UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

ELÍDIO RAIMUNDO DA SILVA JÚNIOR

UM ESTUDO SOBRE OS POLIEDROS DE PLATÃO, ARQUIMEDES, CATALAN E KEPLER-POINSOT E SUAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

CAMPINA GRANDE-PB
2022

ELÍDIO RAIMUNDO DA SILVA JÚNIOR

UM ESTUDO SOBRE OS POLIEDROS DE PLATÃO, ARQUIMEDES, CATALAN E KEPLER-POINSOT E SUAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Mestrado Acadêmico, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.
Linha de pesquisa: História, Filosofia e Sociologia das Ciências e da Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

CAMPINA GRANDE-PB
2022

S586u Silva Júnior, Elídio Raimundo da .
Um estudo sobre os poliedros de Platão, Arquimedes, Catalan e Kepler-Poinsot e suas construções no GeoGebra [manuscrito] / Elídio Raimundo da Silva Júnior. - 2022.
85 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida , UEPB - Universidade Estadual da Paraíba ."

1. Educação Matemática. 2. Poliedros. 3. Software GeoGebra. I. Título

21. ed. CDD 516.15

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

ELÍDIO RAIMUNDO DA SILVA JÚNIOR

UM ESTUDO SOBRE OS POLIEDROS DE PLATÃO, ARQUIMEDES, CATALAN E KEPLER-POINSOT E SUAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, curso de Mestrado Académico, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática. Linha de pesquisa: História, Filosofia e Sociologia das Ciências e da Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

Aprovado em 06 de abril de 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida – UEPB
Orientador

Pedro Sá

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá – UEPA
Examinador externo

John A. Fossa

Prof. Dr. John Andrew Fossa – UEPB
Examinador interno

Aos meus alunos, estes que são a fonte de minha motivação e dedicação em ser sempre o melhor professor possível, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a Deus que me permitiu concluir o mestrado em meio a uma pandemia que atingiu o mundo inteiro;

Aos meus pais, Elídio Raimundo da Silva e Mônica Barboza da Silva e Silva, que com tamanho esmero sempre estiveram presente e possibilitaram a minha trajetória acadêmica;

As minhas irmãs, Márcia Barboza da Silva e Jaqueline Barboza da Silva, que sempre me apoiaram e acreditaram em meu potencial;

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, pelas palavras de incentivo e orientação, que foram cruciais para a realização dessa pesquisa;

Aos professores que compõem a banca examinadora, Prof. Dr. Pedro Franco Sá e o Prof. Dr. John Andrew Fossa pela dedicação na leitura e sugestões que objetivavam melhorar, significativamente, essa pesquisa;

Aos meus amigos do mestrado, que durante esse período de pesquisa contribuíram com suas palavras de conforto;

Aos professores que compõem o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM - UEPB), que contribuíram de forma direta na minha vida acadêmica.

"A geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la."

Johannes Kepler

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo investigar as vantagens pedagógicas e as dificuldades da utilização do *software GeoGebra* na construção de diversas classes de poliedros durante um curso de formação continuada de professores de matemática da rede estadual da Paraíba. Os poliedros estudados durante o curso foram os de Platão, de Arquimedes, de Kepler-Poinsot e os sólidos de Catalan. Nos norteamos pela seguinte questão de pesquisa: Quais são as vantagens pedagógicas e as dificuldades na utilização do software *GeoGebra* para construção dos poliedros de Platão, de Arquimedes, de Kepler-Poinsot e dos sólidos de Catalan? O referencial teórico está baseado na obra de Euclides, *Os Elementos*. Observamos como ele definiu e abordou a construção dos poliedros regulares. A pesquisa é de natureza qualitativa, uma vez que está alicerçada na leitura do Livro XIII *d'Os Elementos* de Euclides. Os procedimentos foram desenvolvidos em três partes. Na primeira parte abordamos um pouco da história da geometria, ressaltando os poliedros e como este objeto matemático foi mencionado nas obras *Os Elementos,* de Euclides, e no *Timeu-Crítias*, de Platão. Nessa primeira parte também apresentamos um pouco acerca da forma composicional da obra prima de Euclides. Na segunda parte abordamos as dificuldades em definir poliedro, assim como as distintas concepções deste objeto matemático. Esclarecemos a diferença entre poliedros de Platão e poliedros regulares, que muitas vezes são conceitos utilizados como sinônimos. Apresentamos o conceito de poliedros duais, explicamos as características (número de faces vértices e arestas) dos poliedros regulares, arquimedianos, de Catalan e de Kepler-Poinsot. Na terceira parte apresentamos a interface do *GeoGebra,* as principais ferramentas utilizadas na construção das representações dos poliedros e a utilização do *GeoGebra* no ensino de geometria, em especial no ensino de poliedros. A partir das construções realizadas com o *GeoGebra* concluímos que o *software GeoGebra* promete uma construção das classes de poliedros estudadas de forma satisfatória para o desfecho docente no ensino desse conteúdo.

Palavras-chave: Educação Matemática; Poliedros; *GeoGebra*.

ABSTRACT

This research aimed to investigate the pedagogical advantages and difficulties of using the GeoGebra software in the construction of several classes of polyhedrons during a continuing education course for mathematics teachers in the state network of Paraíba. The polyhedra studied during the course were those of Plato, Archimedes, Kepler-Poinsot and Catalan solids. We are guided by the following research question: How can the use of GeoGebra software help mathematics teachers in their pedagogical practice? The theoretical framework is based on Euclides' work, The Elements. We observe how he defined and approached the construction of regular polyhedra. The research is qualitative in nature, since it is based on the reading of Book XIII of Os Elementos de Euclides. The procedures were developed in three parts. In the first part, we approach a little of the history of geometry, highlighting the polyhedra and how this mathematical object was mentioned in the works The Elements, by Euclid, and in the *Timaeus-Crítias*, by Plato's. In this first part we also present a little about the compositional form of Euclid's masterpiece. In the second part, we approach the difficulties in defining polyhedron, as well as the different conceptions of this mathematical object. We clarify the difference between Plato's polyhedra and regular polyhedra, which are concepts often used synonymously. We present the concept of dual polyhedra, explain the characteristics (number of faces, vertices and edges) of regular, Archimedean, Catalan and Kepler-Poinsot polyhedra. In the third part we present the GeoGebra interface, the main tools used in the construction of polyhedron representations and the use of GeoGebra in the teaching of geometry, especially in the teaching of polyhedrons. From the constructions carried out with GeoGebra, we concluded that the *GeoGebra software* promises a satisfactory construction of the polyhedron classes studied for the teaching outcome in the teaching of this content.

Keywords: Mathematics Education; Polyhedra; *GeoGebra*.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde o início da minha vida escolar gostava e sentia enorme facilidade em aprender matemática. Chegando aos anos finais do Ensino Fundamental, tive bons professores dessa área e eles me possibilitaram participar de diversas atividades que me ajudaram a desenvolver minhas habilidades de raciocínio lógico. Posso citar duas que foram decisivas na minha jornada: as Feiras de Ciências e os Projetos de Jogos de Tabuleiro (xadrez e damas). Chegando ao Ensino Médio tive um ótimo professor, Eduardo Barbosa da Silva, o qual me incentivou a estudar mais geometria e participar da OBMEP, sendo classificado por dois anos para a segunda fase, o que influenciou bastante na minha decisão de fazer o vestibular para ingressar no curso de Matemática na Universidade Estadual da Paraíba.

Fui aprovado no ano de 2012 e, durante os cinco anos de graduação, tive ótimos professores que serviram como fonte de inspiração. Um destes foi o Professor Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, meu orientador durante a graduação e, posteriormente, no mestrado, docente titular do Departamento de Matemática e docente pesquisador do Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB. Ele me convidou para participar do grupo de pesquisa Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT), onde diversos textos foram debatidos acerca da geometria e isso despertou meu interesse em aprofundar meus conhecimentos nesse ramo da matemática.

Ao ingressar no mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática já tinha uma vaga ideia do que seria o meu objeto de estudo. Conversando com meu orientador, fui convidado para auxiliá-lo em algumas atividades em uma turma de Pedagogia, no campus III da UEPB, localizado em Guarabira-PB. Na ocasião ajudei a turma a construir representações dos poliedros regulares utilizando a técnica do origami modular. Os alunos da turma gostaram demais da atividade e afirmaram que, com as representações dos poliedros, ficou mais fácil entender suas características (número de faces, vértices e arestas). Depois deste dia estava convicto que os poliedros seriam meu objeto de estudo na pesquisa do mestrado.

Ainda no primeiro semestre do mestrado estava cursando a disciplina Tópicos de Geometria e nela fui apresentado ao livro *Os Elementos,* reforçando que naquele semestre iríamos estudar um pouco dessa obra e do modelo euclidiano. Esse estudo possibilitou compreender melhor a geometria e influenciou diretamente em minha pesquisa. Decidi iniciar meus estudos acerca do tema poliedros tendo como pilar o livro *Os Elementos*.

Depois de concluída a revisão da literatura no catálogo de teses e dissertações da Capes, onde pesquisamos pela palavra poliedro, 275 pesquisas apareceram, tendo aparecido em dissertações e teses de áreas distintas, como de Ciências da Computação, Ciências Biológicas e Ensino. Já em nível de doutorado, apareceram Química e Biologia. As pesquisas onde esse objeto foi citado no título foram majoritariamente de Programas Pós-Graduação que oferecem cursos de mestrado profissional.

Filtramos a nossa leitura a partir do resumo dessas obras e selecionamos pesquisas que abordam a utilização de *softwares* de geometria dinâmica na construção de poliedros de distintas classes (Platão, Arquimedes, Catalan e Kepler-Poinsot) e pesquisas que utilizem outras metodologias para o ensino de poliedros com o intuito de melhorar os processos de ensino e aprendizagem da geometria, seja por materiais manipuláveis, seja pelos recortes históricos onde eles estão inseridos. Depois dessa averiguação, selecionamos as que mais poderiam contribuir para essa pesquisa. Após realizada essa seleção, verificamos que doze pesquisas apresentaram maior potencial em colaborar com nossa pesquisa. Observamos que os poliedros são pouco abordados e estudados. Essa revisão bibliográfica nos fez perceber que existem classes de poliedros que geralmente não são abordados nos livros didáticos, isso nos motivou a utilizá-los para responder à questão norteadora da pesquisa: Quais são as vantagens pedagógicas e as dificuldades na utilização do software GeoGebra para construção dos poliedros de Platão, de Arquimedes, de Kepler-Poinsot e dos sólidos de Catalan?

No Capítulo 1 iniciamos este trabalho abordando um pouco da história da geometria com enfoque nos poliedros, tendo como ponto inicial as menções presentes nas obras *Os Elementos* de Euclides e no *Timeu-Crítias* de Platão. Neste capítulo falamos um pouco acerca da forma composicional do livro *Os Elementos*, escrito pelo matemático Euclides. Abordamos o estilo de tradução adotado pelo professor Irineu Bicudo e salientamos o estudo realizado por Euclides acerca dos poliedros em seu Livro XIII, que serviram de prelúdio para nossa pesquisa. Também destacamos Platão como sendo um dos precursores no estudo dos poliedros. Em sua obra ele relacionou os cinco poliedros regulares com os elementos que, em sua concepção, compõem o universo.

No segundo capítulo, apresentamos a interface do *GeoGebra*, os ícones mais utilizados nas construções durante esta pesquisa, assim como enfatizamos as recomendações pelos documentos oficiais e os resultados apresentados pelas pesquisas em Educação Matemática a respeito da utilização de *software* na construção de poliedros.

No Capítulo 3 classificamos os poliedros entre convexos e não convexos, discutimos a respeito da forma composicional, das propriedades, relações e as representações de diversos tipos de poliedros, assim como lembramos as contribuições dos matemáticos que dedicaram parte de sua vida ao estudo de uma determinada classe de poliedros. Nesse capítulo apresentamos as classes de poliedros que nos interessa: os poliedros de Platão, Poliedros de Arquimedes, os sólidos de Catalan e poliedros de Kepler-Poinsot.

No capítulo 4 abordamos a realização de um curso de formação continuada para professores de matemática da rede estadual da Paraíba, ofertado pelo grupo de pesquisa Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT), ministrado pelo professor Elídio Raimundo da Silva Júnior. Este curso foi desenvolvido para que buscássemos dados a fim de verificar se, de fato, o uso do *GeoGebra* pode colaborar para um ensino adequado na construção das classes de poliedros estudados nessa pesquisa.

No Capítulo 5 apresentamos as considerações finais, concluímos que o *software GeoGebra* demonstrou grande potencial no ensino dos poliedros por meio de suas construções.

CAPÍTULO I: OS POLIEDROS NOS ELEMENTOS DE EUCLIDES E NO TIMEU-CRÍTIAS DE PLATÃO

Neste capítulo abordamos um pouco da história da geometria, ressaltando os poliedros e como este objeto matemático foi mencionado nas obras *Os Elementos,* de Euclides, e no *Timeu-Crítias*, de Platão. Explicamos um pouco acerca da forma composicional da obra-prima de Euclides e do estilo de tradução adotado pelo professor Irineu Bicudo ao traduzir *Os Elementos* diretamente do grego para o português.

1.1 Euclides ensinando como construir os poliedros regulares

Pouco se conhece a respeito da vida de Euclides, o que levou alguns pesquisadores a suspeitarem da real existência dele. O que sobreviveu da sua biografia foi contado muito depois de sua existência e, por não existirem relatos próximos ao período que ele supostamente viveu, aumenta o clima de dúvidas. Conforme Tomei (2006, p. 17):

> Se Euclides de fato viveu, seus anos ativos como cientista ocorreram por volta de 300 a.C. O que se diz dele é muito pouco e tardio. O primeiro comentador de seu trabalho, Proclo, é do século IV d.C. É dele praticamente toda a informação atribuída à figura histórica do autor dos *Elementos*. Euclides deve ter estudado com algum aluno do filósofo Platão (428-347 a.C.), em Atenas, e mudou-se para Alexandria, no delta do Nilo, em um período em que o Egito era governado por um grego Ptolomeu Soter.

Se acerca da vida de Euclides temos poucas informações, da sua obra prima, intitulada *Os Elementos,* temos muito a falar. *Os Elementos* é um livro originalmente escrito em grego por volta do século III a.C. Euclides fez uma compilação de muitos resultados conhecidos pelos gregos e foi capaz de organizá-los em ordem lógica. Mas, esses resultados reunidos por Euclides não representavam todo o conhecimento matemático da época. Conforme Garbi (2010, p. 57):

> Quem hoje lê os 13 livros tende a pensar que ali estava todo conhecimento matemático da época, mas, isso não é verdade: Euclides conhecia muitas coisas mais, as secções cônicas, por exemplo, não incluídas nos Elementos. Prova disso é que ele escreveu pelo menos os seguintes outros tratados: Falácias (Pseudaria), Dados sobre divisões (de figuras), Porismos, Superfícies que são Lugares Geométricos, Cônicas, Fenômenos, Óptica e Elementos de Música.

Euclides inicia *Os Elementos* com vinte e três definições, cinco postulados, e nove noções comuns. Dos cinco postulados, certamente, o quinto[1] é o mais conhecido. Sendo *Os Elementos* uma reunião de parte da matemática conhecida naquela época é difícil dizer quais ou se existem, teoremas que foram descobertos por Euclides. Conforme Roque (2012, p.164),

> É difícil identificar teoremas dos Elementos que tenham sido descobertos pelo próprio Euclides. Como já dito, discute-se mesmo até que ponto as demonstrações são de sua autoria. O teorema "de Pitágoras", por exemplo, era conhecido antes de Euclides, e seu conteúdo é objeto da proposição I-47. Proclo atribui a demonstração dessa proposição a Euclides, mas, ela pode ser vista como uma modificação da demonstração encontrada no livro VI-31, atribuída a Hipócrates, pois é usada na quadratura das lúnulas.

Ao todo, *Os Elementos* são divididos em treze capítulos, convencionalmente chamados livros. *Os Elementos* é o legado deixado por Euclides, considerado o pai da geometria, de acordo com Oliveira (2018, p.17):

> Euclides é considerado o pai da Geometria, não por ter sido a primeira pessoa a estudar esse campo da matemática, mas pelas inúmeras contribuições do seu livro *Os Elementos* para o desenvolvimento dos estudos em torno dela. Nos seis primeiros livros, por exemplo, voltados para o estudo da geometria plana, ele começou por afirmações básicas que, em linguagem geométrica, são chamadas de axiomas ou postulados e, a partir daí, provou outras proposições, que passaram a ser conhecidas por teoremas.

Graças ao modelo lógico dedutivo, talvez aprimorado por Euclides, que passaria a ser chamado de modelo euclidiano, a matemática ganhou em precisão. De acordo com Bicudo (2009, p.13):

> Se com Homero a língua grega alcançou a perfeição, atinge com Euclides a precisão. E o método formular, que consiste em usar um conjunto de frases fixas que cobrem muitas ideias e situações comuns, poderoso auxilio à memória em um tempo de cultura e de ensino eminentemente orais, serve para aproximar o geômetra do poeta e então mostrar que perfeição e precisão podem ser faces da mesma medalha.

A obra de Euclides não chegou aos nossos dias em sua fonte primária, mas, por meio de inúmeras traduções. Essas traduções nem sempre são de boa qualidade, às vezes com erros grosseiros de tradução, como salienta Tomei (2006, p. 22):

> As autoridades no assunto não esperam encontrar versões dos *Elementos* anteriores a seu primeiro comentador, Proclo, do século IV de nossa era. A primeira tradução para o latim deve ter ocorrido no século V, e as versões latinas da Idade Média eram

---

[1] E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

> substancialmente diferentes do original. Uma dessas traduções para o latim merece constar entre as piores de todos os tempos: o tradutor parece não saber nem grego nem matemática, chegando a traduzir por números as letras maiúsculas que denotam pontos nas figuras. Como atenuante, convém lembrar que os gregos, às vezes designavam números através de letras: alfa era 1, beta era 2 e assim por diante.

Às vezes, os problemas nas traduções d'*Os Elementos* não eram a pouca habilidade em matemática, nem a falta de domínio em traduzir. É o caso, de quando o tradutor era hábil nesses aspectos e ousava modificar a obra, de forma proposital, a fim de melhorá-la. De acordo com Tomei (2006, p. 24):

> A primeira edição de uma versão grega (de má qualidade, segundo Heiberg) ocorreu em 1530, na basileia. O autor já domina tão bem a teoria que altera as figuras sutilmente, com a intenção de tornar o desenho mais realista. Tacquet, na França, e Barrow, na Inglaterra, por volta de 1655, apresentaram versões resumidas que se espalharam pelas escolas, dando origem a centenas de livros didáticos de Geometria.

O professor Irineu Bicudo fez uma tradução diretamente do grego para o português e é essa tradução que utilizamos nessa pesquisa. Quando se trata de traduções de obras antigas, temos, segundo Bicudo (2009), dois estilos: um é a tradução à francesa, que possibilita uma interação maior entre o autor e o tradutor, em que este tenta melhorar o texto, se possível; e um segundo estilo, que é à alemã, que segue de forma mais rígida a tradução, obedecendo palavras e expressões utilizadas pelo autor e preservando ao máximo o texto original.

Algo que pode dificultar a compreensão dessa versão da obra de Euclides é o estilo de tradução adotado por Irineu Bicudo, que é uma tradução à alemã, algo mais fiel às palavras escritas por Euclides, sendo assim preserva seu vocabulário. Porém, ao mesmo tempo, esse estilo de tradução proporciona um sentimento de autenticidade na leitura de um dos livros mais importantes da humanidade. De acordo com Garbi (2010, p. 57): "Nenhum outro autor de livros-texto conseguiu êxito comparável a Euclides: seus *Elementos* são o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje".

Não é de admirar-se que quando começaram a fazer as primeiras impressões d'*Os Elementos*, imediatamente eram vendidas. De acordo com Tomei (2006, p. 24):

> Em 1482, Ratdolt, editor em Veneza, comenta, na apresentação da publicação, a falta de material desse tipo no extenso mercado de livros. Segundo ele, isso se devia à dificuldade de imprimir figuras. Em sua edição as figuras de fato estão presentes, margeando o texto. A versão escolhida é a tradução de Campanus, do árabe para o latim.

Em *Os Elementos* há demonstrações do início ao fim. E, sendo o próprio gênero demonstração algo geralmente complexo, temos, segundo Berlinski (2018, p. 61):

> Não se lê uma demonstração euclidiana com leveza. As etapas são fáceis porque cada etapa é pequena, mas etapas não podem ser saltadas, e é muito difícil manter em mente todas as etapas envolvidas numa demonstração. Um complexo diagnóstico diferencial em medicina ou uma súmula num contrato, tampouco são fáceis de ler, mas, uma demonstração euclidiana, embora simplificada por símbolos de abreviação, é mais difícil do que qualquer documento de medicina ou direito.

