Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PERSPECTIVAS SOBRE A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU E SUAS CONCEPÇÕES NO ENEM

por

José Edmilson Melo da Silva

Dissertação de Mestrado apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

JOSÉ EDMILSON MELO DA SILVA

PERSPECTIVAS SOBRE A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU E SUAS CONCEPÇÕES NO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande

18 de Marco de 2022

S586p Silva, Jose Edmilson Melo da.

Perspectivas sobre a equação do segundo grau e suas concepções no ENEM [manuscrito] / Jose Edmilson Melo da Silva. - 2022.

66 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa , 2022.

"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo , Departamento de Matemática - CCT."

1. Concepções. 2. Ensino. 3. Equação. 4. Educação matemática. 5. Exame Nacional do Ensino Médio. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

JOSÉ EDMILSON MELO DA SILVA

PERSPECTIVAS SOBRE A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU E SUAS CONCEPÇÕES NO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em 18 de março de 2022

BANCA EXAMINADORA

Aldo trajano lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva (Membro externo)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico este trabalho a minha família, aos meus amigos e à Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) por ter despertado em mim o gosto pela Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à todos os meus colegas de trabalho, que fazem a equipe da Escola de Referência em Ensino Médio Frei Epifânio, pelo apoio e motivação que sempre me proporcionaram. Em especial, à equipe gestora, que se esforçou em viabilizar as condições que me permitiram conciliar as atividades profissionais e acadêmicas durante essa longa trajetória rumo ao título de mestre em matemática.

Aproveito, ainda, para agradecer ao meu orientador, o prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, pela paciência e pelas valiosas orientações ao longo da produção deste trabalho. Além disso, sou grato também aos examinadores deste trabalho, a profª. Dra Luciana Freitas e o prof. Dr. Severino Horácio da Silva pelas suas significativas contribuições ao mesmo.

Por fim, deixo registrado meus agradecimentos à minha família e amigos, que também sempre me apoiaram e à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que além de despertar em mim o gosto pela Matemática, foi também uma apoiadora em minha formação profissional a partir do Programa de Iniciação Científica Jr. em Matemática e do Programa OBMEP na Escola.

"Os encantos dessa sublime ciência se revelam apenas àqueles que tem coragem de irem a fundo nela."
(Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de investigar como a noção de equação do segundo grau é concebida na Educação Básica a partir de suas diferentes concepções. Para tanto, iniciamos com o desenvolvimento de um estudo histórico e, posteriormente, analisamos como tal conceito é abordado nos livros de matemática. Então, estabelecemos um diálogo de tais estudos com as perspectivas da Educação Matemática, a fim de apreciarmos os saberes necessários a prática pedagógica no ensino das equações. Daí, após apresentarmos a categorização das concepções de equação, propostas por Ribeiro (2013), realizamos uma pesquisa no Exame Nacional do Ensino Médio. Como passos metodológicos, restringimos nossa pesquisa aos últimos 10 anos do exame e sondamos, dentro das questões da área de Matemática e suas tecnologias, apenas as que tratavam do nosso objeto de estudo. Assim, objetivando compreender como o exame contempla as equações do segundo grau a partir de suas diferentes concepções, procedemos uma análise minuciosa de cada questão selecionada, classificando-as quanto a pertinência a essas concepções. Por fim, verificamos, em nossos resultados, uma abordagem frequente da concepção geométrica, um trabalho razoável com questões que articulam elementos característicos das concepções pragmática, processual e aplicacional e um baixo enfoque para a concepção estrutural.

Palavras-chave: Concepções. Ensino. Equação. Educação matemática. Exame Nacional do Ensino Médio.

ABSTRACT

This work was developed with the objective of investigating how the notion of high school equation is conceived in Basic Education from its different conceptions. To do so, we started with the development of a historical study and, later, we analyzed how this concept is approached in mathematics books. So, we establish a dialogue of such studies with the perspectives of Mathematics Education, in order to appreciate the knowledge necessary for pedagogical practice in teaching equations. Hence, after presenting the categorization of equation conceptions, proposed by Ribeiro (2013), we carried out a survey in the National High School Exam. As methodological steps, we restricted our research to the last 10 years of the exam and probed, within the issues of the area of Mathematics and its technologies, only those that dealt with our object of study. Thus, aiming to understand how the exam contemplates the equations of the second degree from their different conceptions, we proceeded to a detailed analysis of each selected question, classifying them according to their relevance to these conceptions. Finally, we verified, in our results, a frequent approach to the geometric design, a reasonable work with questions that articulate characteristic elements of the pragmatic, procedural and applicational conceptions and a low focus on the structural design.

Keywords: Conceptions. Teaching. Equation. Math education. National High School Exam.

Notações e Simbologias

- $\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais
- $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais
- $\in$ pertence
- $\notin$ pertence
- $\neq$ diferente

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

- BNCC: Base Nacional Comum Curricular
- ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio
- INEP: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira
- PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais
- PNLD: Plano Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa foi motivada pelas constantes inquietações provocadas por uma problemática muito recorrente no cotidiano do professor de matemática do ensino básico. Tal problemática envolve o desafio de compreender e poder intervir sobre os problemas e dificuldades de ensino e de aprendizagem do conceito de equação, evidenciados tanto na prática docente do autor, como também em trabalhos científicos que se debruçam a investigar o ensino de álgebra na educação básica.

Nesse contexto, o objeto de estudo desse trabalho é o conceito de equação, em especial, a equação polinomial do segundo grau. Esse conceito matemático é muito importante e se faz presente nas mais variadas situações, sejam elas cotidianas ou científicas. Mesmo assim, o que as pesquisas vem mostrando é que os estudantes, mesmo após vivenciarem processos de ensino-aprendizagem, não conseguem compreender todos os aspectos desse conceito e apenas se remetem a ele de forma mecânica e descontextualizada, evidenciando apenas processos e técnicas de resolução, não sabendo abstraí-lo em contextos variados e nem mesmo compreender suas diferentes concepções.

