desse na prova?

P: Ferramentas, meu querido, ferramentas. Perguntas?

A25[a]: Não professor.

P: Ok, digam ao restante da galera que depois deem uma olhadinha aí no vídeo, que vai ser postado e no material. O material, pessoal, vai estar no site, viu? Essa apresentação aí eu vou deixar lá no site. Amanhã entra pelo site, lá na sala virtual de vocês. Se quiserem usar aí depois, fiquem à vontade. Por hoje *solamente*, vou parar a gravação por aqui e hoje vocês estão bem animados.

APÊNDICE E – TRANSCRIÇÃO DA AULA 20

Descrição:	**Aula 20**
Data:	**21/04/2021**
Início da aula:	**13h35**
Término:	**14h58**
Duração:	**01h23**
Participantes:	**Professor, Pesquisadora, 11 alunos (total de 13 pessoas)**
Alunos presentes:	**A2, A4, A8, A12, A13, A14, A21, A22, A23, A25, A27**
Conteúdo:	**Elipse**

TRANSCRIÇÃO DA AULA

P: [00:00:04] Boa tarde, vamos começar mais um encontro de matemática três. Essa turma elegantíssima. A25 está me perguntando sobre a questão um. Algumas pessoas, umas três, quatro, não lembro agora, iniciaram... Tudo bom, A2? Deixa a câmara aberta, A2... que responderam, viu A25, dois terços da questão. Encontraram as duas primeiras equações que eram as que estavam o passo do raciocínio, que precisava de interpretação e não fizeram a terceira parte, que era mais fácil. Mas no próximo encontro a gente pode fazer a resolução, sim, dela, como eu estava falando antes de começar a gravação, hoje a hora está um pouco apertada, porque daqui a pouco eu vou ter reunião do calendário acadêmico. E está difícil, o horário está bem em cima.

[*O professor passou os próximos minutos da aula conversando com os alunos sobre o resultado deles no ENEM–SISU, que não vamos transcrever aqui. Dentre os alunos que estavam na aula e falaram, A21 e A25 foram aprovadas para o curso de Licenciatura em Matemática do IFPB, A2 para o curso de Arquitetura e Urbanismo da UFPB, A23 para o curso de Serviço Social da UEPB e A8 está na lista de espera de Engenharia Civil da UFCG e A14 e A22 não conseguiram passar para Engenharia Civil, mas iriam tentar no ano seguinte.*]

P: [00:08:50] ... Parabéns aos que tiveram êxito agora, aos que não tiveram êxito, mas ainda tem a lista [de espera] e com certeza podem entrar. E para os que ficarão aqui conosco: Show de bola! Nos encontraremos em algumas disciplinas para nos divertirmos. Certo? Agora vamos começar o nosso encontro de hoje. Eu já coloquei lá na sala [Google Classroom], inclusive as questões, todos os vídeos estão atualizados, as gravações. E na aula de hoje a gente vai finalizar o conteúdo de elipse. Então vou começar aqui, compartilhando com vocês a tela. Está aparecendo para vocês, pessoal?

A25[a]: [00:09:47] Sim, sim.

P: [00:09:51] Olha só, aproveitando que eu vou passar o slide inteiro, vou relembrar um pouco aqui a aula passada. A gente definiu elipse, sua definição em língua materna.

P: Depois, introduzimos um sistema de coordenadas, apresentando os elementos da elipse. Num segundo passo, nós já determinamos a equação reduzida dessa elipse. Ou seja, a partir do momento em que colocamos um sistema de coordenadas, fazendo o centro da elipse coincidir com a origem do sistema, a gente consegue determinar a equação, que nesse caso tem dois formatos. O primeiro é esse: x ao quadrado sobre a ao quadrado mais y ao quadrado sobre b ao quadrado igual a um. Onde o a é o número maior, o a é maior que b, então esse denominador é maior. Isso significa que a elipse está, eu vou usar esse termo, "na horizontal". E o segundo caso é quando a elipse está na "vertical". Percebam que o que vai alterar aqui é o a e o b no denominador. Ou seja, quando o maior valor está no denominador do x. Ela está na horizontal. Quando o denominador maior está no termo y, está na vertical. E aí, quando fizemos alguns exemplos, este [o que foi feito] e este que ficou para vocês fazerem, fizeram?

A25[a]: [00:11:26] Não consegui.

P: [00:11:28] Não?

A12[a]: [00:11:29] Não fiz, não.

P: [00:11:33] Teve um que não deu tempo fazer, talvez. Mas teve um que não conseguiu! A25? E é aí, qual foi a tua uma dúvida?

A25[a]: [00:11:44] A interpretação, não sei.

P: [00:11:47] Vou fazer o seguinte. Vou dar o pontapé inicial na questão e você vai ver que o restante vai sair de graça. Está bom?

A25[a]: [00:12:08] Tá bom.

P: [00:12:12] Então vamos iniciar aqui primeiro com as dúvidas. Exemplo três. Vamos olhar o gráfico do exemplo três. Percebam: a primeira coisa que a gente deve observar quando eu tenho o gráfico de uma elipse é: ela está na horizontal ou está na vertical? Nesse caso está em que sentido?

A25[a]: [00:13:14] Horizontal.

P: [00:13:16] Horizontal. O modelo pronto está na horizontal. A segunda pergunta que a gente deve se fazer é a seguinte: a origem coincide com o centro, seja, o centro coincide com a origem? Sim ou não?

A22[a]: [00:13:43] Sim.

P: [00:13:45] Ok com essas duas informações. Se a origem coincide com o centro, então ela é desse formato aqui [ele escreveu na tela o $\frac{x^2}{} + \frac{y^2}{} = 1$, sem os denominadores]. Basta descobrir agora quem é que está no denominador. Tá certo? Se está na horizontal. É a ao quadrado e b ao quadrado. Se tivesse na vertical, b ao quadrado e a ao quadrado. Como está na horizontal. Esse é o formato da equação reduzida. Até aqui, beleza?

A25[a]: [00:14:27] Sim.

P: [00:14:30] Bem, agora que a gente sabe qual o formato da equação reduzida. Para determinar a equação, basta determinar qual o valor de a. E qual o valor de b. E aí vamos voltar para o gráfico para olhar. Como é que a gente chama esse segmento que sai de onde está a minha mãozinha até aqui? Do -13 até o 13. Como é que a gente chama isso? [silêncio] Qual o nome desse elemento?

A2[a]: [00:15:17] Qual Professor?

P: [00:15:18] Do -13 até o 13. A gente deu um nome a isso. Para lembrar, tem no material.

A2[a]: Eixo maior.

P: Exatamente, eixo maior. E B_1 até o B_2 tem o eixo menor. O eixo maior vale $2a$ e o eixo menor vale $2b$. No material estão todas as informações. Olhando para cá, quanto mede o eixo maior?

A2[a]: [00:16:05] Vinte e seis?

P: [00:16:07] Vinte e seis. Então, olhando para o gráfico, nós temos eixo maior $\overline{A_1A_2} = 26$. Só que lembra que A_1A_2 é $2a$. O a vale 13. Eu preciso fazer essa conta? Não só observando o gráfico já poderia perceber que o a é treze. Mas eu estou fazendo questão de escrever dessa forma, porque quando não tivermos o centro na origem, talvez seja preciso montar a equação, mas aqui só para que fiquem todas as informações bem apresentadas, então a vale 13. Eixo menor vale quanto?

A2[a]: [00:17:00] Dez.

P: [00:17:01] Logo, b vale quanto? A25[a]: Cinco.

P: Cinco. Aí eu já vou economizar, tá? b vale 5. Logo [travou por alguns segundos o vídeo].

A25[a]: [00:17:45] Era mais fácil que eu pensei.

A2[a]: [00:17:50] Professor, e essa distância focal? [a transmissão do professor travou por algum tempo e não deu para acompanhar o que ele falou nesse trecho]. [quando voltou] Oi. Alguém falou aí?

A12[a]: [00:18:36] Eu! Estava cortando. Professor, esse valor de 169 eu não entendi.

P: [00:18:50] Não ouvi. Cortou tudo, A12. Será que é a minha conexão? A minha internet está falhando para todo mundo? Coloca aí no chat!

A25[a]: [00:19:00] Tá travando.

P: [00:19:07] Pessoal, estão me ouvindo? Eu vou sair e voltar. Fique aí um segundo, por favor [ele passou alguns minutos para voltar]. O pessoal está me ouvindo agora. A Internet simplesmente resolveu não querer trabalhar. Estão me vendo bem? Então vejam eu tinha parado aqui, pessoal. Encontramos o a, 13, encontramos o b, 5. Beleza para vocês.

A25[a]: [00:24:58] Professor, não está apresentando não.

P: [00:25:00] Então vou voltar para lá também [para a tela de apresentação]. Quando saí, saí tudo. Até aqui, beleza para vocês?

A25[a]: [00:25:24] Sim.

P: [00:25:26] Usando Pitágoras, eu posso encontrar o c. Mas apenas a e b já me dão a equação. Então, encontrando c eu posso encontrar Foco um, Foco dois. Encontro A_1, A_2, B_1, B_2 e a excentricidade. Deu para entender A25? A25: Deu sim.

P: Ok. Alguém ainda tem dúvida nessa parte? [A2 tentou falar] Oi A2.

A2[a]: [00:25:53] Eu fiquei em dúvida na questão três e na questão sete do livro da página 92.

P: [00:25:59] Três e sete [P começou a abrir na tela o livro na página 92].

A2[a]: [00:26:07] Porque no caso ele não dá o eixo e só dá a distância focal e pede a equação.

P: [00:26:22] Três. Ele tem uma distância focal. Beleza.

A2[a]: [00:26:29] Aí eu não sei como é que faz, porque ele só deu a distância focal.

P: [00:26:34] Certo. Com o Foco um, Foco dois eu encontro o c. Certo?

A2[a]: [00:26:53] Certo.

P: [00:26:58] No Foco 1, temos $(-12, 0)$. No Foco 2, $(12, 0)$. Bem, aqui a gente já tem a seguinte informação: -12, 12 e ela tem esse formato aqui. Como é que você tem certeza que ela está na horizontal? Porque os focos eu passei o foco no -12. Porque os focos estão no eixo Ox. E como o ponto médio é o $(0, 0)$, eu sei que o centro é na origem. Ela tem esse formato aqui. Beleza?

A2[a]: Beleza.

A25[a]: [00:28:27] Beleza.

P: [00:28:30] E c vale doze. Dessa informação, eu sei que a ao quadrado é igual a b ao quadrado mais cento e quarenta e quatro [$a^2 = b^2 + 144$], correto?

A2[a]: Certo.

P: Ele disse também que o ponto $\left(12, \dfrac{27}{5}\right)$ pertence à elipse. Bem, se esse ponto pertence à elipse, então quando eu o substituir nessa equação, ela tem que ser satisfeita, ou seja, 12 ao quadrado sobre o a ao quadrado que eu não sei quem é, mais o y, $\dfrac{27}{5}$ ao quadrado, b ao quadrado é igual a um. Essa substituição aqui! Compreendido por que foi que eu fiz? Eu peguei o x do ponto e o y do ponto e joguei na equação.

A2[a]: [00:29:39] Certo! Entendi.

P: [00:29:41] Beleza, até aí?

A2[a]: [00:29:43] Beleza.

P: [00:29:45] Agora a gente tem mais uma informação, que é a seguinte, vou tirar essa linha aqui. Tá vendo que eu sei quem é a ao quadrado? Eu posso substituir aqui. Para escrever, $b^2 + 144$. Agora eu fiquei com equação que tem quantas incógnitas?

A2[a]: Só uma.

P: Agora é só resolver. Você vai achar o b. Achou o b, volta, acha o a.

A2[a]: [00:30:43] Aí substitui na equação reduzida, né professor?

P: [00:30:48] Você encontrou o b aqui, voltou, encontrou o a, volta, substitui na equação reduzida e tem a equação.

A2[a]: [00:30:56] Certo, entendi.

P: [00:30:58] Massa! Bonitinha essa, bota para pensar um pouquinho. Mais alguma?

A2[a]: [00:31:04] E a questão sete?

P: [00:31:07] Sete? Essa é mais tranquila.

A2[a]: [00:31:16] E eu não sei não fazer.

P: [00:31:19] Mas veja. É só uma questão de costume. Depois você vai dizer "oxe", era só isso? A gente está habituada que a equação se escreve assim ou assim [ele escreveu as duas formas da equação reduzida]. Só que no problema, nem veio de um formato nem do outro. Veio $9x^2 + 16y^2 = 4$. Que tal a gente dividir toda essa equação por quatro? Aí fica $\dfrac{9}{4}x^2 + 4y^2 = 1$. Até aqui, beleza?

A2[a]: [00:32:36] Beleza.

P: [00:32:39] Me tira uma dúvida: quando eu tenho dois terços divididos por cinco sétimos, como é que a gente resolve essa divisão de frações?

A2[a]: [00:32:55] Repete a primeira e multiplica pelo inverso...

A25[a]: [00:32:58] Pelo inverso da segunda.

P: [00:33:01] Ok. Beleza. E se nosso numerador, ao invés de ser uma fração eu tivesse apenas um número? 11! O processo seria o mesmo correto? Repete a primeira. Multiplica pelo inverso da segunda. Ou seja, estou passando de divisão para a multiplicação. Eu posso voltar. O que você quer dizer com isso? Estão vendo essa fração aqui? Nove quartos vezes x ao quadrado? Por que a gente não escreve x ao quadrado dividido por alguma coisa? Que coisa seria essa?

A25[a]: Por um?

A2[a]: [00:34:08] Quatro nonos?

P: [00:34:09] Exatamente. Então nós podemos reescrever isso como sendo x ao quadrado [sobre] $\frac{4}{9}$, y [sobre] $\frac{1}{4}$. Correto?

A25[a]: [00:34:37] Correto.

P: [00:34:38] Agora está no formato. Quatro. Quem é maior é quatro nonos ou um quarto?

A25[a]: [00:35:04] Um quarto.

P: [00:35:07] Quatro nonos em decimal dá quanto?

A25[a]: [00:35:13] Ah, quatro nonos é maior.

P: [00:35:17] Como?

A25[a]: [00:35:19] Dá $0,444...$ e um quarto dá $0,25$.

P: [00:35:27] Então esse aqui é maior. Ele aqui está fazendo o papel do a ao quadrado? Esse menor está fazendo o papel do “b” ao quadrado. Acabou o problema. Agora é só seguir. Vai dar certo.

A2[a]: [00:35:55] Ah, professor, entendi.

P: [00:35:58] Ou seja, ele não estava no formato que a gente está habituado. Então, a gente faz o que? Transforma no formato que a gente está habituado. Beleza? diga me mais!

A2[a]: [00:36:11] Só essas mesmo.

P: [00:36:12] Olha aí, coisa boa! Então vamos dar sequência no nosso conteúdo. Então vejam que todos os exemplos que a gente trabalhou na aula passada, o centro da elipse coincide com a origem do sistema. Mas nem sempre isso é possível. Pode ser que a minha elipse esteja aqui, ou esteja aqui em cima ou esteja assim [ele apontou parara alguns locais diferentes da origem na tela que estava transmitindo]. Nada impede. Ou seja, o centro dessa elipse pode caminhar para qualquer lugar do plano. Vamos trabalhar isso agora. Para isso nós vamos ver primeiro aqui a translação de eixos coordenados. O que danado é isso? Deixa eu olhar para vocês aqui [ele minimizou a tela em que estava explicando para olhar na tela para as imagens — fotos, ícones ou iniciais dos nomes — dos alunos que estavam presentes na aula. Quando eu falei isso, obviamente em outros momentos eu falei: quando a gente está trabalhando com um plano, e aí você olha, por exemplo, para sua parede ou para sua mesa como uma representação de uma parte do plano. Você consegue enxergar na parede ou enxergar na sua mesa um sistema coordenado? O sistema de eixos coordenados? [alguns instantes de silêncio]

P: Vou repetir a pergunta. Quando você olha para sua parede, representação de parte de um plano ou olha para o tampo da sua mesa, uma mesa de jantar, olhando para o piso, por exemplo, também, você vê um sistema cartesiano? O eixo Ox, Oy? Ele está lá, desenhando [silêncio]

A22[a]: Sim.

A25[a]: [00:38:27] De certa forma, sim.

A22[a]: [00:38:31] Depende, professor. Acho que é muito "viajoso" você olhar assim: olha isso é o plano cartesiano!

A25[a]: [00:38:35] E essa mesa é um plano cartesiano...

P: [00:38:42] Vocês conseguem ver olhando para qualquer parede que você olha, assim, você consegue ver o eixo do Ox, traço um, traço dois, traço x e na frente eixo do Oy, o desenho um, dois, três... você consegue ver isso na parede? Isso está desenhado na parede?

A22[a]: [00:39:01] Dá para ver por causa do rodapé da parede, aí tem a cerâmica e tem as divisórias. Dá para dar uma comparação da divisão. Mas só no eixo Ox nesse caso. Mas se fosse no banheiro, daria para comparar melhor.

[A12 tentou falar alguma coisa, mas não foi ouvida, também não dando para identificar sua fala na gravação]

P: [00:39:15] No banheiro você está usando o auxílio da cerâmica né?

A22[a]: É para saber espaçamento.

P: Mas a priori não está. Nós não temos um sistema cartesiano ortogonal num plano. Nós temos um plano. O que a gente faz depois? Pega o plano e coloca um sistema cartesiano nele. Tanto que naquele problema da nossa atividade, o problema do terreno de 20 por 20 não tinha lá um sistema ortogonal. E vocês decidiram colocar um sistema ortogonal com a origem no canto do terreno. Ou seja, se eu tenho aqui, por exemplo, a minha tela aqui vocês estão vendo minha tela, tchan, tchan, tchan, tchan [o professor fez o formato de um retângulo com o dedo no ar]. Eu poderia colocar um sistema cartesiano aqui. Aqui de tal maneira que a origem podia ser onde estava aqui, ou a origem poderia ser aqui ou a origem podia ser aqui. Beleza?

A22[a]: Sim.

P: O que é que eu estou querendo dizer com isso? É que quando eu penso no sistema cartesiano, eu posso considerá-lo aqui ou em qualquer lugar. Eu posso fazer uma translação, eu posso fazer um movimento horizontal ou vertical no sistema de eixos. Obviamente, cada ponto do plano vai ter as suas coordenadas, a depender desse novo sistema de eixos. Então, se eu colocar aqui na minha câmera, eu vou voltar para cá. Se eu colocasse esse sistema de eixo bem nesse canto aqui, coincidindo com o canto da imagem, esse ponto poderia ser dois e dois. Mas se eu coloco um sistema de coordenadas aqui? Esse ponto $(2, 2)$ poderia passar a ser a origem. [durante toda essa explicação o professor utilizou gestos com as mãos e dedos para explicar]. Então o que a gente vai fazer agora é exatamente essa translação de eixos coordenados. Como danado fazer isso? Vamos lá. Podemos considerar que um plano nesse plano um sistema cartesiano ortogonal qualquer. E aqui nós vamos considerar um certo ponto "O linha" [em linguagem matemática O']. De coordenadas (x_0, y_0). Esse ponto é qualquer, arbitrário, então temos um sistema cartesiano aqui. Vou aqui e pego um ponto. O que a gente vai fazer é introduzir um novo sistema cartesiano. Eu vou chamar esse novo sistema de "O linha, x linha, y linha" [$O'x'y'$], onde "O linha, x linha", eu vou falar de outra forma isso aqui: onde o eixo x, o novo eixo do x é paralelo ao eixo do x antigo. O novo eixo do y é paralelo ao eixo do y antigo e eles têm a mesma unidade de medida e têm o mesmo sentido. Ou seja, para onde um é positivo, o outro também é positivo. Assim, qualquer ponto do plano tem duas representações: uma representação em termos de x e y e uma representação em termos de x linha e y linha. Traduz isso para mim em imagem! Aqui! Imaginem aqui a parte branca, exatamente como se fosse sua parede, sua mesa, está passando o plano ou você vê aqui? Colocou esse sistema ortogonal? O preto tá? O preto. E consideramos esse ponto O' aqui. Pelo ponto O' trace uma paralela ao eixo Ox, uma paralela a Oy. Então qualquer ponto do plano vai ter uma representação em relação aos eixos pretos. E vai ter uma representação, vou até mudar de cor aqui, vou botar azul, em relação aos eixos azuis. O que a gente...

A2[a]: [00:43:23] Professor, não está compartilhando não professor.

P: [00:43:26] Não? Saiu?.

A25[a]: [00:43:27] Não.

P: [00:43:29] Obrigado. Vou voltar a imagem inteira. Que bacana! Devo ter clicado em algum lugar aqui! Esse lado aqui vocês tinham visto? Vocês mais atentos tinham visto, não?

A2[a]: [00:43:49] Não.

[Fazia aproximadamente 7 minutos que o professor estava explicando sem compartilhamento de tela e não havia percebido. Os alunos estavam ouvindo e vendo sua imagem na tela, mas não informaram antes que não havia tela]

P: [00:43:51] Então vamos lá. Nós vamos considerar um sistema cartesiano ortogonal e vamos considerar um ponto qualquer do plano.