E isso cria uma atmosfera repleta de desafios e inspiração na mente do leitor, desse que é um dos livros mais importantes e, porque não dizer, o mais importante livro de Matemática. No prefácio da tradução d'Os *Elementos,* realizada pelo professor Irineu Bicudo, ele salienta sobre o que o leitor irá necessitar para a leitura da obra e o que alcançará ao fazê-la:

> Previno, que por fim, a quem possa interessar, que é preciso fôlego para acompanhar muitíssimas das demonstrações que aqui se encontram e determinação. Garanto, entanto, que vencida a inércia, ultrapassado o obstáculo, alcançado o objetivo com a compreensão do resultado, cabe à recompensa de ter mergulhado no próprio processo do que denominamos "pensar" e de haver podido aprendê-lo em toda a sua abrangência. (BICUDO, 2009, p. 13).

Desse modo, a leitura d'*Os Elementos* deve ser feita com dedicação, atenção e esmero para que assim seja compreendido, independentemente, de ser um matemático profissional ou apenas um curioso, que decidiu debruçar-se diante desse clássico. Mesmo *Os Elementos* não sendo considerado, por alguns, um livro didático, continua atraindo vários estudantes, sejam eles de matemática ou de outras áreas. Nele podem deslumbrar-se com demonstrações famosas, como a do teorema de Pitágoras ou a que existem apenas cinco poliedros regulares. De acordo com Berlinski (2018, p. 15-16):

> Durante mais de 2 mil anos, geometria significou geometria euclidiana e a geometria euclidiana era *Os Elementos*. É o mais antigo texto completo da matemática ocidental tradicional e o mais influente de seus livros-texto. O primeiro livro de *Os Elementos* contém 48 proposições, e o segundo, quatorze. Existem ao todo treze livros compreendendo 467 proposições, e mais dois livros de autoria incerta, atribuídos a edições mais antigas de Os elementos.

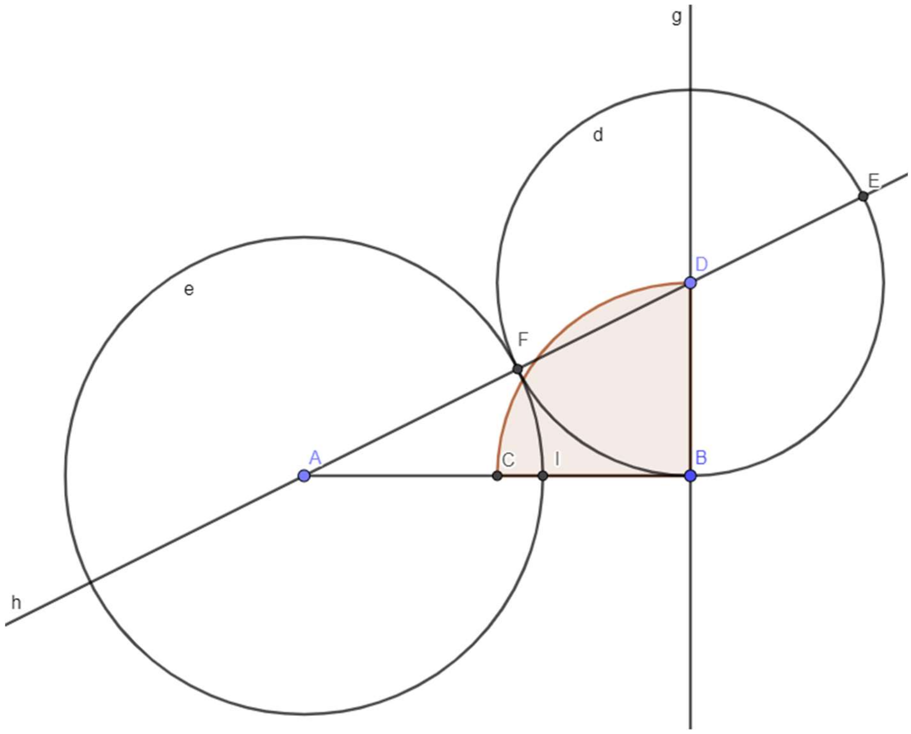
Geralmente os alunos, quando são apresentados aos poliedros regulares, ficam admirados com sua perfeição estética e podem começar a refletir sobre alguns fatos, como o motivo para existirem apenas cinco. Essa questão é muito antiga e os antigos matemáticos e filósofos gregos já pensavam nela, em especial Platão, que mesmo não sendo considerado um matemático por alguns historiadores, fez contribuições importantes, aperfeiçoando a lógica e os métodos empregados.

Euclides, no Livro XIII, trata de algumas demonstrações acerca dos poliedros regulares e uma dessas já tentava responder essa pergunta. Nesse livro temos dezoito demonstrações de tirar o fôlego, sendo as seis primeiras tratando do conceito de extrema e média razão, que é quando um segmento de reta é dividido de modo que a razão entre o segmento menor e o maior seja igual à razão entre o maior e o segmento todo. Ou seja, a razão áurea.

> Proposição 1: Caso uma linha reta seja cortada em extrema e média razão, o segmento maior, tendo recebido antes a metade da toda, serve para produzir o quíntuplo do quadrado sobre a metade.
> Proposição 2: Caso uma linha reta seja em potência o quíntuplo de um segmento em extrema e média razão, o segmento maior é a parte restante da reta do começo.
> Proposição 3: Caso uma reta seja cortada em extrema e média razão, o segmento menor, tendo recebido antes a metade do segmento maior, serve para produzir o quíntuplo do quadrado sobre a metade do segmento.
> Proposição 4: Caso uma linha seja cortada em extrema e média razão, os quadrados ambos juntos, o sobre a metade e o sobre o segmento menor, são o triplo do quadrado sobre o segmento maior.
> Proposição 5: Caso uma linha seja cortada em extrema e média razão, e seja adicionada a ela uma igual ao segmento maior, a reta toda foi cortada em extrema e média razão, e o segmento maior é a reta do começo.
> Proposição 6: Caso uma reta racional seja cortada em extrema e média razão, cada um dos segmentos é uma irracional, o chamado apótomo. (EUCLIDES, 2009, p. 563-568).

Para ilustrar o conceito de extrema e média razão, encontramos dois segmentos nessa proporção utilizando o *software GeoGebra*. Primeiramente traçamos o segmento de reta AB, em seguida encontramos o ponto médio de AB, que no caso é o ponto C, agora traçamos uma perpendicular passando pelo ponto B, em seguida traçamos um setor circular com centro em B, raio CB, e, delimitado pelo segmento AB e a perpendicular do segmento AB, o ponto D localiza-se na reta perpendicular, com medida igual à do segmento CB. O próximo passo é construir uma circunferência com centro em D e raio DB, em seguida traçamos um segmento de reta partindo do ponto A, passando pelo ponto D, tocando a circunferência em um ponto E. Por fim, construímos uma segunda circunferência com centro em A, tangente à primeira circunferência, tendo F como ponto em comum. Essa segunda circunferência intercepta o segmento AB em um ponto I. Agora temos dois segmentos em extrema e média razão, que são AI e IB.

Figura 1 - Segmento em extrema e média razão



Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

Na construção representada na figura 1, temos:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{AB}{AI} = \Phi$$

Esse número encontrado na razão entre esses segmentos chama-se número de ouro e é representado pela letra grega Φ (phi), que vale aproximadamente 1,618 e é conhecido desde a antiguidade. Ele foi muito utilizado na arquitetura grega em construções de templos. Nas artes se mostrou presente em pinturas, esculturas e desenhos, sendo, Mona Lisa, de Leonard da Vinci, um exemplo. De acordo com Launay (2019, p. 139):

> Os gregos usaram, sobretudo, na arquitetura. A fachada do Partenon, em Atenas, tem proporções muito próximas do retângulo de ouro e, embora seja difícil encontrar fontes fidedignas sobre a intenção dos arquitetos, é muito possível que não tenha sido mero acaso. O primeiro texto a definir claramente o número de ouro que chegou até nós é o livro VI de *Os Elementos* de Euclides.

Na natureza, esse número também pode ser observado, inclusive no corpo humano. Nos poliedros esse número também pode ser encontrado. Por exemplo, se pegarmos um dodecaedro e traçarmos as diagonais de uma das faces que é um pentágono regular, a razão entre uma diagonal e uma aresta é igual a Φ. De acordo com Launay (2019, p. 139):

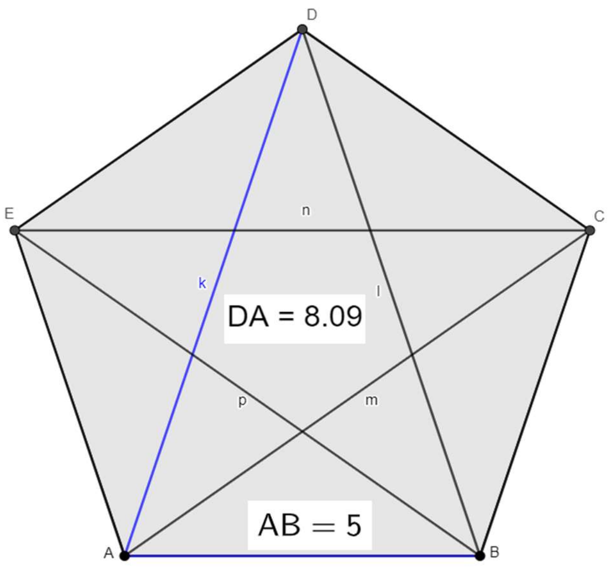
> Ele também aparece nos pentágonos regulares: a razão entre uma diagonal e um lado é precisamente igual ao número de ouro. Em outras palavras, o comprimento de cada uma das cinco diagonais é igual ao comprimento de um lado multiplicado por Φ. O número de ouro pode então ser encontrado em todas as estruturas geométricas que manifestam pentágonos. É o caso, por exemplo, da cúpula geodésica e das bolas de futebol que já vimos.

Desse modo podemos notar que o número de ouro está mais presente em nosso cotidiano do que imaginávamos. Cabendo a nós o ato de observá-lo com mais atenção. Ainda analisando a presença da razão áurea nos poliedros, podemos citar outra propriedade. De acordo com Landim (2014, p. 29):

> O Dodecaedro e o Icosaedro ainda têm outra propriedade bastante interessante com a influência do Número de Ouro, pois se observarmos um Dodecaedro inscrito em um Icosaedro ou um Icosaedro inscrito em um Dodecaedro, em ambos os casos, a razão entre os comprimentos das arestas dos dois sólidos tem medida de $\Phi^2/\sqrt{5}$.

Além da propriedade descrita anteriormente podemos salientar a razão presente entre as diagonais e as arestas das faces de um dodecaedro. Utilizando uma construção realizada com o *software GeoGebra* podemos observar que a medida de uma diagonal dividida pela medida de uma aresta é igual ao número de ouro.

Figura 2 - Número de ouro presente nas faces do dodecaedro

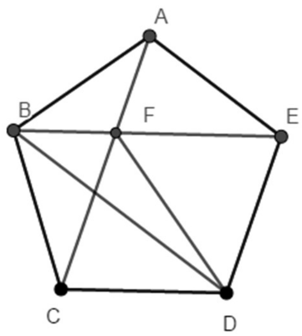


Fonte: Autoria própria (construção no GeoGebra).

A sétima e a oitava proposições exploram as relações entre ângulos e lados de um pentágono regular. Na sétima Euclides inicialmente constrói um pentágono regular ABCDE. Em seguida traça os segmentos AC, BE, BD e FD. O autor dos *Elementos* divide essa demonstração em duas partes. Na primeira prova que três ângulos consecutivos são congruentes e o pentágono é equiângulo. Na segunda prova que os três ângulos, não consecutivos, são congruentes e o pentágono é equiângulo.

Proposição 7: Caso os três ângulos de um pentágono equilátero, ou os consecutivos ou os não consecutivos, sejam iguais, o pentágono será equiângulo. (EUCLIDES, 2009, p. 569).

Figura 3 - Pentágono regular

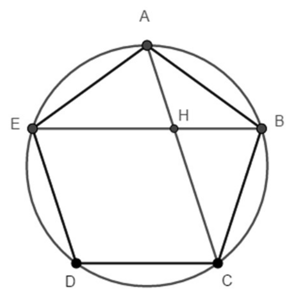


Fonte: Euclides (2009, p. 569).

Na oitava proposição ele constrói um pentágono ABCDE, inscrito em uma circunferência. Depois traça os segmentos EB e AC. Utilizando semelhança de triângulos consegue provar que os segmentos foram divididos em razão áurea e que os segmentos maiores são congruentes aos lados do pentágono.

Proposição 8: Caso retas estendam-se sob dois ângulos consecutivos de um pentágono equilátero e equiângulo, cortam-se em extrema e média razão, e os segmentos maiores delas são iguais ao lado do pentágono. (EUCLIDES, 2009, p. 570).

Figura 4 - Pentágono inscrito em uma circunferência

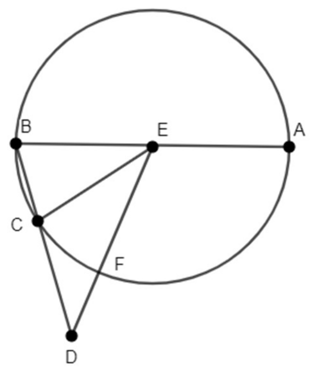


Fonte: Euclides (2009, p. 570).

Da nona à decima segunda proposições há um tratamento sobre figuras inscritas em círculos. Na nona proposição o autor realizou a inscrição dos lados de um hexágono e um decágono no mesmo círculo, também conseguindo obter a relação áurea.

Proposição 9: Caso o lado do hexágono e o do decágono, dos inscritos no mesmo círculo, sejam compostos, a reta toda foi cortada em extrema e média razão e o segmento maior dela é o lado do hexágono. (EUCLIDES, 2009, p. 571).

Figura 5 - Inscrição dos lados de um hexágono e um decágono no mesmo círculo

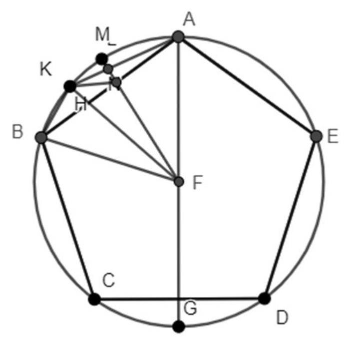


Fonte: Euclides (2009, p. 571).

Na décima proposição ele inscreve um pentágono regular ABCDE em um círculo, e utiliza primeiramente o conceito de reta perpendicular, depois utiliza as relações entre os lados e os ângulos, para conseguir provar que a partir de um dos lados do pentágono regular consegue construir um hexágono e um decágono.

Proposição 10: Caso um pentágono equilátero seja inscrito em um círculo, o lado do pentágono serve para produzir tanto o do hexágono quanto o do decágono, dos inscritos no mesmo círculo. (EUCLIDES, 2009, p. 572).

Figura 6 - Pentágono utilizado para construir um hexágono e um decágono

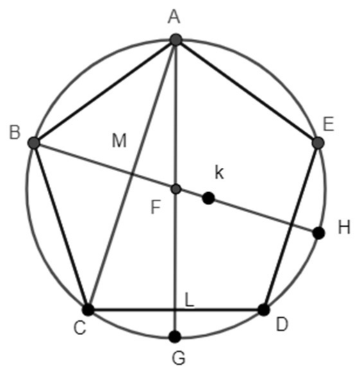


Fonte: Euclides (2009, p. 572).

Na décima primeira proposição Euclides constrói, habilmente, um pentágono inscrito em um círculo com o diâmetro um número racional. Está é uma demonstração um pouco mais longa, e requer um pouco mais de atenção nos detalhes. Ele utilizando relações entre os lados e os ângulos consegue demonstrar que o lado do pentágono é um número irracional.

Proposição 11: Caso seja inscrito, em um círculo que tem o diâmetro racional, um pentágono equilátero, o lado do pentágono é um irracional, a chamada menor. (EUCLIDES, 2009, p. 574).

Figura 7 - Pentágono inscrito em um círculo com o diâmetro um número racional

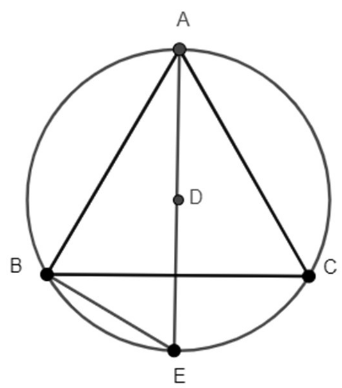


Fonte: Euclides (2009, p. 574).

Na décima segunda proposição Euclides constrói um triângulo equilátero inscrito em um círculo com centro em D.

Proposição 12: Caso um triângulo equilátero seja inscrito em um círculo, o lado do triângulo é, em potência, o triplo do raio do círculo. (EUCLIDES, 2009, p. 571-576).

Figura 8 - Triângulo equilátero inscrito em um círculo



Fonte: Euclides (2009, p. 576).

Da décima terceira à décima sétima proposição, Euclides aborda a construção dos poliedros regulares. De acordo com Baraldi (2018, p. 46):

> Especificamente, o último livro, livro XIII dos Elementos de Euclides, estabelece de forma metódica a constituição de 5 (cinco) poliedros regulares e rigorosamente nesta ordem, o tetraedro, o octaedro, o cubo (hexaedro), o icosaedro e o dodecaedro, demonstrando como cada uma dessas figuras pode ser inscrita em uma esfera.

Euclides nestas proposições norteou a construção de representações dos poliedros regulares contidos em esferas, utilizando construções com régua e compasso. De acordo com Euclides (2009, p. 577-586):

> Proposição 13: Construir uma pirâmide e contê-la pela esfera dada e provar que o diâmetro da esfera é em potência, uma vez e meia o lado da pirâmide.
> Proposição 14: Construir um octaedro e contê-lo por uma esfera, como nas coisas anteriores, e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, o dobro do lado do octaedro.
> Proposição 15: Construir um cubo e contê-lo por uma esfera, como a pirâmide, e provar que o diâmetro da esfera é, em potência o triplo do lado do cubo.
> Proposição 16: Construir um icosaedro e contê-lo por uma esfera, como as figuras anteriormente ditas, e provar que o lado do icosaedro é uma irracional, a chamada menor.

Na décima oitava proposição ele prova que existem apenas cinco poliedros regulares. Segundo Euclides (2009, p. 592), “exceto as cinco ditas figuras, uma outra figura sólida não será construída, contida por equiláteras e também por equiângulos”.

É importante salientar, que as construções realizadas por Euclides nos *Elementos* eram executadas apenas com régua e compasso. Porém, isso não significa que era algo realizado em todos os trabalhos dos matemáticos daquela época ou nos trabalhos das gerações consecutivas. De acordo com Roque (2012, p. 161):

> Referimo-nos especificamente aos *Elementos*, pois a restrição à régua e ao compasso não parece ser importante nem mesmo em outros escritos de Euclides. Essas regras de construção são enunciadas nos postulados do livro I dos *Elementos* – que tratam das construções permitidas – e constituem uma particularidade dessa obra.

Podemos indagar sobre o motivo da utilização exclusiva da régua e do compasso nos *Elementos,* isso pode ser visto por um ponto de vista mais filosófico, embasado na influência da filosofia platônica no trabalho de Euclides. Ou por uma ótica um pouco mais pragmática. De acordo com Roque (2012, p. 161):

> Veremos que, apesar do destaque desses postulados na organização dos *Elementos,* seu sentido seria de ordem prática, mais do que metafísica ou formalista. Como já dito, uma das explicações para o uso da régua e do compasso nessa obra pode ter

> sido de ordem pedagógica. As construções feitas desse modo são mais simples e não exigem nenhuma teoria adicional (como seria o caso das construções por meio das cônicas). Desse ponto de vista, a restrição não seria consequência de uma otimização: deve-se usar a régua e o compasso sempre que possível para simplificar a solução dos problemas de construção.

Então utilizando simplesmente régua e compasso ele conseguiu realizar todas as construções presentes em seu livro. Segundo Roque (2012, p. 160), “Euclides não afirma explicitamente, em lugar nenhum de sua obra, que as construções tenham que ser efetuadas com retas e círculos. Simplesmente elas são, de fato, realizadas desse modo”.