1.1 Objetivos

A nossa pesquisa tem o objetivo de investigar como a noção de equação do segundo grau é concebida na Educação Básica a partir de suas diferentes concepções. Para tanto, precisamos fragmentar nosso objetivo principal nos seguintes objetivos mais específicos:

- Compreender os aspectos epistemológicos das equações a partir da História da Matemática;
- Analisar a noção de equação do segundo grau sob a ótica da matemática através das principais técnicas de resolução adotadas no ensino básico, explorando sua relação com a função quadrática;
- Investigar as tendências no ensino das equações na perspectiva da Educação Matemática, promovendo um diálogo entre pesquisas já desenvolvidas;
- Caracterizar e discutir as diferentes concepções da noção de equação e sua pertinência para tal pesquisa;
- Sondar, identificar, categorizar e discutir as diferentes concepções da noção de equação na Educação Básica a partir de uma análise do Exame Nacional do Ensino Médio.

1.2 Organização

A fim de atingir nossos objetivos e apresentar de forma coerente os estudos realizados por esta pesquisa, nosso trabalho está organizado em quatro capítulos de desenvolvimento, além da introdução e das conclusões.

Iniciamos o Capítulo 2 nos debruçando a investigar e discutir aspectos epistemológicos do conceito de equação, advindos da forma como as equações surgiram e eram tratadas ao longo da história. Em nossa análise, trazemos um pouco da história da matemática desenvolvida por importantes povos, como os babilônios, egípcios, gregos, hindus, árabes e europeus.

No Capítulo 3 apresentamos uma formalização matemática para a noção de equação do segundo grau, levando em consideração os principais métodos de resolução adotados na Educação Básica. Além disso, discutimos brevemente algumas relações existentes entre equação polinomial do segundo grau e a função quadrática.

Como não poderia ser diferente, no Capítulo 4 discutimos algumas concepções educacionais a cerca do ensino de matemática, enfatizando o tratamento das equações na educação básica. Ainda nesse capítulo, são apresentadas as concepções da noção de equação, categorizadas em um perfil conceitual elaborado por Ribeiro (2013), que nortearão nossa pesquisa a caminho dos objetivos anteriormente traçados.

Por fim, utilizando as concepções de tal perfil conceitual, desenvolvemos uma pesquisa objetivando analisar como as equações do segundo grau se fazem presentes na educação básica e trazemos, no Capítulo 5 deste trabalho, seus principais resultados, estabelecendo um diálogo com resultados de outras pesquisas da área a fim de enriquecer nosso trabalho e contribuir para o debate nessa área do conhecimento.

Feito isso, explanamos e discutimos, no Capítulo 6 do nosso trabalho, as considerações mais relevantes levantadas a partir dos estudos bibliográficos realizados e da pesquisa desenvolvida com o Exame Nacional do Ensino Médio.

2 AS EQUAÇÕES NA HISTÓRIA

Antes mesmo que o homem passasse a desenvolver a escrita ou mesmo a viver em sociedade, a matemática já se fazia presente em sua essência, na necessidade de contagem. Tal capacidade se deu a partir do momento em que o homem foi capaz de comparar dois conjuntos de objetos, estabelecendo entre eles uma correspondência um a um. Para que isso ocorresse era comum o uso de pedras, riscos ou mesmo dos dedos da mão, o que provavelmente levou a adoção do sistema de numeração decimal, o qual adotamos até hoje.

A partir do momento em que o homem começa a viver em sociedade, desenvolver a agricultura, comércio e engenharia, por exemplo, a primitiva noção de contagem não é mais suficiente para sanar suas necessidades. Então, a cada passo do desenvolvimento da humanidade, novas noções matemáticas são desenvolvidas e, entre elas, as equações.

Ao longo de nossa vida, certamente nos deparamos com inúmeras situações que nos levam a fazer uso da noção de equação. Seja na escola, na universidade ou mesmo no cotidiano, elas estão intimamente presentes na resolução de problemas dos mais variados contextos. Não é atoa que, de acordo com o livro *O Romance das Equações Algébricas*, Garbi (2010, p. 1) destaca que as equações "constituem, pelo menos do ponto de vista prático, a parte mais importante da matemática".

Com aplicações em praticamente todas as áreas da matemática, as equações são também de suma importância nas mais variadas ciências, na tecnologia e também no dia a dia de qualquer sociedade atual, assim como também foi nas civilizações mais remotas que se tem registros. Essas civilizações aperfeiçoaram sua agricultura, comércio, economia e engenharia a partir do desenvolvimento de uma matemática pragmática, explorada na resolução dos problemas cotidianos, nos quais o uso de equações era constante.

Nesse contexto, abordaremos um pouco da História da Matemática, dando ênfase ao desenvolvimento da noção de equação por povos como os babilônios, egípcios, gregos, hindus, árabes e europeus. A respeito da matemática desses povos,Garbi (2010, p. 1) afirma que praticamente "qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado direta ou indiretamente por meio de equações".

2.1 Os babilônios

Iniciaremos discutindo um pouco sobre os babilônios, um conjunto de povos que viveram entre 3500 a.C. até os primeiros séculos da era cristã na região da antiga Mesopotâmia. Estes faziam seus registros em tábuas de argila, pois enfrentavam escassez de papiros. Embora antigamente pouco se soubesse sobre eles, as tábuas permitiram a conservação de grande parte de seus escritos e possibilitaram que hoje tenhamos conhecimento da matemática desenvolvida por eles.