P: O que é isso de considerar o sistema preto? Estão vendo aqui o preto? Devemos considerar esse ponto O' aqui. Esse é O' que eu estou tomando x zero, y zero [(x_0, y_0)]. Aí nós vamos traçar eixos paralelos aos eixos horizontais, ou seja, essa linha azul, o eixo, $O'x'$ é paralela o eixo preto Ox. O eixo $O'y'$ é paralelo ao eixo preto Oy. Então cada ponto P pode ser representado em relação às coordenadas do eixo preto, do sistema preto, ou em relação às cor do sistema azul. O que nós vamos querer determinar aqui é: qual a relação entre essas coordenadas preta e azul. Veja só. Esse comprimento aqui é x_0 por quê? Porque é a abscissa do ponto O'. Essa altura aqui é y_0. Esse avanço que nós fizemos aqui é exatamente o que a gente chama de x'. Então, daqui até aqui é x', percebam, olhando para esta parte, esta parte e esta parte. O x é igual ao x_0 mais o x'. Tranquilo para vocês?

A25[a]: [00:45:58] Sim.

P: De forma análoga, o y é igual ao y_0 mais o y', tranquilo?

A25[a]: [00:45:58] Tranquilo.

P: [00:45:59] Ora, dessas duas equações: x igual a x_0 mais x' e y igual a y_0 mais y', eu posso reescrever como sendo x' é x menos x_0 e y' é y menos y_0.

P[a]: Essas equações aqui são chamadas fórmulas de translação ou equações de transformação. Onde a gente consegue representar um ponto em relação a um sistema xy ou em relação ao sistema x linha y linha. Portanto, essas fórmulas relacionam as coordenadas do ponto P em relação ao sistema xy. Ou em relação ao sistema x linha y linha. A gente vai usar isso aqui especificamente, em quê na nossa elipse? Olha só.

P: Vamos considerar aqui uma elipse em que o centro não está na origem. Olha o sistema preto. O centro não está na origem. Que foi que nós fizemos? Traçamos um novo sistema azul. Com esse novo sistema azul, eu posso, então, estabelecer a relação entre o sistema preto xy e o novo sistema x linha y linha. Em relação a esse novo sistema, a equação é: x linha ao quadrado sobre a ao quadrado, mais y linha ao quadrado sobre b ao quadrado igual a um. Ora, mas a gente pode substituir esse x linha e esse y linha. Com o quê? Com isso aqui [mostrou na tela as equações a que havia chegado]. Após passar em relação ao sistema original, vamos utilizar as equações de translação, ou seja, isso aqui. Então nós vamos colocar x menos x zero no lugar de x linha e y menos y zero no lugar de y linha. Na minha nova equação, fica assim. Então esta é a equação da elipse quando está na horizontal e o centro não é a origem do sistema, é um ponto qualquer.

P: Veja que a diferença só é porque, acrescentou esse x_0. E aqui eu fico muito tranquilo, porque é muito parecido com o tratamento que a gente deu para a circunferência. Lembra que a gente primeiro estudou x ao quadrado mais y ao quadrado igual a r ao quadrado. Depois acrescentou x menos x zero ao quadrado, y menos y zero ao quadrado. Então esta é a equação quando o eixo maior for paralelo ao eixo x. E o segundo caso, é só inverter a parte de baixo, o denominador. O a fica sobre o y e o b fica sobre o x. Essas equações também são chamadas de equações reduzidas pessoal, mas não estranhem se vocês encontrarem esse nome bonito aqui: a forma canônica da equação ou forma padrão. Para a gente aqui, vamos ficar chamando de equação reduzida do mesmo jeito. Equação reduzida quando for horizontal, a equação é reduzida quando for vertical. Eu acredito que vai ficar muito claro para vocês quando ele fizer um exemplo aqui com um ponto. O primeiro exemplo: determine a equação reduzida da elipse de foco tal e tal. Sabendo que o comprimento do eixo maior é dez. O foco 1: três e dois. Foco 2: nove e dois. Eixo o maior, dez. Vamos lá, eu sugiro sempre aqui que vocês comecem fazendo um esboço do gráfico. Precisa ficar perfeito? Não! A gente quer ter uma noção de como é que a gente vai construir isso. Então vamos lá. A primeira coisa que tentamos fazer é colocar os elementos que a gente tem: foco um $(3, 2)$. Aqui. Foco dois: $(9, 2)$. Só com essas duas informações vocês acham que a minha elipse está na horizontal ou na vertical?

A25[a]: [00:51:50] Na horizontal.

P: [00:51:52] Na horizontal! Se está na horizontal, então você já tem certeza que ela tem esse formato de equação [escreveu a equação na tela]. Até aqui, beleza? A25[a]: Sim.

P: Mas eu estou fazendo bem devagarzinho, que é para vocês prestarem atenção, que a gente vai pegando as informações que tem no problema, vai colocando num gráfico, que pode auxiliar bastante. E já vamos tirando as interpretações. Já coloquei os focos, já sei qual é a cara dela.

Para terminar a equação agora eu preciso de x zero e y zero, de a e de b. Vocês conseguem me dizer logo direto aqui quem é o centro da elipse?

A22[a]: Seis? [o aluno considerou apenas a abscissa)

A2[a]: [00:53:00] Seis e dois.

P: [00:53:02] Seis, dois. Já sei qual o formato dela, eu já sei que o centro tem coordenadas $(6, 2)$. Percebem também que eu já posso tirar o valor de quem aqui? No problema eu tenho que $2a$ vale dez, portanto quanto vale o a? A2[a]: Cinco. P: Cinco. Guarda essa informação. Olhando para cá, também me diga quanto é que vale o c.

A2[a]: [00:54:20] Três?

P: [00:54:21] Três. Por quê? Porque só olhando para cá eu já sei que $2c$ vale seis. Por que seis? Porque é essa distância aqui, a distância focal. Portanto o c minúsculo vale três. Antes de continuar, eu quero só escrever aqui. Esse é o x zero [6] e este é o y zero [2]. Como é que eu faço para encontrar o b?

A2[a]: [00:55:18] a ao quadrado menos c ao quadrado?

P: [00:55:22] Como é que fica a fórmula aqui? Do jeito que ela é normal, depois a gente tira tá? a ao quadrado é igual a quem?

A2[a]: [00:55:28] b ao quadrado mais c ao quadrado.

P: [00:55:31] Vamos fazer as devidas substituições: 25, b ao quadrado, nove, b ao quadrado, 16. b vale quatro [esse trecho ficaria difícil de entender sem a escrita].

P: Até aqui, beleza?

A2[a]: [00:55:58] Sim.

P: [00:56:00] Ok. Pessoal, com essas três informações a gente pode desenhar o restante da elipse agora, construir a elipse. Como? Vamos lá. Carinho viu, pessoal? Sem agonia. Vamos lá. Se o a vale cinco, significa que a partir do centro eu vou cinco para direita e cinco para esquerda. A partir do centro, cinco para direita. E cinco para a esquerda. Então vamos lá. Já tenho um, dois, três, quatro, cinco. Para a esquerda, lembra que eu estava aqui: um, dois, três, quatro, cinco. Ok, pessoal?

A2, A25[a]: [00:57:08] Ok.

P: [00:57:15] A_1 eu já tenho, A_2 eu já tenho. Olha o valor de b: quatro. Significa que eu vou quatro para cima e quatro para baixo. A partir da onde? A partir do centro. Então vamos lá. Centro desço um, desço dois, desço três, desço quatro. Ou seja, vou descer duas casinhas aqui, olha! Um, dois. A partir do centro eu vou subir quatro: um, dois, três, quatro. Recapitulando desci dois a partir do centro. Veja que a gente desceu a partir do centro. Vamos rever aqui: o nosso centro está aqui. Desci um , desci dois, desci três, desci quatro. E a partir do centro eu subi quatro: um, dois, três, quatro.

P: Não ficou muito bom. Então aqui eu tenho P_1 e aqui eu tenho P_2. Percebam que agora eu tenho todas as condições de traçar a minha elipse.

P: Ok, pessoal? Não está perfeita, perfeita, mas dá para dar uma noção boa, tranquilo até aqui?

A2[a]: [01:00:34] Sim.

A25[a]: [01:00:34] Tranquilo.

P: [01:00:36] Agora vamos tirar os elementos? Vou tirar esses elementos aqui do lado mesmo, porque a gente consegue ficar olhando para a imagem e escrevendo os elementos. Quem é A_1?

A25[a]: Um.

P: É bom lembrar que é um par de coordenadas.

A25[a]: Um e dois.

P: Um e dois. Vou escrever aqui desse lado de cá, vai caber melhor A_1, um e dois. A_2?

A25[a]: [01:01:31] Onze e dois.

P: [01:01:39] B_1?.

A25[a]: [01:01:46] Seis e menos dois.

P: [01:01:53] B_2?

A25[a]: [01:02:02] Seis e menos dois.

P: [01:02:06] B_2? O de cima!

A2, A25[a]: [01:02:11] Seis e seis.

P: [01:02:15] Foco um e foco dois eu já tenho. Estão prontos ali. Mas eu posso tirar ainda aqui a excentricidade. Lembre pessoal, excentricidade é c sobre a. Dá quanto? [silêncio] Excentricidade c sobre a.

A25[a]: [01:02:57] 3 sobre 5.

P: [01:02:59] 3 sobre 5. Claro que a gente poderia escrever aqui eixo maior ou eixo menor, a gente já tem aqui o eixo maior. Vamos tentar escrever o eixo menor aqui $\overbrace{B_1B_2}$ vale oito. Ok, pessoal?

A25[a]: [01:03:35] Ok.

P: [01:03:37] Vou deixar essas informações aqui dentro de uma caixinha para não misturar com o gráfico. Ficou um pouquinho apertado aqui, mas era melhor do que eu ficar subindo e descendo a imagem para escrever. Aqui a gente está olhando pro lado e já consegue tirar as informações. Vamos finalizar escrevendo a equação. Como é que vai ficar a equação dessa elipse? x menos quem é o x zero? [silêncio] Pessoal?

A25[a]: Seis? P: Seis. Sobre a ao quadrado. Nesse caso, nosso a foi cinco, então vou escrever aqui 25. Mais y menos y zero, que é dois, sobre b ao quadrado, 16, igual a um. Esta é a nossa equação reduzida da elipse. Percebam que aqui a gente conseguiu tirar todas as informações. Beleza nessa primeira, alguma dúvida?

A25[a]: [01:05:34] Não.

A2[a]: [01:05:35] Não professor.

P: [01:05:37] Ok, vamos para a segunda. Veja que eu tentei aqui passar para vocês exatamente o mesmo caminho que a gente fez na outra: dadas as informações, vamos começando a montar o gráfico, vamos tirando as informações devagarzinho. Tendo a, b, c, monta o gráfico. Daí eu tiro os elementos. Vejam se a gente fizer tudo certinho, passo a passo, não vai se perder. Tem uma ordem já para fazer isso aqui? Não. Claro que daqui eu só tinha o c e o a, então, para achar o b eu tenho que ir por Pitágoras. Continuemos então, exemplo dois. O que diz o nosso exemplo dois aqui?

P: Foi o contrário, nós temos a equação pronta [RA] e aí vamos determinar os elementos e fazer o gráfico [RG]. Está melhor. Vamos lá para passar esses dados para lá: x mais três, y menos três, quatro, dezesseis. Foi isso? Foi. Vamos lá com calma. Olhando para a equação, vocês me dizem que a elipse está na horizontal ou na vertical?

A2[a]: [01:07:54] Eu creio que na vertical.

P: [01:07:58] Por quê?

A2[a]: [01:08:01] Porque estou achando o a tão curtinho.

P: [01:08:04] Exatamente, você vai olhar para o maior valor. Olhou para o maior valor. O maior valor está no denominador da parcela que tem o x ou que tem y? Nesse caso no y. Portanto, a gente já sabe que ela tem esse formato [vertical]. Ok? Se tem esse formato pessoal, a ao quadrado vale 16, portanto, quanto vale o a?

A2[a]: [01:08:42] Quatro.

P: [01:08:50] b ao quadrado vale quatro, portanto o b vale?

A2[a]: [01:08:59] Dois.

P: [01:09:04] Eu tenho o a e tenho o b, então posso encontrar c. Dezesseis igual a quatro mais c ao quadrado, ou seja: c ao quadrado... ou seja c é a raiz de doze. E se eu não quiser simplificar? Dá para simplificar, lembrando que o doze é quatro vezes três. O quatro tem raiz quadrada inteira. Então dois raiz de três. Tenho a, tenho b e tenho c, mas da equação ainda consigo tirar outra coisa: eu consigo tirar quem é o centro. Quem é o centro, pessoal? Quais são as coordenadas do centro?

A22[a]: [01:10:44] Três e menos três.

P: [01:10:47] Lembrem sempre de trocar o sinal. Olha a equação: x menos x zero, y menos y zero. Então se eu tenho aqui x mais três, significa que o menos x zero vale três, portanto, x zero vale menos três. Lembrem sempre de trocar o sinal. Isso vai ficar valendo sempre. A gente já fez isso em circunferência, estamos fazendo isso em elipse. Vamos fazer em hipérbole e vamos fazer em parábola, tudo igual. Então o centro tem coordenadas menos três e três. Estamos com tudo pronto para construir o gráfico e fazer as coisas, vamos lá? Primeiro vamos colocar o centro menos três. Um, dois, três e três: um, dois, três. Aqui está o Centro. Lembre pessoal que é a partir dele que a gente vai fazer: sobe tanto, desce tanto. Então vamos lá. O a deu quatro, então vou subir quatro e descer quatro. Vamos colocar aqui o centro: menos três e três. Sobe quatro, desce quatro. Nesse caso, vejam descer quatro a partir do centro, eu só vou descer um aqui no eixo. Portanto, tenho aqui A_1. Eu tenho aqui A_2. O b eu tenho duas casas: duas para a direita, duas para a esquerda. B_1, B_2. E agora estamos prontos para traçar a nossa elipse. Não está a maior das maravilhas, mas está aí. Só falta a gente colocar agora o danado do foco. Mas esse foco aqui é dois raiz de três, ou raiz de 12. Dá aproximadamente quanto, pessoal? [silêncio] Raiz de 12 dá aproximadamente quanto?

A2, A25[a]: [01:15:07] Três vírgula quarenta e seis.

P: [01:15:11] Ok, 3,46 então a partir do centro 3,46 para cima, 3,46 para baixo. Então vamos lá. Um, dois, três, 46 é quase três e meio. Foco 1, Foco 2. Para finalizar, vamos escrever agora todos os termos. A_1 é quem?

A2[a]: [01:16:07] Menos três e sete.

P: [01:16:10] No caso, como eu estou colocando o A_1 embaixo, vai menos três e menos um. Menos três e sete vai ser o A_2. Beleza?

A2[a]: [01:16:25] Beleza.

P: [01:16:27] B_1? O que está esquerda?

A25[a]: [01:16:36] Menos cinco e três.

P: [01:16:41] B_2? À direita.

A2[a]: [01:16:49] Zero e três.

P: [01:16:51] Zero?

A2[a]: [01:16:55] Menos um e três.

P: [01:16:59] Agora vamos aqui para o foco 1. Esse eu vou fazer com vocês com carinho. O foco 1 tem esse acréscimo, que é dois raiz de três. Mas percebam, ele é dois raiz de três quando você olha a partir do centro. O x muda do centro para o foco?

A2[a]: [01:17:21] Não.

P: [01:17:23] Então, o x do foco é o mesmo x do centro: menos três. Já o y do foco um você vai pegar o y do centro e tirar o dois raiz de três. Percebam que isso é centro e o que nós fizemos foi no y tirar o c. No foco dois, menos três e três (centro) e aí a gente acrescenta o dois raiz de três. De onde é que vem esse menos dois raiz de três e mais dois de três? Veja, no foco um eu peguei do centro e desci. Então menos. O foco dois, eu peguei do centro e subi então mais. Beleza?

A2, A25[a]: [01:18:40] Beleza.

P: [01:18:41] Só falta agora a excentricidade. Que é c sobre a. Quanto vale o c?

A25[a]: [01:18:51] Dois raiz de três sobre quatro.

P: [01:18:56] Dois raiz de três sobre quatro. Só que dá para simplificar, né?

A25[a]: Por dois!

P: Por dois e fica como?

A2[a]: [01:19:16] Raiz de três sobre dois.

A25[a]: [01:19:16] Raiz de três sobre dois.

P: [01:19:19] Exatamente. Veja que a gente poderia escrever aqui: eixo maior, eixo menor, eixo focal, poderia escrever tudo isso. Eixo maior. O eixo maior mede oito. O eixo menor é só dobrar o b, dá quatro. E a distância focal? É só dobrar o c: quatro raiz de três. Tudo o que tinha para tirar aqui da nossa elipse. No primeiro exemplo, a gente partiu do foco e eixo maior. Fizemos tudo. No segundo exemplo, partimos da equação. Fizemos tudo. Eu vou só colocar aqui eixo do x e eixo do y para ficar bonitinho aqui. E o terceiro exemplo, esse fica para vocês se divertirem.

P: Uma sugestão... eu acho que vou ter que fazer para vocês na próxima aula. Mas o quarto exemplo fica para vocês fazerem [P ainda não tinha feito nenhum exemplo parecido com esse no conteúdo de elipse].

P: Eu ainda vou tratar o exemplo três, mas queria que vocês fizessem esse quatro aí. Fica como atividade de casa, além, claro, do que eu já coloquei na sala virtual. Vejam essa aqui eu dei o gráfico. Daqui você pode tirar o a, pode tirar o b, tira o centro, com a e b tira foco, tira o c. Estão todas as informações aqui necessárias para você escrever a equação reduzida e também os elementos. Eu não pedi os elementos não, mas determinem os elementos.

A25[a]: [01:21:27] Professor. Nesse caso vai pela primeira que a gente tinha os dados e fazia a equação. Não é?

P: [01:21:36] Exatamente.

A25[a]: [01:21:37] Certo.

P: [01:21:38] A diferença é que na primeira eu já dei os dados separados. Nessa eu já dei o gráfico. No gráfico, você tira os dados e segue a mesma rotina da primeira. Beleza? A25[a]: Beleza!

P: Deixa eu voltar aqui para vocês. Aquele exemplo três, percebam que o que a gente tem ali, pessoal, é a equação geral da elipse. Assim como nós fizemos para a circunferência, a gente pode trabalhar com o complemento de quadrados e aí escrever a equação reduzida da elipse. Mas eu faço. Eu faço esse exemplo para vocês no nosso próximo encontro, na nossa próxima aula. Paramos a aula e fazemos o exemplo dele, bonitinho, tá certo? Sem aperreio, sem pressa. Vamos fazer bem, devagarzinho também. Eu queria só encerrar esse nosso encontro com o seguinte aqui, olha, vou compartilhar e vou para a sala de aula de vocês. Estão vendo aí a minha tela?

A2[a]: Sim. P: No livro de vocês, na página nove meia. Essa sugestão de leitura aqui. Lembra que na aula passada eu estava falando sobre órbitas?

A2, A25[a]: [01:23:41] Sim.

P: [01:23:42] Olha aqui que coisinha bacaninha para vocês. Uma leitura curta. Só são duas páginas e só então fica como sugestão de leitura para vocês. Claro, se quiserem aprofundar e dar uma pesquisa na internet, mas aqui vem conversando um pouquinho sobre o nosso amigo Copérnico. Inclusive aqui na frente, fala sobre a excentricidade sobre algumas coisinhas que a gente viu. Ele fala sobre a excentricidade da Terra e da Lua aqui. Algumas excentricidades: Vênus, Sol, Mercúrio, Terra. Beleza? Então, leitura, sugestão de leitura para vocês. Mais aprofundamento, tem aqui a fonte, inclusive onde a gente pode aprofundar um pouco mais sobre isso, mas até que bastante disso aqui vocês já estudaram lá nas outras disciplinas. Física, talvez, órbitas elípticas. Então fica isso aqui como sugestão de leitura para vocês. No nosso próximo encontro vai ser para resolução de atividades para resolução de problemas, ou seja, uma oficina de problemas. Dessas que estão na lista a gente vai passar uma hora e meia só batalhando em cima de questões. Tá bom?

A2[a]: [01:25:19] Aí o senhor vai fazer aquela questão lá?

A25[a]: [01:25:23] O senhor vai fazer a questão 1, né?

P: [01:25:26] Isso me lembra, por favor. Tá bom?

P: [01:25:32] Então olhe somente aviso aí para a galera pessoal, nosso presidente está lá, está aqui, tá né? Avisa para o povo aí que eu falei até no encontro, mas na última aula a galera, deu uma fugida, como deu hoje. Então dá um aviso para o pessoal para participar da nossa aula. Parece que já terminou nosso ano letivo, mas a gente ainda vai ver conteúdo. E ainda tem atividade para entregar. Lembra que para fazer o curso superior ter que terminar o médio.

A25[a]: [01:26:12] Tem isso ainda.

P: [01:26:13] Então nós temos que terminar ainda essa nossa etapa. Falta pouquinho, peço só um pouco de paciência para vocês. Está todo mundo cansado da remoticidade. Estar assistindo aula pelo computador, mas falta pouquinho onde só falta elipse e hipérbole, pessoal. Então próxima aula atividades, oficina de problemas e na outra a gente entra em hipérbole. Recuperação muito bem lembrado. Eu vou gerar uma atividade. Isso já era uma atividade e vou mandar para a sala de aula. E aí vocês respondem me enviam.