Fazendo uma breve análise comparativa entre a décima oitava demonstração presente em *Os Elementos* de Euclides, escrito há mais de dois mil e trezentos anos, e alguma obra contemporânea, é notória a discrepância quanto à linguagem. Enquanto no trabalho de Euclides ele demonstra usando a linguagem natural, com alguns termos em desuso pela matemática moderna e com o auxílio de figuras, nos livros atuais essa demonstração em particular utiliza a álgebra como pilar. Atualmente não é tão explorado o uso de figuras nas demonstrações como no período de Euclides, há uma exploração significativa da linguagem matemática com ênfase em procedimentos algébricos. Essa utilização de figuras nos *Elementos* foi salientada por Berlinski (2013, p. 77-78):

> *Os elementos* é fora do comum como um tratado matemático por ser meticulosamente ilustrado. Para cada teorema, há uma figura; e com raras exceções, as figuras são maravilhosas, com *Os elementos* proporcionando aos leitores uma série de engenhosos quadros geométricos: triângulos, círculos, quadrados, retângulos, linhas cruzadas ou em paralelo, as estáveis e familiares formas de arte e arquitetura, cada uma apresentada em isolamento, como auxiliar pedagógico ao texto.

Durante a análise dessa demonstração observamos que o repertório de leitura de quem ler esse gênero influencia diretamente na compreensão, uma vez que uma pessoa que não tem o hábito de ler demonstrações e não teve contato com esse gênero no âmbito escolar dificilmente será capaz de perceber e compreender o significado do discurso, concordando ou discordando daquilo que está sendo enunciado. Entretanto, apenas conhecer esse gênero não garante essa atitude responsiva, conhecer uma demonstração é uma condição necessária, mas não suficiente para se obter atitude responsiva do leitor. Desse modo, é necessário se colocar no contexto histórico e cultural do autor para um melhor entendimento, no caso da obra de Euclides que foi escrita em um período com outros costumes literários, assim como expressões, apenas conhecer o gênero pode não ser suficiente para essa atitude responsiva.

1.2 A associação entre os poliedros regulares e os elementos da natureza

O filosofo Platão, do período clássico da Grécia antiga, apresentou em seus diálogos Timeu-Crítias, um modelo de como seria a composição do universo e como ele estaria fora de proporção antes da interferência do demiurgo, que era um Deus que não teria criado o universo, mas, que o teria organizado e, diferentemente dos deuses do Olimpo, não interferia na vida das pessoas, apenas organizou o universo e se afastou de sua obra deixando os homens livres para viverem suas vidas sem interferência divina. Conforme Platão (2011, p. 41):

> Na verdade, antes de isto acontecer, todos os elementos estavam privados de proporção e de medida; na altura em que foi empreendida a organização do universo, primeiro o fogo, depois a água, a terra e o ar, ainda que contivessem certos indícios de como são, estavam exatamente num estado em que se espera que esteja tudo aquilo de que um deus está ausente. A partir deste modo e desta condição, começaram a ser configurados através de formas e de números.

Desta concepção de universo, ele fez uma correspondência entre os elementos terra, fogo, ar e água e os poliedros hexaedro, tetraedro, octaedro e icosaedro, respectivamente. Conforme Platão (2011, p. 41):

> É, por exemplo, através da estereometria que Timeu consegue deduzir as formas dos elementos, atribuindo a cada um a figura correspondente de acordo com as suas propriedades cinéticas: o cubo à terra, pois é, de entre os elementos, o que se move mais lentamente; o icosaedro à água; o octaedro ao ar; a pirâmide ao fogo. De forma análoga, a dedução destas figuras depende também de um raciocínio matemático: através da combinação dos triângulos-base (retângulo, equilátero e isósceles) mediada pela proporção, a geometria em plano passa a estereometria tridimensional (dando assim corpo às formas representáveis mentalmente e de forma abstrata. Em suma, ao apoiar-se nos ramos matemáticos da aritmética e da geometria, a mensagem teológica pode tomar corpo e tornar-se uma física filosófica, pois permite representar aquilo que não pode ser alcançado pelos olhos; trata-se de uma matemática teológica.

Platão, em sua obra, além de associar os poliedros regulares a estes elementos da natureza, também explicou como é constituído o tetraedro regular. Isso mostra que já existia uma preocupação em construir e definir os poliedros mediante determinadas características. Conforme Platão (2011, p. 142-143):

> Começamos pela primeira espécie, constituída como a mais pequena; o seu elemento é o triângulo, cujo comprimento da sua hipotenusa é o dobro do lado mais pequeno. Se justapusermos dois destes triângulos pela sua diagonal, fazendo isto três vezes, fixando no mesmo ponto - que servirá de centro – as diagonais e os lados mais

pequenos. Será gerado um único triângulo equilátero a partir de um número de seis triângulos.

Neste capítulo apresentamos um pouco da história da geometria, partindo da matemática grega, ressaltando os poliedros e como este objeto matemático foi mencionado em obras como em *Os Elementos* de Euclides e no *Timeu-Crítias* de Platão.

Explicamos um pouco acerca da forma composicional da obra prima de Euclides, comentamos cada uma das dezoito proposições presentes no livro XIII dos *Elementos*, enfatizamos os problemas nas traduções ao longo dos séculos, observamos que a linguagem utilizada por Euclides se distancia da atual utilizada pelos matemáticos, com muitas expressões em desuso e uma forma diferente de expressar-se comparada a nossa e salientamos o estilo de tradução adotado pelo professor Irineu Bicudo ao traduzir *os elementos* diretamente do grego para o português.

CAPÍTULO II: O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DOS POLIEDROS

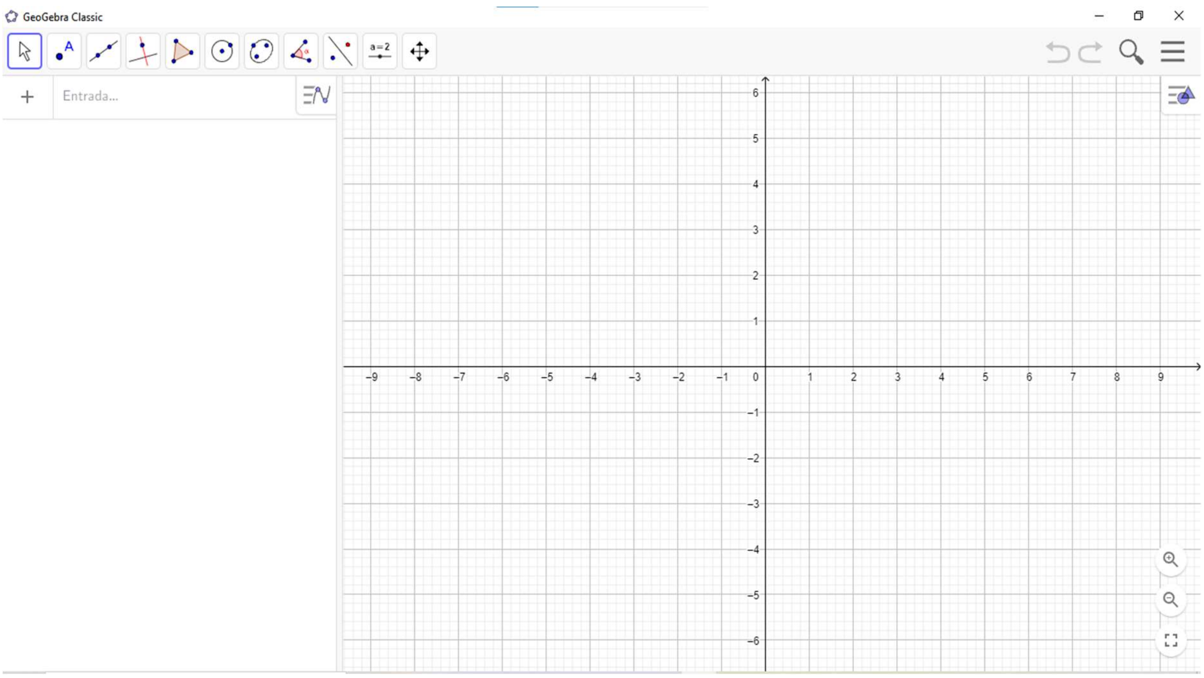
Neste capítulo fizemos uma breve apresentação do *GeoGebra,* mostramos sua interface*,* as suas ferramentas*,* e o potencial da utilização desse *software* para o resgate do ensino de geometria, em especial no ensino de diversas classes de poliedros.

2.1 Conhecendo o *GeoGebra*

Ao longo do tempo a interface do *GeoGebra* mudou um pouco, atualmente em sua versão 6.0, temos a barra de ferramentas na parte superior esquerda, logo abaixo localiza-se a barra de entrada. Local esse, onde se digitam comandos específicos. Temos ainda a janela de álgebra. É um local destinado a exibição das equações, coordenadas e medidas dos objetos construídos. E a janela de visualização 2D. Local destinado à visualização gráfica de objetos.

O usuário do *software* pode aumentar ou diminuir o tamanho dos objetos construídos clicando nos botões de mais e menos respectivamente. Também podemos maximizar a interface clicando no botão que, localiza-se logo abaixo dos botões de ampliar e reduzir.

Figura 9 - Interface do GeoGebra



Fonte: Autoria própria.

Markus Hohenwarter, o criador do *GeoGebra,* utilizou duas palavras como inspiração na hora de nomear o *software*, Geometria e Álgebra. Da aglutinação dessas palavras surgiu *GeoGebra*. De acordo com Lamas e Mendes (2017, p. 31):

> A origem da palavra *GeoGebra* vem da composição de duas áreas específicas da Matemática, Geometria e Álgebra. Criado, em 2001, por Markus Hohenwarter na Universitat Salzburg, o *GeoGebra* é um programa gratuito desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários recursos da geometria e da álgebra, assim como tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um ambiente visual. Desse modo, a vantagem didática do *GeoGebra* é de apresentar, ao mesmo tempo, representações geométricas e algébricas, em um plano, que interagem entre si.

O *GeoGebra* atualmente é utilizado como ferramenta pedagógica em diversos países. Esse sucesso se deve a alguns fatores que contribuíram para sua divulgação e utilização. Um desses fatores é o fato dele ser um *software* livre. "É um aplicativo livre (gratuito) facilmente encontrado na internet e com uma versão em vários idiomas inclusive o português Brasileiro". (MENEZES; BRAZ, 2019, p.22). Outro ponto relevante é a facilidade de utilização das ferramentas. Ainda podemos salientar o fato de estar alinhado com a tendência de inserção das Tecnologias educacionais nas aulas de Matemática. Segundo Lamas e Mendes (2017, p. 31-32):

> Por ser um *software* livre é permitido instalá-lo sem custos quaisquer e utilizá-lo, seja qual for o ambiente, principalmente na sala de aula. O *software GeoGebra* vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do pensamento matemático. Por meio da construção interativa de figuras e objetos geométricos, pode-se melhorar a compreensão dos alunos com a interação, visualização, percepção dinâmica de propriedade, estímulo heurístico à descoberta e obtenção de conclusões "validadas" na experimentação.

O sucesso do *GeoGebra* é internacional e isso resultou em vários prêmios, pelo seu potencial como ferramenta pedagógica nas aulas de Matemática pelo mundo inteiro, levando os alunos a conjecturar, visualizar e deduzir conceitos que são validados de forma prática com a utilização do *software.* Podemos ver alguns desses prêmios no site oficial do *GeoGebra* (https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT), acessado em 13 de fevereiro de 2022.

Archimedes 2016: MNU Award in category Mathematics (Hamburg, Germany); Microsoft Partner of the Year Award 2015: Finalist, Public Sector: Education (Redmond, WA, USA); MERLOT Classics Award 2013: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA); NTLC Award 2010: National Technology

Leadership Award (Washington D.C., USA); Tech Award 2009: Laureat in the Education Category (San Jose, California, USA); BETT Award 2009: Finalist in London for British Educational Technology Award; SourceForge.net Community Choice Awards 2008: Finalist, Best Project for Educators; AECT Distinguished Development Award 2008: Association for Educational Communications and Technology (Orlando, USA); Les Trophées du Libre 2005: International Free Software Award, category Education (Soisson, France); Comenius 2004: German Educational Media Award (Berlin, Germany); EASA 2002: European Academic Software Award (Ronneby, Sweden)

2.2 Utilização do *GeoGebra* no resgate do ensino de geometria

O ensino de geometria, por muito tempo preterido por professores de matemática, por diversas razões. Segundo Lorenzato (1995, p. 3), "a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas". E essa má formação do professor impossibilita o ensino adequado desse ramo da matemática. Uma vez que uma geração de professores que não estudou adequadamente geometria tem grandes chances de não ensiná-la e, ao não ensiná-la, transmitir sua deficiência para a próxima geração. Conforme Lorenzato (1995):

> Somente 8% dos professores admitiram que tentavam ensinar Geometria aos alunos. Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la.

Outra razão significativa para esse abandono de geometria por um longo período da história educacional brasileira se dá a organização dos conteúdos do livro didático, que muitas vezes trazia os conteúdos de geometria de uma forma muito desvinculada da realidade e algumas vezes no final do livro. E o fato de, em muitos casos, ele ser o único norteador do professor durante suas aulas. Conforme Lorenzato (1995, p. 4):

> A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos. E como a Geometria neles aparece? Infelizmente em muitos deles a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo.

Junte essas razões para o abandono da geometria com a promulgação da Lei 5692/71. Ela possibilitava às escolas uma maior liberdade quanto ao currículo das disciplinas, e os professores que já sentiam dificuldade ou simplesmente não gostavam de ensinar geometria, estavam amparados por ela para selecionar os conteúdos que eram ensinados e, desse modo, a deixavam de lado. De acordo com Pavanelo (1993, p. 7):

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão.

Mostramos os motivos que provavelmente levaram ao abandono de geometria até pelo menos o final da década de 1990. Salientamos que, antes de justificarmos a utilização do *software GeoGebra* no ensino de geometria, devemos justificar o próprio ensino de geometria. E isso é fácil de ser realizado, seja por uma questão epistemológica ou até mesmo do ponto de vista prático. De acordo com Lorenzato (1995):

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

Atualmente o ensino de geometria ganhou incentivo e encontrou nas Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) um ambiente propício para seu desenvolvimento. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) salienta o apoio da utilização de tecnologias durante a concepção do conhecimento matemático, inclusive ressalta que esse conhecimento deve auxiliar na resolução de problemas oriundos de outras áreas de conhecimento. De acordo com a BNCC (Brasil, 2017, p. 267), "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados". Observando a BNCC podemos notar que o *software GeoGebra* se encaixa perfeitamente no que ela propõe, desse modo deve ser utilizado nas aulas de matemática com o objetivo de melhorar o ensino de geometria. De acordo com a BNCC (Brasil, 2017, p. 545):

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Atualmente os alunos se sentem pouco atraídos pelas aulas mais tradicionais de matemática e uma boa alternativa para conseguir a atenção deles é a utilização bem planejada das TIC. Conforme Filho e Cruz (2020, p. 67):

> Uma nova possibilidade com o *GeoGebra* é que abre caminhos de modo a permitir aulas mais interativas, em que a matéria deixe de ser um fardo e a transmissão de conhecimento seja atingida. A nova dinâmica da tecnologia disponibiliza recursos para provocar mudanças em muitas áreas. Aparelhos eletrônicos, aplicativos e jogos são alguns exemplos de sistemas que possuem um tipo de tecnologia agregada, então, os professores buscam sugestões de tecnologias para manter concorrência mais igualitária.

Levando em consideração a importância da utilização de outros recursos pedagógicos a utilização do *GeoGebra* pode atrair a atenção dos alunos durante as aulas de matemática, em especial no ramo da geometria, pois, este possibilita uma visualização de forma dinâmica das representações dos objetos matemáticos estudados. De acordo com Silva (2018, p. 55):

> A utilização do software na sala de aulas amplia as possibilidades no processo de ensino e aprendizagem de Matemática devido a sua destacada presença na sociedade moderna e pelas possibilidades de sua aplicação. Em particular, no ensino de Geometria, os softwares de Geometria Dinâmica vêm ao encontro dessa proposta.

A capacidade de construção e alteração de objetos de forma dinâmica é uma potencialidade do *GeoGebra* salientada por Lamas e Mendes (2017, p. 31):

> O *GeoGebra* permite obter construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., também permite inserir funções e alterar os objetos dinamicamente, durante e após a construção finalizada. Equações e coordenadas também podem ser inseridas diretamente.

Ele permite que os alunos construam uma imagem mental mais nítida do que se fosse apresentada a mesma representação de forma tradicional com a utilização apenas do quadro negro e do livro didático. Conforme Almeida e Kaleff (2016, p. 4):

> Nesse sentido, a página de um livro ou a lousa, em geral, não são os instrumentos mais apropriados para auxiliar a visualização de objetos tridimensionais. No entanto, na maioria das vezes, o professor dispõe apenas do livro didático como ferramenta ao ensino da geometria.

Reforçando essa questão da vantagem do uso do *GeoGebra* nas aulas de Matemática em relação à utilização do papel e do quadro temos alguns benefícios evidentes apontados por Lamas e Mendes (2017, p. 32):

> O uso do *GeoGebra* na sala de aula traz muitos benefícios em relação ao trabalho no papel ou no quadro, como movimentar as figuras em distintas direções, aumentar e diminuir o tamanho da figura, comparar e voltar ao aspecto inicial. Vários conteúdos podem ser abordados de forma dinâmica em sala de aula com a utilização do *GeoGebra*.

Conhecendo a realidade das escolas, cabe aos professores de matemática analisar se é adequado o uso de *softwares* de geometria dinâmica, uma vez que nem sempre os professores encontram um ambiente propício para desenvolver atividades que requerem o uso de computadores, *tablets* ou celulares. Desse modo, sempre que for possível, é enriquecedor ao processo de ensino de geometria o uso da tecnologia aliada a materiais concretos.

Neste capítulo apresentamos o que a literatura aponta como as possíveis razões para o abandono do ensino de geometria no Brasil. Destacamos o insuficiente domínio de tópicos relacionados à Geometria, por parte dos professores, a organização dos conteúdos do livro didático, o apego dos professores pelo livro didático na hora de planejar suas aulas, a promulgação da lei 5692/71, que possibilitou aos professores escolherem os assuntos a serem ensinados e o potencial da utilização do *software GeoGebra* no resgate desse ramo da matemática, em especial no ensino de poliedros.

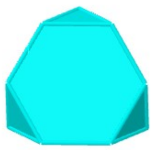
CAPÍTULO III: DOS POLIEDROS DE PLATÃO AOS DE KEPLER-POINSOT

Neste capítulo abordamos as dificuldades em definir poliedro, assim como as distintas concepções deste objeto matemático. Esclarecemos a diferença entre poliedros de Platão e poliedros regulares, que muitas vezes são conceitos utilizados como sinônimos. Apresentamos o conceito de poliedros duais, explicamos as características (número de faces, vértices e arestas) e a forma de obtenção dos poliedros regulares, arquimedianos, de Catalan e de Kepler-Poinsot. E analisamos se esses poliedros satisfazem a relação de Euler.

3.1 Definição de Poliedro

Na Grécia Antiga já se tinha uma noção do que são poliedros, já eram estudados por matemáticos como Euclides, Arquimedes e Teeteto. No entanto, a ideia que esses matemáticos possuíam deste objeto matemático deixava muitas lacunas. Atualmente ainda existe uma enorme dificuldade em se definir poliedro. De acordo com Almeida (2010), existem três concepções para poliedro. Para alguns matemáticos, ele é entendido como algo sólido, para outros como algo vazio em seu interior e ainda existem aqueles que concebem poliedro como sendo apenas a estrutura. No quadro abaixo temos as representações das três concepções de poliedro.

Quadro 1 - Representações das diversas concepções de poliedro

Representação de poliedro	Concepção de poliedro
	Como estrutura
	Com o interior vazio (oco)
	Como sólido

Fonte: Autoria própria.

Almeida (2010) salienta a presença dessas distintas concepções presentes nos livros didáticos. Sabemos que o livro didático desempenha muitas vezes um papel de norteador do professor no que diz respeito ao modo como o conteúdo é abordado. Assim, um professor pode utilizar uma representção de poliedro feito com canudos de plástico e isto gerar a ideia de que ele é apenas a estrutura. Outro professor pode, por exemplo, levar representações de poliedros feitos de acrílico e isto levar os alunos a construirem uma ideia de poliedro como sendo de interior vazio (oco). Ainda pode ter um professor que resolva levar massinha de modelar e pedir que os alunos construam um poliedro com aquelas características apresentadas na aula e isso levar os alunos à conclusão que o poliedro é algo maciço. Estes exemplos servem para explicitar que o modo como o professor aborda o tema pode levar o aluno a criar uma ideia do objeto matemático.