Em relatos do livro *Introdução à história da matemática*, Eves (2011) detalha que dentre milhares de tábuas encontradas em expedições arqueológicas do final do século XIX, pelo menos 400 tratavam de tópicos exclusivamente matemáticos, abordando listas de problemas, anotações comerciais, registros econômicos, cálculos aritméticos, entre outros. Esses registros, feitos em escrita cuneiforme, que datam entre 2100 a.C. até 300 d.C., mostraram que esses povos dominavam desde cedo uma determinada aritmética.

De acordo com Eves (2011), o sistema de numeração posicional de base 60 dos babilônios ficou bastante evidenciado em tábuas que tratavam de atividades como agricultura, comércio e economia. Estas apresentavam, dentre outras coisas, operações básicas, cálculos de juros simples e compostos, além de tábuas de quadrados, cubos e exponenciais.

Na geometria, os babilônios também já dominavam, por volta de 2000 a.C., métodos para cálculo de áreas e volumes, utilizando um arredondamento para π em $3\ 1/8 = 3,125$. Além disso, faziam uso de equações em diversas situações geométricas, usando-as, ainda, como fórmulas gerais aplicadas à problemas. Para Eves (2011, p. 61 -63), sua geometria era predominantemente algébrica, classificando-os como "mais fortes em Álgebra do que em Geometria"e mesmo sem uma álgebra simbólica desenvolvida, como temos hoje, naquele período "não só resolviam equações quadráticas, (...) como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro)".

Nas famosas tábuas de Yale, dentre as quais podemos destacar a Plimpton 322, datada entre 1900 e 1600 a.C., evidenciou-se que os babilônios já conheciam e usavam a famosa relação do teorema de Pitágoras para triângulos retângulos muito antes de Pitágoras e também trabalhavam com relações de semelhança e proporcionalidade em triângulos. Para Eves (2011, p.66), "parece evidente que os babilônios desse remoto período tinham ciência da representação paramétrica geral dos ternos pitagóricos primitivos".

Figura 2.1.1 – Plimpton 322

Fonte: Eves (2011, p. 65)

Ainda de acordo com Eves (2011), em outra tábua, dois problemas interessantíssimos nos chamam a atenção. Um deles pode ser apresentado em nosso sistema de numeração decimal como

$$1 + 2 + 2^2 + \cdot + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1.$$

Analisando o primeiro membro da igualdade verificamos que trata-se da soma dos 10 primeiros termos de uma progressão geométrica de termo inicial "$a_1 = 1$" e razão "$q = 2$". Utilizando os conhecimentos atuais, verificamos facilmente que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2^{10} - 1 = 2^9 + 2^9 - 1.$$

Já o outro problema bastante intrigante, como destaca o autor, pode ser expresso como

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = 385.$$

Para esse tipo de soma é comum usarmos a fórmula da soma dos quadrados dos n primeiros naturais, dada por

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

que quando aplicamos $n = 10$, obtemos exatamente 385 como resultado.

Feitos como esses nos fazem acreditar que os babilônios tivessem conhecimento de técnicas avançadas ou até mesmo de fórmulas para proceder esses cálculos, tais quais usamos atualmente, porém apresentadas sem tanto rigor algébrico.

Apesar de não utilizarem uma linguagem algébrica simbólica, os babilônios resolviam equações do segundo grau utilizando um método "passo a passo" similar a substituição em uma fórmula e sua abordagem partia, no geral, de situações contextualizadas nas suas atividades práticas. Para ilustrar o método citado acima, considere o problema: *"Adicionei* $\frac{4}{3}$ *do lado de um quadrado ao triplo de sua área, obtendo* $\frac{20}{9}$*. Determinar o lado do quadrado".* De acordo com Pitombeira (2004), para os babilônios, resolver um problema como esse, cuja equação modeladora pode ser dada por $ax^2 + bx = k \Leftrightarrow 3x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{20}{9}$, se daria do seguinte modo:

- Considere $\frac{4}{3}$.
- Multiplique 3 por $\frac{20}{9}$, obtendo $\frac{60}{9}$.
- Divida $\frac{4}{3}$ em duas partes: $\frac{2}{3}$.
- Multiplique $\frac{2}{3}$ por $\frac{2}{3}$, obtendo $\frac{4}{9}$.
- Some $\frac{4}{9}$ a $\frac{60}{9}$, o que resulta em $\frac{64}{9}$.
- Isso é o quadrado de $\frac{8}{3}$.
- Subtraia $\frac{2}{3}$ de $\frac{8}{3}$, resultando em $\frac{6}{3} = 2$.
- Faça o quociente de 2 por 3, resultando em $\frac{2}{3}$, que é lado do quadrado.

Para analisarmos a solução babilônica, considere uma equação do 2º grau, dada por $ax^2 + bx = k$, com $a \neq 0$ e $k = -c$ positivos e note que os passos explicitados acima são equivalentes aos seguintes:

- Considere b.
- Multiplique a por k, obtendo ak.
- Divida b em duas partes, obtendo $\frac{b}{2}$.
- Multiplique $\frac{b}{2}$ por $\frac{b}{2}$, obtendo $\frac{b^2}{4}$.
- Some $\frac{b^2}{4}$ com ak, resultando $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak$.
- Isso é o quadrado de $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak}$.

- Subtraia $\frac{b}{2}$ do valor anterior, obtendo $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak} - \frac{b}{2}$.
- Faça o quociente do valor encontrado por a, logo temos: $\frac{1}{a}\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak} - \frac{b}{2}\right)$, que é lado do quadrado.