P: [01:27:16] Para a galera que a gente ficou um pouquinho abaixo. Não se preocupe, dá para recuperar tranquilamente. Então coloco uma atividade de recuperação para vocês fazerem. Eu peço desculpa por não acompanhar aqui o chat para saber como fico na apresentação. Corrijo sim, o primeiro ficar tranquilo. No caso, não vou fazer a conta inteira, vou dar os encaminhamentos. Isso aqui, isso aqui. Isso aqui é o resto sai na conta, beleza. Mas ela é bem curtinha.

A2[a]: [01:27:57] O senhor não quis nem considerar a minha primeira questão.

P: [01:28:01] É que o caminho não estava bacana. Não, não estava nada.

A2[a]: [01:28:05] Estava não.

P: [01:28:07] Foi você que foi pelo baricentro?

A2[a]: [01:28:11] E eu acho que sim. Não lembro.

P: [01:28:13] É que algumas pessoas foram pelo baricentro. Não vai não.

A2[a]: [01:28:17] Foi pelo baricentro, que eu tentei.

P: [01:28:18] Isso porque o baricentro é encontro de quê?

A25[a]: Das medianas.

P: E lá nós tínhamos o quê? Alturas né?

A25[a]: [01:28:30] Alturas.

P: [01:28:32] Então, bem, se você quiser sair pelos encontros, talvez ortocentro, mas esse caminho ainda vai te levar a um canto, um lugar bacana, não está certo? Foi por isso. Mas gostei da tentativa.

A2[a]: Triste.

P: Eu fico muito feliz em ver a tentativa. Em vou por aqui para ver se rola. O caminho era você usar o fato de que a altura é perpendicular ao lado. Eu vou dar só um estalinho aqui porque vou resolver no próximo encontro. Como você tem a equação da altura e você tem um ponto B aqui, a equação da reta que passa por B e é perpendicular à altura é um dos lados. Então era você determinar a equação de uma reta que passa por um ponto e é perpendicular à outra.

A25[a]: [01:29:32] Ele vai mostrar a coisa a A4 [a aluna comenta devido ao questionamento de A4 no chat].

P: [01:29:35] Vou fazer toda A4. Se eu podia gravar um vídeo disponibilizando no Classroom? Não, eu não estou com tempo para isso, não. A intenção é ótima, mas aí fica ruim. A gente faz o próximo encontro, tá certo?

A2[a]: [01:29:51] E fica gravado também.

P: [01:29:53] Fica gravada também, beleza? Então pessoal, boa tarde a vocês! Dê um toque para a galera voltar e assistir essas aulas. De 29, que só frequentavam 22, só tem nove. Contando comigo, então só tem oito. Então dê um toque para galera voltar para assistir essas aulas porque é um tópico bem bacana e importante. Abraço a todos. Vou parar a gravação.

A25[a]: [01:30:19] Tchau, professor.

A2[a]: [01:30:20] Valeu, professor.

APÊNDICE F – TRANSCRIÇÃO DA AULA 21

Descrição:	**Aula 21**
Data:	**28/04/2021**
Início da aula:	**13h35**
Término:	**14h52**
Duração:	**01h17**
Participantes:	**Professor, Pesquisadora, 12 alunos (total de 14 pessoas)**
Alunos presentes:	**A2, A4, A7, A8, A10, A13, A14, A21, A22, A23, A25, A27**
Conteúdo:	**Circunferência – Elipse**

TRANSCRIÇÃO DA AULA

P: [00:00:03] Boa tarde! Mais um encontro de Matemática três com essa turma elegante de edificações. Como eu tinha prometido no último encontro, vamos iniciar o nosso papo aqui com uma conversa sobre a primeira questão da segunda avaliação. É isso? Foi da segunda?

A partir deste ponto até 19 minutos da gravação, o professor iniciou a resolução da questão solicitada pelos alunos. Optamos por não transcrever essa parte por não fazer parte do conteúdo de cônicas, mas de ponto e reta.

P [00:19:05]: ...Podemos ir para o nosso papo de hoje?

A2[a]: [00:19:09] Sim.

P: [00:19:13] [risos] Esse sim foi tão triste dona A2. Bem pessoal, o objetivo do nosso de hoje, como tinha avisado há duas semanas, é resolver problemas daqueles do livro que foram deixados para vocês. Espero que tenha dado tempo de vocês resolverem ou tentarem resolver aquelas questões do livro que eu deixei na sala virtual para hoje trabalharmos possíveis dúvidas. Fiquem à vontade em dizer "essa professor", "aquela professor". Fiquem à vontade aí para a gente começar a mastigar as questões.

A22[a]: [00:20:07] Eu queria aquele exemplo que o senhor deu no final da aula passada.

P: [00:20:13] Tá. Final da aula? Me lembra aí qual é.

A25[a]: [00:20:17] Eu acho que ele está falando daquela que é do slide, que o senhor disse que deu a o gráfico e desenvolvia o resto.

P: [00:20:27] Tá ok, então vamos lá para o gráfico. Deixa eu abrir aqui o slide. Então só lembrando, se não me falha a memória, aquela versão do slide já está na sala, mas deixa eu tirar essa dúvida aqui e se não tiver, eu coloco agora.

A25[a]: [00:20:45] O senhor falou que estava já.

P: [00:20:47] Foi né? Pronto, eu acho que eu não coloquei foi o vídeo. Então foi isso. Matemática Três. Eu estou aqui na sala, deixa eu compartilhar a tela dela com vocês. Pessoal, os slides, do jeito que estão ficando, estão auxiliando a compreensão de vocês?

P: Alguma coisa a acrescentar, ou tá tudo lindo?

A2[a]: [00:21:21] Está tranquilo, professor.

P: [00:21:24] Esse aqui A22?

A22[a]: [00:21:41] É.

P: [00:21:42] Como sempre faço nos nossos encontros, não vamos direto para a resolução. O que é que você não conseguiu compreender para que eu possa aqui ir caminhando e te auxiliando nessa missão de interpretação desse probleminha?

A22[a]: [00:22:04] Foi naquela parte de determinar, como agora não tem mais um plano fixo que era da origem, que era zero, zero [$(0, 0)$]. Aí está meio confuso, para calcular o centro.

P: [00:22:14] O centro agora pode ser qualquer outro ponto.

A22[a]: Aí agora ficou difícil.

P: Beleza. Então vamos fazer o seguinte, vamos olhando para a figura e vamos relembrando aqui a teoria. E aí as respostas vão saindo e com auxílio de vocês, a gente vai montando. Bem, a primeira coisa que a gente tem aqui, como você bem observou, é que o centro não está na origem. Então, isso significa que a nossa equação vai ser x menos x zero ao quadrado, mais y menos y zero ao quadrado. E o que vai alterar aqui ou pode mudar é o a ao quadrado e o b ao quadrado, a depender se ela está na horizontal ou na vertical, está certo? Mas a primeira coisa importante é: dentro dos parênteses vai estar x menos x zero, onde x zero é o x do centro e y menos y zero. A primeira coisa é essa. Então, vamos lá. O que é que a gente tem então até aqui? Ou vamos trabalhar com esta forma, ou vamos trabalhar com esta forma [ele escreveu as duas equações na tela].

P: Olhando para a nossa elipse, o formato que ela está aqui. O eixo maior está na horizontal, onde está na vertical?

A22[a]: [00:24:26] Na vertical.

P: [00:24:28] Se está na vertical, eu vou usar a equação um, ou a equação dois?

A22[a]: Dois?

P: Alguém bota mais uma fezinha no posicionamento do nosso amigo, que ele fez um dois triste danado. Alguém confirma aí? É o dois mesmo?

A2[a]: [00:24:54] Sim.

P: [00:24:56] Correto, mas vamos confirmar isso no nosso material, tá certo? A nossa aula que ficou aqui no slide. Vamos voltar aqui direto para a aula dois, onde a gente viu translação. Após a translação, nós vimos o primeiro caso em que o eixo maior é paralelo ao eixo x, horizontal. Então a equação ficou x menos x zero ao quadrado sobre a ao quadrado, então nós vamos ter o formato um, quando o eixo maior estiver na horizontal. Quando estiver na vertical, eu vou ter o formato dois: x menos x zero e o denominador b ao quadrado. Então percebam que o que altera é o a ao quadrado e o b ao quadrado. Lembra que o a é maior. Então, dito isso, a gente já sabe que vai trabalhar com essa segunda, então, morreu aqui. Olhando ainda para o gráfico. Vamos lá para o gráfico. Olhando aqui para a nossa imagem, para o nosso gráfico, a representação geométrica da nossa elipse, quais são as coordenadas do centro?

A25[a]: [00:27:00] Sete e nove?

P: [00:27:01] Sete e nove. Portanto, x zero: sete, y zero: nove. Então olha só, a gente está começando a pegar todos os elementos x zero: sete, y zero: nove, ou seja, o nosso centro é $(7, 9)$. Olha, já encontrei esse, já encontrei esse. Vamos voltar para nossa imagem. Qual é a medida do eixo maior, pessoal? Esse número cinco aqui está errado, tem alguma coisa maluca aqui, mas por inspeção vocês perceberiam que não era esse aqui. Seria que número? Vou até fazer essa correção no slide.

A22[a]: [00:28:11] 14? O 5 seria o 14? Não?

P: [00:28:13] Daqui para cá, quantos?

A22[a]: Seis.

A2[a]: [00:28:26] Seria quinze?

P: [00:28:27] Seria quanto?

A2[a]: [00:28:28] Quinze.

P: [00:28:30] Quinze, tudo bem? Então, na hora que eu fui digitar o quinze, ficou só cinco. Faltou o um aqui, vou fazer essa correção assim que terminar a aula, ou durante a aula, enquanto a gente conversa sobre outras coisas eu posso fazer isso. Então me digam qual é o comprimento do eixo maior?

A25[a]: [00:28:50] Eu não entendi não professor porque era quinze.

P: [00:28:51] Ah tá, vamos lá! Aqui é o eixo maior deste ponto que eu estou passando um mouse até aqui. Lembra que o C é o ponto médio, ok?

A25[a]: Ok.

P: Deste ponto até este, qual é o cumprimento? Do três para o nove?

A25[a]: Seis.

P: Então do nove, desse ponto para aqui também tem que ter seis.

A25[a]: Ah, é mesmo!

P: Nove e seis quinze [adicionou]. Então tem que ser quinze. Quando eu fui digitar, em vez de fazer quinze, eu coloquei só cinco, tá bom? Então me diga qual é o comprimento do eixo maior completo?

A2, A25[a]: Doze.

P: Então, olha só o que é que a gente tem também do gráfico: eixo maior, a medida do eixo maior é doze. Mas lembrem, quem é a medida do eixo maior? É dois a. Portanto, o a vale seis, ok? Eu preciso fazer essa escrita? Só olhando para a imagem eu não sei que é seis? Sabe, mas para ficar aqui bem explicado, bem apresentado para vocês aqui, inclusive na gravação, a gente retoma todos os elementos. Eixo maior, a sua medida é 12, mas lembrem o eixo maior significa dois a. Dois a é igual a doze, a é igual a seis. De forma análoga, me digam qual é a medida... vou lá para a imagem do eixo menor [mudando a tela].

A2[a]: Oito?

P: Oito: quatro mais quatro. Então tenho aqui oito, mas lembre que eixo menor é dois b, portanto, o b vale quatro. Vejam que agora eu já tenho todos os elementos para escrever a minha equação: determine a equação reduzida, cujo gráfico é apresentado a seguir. Como ele só pede a equação, acabou. Portanto, temos: x menos sete ao quadrado. No caso é sobre b ao quadrado, então 16. Mais y menos nove ao quadrado sobre 36 igual a um. Essa é a equação reduzida.

P: Pessoal, se nesse problema ainda tivesse pedido as coordenadas dos focos. Vamos fazer esse acréscimo no problema. O que é que a gente precisa calcular para encontrar os focos?

A2[a]: [00:32:07] O c.

P: [00:32:09] Como é que a gente encontra c, então?

A2[a]: [00:32:12] Fazendo a ao quadrado é igual a b ao quadrado, mais c ao quadrado.

P: [00:32:17] Muito bem: a dois igual a b dois mais c dois [ele falou dessa forma para indicar o quadrado dos termos]. Vou até fazer um c assim para não confundir com o meu e. Ora mais isso me leva a quem? A trinta e seis igual a dezesseis mais c dois, ou seja, c dois igual a vinte, c é igual a raiz quadrada de vinte. Se você quiser escrever dois raiz de cinco, não tem problema. Não vai interferir em nada. Eu vou usar que a raiz de vinte só por economia de escrita. Me digam quem seria o foco um. O foco ia estar por aqui, onde estou com o mouse, e o foco dois por aqui. Quem seria o foco um? [silêncio]. Vou melhorar a minha pergunta o x do foco e o x do C são o mesmo ou são diferentes?

A22[a]: [00:33:54] São o mesmo.

P: [00:33:57] São o mesmo. Então eu pego o x do C. E o y do foco e o y do centro são iguais ou são diferentes?

A22, 25[a]: [00:34:15] Diferentes.

P: [00:34:17] Diferentes. E como é que eu faço então para encontrar? [silêncio] Era um valor que estava aqui e veio para cá. Daqui para cá, que operação eu faço? No y?

A2[a]: [00:34:49] Soma professor?

P: [00:34:52] O y está diminuindo ou está aumentando?

A25[a]: [00:34:57] Ah, tá diminuindo.

P: [00:34:59] Beleza, então vai ficar: você pega o centro e tira o valor de c, diminuindo, deu para entender?

A22[a]: Deu.

P: Então agora é só encontrar o foco dois. Pense da mesma forma o x não muda. Mas quem vai ser o y?

A25[a]: [00:35:28] Agora, em vez de ser menos vai ser mais, né?

P: Perfeito. Nove mais raiz de vinte. Só para brincar, a gente ainda poderia encontrar a excentricidade, que é c sobre a. O a deu seis é o c deu dois raiz de cinco. Vou até fazer raiz de vinte sobre seis, ou seja, dois raiz de cinco sobre seis, ou seja, raiz de cinco sobre três. Os outros pontos a gente já tem, que seriam o A_1, A_2, B_1, B_2. Tudo isso a gente já tem: A_1 sete e três, A_2 sete e cinco, então todas as outras informações a gente já tem. A22, meu querido, ficou mais claro aí?

A22[a]: [00:36:29] Ficou, professor, ficou claro.

P: [00:36:32] Massa. Vamos então continuar. Do Livro alguma?

A2[a]: [00:36:41] A questão 13. Ela é parecida com essa que a gente fez agora, só que ele não deu o gráfico e ele só deu o centro aí acho que foi isso que eu não consegui seguir adiante.

P: [00:36:55] Questão quanto?

A2[a]: [00:36:57] Treze da página noventa e cinco.

P: [00:37:01] Treze. Beleza, deixa eu ir para lá. Sala de vocês, livro, página noventa e cinco?

A2[a]: [00:37:12] Isso.

P: [00:37:14] Ok. O ponto C é o centro da elipse, tangente aos eixos coordenados. Hum, tá bom! Entendi. Entendi.

A25[a]: [00:37:51] Mas já, professor? Não entendi até agora.

P: [00:37:54] O segredo, o segredo é ótimo! Quando é menor, a gente usa mais esses termos. O segredo, não, a parte da interpretação, o que a gente vai fazer está aqui: tangente aos eixos coordenados. Se o eixo de simetria da elipse são paralelos aos eixos coordenados, escreva a equação. Mas o ponto está aqui. Olha a interpretação. Eu vou fazer um gráfico feio e depois eu mostro no Geogebra para ficar mais bonito, tá certo?

A2[a]: [00:38:32] Tá certo..

P: [00:38:33] Olha só centro: menos três e menos dois.

A25[a]: [00:38:39] Quando o senhor fala de tangente aos eixos coordenados, eu lembro só de uma linhazinha e a elipse meio que tocando. Mas acho que nada a ver.

P: [00:38:51] Tem muito a ver esse teu "tocando". Fazer aqui como prometi feinho depois a gente coloca lá no gráfico: menos três e menos dois: um, dois, três, um, dois, então aqui está o centro da nossa elipse. Ele disse que no problema, a elipse...

A25[a]: [00:39:25] Professor, o senhor não está apresentando não.

P: [00:39:27] Tá não né? Verdade, verdade, verdade! Agora vai! e eu fazendo meu desenho empolgado, olha aí! Olha pessoal, aqui eu tenho eixo dos x e o eixo dos y, que são os eixos coordenados. E aqui eu tenho o centro no ponto menos três e menos dois. O que é que ele me diz de interessante no texto? Ele me diz a elipse tangente aos eixos coordenados. Então essa elite passa por aqui e passa por aqui. Então eu vou logo desenhar esse pedaço aqui. Vamos ler o restante: se os eixos de simetria da elipse são paralelos aos eixos coordenados, traduzindo esses eixos de simetria são o eixo maior e o eixo menor. Veja eixo maior, vamos colocar aqui em laranja, paralelo ao eixo x. Eixo menor, paralelo ao eixo dos y. Determine a equação. Bem pessoal, se do C até aqui tem que tocar no eixo, quantas casas eu vou andar para a esquerda?

A25[a]: [00:41:31] Menos três.

P: [00:41:33] Vou andar três casas também. Então: menos quatro, menos cinco, menos seis. E aqui embaixo: Vou descer quantas casas do centro para cá?

A25[a]: Duas?

P: Duas. Uma, duas. A2, você está vendo que ficou exatamente igual ao problema que a gente acabou de resolver?

A2[a]: [00:42:15] Foi, agora eu consegui entender o resto.

P: [00:42:20] Esse é o famoso morreu Maria Preá?

A2[a]: Foi [risos].

P: Morreu o bichinho ficou só batendo as perninhas, o pobre do preá, acabou-se! Menos dois, menos quatro, zero, menos três, menos seis e o problema é análogo ao que a gente fez.

Digam-me mais, porque esse aqui já foi [silêncio]. Lembrem que vai de circunferência até elipse, são os dois conteúdos. A próxima atividade [avaliativa] é referente a esses dois conteúdos. Então, questões desses dois conteúdos.

A25[a]: [00:43:13] Questão quinze.

P: [00:43:19] A metade do eixo maior de uma elipse mede cinco centímetros. A distância focal é quatro centímetros, sendo dois e um o centro dessa elipse. Se o eixo menor é paralelo ao eixo coordenado Ox, escreva a equação reduzida da elipse.

A25[a]: [00:43:50] Eu não entendi essa parte em que ele fala: o eixo menor é paralelo ao eixo coordenado Ox.

P: [00:43:58] Tá, olha para essa imagem aqui. Essa aqui beleza? O eixo maior está na horizontal, na vertical? [ele mostrou uma imagem que estava na mesma página da questão]

A25[a]: [00:44:09] Na horizontal.

P: [00:44:11] Então o eixo maior é paralelo ao eixo dos x, beleza?

A25[a]: [00:44:20] Ah.

P: [00:44:22] Olha para esse agora o eixo maior, horizontal ou vertical?

A25[a]: [00:44:28] Vertical.

P: [00:44:30] Então ele é paralelo ao eixo y. Então aqui o que você tem? A metade do eixo maior mede cinco. Quem é que mede cinco? Qual a letra? [silêncio]

P: Olha só, metade do eixo maior. Vou até voltar aqui, lembra? Eixo maior dois a. Então a metade dele é a, então nesse problema eu já tenho o a, que mede cinco. Distância focal, distância focal é quem? Vou voltar aqui para a aula, para vocês verem. Onde é que tem isso? Na aula um. Aqui ó distância focal: dois c. Volta para o problema. Opa, dois c é quatro, portanto c é dois. Já deu o centro, agora escrever o restante. Esse texto aqui, pessoal, a partir do "se" olha: se o eixo menor é paralelo ao do y, é só para você escrever assim, ou seja: vai ser x menos x zero ao quadrado sobre b quadrado, mais y menos y zero ao quadrado sobre a ao quadrado.

A25[a]: [00:46:15] É para escolher uma das duas equações, né?

P: [00:46:18] Exatamente, para escolher o formato. Então, voltando: metade do eixo maior, você achou a, distância focal você tem dois c, então acha c. Você tem o centro, beleza. E se o eixo menor é paralelo ao eixo Ox, então está na vertical, portanto, fórmula dois. Tentem para resolver esses problemas, sempre que possível, dar uma volta aqui no material que eu postei para vocês. Aí você vai conseguir "ah, tá nesse formato! Então é assim, está nessa forma". Ok, pessoal?

A25[a]: [00:47:10] Certo.

P: [00:47:13] Ficou claro, o que é que você tem? [os dados]

A25[a]: Ficou sim.

P: Daí para a resolução do problema é: já tenho o a, já tenho o c, encontro o b, monto a equação. Então percebam que ficar aqui insistindo com vocês nisso e nisso, pessoal, se vocês olharem com bastante carinho de novo, é mais interpretação e é um reconhecimento de quais são os dados que eu tenho. Olha, eu tenho esse dado, esse e esse. Se encaixa onde? Se encaixa aqui! Beleza? Diga-me mais [silêncio]. Enquanto vocês estão procurando, aí está a importância da gente conhecer os elementos da elipse, quais são as características e a relação entre a forma algébrica, que é a equação e a sua representação geométrica. Então, perceba que nesse problema que ele falou: o eixo menor paralelo ao eixo do eixo Ox. Aí você: opa, vou pensar na minha representação geométrica. Se ela tem essa representação geométrica, então tem essa representação algébrica. Com essa representação algébrica, eu tenho a, tenho c, acho o b, determino a equação. Então, percebam aqui que a gente fica sempre passeando de uma linguagem para outra. E quanto mais a gente consegue transitar entre essas representações, melhor a gente consegue assimilar o conteúdo. Diga-me mais.