Temos que o conhecimento empírico adquirido pelos alunos durante as situações ilustradas acima pode ser aperfeiçoado com o auxílio do professor durante o processo de ensino, porém, é importante enfatizar a definição formal de poliedro para que desse modo os alunos compreendam melhor o objeto estudado. De acordo com Carvalho (2005, p. 10):

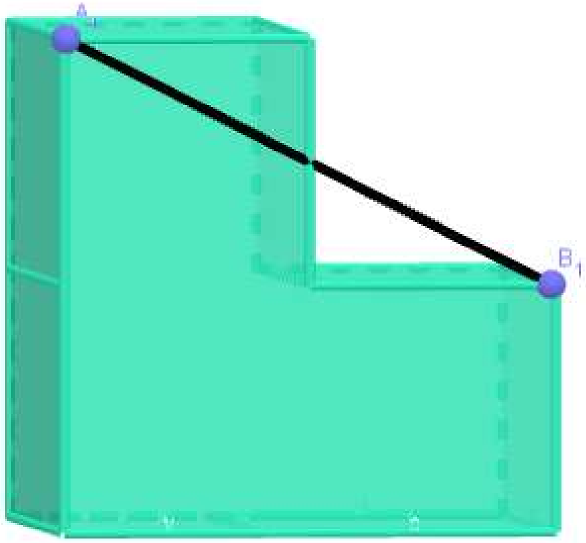
> Um poliedro é toda região do espaço delimitada por um conjunto de polígonos planos, chamados faces do poliedro, que satisfazem as seguintes condições:
> - A interseção de dois polígonos é vazia ou é um vértice comum aos dois ou é um lado (ou aresta) comum aos dois.
> - Cada lado de um polígono é lado de exatamente mais um outro polígono.

Depois de compreender a definição formal de poliedro e analisar concepções distintas para esse objeto matemático é conveniente incluir outros tópicos relevantes ao estudo de poliedros, como a classificação em convexo ou não convexo.

3.2 Poliedros convexos e não convexos

É importante enfatizar que podemos classificar os poliedros em dois grandes grupos, os poliedros convexos e os poliedros não convexos. De acordo com Lima (2006), um conjunto C, do plano ou do espaço, diz-se convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Na Figura 9 temos uma ilustração de um poliedro, onde, o segmento de reta determinado pelos pontos A e B não está completamente contido na região delimitada pelo poliedro. Logo, este poliedro é não convexo.

Figura 10 - Segmento de reta em poliedro não convexo



Fonte: Autoria própria.

Na tabela abaixo mostramos uma categorização dos poliedros estudados nesta pesquisa. Nela, além da diferenciação entre convexo e não convexo, apresentamos a quantidade de poliedros pertencentes a cada classe de poliedros.

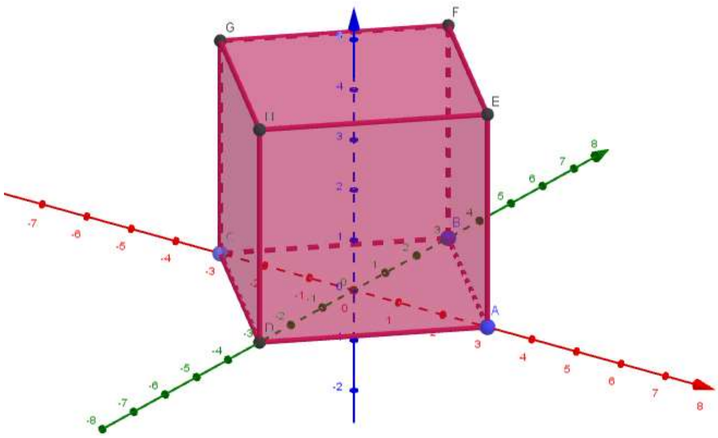
Tabela 1 - Classificação das classes de poliedros em convexos e não convexos

Classe de poliedros	Convexo	Não convexo	Quantidade
Regulares	sim	não	5
Arquimedianos	sim	não	13
Sólidos de Catalan	sim	não	13
Poliedros de Kepler-Poinsot	não	sim	4
Total			35

Fonte: Autoria própria.

Para ilustrar como é simples obter um poliedro não convexo, construímos um a partir de um poliedro convexo. Para isso utilizamos o *softwawe GeoGebra* na versão 6.0. Primeiramente digitamos na caixa de entrada as coordenadas dos pontos A e B, sendo A=(3,0,0) e B=(0,3,0). Em seguida, digitamos Cubo (<A>,<B>) e construímos uma representação de um cubo com dois dos seus vértices nos pontos A e B. Esse mesmo resultado pode ser obtido utilizando a ferramenta Cubo, localizada no menu de ferramentas.

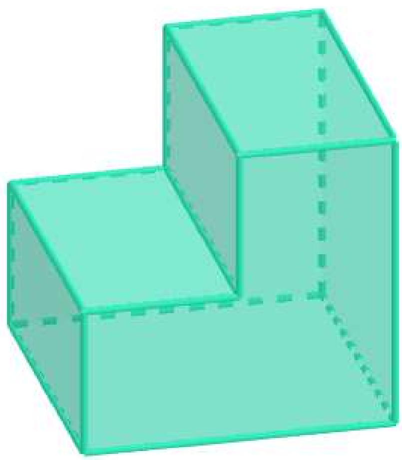
Figura 11 - Cubo



Fonte: Autoria própria (Construção no *GeoGebra*).

Escolhemos a opção ponto médio ou centro e clicamos em todos os vértices do cubo e em quatro das faces. Esses pontos serviram para nortearem na construção das faces do poliedro não convexo. Depois selecionamos a opção polígono e determinamos as faces. Para finalizarmos a construção, mudamos as cores das faces e ocultamos o cubo e todos os pontos. Construímos um poliedro não convexo com oito faces, dezesseis arestas e dez vértices. Podemos observar que ele obedece à relação de Euler.

Figura 12 - Poliedro não convexo



Fonte: Autoria própria (construção no GeoGebra).

3.3 Poliedros regulares e poliedros de Platão

Antes de diferenciarmos um poliedro de Platão de um poliedro regular apresentamos um pouco da vida e obra de Platão. Sabe-se que ele nasceu em Atenas por volta de 428 a.C. e morreu no ano de 347 a.C. na mesma cidade. Ele pertencia a uma família nobre e, por várias vezes, exaltou seus familiares em suas obras de forma a prestigiá-los. De acordo com Zingano (2005, p. 20-21):

> Platão (o nome provém do fato de ter ombros largos) nasce no momento certo, no lugar certo. Era membro de uma família aristocrática ateniense e parecia orgulhoso disso: faz de seus irmãos, Gláucon e Adimanto, os interlocutores de Sócrates em um de seus célebres diálogos, *A república.* Entre seus parentes estão Crítias e Carmides, diretamente envolvidos com a tirania que governou Atenas após a derrota na guerra civil e aos quais Platão dedica também diálogos seus (*Crítias* contém o famoso mito de Atlântida; *Carmides* versa sobre a virtude moral).

Platão foi discípulo do filósofo Sócrates que no ano de 399 foi condenado à morte, acusado pelo general Alcibíades de influenciar alguns jovens a conhecerem novos deuses, o que era considerado algo extremamente grave. Após a morte de seu mentor, ele decidiu ir para a cidade de Megara, que não era longe de Atenas. Com sua partida, seguiram-no alguns dos discípulos de seu mestre, isso mostra que ele representava um papel importante no grupo e passava segurança e respeito aos colegas. Mais tarde, ele fundou sua própria escola, tendo como discípulos alguns dos mais importantes pensadores da Grécia naquele momento. Nesta escola ele compartilhava com seus discípulos sua paixão em ler a natureza utilizando a matemática. De Acordo com Zingano (2005, p. 37-38):

> O interesse de Platão por esses temas provinha do fato de que buscava um modelo matemático do mundo e isso o fez aproximar-se dos discípulos de Pitágoras, cuja influência difusa e constante em Platão deriva justamente dessa aposta em comum de ler a natureza por meio dos caracteres matemáticos. Ler a natureza por meio da Matemática significa para Platão encontrar, por trás do perpétuo fluxo de objetos sensíveis, uma estrutura permanente, propriamente racional, que se furta à geração e corrupção. A esfera matemática é perfeita, imutável, tendo sempre as mesmas relações; as esferas reais, como uma bola de futebol ou uma bola de gude, são imperfeitas, mutáveis e suas relações dependem das modificações que sofrem.

Da ideia de criar um modelo matemático do mundo, Platão propôs uma teoria que associava os poliedros regulares aos elementos primordiais. Mesmo esta classe de poliedros sendo chamada de poliedros de Platão, não foi ele o primeiro a estudá-los, nem a provar que existem apenas cinco. De acordo com Launay (2019, p. 53):

> Teeteto de Atenas é um matemático do século IV antes da nossa era, e é a ele que se atribui em geral a descrição completa dos poliedros regulares. Teeteto se interessou particularmente pelos poliedros de simetria perfeita, ou seja, aqueles que têm todas as faces e todos os ângulos iguais. E sua descoberta é no mínimo desconcertante: ele encontrou apenas cinco, demonstrando que não existem outros. Cinco sólidos e pronto! Nem um a mais.

Isso pode levar o leitor a questionar-se sobre a razão dessa classe de poliedros serem chamados dessa forma e não Poliedros de Teeteto. Realmente existe um bom motivo. De acordo com Launay (2019, p. 54):

> De Platão? E por que não de Teeteto? A história às vezes é injusta, e os descobridores nem sempre são aqueles que recebem as homenagens da posteridade. O filósofo ateniense não tem nada a ver com a descoberta dos cinco sólidos, mas os celebrizou com uma teoria que os associa aos elementos do cosmo: o fogo é associado ao tetraedro; a terra, ao hexaedro; o ar, ao octaedro; e a água, ao icosaedro. Quanto ao dodecaedro, com suas faces pentagonais, Platão afirmava que se tratava da forma do universo.

Então, o que levou a serem chamados de poliedros de Platão se deu à associação entre eles e os elementos do cosmo, eternizando assim seu nome na nomenclatura dessa classe de sólidos. Quanto ao nome de quem primeiro os estudou não ter ficado registrado para a posteridade talvez seja explicado pelo fato desses poliedros serem conhecidos muito antes de Platão e até mesmo do próprio Teeteto. De acordo com Launay (2019, p. 54):

> Para sermos honestos, devemos dizer que Teeteto tampouco foi o primeiro a descobrir esses cinco sólidos. Foram encontrados modelos esculpidos ou descrições escritas muito mais antigas. Uma coleção de bolinhas de pedra esculpida reproduzindo as formas dos sólidos de Platão foi encontrada na Escócia, e dataria de dez mil anos antes do matemático grego! Essas peças são atualmente conservadas no Museu Ashmolen de Oxford.

Mesmo que Teeteto não tenha sido o pioneiro no estudo desses poliedros, ele fez uma grande contribuição, que foi provar que existem apenas cinco. E isso merece ser salientado, uma vez que foi um passo importante e possibilitou aos matemáticos que os sucederam preocupar-se com outros problemas. De acordo com Launay (2019, p. 54):

> Quer dizer então que Teeteto não é mais importante que Platão, no caso? Ele também seria um impostor? Não exatamente, pois, se as cinco figuras já eram conhecidas antes dele, ele foi o primeiro a demonstrar claramente que a lista estava completa. Não adianta procurar mais, nos diz Teeteto; ninguém jamais será capaz de encontrar outras. A afirmação tem algo de tranquilizador. Ela nos tira uma dúvida terrível. Ufa! Está tudo aí.

A teoria de Platão pode ter inspirado Kepler, que formulou um modelo cosmológico baseado nos poliedros de Platão. Até aquele momento eram conhecidos apenas seis planetas (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno) Kepler acreditava que eles estavam orbitando o sol e que essas órbitas estavam circunscritas em esferas que envolviam os cinco poliedros. Conforme Martineau (2015, p. 38), "Kepler tentou usar um dodecaedro para espaçar as órbitas de Marte e da Terra, e um icosaedro para espaçar a Terra de Vênus".

De acordo com Hawking (2005), ele nasceu no dia 27 de dezembro de 1571, na cidade de Weil der Statdt em Wurttemburg (agora parte da Alemanha), filho de Heinrich e Katherine. Desde cedo demonstrou grandes habilidades para os estudos. Conforme Hawking (2005, p. 101):

> Apesar de uma infância dolorosa e cheia de ansiedade, Kepler, obviamente talentoso, logrou assegurar-se uma bolsa destinada a meninos de bom potencial e parcos recursos, residentes na província alemã de Swabia. Kepler frequentou a escola alemã Schreibschule em Leonberg antes de se transferir para uma escola de latim que usaria futuramente em seus escritos. Frágil e precoce, Kepler apanhava rotineiramente dos seus colegas, que o consideravam um sabe-tudo levando-o a buscar um refúgio nos estudos religiosos.

Posteriormente Kepler ingressou na universidade de Tubingen, lá cursou Teologia e Filosofia e se dedicou ao estudo da matemática e da astronomia. Muitos séculos depois de Platão ter utilizado os poliedros regulares para representar os elementos primordiais, água, terra, fogo e ar, que na concepção dele por meio de combinações adequadas formavam todos os corpos. Veio Kepler que concebeu a ideia de utilizar os poliedros regulares para representar as órbitas dos planetas conhecidos na época (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno). De acordo com Tomei (2006, p. 81-82):

> O astrônomo Kepler descreveu uma teoria que associava o raio das órbitas de vários planetas aos raios das esferas circunscritas a poliedros regulares, um disposto dentro do outro em uma sequência especial, que por sua vez identificava cada planeta a um poliedro.

Poliedro regular e poliedro de Platão, conceitos que são empregados muitas vezes de forma equivocada como sendo sinônimos. Analisamos ambas as definições a fim de destacar suas diferenças. Um poliedro convexo é regular se suas faces são polígonos regulares e congruentes e em cada vértice concorre o mesmo número de arestas

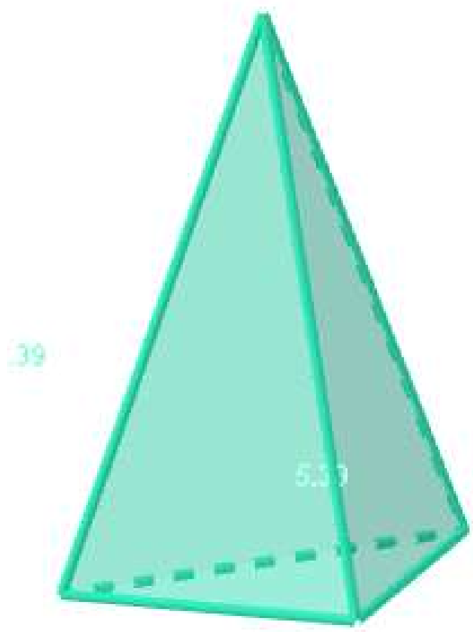
De acordo com Iezzi (2017), um poliedro é chamado poliedro de Platão se satisfaz três condições:

- Todas as faces possuem o mesmo número de arestas;

- Todos os vértices são pontos onde concorrem o mesmo número de arestas;
- O poliedro é euleriano, isto é, satisfaz a relação de Euler.

Os cinco poliedros regulares atendem a essas condições, sendo assim todos são de Platão. Segundo Machado (2000), “todos os poliedros regulares satisfazem a essas exigências, mas, podemos ter poliedros que atendem às exigências e não são regulares”. Como exemplo temos um tetraedro não regular: ele possui em cada face três arestas, em cada vértice concorrem três arestas e é fácil observar que o número de vértices somado com o número de faces e subtraído do número de arestas resulta em dois, ou seja, ele obedece à relação de Euler. Sendo assim chegamos à conclusão que todo poliedro regular é um poliedro de Platão, mas, nem todo poliedro de Platão é regular.

Figura 13 - Tetraedro não regular



Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

Vale a pena enfatizar que Euclides no Livro XI define o que é Pirâmide (tetraedro), octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro. Segundo Euclides (2009, p. 482), “Pirâmide é uma figura sólida contida por planos, constituída a partir de um plano até um ponto”. Pelo que está exposto na obra, percebemos que a pirâmide à qual ele se refere é o tetraedro regular.

O hexaedro (cubo) é um poliedro bastante presente no cotidiano, pode ser observado em brinquedos como no dado ou no cubo mágico. Na arquitetura, em monumentos como no encontrado no entroncamento das ruas João da Mata e Vidal de Negreiros, na cidade de Campina Grande-PB. Trata-se da representação de um hexaedro (Figura 14). Conforme Euclides (2009, p. 483), cubo é uma figura sólida contida por seis quadrados iguais.

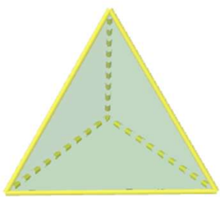
Figura 14 - Foto do monumento da praça, campina Grande - PB

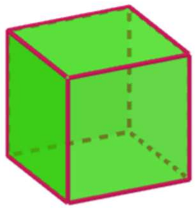
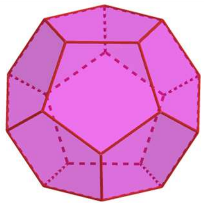
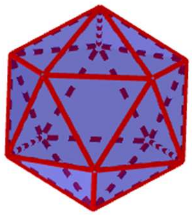
Fonte: Autoria própria.

Os demais poliedros regulares podem ser facilmente encontrados, por exemplo, em artigos decorativos como terrários. De acordo com Euclides (2009, p. 483), "octaedro é uma figura sólida contida por oito triângulos iguais e equiláteros". "icosaedro é uma figura sólida contida por vinte triângulos iguais e equiláteros". "dodecaedro é uma figura sólida contida por doze pentágonos iguais e equiláteros e equiângulos".

No quadro a seguir, mostramos as representações dos cinco poliedros de Platão e disponibilizamos os links que levam as construções que foram executadas para visualização dinâmica das propriedades (Faces, vértices e arestas) para efeito de composição da dissertação.

Quadro 2 - Representações dos cinco poliedros regulares com visualização dinâmica

Poliedro	**Representação**	**Link para visualização dinâmica dos poliedros**
Tetraedro		https://www.geogebra.org/m/hdr7akj4

Hexaedro		https://www.geogebra.org/m/wkwxmzvq
Octaedro		https://www.geogebra.org/m/tbxau4rh
Dodecaedro		https://www.geogebra.org/m/kpjuvkdq
Icosaedro		https://www.geogebra.org/m/tjtqr2av

Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

Os poliedros de Platão servem como pilar para a obtenção dos poliedros de Arquimedes. A partir de um poliedro de Platão, realizando determinados procedimentos em suas faces, que estão detalhados mais adiante, na seção 3.4, obtêm-se a construção da representação com o auxílio do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*.

3.4 Poliedros de Arquimedes

Inicialmente comentamos a biografia de Arquimedes. Em seguida, salientamos os tipos de procedimentos realizados nas faces de um poliedro para a obtenção de um poliedro de Arquimedes (truncamento, expansão e *snubificação)*. Depois, mostramos um quadro no qual o leitor pode visualizar de forma dinâmica os treze poliedros pertencentes a essa classe. Todas as construções são de autoria própria e estão disponíveis no site do *GeoGebra.*

Segundo Bendick (2006), é provável que Arquimedes tenha nascido em Siracusa, no ano de 287 a.C., em uma ilha da Sicília. Durante sua infância teve uma boa educação, quando estudou sobre astronomia, música, desenho, táticas militares, além de outras teorias. Seu pai era astrônomo e seus dois melhores amigos também. Talvez por esses motivos ele tenha se identificado tanto com a astronomia. Segundo Bendick (2006, p. 87-88):

> Arquimedes foi fascinado pela astronomia desde a infância. Gostava de sentar-se e observar seu pai trabalhando com os seus instrumentos primitivos, tentando calcular, primeiro, o tamanho do Sol e da Lua e, depois, a distância entre eles. Os dois amigos mais antigos de Arquimedes em Alexandria – Conom, seu professor, e Erastóstenes, seu companheiro de estudos – tornaram-se astrônomos famosos. Arquimedes passou muito tempo trabalhando com eles.