Por outro lado, considerando a equação do 2º grau, dada por $ax^2 + bx = k$, com $a \neq 0$ e $k = -c$ positivos, podemos resolvê-la pelo método tradicional de aplicação na conhecida fórmula de Bháskara e sabemos que uma de suas soluções reais pode ser encontrada da seguinte forma:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ak}}{2a} = \frac{1}{a}\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak} - \frac{b}{2}\right). \tag{2.1}$$

Percebe-se, então, que o método dos babilônios é equivalente a substituição dos coeficientes da equação na fórmula (2.1). Esse fato nos mostra que os babilônios tinham conhecimento da fórmula de Bháskara, pelo menos para soluções positivas. Esse destaque da solução positiva não ocorre por acaso, visto que os problemas dos babilônios eram oriundos de situações cotidianas, na grande maioria advindos de uma geometria algébrica onde a solução representava alguma medida de comprimento, área ou volume, não fazendo sentido uma solução negativa.

Em suas resoluções de equações quadráticas, os babilônios apresentam, em uma de suas tábuas, uma equação da forma $ax^2 + bx = k$ que é multiplicada por a, obtendo-se $(ax)^2 + axb = ak$, sendo esta resolvida para a incógnita ax. Tal feito é reconhecido por Pitombeira (2004, p. 4) como o que seria "seguramente um dos primeiros casos registrados de uma mudança de variáveis!".

Em algumas outras tábuas, as equações do 2º grau aparecem na cultura babilônica a partir da resolução de sistemas de equações como, por exemplo:

$$\begin{cases} a + b = r \\ a \cdot b = s. \end{cases} \tag{2.2}$$

Sistemas desse tipo sugerem que os babilônios estudavam a relação entre perímetro (ou semiperímetro) e área de terrenos retangulares. Além disso, os métodos de resolução provavelmente foram deduzidos de situações geométricas. Embora possamos solucionar o sistema (2.2) fazendo uma substituição e obtendo uma equação do 2º grau, não era assim que procediam os babilônios. De acordo com Pitombeira (2004), para resolver um problema que fosse modelado através de um sistema como o que apresentamos acima, os babilônios procediam do seguinte modo:

Divida a primeira equação de (2.2) por 2, obtendo:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{r}{2}. \tag{2.3}$$

Eleve ambos os membros de (2.3) ao quadrado:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}.$$

Da igualdade obtida subtraia, membro a membro, a segunda equação do sistema:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{r^2}{4} - s.$$

O que equivale a:

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = \sqrt{\frac{r^2}{4} - s}.$$

A partir de

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}} = \frac{a-b}{2} = \sqrt{\frac{r^2}{4} - s}$$

obtemos

$$\frac{a-b}{2} = \sqrt{\frac{r^2}{4} - s}. \tag{2.4}$$

Note, pelas equações (2.3) e (2.4), que:

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - s}$$

e

$$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - s}.$$

No que segue, vamos aplicar esse método ao sistema abaixo.

$$\begin{cases} a + b = 27 \\ a \cdot b = 176 \end{cases} \tag{2.5}$$

Para resolução do sistema (2.5), precisamos dividir a 1ª equação do sistema por 2, obtendo

$$\frac{a+b}{2} = \frac{27}{2}. \tag{2.6}$$

Eleve ao quadrado:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{729}{4}.$$

Da igualdade obtida subtraia, membro a membro, a segunda equação do sistema:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{729}{4} - 176 = \frac{25}{4}.$$

O que equivale a:

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Como

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}} = \frac{a-b}{2} = \frac{5}{2},$$

temos que

$$\frac{a-b}{2} = \frac{5}{2} \tag{2.7}$$

A partir das equações (2.6) e (2.7), resulta que:

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{27}{2} + \frac{5}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

e

$$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{27}{2} - \frac{5}{2} = \frac{22}{2} = 11.$$

Tanto esse como alguns métodos análogos se faziam comuns na resolução babilônica de equações do 2º grau ou de sistemas que gerem tais equações. Cabe, porém, destacar novamente que eles não representavam as operações ou mesmo as incógnitas com o simbolismo algébrico que adotamos, ou seja, o que apresentamos é uma transcrição do método por eles adotado, passando para nossa base decimal e com o uso da linguagem algébrica que dispomos hoje.

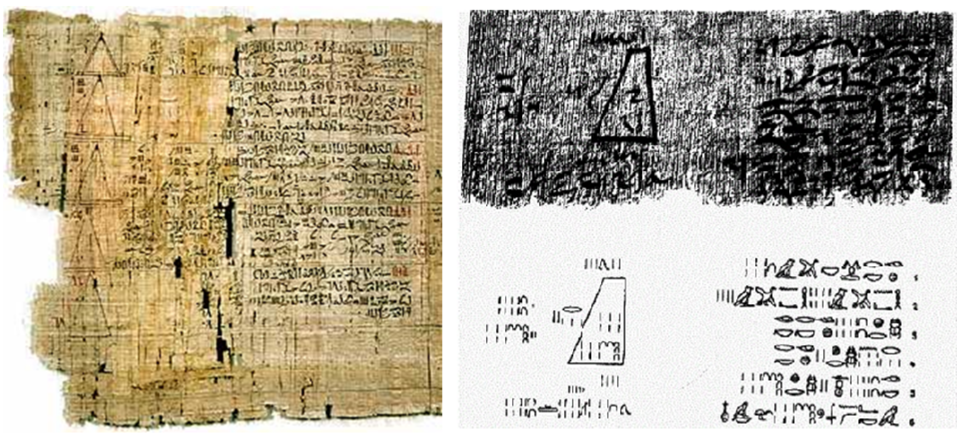
Vamos agora nos debruçar a analisar algumas contribuições do povo egípcio que, assim como os babilônios, também precisaram desenvolver desde cedo uma certa familiaridade com a matemática e, consequentemente, com a noção de equação.

2.2 Os egípcios

Outra civilização que também nos chama atenção são os egípcios antigos, que se destacaram, dentre outras coisas, numa engenharia prática que até hoje intriga historiadores e curiosos. Famosos por suas gigantescas pirâmides, os egípcios também desenvolveram cedo uma matemática rica, fazendo uso das equações na geometria de suas engenharias e no próprio dia a dia de suas atividades agrícolas e comerciais.