A25: [00:49:11] Professor, a questão 54 de circunferência, que eu tinha marcado aqui e esqueci de perguntar [página 81 do livro].

P: [00:49:19] Cinquenta e quatro, circunferência. Ok.

P: [00:49:29] Certo. Em cada caso, deixa eu compartilhar aqui novamente. Em cada caso, por meio do cálculo da distância entre centro da circunferência e reta, determine a posição relativa. Escolha qualquer uma aí. Vamos escolher essa letra "a", vamos fazer os cálculos com essa letra "a", certo?

A25[a]: [00:50:05] Faz a "b", professor, que é mais difícil [é a única a apresentar frações].

P: [00:50:07] Qual?

A25[a]: [00:50:08] A "b".

P: [00:50:10] Tá. Tem problema não. É um, menos dois, menos três, vamos lá. Essa é a nossa reta. É a nossa equação, que nesse livro ele chama de "lambda". Mais meio, menos meio, menos meio cinco meios. x mais meio, y menos meio, cinco meios [ele repetiu os coeficientes da equação para escrever na lousa]. A primeira coisa, vamos aqui na nossa circunferência, e aí é importante o reconhecimento de equações. Vejam, a gente não tem aqui sobre quatro e sobre nove, por exemplo. Ou sobre dezesseis e sobre vinte e cinco. Não tem essas coisas, sobre trinta e seis e sobre nove não tenho isso [se referindo a denominadores quadrados no primeiro membro da equação]. Nós não temos denominador no primeiro membro, né? Assim, frações aqui no primeiro membro. Portanto, eu estou trabalhando com circunferência. Quem é o centro dessa circunferência? [silêncio] Pessoal, qual o centro da circunferência?

A22[a]: [00:52:02] Seria x zero e y zero?

P: [00:52:06] Isso. Quais são os valores?

A22[a]: [00:52:12] Aí agora tem que mudar o sinal, né professor?

P: [00:52:19] Na elipse e na circunferência troca o sinal.

A22[a]: [00:52:23] Aí fica menos um sobre dois e mais um sobre dois.

P: [00:52:28] Exato. Agora me digam quem é o raio dessa circunferência. Vou chamar raio assim [R]. Quem é o raio da circunferência?

A22[a]: [00:52:53] É esse cinco sobre dois....

A25[a]: Cinco sobre dois.

A22[a]: ...mas tem ainda a raiz, né?

P: [00:53:03] Exatamente, a raiz de cinco sobre dois. Faça na calculadora, dá aproximadamente quanto? Que eu vou precisar desse valor aproximado daqui a pouco. Aproximadamente quanto?

A25[a]: [00:53:26] Um vírgula cento e dezoito [aqui a aluna realizou o cálculo erroneamente, pois o resultado deveria ter sido 1,58].

P: [00:53:33] Um vírgula cento e dezoito, é isso?

A25[a]: [00:53:35] Isso.

P: [00:53:36] Ok. Voltemos ao problema. Veja, até agora a gente não resolveu o problema, a gente só pegou as equações e retirou algumas informações da equação da circunferência. O que diz o problema? Por meio do cálculo da distância entre o centro da circunferência e a reta. Ele diz literalmente: meu filho, calcule a distância do centro até a reta r, beleza? Pessoal, qual é a fórmula da distância de ponto e reta? [silêncio]. Para a gente não perder tempo aqui, deixa eu acelerar aqui para vocês. a x do ponto mais b y do ponto mais c, tudo isso em módulo, dividido pela raiz de a ao quadrado mais b ao quadrado, inclusive nós utilizamos essa fórmula em um dos problemas da atividade. Esse a, b e c são os coeficientes da equação da reta. Quem é que está fazendo o papel de a, pessoal? Olhe para lá e olhe.

A25[a]: [00:55:21] O um sobre dois? Não, pera.

A2[a]: Um professor?

P: [00:55:29] Um, exatamente! Vamos lá escrever, então eu tenho o a é um, o b é menos dois, o c é menos três. Então vou ter: a vezes x do ponto: menos um meio. Mais b. Quem é b? Menos dois. Então já vou colocar logo o sinal: menos dois vezes o y do ponto: um meio. Mais o c, que é o menos três. Essa primeira substituição aqui tranquila para vocês?

A22[a]: Sim, professor.

A2[a]: Sim.

P: Agora vamos fazer a substituição na raiz: a ao quadrado mais b ao quadrado. Se vocês quiserem, quando forem fazer essas coisas, já sair colocando: aqui eu tenho a: um, eu tenho b: menos dois, tenho c: menos três. Eu tenho o x do ponto menos meio e tenho o y do ponto igual a meio. Ou seja, escrever num lugarzinho à parte, inclusive, quando está fazendo no caderno, eu tenho até o hábito de dizer: olha, coloque aqui cálculos auxiliares porque aí você vai gravando essas informações e depois é só substituir, né? Tem essa possibilidade. Mas quem conseguir fazer direto também não tem problema, fique à vontade. Feitas as devidas substituições, agora vamos fazer os cálculos. Tudo isso igual. Na primeira multiplicação eu tenho menos meio. Na segunda multiplicação, eu tenho menos um. Na terceira e tenho menos três. Na raiz eu tenho um mais quatro. Essas multiplicações, tranquilo para vocês?

A22, A25[a]: [00:59:04] Sim.

P: [00:59:09] Ok, continuemos. Esse cálculo no numerador vai dar quanto? Se você já quiser resumir aqui: menos um meio menos quatro. Dá quanto? Faz o MMC, quanto dá o MMC?

A25[a]: [00:59:45] Professor, esses dias eu estava revendo essas coisas de frações que eu esqueço, aí um professor estava dizendo que tipo fazia menos um sobre dois, vezes quatro... não, não, aqui em baixo tinha, tipo, nesse quadro tem um, aí ele fazia: um sobre dois multiplicado por um, vezes um aí menos o outro e multiplicava por dois sobre dois, entendeu?

P: [01:00:20] Esse por esse e esse por esse. E multiplica os de baixo. Né isso?

A25[a]: [01:00:33] Sim.

P: [01:00:36] Isso aqui, basicamente, é o MMC. De uma forma geral, quando a gente está trabalhando lá na educação básica, se você tem uma fração a sobre b, mais c sobre d, isso é igual a a, d, mais b, c sobre b, d. Ou seja, quando a gente vê de forma genérica a adição de frações, é isso que está acontecendo. Basicamente, com isso é aqui você está resolvendo o problema como lá futuramente chama de MMC, porque depois, se tiver algum termo comum, você pode simplificar. Dessa forma que você está falando só para fazer uso dela, aqui tem um, então ficaria menos um, três, um menos dois, vezes quatro, dois vezes um. Ou seja, menos um, menos oito, sobre dois, menos nove sobre dois. Tranquilo?

A25[a]: [01:01:49] Tranquilo.

P: [01:01:51] Como a gente vem aprendendo desde o ensino fundamental, mínimo múltiplo comum é dois, divide, multiplica, não era assim? Dois por dois dá um, um por um dá um. Divide e multiplica dois por um, dá dois, vezes quatro, oito. Dois caminhos para resolver o mesmo problema, beleza? Então, menos meio. Então voltei aqui. Meu cálculo é igual ao módulo de menos nove meios, dividido pela raiz de cinco. Pessoal, vou escrever aqui do lado: o módulo de menos nove meios dá nove meios. E aqui você está dividindo pela raiz de cinco, então eu vou colocar logo direto aqui: nove sobre dois raiz de cinco. Obviamente você pode fazer aqui a racionalização. Relembrando aí os bons tempos do nono ano que vocês fizeram. Multiplica e divide por raiz de cinco. Isso vai me dar nove raiz de cinco sobre... pessoal, aqui dá cinco, vezes dois: dez. Tranquilo para vocês o cálculo? Menino, eu fiz com carinho, mas olha só, a quantidade de conta que eu fiz. Deu para compreender?

A25[a]: [01:03:58] Sim..

P: [01:04:00] Me diga quanto é que dá aproximadamente essa raiz aí, esse valor nove raiz de cinco sobre dez.

A25[a]: [01:04:18] Dois vírgula zero um.

P: [01:04:23] Lembrando: esse cálculo foi o cálculo da distância do centro até a reta. Vamos lá. Essa é a distância do centro até a reta [2,01]. Essa é a medida do raio [1,118]. Qual a relação que existe que a gente pode estabelecer entre o raio e a distância do centro até a reta? [silêncio]. Hein pessoal?

A22[a]: [01:05:20] Que a reta é externa?

P: [01:05:23] Vamos chegar aí! Logo, a distância do centro até a reta foi maior que o raio. Portanto, a reta é externa à circunferência. Vamos só comprovar isso, graficamente, claro. A gente mostrou aqui, e aí é uma parte interessante, que queria chamar a atenção de vocês no texto, nós aqui mostramos analiticamente que a reta é externa. Professor, construa um gráfico para mostrar, para representar esse problema e verificar que de fato a nossa reta é externa. Equação: x mais meio, não foi isso? x mais meio ao quadrado. Mais y menos meio ao quadrado igual a cinco meios. Ok, aqui está a equação da nossa circunferência vamos dar o nome de "lambda" [no Geogebra].

P: [01:08:26] E a reta x menos dois, menos três, tá [$r : x - 2y - 3$]! x menos dois y menos três igual a zero. Olha que coisa linda, pessoal! De fato, externa. O que foi que nós fizemos? Do centro. Vou pegar um ponto qualquer aqui e vou deixar o segmento só para mostrar o que foi que a gente fez. Na prática, esse nosso cálculo fez o seguinte: a gente calculou aqui a medida do raio: 1,58. Depois calculamos essa distância aqui do A até o B, ou seja, calculamos aqui. Eu não quero tudo isso. Eu vou deixar essa linha pontilhada. É um estilo pontilhado e aqui eu vou colocar um segmento de reta daqui para cá, obviamente, esse segmento de reta pessoal ele é perpendicular. E aqui vamos calcular agora a distância desse segmento aqui: 2,01. Vamos chamar isso aqui de d de distância, né? Conferem aí os cálculos, pessoal? Distância 2,01 do centro à reta e raio 1,58 do raio. Confere só esses cálculos aqui tá! Vou fazer "rapidex" aqui [na calculadora].

A25[a]: [01:10:52] A calculadora que deu esse resultado.

P: [01:10:55] Um, cinco, oito, onze [ele se referiu aos dígitos do resultado]. Cadê a câmera aqui? Um, cinco, oito, onze. Mas não tem problema não, a gente conserta aqui e deixa certo. E deixa um, cinco, oito, onze. Como é 11, arredondar aqui para duas casas: Um, cinco, oito [1,58]. Veja o nosso gráfico aqui confirma a distância do centro à reta, lembre que é um segmento de reta perpendicular, deu 2,1, o raio 1,58 e, portanto, a distância é maior que o raio: externo. Eu vou reafirmar aqui pessoal só uma "coisita" para vocês: é importante vocês irem trabalhando também com esse software Geogebra. Tem para celular, muito simples de mexer. Você digita como digita texto x, tem o mais dois y menos três igual a zero. Faz a reta, do mesmo jeito que você está digitando o texto, você digita dentro do *prompt* de álgebra. Ele serve para resolver os problemas pra gente? A ideia não é essa, mas ele vai ser de grande utilidade para verificação dos cálculos que a gente está fazendo e até também para tentar visualizar caminhos para a resolução dos problemas que vocês estão trabalhando.

A25[a]: [01:12:32] Professor, tentei fazer aquela primeira, aquela questão da prova, da segunda prova. Aí eu colocava os números no Geogebra e a reta ia lá pro fim do mundo. Ai eu disse: ah meu Deus do céu!

P: [01:12:46] [risos] Era um detalhezinho só. Pessoal tem mais?

A25[a]: [01:12:54] Minha não. [silêncio]

P: [01:12:59] Ok. Nesse final de semana vou colocar uma atividade só sobre, além, claro, da recuperação, só sobre circunferência e elipse, viu? Só sobre essas duas coisas, que vai ser a primeira atividade do quarto bimestre. Semana que vem, a gente começa o conteúdo de hipérbole. Para a segunda atividade vai ser hipérbole e parábola. Menino, esse professor de geometria analítica vai gostar tanto de ter esses alunos [aqui o professor estava se referindo ao futuro professor da disciplina Álgebra Vetorial e Geometria Analítica, oferecida nos cursos de Exatas nos quais alguns alunos irão ingressar]! Meio caminho andado já, vão ver só o que é vetor. Muito bem!

[A25 falou algo, que não ficou claro na gravação]

P: Oi A25, pode falar!

A25[a]: [01:13:51] Não, já estava imaginando.

P: [01:13:56] Só alegria! Olha o livrozinho ali. Então acredito que por hoje... olha, não escutei a voz de um bocado de gente aqui: A27, A21, A23, A4, A8, opa, A8 eu ouvi, A14 eu vi o texto dela no chat.

A27[a]: [01:14:17] Professor eu estou aqui. É só porque eu sou tímida [a aluna não ligou a câmera ou o microfone durante a aula].

P: [01:14:21] Oh rapaz. Mas tem alguma dúvida?

A4[a]: [01:14:25] É não professor, é porque o senhor e A25 conversam tão bem que a gente não quis atrapalhar, entendeu?

A25[a]: Que conversa, oxe!

P: [01:14:34] Tá certo, dona A4, mas não tem problema não. Atrapalhe quantas vezes sentir vontade, tá bom?

A27[a]: Inclusive, professor, eu respondia algumas vezes em silêncio. O senhor perguntava e eu respondia sem ligar o microfone. É assim que funciona por aqui responder.

A25[a]: Respondia mentalmente [risos].

P: [01:14:52] [risos] Mas compartilhe essas suas respostas conosco, tá certo, A27?

A27[a]: [01:14:56] Tá certo.

P: [01:14:59] Vem aqui participar conosco para se divertir um pouquinho. Então, pessoal, por hoje *solamente*. Hoje só resolução de questões. O próximo encontro a gente começa hipérbole. E se não me falha a memória, tem uma pergunta sobre porquê daquela coisa assim? Das torres. O momento é na próxima aula. Quem foi que perguntou? Não lembro.

A22[a]: [01:15:29] Acho que fui eu professor.

P: [01:15:30] Pronto, o momento é na próxima aula, tá certo? Vocês, como alunos desse curso, futuros engenheiros civis para alguns. Tem a ver aí a solução, o porquê daquela coisa lá, misturada com outra área, que um dia eu faço o curso [Arquitetura e Urbanismo]. E que teve uma moça aqui que passou para ir fazer o curso também. Então até o próximo encontro. Pessoal, abraço para vocês. Vou agora participar da Reitoria Itinerante, com o nosso magnífico reitor. Vou parar a gravação, um bom final de tarde a todos.

APÊNDICE G – TRANSCRIÇÃO DA AULA 22

Descrição:	**Aula 22**
Data:	**05/05/2021**
Início da aula:	**14h12**
Término:	**15h25**
Duração:	**01h13**
Participantes:	**Professor, Pesquisadora, 11 alunos (total de 13 pessoas)**
Alunos presentes:	**A2, A6, A8, A9, A12, A15, A21, A22, A23, A25, A28**
Conteúdo:	**Hipérbole**

TRANSCRIÇÃO DA AULA

P: [00:00:00] Boa tarde. Vamos começar mais um encontro de Matemática três, turma elegantíssima. Vamos hoje para o conteúdo de hipérbole. Então, se me permitem, já vou direto aqui para a apresentação. Já estava apresentando antes de iniciar a gravação ao pessoal que vai estar no mesmo material, para ficar na gravação. Aqui está tanto a parte de elipse quanto a parte de hipérbole. Então, quando vocês forem assistir, aí se vocês não quiserem ir passando de um em um, basta clicar aqui em Aula 1, Aula 2, hipérbole. Então vamos começar aqui a nossa aula sobre hipérbole. Então, inicialmente, definição. O que é hipérbole?

A2[a]: [00:01:10] Professor, não está apresentando não.

P: Oi?

A25[a]: [00:01:10] Não está apresentando a tela.

P: [00:01:12] Hoje eu estou complicado. Deve ser a fome. Agora vai. Agora foi?

A2[a]: [00:01:27] Agora sim.

P: [00:01:28] Agora sim. Olha, coisa boa. Então voltemos para cá. Hipérbole. Aula um. Definição é o conjunto de pontos de um plano cuja diferença das distâncias em valor absoluto a dois pontos fixos desse plano é a constante. Na elipse, a gente tinha a soma. Como era uma soma de distâncias, ela não precisava desse valor absoluto. Na hipérbole, eu tenho a diferença constante e aqui a gente toma em valor absoluto. Por quê? Porque eu poderia tomar aqui um ponto em que a distância para um ponto fixo seria três e para outro seria dois. Então, a diferença eu teria um. No caso, se eu fizesse o contrário, teria dois menos três, menos um [igual a menos um]. Então para que eu tenha uma constante, tomo isso em módulo, em valor absoluto. Essa é a ideia. Essa foi a única imagem que eu não tive tempo de trocar. Mas quando vocês receberem um slide novo, vai estar com a imagem bonita aqui.

P: Então vejam qual a ideia pessoal: dois pontos no plano. Esses pontos, no caso, são F_1 e F_2. Então o conjunto de pontos P cuja diferença da distância de P até F_1 e de P até F_2 é constante. Perceba que essa constante é esse comprimento aqui, desse barbante aqui. Então a gente vai considerar aqui os dois pontos, essa distância entre esses dois pontos que nós vamos chamar de dois c. Veja que a gente vai ter algumas coisas muito parecidas com o que a gente tem lá em elipse. Distância focal: dois c. E um número real positivo a tal que o dois a seja menor que o dois c.

P: [00:03:34] A elipse era o contrário: $2a$ era maior que $2c$. Chamando esse $2a$ da constante, que está aqui na definição, a gente tem que um ponto P pertence à hipérbole se só se a distância de P a F_1 menos a distância de P a F_2, em módulo for constante. Essa constante está chamando de dois a. Assim como fizemos para a elipse, vamos aqui determinar quem são os elementos da minha hipérbole. Vejam que aqui a gente tem um pouco mais de informação, do que tem nessa figura. Mas lembrem: a hipérbole pessoal não é esse segmento de reta, não é esse par de segmentos. A hipérbole é só essa curva aqui, que para deixar mais destacada eu vou colocar depois de azul. De tudo isso que está na tela, a hipérbole é apenas o azul tá? Então vamos lá para os elementos da hipérbole. Foco um e Foco dois, distância focal: dois c. Vejam aqui nessa imagem para não ficar muito poluído, mais do que já é, eu não coloquei aquele segmento dizendo daqui até aqui tem dois c. Não. Porque veja: se você olhar esse segmento aqui descendo na circunferência, eu tenho c, do centro até F_2, de forma análoga, do centro até F_2 eu tenho c, portanto dois c. O centro está aqui. Ele é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, portanto $2c$. Vértices, A um e A dois. Veja que o vértice é esse ponto aqui da curva. Este ponto e este ponto da curva, tá bom? Eixo real: a gente vai chamar aqui de eixo real o segmento $\overline{A_1A_2}$. Este segmento que está pontilhado: eixo o real. Veja que a medida dele é dois a. Eu tenho um a aqui e vou ter, obviamente, aqui também: dois a. É importante chamar a atenção que este segmento a reta que contém este segmento, A_1A_2 é a reta que contém os focos. Mas eu mostrei aqui um eixo imaginário, que alguns livros que nem chamam de eixo imaginário. Aqui a gente vai estar seguindo vocês e chamar de eixo imaginário. Esse eixo aqui, olha B_1B_2 e o seu cumprimento, veja daqui até aqui é b, daqui até aqui é b, dois b. O centro é perpendicular ao segmento A_1A_2, passando pelo seu ponto médio, pelo centro. E por fim, nós tínhamos essas retas vermelhas e essas retas vermelhas são chamadas de assíntotas. E é importante chamar a atenção o seguinte: veja essa parte aqui da hipérbole ela se aproxima — esta reta, obviamente continua infinitamente aqui — esta curva se aproxima, mas nunca toca, chega bem pertinho, nunca toca, nem ultrapassa, não corta nem só encosta. Ela fica bem próximo assim. Por isso chamada de assíntota. Então ela não encosta aqui e não encosta aqui. Daqui a pouco a gente coloca uma no Geogebra para vocês verem. E aí eu vou dando um zoom, ampliando só para vocês verem como ela se aproxima. De forma análoga, nesta outra parte da hipérbole também não encosta, ela continua infinitamente aqui, olha, ela vem se aproximando, aproximando e não encosta. Então o que temos? Focos, vértices, eixo real, eixo imaginário e assíntotas. Esses são os elementos, e centro, claro, esses são os elementos da nossa hipérbole. Fiz questão de montar a imagem dessa forma para mostrar como é que a gente vai fazer a construção daqui a pouco, do gráfico de uma hipérbole. Isso aqui vai ajudar muito a fazer o traçado dessa hipérbole. Quando formos fazer a resolução do exemplo, vai ficar claro para vocês.