Arquimedes com certeza foi um matemático brilhante e isso pode ser comprovado pelo que sobreviveu de seu trabalho. Segundo Aaboe (2013, p. 94) “enquanto que *Os Elementos* de Euclides são uma compilação dos resultados de seus antecessores, cada um dos tratados de Arquimedes é uma contribuição nova ao conhecimento matemático”. Essa originalidade em seu trabalho certamente é algo que merece ser salientado. Ele certamente era um gênio e essa genialidade não era limitada apenas à matemática, ele a possuía em diversas áreas do conhecimento. Conforme Bendick (2006, p. 15):

> Muitas coisas foram extraordinárias em Arquimedes. Sua mente nunca descansava; estava sempre procurando algo que pudesse ser acrescido à quantidade de coisas conhecidas no mundo. Para ele, nenhum fato era desprovido de importância, nenhum problema era tedioso. Não só trabalhava com a mente, como realizava experiências científicas, para adquirir conhecimentos e provar as ideias que tinha.

A vida de Arquimedes foi repleta de contribuições a diversas áreas de conhecimento e muitas histórias contando os feitos dele resistiram ao desgaste do tempo. Podemos citar o episódio narrado por Bendick (2006), em que o rei Hiero havia mandado fazer uma coroa e, para isso, entregou uma barra de ouro a um artesão, para que ele derretesse e pudesse moldar no formato da coroa. Quando o artesão entregou a coroa, imediatamente o rei ficou se questionando se realmente o artesão havia utilizado todo o ouro na confecção da coroa. O rei pensou em pesar a coroa e verificar se pesava igual a uma barra de ouro idêntica a que foi entregue. Após pesar ele viu que os pesos eram idênticos. Mas, isso não tirou a inquietação do rei. Inconformado ele ordenou que chamassem Arquimedes. Esse, a princípio, não apresentou muito interesse no problema apresentado pelo rei, até porque ele poderia estar pensando em outro problema. Mas, ao perceber que o problema da coroa não era assim tão trivial, sua mente foi desafiada e logo ele se dedicou para resolver, porém, passaram alguns dias e não tinha ideia de como solucionar. Já não se alimentava bem, nem dormia direito, chega-se a falar que nem tomava banho pensando nesse problema.

Segundo Bendick (2006), seus escravos tiveram que levá-lo a força para o banho. Ao entrar na banheira que estava cheia até a borda, observou que a água que derramou era igual ao volume do seu corpo. Então teve a ideia genial para solucionar o problema da coroa do rei. Arquimedes saiu correndo pelas ruas da cidade, totalmente sem roupa e a gritar "Eureca", que, em grego, significa encontrei. Ele percebeu que a resposta para o problema era o volume da coroa: se colocasse uma barra de ouro em um recipiente com água até a borda, medisse a quantidade de água derramada e, em seguida, fizesse o mesmo com a coroa, a quantidade de água derramada teria de ser igual, caso isso não acontecesse o artesão teria enganado o rei. Ao realizar o experimento observou que a quantidade de água derramada era diferente, logo ele concluiu que o rei foi enganado.

Arquimedes era um homem de habilidades extraordinárias e isso pode ser constatado na forma como ele encarava os problemas, sempre com uma solução elegante. De acordo com Bendick (2006), certa vez, conversando com o rei Hiero sobre as vantagens em utilizar alavancas para levantar objetos muito pesados, disse ser capaz de mover a Terra caso um ponto de apoio fosse possível para utilizar uma alavanca. O rei, incrédulo, o desafiou a provar suas palavras movendo um de seus navios. Arquimedes sem pensar duas vezes aceitou o desafio e com a ajuda de polias moveu o navio com apenas uma mão. Inicialmente atribuía-se a ele a listagem dos sólidos semirregulares que atualmente são denominados de poliedros arquimedianos.

Euclides, em *Os Elementos,* mostrou como construir poliedros regulares inscritos em esferas. Arquimedes estudou uma classe de poliedros que podem ser obtidos a partir dos que são abordados na obra de Euclides por uma série de procedimentos. Seria plausível imaginar que Arquimedes sofreria influência direta do trabalho de Euclides, mas, ele não seguiu o modelo proposto pelo seu antecessor e isso mostra que aquele modelo de matemática não era o único utilizado pelos gregos. Conforme Roque (2012, p. 155):

> Arquimedes nasceu mais ou menos no momento em que Euclides morreu, em torno da segunda década do século III a. E.C. Era de se esperar, portanto, que o trabalho de Euclides tivesse uma influência marcante em sua obra. Mas não foi bem assim. Arquimedes não pode ser visto como sucessor de Euclides; e seu trabalho não se inscreve, por assim dizer, em uma tradição euclidiana. Um exemplo disso é a utilização de métodos mecânicos de construção, caso da espiral de Arquimedes.

A discrepância entre a estrutura das obras de Euclides e a de Arquimedes é enorme, enquanto o primeiro se apoia no método axiomático o segundo não teve a menor preocupação com isso e utiliza métodos não euclidianos. Conforme Roque (2012, p. 197):

> Arquimedes é um dos matemáticos mais conhecidos do período pós-euclidiano. Seus livros possuem uma estrutura bastante distinta daquela que caracteriza os elementos de Euclides e seus métodos não reproduzem o padrão euclidiano. Não se percebe em seus trabalhos uma preocupação nem em usar nem em defender um método de tipo axiomático, e a forma como expõe seus resultados não parece ter sofrido influência do estilo dos *Elementos.* Sem se restringir a nenhuma determinação a priori, Arquimedes usa métodos não euclidianos como a *neusis*, mesmo quando uma construção com régua e compasso é viável.

Essa característica de Arquimedes em não seguir o modelo euclidiano não é um problema, uma vez que, utilizando diversos métodos, ele se permitia alcançar novos resultados matemáticos, em vez de se apegar a formalismos, mostrando desse modo toda sua genialidade. De acordo com Berlinski (2018, p. 17-18):

> Arquimedes foi um matemático mais brilhante do que Euclides. Ele deu ao mundo aquilo que grandes matemáticos sempre dão, que é um registro de seu gênio, mas em termos de um sistema axiomático, Euclides deu à matemática algo ainda mais duradouro, e que era um estilo de vida.

Segundo Flood (2013, p.29), "Arquimedes também investigou os poliedros semirregulares, nos quais as faces são polígonos regulares, mas não todos iguais; por exemplo o icosaedro truncado (ou bola de futebol) é formado de pentágonos e hexágonos regulares". Ao que tudo indica Arquimedes foi o pioneiro no estudo desses poliedros, porém foi Kepler quem listou todos. Ao todo são treze poliedros que podem ser obtidos por três processos: truncamento, expansão e snubificação. Alguns autores também chamam de poliedros semirregulares. De acordo com Sutton (2015, p. 36):

> Embora tenham sido inicialmente atribuídos a Arquimedes (287 a.C.-212 a.C), Kepler parece ter sido o primeiro, desde a antiguidade, a descrever todo o conjunto dos treze sólidos em seu *Harmonices Mundi*. Ele ainda observou os dois conjuntos infinitos de prismas regulares e antiprismas que também têm vértices idênticos e faces regulares.

Essa foi uma importante contribuição de Kepler no estudo dos poliedros de Arquimedes. A partir da listagem feita por Kepler chegou-se à conclusão da quantidade exata de poliedros obtidos pelos processos realizados nas faces (truncamento, expansão e snubificação).

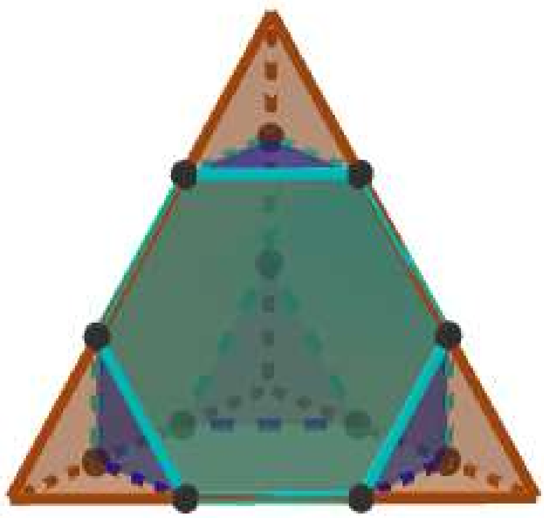
Truncamento é o procedimento realizado em um poliedro por meio de cortes em pontos estratégicos de suas faces, possibilitando o surgimento de faces regulares de tipos distintos. De acordo com Almeida (2010, p. 129), podemos dividi-los em duas categorias:

> Truncamento tipo 1**:** nesse tipo de truncamento, o corte se realiza por planos que passam pelos pontos médios das arestas do poliedro platônico de partida que concorrem em um vértice. Truncamento tipo 2**:** nesse tipo de truncamento, o corte nas arestas do platônico de partida se realiza por planos a uma distância adequada de cada vértice, para que por cada face do poliedro de partida resulte em um polígono regular.

Desse modo os cortes nas arestas dos poliedros devem ser realizados em locais que possibilitem o surgimento de faces poligonais regulares de mais de um tipo. Para isso é necessário saber o exato local por meio de cálculos. Em alguns poliedros esse cálculo pode ser realizado de forma simples, já em outros requer um pouco mais de habilidade.

Para determinar o ponto de truncatura onde deve ser realizado o corte do tetraedro, primeiramente devemos construir um tetraedro de aresta x, em seguida dividi-las em três segmentos congruentes, ou seja, medindo $\frac{x}{3}$. Esses pontos localizados a um terço de distância do vértice mais próximo do tetraedro são os pontos de truncatura e são utilizados como vértices para o tetraedro truncado. Por fim, fazemos as truncaturas. Na Figura 15 temos um tetraedro trucado no interior de um tetraedro e destaque para seus pontos de truncatura.

Figura 15 - Tetraedro com truncaturas



Fonte: Autoria própria (construção no GeoGebra).

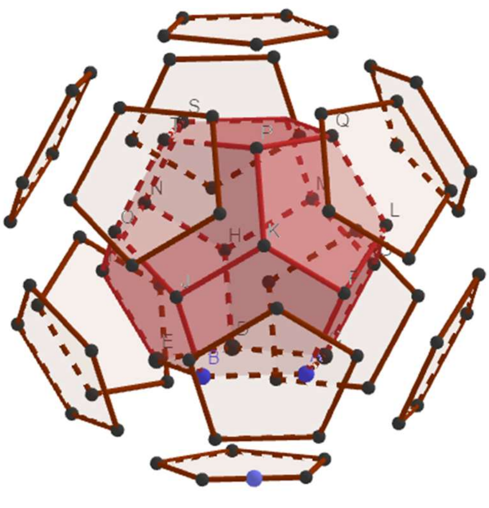
Depois de demarcados os locais onde são realizados os cortes, retiramos as quatro pirâmides e está pronta a nossa representação de um tetraedro truncado. O tetraedro truncado representado na Figura 16 pode ser visualizado de forma dinâmica pelo link: https://www.geogebra.org/m/rcwxtqws.

Figura 16 - Tetraedro Truncado

Fonte: Autoria própria (construção no GeoGebra).

Expansão é um procedimento realizado nas faces de um poliedro de modo que elas se afastem, sendo os espaços vazios preenchidos por outros polígonos. Como exemplo, primeiramente expandimos as faces de um dodecaedro. Esse afastamento deve ser realizado de forma que possamos inserir quadrados e triângulos equiláteros.

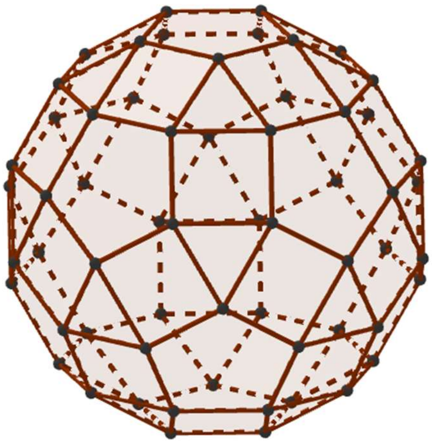
Figura 17 - Dodecaedro expandido



Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

Em seguida, ligamos os pontos dos vértices dos pentágonos de modo que apareçam quadrados e triângulos equiláteros. Depois, ocultamos os pontos e mudamos as cores das faces. O dodecaedro expandido representado pela Figura 18 pode ser visualizado de forma dinâmica pelo link: https://www.geogebra.org/m/ynkczpnj.

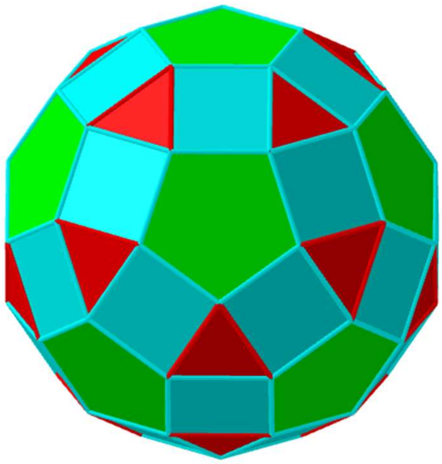
Figura 18 - Rombicosidodecaedro com pontos dos vértices



Fonte: Autoria própria (construção no GeoGebra).

Também podemos obter o rombicosidodecaedro pelo mesmo processo a partir do dual do dodecaedro que nesse caso é um icosaedro. Sendo assim ele tem o mesmo número de faces pentagonais de um dodecaedro e o mesmo número de faces triangulares de um icosaedro.

Figura 19 – Rombicosidodecaedro com destaque de suas faces



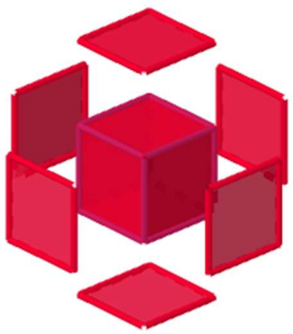
Fonte: Autoria própria (construção no GeoGebra).

Snubificação de um poliedro é uma operação sobre um poliedro que permite obter outro poliedro. A operação consiste em afastar todas as faces do poliedro, rotacioná-las certo ângulo e preencher os espaços vazios resultantes com polígonos. Por exemplo, temos o Cubo *snub,* também conhecido como cubo achatado. Ele é gerado a partir de um cubo, onde, inicialmente suas faces foram afastadas. De acordo com Sutton (2015, p. 48):

> O termo "cubo achatado" (do inglês, *snub*) é uma tradução livre para *cubus simus*, nome dado por Kepler que significa, literalmente, "cubo amassado". Tanto o cubo quanto o dodecaedro achatado são *quirais*, aparecendo nas versões destra (em sentido horário) e sinistra (em sentido anti-horário). O cubo achatado tem simetria octaédrica, e o dodecaedro achatado tem simetria icosaédrica.

Construímos uma representação de um cubo *snub* para exemplificar esse procedimento. Inicialmente construímos um cubo e afastamos suas faces. A construção abaixo pode ser visualizada pelo link: http://www.geogebra.org/m/qrsqbtdg.

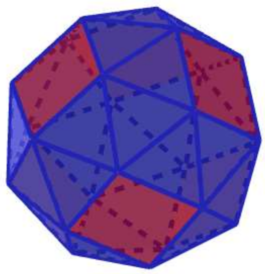
Figura 20 - Cubo com as faces expandidas



Fonte: Autoria própria (construção no GeoGebra).

Em seguida as faces são rotacionadas e são preenchidos os espaços vazios por triângulos equiláteros.

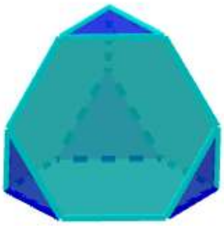
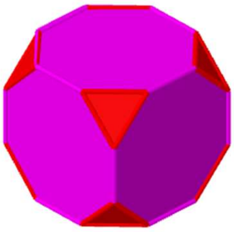
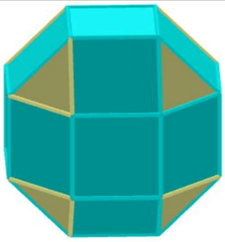
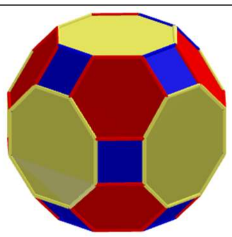
Figura 21 - cubo *snub*

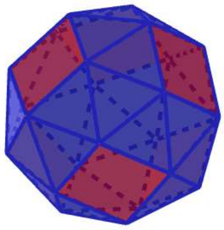
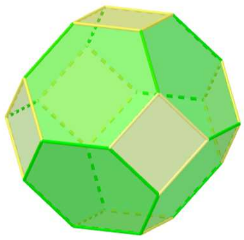
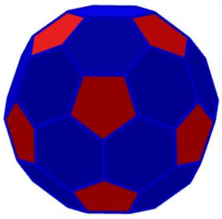
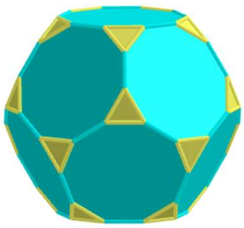
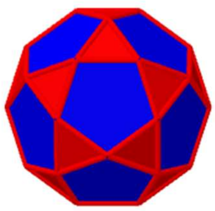
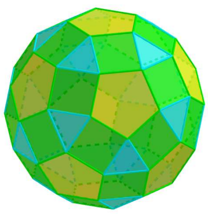


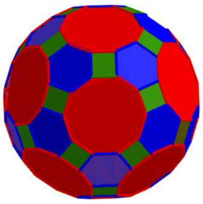
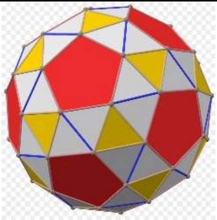
Fonte: Autoria própria (construção no GeoGebra).

No quadro a seguir, mostramos as representações dos treze poliedros de Arquimedes e disponibilizamos os links que levam as construções que foram executadas para visualização dinâmica das propriedades (Faces, vértices e arestas) para efeito de composição da dissertação.

Quadro 3 - Representações dos treze poliedros de Arquimedes

Sólidos Arquimedianos	**Representação**	**Link para sua visualização dinâmica**
Tetraedro truncado		https://www.geogebra.org/m/csujrusk
Cubo truncado		https://www.geogebra.org/m/q2fdh6u4
Cuboctaedro		https://www.geogebra.org/m/csujrusk
Rombicuboctaedro		https://www.geogebra.org/m/tnccmxk8
Cuboctaedro truncado		https://www.geogebra.org/m/ggp4dxm6

Cubo snub		https://www.geogebra.org/m/p3usqvpv
Octaedro truncado		https://www.geogebra.org/m/eetaffjn
Icosaedro truncado		https://www.geogebra.org/m/zmczehuq
Dodecaedro truncado		https://www.geogebra.org/m/v6gqdfnb
Icosidodecaedro		https://www.geogebra.org/m/hyceyw2g
Rombicosidodecaedro		https://www.geogebra.org/m/ynkczpnj

Icosidodecaedro truncado		https://www.geogebra.org/m/q6jb85jq
Dodecaedro snub		https://www.geogebra.org/m/ktzpddv9

Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

3.5 Poliedros duais

A ideia de dualidade remete ao período da Grécia Antiga e era bem conhecida pela escola pitagórica. Segundo Lundy (2018, p. 8):

> Para os pitagóricos, o dois era o primeiro número sexuado, par e feminino. Para desenvolver a sua apreciação pela dualidade, eles comtemplavam pares de opostos puros, como limitado e ilimitado, ímpar e par, um e muitos, direita e esquerda, masculino e feminino, repouso e movimento, reto e curvo. Podemos também pensar nas cargas positiva e negativa em eletromagnetismo, e no inspirar e expirar de nossa respiração.

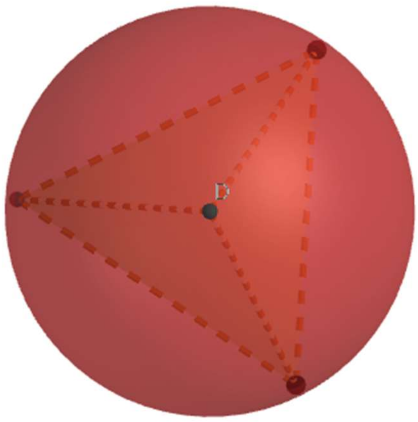
Até hoje quando ouvimos falar em dualidade logo nos remetemos à ideia de uma relação entre duas coisas. No caso dos poliedros, não necessariamente opostas, como o dia e a noite, mas, com o número de vértices de um sendo igual ao número de faces do outro, ou seja, geralmente são chamados duais quando um estiver dentro do outro de modo que os vértices do poliedro encontrado no interior interceptam o exterior em um ponto central de suas faces. Conforme Kaleff (2003, p. 111):

> [...] dois poliedros são chamados de duais quando um está dentro do outro, de tal forma que os vértices do poliedro que está no interior tocam as faces do poliedro exterior somente no ponto central de cada face. E para se obter o ponto central de uma face é necessário que se determine o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos da face do poliedro.