Para Ribeiro e Cury (2015), as principais atividades dos egípcios que exigiam forte uso da matemática surgiram de problemas envolvendo pão, cerveja, balanceamento de rações e armazenamento de alimentos. A presença dessas e outras atividades dos egípcios ficaram evidenciadas a partir de seus escritos, feitos geralmente em papiros. Os famosos papiros de Rhind (1650 a.C.) e de Moscou (1850 a.C.), que juntos abordam 110 problemas matemáticos são considerados os dois mais importantes para o entendimento do conhecimento matemático da época.

Figura 2.2.1 – Papiro de Rhind (à esquerda) e papiro de Moscou (à direita)



Fonte: http://www.matematica.br/historia/

Grande parte desses problemas envolvia a resolução de equações de uma incógnita, resolvidos por um método conhecido como regra da "falsa posição", que é bastante similar ao método das tentativas. Para que possamos compreender essa regra, considere que queremos solucionar a equação $ax = b$. Tomamos arbitrariamente $x_0, x_0 \neq 0$ e chamamos ax_0 de b_0. Considere $ax_0 = b_0$ e note que para tornar o segundo membro dessa última igualdade igual a b, podemos multiplicar ambos os membros por $b/b_0, b_0 \neq 0$, então:

$$ax_0 \cdot \left(\frac{b}{b_0}\right) = b_0 \cdot \left(\frac{b}{b_0}\right)$$

logo,

$$a \cdot \left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right) = b.$$

Assim,

$$x = x_0 \cdot \frac{b}{b_0}.$$

Vamos, então, resolver a equação $3x - \frac{x}{2} = 15$ por esse método. Tome, por exemplo, $x_0 = 2$. e note que

$$3 \cdot 2 - \frac{2}{2} = 5.$$

Para obter, 15 no 2º membro, precisamos multiplicar a igualdade acima por 3, daí:

$$(3 \cdot 2) \cdot 3 - \left(\frac{2}{2}\right) \cdot 3 = 5 \cdot 3.$$

ou seja,

$$3 \cdot (2 \cdot 3) - \frac{2 \cdot 3}{2} = 15$$

logo,

$$3 \cdot 6 - \frac{6}{2} = 15.$$

Assim,

$$x = 6.$$

Cabe ainda destacar que, em suas resoluções, era comum se descrever por extenso o passo a passo de cada processo até se chegar na solução. Além disso, de acordo com Eves (2011), em alguns desses escritos, porém, já se encontravam vestígios de uma simbologia algébrica, com sinais para mais ou menos, igual e para a incógnita, o que mostra que desde cedo a álgebra já começava ganhar uma simbologia própria.

Embora os registros mostrem que suas principais atividades algébricas tratavam da resolução de equações do 1º grau com um incógnita, os egípcios ainda assim tiveram certo contato com as equações do 2º grau. De acordo com Silva (2017) e Pitombeira (2004), esse contato foi bem superficial, já que seus textos só discutiam equações bem simples.

Em alguns problemas encontrados nos papiros egípcios são evidenciados enunciados como "Encontrar a base de um retângulo, cuja altura é metade da base e sua área mede 32 ", que modela-se como $\frac{x^2}{2} = 32$, essas são algumas evidências do trabalho com equações do 2º grau. Além disso, Pitombeira (2004) destaca que alguns problemas conduziram os egípcios a sistemas similares aos que abordamos na seção que tratou dos babilônios, sistemas esses oriundos de situações geométricas envolvendo grandezas geométricas, como áreas e comprimentos. Na resolução desses sistemas, os egípcios aplicam um método similar ao dos babilônios, ou seja, sendo o sistema do tipo

$$\begin{cases} x + y = a \\ x \cdot y = b, \end{cases}$$

os egípcios se concentravam em encontrar $\frac{x+y}{2}$ e $\frac{x-y}{2}$ para determinar as incógnitas através das identidades abaixo:

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$$

e

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

Em suma, as atividades matemáticas desses povos envolvendo equações eram comumente exploradas de situações práticas e, em seus estudos, apenas se preocupavam em resolver o problema, descrevendo seu passo a passo, sem uso de simbolismo algébrico bem desenvolvido ou necessidade de justificativas genéricas ou demonstrações.

O rigor matemático das demonstrações e justificativas passa a ganhar importância já nas próximas civilizações que estudaremos. Nesse contexto, vamos partir agora a uma viagem pela marcante história da matemática grega, na qual citaremos grandes nomes e seus feitos matemáticos, buscando encontrar evidências para atividades algébricas nas quais se faça presente a noção de equação.

2.3 Os gregos

Seguindo mais a diante nos deparamos com os gregos antigos. A matemática das culturas babilônica e egípcia, desenvolvida, na maioria das vezes, sem o uso de demonstrações ou justificativas lógicas não agradava muito os gregos, que dedicaram muito de seus esforços na busca por justificativas lógicas para as soluções dos problemas. Nesse contexto, os gregos dão um importante passo no desenvolvimento de uma matemática generalista, que mais tarde seria ainda muito mais explorada.

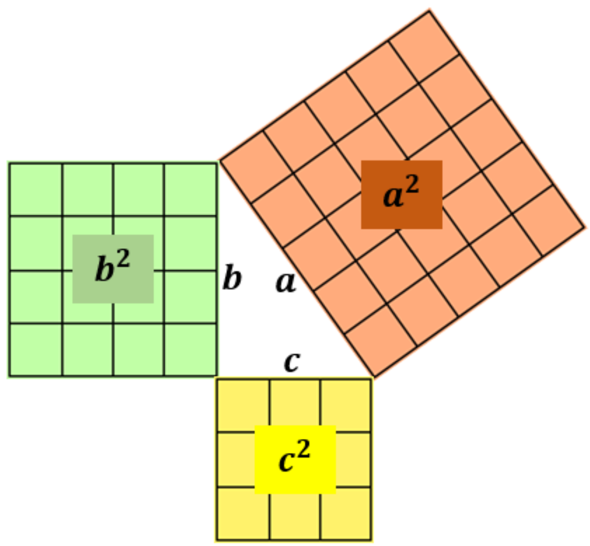
Na história da matemática grega surgem muitos nomes de repercussão, em especial nos trabalhos com a geometria. Geometria essa que deixara de lado os traços pragmáticos evidenciados nas culturas babilônica e egípcia e passa a se tornar bem mais algébrica, explorando ainda mais as equações.