P: Bem, na figura a gente observa que tem aquele retângulo, um retângulo um pouco rosa e esse retângulo tangencia e ele tem as medidas iguais à medida do eixo menor, do eixo real e do eixo imaginário. E se você olhar com carinho a assíntota, ou as assíntotas passam exatamente nos vértices desse nosso retângulo. Ok? Por isso eu falei que vai ajudar bastante na construção da nossa hipérbole essa estrutura. Ainda na figura se você observar aquele triângulo amarelo, eu tenho que c ao quadrado é igual a a ao quadrado mais b ao quadrado. Percebam: é diferente da elipse. Ali era a ao quadrado igual b quadrado mais c quadrado. Ou seja, o a era a medida da hipotenusa na elipse. Na hipérbole, a medida da hipotenusa é c, metade da distância focal. A excentricidade? A excentricidade é calculada da mesma forma c sobre a só que aqui tem uma diferença: lembre que o dois c é maior que o dois a, ou seja, c é maior que a. Portanto, essa excentricidade é maior que um. Na elipse ficava entre zero e um. Na hipérbole é maior que um. E o que é que nos diz essa excentricidade? Está intimamente ligada a sua abertura: quanto menor a excentricidade, maior é a abertura. Ou seja, ela pode estar bem fechada assim ou estar bem assim. Quanto menor, maior abertura, mais aberta é essa hipérbole. Particularmente, quando o a for igual ao b — é possível — então as assíntotas formam um ângulo de 90 graus e aí a gente vai dizer que essa hipérbole é equilátera. Sobre a equação reduzida, acho importante aqui a gente passar bem rapidinho desse ponto, a construção vai ser análoga ao que a gente fez para elipse. Se nós considerarmos aqui a hipérbole, coincidindo com o centro de um sistema cartesiano ortogonal, nós vamos ter o primeiro caso. E quando o eixo real está sobre o eixo dos x. Se eu coloco o centro na origem de um sistema e a distância focal, a distância do central ao foco é c, então vou ter foco um: menos c zero $[F_1 : (-c, 0)]$ e foco dois c e zero $[F_2 : (c, 0)]$, de novo análogo à elipse. A única diferença, chamando a atenção, é que esta medida é c e esta medida menor, é a, o contrário [do que acontece na elipse]. Aplicando então aqui a definição de hipérbole: lembra distância do ponto a F_1 menos distância do ponto a F_2 igual a dois a. Desenvolvendo esses cálculos e aqui não é interessante pra gente isso agora, mas está no material, vocês vão poder consultar, pegamos uma equação bem parecida no finalzinho dos cálculos. A diferença é que eu tenho menos aqui, olha. Dividindo toda essa equação aqui por a ao quadrado, b ao quadrado mais b ao quadrado [aqui o professor se confundiu, pois a equação foi dividida pelo produto a^2b^2], a gente obtém essa equação da hipérbole. Então, percebam, essa é a chamada equação reduzida da hipérbole. Qual a diferença para elipse? O sinal de menos! Na elipse era mais, na hipérbole é um menos. Chamar a atenção aqui que nessa situação da hipérbole, a gente não tem aquela coisa de ah, o a é maior, está sobre o x, o b é menor está sobre o y, não. Quem manda aqui se a hipérbole está nesse formato, ou nesse formato [ele fez a indicação da posição com as mãos] é o sinal. Ok, então, recapitulando: se a hipérbole está neste formato, centro na origem, então, a sua equação é dada por x ao quadrado sobre a ao quadrado menos y ao quadrado sobre b ao quadrado igual a um. Se estiver na outra posição, assim? [novamente ele gesticulou] no eixo y?. Caso dois! Nessa situação, a equação é essa aqui. Percebam: na elipse, quem troca de posição é o a e o b. Na hipérbole, quem troca de posição é o x ou y. O sinal de menos continua aqui no centro, mas você troca o x e o y de posição. Olhem para isso e olhem para isso [ele passou o mouse nas duas equações que estão na apresentação].

P: Deixa eu voltar aqui só para ficar no quadro verdinho aqui essa informação. Médio Três.

Então vamos lá. A equação reduzida no primeiro caso. Aí eu vou deixar só a imagem: o primeiro caso é quando ela está assim. Neste caso, nós temos a equação x ao quadrado a ao quadrado, menos y quadrado b quadrado igual a um. O segundo caso, lembrando aqui o centro: C, zero, zero, centro na origem. Segundo caso, ela está para cima e para baixo. Neste caso, a equação é y ao quadrado a ao quadrado, menos x quadrado b quadrado igual a um.

P: Vou fazer um primeiro exemplo aqui para ilustrar essa construção e, em seguida, eu passo para algumas coisas interessantes. Ah tá. Antes mesmo de fazermos um exemplo aqui com isso, eu gostaria de mostrar para vocês um vídeo. Esse aqui. Quando estávamos em elipse a gente fez, mostrei para vocês a construção de uma elipse usando um barbante. E ali a gente chamou até do método do jardineiro, né? Aqui a gente vai ver uma construção parecida, ou seja, a partir de estacas em uma corda ou um cordão para a construção da hipérbole. Então, vamos ver como é que fica.

P: Vejam o quadro está fazendo o papel do plano. Nesse plano foram tomados dois pontos F_1 e F_2 e aqui nós vamos ter uma corda amarrada a F_1 e numa das pontas do dessa régua e a outra ponta da régua está em F_2. O giz está fazendo o papel do lápis.

P: [00:18:46] Só me permitam aqui, antes de continuar com o vídeo para a gente pensar naquela definição e o que era aquela cordinha na definição. Veja que quem está fazendo o papel daquela linha na definição é a régua e imagine um segmento aqui, tá bom? Então, quando você faz a diferença, isso menos isso, você vai ter uma constante que é esse comprimento do barbante. Então vamos lá [continuou o vídeo] Fica bem próximo aqui a gente percebe bem essa diferença que a gente está falando aqui. Quando ele fixa aqui. Então aí está a nossa hipérbole de focos F_1 e F_2.

P: Deu para compreender bem pessoal a construção?

A25[a]: Sim.

P: Então vamos fazer um exemplo de determinação da equação reduzida da hipérbole e todos os seus elementos. E a construção de seu gráfico, com todos os seus elementos. Então o exemplo que nós vamos fazer é esse.

P: Determinar a equação da hipérbole de focos menos cinco, zero e cinco, zero. E vértices menos três, zero e três, zero. Determinar os elementos da hipérbole e esboce o gráfico. Menos cinco, cinco, menos três, três. Vamos usar no primeiro exemplo. Hipérbole. Foco um: menos cinco, zero. Foco dois: cinco, zero. Vértice A_1: menos três, zero. Vértice A_2: três, zero. Então vamos fazendo aqui todos os passos e retirando todos os elementos que a gente tem. Vou começar, já aqui com o nosso gráfico. Um, dois, três, quatro, cinco: aqui está o meu foco um. Um, dois, três, quatro, cinco: aqui está o meu foco dois. Vértice um no menos três. Vértice dois no três. Percebam da forma que a gente montou vocês acham que a nossa hipérbole vai ficar, vou chamar dessa forma também, na horizontal ou na vertical?

A25[a]: [00:23:11] Acho que na vertical.

P: [00:23:16] Vamos voltar aqui para os nossos slides. Olha a situação aqui: foco, vértice, vértice, foco [voltou para o esboço]. Foco, vértice, vértice foco. Então, a nossa hipérbole vai ficar nessa posição, tá? Com o eixo real na horizontal, ou seja, ela vai ficar assim. Só não vou fazer agora.

A2[a]: [00:23:46] Ah tá, professor. Eu estava pensando que era o desenhozinho da hipérbole que ia ficar na vertical.

P: [00:23:56] Entendi, foi falha na minha comunicação: eixo real na horizontal. Eixo real na vertical, beleza? Então a gente vai ter eixo real na horizontal. Vejam que dessa construção, obviamente, a gente já tira aqui o centro. Estamos trabalhando, claro, com centro em zero, zero. Bem. Quais são as letras que a gente está trabalhando, que a gente já pode determinar só olhando para essas informações. Lembra que, para uma hipérbole, eu preciso descobrir quem é a, quem é b e quem é c. Será que a gente consegue tirar uma informação a partir daqui? Vamos voltar para lá para vocês ficarem paquerando. Olha para cá e me tirem as informações que estão lá.

A2[a]: [00:25:05] a no caso vai ser três, não é?

P: [00:25:10] E o que mais?

A2[a]: [00:25:17] c cinco.

P: [00:25:19] c cinco. Então temos a igual a três, c igual a cinco, ok? Vejam que com a e com c, posso determinar o b, que é usando isso aqui. Na hipérbole c ao quadrado é igual a a ao quadrado mais b ao quadrado. Então eu tenho dessa informação: c ao quadrado igual a a ao quadrado mais b ao quadrado. Ou seja: vinte e cinco, nove, b ao quadrado. b ao quadrado igual a 16. Quanto é que vale o b, pessoal?

A25[a]: Quatro.

P: Quatro. Então temos o a, temos o c. Com a e c achamos o b. E aí lembre: para escrever a equação da elipse, eu só preciso de a e b. Como ela está com o eixo real na horizontal, eu vou ter essa equação aqui. Ok, então é com ela que a gente vai escrever. Logo, a equação reduzida da hipérbole é: x ao quadrado sobre a ao quadrado menos y ao quadrado sobre b ao quadrado igual a um. Pessoal até aqui, tranquilo para vocês?

A25[a]: Sim.

P: Com essas informações, agora vamos determinar todo o restante. Para fazer o restante pessoal, eu sugiro a vocês que façam a construção do gráfico primeiro, tá? Depois que vocês estiverem, obviamente, bem treinados, já fazendo bastante questão. Você vai ver que já consegue tirar as equações das assíntotas, tirar as coordenadas de A_1, A_2, B_1, B_2, tudo isso. Por enquanto, para fazer essa, vamos para a construção do gráfico. Então "simbora"! Como vocês perceberam, o b foi quatro. Então quatro para cima, um, dois, três, quatro. Quatro para baixo: um, dois, três, quatro. Então aqui estarão, pessoal, B_1 e B_2. Vamos construir aquele retângulo que aparece no slide, tá?

P: Perceba que esse retângulo vai ter os seus lados paralelos aos eixos e tem as medidas de dois a e dois b. Feito o nosso retângulo, nós vamos fazer agora a circunferência, com centro no centro [dos eixos coordenados] e raio nesse ponto. Aqui eu quero chamar a atenção de vocês o seguinte: percebam que o círculo passa exatamente nos focos. Meu círculo aqui não está tão bom, fazendo manualmente assim é peso, mas vamos lá. Em que é que isso vai nos ajudar? Às vezes, quando estamos fazendo a construção do gráfico, o valor de c dá tipo raiz de dois, raiz de três, que é um número irracional. E aí pra gente não precisar ficar fazendo uma aproximação com calculadora, basta fazer a circunferência de centro no centro da hipérbole e raio igual ao vértice, aqui olha: centro, vértice, fez a circunferência. Onde a circunferência corta o eixo, nós vamos ter exatamente os focos. Continuemos. Feito isso, pessoal, a gente tem como determinar agora quem são as nossas assíntotas. Vou colocar essas assíntotas numa cor, deixa ver, acho que colocar essa corzinha clara aqui. Percebam que a assíntota vai ser a reta que passa pelos vértices do retângulo. E Centro da nossa hipérbole. Pessoal até agora a construção, tranquilo para vocês?

A2, A25[a]: [00:32:19] Sim.

P: [00:32:21] Ok. Agora é só finalizar com a nossa hipérbole, colocar uma cor, deixa ver se essa cor é "cheguei" o suficiente. Dá para ver bem aí no quadro pessoal?

A25[a]: Dá sim.

P: OK. A nossa hipérbole, lembrem que ela passa pelo vértice. Ela vai passar por aqui. Então você vai fazer um arco e uma das hastes da hipérbole aqui ela passa pelo vértice e vem se aproximando. Lembra que ela vai de um jeito pessoal, que não vai, não vai interceptar, não vai passar. Então vamos fazer a segunda parte agora aqui eu passando em cima, pensando bem no A. Abrindo de mais essa aqui. Deu para entender como faz a construção?

A25[a]: Deu sim.

P: Mas agora vamos já determinar os demais elementos da nossa hipérbole, lembrando a gente vai seguir exatamente o que está aqui para não esquecer ninguém. Foco um e foco dois já foram dados no problema. Distância focal: vou colocar em baixo. Qual a distância focal pessoal?

A25[a]: Cinco.

P: Não. Cinco é do centro para o foco.

A2[a]: [00:34:42] Dez.

P: [00:34:43] Isso! Então distância focal $\overline{F_1F_2}$: dez. Vértices já temos também no problema. Eixo real. Quanto? A2[a]: Seis?

P: Seis. $\overline{A_1A_2}$: seis. Eixo imaginário? Normalmente a gente não faz não, mas vamos colocar aqui eixo imaginário $\overline{B_1B_2}$ dá quanto?

A2[a]: [00:35:31] Oito.

P: [00:35:47] Agora nós precisamos das assíntotas. Pessoal, as assíntotas são equações de reta. A equação dessa reta que a gente batizou aqui de reta r e reta s. Ei, pessoal, pelo que a gente estudou lá no capítulo de reta, para determinar a equação de uma reta só preciso de duas coisas: ou dois pontos que a reta passa. E aqui eu tenho este e este. Ou determinar o coeficiente angular em um ponto por onde essa reta passa. Esses dois elementos, sejam os dois primeiros, ou os dois outros, eu consigo determinar a equação da minha reta. Mas aqui eu quero chamar a atenção de uma coisa: o coeficiente angular já está dado aqui no problema, só em você observar a construção do gráfico. Quem é o coeficiente angular da reta r? Lembrem que o coeficiente angular é a tangente do ângulo.

A2[a]: [00:37:02] 45 graus?

P: [00:37:07] Por que você me diria 45?

A2[a]: [00:37:13] Porque ele não é noventa. Eu acho que seria metade de noventa.

P: [00:37:17] Lembre que eu estou querendo esse ângulo aqui tá? O coeficiente angular da reta r. Mas eu entendi sua colocação. Não vai dar 45 porque se você observar essa medida do cateto é três e essa medida do cateto é quatro. Se fosse três e três, dava 45. Lembrem que em m é a tangente de "alfa", onde alfa é o ângulo da reta, que a reta faz com o eixo dos x. Mas quem é a tangente? Cateto oposto, cateto adjacente. Qual é a medida do cateto oposto nesse triângulo? Claro. Estou considerando o ângulo aqui.

A2[a]: Quatro?

P: Isso. E o adjacente?

A2[a]: [00:38:19] Três.

P: [00:38:22] Ou seja, quando vamos trabalhar com a reta r, o coeficiente angular da reta r, quatro terços. E onde a gente tem certeza que essa reta passa?

A2[a]: [00:39:03] No Centro.

P: [00:39:05] Que é quem?

A2[a]: [00:39:07] Zero e zero.

P: [00:39:14] Lembra que a equação é dada por y menos y zero, m x menos x zero. Olha o y zero aqui. Olha o coeficiente angular. y menos zero, quatro terços x menos zero. Ok, vou só escrever isso bonitinho agora: y menos zero, quatro terços, x menos zero. Ou sejam y igual a quatro terços de x. Agora vamos para outra sintonia. A s. Olha para cá e me diz qual o coeficiente angular dessa reta aqui? Dessa outra azul.

A2[a]: [00:40:45] Eu creio que seria a mesma coisa, só invertendo o sinal.

P: [00:40:50] Como?

A2[a]: [00:40:51] A mesma coisa, só invertendo o sinal.

P: [00:40:54] Exatamente. Então não precisamos nem fazer, né? Menos quatro terços.

P: Coeficiente angular da reta s: menos quatro terços. E também passa pelo centro. Portanto, eu tenho um y menos y zero, coeficiente angular, x menos x zero, que é zero. Isso nos leva a y igual a menos quatro terços de x. Então, recapitulando no problema foram dado focos e vértices. Da mesma forma poderia ter sido dito: a distância focal é dez, a medida do eixo real é seis. Foi dada basicamente a mesma informação e o centro é zero, zero, beleza? Com isso, começamos a construção, determinamos a e c, com isso encontramos o b. Com a e b, equação. Voltamos para construir o restante do gráfico e a partir do gráfico, tiramos assíntotas e os outros elementos. Alguma dúvida nesse exemplo, pessoal?

A2[a]: [00:42:41] Tranquilo.

P: [00:42:43] Tranquilo né?

P: E eu acredito sinceramente que depois que a gente faz a elipse com bastante carinho. Passar para a hipérbole e parábola se torna uma missão bem mais tranquila. Você já pega a manha da coisa e vai fazendo tudo direitinho. Eu queria ilustrar esse mesmo problema, se me permitem, de maneira bem rapidinha, aqui no nosso Geogebra. Mas é o seguinte aqui vou colocar um novo. Está muito sem graça. Lembre que a equação que a gente encontrou foi x quadrado sobre nove... acho que foi isso.

A25[a]: [00:43:28] Sobre nove ao quadrado...

P: Sobre três ao quadrado...

A25[a]: ...menos y ao quadrado sobre quatro ao quadrado.

P: [00:43:34] Quadrado, sobre quatro quadrado, dezesseis, igual a um. Ok, vamos lá colocar exatamente aqueles elementos, focos, focos de quem? De $eq1$ [nome do objeto no Geogebra], vértices. Vou só trocar os nomes aqui. Foco um, foco dois, vértice A_1, vértice A_2. Lembre que com isso a gente já pode determinar, inclusive o nosso retângulo bonitinho aqui. Só para encontrar o b aqui tá pessoal? Já era quatro estava fácil determinar, então vou precisar fazer isso não. Ampliar um pouco. Agora sim, para deixar o nosso retângulo bonitinho. Agora vou escrever aqui as nossas assíntotas. Esses pontos aqui eu vou retirar. Não quero, não quero, não quero e não quero [ocultando alguns elementos]. O máximo que a gente poderia colocar que seria o B_1 aqui e o B_2 aqui. Ok. Então, como a gente pode perceber, aqui temos todos os elementos que a gente já tinha feito manualmente na construção do gráfico todo bonitinho. Aqui é só para mostrar que os conceitos como a gente fez estão todos certinhos, bonitinhos. Aqui está a nossa assíntota, a nome dela. A gente chamou de r então vamos chamar ela de r, também. Aqui de s, aqui está a nossa r e as equações dela, como a gente pode perceber, estão aqui menos quatro x mais três y, claro, se a gente isolar o y aqui vai chegar nessa equação.

A25[a]: [00:46:58] Ali ele colocou na geral [equação geral da hipérbole que aparece no Geogebra].

P: [00:47:01] Exatamente! Aqui está escrita como a geral [no Geogebra] e aqui está escrita como a reduzida [na resolução que ele fez]. Como a gente quer simplesmente a equação da hipérbole, independentemente de qual forma da equação vai ser dada, você opta por qualquer [forma de] escrever, beleza? Ok. Então está aqui a outra equação também de s, também na forma geral. E o que eu tinha dito a vocês que eu vou mostrar. Vamos aqui tirando o *zoom*. O papel das assíntotas, pessoal, vejam elas se aproximam, a curva se aproxima, mas nunca toca. Se eu vier aqui e der *zoom* está longe. Se for mais para longe, parece que ela vai tocar, mas não toca. E aqui está um *zoom* bem caprichado. Ela continua não tocando, ela vai se aproximando mas não toca, tá? Eu dei tanto *zoom* que ficou até difícil de voltar agora. Aqui. Ficou bonito, não ficou: Nossa hiperbolezinha.

P: Lembrando: o que é a hipérbole? É só essa curva aqui. Esse resto de informação aqui são os elementos que a gente foi construindo com todo carinho. Mas hipérbole mesmo, hipérbole de fato e só a curva. A hipérbole é só isso aqui. Vou tirar o eixo e vou tirar a malha [da janela do Geogebra]. Beleza meu povo?

A2, A25[a]: [00:49:10] Beleza.

P: [00:49:12] Olha aí: foco um, foco dois, a hipérbole.

P: Está no material, deixei para vocês um segundo exemplo para vocês resolverem. É esse aqui. Cadê você? Aqui.

P: Onde está esse nove aqui é um y [ao quadrado]. Então quando vocês forem acessar no site vai estar corrigido. y ao quadrado sobre nove menos x ao quadrado sobre 25. Percebam que o menos está no x agora, não no y. Então ela vai estar assim. Eu gostaria de finalizar o nosso encontro, mas não acabar agora não, é só um momento que eu quero pontuar. Que é trazer exatamente respostas para o questionamento do nosso amigo que foi acho que foi A22 que fez a pergunta na época. Que era sobre por que algumas construções são feitas com aquele formato, daquela torre de usina atômica [ele fez o formato com as mãos]. Vamos ver? Separei aqui mais um vídeo, ele é rapidinho, mas muito interessante, inclusive porque faz parte da área de vocês. Ah mas não é o meu curso, mas está assim [gesto de aproximação com as mãos]. Inclusive, a moça está aqui. A moça que vai para João Pessoa. Tem tudo a ver com o curso de Construção [de Edifícios] e de Arquitetura. E depois vou mostrar uma peça para vocês que eu fiz aqui em casa. Então vamos ao vídeo. Está com a apresentação do vídeo pessoal [na tela]?