Porém, isso não se aplica a todos os poliedros. Almeida (2015) expõe o fato de que isso não é possível para todos os poliedros e Silva (2018) enfatiza esse ponto ao tentar construir um dodecaedro rômbico a partir dos pontos centrais das faces de um cuboctaedro e mostra que as faces encontradas por esse método não são planas, logo não é possível obter o poliedro dual desse modo.

Silva (2018) cita outra maneira de encontrar o dual de um poliedro convexo. Esse método consiste em inscrever o poliedro em uma esfera e encontrar os planos tangentes aos vértices dele. Exemplificamos encontrando o dual de um tetraedro regular de vértices $A = (-1,0,0), B = (1,0,0), C = (0,1.73,0)\ e\ D = (0,0.58,1.63)$, para que, a partir da interseção destes planos, possamos determinar o dual. Para isso, primeiramente construímos a representação de um tetraedro e o inscrevemos em uma esfera.

Figura 22 - Tetraedro inscrito em uma esfera



Fonte: autoria própria (construção no *GeoGebra*).

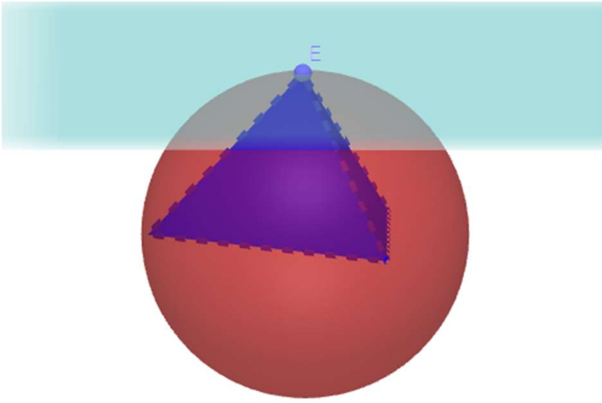
Em seguida utilizamos vetores para encontrar o plano tangente à esfera no ponto, onde, localiza-se o vértice do tetraedro, sabendo que o centro dele é o ponto M$(0, 0.58,\ 0.41)$ e o primeiro ponto de tangência é o vértice A$(-1,0,0)$. Precisamos utilizar um ponto genérico P(x, y, z). Para calcular $\overline{AP}$ e $\overline{AM}$.

$\overline{AP} = P - A \Rightarrow (x, y, z) - (-1,0,0) \Rightarrow (x + 1, y, z)$

$\overline{AM} = M - A \Rightarrow (0,\ 0.58\ ,\ 0.41) - (-1,0,0) \Rightarrow (1, 0.58, 0.41\ )$

Calculamos o produto vetorial: $\overline{AP}.\overline{AM} = 0 \Rightarrow (x + 1, y, z)\ .\ (1, 0.58, 0.41\ ) = 0$. Assim obtemos o primeiro plano tangente à esfera que é igual a $x + 1 + 0.58y + 0{,}41z = 0$

Figura 23 - Plano tangente à esfera em um vértice do tetraedro



Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

O segundo ponto de tangência é o vértice B$(1,0,0)$. Novamente utilizamos um ponto genérico P(x, y, z), para calcular $\overline{BP}$ e $\overline{BC}$.

$\overline{BP} = P - B \Rightarrow (x,\ y\ , z) - (1{,}0{,}0) \Rightarrow (x - 1,\ y\ ,\ z)$

$\overline{BM} = M - B \Rightarrow (0,\ 0.58\ ,\ 0.41) - (1{,}0{,}0) \Rightarrow (-1,\ 0.58,\ 0.41\ )$

Calculamos o produto vetorial: $\overline{BP}.\overline{BM} = 0 \Rightarrow$ (x-1, y, z) . (-1, 0.58, 0.41) = 0. Este é o segundo plano de tangência da esfera $-x + 1 + 0.58y + 0.41z = 0$.

O terceiro ponto de tangência é o vértice C$(0, 1.73, 0)$. Calculamos $\overline{CP}$ e $\overline{CM}$.

$\overline{CP} = P - C \Rightarrow (x,\ y\ , z) - (1{,}0{,}0) \Rightarrow (x,\ y - 1.73\ ,\ z)$

$\overline{CM} = M - C \Rightarrow (0,\ 0.58\ ,\ 0.41) - (0, 1.73\ , 0) \Rightarrow (0, -1.15,\ 0.41\ )$

Calculamos o produto vetorial: $\overline{CP}.\overline{CM} = 0 \Rightarrow$(x, y-1 , z) . (0, -1.15, 0.41) = 0

Este é o terceiro plano de tangência da esfera: $-1.15y + 0.41z = -1.9895$.

O quarto ponto de tangência é o vértice D$(0, 0.58\ , 1.63)$. Calculamos $\overline{DP}$ e $\overline{DM}$.

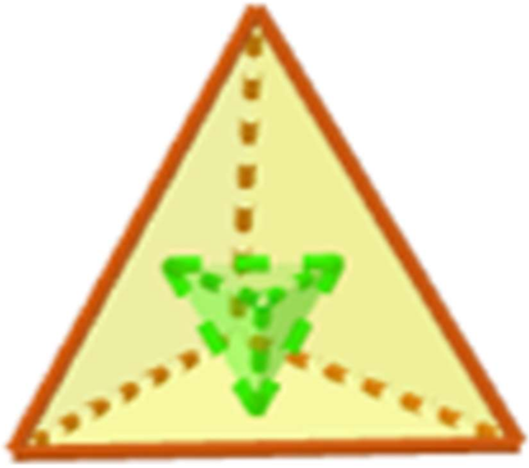
$\overline{DP} = P - D \Rightarrow (x,\ y\ , z) - (0, 0.58, 1.63) \Rightarrow (x,\ y - 0.58\ ,\ z - 1.63)$

$\overline{DM} = M - C \Rightarrow (0,\ 0.58\ ,\ 0.41) - (0,\ 0.58\ , 1.63) \Rightarrow (0,\ 0, -1.22\ )$

Calculamos o produto vetorial: $\overline{DP}.\overline{DM} = 0 \Rightarrow$ (x, y-0.58, z-1.63) . (0, 0, 1.22) = 0

Este é o quarto plano de tangência da esfera: $-1.22z = -1.9886$. Os polígonos obtidos pela interseção dos planos delimitam o dual do tetraedro, que é um tetraedro também, ou seja, ele é dual com ele próprio.

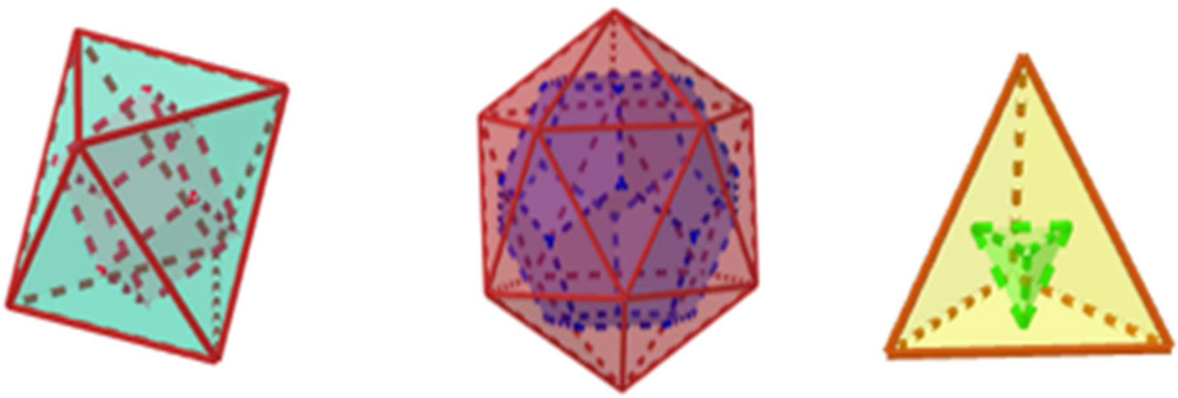
Figura 24 - Dual do tetraedro determinado pelos planos tangentes à esfera



Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

Observando os poliedros regulares temos que o tetraedro é dual com ele mesmo, uma vez que ligando os pontos centrais de suas faces encontramos outro tetraedro. O octaedro e o cubo são duais entre si, assim como no caso do dodecaedro e do icosaedro, um é dual do outro. Essa dualidade vem sendo estudada desde a antiguidade. Segundo Martineau (2015. p, 38), "nas ciências antigas, o icosaedro era associado com o elemento água, e por isso é apropriado vê-lo emanar de nosso planeta aquoso. O dodecaedro representava o éter, força da vida, aqui envolvendo a Terra viva, definida por seus vizinhos".

Figura 25 - Poliedros duais dos platônicos



Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

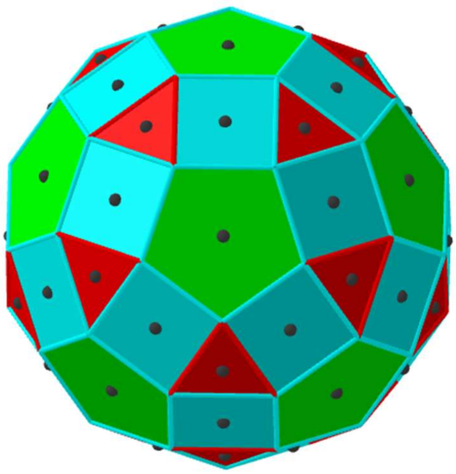
3.6 Sólidos de Catalan

Assim, como os poliedros estudados por Platão e por Arquimedes foram nomeados em homenagem a esses matemáticos, que dedicaram-se ao estudo de uma determinada família de poliedros, os sólidos de Catalan têm seu nome em homenagem ao matemático belga Eugène Charles Catalan. Segundo Sutton (2015), os duais dos sólidos de Arquimedes foram descritos como um grupo primeiro por Catalan que, em 1865, publicou um trabalho onde consta uma lista com os duais dos poliedros de Arquimedes. Sendo treze os poliedros de Arquimedes, os seus duais também são em igual número. De acordo com Sutton (2015, p. 50):

> Para criar o dual de um sólido arquimediano, prolongue linhas perpendiculares, a partir dos pontos médios de suas arestas, tangenciando a interesfera do sólido. Essas linhas são as arestas do dual; os pontos onde elas se cruzam primeiro são seus vértices. Os sólidos arquimedianos têm um tipo de vértice e diferentes tipos de faces; portanto, seus duais possuem um tipo de face, mas diferentes tipos de vértices.

Temos como exemplo a obtenção de um hexecontaedro deltoidal por meio da dualidade com o rombicosidodecaedro (sólido arquimediano). Para obtê-lo, inicialmente, marcamos o centro de cada uma das faces do rombicosidodecaedro.

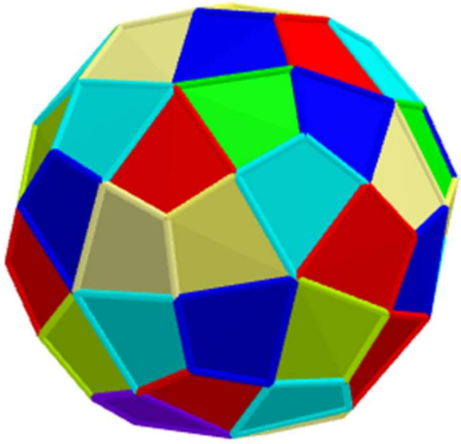
Figura 26 - Pontos centrais das faces do rombicosidodecaedro



Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

Em seguida, ligamos os pontos de modo que formem deltoides (quadriláteros com um eixo de simetria ao longo de uma de suas diagonais), que são figuras também conhecidas como pipas, um brinquedo antigo e bem conhecido, assim está pronto o nosso hexecontaedro deltoidal, possuindo 60 faces, 62 vértices e 120 arestas.

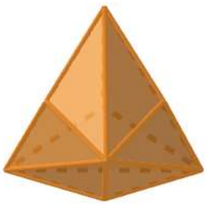
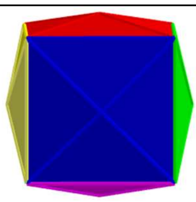
Figura 27 - Hexecontaedro deltoidal

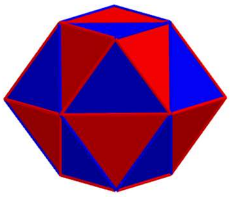
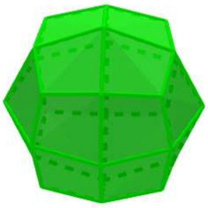
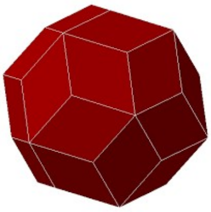
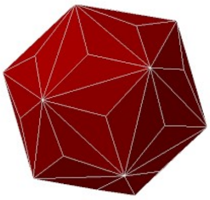
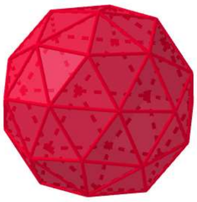
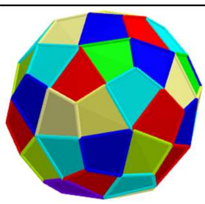


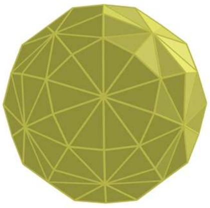
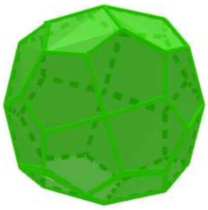
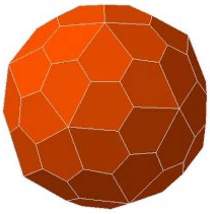
Fonte: Autoria própria.

No quadro a seguir, mostramos as representações dos treze poliedros de Catalan e disponibilizamos os links que levam as construções que foram executadas para visualização dinâmica das propriedades (Faces, vértices e arestas) para efeito de composição da dissertação.

Quadro 4: Representações dos treze sólidos de Catalan

Poliedro	**Representação**	**Link para visualização dinâmica dos poliedros**
Tetraedro triakis		https://www.geogebra.org/m/bhuhsjhr
Dodecaedro rômbico		https://www.geogebra.org/m/m23rzraa
Octaedro triakis		https://www.geogebra.org/m/dwzqcb6w

Hexaedro tetrakis		https://www.geogebra.org/m/pwnsfaxg
Icositetraedro deltoidal		https://www.geogebra.org/m/wpm4whct
Dodecaedro disdiakis		https://www.geogebra.org/m/yymvdcud
Triacontaedro rômbico		https://www.geogebra.org/m/rwvrfrjt
Icosaedro Triakis		
Dodecaedro pentakis		https://www.geogebra.org/m/mzfe6zv3
Hexecontaedro deltoidal		https://www.geogebra.org/m/gxrunppv

Triacontaedro disdiakis		https://www.geogebra.org/m/zqyxg7km
Icositetraedro pentagonal		https://www.geogebra.org/m/kksnyhtu
Hexecontaedro pentagonal		

Fonte: Autoria própria. (construção no *GeoGebra*).

3.7 Poliedros de Kepler-Poinsot

Dois matemáticos pesquisaram de forma independente sobre um tipo bem especial de poliedro, obtido pelo prolongamento das arestas e por extensão dos planos que contém as faces. por esse motivo essa classe de poliedros leva o nome de ambos. O primeiro foi Johannes Kepler.

Na ciência existem histórias que resistem ao passar do tempo e que sucedem descobertas importantes, provavelmente a mais conhecida seja, a maçã que caiu na cabeça de Isaacc Newton e possibilitou que ele pensasse a respeito da força que a fez cair e refletindo sobre isso, chegou à descoberta da gravidade. De acordo com Hawking (2005, p. 100):

> Apesar de suas previsões, Kepler jamais acumulou riquezas ou mesmo grande prestígio, se vendo frequentemente obrigado a fugir dos países onde se encontrava devido a desordens públicas e conflitos religiosos. Kepler havia descoberto três leis que governam o movimento planetário, e que são ainda hoje ensinadas nas salas de aula de Física em pleno século XXI. Foi também a terceira lei de Kepler, e não uma maçã, que levou à Isaac Newton a descobrir a lei da Gravidade.

Kepler também é personagem de uma história que conta como ele teria concebido sua teoria das órbitas dos planetas. Segundo Hawking (2005, p. 103):

> Foi um dia, ao pé do quadro-negro enquanto dava aula em Graz, que teve uma súbita revelação que significou o começo de uma viagem apaixonante e mudou o rumo de sua vida. Era, a seu ver, a chave secreta para a compreensão do universo. Kepler desenhou no quadro-negro, para a sua turma, um triângulo equilátero dentro de um círculo, e outro círculo dentro de um triângulo. Pareceu-lhe que a razão dos círculos indicaria a razão das órbitas de Saturno e Júpiter. Inspirado pela revelação, Kepler supôs que todos os seis planetas então conhecidos estariam dispostos ao redor do Sol de modo que as figuras geométricas se encaixassem perfeitamente entre eles. Seus primeiros ensaios desta hipótese, usando figuras planas em duas dimensões tais como o pentágono, o quadrado e o triângulo, foram malsucedidos. Kepler voltou-se então aos sólidos de Pitágoras, aqueles usados na Antiguidade pelos gregos que haviam descoberto que apenas cinco sólidos podem ser construídos a partir de figuras geométricas regulares.

Isso mostra o brilhantismo de Kepler e esse brilhantismo foi minimamente recompensado. Após o falecimento do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, Kepler foi nomeado matemático imperial e, a partir daí, pôde analisar os dados obtidos pelo seu antecessor ao longo de sua vida e obter resultados importantes. Kepler faleceu no ano de 1630. Ele também estudou outros poliedros além dos regulares, foi ele quem descobriu o grande dodecaedro estrelado e o pequeno dodecaedro estrelado.

O segundo matemático foi Louis Poinsot (1777-1859), quem descobriu o icosaedro estrelado e o grande dodecaedro. Ambos perceberam que prolongando as arestas ou os planos das faces do icosaedro ou do dodecaedro se obtém poliedros estrelados. De acordo com Sutton (2015, p. 32):

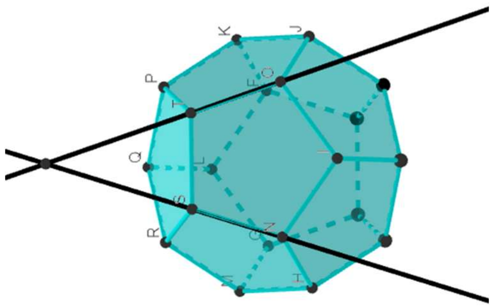
> Os lados de alguns polígonos podem ser estendidos até se encontrarem novamente: o pentágono regular, por exemplo, estende-se para formar uma estrela de cinco pontas ou pentagrama. Este processo é conhecido como estrelamento. Johannes Kepler (1571-1630) propôs a aplicação do estrelamento ao poliedro, observando que há duas possibilidades para esse processo: por extensão das arestas e por extensão dos planos das faces.

Louis Poinsot, conseguiu de forma independente de Kepler obter poliedros estrelados. Segundo Sutton (2015, p. 32):

> Louis Poinsot (1777-1859) investigou poliedros independentemente de Kepler e redescobriu os seus dois ouriços icosaédricos e também os dois poliedros apresentados aqui: o grande dodecaedro e o grande icosaedro. Ambos os poliedros têm cinco faces para cada vértice, intersecionando-se uma a outra para gerar figuras vértices em forma de pentagrama. O grande dodecaedro tem doze faces pentagonais e é o terceiro estrelamento do dodecaedro. O grande icosaedro tem vinte faces triangulares e é um dos 58 estrelamentos possíveis do icosaedro, que também incluem os compostos de cinco octaedros e cinco de dez tetraedros.

Segundo Baraldi (2018), um poliedro de Kepler-Poinsot é um poliedro regular não convexo, que apresenta polígonos regulares iguais em todas suas faces e o mesmo número de faces em todos seus vértices. Esses poliedros são obtidos por um processo denominado estrelamento, que consiste em prolongar as faces de um poliedro até que se encontrem em um ponto. Para exemplificar esse procedimento, construímos a representação de um pequeno dodecaedro estrelado. Inicialmente construímos a representação de um dodecaedro, em seguida, traçamos duas retas determinadas por dois pontos de uma das faces do dodecaedro e marcamos o ponto de encontro entre elas, como na figura abaixo.