Tales de Mileto, homem rico que viveu por volta de 640 a.C. à 564 a.C. e que é considerado um dos sete sábios da Grécia Antiga, costumava dedicar grande parte de seu tempo às suas paixões, a filosofia, a matemática e a astronomia, até se ausentando de suas atividades comerciais. Em uma visita ao Egito, acompanhado do Faraó Amasis, determinou a altura da pirâmide de Quéops, utilizando para isso um bastão posicionado na areia e relações de triângulos semelhantes, a partir das sombras projetadas no chão. Fato esse que, segundo Garbi (2009, p. 22), foi "um dos acontecimentos máximos da História da Geometria".

Em seus trabalhos, Tales sempre mostrou a importância das justificativas lógicas na resolução de problemas, originando uma matemática solidificada nas demonstrações. Matemática essa que mais tarde viria a ser aperfeiçoada por outros grandes nomes, entre os quais destacaremos agora Pitágoras.

Pitágoras (586 a.C. - 500 a.C.) foi um dos nomes mais marcantes da matemática grega. É atribuída à Escola Pitagórica a demonstração do famoso teorema de Pitágoras: Sendo a a hipotenusa de um triângulo retângulo, b e c os seus catetos, então vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Essa teria sido, de acordo com Garbi (2010), a primeira vez na Europa antiga que se produzia uma equação do 2º grau, 1.200 anos depois dos babilônios, que já conheciam e usavam essa relação matemática, que pode ser interpretada geometricamente conforme a figura abaixo:

Figura 2.3.1 – Interpretação geométrica do teorema de Pitágoras



Fonte: O autor.

Juntamente com Tales de Mileto, os pitagóricos deram os passos iniciais para a reestruturação da geometria em um estudo abstrato. Foi nesse momento que a álgebra da época deixava seu caráter mais aritmético, como faziam os babilônios e egípcios, e passava a ser desenvolvida sob uma perspectiva dedutiva da geometria. Essa mudança de perspectiva da álgebra só ganha ainda mais força com os trabalhos desenvolvidos posteriormente.

A Escola de Eleia, fundada por Parmênides (Séc. V a.C.) abriu caminho para novas descobertas matemáticas, ao passo que seus seguidores, os eleatas, se opuseram as ideias até então mais difundidas, cujos trabalhos eram centrados no conjunto dos números inteiros. Eles estudaram as grandezas incomensuráveis e foram precursores da noção de infinito na Grécia antiga. Para Mol (2013), esses estudos propiciaram o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, áreas e volumes, além de serem precursores do que séculos depois seria o

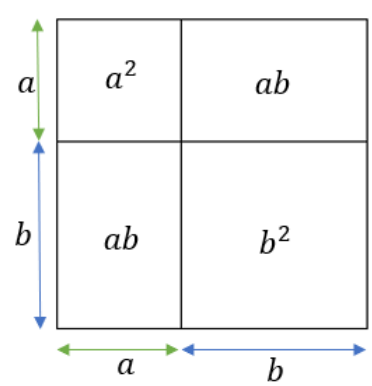
Cálculo Diferencial e Integral.

Em Atenas, Platão (427-347 a.C.) fundou sua Academia, que se ocupava do estudo de filosofia e ciências, entre as quais a matemática tinha posição de destaque. Nessa época, os três problemas clássicos da matemática grega já tiravam o sono de muitos estudiosos, são eles: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. Um dos estudiosos da Academia de Platão foi Eudoxo (408-355 a.C.), que desenvolveu o chamado método da exaustão para calcular comprimentos, áreas e volumes de figuras curvas, estabeleceu também uma teoria de proporções que, de acordo com Mol (2013) viria a ser tratada no V livro dos Elementos de Euclides. Outro famoso discípulo de Platão foi Aristóteles (384-322 a.C.), que assim como Platão influenciou a forma e o desenvolvimento que a matemática viria a tomar no futuro.

Por volta de 300 a.C., Euclides sintetizava sistematicamente praticamente todo o conhecimento matemático que se tinha até então. *Os Elementos* foi uma obra tão importante que, de acordo com Eves (2011), a matemática grega que se conhecia antes dela praticamente foi esquecida. Embora *Os Elementos* de Euclides trouxesse uma evolução no trabalho com álgebra, foi na geometria que se desenvolveram os principais trabalhos.

Foi nesse momento que métodos hoje usuais na resolução de equações estavam sendo validados. Como, por exemplo, somar ou subtrair um valor à ambos membros da equação sem perder a equivalência. No II livro dos Elementos, Euclides estabeleceu, dentre outras relações, o cálculo do quadrado da soma de dois termos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Essa relação era interpretada, de forma totalmente geométrica, em que a e b representavam medidas de segmentos, como ilustrado na figura a seguir.

Figura 2.3.2 – Interpretação geométrica do quadrado da soma de dois termos



Fonte: O autor.

Seguindo o rigor matemático dos escritos de Euclides, Arquimedes (287-212 a.C.) deu várias contribuições à matemática, sempre atento às suas aplicações. Desenvolveu várias teorias importantes na Física e provou vários resultados matemáticos, muitos dos quais utilizando o princípio da exaustão, que mesmo tendo sido desenvolvido por Eudoxo, acabou ficando conhecido como sendo de Arquimedes. Fez, ainda, diversas descobertas sobre áreas e volumes, provando importantes resultados relativos a círculos, esferas, cilindros e um grande estudo sobre as espirais.