A2, A25[a]: [00:51:14] Está sim.

P: [00:51:15] Então vamos nós.

[alguns segundos de vídeo e A25 ligou o microfone]

A25[a]: Professor o vídeo não tem som não né?

P: [00:52:04] Ter tem. Está tão baixinho, né? Deixa eu voltar aqui. Está muito baixinho para vocês?

A25[a]: [00:52:15] Eu não estou escutando aqui.

P: [00:52:18] Deixa eu ver aqui se estava no máximo para mim. Quem? E aí deu para ouvir?

A2[a]: [00:52:39] Deu sim.

P: [00:52:41] Então vou continuar, tá?.

P: [00:54:53] Prestem atenção a partir daqui. Tentem aí encostar bem o ouvido e, se possível, aumentar o volume do celular, do computador. E ouçam bem. A partir daqui.

[o professor passou nove minutos de vídeo, em que capturamos algumas imagens]

P: [01:01:48] Deixa eu tirar um pouco o compartilhamento aqui para a gente conversar um ou dois minutos sobre o que está falando ali. Então percebam que o vídeo era endereçado para o pessoal de Arquitetura. Entretanto, no próprio decorrer do vídeo, ele diz que o arquiteto desenha e o engenheiro é quem vai ter o trabalho de fazer aquilo acontecer. E no caso aí, vocês, puxando para a Engenharia Civil. É exatamente isso que ocorre. E tem algumas palavras que aparecem ali. A primeira delas é uma superfície regrada. Não sei se durante as disciplinas de vocês do curso tiveram contato com esse termo?

A25[a]: Qual termo professor?

P: Superfície regrada.

A25[a]: [01:02:40] Não.

P: [01:02:42] Neste vídeo. Se vocês puderem assistir depois, vou deixar na sala de vocês o link. Ele fala exatamente que a gente consegue gerar essa superfície com retas. Então, por exemplo, essa última imagem que ele mostrou. Você tem um segmento de reta aqui, o segmento de reta aqui e você vem com outro segmento de reta, fazendo ele deslizar durante essas duas curvas. Você tem uma superfície curva feita com retas, segmento de reta. Assim também é o hiperboloide de uma folha, que é o motivo de trazer esse vídeo para vocês. Inspirado na pergunta do nosso amigo A22, ele estava falando lá sobre aquelas superfícies como a das torres. Inclusive ele trouxe no vídeo o criador desse tipo de superfície na Arquitetura, obviamente: o hiperboloide de uma folha. Então, vamos fazer aqui um link do que a gente está estudando até chegar nessa superfície. A gente acabou de ver a hipérbole. Vamos botar aqui de novo o gráfico de uma hipérbole. Essa aqui. Imagine que a gente tem essa superfície e essa hipérbole aqui e nós pudéssemos pegar esse eixo do y e rotacionar com a mão assim [ele gesticulou como se estivesse fazendo a rotação]. Olha, deixa eu colocar aqui o compartilhamento para vocês terem uma ideia do que eu estou falando. Então, imaginem vocês aqui. Eu tenho aqui a sua hipérbole, ela está bem amarradinha nesses eixos.

P: Você pega o eixo do y, rotaciona assim olha [gesticulando]. Obviamente isso aqui ele vai passar um pouquinho para trás e vai fazer uma superfície aqui. Que superfície é essa fazendo essa rotação? Essa imagem aqui, olha. Então vejam: isso aqui é o que a gente chama aqui na matemática de uma superfície de revolução. A gente rotacionou a nossa hipérbole em torno de um eixo e a rotação gerou a nossa superfície, que é o hiperboloide.

P: E aí, como ele mostrou ali no vídeo, para cada ponto dessa superfície, o que existe na realidade são um par de retas. Que eu determino. Então peço que vocês deem uma procurada nesse termo: superfície regrada e duplamente regrada, que têm a ver com essas retas, mas só para ficar em termos de uma pesquisa para vocês verem o vídeo e também procurarem um pouco na internet sobre isso. E qual a vantagem dessa coisa? Em outros vídeos vocês vão encontrar uma fala parecida com o seguinte: você consegue construir essa superfície curva com segmentos e de tal maneira que você consegue economizar material sem perder a estabilidade da sua construção. E aqui eu estava numa certa tarde aqui em casa pensando em vocês, acreditem! Então fiz essa construção aqui para vocês. Está dando para enxergar direitinho o que ela é? Olha para cá [o professor fez com as mãos a curvatura do objeto construído].

A25[a]: [01:06:53] Uma hipérbole.

P: [01:06:54] Pois é, você olha para cá, eu vou ter uma hipérbole aqui, uma hipérbole aqui, e o que nós fizemos foi uma rotação. Para obter essa superfície, veja que a gente está usando aqui vigas que são dos palitos de churrasco nesse caso. Se você olhar, ele sai daqui, vem subindo aqui, vem até aqui. Então nós conseguimos fazer uma superfície curva — acho que dá bem para perceber a curva aqui — apenas com segmentos de retas e fazendo as devidas amarrações. Quanto mais você diminuir s a distância entre os elásticos, ou seja, colocando mais elásticos aqui, isso é feito com o elástico e com palitos de churrasco, você vai ter ela mais curvada ainda. Quanto mais você consegue colocar laços aqui, vai ficando mais deitado, cada uma dessas vigazinhas. Mais curvada, ela vai ficar. Dá bem para ver a curva pessoal?

A2, A25[a]: [01:08:15] Sim.

P: [01:08:18] Então aí vai a resposta para o nosso amigo A22 porque que é construído dessa forma. Onde você consegue fazer, como você viu, um segmento sem comprometer a estrutura, economizando o material e tudo mais um pouquinho. Fica respondida a tua pergunta A22 de três aulas atrás? Ele saiu para almoçar? Taí não?

A2[a]: [01:08:47] Ele respondeu no chat.

P: [01:08:50] Ah foi? Está almoçando mesmo, respondeu só no chat. Se estivéssemos aqui seria muito massa, se estivéssemos aqui no presencial a gente ia poder fazer construções como esta e mais algumas que eu separei para fazer. E aí fazendo um link bem interessante entre o técnico de vocês, os que querem ir para a Engenharia e outra área que é Arquitetura fazendo, claro, tudo isso vindo daqui da discussão da aula de matemática. Uma ligação aí de três ou quatro coisas. Seria muito massa.

A25[a]: [01:09:28] Deu um trabalho, não foi professor, para fazer isso?

P: [01:09:33] Eu demorei um pouquinho para pegar o jeito e me incomodou um pouquinho porque eu fiquei com a unha machucada, porque...

A25[a]: [01:09:42] Cheia de cola depois, né?

P: [01:09:45] Não, não tem cola. Aqui não tem cola. Isso aqui só é palito de churrasco e liga para cabelo. Minha esposa está dizendo aqui qual o nome da liga.

A25[a]: [01:09:59] Ah eu sei qual é. Aquelas liguinhas.

P: [01:10:03] Pronto, ela acabou de pegar aqui. Essa liguinha aqui e palito de churrasco. Então não tem cola, mas poderia fazer com cola? Poderia. Mas aí você teria que ficar segurando, né? O interessante aqui é que quanto mais você vai acrescentando as ligas mais rígido ele vai ficando. Eu coloquei aqui uma tampinha no meio só para segurar a abertura dele, mas aqui você consegue pressionar e achatar um pouco mais por causa da liga. Deixa eu ver se eu tiro aqui. Tirei a peça de dentro, tá vendo? Você consegue expandir e voltar. É uma malha mesmo que ele fica. E aí eu coloquei aquela peça dentro só para ela ficar parada, mas ela é isso aqui. Então, dá um trabalho, mas não é um trabalho, não é difícil. É só você ter um pouquinho de paciência que sai a figura que você quer. E aí vocês vão de novo, quando estiverem olhando esse duplamente regrado, pensem nessa malha aqui que vai ter alguma coisa a ver com isso. E aí pessoal, dúvidas? Perguntinhas?

A2[a]: [01:12:06] Tranquilo.

A25[a]: Não.

P: [01:12:09] Ok, então por hoje é isso. A gente viu aqui a hipérbole, elementos da hipérbole, a equação reduzida da hipérbole. Fizemos um exemplo e ficou outro para vocês fazerem. Fica esse vídeo para vocês voltarem e procurarem essa superfície regrada, duplamente regrada. E quando vocês começarem a fuçar nesse vídeo, vão aparecer vários outros de Arquitetura. Tem uns da China que são massa. A nossa amiga que vai fazer Arquitetura já começa a se apaixonar. Então, por hoje *solamente*. Depois coloco tanto a apresentação quanto o vídeo na sala de vocês para vocês acessarem, quantas vezes quiserem, ok? Abraço a todos e vou parar a gravação por aqui, até mais.

APÊNDICE H – MATERIAL DA AULA 23

Descrição:	**Aula 23**
Data:	**12/05/2021**
Modalidade:	**Aula Assíncrona**
Conteúdo:	**Hipérbole**

MATERIAL DA AULA

Equação da Hipérbole com Eixos Paralelos aos Eixos Coordenados

Seja uma hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$. Consideremos os casos de os eixos da hipérbole serem paralelos aos eixos coordenados.

1° Caso:
O eixo real é paralelo ao eixo Ox.

Utilizando uma conveniente translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$ $(O' = C)$ (Figura 11) em relação ao qual a hipérbole tem centro na origem e eixo real sobre o eixo Ox'.

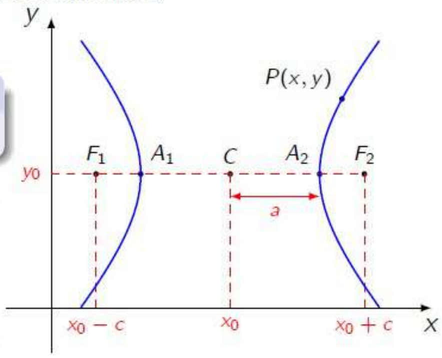


Figura: Hipérbole de Centro $C(x_0, y_0)$.

Logo, sua equação reduzida é

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Para expressá-la em relação ao sistema original xOy, utilizamos as equações de translação

$$\begin{cases} x' &= x &- x_0 \\ y' &= y &- y_0 \end{cases}$$

donde obtemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

que é a forma canônica da equação da hipérbole para este caso.

2° Caso:

O eixo real é paralelo ao eixo Oy.

De forma análoga ao 1° caso, temos

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

que é a forma canônica da equação da hipérbole para este caso.

Exemplo

Determine a equação reduzida da hipérbole de focos $F_1(-3,3)$ e $F_2(5,3)$, e excentricidade 2. Determine os elementos da hipérbole e esboce seu gráfico.

Exemplo

Dada a equação reduzida da hipérbole $(y-1)^2 - \dfrac{(x+3)^2}{2} = 1$, determine os elementos da hipérbole e esboce seu gráfico.

Exemplo

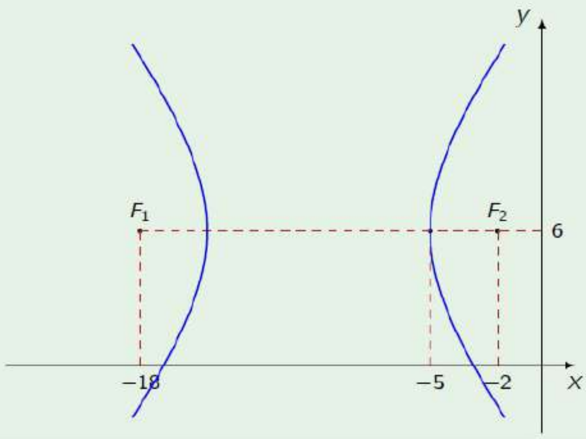
Determine a equação reduzida hipérbole cuja equação geral é

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$$

Determine também seus elementos e esboce o gráfico.

Exemplo

Determine a equação reduzida da hipérbole cujo gráfico é apresentado a seguir.



APÊNDICE I – TRANSCRIÇÃO DA AULA 24

Descrição:	**Aula 24**
Data:	**19/05/2021**
Início da aula:	**14h14**
Término:	**15h56**
Duração:	**01h36**
Participantes:	**Professor, Pesquisadora, 11 alunos (total de 13 pessoas)**
Alunos presentes:	**A2, A4, A8, A10, A12, A13, A22, A23, A25, A27, A28**
Conteúdo:	**Hipérbole – Parábola**

TRANSCRIÇÃO DA AULA

P: [00:00:02] Boa tarde! Vamos iniciar mais um encontro de Matemática três com essa turma elegante. Eu queria iniciar o nosso papo falando sobre o material que eu deixei para e aula assíncrona semana passada. E aí, claro, justificar o motivo pelo qual foi assíncrona e a única do ano, comigo, que foi assíncrona. Teve reunião demais quarta-feira. Hoje continua cheio, da mesma forma, não com reunião, mas resolvendo algumas coisas, aí ficou impossível. Ou eu participava de duas reuniões ou vinha para a aula e tinha que resolver as coisas na reunião que era sobre o desenvolvimento das atividades de ensino. Então peço desculpas, mas aí deixei o material para vocês. No Google Sala de Aula. O que ficou lá foi a continuação do conteúdo de hipérbole, onde o objetivo era a gente trabalhar a hipérbole com o centro diferente da origem do sistema. Ou seja, o centro não era mais zero, zero. O que é que mudava na expressão? Só que ficava x menos x zero e y menos y zero. E aí, do material que ficou, vocês conseguiram acessar, pessoal?

A25[a]: [00:01:21] Professor, eu dei uma olhada nos slides.

P: [00:01:25] E aí?

A25[a]: Assim...

P: Assim? Diz aí esse teu assim para entender [silêncio]. Bem eu vou conduzindo então essa conversa, está certo? Aí você vai me dizendo esses “assins” bem alongados. Então vamos lá. Logo de início foi tratado, logo nos primeiros slides, como obtemos a fórmula, a expressão para a hipérbole com o centro fora da origem, nós utilizamos aquela mesma translação que usamos para a elipse. Ou seja, nós consideramos o nosso sistema cartesiano x linha y linha, onde a origem desse novo sistema cartesiano coincide com x zero e y zero. Então nós fizemos o deslocamento horizontal e vertical com essas medidas. Nesse novo sistema cartesiano, a equação da hipérbole era x linha ao quadrado sobre a ao quadrado menos y linha ao quadrado sobre b ao quadrado igual a um. Mas aí, usando as fórmulas de transformação que eram dadas por x igual a x menos x zero menos, y linha igual a y menos y zero.

P: Substituindo essas formas de transformação na equação, ficamos com: se a hipérbole está com o eixo real paralelo ao eixo do x, então você tem x menos x zero ao quadrado sobre a ao quadrado, menos y menos y zero ao quadrado sobre b quadrado igual a um. Se a hipérbole agora estiver assim [o professor gesticulou para mostrar a posição da hipérbole] cima, baixo, então vai ficar y menos y zero ao quadrado sobre a ao quadrado, menos x menos x zero ao quadrado sobre b ao quadrado igual a um. Nessa passagem, dona A25, qual foi desses pontos que ficou um pouco obscuro para você?

A25[a]: [00:03:44] Espera, professor. Eu estou pegando aqui o material.

P: [00:04:00] Tranquilo. Hoje à tarde eu estou bem-aventurado entre as mulheres, só as elegantíssimas aqui. Sempre uma presença elegantíssima e muito estudiosa. Se as mulheres quisessem tomavam conta do mundo em dois minutos. Se as outras meninas estiverem com alguma dúvida no material, deem um toque aí pra gente iniciar, tá? Se ficou alguma dúvida lá do slide ou no exemplo que está lá no slide. Fique à vontade.

A2[a]: [00:04:59] Eu não consegui, como professor, realizar a questão 22 do livro.

P: [00:05:04] 22 do livro. Ok, pela voz dona A2?

A25[a]: [00:05:13] É sim.

P: [00:05:14] Certo? Então, vamos lá: 22 do livro. Enquanto isso, nossa amiga A25 está procurando ali as anotações dela e se as demais também tiverem anotações, fiquem à vontade. Vou abrir o livro página 22. O chato de abrir o livro por aqui é que eu tenho que ir para a turma de vocês, a sala de aula, e aí pegar o livro. Matemática Três. Livro três. Agora sim, vou compartilhar a tela com vocês. Questão 28, você lembra qual era a página A2? Que eu já vou direto.

A2[a]: [00:06:52] Professor, se não me engano, é a página 103.

P: [00:06:57] Fica mais perto. Se não for, pelo menos está perto. Questão vinte e oito. Vinte e oito? Tá bom.

A2[a]: [00:07:14] Vinte e dois, professor.

P: [00:07:16] Vinte e dois. Eu já ia dizer: vinte e oito é parábola e a gente vai ver ainda [risos]. Certo.

P: Determine as coordenadas do foco da hipérbole, cuja equação é três x ao quadrado menos y ao quadrado igual a trezentos. Ok, deixa a primeiro eu entender, A2, qual foi a tua dúvida, se foi no texto, na equação, diz aí.

A2[a]: [00:07:50] Assim, as outras questões eu consegui fazer de boa. Mas quando eu cheguei nessa daí, eu não sei como é que eu transformo essa equação nos pontos. Eu acho que é mais isso.

P: [00:08:03] Entendi. Captei exatamente qual é a tua dúvida. Eu acho que você me apresentou uma dúvida bem parecida na aula de elipse. Uma bem parecida mesmo na aula de elipse. Vamos a ela. Captei exatamente qual é a dúvida. Estão vendo meu quadro branco aí né pessoal?

A2[a]: [00:08:36] Sim.

P: [00:08:40] Questão 22. A equação é três x ao quadrado menos y ao quadrado igual a

300. Como é que a gente sabe, olhando logo de cara, que isso é uma hipérbole e não elipse? Por causa desse menos aqui. Desse menos aqui, se tivéssemos três x ao quadrado mais y ao quadrado igual a 300, então eu teria uma elipse. Então, para ser elipse, os termos que estão com x, os termos x e y ao quadrado tem sinais contrários e seus coeficientes são diferentes. Aproveitando, vamos lá. Qual foi a equação reduzida que nós vimos durante as nossas aulas? A equação reduzida da forma x ao quadrado sobre a ao quadrado menos y ao quadrado sobre b ao quadrado igual a um ou y ao quadrado sobre a ao quadrado menos x ao quadrado sobre b ao quadrado é igual a um. E esta equação que foi dada no problema não está nem no formato um, nem no formato dois. Mas podemos passar para esses formatos, tornando o segundo membro igual a um. Como é que eu posso tornar o segundo membro igual a um? Dividindo toda a equação por 300. Então vamos ver o que é que eu vou obter aqui. Dividindo toda a equação por 300, vamos ficar com três x ao quadrado sobre 300 menos y ao quadrado sobre 300 igual a 300 por 300. Fazendo a divisão, nós vamos obter x ao quadrado sobre cem, menos y ao quadrado sobre 300 igual a um. Agora nós temos a forma reduzida. Quanto vale o a, A2?

A2[a]: [00:11:48] Como é professor?

P: [00:11:50] Quanto vale o a?

A25[a]: [00:11:55] Um sobre cem?.

P: [00:11:58] Vamos lá: a ao quadrado é igual a 100, portanto a vale dez... [a aluna tentou falar alguma coisa mas junto com a fala do professor não foi possível entender] b ao quadrado igual a trezentos... Oi? Pode falar!

A2[a]: [00:12:16] Eu comecei certo, só foi uma questão de matemática, mesmo.

P: [00:12:22] O que é que tinha dado errado A2? Só para entender.

A2[a]: [00:12:25] Eu me enrolei no meio do caminho.

P: [00:12:28] Ah! Bem, aqui nós vamos tirar a raiz de 300, mas se você quiser simplificar, nós vamos ter 10 raiz de três. A partir daqui, três pontinhos, que aí a gente pode determinar agora todos os outros elementos. Deixa eu voltar para vocês.

A25[a]: [00:12:56] Professor, o senhor pode responder aquele exemplo, que é o último do slide? Eu não sei se foi problema de matemática, ou alguma coisa do tipo.

P: [00:13:11] Certo, é o que tem a imagem, é isso?

A25[a]: [00:13:14] Isso.

P: [00:13:16] Ok. É até bacana, porque aí a gente aproveita para fazer exatamente esse passeio da representação gráfica para representação algébrica. Tá certo?

A25[a]: [00:13:29] Professor eu confundi muito a hipérbole com a elipse.

P: [00:13:35] Acontece. Acontece. Às vezes a gente acha que é só um sinalzinho. Coloca até aqui uma numa fala como o meu amigo P2 não gosta, sinalzinho, diminutivo, ele fica tiririca. Mas às vezes a gente acha que é só um sinal: ah, trocou um sinal, mas muda muita coisa, inclusive muda o próprio elemento que a gente está trabalhando, então vamos a ele. Compartilhar com vocês. E quem foi que chegou depois que eu não dei boa tarde? Dona A4 e dona A10. Boa tarde, senhoritas. Tudo bom?

A4[a]: [00:14:23] Boa tarde, professor.

P: [00:14:27] Seja bem-vinda. Então vamos lá. Essa aqui. Vou colocar em apresentação só para a imagem ficar maior. Então vamos lá determine a equação da hipérbole, cujo gráfico é apresentado a seguir.

A25[a]: [00:15:08] Muito bem.