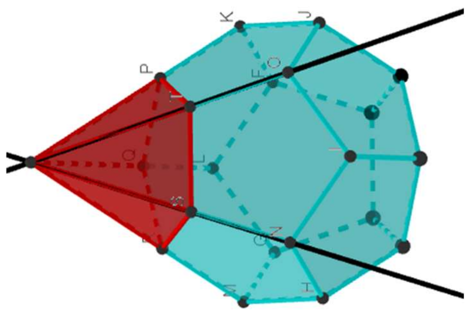
Figura 28 - Dodecaedro



Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

Essas duas retas determinam o plano onde uma das faces do dodecaedro está contida. Posteriormente, utilizamos os pontos da face do dodecaedro para determinar uma pirâmide de base pentagonal, como na figura abaixo.

Figura 29 - Dodecaedro com uma pirâmide apoiada em uma face



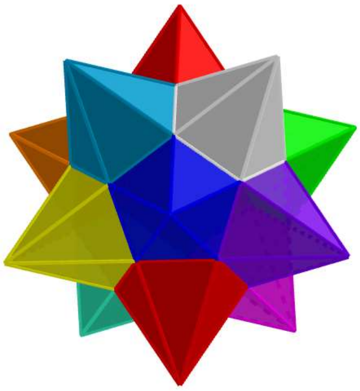
Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

Repetimos os procedimentos em todas as faces, ocultamos as retas e os pontos e obtemos a representação de um pequeno dodecaedro estrelado. Se prolongarmos as arestas do dodecaedro obtemos a representação de um grande dodecaedro estrelado. Conforme Sutton (2015, p. 32):

> Seus nomes modernos, pequeno dodecaedro estrelado e grande dodecaedro estrelado, revelam que esses poliedros também são resultado de dois estrelamentos de face do dodecaedro. Cada um deles é composto de doze faces em forma de pentagrama, um com cinco e o outro com três pentagramas para cada vértice, e sua simetria é icosaédrica.

Observamos que o pequeno dodecaedro estrelado possui ângulos congruentes e isso é resultado do processo de estrelamento em suas faces. Conforme Sutton (2015, p. 32), “Apesar de seus cinco lados se cruzarem, o pentagrama tem arestas e ângulos iguais em seus vértices, e assim pode ser considerado um polígono regular convexo”.

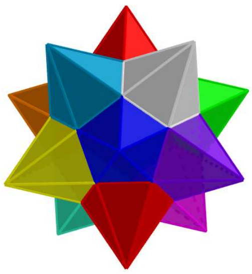
Figura 30- Pequeno dodecaedro estrelado

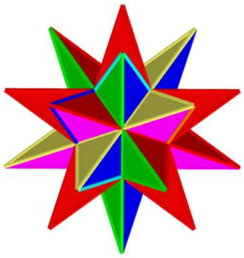
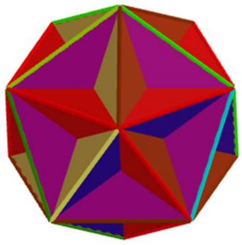
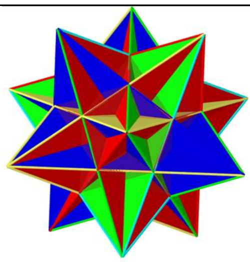


Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

No quadro abaixo estão as representações dos quatro poliedros de Kepler-Ponsot, bem como suas propriedades e composição.

Quadro 5 - Representações dos quatro poliedros de Kepler-Poinsot

Poliedro	**Representação**	**Link para visualização dinâmica dos poliedros**
Pequeno dodecaedro estrelado		https://www.geogebra.org/m/aeeftggd

Grande dodecaedro estrelado		https://www.geogebra.org/m/kmqgzkyq
Grande dodecaedro		https://www.geogebra.org/m/hzya5ynx
Grande icosaedro		https://www.geogebra.org/m/fgdmp39a

Fonte: Autoria própria (construção no *GeoGebra*).

3.8 Relação de Euler

Uma vez ultrapasada a barreira que prendia nossa concepção acerca da definição de poliedro, vamos salientar uma propriedade muito importante, sobre poliedros, e que sua descoberta é atribuída a um dos matemáticos mais prolíficos no que diz respeito a publicações. Estamos falando de Leonhard Euler. De acordo com Santos (2014, p. 7):

> Embora os poliedros já fossem conhecidos desde a antiguidade, até o século XVIII ninguém havia percebido qualquer relação de natureza combinatória entre suas faces, arestas e vértices, até que por volta de 1750, Leonhard Euler (1707–1783) fez uma descoberta que descreveu a seu amigo também matemático, Christian Goldbach (1690–1764), em uma correspondência enviada a este.

Naquela época a divulgação dos trabalhos cientificos, frequentemente, eram realizadas por meio de cartas. De acordo com Flood (2013), Euler nasceu na Suiça em 15 de abril de 1707, no entanto, passou considerável parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. O fato dele ter vivido durante muito tempo na Rússia e lá os Russos possuirem uma forma de escrever nomes próprios incluindo o nome do pai é apontado por Fossa e Leôncio (2020) como uma possível explicação para a escrita incorreta do nome de Euler, que é indevidamente escrito como sendo “Leonhard Paul Euler”. De acordo com Fossa e Leôncio (2020, p. 16):

> Um nome russo típico da época consistia em três partes principais, a saber, um nome dado, um patronímico e um sobrenome. O patronímico é formado do nome do pai, acrescentando o sufixo -ovichou -evich (masculino), e é usado em situações mais formais do dia a dia em que não seria considerado apropriado usar o nome dado e, portanto, foi a forma de tratamento mais usada no dia a dia (exceto entre os amigos mais íntimos).

Atribui-se a ele uma relação entre o número de faces, vértices e arestas, em que a soma do número de faces com o número de faces é igual ao número de arestas somado com dois, relação esta que atualmente leva seu nome. Abaixo segue uma demonstração da relação de Euler a partir de Dolce e Pompeo (1985, p. 121-122):

> Por imdução finita referente ao número de faces, vamos provar, em carater preliminar, que, para uma superficie poliedrica limitada convexa aberta, vale a relação: $V_a - A_a + F_a = 1$. Onde, V_a é o número de vértices, A_a é o número de arestas e F_a é o número de faces da superficie poliedrica limitada aberta. Para $F_a = 1$. Neste caso a superficie se reduz a um poligono convexo de n lados e, então $V_a = n$ e $A_a = n$ e temos, $V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \Rightarrow V_a - A_a + F_a = 1$. Logo a relação está verificada para $F_a = 1$. Admitindo que a relação vale para uma superficie de F' faces (que possui V' vértices e A' arestas) vamos provar que também vale para uma superficie de F' +1 faces (que possui F' +1= F_a faces, V_a vértices e A_a arestas). Por Hipótese para a superfície de F' faces, A' arestas e V' vértices vale: $V' - A' + F'$= 1. Acrescentando a esta superficie (que é aberta) uma face de p arestas (lados) e considerando que q destas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a arestas e V_a vértices tais que: F_a=F'+ 1. $A_a = A' + p - q$. (q arestas coincidiram) $V_a = V' + p - (q+1)$ (q arestas coincidindo, q+1 vértices coincidem). Formando a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores acima vem: $V_a - A_a + F_a = V' + p - (q+1) - A' + p - q + F'+ 1 = V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 = V' - A' + F'$. Como $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ provamos que esta expressão não se altera se acrescentamos (ou retiramos) uma faceda superfície. Como por hipótese, $V' - A' + F_a = 1$. O que prova a relação preliminar. Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com V vértices, A arestas e F faces) e dela retiramos uma face. Ficamos, então com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) para a qual vale a relação $V_a - A_a + F_a = 1$. Como $V_a = v$, $A_a = A$ e $F_a = F - 1$, Vem $V - A + (F - 1) = 1$ ou seja: $V - A + F = 2$

Na matemática é muito importante obter uma demonstração que comprove a veracidade dos resultados obtidos. Euler e muitos outros matemáticos de alto nível aceitaram o desafio de provar essa relação, alguns obtiveram êxito. De acordo com Santos (2014, p. 8):

> Euler enfatizava a veracidade dessa fórmula, desconhecida pelos matemáticos até então, embora não pudesse ainda demonstrá-la. À medida que o tempo foi passando Euler e outros matemáticos, dentre eles Adrien Legendre (1752 - 1833), Augustin Cauchy (1789 – 1857) e Henri Poicaré (1854 – 1912) demonstraram a veracidade desta fórmula, embora as demonstrações de Euler e Cauchy apresentarem falhas.

Às vezes era dificil preservar algumas das demonstrações, por diversos motivos. A vontade do próprio matemático em não divulgar o trabalho até que ele tivesse plena convicção que estava correto era algo comum. Acidentes que destruíram obras também eram recorrentes, dentre outras coisas que podem ter ocorrido como a morte prematura de um matemático antes que ele concluísse a demonstração, perdendo, desse modo, relatos da genialidade de muitos deles. Então, não podemos apontar de forma que Euler tenha sido o primeiro a descobrir essa relação, mas, temos fortes motivos para acreditar que ele tenha sido o pioneiro nesse estudo das relações entre o número de faces, vértices e arestas de um poliedro. De acordo com Santos (2014, p. 8):

> Há fortes indícios de que esta fórmula já fosse, há mais de um século, do conhecimento de René Descartes (1596 – 1650), por volta de 1630, portanto, há mais de um século antes. Após a morte de Descartes, um navio contendo seus pertences naufragou, mas ainda foi possível salvar um manuscrito, que foi posteriormente copiado pelo matemático e filósofo Gottfried Leibniz (1646 – 1716). A cópia de Leibniz também foi perdida mas, por volta de 1860, numa recatalogação dos pertences deixados por Leibniz foi novamente encontrada.

Sendo essa pesquisa sobre o estudo de diversas classes de poliedros é importante enfatizar a relação de Euler em cada uma delas. Inicialmente analisamos o Quadro 2, da página 36 e constatamos que todos os poliedros regulares obedecem à relação de Euler.

Partindo para o estudo dos poliedros de Arquimedes, notamos, a partir dos dados fornecidos no Quadro 3, presente na página 43, que, exceto o rombicuboctaedro, todos os poliedros de Arquimedes obedecem à relação de Euler, sendo assim são eulerianos.

Os duais dos poliedos de Arquimedes são os sólidos de Catalan, mostrados no Quadro 4 da página 50, onde conferimos que todos satisfazem a relação de Euler. Por último dos poliedros de Kepler-Poinsot apenas dois obedecem à relação de Euler: são o pequeno dodecaedro estrelado e o icosaedro estrelado. Organizamos esses dados na tabela abaixo.

Tabela 2 - Relação de Euler

Classe de poliedros	Total de cada família de poliedros	Obedecem à relação de Euler	Não obedecem à relação de Euler
Poliedros regulares	5	5	0
Poliedros de Arquimedes	13	12	1

Sólidos de Catalan	13	13	0
Poliedros de Kepler-Poinsot	4	2	2
Total	35	32	3

Fonte: Autoria própria.

Observando a tabela acima notamos que 100% dos poliedros regulares, 92,3% dos Poliedros de Arquimedes, 100% dos Sólidos de Catalan e 50% dos poliedros de Kepler-Poinsot satisfazem à relação de Euler.

Neste capítulo objetivamos esclarecer eventuais dificuldades no ato de definir o objeto matemático poliedro, partindo da Grécia Antiga até os dias atuais. Assim como categorizamos as suas distintas concepções (como sólido, como de interior vazio e como estrutura).

Esclarecemos, de acordo com a literatura, a diferença entre poliedros de Platão e poliedros regulares, estes que muitas vezes são conceitos utilizados como sinônimos. Em seguida, os utilizamos para obter, por meio de alguns procedimentos (truncamento, expansão e snubificação), os poliedros de Arquimedes.

Apresentamos o conceito de poliedros duais e, com o uso do *software GeoGebra*, exploramos a dualidade entre os poliedros, para a partir dos Arquimedianos obter os Sólidos de Catalan. Mostramos o processo de estrelamento para a obtenção dos poliedros de Kepler-Poinsot.

Explicamos as características (número de faces, vértices e arestas) dos poliedros regulares, arquimedianos, de Catalan e de Kepler-Poinsot. Analisamos, se eles satisfazem a relação de Euler.

CAPÍTULO IV: ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo abordamos a realização de um curso de formação continuada para professores de matemática da rede estadual da Paraíba, ofertado pelo grupo de pesquisa Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT) e ministrado pelo professor Elídio Raimundo da Silva Júnior. Este curso serviu como auxiliador na busca de respostas para a questão norteadora dessa pesquisa.

4.1 Contexto da pesquisa

Buscando responder a questão norteadora da pesquisa, decidimos oferecer um curso de formação continuada tendo como público alvo professores de matemática da rede estadual da Paraíba. O curso ofertado pelo grupo de pesquisa Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT), tendo como coordenador o Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, professor ministrante: Elídio Raimundo da Silva Júnior, colaboradores: José Ferreira Júnior, Luciano Gomes Soares, Elvira Carmen Farias Agra Leite, Wanderlânyo de Lira Barboza e como monitor o graduando em matemática Jackson Cauando da Silva.

A pesquisa foi desenvolvida de forma online. As atividades foram aplicadas entre os dias 20 de agosto e 01 de outubro de 2021, com participação de 20 professores de matemática da rede estadual da Paraíba, durante a realização de um curso de formação continuada. Trata-se de um estudo de caso que foi fundamentado em uma pesquisa de caráter qualitativa, a qual, teve por objetivo investigar as potencialidades da construção de sólidos de Platão, Arquimedes, Catalan e Kepler-Poinsot com a utilização do *software GeoGebra*.

As atividades eram explicadas de forma síncrona por meio do google meet. Isto propiciou uma grande troca de experiências entre os cursistas e o ministrante durante sete encontros. Nesse período foram desenvolvidas sete atividades, abordando os seguintes tópicos: relação de Euler, planificação, área (lateral e total) e volume dos poliedros estudados ao longo do curso (Platão, Arquimedes, Catalan e Kepler-Poinsont). As atividades foram postadas no google *classroom,* juntamente com um material de apoio. Esse material era composto por uma apostila ensinando detalhadamente as construções dos poliedros com o *GeoGebra* e links de tutoriais postados no You Tube pelo professor ministrante. No início de cada aula, todos os cursistas relataram para a turma suas dificuldades na realização das construções e como aquela atividade ajudou na melhoria do processo de aprendizagem dos poliedros.

4.2 Coleta de dados

Os dados utilizados na pesquisa foram coletados por meio de múltiplas fontes de evidência: um questionário, aplicação das atividades, as observações diretas que foram analisadas durante o curso e também posteriormente por meio das gravações das aulas. De acordo com Yin (2015, p. 124):

> O uso de múltiplas fontes de evidência na pesquisa de estudo de caso permite que o pesquisador aborde uma variação maior de aspectos históricos e coportamentais. A vantagem mais importante apresentada pelo uso de fontes múltiplas de evidência, no entanto, é o desenvolvimento de linhas convergentes de investigação.

As observações diretas foram cruciais nesse trabalho, uma vez que os participantes estavam em seu contexto de mundo real. De acordo com Yin (2015, p. 118):

> Como o estudo de caso deve ocorrer no contexto de mundo real do caso, você está criando a oportunidade para observações diretas. Presumindo que os fenômenos de interesse não tenham sido puramente históricos, algumas condições sociais ou ambientais relevantes estarão disponíveis para observação. Essas observações servem ainda como outra fonte de evidência para fazer a pesquisa de estudo de caso.

Ainda sobre as observações diretas. Segundo Yin (2015, p. 118):

> As observações podem variar das atividades de coleta de dados formais às informais. Mas formalmente, os instrumentos observacionais podem ser desenvolvidos como parte do protocolo do estudo de caso, e um pesquisador de campo talvez tente investigar a ocorrência de determinados tipos de comportamentos durante alguns períodos de tempo no campo. Isso pode envolver a observação de reuniões, atividades de rua, trabalho em fábrica, salas de aula e outros.

As entrevistas da pesquisa ocorreram como conversas durante as aulas do curso, não foi uma entrevista estruturada, mas sim uma conversa guiada com objetivo investigativo. De acordo com Yin (2015, p. 116-117):

> Uma finalidade importante dessa entrevista pode ser simplesmente a de corroborar determinadas descobertas que você já considera estabelecidos mas não a de perguntar sobre outros tópicos de natureza mais ampla, abertamente. Nesse caso as questões especificas devem ser cuidadosamente elaboradas, para que você pareça genuinamente ingênuo sobre o tópico, permitindo que o entrevistado faça um comentário inédito sobre ele.

4.3 Aplicação das atividades

A primeira aula do curso ocorreu no dia 20 de agosto de 2021, iniciando às 19 horas. Nessa aula inicialmente apresentamos a equipe organizadora. Em seguida, explicamos o funcionamento do curso, tais como: horário de início e término, carga horária, plataforma que utilizamos (google classroom) para envio das atividades e postagem de material de apoio. Em seguida, perguntamos aos cursistas quais suas experiências utilizando o *GeoGebra*, alguns afirmaram que utilizavam o *software* no ensino de funções, como recurso para a visualização dos gráficos os demais que nunca utilizaram como ferramenta metodológica nas aulas.

Depois desse primeiro contato com os cursistas passamos para um momento de diálogo sobre a Geometria conduzida pelo Prof. Me. Wanderlânyo de Lira Barboza, no qual ele salientou alguns dos motivos apontados pela literatura para o abandono da Geometria. Também falou sobre os resultados positivos obtidos com seus alunos depois da utilização do *GeoGebra* em suas aulas, inclusive enviou um projeto para concorrer ao prêmio Mestres da Educação no ano de 2015 e veio a receber o prêmio. Dando continuidade, apresentamos as classes de poliedros estudadas ao longo do curso (poliedros de Platão, poliedros de Arquimedes, Poliedros de Catalan e Poliedros de Kepler-Poinsot) e, em seguida, começamos as construções dos poliedros de Platão por meio do *software GeoGebra*. Ficou como atividade investigativa construir representações dos poliedros de Platão. Para auxiliar nas construções foram disponibilizados um manual e um vídeo ambos elaborados pelo professor ministrante do curso.

A segunda aula ocorreu no dia 27 de agosto de 2021, iniciando às 19 horas. Inicialmente discutimos sobre as dificuldades encontradas na atividade da aula anterior, dos 20 cursistas 15 enviaram pelo google classroom, dentre os que conseguiram realizar a atividade tivemos cursistas que chegaram a utilizar suas construções em atividades com seus alunos e cursistas que alegaram já ter lecionado os conteúdos de Geometria e, por isso, não implementaram suas atividades com as construções. Os demais afirmaram não ter feito por falta de tempo, já que trabalham em escolas em tempo integral. Depois desse dialogo, mostramos uma forma diferente de obter a representação dos poliedros de Platão, em seguida, mostramos como obter as planificações e calcular o volume. Ao fim da aula passamos como atividade, elaborar questões utilizando as construções e conceitos estudados até aquele momento do curso.

A terceira aula ocorreu no dia 3 de setembro de 2021, iniciando às 19 horas. Inicialmente discutimos sobre a atividade da aula anterior, dos 20 cursistas 12 enviaram pelo *google classroom*, alguns cursistas comentaram que utilizaram a atividade elaborada para o curso com seus alunos e que eles gostaram muito, outros disseram que por já terem lecionado esse conteúdo não puderam aplicar em sala de aula. Eles ainda salientaram a importância da formação continuada para os professores e como foi proveitoso aprender as construções principalmente por que eles estavam no sistema online por causa da pandemia e o *GeoGebra* facilitou bastante a exposição dos conteúdos.

Depois, apresentamos de forma mais aprofundada os poliedros de Arquimedes, os procedimentos para obtenção de suas representações (truncamento, expansão e snubficação) e algumas questões do ENEM e da OBMEP que abordam esse tipo de poliedro. Mostrar essas questões foi importante para mostrar a relevância do estudo desses poliedros. Em seguida construímos com o *GeoGebra* a representação de um tetraedro truncado e de um cuboctaedro. Ficou como atividade construir a representação de um octaedro truncado e de um cubo snub.

A quarta aula ocorreu no dia 10 de setembro de 2021, iniciando às 19 horas. Dos 20 cursistas 12 enviaram pelo google classroom. Inicialmente discutimos sobre a atividade da aula anterior, alguns cursistas expuseram suas dificuldades nessa atividade, foi apontado como o motivo principal da não realização a enorme dificuldade na hora de realizar a snubificação do cubo, pois, colocaram as coordenadas de todos os vértices e depois acabaram se atrapalhando na hora de formar as faces. Os demais afirmaram ter sido mais difícil que as atividades anteriores, porém, que conseguiram realizar fazendo por partes, inicialmente colocava as coordenadas de uma face e depois a delimitava, repetindo o procedimento até concluir a construção do poliedro.