Enquanto isso, Apolônio (c. 262-190 a.C.) publicou um importante trabalho, intitulado "Cônicas". Essa obra foi tão marcante na Geometria que Mol (2013) aponta que para alguns de seu tempo, o mesmo era tido como o maior geômetra grego, superando Euclides, e que sua obra foi uma antecipação do que mais tarde viria a ser a Geometria Analítica de Descartes.

Pitolomeu (c. 90-168 d.C.), por sua vez, escreveu um conjunto de 13 livros, obra chamada de *"Síntese Matemática"* e que teve grande influência para a matemática árabe. Ele inspirou-se em trabalhos de matemáticos como Hiparco e de Menelau e motivado por sua paixão pela astronomia e pela ideia do céu ser esférico, desenvolveu diversos estudos sobre círculos e esferas. Assim, como aponta Mol (2013), Pitolomeu adotou, além da divisão do círculo em 360 graus, a subdivisão de cada grau em 60 minutos e de cada minuto em 60 segundos. Além disso, ele teria sido o autor grego mais influente no estudo da trigonometria.

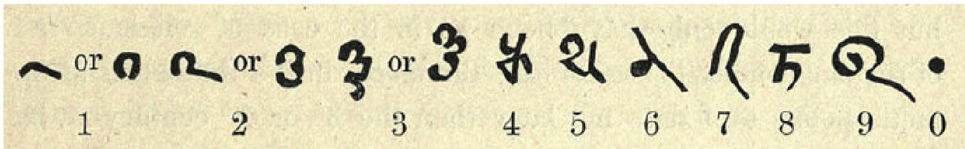
Por fim, um dos nomes de maior destaque no desenvolvimento das equações na Grécia antiga é o de Diofanto de Alexandria, que viveu por volta de 250 d.C. Para Mol (2013), sua obra *"Aritmética"*, composta por 13 livros, é uma ampla sintetização do conhecimento matemático da época. Rica em problemas abstratos que deixavam de lado o aspecto geométrico da álgebra grega, essa obra deu incontáveis contribuições para o desenvolvimento da álgebra. Nela, Diofanto fez vários estudos sobre equações, inclusive equações e sistemas indeterminados.

Para Ribeiro e Cury (2015), ele contribuiu significativamente para o desenvolvimento da álgebra, uma vez que propiciou o aperfeiçoamento da simbologia e linguagem algébrica. Além disso, sua dedicação nos trabalhos com as equações indeterminadas deu origem ao estudo das equações diofantinas. Para muitos, Diofanto é até então conhecido como "pai da álgebra"ou como o maior algebrista grego da história.

2.4 Os hindus e os árabes

Os hindus destacaram-se na matemática por suas habilidades aritméticas, sendo considerados grandes calculistas. Dentre suas contribuições, o que mais se destacou foi o seu sistema de numeração decimal e posicional, o qual adotamos até hoje. Os principais registros de sua matemática datam do século II d.C., escritos em livros religiosos da época, conhecidos como *Sulvasutras*. Eles adotavam símbolos para os algarismos do sistema de numeração decimal, inclusive o zero, conforme observamos abaixo:

Figura 2.4.1 – Algarismos hindus



Fonte: Mol (2013, p.63)

Eles destacaram-se na matemática como calculistas hábeis, tendo desenvolvido vários algoritmos para operações aritméticas, muitos dos quais foram adotados pelos árabes e, posteriormente, pelos europeus ocidentais. Para efetuar a adição $45+38$, os hindus posicionavam esses números um sob o outro e efetuavam a operação da esquerda para a direita, iniciando somando os algarismos das dezenas, ou seja $4+3$, obtendo 7 na dezena do resultado, posteriormente, somavam os algarismos das unidades, mas como $5+8=13$, eles colocavam o 3 no algarismo das unidades do resultado e adicionavam 1 unidade ao algarismo da dezena do resultado, obtendo $7+1=8$ e, consequentemente, o resultado 83.

De acordo com Eves (2011), na resolução de problemas aritméticos e algébricos, os hindus muitas vezes recorriam a métodos aritméticos como a regra da "falsa posição", já discutida neste trabalho e o "método da inversão", que consiste em resolver problemas operando de trás para frente com operações inversas. Para exemplificar, considere o problema: *"Pensei em um número, somei 10, depois dividi por 5 e obtive 9. Qual número eu pensei?"*. Para resolver esse problema pelo método da inversão tome 9 e multiplique por 5, obtendo 45, agora subtraia 10, obtendo 35, que é o número que eu pensei.

Os hindus discutiam equações do 2º grau em situações geométricas, inclusive utilizando o teorema de Pitágoras e fazendo uso de certa notação algébrica da época. De acordo com Silva (2020), os hindus também desenvolveram fórmulas para cálculos geométricos, evidenciando a manipulação de equações envolvidas na generalização de noções aritméticas e geométricas.

No século VII d.C. o matemático Brahmagupta (c. 598-668) deu significativas contribuições para a álgebra. No trato com as equações do segundo grau, ele expandiu o espectro das possíveis soluções ao considerar soluções negativas e encontrou todas as suas possíveis soluções gerais. Foi ele o primeiro a encontrar todas as possíveis soluções inteiras de uma equação diofantina linear do tipo $ax+by=c$, com $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

Em seu trabalho, *Lilavati*, o famoso matemático Bháskara (1114 - 1185) deu significativas contribuições ao desenvolvimento das equações lineares e, em especial, das equações quadráticas, o que fez com que fosse creditado a ele a fórmula para encontrar as soluções de uma equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2+bx+c=0$ a partir de seus coeficientes, como segue:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De acordo com Ribeiro e Cury (2015), esse trabalho foi responsável por preencher as lacunas que ficaram abertas de outros trabalhos, inclusive de Brahmagupta. Esse e outros trabalhos desenvolvidos na Índia, assim como inúmeras produções gregas foram adquiridos pelos árabes, que tiveram papel fundamental na preservação e disseminação desses conhecimentos.