P: [00:15:10] Lembrem, pessoal a hipérbole é o azul. Todas as outras coisas que a gente colocava: assíntota, a circunferência de raio c e centro x zero, y zero, tudo aquilo é só para auxiliar na determinação dos elementos. A hipérbole é só essa parte azul. Aqui eu tenho o sistema cartesiano e nada além disso. Então vamos lá. Ele pede a equação reduzida da hipérbole. Temos duas opções. Uma é x menos x zero ao quadrado sobre a ao quadrado, menos y menos y zero ao quadrado sobre o b ao quadrado igual a um. Ou o numerador invertido começa com y e termina com x. Neste caso em que a hipérbole está nessa posição que está aqui, ela é o caso um ou caso dois?

A25[a]: [00:16:15] Eu acho que um.

P: [00:16:18] Ok. Então vejam, a gente já vai aqui eliminando as coisas, já vai filtrando, já vai afunilando o que a gente quer trabalhar, certo? Então esse é um exemplo...

A25[a]: [00:16:39] Professor, tá travando.

P: [00:16:42] Vamos fazer o seguinte eu vou trocar de câmera, vou colocar aquela câmera ruim, que não é a do celular, só para ver se melhora. Se não melhorar então aí é a internet. E aí, pessoal, melhorou? Acho que assim não está mais travando. Fica a imagem feia, mas pelo menos não está travando. Então vamos lá. Nesse exemplo. O que nós vamos trabalhar com uma equação é x menos x zero ao quadrado menos y menos y zero ao quadrado sobre b ao quadrado é igual a um. Porque está nesse formato. Se tivesse assim [ele esboçou as posições da hipérbole], inverteria o numerador, ok? Só de olhar para o gráfico, a gente já reconhece o tipo de equação que a gente vai trabalhar. Até aqui compreensível para vocês?

A25[a]: [00:18:13] Sim.

P: [00:18:15] Beleza. Para determinar a equação, eu preciso de x zero e y zero, mas esse é o centro. Depois eu preciso de a e preciso do b. Voltemos para a imagem e vamos ver o que é que eu posso tirar daqui. Vou tirar isso aí imagem fica bem grande aqui no centro. Bem melhor! Olhando para essa imagem, vocês têm como me dizer qual é o centro? [silêncio prolongado] Entendi! O silêncio também responde muita coisa. Vou fazer o seguinte: vou voltar na imagem...

A2[a]: [00:19:07] Professor, seria 13 e 5?

P: [00:19:10] Quanto?

A2[a]: [00:19:14] Seria treze e cinco?

P: [00:19:18] Treze e cinco. Vou gravar para ver se é isso tá bom? Olha quando estudamos hipérbole, o centro, leia aqui para mim, por favor, pessoal, o que é o centro.

A25[a]: [00:19:33] O ponto médio de F_1 e F_2.

P: [00:19:36] Ponto médio de F_1 e F_2. Muito bem. Voltemos lá para frente. Quem é o ponto médio de F_1 e F_2. Aí vê se bate com aquele valor que você tinha me dito agora há pouco. Quem é o x do F_1?

A2[a]: [00:20:06] Eu acho que aqui é [não foi possível identificar a fala] e seis. P: [00:20:11] O seis eu entendi. O primeiro número foi que eu não entendi.

A2[a]: [00:20:20] 15. Quinze e seis.

P: [00:20:23] 15. Positivo? É isso mesmo?

A25[a]: Não é dez não?

P: Olha para o sistema cartesiano aqui. À esquerda da origem os valores são todos negativos, então x tem que ser um x negativo aqui.

A25[a]: [00:20:42] Não professor. Menos dez..

P: [00:20:46] Melhorou né? Menos dez e seis. Beleza para vocês, por que o sinal negativo?

A25[a]: Sim.

P: Só por curiosidade. Como foi que você chegou no valor menos dez?

A25[a]: [00:21:11] Menos dezoito, menos dois.

P: [00:21:14] Isso.

A25[a]: [00:21:15] Aí dá menos vinte. Aí não é o ponto médio? Aí divide por dois.

P: [00:21:21] Massa, era exatamente isso que eu queria ouvir, tenho certeza que você já tinha feito o cálculo correto só para ficar aqui registrado. Ponto médio x do primeiro ponto mais o x do segundo ponto dividido por dois: menos dez. E o y seis. Então, voltando para cá, eu já sei que o C. Tem coordenadas menos dez e seis. Ou seja, pessoal nós já temos aqui o valor do x zero e tenho aqui o valor do y zero. Volta para o gráfico e me diz se eu consigo encontrar mais alguma coisa. Por enquanto, a gente está assim olha.

P: Ou seja, aqui nessa imagem eu tenho um ponto aqui, menos dez e seis. O que eu consigo tirar mais daqui só olhando para a imagem? [silêncio] Vou fazer o seguinte eu vou voltar lá pro início de novo. Lá a gente vê o que eu posso tirar mais aqui. Olha para essa imagem aqui, pessoal.

A2[a]: [00:23:15] Dá pra tirar o eixo central, professor? O eixo real?

P: [00:23:22] Pode tirar sim.

P: [00:23:28] Eixo real: é do A_1 até p A_2. E você tem também o eixo focal. Que é de F_1 até F_2. Deu para entender, pessoal, o que é que eu tenho na imagem? Eu posso tirar o eixo focal e posso tirar o A_1 e o A_2, o eixo real. Daqui prá cá, daqui prá cá ou simplesmente daqui para cá, vamos voltar lá para a imagem para que possamos pegar esses valores. Diga aqui o que é que a gente pode tirar [silêncio]. Aqui estão os valores, pessoal, já. Vou ajudar, vou ajudar. Esse valor que eu estou marcando aqui e depois esse valor que eu estou marcando aqui. Quem é esse de baixo? Do centro até o vértice, quem é? É a, pessoal! Onde é que está vendo isso lá no slide que você passou para a gente? Aqui: do centro até o A, a minúculo [nesse momento o professor mostrou na tela com o mouse o trajeto do centro até o vértice A, indicando a medida a. Ouvindo o que ele fala não há diferença entre essas letras A e a, exceto quando ele fala que é a minúsculo]. Do centro até o F é que letra? [silêncio]. Pessoal, vocês estão aí? Meninas?

A2[a]: [00:25:52] Como é professor?

P: [00:25:54] Do Centro, até o A, até o vértice, é a minúsculo. E do Centro, até o foco é que a letra? [aqui observamos novamente, o que gera ambiguidade no ouvir a letra a ou A]

A12[a]: [00:26:22] Vai ser o F_2 ou o A_2.

P: [00:26:25] Do C para o A_2 é o a. E do C para o F_2?

A2[a]: [00:26:35] É o c? [aqui mais uma vez gera ambiguidade entre as representações do centro, representado pela letra C maiúscula, e a medida do semieixo focal, representado pela letra c minúscula. O professor não identificou nesse momento a necessidade de diferenciação ao falar ambas as representações, como identificou no caso anterior]

P: [00:26:38] Exatamente. É só você acompanhar o pontilhado aqui, olha, c. Portanto, eu tenho com dizer qual é o valor de a e qual o valor de c. Qual o valor de a? [silêncio] Daqui até aqui mede quanto?

A25[a]: Menos doze.

P: Vou dizer daqui eu vou colocar em preto.

A25[a]: [00:27:26] Ah sim eu contei do dois.

P: [00:27:30] Quanto?

A25[a]: [00:27:32] Menos quinze?

P: [00:27:35] Não! Porque vai ficar menos cinco menos menos dez, ou seja, dez menos cinco: cinco.

A13[a]: Cinco!

P: E do preto até esse outro aqui. Quanto?

A25[a]: [00:27:59] Oito.

P: [00:28:01] Oito. Portanto, olhando para a figura, eu tenho que a é cinco e c é oito. Já tenho x zero, já tenho y zero, já tenho a, só falta o b. O que é que eu uso para encontrar o b?

A2[a]: [00:28:44] Teorema de Pitágoras.

P: [00:28:46] Quem é a hipotenusa?

A12[a]: [00:29:00] Oito, professor, o c.

P: [00:29:03] Exatamente. c ao quadrado é igual a a ao quadrado mais b ao quadrado. P, você poderia me mostrar onde está isso no material? Agora! "Se liga no pira". Aqui. Ou simplesmente pela imagem no triângulo amarelo. O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Ok, então vou ter 64 igual a 25 mais b ao quadrado. Pessoal, quanto vale b ao quadrado? 64 menos 25?

A25[a]: [00:30:06] 39.

P: [00:30:14] Portanto, b é igual à raiz de 39. Bem aqui morreu, vejam: já tenho o x zero, já tenho y zero, Já tenho o a, já tenho b, substituo na equação, finalizou o problema! Lembrem que o problema era apenas determinar a equação. Determinar a equação reduzida. Deu para entender? Acho que foi A25 que perguntou essa aí. Deu para entender?

A25[a]: [00:31:02] Deu sim, professor. Acho que foi tipo os elementos do gráfico, eu acho.

P: [00:31:10] Alguma coisa dos elementos?

A25[a]: [00:31:11] Deu alguns diferentes ali, não sei.

P: [00:31:16] Então foi só alguma coisa de atenção para você pegar os valores. Lembre: deu os focos, se você tiver os focos, já tem o c. Se ele te der o vértice e se você tem a medida do c minúsculo [aqui novamente para dirimir alguma ambiguidade], que é a medida do semieixo focal, você também já pode encontrar o ponto Centro [C]. Se tenho o centro e tenho um vértice, eu tenho o a. Então se eu tenho o c, tenho o a, acho o b, acabou o problema. Tentem sempre pensar nessa perspectiva. O que é que meu problema está me dando? Ah, P, deu só os vértices A_1 e A_2, deu muita coisa. Se ele deu os vértices, ele já te deu o valor de a, que te deu o ponto centro, o C. Com um foco, depois você consegue determinar a equação, ok. Diga-me mais.

A2[a]: [00:32:26] Por mim era só isso mesmo, professor.

P: [00:32:28] Ok. Então vou passar para o livro de vocês. Esse último tópico ele é bem curtinho no livro de vocês. O slide que eu preparei vai ter até mais coisa. Então eu só estou com uma pulguinha atrás da orelha em questão de notação. Quero ver como é que o livro de vocês está falando sobre isso. Partilhar a tela.

P: [00:33:18] Bem, para finalizar, nosso papo e o conteúdo do terceiro ano, então a gente tem aqui a parábola. Veja que a parábola é uma curva que surge em várias situações. A gente tem aqui, por exemplo, o lançamento de um projétil. Então veja que várias curvas, essas curvas são parábolas.

P: Outra situação quando você lança um jato de água naquelas fontes. Aqui nessa ponte também eu tenho arcos de parábola. A parábola surge, surgem situações como essa, claro, várias outras situações, mas essas para ilustrar.

P: E qual o conceito, qual a definição de parábola que nós temos? Parábola é o conjunto de pontos de um plano, equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa nesse plano. Então, vejam a situação aqui: dada a reta d e o ponto fixo F, perceba que nos pontos P_1, P_2, P_3, P, a distância do ponto P até F é a mesma distância do ponto P até a reta. A distância do ponto P_3 até F é a mesma distância do ponto P_3 até a reta. Essa distância igual essa, essa distância igual a essa. Aqui é o ponto médio do segmento [no vértice]. Portanto, mesma distância, essa distância igual a essa, essa distância igual a essa. Então a parábola tem essa definição: é esse lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto fixo e de uma reta fixa. Novamente percebam que a gente tem aqui uma definição em língua materna. A gente não tem aqui uma representação algébrica. A gente não colocou a matemática ainda nessa coisa.

P: [00:36:05] Então vamos a partir de agora tentar representar essa situação em matemática. Se eu chamar essa reta agora de d e o ponto não pertencente à reta de F. O que é que significa pertencer à parábola? Distância de P a F, distância de P à reta. Distância do ponto P até o ponto F é igual à distância do ponto P até a reta d. Ou seja, a distância de P a F é a mesma de P até P linha, onde P linha é a projeção do ponto P sobre a reta. Nessa figura aqui, a gente vai destacar o seguinte: o que é que a gente tem na parábola quanto aos elementos? Foco, a reta fixa, chamada de diretriz. Essa reta e é chamada de eixo de simetria ou reta focal, ou seja, a reta que contém o foco. Perceba que essa reta, pessoal, passa pelo foco e ela é perpendicular à diretriz. Este ponto, vamos dizer aqui mais baixo da parábola é o vértice. Pessoal, esse termo vértice é aquele mesmo que vocês estudaram no nono ano e também estudaram no primeiro ano do ensino médio, nono ano do ensino fundamental, primeiro ano do ensino médio. É até uma expressão, uma fórmula para se calcular isso. Dada a função do segundo grau x quadrado menos quatro x mais cinco, determine o vértice da parábola. Vocês calculavam por uma formulazinha o valor desse vértice, é o mesmo. Da definição de parábola, tem-se que a curva é simétrica em relação ao eixo, ou seja, é espelhada à direita e à esquerda do eixo. O que acontece de um lado, acontece do outro, inclusive lembrando também do oitavo ano, é por isso que o professor dizia o seguinte: determine o vértice, pegue dois pontos à direita e dois pontos à esquerda equidistantes. Então, normalmente, quando você descobria que o x do vértice era três, você pegava quatro e cinco e dois e um, por quê? Porque o que acontece à esquerda acontece à direita, ele é simétrico em relação à reta e, eixo de simetria. Em particular, se a é um ponto de d, intersecta e, então V é o ponto médio do segmento $\overline{AF}$. Então vejam: aqui eu tenho uma reta intersectando, V ponto médio, daqui para cá.

P: Distância de V até foco, é igual à distância de V até a reta, que é p. Eu acho que essa parte que eu queria ver se no livro de vocês está chamando assim também. Deixa eu olhar lá. Ah, no livro de vocês chama de p sobre dois. Mas não tem problema, não. Aí eu faço alteração no slide depois e coloco para ficar igual ao livro vocês. Vértice, foco, p sobre dois. No slide, eu estou chamando de p. Isso muda o que estamos estudando? Não! Vai mudar a forma de escrever a equação, na sua forma algébrica, mas não muda o elemento em si. Então vamos continuar pelo livro de vocês para não gerar confusão. Então, como é que a gente obtém a equação reduzida? Veja que, por definição, pelo que a gente discutiu agora há pouco, a distância de P [aqui é P maiúsculo, pois se trata do ponto] até o foco é a mesma distância de P até P linha, onde esse P linha é a projeção. Igualando essas distâncias e desenvolvendo, claro, elevando os membros ao quadrado, desenvolve o quadrado aqui, quadrado da diferença, aqui também, aqui também. Elimina os termos semelhantes. O que a gente obtém é uma equação com esse formato, olha: y igual a dois px [aqui p era minúsculo, pois estava representando o parâmetro], esta, y ao quadrado, esta é a equação reduzida de uma parábola com a concavidade voltada para a direita se o p for positivo, para a esquerda, se o p for negativo.

P: Aqui, deixa eu aproveitar para olhar para a carinha de vocês, que eu quero falar sobre isso. Aqui e inclusive é importante chamar a atenção do seguinte: quando estávamos no nono e no primeiro ano, parábola para a gente ou estava com a concavidade voltada para cima, ou com a concavidade voltada para baixo. Por quê? Porque lá nós estávamos trabalhando com conceito de função e para ser função a cada valor de x tinha que estar associado um único valor de y. Inclusive vocês faziam o teste da reta vertical. Percebam que nessa situação, quando eu passo uma reta vertical, corta em dois pontos. Portanto, isto não é uma função, não é a função parabólica, mas é uma parábola. Então, se eu tiver y ao quadrado igual a dois p, ou seja, se quem tiver o quadrado for o y, a concavidade ou está para a direita ou está para a esquerda. Se, ao contrário disso, quem estiver ao quadrado for o x, x ao quadrado menos dois p, ela vai estar com a concavidade voltada para cima ou voltada para baixo. Quando é que vai estar para cima? Quando o p for positivo. Para baixo? Quando o p for negativo. Então, se me permitem, deixa eu fazer um resumo do que temos até agora.

A2[a]: [00:42:30] Professor, o senhor pode repetir?

P: [00:42:32] Posso.

A25[a]: [00:42:34] Professor, e no caso quando ela é de um lado ou de outro, o sinal vai ficar como?

P: [00:42:40] Vamos lá. Nós estamos supondo, nessa primeira situação em que, olha lá para nossa imagem, que estamos supondo o vértice na origem, tá? Então deixa, eu escrever isso aqui. Num primeiro caso, estamos supondo V na origem, estamos supondo que o foco seja zero, p sobre dois [o ponto $\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$]. E que a diretriz y é menos p sobre dois. Vou até ajeitar esse p, porque ele é o p minúsculo sobre dois. Nesse caso, nossa equação é x quadrado igual a dois py. E aí temos a questão do sinal que acho que foi A25 que perguntou agora. Quando é que a gente vai ter a concavidade voltada para cima? Quando o p for positivo. Quando teremos a concavidade voltada para baixo? Quando o p for negativo.

P: Em um segundo momento eu tenho o vértice, ainda na origem, só que agora o foco vai estar à direita ou à esquerda, não acima ou abaixo. Portanto, o foco vai ser p sobre dois, zero [o ponto $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$]. Claro, neste caso, teremos que a reta diretriz x é igual a p sobre dois. Se meu p não vai ficar bonito nunca, então vai ficar só coisinha feia aí mesmo. Então nós vamos ter concavidade voltada para a direita quando o p for positivo e a concavidade voltada para a esquerda quando o p for negativo.

P: Percebam que a gente tira todas essas informações só olhando para a forma da nossa parábola. E aqui no exemplo de vocês tem logo no livro um primeiro exemplo, que é esse aqui: y ao quadrado é igual a seis x. Vamos construir esse exemplo. y ao quadrado é igual a seis x. E y ao quadrado é igual a $2px$. Nessa equação que escrevi aqui abaixo y ao quadrado é igual a seis x. Quem está fazendo o papel de dois p? Olhe para cá e olhe para cá.

A25[a]: [00:47:33] O seis?

P: [00:47:35] Dois p está fazendo o papel de seis. Portanto p vale três, tudo bem?

A25[a]: [00:47:51] Sim.

P: [00:47:55] Um número positivo. Se ele é positivo, a concavidade vai estar para a direita ou para a esquerda? Concavidade é abertura.

A25[a]: Direita?

P: Direita. [o professor abriu o Geogebra] Vou escrever exatamente aquela equação y ao quadrado é igual a seis x. Percebam o vértice na origem. Quando nós determinamos o valor de p. O que é que p me dá? Observem! p é a distância do foco até a reta. Então. Qual a distância do foco até o vértice? p sobre dois, logo o foco é três sobre dois, um e meio. Então vou colocar aqui no Geogebra só para a gente ver como fica bonito isso aqui. Percebe? Um e meio, p sobre dois. E quem vai ser a diretriz? A diretriz é uma reta que passa aqui ó. Se ela está vertical, então a sua equação é x igual p sobre dois, nesse caso, x igual a menos três sobre dois. Vou colocar aqui diretriz só para vocês verem a reta vertical. Essa é a diretriz, esse é o foco.

P: Pode também colocar aqui um ponto só para mostrar para vocês que a distância também dá um e meio. Então aquele valor três que nós encontramos é essa distância do vértice até o ponto três sobre dois, um e meio, e do vértice até a reta diretriz também um e meio. Logo nós vamos ter vértice zero, zero. Foco: três sobre dois, zero. Diretriz igual a menos três sobre dois. Quero chamar a atenção de vocês que se o foco está à direita, a diretriz está na esquerda. O foco fica na parte interna da nossa parábola e a diretriz na parte externa da parábola. Até aqui tranquilo para vocês?

A25[a]: Sim.

P: Vamos fazer outro então: x ao quadrado igual a menos oito y. Vejam se está com y ao quadrado, direita ou esquerda. Se está com x ao quadrado, cima ou baixo. Nessa equação, quem é que está fazendo o papel de dois p?

A25[a]: [00:52:57] [falou alguma coisa que não foi possível identificar].

P: [00:52:59] Como? Quanto?

A25[a]: [00:53:12] Eu tinha falado menos oito, mas acho que não é não, é porque agora está x, não sei.

P: [00:53:19] Mas é do mesmo jeito, independentemente se ela é em x ou y, o formato é o mesmo, percebe? O que muda se for o x ao quadrado: cima, baixo. Se for o y ao quadrado: direita, esquerda, ok? Portanto, quanto vale o p?

A25[a]: [00:53:48] Quatro?

P: [00:53:49] Menos quatro, que é menor que zero. Cima ou baixo? Concavidade voltada para cima ou concavidade voltada para baixo? [silêncio] Aqui, pessoal! Vocês estão aí? Estão aí, meninas?

A13[a]: [00:54:32] Pra cima.

P: [00:54:37] Chutou, não foi A13? Se o p for positivo, concavidade voltada para cima. Se o p for negativo, concavidade voltada para baixo, o p deu negativo, portanto, concavidade voltada para baixo. Então vou aproveitar aqui, deixar logo pronto o valor de p sobre dois. Quanto vale ele mesmo?

A25[a]: [00:55:06] No caso, vai ser menos dois, é?

P: [00:55:08] Exatamente. Então vamos lá, o vértice ainda é zero, zero. Mas quem é o foco? [silêncio]. p sobre dois...