Dando continuidade à aula mostramos o conceito de poliedros duais e construímos utilizando o *software GeoGebra* os poliedros duais do tetraedro, do hexaedro e do octaedro. Ficou como atividade construir a representação do poliedro dual do icosaedro e do dodecaedro.

A quinta aula ocorreu no dia 17 de setembro de 2021, iniciando às 19 horas. Dos vinte cursistas doze enviaram pelo *google classroom*. Inicialmente discutimos sobre a atividade da aula anterior. Os cursistas afirmaram que ela foi mais fácil do que a atividade da terceira aula, pois, o procedimento para obter os poliedros duais é relativamente simples. Em seguida apresentamos de forma mais minuciosa os poliedros de Catalan, que são obtidos a partir dos poliedros de Arquimedes utilizando o conceito de dualidade.

Depois mostramos por meio do *GeoGebra* como usar o tetraedro truncado para obter o tetraedro triakis e o octaedro truncado para obter o hexaedro tetrakis. No fim da aula ficou como atividade construir a representação de um tetraedro triakis.

A sexta aula ocorreu no dia 24 de setembro de 2021, iniciando às 19 horas. Inicialmente discutimos sobre a atividade da aula anterior. Dos vinte cursistas, onze enviaram pelo google *classroom*. Depois abordamos os poliedros de Kepler-Poinsot, destacamos que levam esse nome, porque inicialmente, Kepler estudou o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado. Aproximadamente duzentos anos depois Poinsot estudou o grande dodecaedro e o icosaedro estrelado. Ele ainda provou que não existem outros além desses quatro.

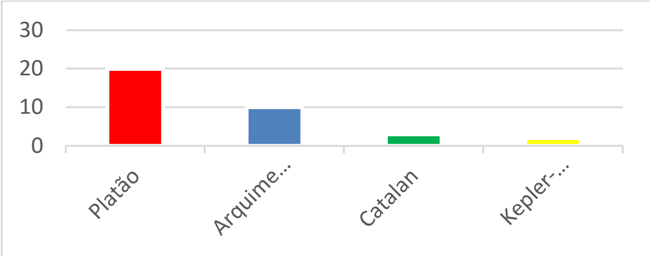
Por último, mostramos que os poliedros de Kepler-Poinsot são obtidos por meio de um procedimento chamado estrelamento. E realizamos uma construção da representação de um pequeno dodecaedro estrelado utilizando o *GeoGebra.* Ficou como atividade construir a representação de um pequeno dodecaedro estrelado com o *GeoGebra.*

A sétima e última aula ocorreu no dia 01 de outubro de 2021, iniciando às 19 horas. Dos vinte cursistas, doze enviaram pelo *google classroom*. Inicialmente discutimos sobre a atividade da aula anterior. Em seguida mostramos como obter um icosidodecaedro, um pequeno dodecaedro estrelado, um grande dodecaedro e um dodecaedro *snub*. Todos eles a partir de um dodecaedro. Durante a obtenção desses poliedros perguntamos aos cursistas a qual classe de poliedros eles pertenciam e qual seus nomes. Os cursistas conseguiram identificar as características de cada um e os procedimentos de obtenção, explicaram a diferença entre os processos de obtenção e nomearam corretamente os poliedros.

Ao longo do curso as atividades de investigação serviram para expor as dificuldades encontradas pelos cursistas ao realizar determinada construção com o auxílio do *GeoGebra*. Foi observado que na medida que eles foram tomando familiaridade com o *software* as atividades eram entregues mais rápido. Muitos cursistas postavam suas construções em suas redes sociais e falaram sobre a repercussão das pessoas que visualizaram e comentaram. Achando aquelas construções bonitas e interessantes.

A respeito de quais classes de poliedros os cursistas conheciam no momento da inscrição do curso, observamos que duas classes eram bem mais conhecidas, os poliedros de Platão e os de Arquimedes com 100% e 50% respectivamente. Já os poliedros de Catalan e os de Kepler-Poinsot eram praticamente desconhecidos, com apenas 15% e 10% respectivamente.

Classes de poliedros



Fonte: Dados da pesquisa.

Quando perguntados se eles já ensinaram sobre algumas das classes de poliedros estudadas nessa pesquisa, quinze cursistas responderam que sim e cinco cursistas responderam que não. Em caso da resposta afirmativa foi pedido que comentasse sobre a experiência. Diversos relatos interessantes surgiram desse questionamento e observamos que muitos construíram os poliedros de Platão com diversos materiais.

Os cursistas foram nomeados de Participantes 1, Participante 2 e assim em diante, até Participante 20. Segundo o relato do Participante 1, a experiência foi fantástica, pois, utilizou a dobradura de papel na construção dos poliedros de Platão. O Participante 2 relatou que trabalhou a construção dos poliedros com jujuba e palitos e que seu objetivo era trabalhar os elementos dos poliedros, potencializar a visualização das faces, vértices e arestas e que seus alunos gostaram bastante e mostraram maior interação com a aula prática. O Participante 3 relatou que trabalhou no ensino fundamental com a construção dos poliedros utilizando palitos de churrasco e massa de modelar e a partir disso explorou as características. O Participante 4 relatou que trabalhou um projeto sobre os poliedros de Platão e que utilizando material reciclável (cabos de vassouras usados) construíram os Poliedros. O Participante 5 relatou que trabalhou durante suas aulas com uma turma do 3º ano no Ensino Médio usando quadro e giz. Porém, que na ocasião os alunos tiveram dificuldades de compreender os conceitos, pois, os desenhos eram difíceis de serem feitos e acabaram não surtindo o resultado esperado. Os outros quinze participantes relataram suas experiências, com resultados positivos, porém, não explicaram quais recursos foram utilizados. Nenhum dos cursistas disse ter utilizado o *software GeoGebra* no ensino dos poliedros.

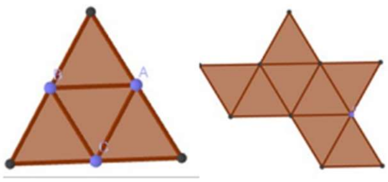
Quando perguntados se eles já haviam utilizado o *GeoGebra* em suas aulas, 70% afirmou ter utilizado e 30% disse que não. Para os cursistas que responderam sim, foi pedido que comentasse um pouco sobre a experiência com o *software.*

Segundo o relato do Participante 1 a experiência foi excelente e o *GeoGebra* possibilitou uma visualização que o quadro não permite. Assim, os alunos conseguiram compreender melhor o conteúdo. O Participante 2 relatou que, em praticamente todas as suas aulas, utiliza o *GeoGebra* para demonstrar os conceitos matemáticos. O Participante 3 disse que utilizou o *software* brevemente em algumas aulas, pois, seu domínio ainda é pouco. O Participante 4 afirmou que sua experiência foi boa, mas, foi limitada por conhecer apenas os comandos básicos do *software*. Os demais participantes relataram ter utilizado no ensino de funções, mostrando a representação gráfica e que foi uma experiência muito instigante para os alunos, pois, eles conseguiram visualizar a representação gráfica de funções e entender vários pontos essenciais no ensino desse conteúdo.

Na atividade elaborada pelo Participante 1 é explorada a capacidade de visualização, sendo utilizado o *GeoGebra* facilitou demasiadamente a compreensão do sólido formado a partir das planificações.

Figura 31- Questão 1

Questão 01
Fernanda quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?
a) Cubo e tetraedro.

b) Tetraedro, prisma de base pentagonal

c) Tetraedro e octaedro regular.

d) Cilindro e prisma.

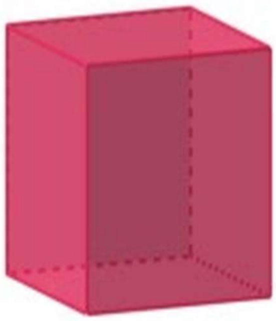
e) Octaedro e tronco de cone.

Fonte: Dados da pesquisa.

Outra questão foi elaborada pelo Participante 2, contendo o conceito de volume. Na atividade abaixo, podemos notar que a construção do cubo com o *GeoGebra* foi importante para melhorar a visualização do problema.

Figura 32 - Questão 2

1. Sabendo que o cubo abaixo tem aresta de 2 cm, então seu volume, mede?

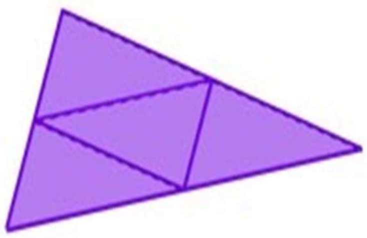


Fonte: Dados da pesquisa.

O Participante 3 explorou em sua atividade o conceito de área total de um poliedro a partir da sua planificação.

Figura 33 - Questão 3

2. A figura é a planificação de um tetraedro regular de aresta 1 cm, então a área total do tetraedro, vale? *

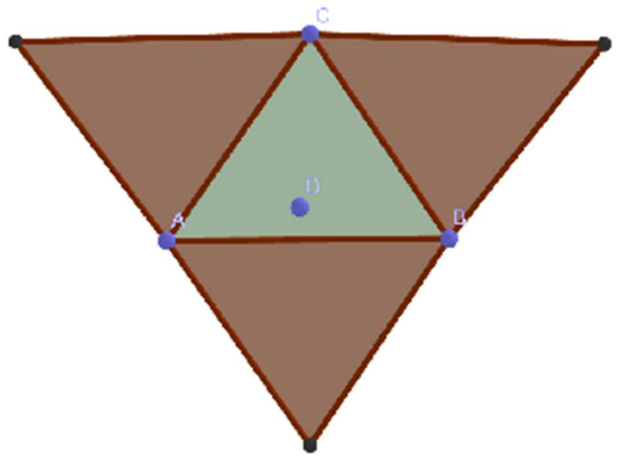


Fonte: Dados da pesquisa.

O participante 04 utilizou o conceito de perímetro para a resolução da questão elaborada por ele. Os demais cursistas elaboraram questões com conceitos semelhantes a essas quatro atividades.

Figura 34 - Questão 4

1- A figura abaixo representa a planificação de um pirâmide de base triangular. Calcule o seu perímetro, sabendo que sua aresta mede 8 cm.



Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar que mesmo os cursistas tendo conhecido outras classes de poliedros durante o curso eles se sentem mais à vontade em trabalhar questões com os poliedros de Platão. E observamos também que conceitos matemáticos da geometria plana (área e perímetro) puderam ser estudados a partir do estudo dos poliedros e esses resultados foram positivos ao utilizar o *software.*

CAPÍTULO V: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, podemos observar a partir dos dados coletados que o *GeoGebra* era pouco utilizado pelos cursistas em suas aulas, podemos salientar alguns fatores como a falta de domínio com *software,* pouco tempo livre para os professores elaborarem atividades com o *software* e também pela falta de recursos das escolas. Os relatos dos cursistas mostraram que na grande maioria das vezes era usado apenas para o ensino de funções. Depois do curso de formação continuada os cursistas perceberam que ele pode ser usado para o ensino e a aprendizagem de muitos conteúdos da matemática. Enfatizamos o ensino e a aprendizagem de diversas classes de poliedros.

Ao longo do curso observamos o desenvolvimento da maioria dos cursistas e buscamos entender os motivos da evasão de alguns. Para a evasão encontramos como resposta a carga horária de trabalho nas escolas integrais que dificultou a dedicação em estudar as construções com a utilização do *GeoGebra* e, desse modo, para realizar algumas das atividades, isso levou a uma desmotivação.

O desempenho dos demais foi satisfatório, muitos conseguiram além de dominar o básico com o *GeoGebra* fazer uso de ferramentas e métodos mais avançados. Partindo das orientações vistas no curso eles conseguiram deduzir potencialidades em outros conteúdos. E desse modo implementar sua prática. Dentre os que conseguiram se destacar nas construções podemos observar que tinham uma carga horária menor e isso possibilitava mais tempo para se dedicar a sua formação continuada.

Conseguimos observar as vantagens pedagógicas e as dificuldades da utilização do *software GeoGebra* na construção de diversas classes de poliedros. Dentre as vantagens estão a visualização e manipulação dos sólidos por meio de sua construção. Já as dificuldades podemos observar que exige um tempo considerável de estudos por parte dos professores e, que muitas vezes, os professores estão sobrecarregados com outras coisas, principalmente os professores que trabalham em escolas em tempo integral. Outra dificuldade apresentada por poucos foi a manipulação do programa por pouca familiaridade com a tecnologia.

Nesta pesquisa a construção das representações de diversas classes de poliedros com a utilização do *GeoGebra* possibilitou a demonstração de que diversos conceitos da geometria plana são explorados a partir das construções com o *software.* Esses conceitos vão desde as noções primitivas como ponto, reta e plano, até conceitos bem definidos e amplamente utilizados no cotidiano como ângulo, paralelismo, polígono, rotação, etc. Então a inserção do

GeoGebra nas aulas de Matemática se justifica e mostra-se uma boa alternativa para a revitalização da geometria se implementado de forma bem planejada e uma vez observado que a geometria plana e espacial, quando ensinadas de forma incindível, possibilita uma retomada de conceitos estudados em anos anteriores, sendo assim proporciona um ensino em espiral.

O prelúdio de nossa pesquisa foi a busca de dissertações, teses e livros relacionados ao tema poliedros. A partir daí selecionamos as obras que mais se aproximavam do objetivo da pesquisa e, depois de realizada essa revisão da literatura, apresentamos um recorte histórico da geometria, partindo da matemática grega, ressaltando os poliedros e como este objeto matemático foi mencionado em obras como em *Os Elementos* de Euclides e no Timeu-Crítias de Platão.

Em seguida, objetivamos esclarecer eventuais dificuldades no ato de definir o objeto matemático poliedro, partindo da Grécia antiga até os dias atuais, assim como categorizamos as suas distintas concepções (como sólido, como de interior vazio e como estrutura). Observamos a partir dos relatos dos cursistas que em suas construções com materiais manipuláveis eles abordam diferentes concepções de acordo com o material utilizado. Esclarecemos de acordo com a literatura a diferença entre poliedros de Platão e poliedros regulares. Estes, que muitas vezes são conceitos utilizados como sinônimos. Em seguida, os utilizamos para obter por meio de alguns procedimentos (truncamento, expansão e snubificação) os poliedros de Arquimedes. Apresentamos o conceito de poliedros duais, bem como o procedimento, por meio do *software GeoGebra*. E com ele exploramos a dualidade entre os poliedros, para a partir dos Arquimedianos obter os Sólidos de Catalan. Mostramos o procedimento (estrelamento) para a obtenção dos poliedros de Kepler-Poinsot.

Salientamos as biografias dos matemáticos que se dedicaram ao estudo de todos esses poliedros. Explicamos as características (número de faces, vértices e arestas) dos poliedros regulares, arquimedianos, de Catalan e de Kepler-Poinsot. Analisamos, de forma meticulosa, se eles satisfazem a relação de Euler. Depois, sintetizamos essas informações em uma tabela.

Por fim, apresentamos o que a literatura aponta como as possíveis razões para o abandono do ensino de geometria no Brasil. Destacamos o insuficiente domínio de tópicos relacionados à Geometria, por parte dos professores, a organização dos conteúdos do livro didático, o apego dos professores pelo livro didático na hora de planejar suas aulas, a promulgação da lei 5692/71, que possibilitou aos professores escolherem os assuntos a serem ensinados e o potencial da utilização do *software GeoGebra* no resgate desse ramo da matemática, em especial no ensino de poliedros.

Algo que merece ser salientado é que durante essa pesquisa notamos a escassez de materiais norteadores para a construção das representações dos poliedros e de pesquisas que tenham como foco determinadas classes de poliedros como os de Kepler-Poinsot e os de Catalan. Os que são mais abordados em pesquisas, livros e canais do You Tube são os regulares. Os outros poliedros praticamente não possuem material para construções de suas representações. Esperamos que essa pesquisa possa contribuir para destacar a relevância do ensino da Geometria e saliente a importância do ensino dos poliedros de diversas classes por meio do *GeoGebra.* Ao longo da pesquisa outros questionamentos surgiram e esperamos que sejam respondidos em pesquisas posteriores, um desses questionamentos é se o uso constante do *GeoGebra* nas aulas de matemática acabaria perdendo essa capacidade de motivação nos alunos.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática.** Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

ALMEIDA, C. R. M. de. **Sólidos de Platão e seus duais: construção com material concreto e representações por *GeoGebra*.** Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, p. 220. 2015.

ALMEIDA, C. R. M.; KALEFF, A, M, M, R. **Poliedros de Platão sob uma perspectiva de educação matemática usando recursos didáticos concretos e virtuais**. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. São Paulo. 2016.

ALMEIDA, T. C. S. **Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseado no renascimento.** Dissertação (mestrado profissional) - Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo, p. 185. 2010.

______. **A base de conhecimento para o ensino de sólidos arquimedianos**. Tese - Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo, p. 188. 2015.

BARALDI, M. L. **Poliedros de Kepler-Poinsot: uma verificação da relação de Euler com jujubas, canudos e varetas.** Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista Bauru, SP, p. 90. 2018.

BENDICK, J. **Arquimedes uma porta para a ciência.** 2ª ed. São Paulo: Editora Odysseus, 2006.

BERLINSK, D. **Os Elementos de Euclides**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2018.

BICUDO, I. **Os Elementos/ Euclides**. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

BIANCONI, R. **Poliedros convexos de faces regulares.** São Paulo: 2019

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial.** Rio de Janeiro: editora copyright 2005.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: editora Atual 1992.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

FILHO, I. O. H; CRUZ, M. P. M. ***GeoGebra* soluções e práticas na Geometria Analítica**. Curitiba: editora Appris 2020.

FLOOD, R. **A história dos grandes matemáticos.** São Paulo: M.books, 2013.

FOSSA, J. A; LEÔNCIO, S. M. S. **Um Enigma sobre o nome de Leonhard Euler.** Natal: Revista História da Matemática para professores. 2020.

GARBI, G. G. A Rainha das Ciências – **Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

HAWKING, S. **Os gênios da ciência: sobre os ombros de gigantes**. Trad. Marco Moriconi e Lis Horta Moriconi. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 5ª ed. São Paulo. Editora Saraiva, 2017.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos**. Niterói: EdUFF, 2003.

LAMAS, R. C. P; MENDES, I. **GeoGebra Animações Geométricas**. 1ª ed. Curitiba. Editora Appris, 2017.

LANDIM, N. P. **Razão Áurea: Expressando a beleza desse número para o ensino médio.** Dissertação – Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, p. 71. 2014.

LAUNAY, M. **A Fascinante História da Matemática.** 1º ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

LIMA, E. L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. César. **A matemática do ensino médio.** 6ª ed. V. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, S. **Porque não ensinar geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, p. 3-13, 1995.

LUNDY, M. **Número sagrado: As qualidades secretas das quantidades.** 1ª ed. São Paulo: É Realizações. 2018.

MACHADO, N. J. **Os poliedros de Platão e os dedos da mão**. 8ª ed. São Paulo: Scipione, 2000.

MARTINEAU. J. **O livro das coincidências: a misteriosa Harmonia dos Planetas.** 1ª ed. São Paulo: É Realizações. 2015.

MENEZES, J. E; BRAZ, R. A. F. A. **O ensino de Cálculo diferencial mediado pelo aplicativo *GeoGebra***. In: BRAZ, RICARDO. Evidências científicas no ensino superior com o *GeoGebra*. Curitiba: Editora CRV, 2019.

OLIVEIRA, M. S. **O modelo euclidiano nas abordagens dos poliedros de Platão em livros didáticos: reflexos do Movimento da Matemática Moderna?** Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, p. 134. 2018.

PAVANELO, R. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil**. Zetetiké, n. 01, UNICAMP, Campinas, 1993.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, O. J. **A relação de Euler para poliedros**. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, p. 51. 2014.

SILVA, W. O. **Formação continuada: Um estudo sobre integração de tecnologia digital para ensinar poliedros.** Tese (doutorado acadêmico) - Universidade Anhanguera, São Paulo, p.225. 2018.

SUTTON, D. **Os sólidos Platônicos e Arquimedianos: O pequeno guia do espaço tridimensional.** São Paulo: É Realizações, 2015.

TOMEI, C. **Euclides a conquista do espaço**. São Paulo: editora Odysseus, 2006.

YIN, R. K. **Estudo de caso: Planejamento e Métodos**. 5ª edição. Porto alegre: Editora Bookman, 2015.

ZINGANO, M. **Platão e Aristóteles o fascínio da filosofia.** São Paulo: editora Odysseus, 2005.