A25[a]: É zero e p sobre dois, não?

P: [00:55:51] Isso. Zero, p sobre dois, então dá quanto?

A25[a]: [00:55:58] Zero e menos dois.

P: [00:56:01] Zero, menos dois. E a reta diretriz. Dá quanto?

A25[a]: [00:56:30] Menos menos dois, não?

P: [00:56:32] Exatamente. Fica quanto? Menos por menos, mais y igual a dois. Então veja a gente pôde determinar vértice, foco e reta diretriz. Vamos ver aqui no Geogebra. x ao quadrado menos oito y. Veja que aqui ficou realmente dois, não vou colocar esse outro tá, pessoal, vai dar dois também. Reta y igual a dois, confere. Vértice zero, zero confere e foco, zero e menos dois. Tranquilo parábola?

A25[a]: [00:57:45] Sim.

P: [00:57:47] Vou aproveitar e vou fazer o seguinte: vou fazer para vocês como aparece para gente, por exemplo, lá usando funções. Vamos aqui, por exemplo, usar função. Então, se nós considerarmos, por exemplo, a função f de x igual a x ao quadrado [$f(x) = x^2$]. Ah, professor, mas aqui não tem nada a ver com o que a gente está estudando. Será mesmo? Normalmente a gente chama esse f de x de quem?

A25[a]: [00:58:33] De y.

P: [00:58:34] y. A pessoa pode dizer ainda, mas professor ainda não está do jeito que a gente está estudando, porque do jeito que a gente está estudando, primeiro vem o termo que está um quadrado...

A25[a]: [00:58:50] É só trocar né? [aqui a aluna está se referindo ao tratamento realizado dentro do registro algébrico]

P: [00:58:51] Só trocar. Agora me digam nessa situação quem está fazendo o papel de dois p?

A25[a]: Um?

P: Exatamente. Dois p igual a um, portanto, quanto vale o p? Um sobre dois. Pessoal, se está nesse formato, a concavidade vai estar cima–abaixo, ou direita–esquerda?

A25[a]: [00:59:36] Cima–baixo.

P: [00:59:38] E com esse valor de p para cima ou para baixo?

A25[a]: [00:59:43] Pra cima.

P: [00:59:45] Para cima. Aproveitar o embalo para determinar logo quem é p sobre dois. Quem é p sobre de dois, pessoal? [silêncio] Um sobre dois dividido por dois. Repete a primeira multiplica pelo inverso da segunda: um sobre quatro. O que é que isso significa? Vamos lá? Vou fazer aqui primeiro só um esboço. Depois vamos no Geogebra tá? Concavidade voltada para cima. Foco. Diretriz. Que distância é essa que eu coloquei a chave? [silêncio]. Pessoal, essa distância é sempre o p sobre dois, tá? Então um sobre quatro. Ou se você quiser...

A25[a]:Um sobre dois.

P: Sobre quatro, tá? É sempre o p sobre dois, tudo bem? E essa distância também é um sobre quatro. Dito isso, quem vai ser o foco? [silêncio prolongado] Meninas?

A25[a]: [01:01:45] Zero e um sobre quatro?.

P: [01:01:48] Exatamente. E quem vai ser a minha diretriz? [silêncio] Se ela está na horizontal é x igual ou y igual? [silêncio] y, meu povo! Igual a quanto? Que distância é essa?

A25[a]: [01:02:30] Um sobre quatro?.

P: [01:02:31] Um sobre quatro, mas ele é positivo ou negativo? Aqui está o eixo x.

A25[a]: [01:02:43] Negativo.

P: [01:02:44] Negativo. Então veja que a ideia é muito parecida com o que a gente já fazia com a elipse, muito parecida com o que a gente já fazia em hipérbole. É reconhecer onde estão os elementos e, a partir daí, ir tirando os valores que a gente quer. Então, para esse exemplo nós tivemos: vértice zero, zero. Foco: zero, um quarto. E diretriz: menos um quarto. Vou só fazer uma conferência lá no Geogebra. Olha a distância aqui, pessoal: zero, vinte e cinco, um sobre quatro, né? Zero, vinte e cinco $[0,25]$. Ok. Mesma coisa aqui zero vinte e cinco. Até aqui tranquilo para vocês?

A25[a]: [01:04:13] Sim.

P: [01:04:16] O que acontece se eu não tiver o vértice na origem? Se o vértice não for mais a origem? Novamente, eu vou usar uma translação de eixos, aquilo que a gente já trabalhou, tanto para elipse quanto para hipérbole. E que translação de eixos é essa? Lembrem que a gente usa as seguintes fórmulas de transformação: x linha igual a x menos x zero. y linha igual a y menos y zero. O que é que isso muda para gente? As equações fazendo essas transformações vão ficar: x menos x zero ao quadrado igual a $2p$ que multiplica y menos y zero ou — lembrem isso aqui ele está para cima ou para baixo, porque quem está ao quadrado é a parcela do x — ou y menos y zero ao quadrado igual a dois p que multiplica x menos x zero. Neste caso, nós vamos ter concavidade voltada para a direita ou concavidade voltada para a esquerda? Acho interessante aqui a gente pegar uma questão do livro de vocês e resolver. Inclusive está no exercício. Pegando o exercício de vocês. Essa aqui resolve. Olha essa letra “a”, pessoal.

P: De graça nós tiramos já quem é o foco. Quem é o vértice pessoal? Quais são as coordenadas do vértice, vocês conseguem me dizer? [silêncio prolongado] Vou fazer o seguinte vou pegar essa imagem...

A25[a]: Três?

P: Só três? Vou pegar essa imagem e vou colocar lá na nossa telinha branca para a gente brincar um pouquinho com ela, tá? Então vamos lá. Esse é o exercício trinta e três, letra “a”. O gráfico é mais ou menos isso aqui. Eixo do x, eixo do y. Aqui eu tenho a reta diretriz. E em azul eu tenho a parábola. Vértice, foco. Ele dá as coordenadas desse foco: três e três. Então de graça eu já tenho que o foco é três, três. Essa diretriz, ele diz que passava pelo número um. Portanto, já sei que a equação da diretriz y é igual a um. Pessoal, o vértice lembrem que ele é o ponto médio entre o foco e o ponto da diretriz. Então se aqui é três e aqui é um, quanto vale aqui? [silêncio] Entenderam minha pergunta.

A25[a]: [01:10:21] Dois?

P: [01:10:23] Dois. Então me digam quem é o vértice?

A25[a]: [01:10:37] Três e dois.

P: [01:10:38] Três e dois. Eu tenho o vértice, então já posso escrever quase a nossa equação. Só falta descobrir quem é o p. Volta para cá e me diz o que é p sobre dois. Esse p sobre dois significa o quê no gráfico? [silêncio] Hein, pessoal. Esse p sobre dois significa o quê?

A2[a]: Distância.

P: Distância de quem para quem?

A2[a]: [01:11:29] Do vértice até o ponto F?

P: [01:11:32] Do vértice até o foco e do foco até a diretriz. p sobre dois. Vou escrever assim olha p sobre dois, p sobre dois. Então me digam quanto vale o p sobre dois? Está tudo na figura [silêncio]. p sobre dois é essa distância aqui, vale quanto, pessoal?

A25[a]: [01:12:36] Um.

A2: Vale um?

P: [01:12:38] Vale um.

A2[a]: [01:12:41] Então p é igual a dois.

P: [01:12:43] Exatamente. p é igual a dois. Percebam eu já tenho o p, já tenho o vértice, é só substituir. Portanto, temos x menos, quem é x zero? [silêncio] Quem é x zero? [silêncio] x zero e y zero são do vértice, pessoal. É o x do vértice e o y do vértice.

A25[a]: Três?

P: Dois p, então vai ficar quatro, tudo bem? y menos y zero, que é dois. Se quiser deixar aqui, beleza, essa é a equação reduzida, mas você pode fazer as multiplicações aqui. Porque eu quero chegar num canto interessante para gente fazer a ida e a volta aqui. Se eu desenvolver esses cálculos, eu vou ter x ao quadrado menos seis x mais nove, menos quatro y menos oito. Ou seja, quatro y é igual a x ao quadrado, menos seis x mais nove, menos oito, mais oito. Tá negativo, adicionei dos dois lados o oito, ficou positivo. Ora, mas isso significa? y é igual a um sobre quatro de x ao quadrado menos seis x mais dezessete. Eu não vou nem deixar assim, vou até escrever de outra forma aqui, deixar tudo dividido por quatro. x ao quadrado sobre quatro menos três x sobre dois. Simplifiquei, tá pessoal? Vou deixar tudo igual para não matar ninguém do coração [ele apagou e reescreveu a fração sem simplificar]: seis x sobre quatro mais dezessete sobre oito. Vocês reconhecem esse formato aqui?

A25[a]: [01:15:57] Equação de segundo grau.

P: [01:16:01] Quase.

A25[a]: Função.

P: Exatamente. Função polinomial do segundo grau ou função quadrática. De uma maneira mais geral, eu posso escrever a equação de uma parábola como sendo y é igual a x ao quadrado mais bx, mais c ou x ao quadrado é igual a a y ao quadrado, mais by mais c. Nesse primeiro caso com concavidade cima–baixo. Nesse segundo caso, que é a função quadrática. E, nesse caso, a equação é da parábola concavidade direita–esquerda.

[uma observação nesse ponto é que houve um equívoco quando à segunda equação, em que o x não deveria estar ao quadrado].

P: Por que foi que você escreveu isso a essa altura do campeonato para encerrar aula? Para dizer para vocês que a gente pode, assim como fizemos para a elipse e para a hipérbole, nós podemos sair de uma forma da equação, da geral para reduzida ou da reduzida para geral. E aí, nesses seis minutos que me restam, vou fazer um exemplo do livro de vocês e, no caso que está no exercício do livro, vocês. É esse aqui. Ok. Pessoal, escolham letra "d" ou letra "e".

A25[a]: [01:17:52] "e".

P: [01:17:53] Ok. Essa questão 40, já vou dizer aqui vai estar no exercício, caso vocês queiram dar uma treinada, tá? Basicamente, é para a gente determinar que tipo de cônica a gente está trabalhando a partir da equação geral. Então o objetivo em todas essas letras de a, b, c, d, e e f é você encontrar a equação reduzida e com a reduzida, dizer olha, isso é uma elipse. Isso é uma parábola. Isso é uma hipérbole. Nesse caso, estamos na "e", que foi a que vocês solicitaram. Por que só eu olhando de cara eu já sei que é uma parábola, vocês podem me dizer?

A25[a]: [01:18:39] Porque tem o x ao quadrado, o quatro x e o c?

P: [01:18:48] O y também está ao quadrado ou não?

A25[a]: [01:18:53] Não.

P: [01:18:56] Em todas as outras a, b, c, f, tanto o x está ao quadrado como y está ao quadrado. Nesse caso não, apenas uma delas está ao quadrado. Então, quando apenas uma delas está ao quadrado, eu tenho, então, uma parábola. Como é que eu faço para reconhecer se é uma elipse ou pelo menos do tipo elipse? Do tipo é uma conversa um pouco mais profunda, mas a gente falou sobre isso aqui nas nossas aulas. Lembram que quando a gente fazia a intersecção do plano, podia não dar uma das cônicas? Dar um ponto, dar uma reta? Seriam as degeneradas. Por isso que eu falo do tipo. Quando eu olho para essa letra “b”, eu percebo que tanto o x quanto o x têm o mesmo sinal. E os seus coeficientes têm valores diferentes. Só de olhar aqui a gente já diz: hum, isso é uma elipse. Da mesma forma, a gente reconhece uma hipérbole e assim sucessivamente. Então, vamos lá três minutinhos para fazer x quadrado, menos quatro x doze trinta e dois. Ok. Exercício 40, letra “e”. x ao quadrado menos quatro x menos doze y igual a trinta e dois. É isso. Ok. Estamos com a equação geral, vamos passar para a reduzida. Lembrem se eu quero escrever na reduzida, eu deixo tudo o que tem x de um lado, tudo que tem y do outro lado. Tudo que tem x no primeiro membro, por exemplo, e tudo o que tem y no segundo membro. Então vamos lá x ao quadrado menos quatro x igual a doze y mais trinta e dois. Esse primeiro passo tranquilo para todo mundo?

A25[a]: [01:21:06] Sim.

P: [01:21:08] O que é que nós vamos fazer? Nós vamos pegar o primeiro membro e vamos completar o quadrado. Já fizemos isso desde circunferência. Quem é que eu acrescento para virar um trinômio quadrado perfeito? [silêncio] Vocês lembram como é que faz? Qual é o termo que está só com x? O valor que está só com x?

A25[a]: Quatro. Menos quatro.

P: Beleza. Então vamos pegar o quatro dividir por dois. Dá quanto?

A25[a]: [01:21:50] Dois.

P: [01:21:52] E aí a gente pega esse valor e eleva o quadrado. Ou seja, se eu tivesse um x ao quadrado menos dez x, dez sobre dois dá cinco, ao quadrado 25. Então eu ia acrescentar 25. Nesse caso, eu vou acrescentar quatro. Fiz questão de relembrar, mas já fizemos isso bastante, com elipse, parábola, até com a hipérbole tem também nos exercícios. Então vamos lá: vou somar quatro. Claro, se eu somo quatro ao primeiro membro, então também tenho que somar quatro ao segundo membro. Pessoal, isto que restou no primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito. Qual é a sua forma fatorada? x o quê? [silêncio] Quem foi que a gente elevou ao quadrado para dar esse número aqui?

A25[a]: [01:23:16] O dois.

P: [01:23:17] O dois. x menos dois ao quadrado igual... aqui eu vou ter doze y mais trinta e seis. Dá para colocar o 12 em evidência pessoal? [silêncio] Colocando o doze em evidência, o que me resta é y mais três. Doze vezes três, trinta e seis. Então vejam o que é que a gente tem daqui. Logo, temos: a gente pode tirar o vértice. Quem é o vértice? Dois e menos três. Lembre troca o sinal, troca o sinal. Quem é que está fazendo o papel de dois p?

A25[a]: [01:24:35] Doze?

P: [01:24:36] Doze. Portanto, o p vale seis. O foco é você pegar o vértice e andar o valor de p para cima ou para baixo, nesse caso para cima, já que o p foi positivo. Maior que zero, concavidade voltada para cima, então vou ter vértice e vou ter foco. Então vejam o que muda aqui e o valor de y no foco. Então vou ter: foco. O x é o mesmo e o y, do menos três eu ando seis: menos três mais seis. Portanto, o foco é dois e três. Tranquilo?

A25[a]: [01:25:51] Sim.

P: [01:25:53] Só falta a diretriz. Lembrem que a diretriz você desce. O foco aqui você subiu, a diretriz você vai descer. Qual era o valor de y no foco?

A25[a]: [01:26:09] Três.

P: [01:26:12] Cuidado com o sinal.

A25[a]: [01:26:15] menos três.

P: [01:26:16] Menos três. Então vou tirar seis: menos três menos seis. Então a nossa é igual a menos três menos seis, menos nove. Ou seja, menos nove. Então vejam pessoal: o foco você somou seis e a diretriz você tirou seis. Fica claro por que isso?

A25[a]: [01:26:50] Sim.

P: [01:26:53] Como escrever isso aqui? Ver como é que fica? A equação era x quadrado menos quatro x mais doze y, no caso menos doze y, né? É menos ou é mais? Não lembro mais não. Menos doze y. x quadrado menos quatro x menos doze y igual a trinta e dois. Olha que lindinho aí. Vamos ver se nossas contas batem pessoal. Vértice? Bateu?

A25[a]: [01:27:51] Bateu.

P: [01:27:52] Foco. Opa, aqui deu bem maior né? Ah, tá tá. Eu estou acostumado a fazer com o outro, uma forma de vetorial. Quando eu saltei aqui, eu saltei os seis, mas lembrem que no livro de vocês — essa coisa de ficar trabalhando um dia no ensino superior e um dia no ensino médio, o juízo fica nos pés — três, beleza? A distância é o p sobre dois. Então vou acrescentar aqui o p sobre dois. E vou tirar o p sobre dois, que vai dar o menos seis. Coisas de quem fica trabalhando nos dois níveis no mesmo dia. Diretriz, y igual a menos seis. Então veja, tínhamos a nossa cônica. Determinamos o nosso vértice dois e menos três. Determinamos um nosso foco dois e zero. Determinamos nossa diretriz y igual a menos seis. Então, depois que encontra o p, acha o p sobre dois, que é o que você vai andar para cima e para baixo. Ok. Da mesma forma a gente faz se ele estiver concavidade voltada para a direita, para a esquerda, para baixo. Quem é que manda em direita–esquerda, cima–baixo? O p. Se o termo que está ao quadrado é o x e o p é positivo, cima, p negativo, baixo. Se quem está o quadrado é o y e o p é positivo direita. Eita! [o professor estava gesticulando as posições] Essa é a direita que vocês? Do vídeo?

A25[a]: [01:30:20] Sim.

P: [01:30:23] [risos] E se o p negativo para cá. Ok? Então se o p for positivo e for x ao quadrado cima, mas x ao quadrado p negativo baixo. y ao quadrado, p positivo direita, y ao quadrado p negativo esquerda. E aí eu sugiro vocês fazerem a letra "c", no caso letra "d", do exercício de vocês da questão 40. Faz do mesmo jeitinho tá pessoal? Deixa só o que tem y no primeiro membro passa todo o resultado para o segundo membro, completa o quadrado, fatora. O caminho vai ser exatamente análogo a esse aqui, completou quadrado, fatorou, encontrou os elementos. Encontrando os elementos, constrói o gráfico.

A25[a]: [01:31:29] Professor, a prova vai ser do conteúdo todinho desse quarto bimestre?

P: [01:31:34] Não vou colocar só três questões para vocês.

Nesse momento os alunos negociam a data da entrega da atividade avaliativa, não sendo relevante para nosso estudo, por isso optamos por não transcrever esse trecho que durou aproximadamente cinco minutos.

P: [01:36:41] Então galerinha, por hoje *solamente* nos encontramos quarta-feira só para encerrar a "bodega". Tá certo?

A2[a]: [01:36:52] Se tiver alguma dúvida com relação à atividade que o senhor vai postar, pode perguntar também?

P: [01:36:59] Pode. Manda lá no *WhatsApp*. Beleza pessoal vou parar a gravação. Até quarta! A gente se encontra só para encerrar a nossa "bodega".

ANEXO A – ATIVIDADE SOBRE CÔNICAS

Cônicas

*Obrigatório

1. E-mail *

2. * 25 por

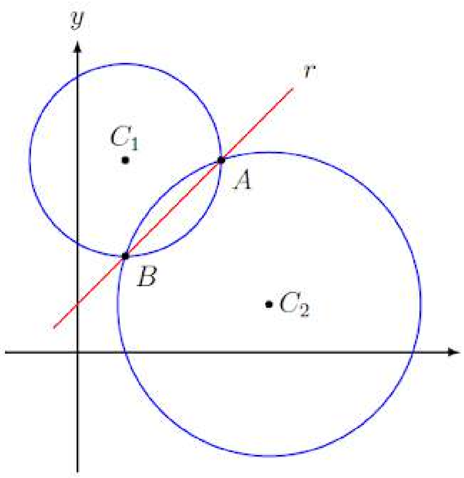
As equações das circunferências da figura são:

$$(I) \ : \ x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$
$$(II) \ : \ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

a) Ache as coordenadas dos pontos A e B;

b) Determine a equação da reta r;

c) Calcule a área do quadrilátero C_1AC_2B.



Arquivos enviados:

3. * 25 por

Determine todos os elementos da elipse $25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0$.

Arquivos enviados:

4. * 25 por

Determine a equação reduzida, o centro, os vértices, os focos, as equações d assíntotas e esboce o gráfico da hipérbole de equação

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$$

5. * 25 pontos

⚠ *Determine a equação da parábola cujo vértice é o ponto* $(3,4)$ *e cujo foco é o ponto* $(3,2)$*. Determine também a equação de sua diretriz.*

Arquivos enviados:

ANEXO B – OFÍCIO 07/2021 IFPB

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

OFÍCIO 7/2021 - DES/DDE/DG/CG/REITORIA/IFPB

Campina Grande 29/06/2021 .

Para: Sra. Elvira Carmem Farias Agra Leite

Assunto: **Permissão para pesquisa**

Sra. Elvira Carmen,

considerando:

1) o pedido de permissão para realização de pesquisa de Mestrado, enviado por email para a Diretoria de Desenvolvimento de Ensino;

2) a constante parceria entre nosso campus e a UEPB;

3) a importância e relevância de vossa pesquisa,

resolvemos permitir a realização da pesquisa, desejando êxito e que seja de rica contribuição, especialmente para a formação de professores de Matemática.

Atenciosamente,

Professor Cicero da Silva Pereira
Chefe do Departamento de Ensino Superior

Diretor substituto de Desenvolvimento de Ensino

Portaria 070/2021

DEPARTAMENTO DE ENSINO SUPERIOR -CAMPUS CG

ento assinado eletronicamente por:

ro da Silva Pereira, CHEFE DE DEPARTAMENTO - CD4 - DES-CG, em 30/07/2021 22:55:38.

cumento foi emitido pelo SUAP em 30/07/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/autenticar-documento/ e os dados abaixo:

Verificador: 210052
de Autenticação: c8f73012ce