Técnicas e algoritmos hindus, assim como os textos gregos de Diofanto e dos *Elementos* de Euclides foram traduzidos para o árabe e, posteriormente, para outras línguas e, assim, se difundiram na Europa. De acordo com Eves (2011), por volta do ano 766, os escritos de Brahmagupta foram traduzidos para o árabe e entre 786 e 808, no reinado do califa Harum al-Rashid, houve a tradução de diversos trabalhos gregos, que posteriormente também foram disseminados na Europa.

Além de terem papel importante na disseminação da matemática já produzida, os árabes escreveram importantes trabalhos sobre álgebra e aritmética. Eles praticavam uma aritmética baseada nas traduções dos escritos hindus e também trabalhavam a resolução de equações lineares, quadráticas e cúbicas através da aplicação de técnicas aritméticas ou geométricas, utilizando inclusive a regra da "falsa posição".

Porém, a necessidade por generalizações fez com que os mesmos investissem no desenvolvimento da álgebra. Para Ribeiro e Cury (2015, p.33), nos estudos do matemático Al-Khwarizmi, as equações quadráticas podiam ser reduzidas a seis tipos, o que na nossa linguagem podem ser expressas da seguinte maneira:

(1) $ax^2 = bx$
(2) $ax^2 = c$
(3) $bx = c$
(4) $ax^2 + bx = c$
(5) $ax^2 + c = bx$
(6) $bx + c = ax^2$.

Ainda de acordo com Ribeiro e Cury (2015), isso evidencia a preocupação do matemático em expressar todas as possíveis formas canônicas e, assim, dar subsídios à resolução de qualquer tipo de equação quadrática.

Outro nome de destaque que surge na cultura árabe é o de Abu'l-Wefa (940-998), que além de discutir e traduzir textos do notável grego Diofanto, desenvolveu trabalhos significativos no campo da trigonometria. De acordo com Silva (2020), durante os séculos X e XI, Abu Kamil deu importantes contribuições à obra de Al-Khawarizmi no campo das equações e teve seus trabalhos utilizados posteriormente por Leonardo Fibonacci (1202). Por volta de 1100, Omar Khayyam apresentou a resolução geométrica de equações cúbicas e desenvolveu o texto *Rubaiyat*, que, de acordo com Eves (2011), também foi bastante difundido na Europa.

Esses fatos mostram que as matemáticas árabe e hindu apresentavam um maior rigor, ao passo que os trabalhos desenvolvidos apontam para uma iminente preocupação em expressar todas as possíveis formas de uma equação e em se encontrar todas as suas soluções, não apenas uma solução particular qualquer. Essa preocupação é transmitida aos europeus que, por sua vez, passam a explorar as equações a partir de estudos generalistas, afastando-se cada vez mais das características intuitivas observadas nos trabalhos dos babilônios e egípcios.

2.5 Os europeus

Na Europa, os trabalhos de Leonardo Fibonacci (1175-1250) foram precursores da transição dos números romanos para o sistema de numeração indo-arábico e da apreciação de textos traduzidos pelos árabes, como aponta Garbi (2010). Isso veio a ocorrer mesmo após várias manifestações contrárias da igreja católica, que se opunha a tudo aquilo que se advinha do mundo islâmico.

Dentre os séculos XIV e XVI, a Europa viveu o período do Renascimento, com grandes avanços científicos e, nessa perspectiva, houveram muitas evoluções na álgebra e nos trabalhos com equações. Dentre nomes marcantes dessa ápoca temos os matemáticos Cardano (1501-1576) e Tartáglia (1499-1557), que travaram uma bela história de disputas e descobertas matemáticas. Juntos com Scipione del Ferro e Ferrari, eles influenciaram muitos outros matemáticos na discussão de equações, em especial as terceiro e quarto grau.

Esses estudos sobre equações levou a matemática da época a ser questionada sobre uma questão interessante, a raiz quadrada de números negativos. Eis então que, de acordo com Garbi (2010), Bombelli (1526-1572) introduz algumas regras para o trabalho com o número $i = \sqrt{-1}$, o que daria início ao Conjunto dos Números Complexos e a busca por soluções complexas no trato com equações.

Com incontáveis contribuições para a trigonometria e a álgebra, o francês François Viète (1540-1603) fez inovações no simbolismo algébrico, adotando letras para a representação de incógnitas e coeficientes. Fez estudos e demonstrações sobre as equações do $2^{\underline{o}}$ grau e conseguiu solucionar as equações de $3^{\underline{o}}$ grau por um método ainda não descoberto, utilizando substituição de incógnitas.

Ainda na França, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) iniciaram o desenvolvimento da teoria da Geometria Analítica. Para Garbi (2010), eles foram de fundamental importância no desenvolvimento do estudo algébrico das funções e sua representação cartesiana. A partir daí, a matemática estava sendo estudada a partir de sua estrutura e não apenas como método para solucionar problemas, o que mostra um aspecto mais abstrato e generalista.

Seguindo um pouco mais adiante na história da matemática, os estudos que se desenvolvem estão voltados para a teoria do Cálculo Diferencial e Integral. Newton (1642-1727) e Leibnis (1646-1716) são alguns dos nomes mais marcantes dessa teoria que, conforme era desenvolvida, contribuía, paralelamente, ao estudo das equações ao passo que trabalhavam "métodos algébricos aproximados para o encontro de raízes reais", como destaca Garbi (2010, p. 86).

Euler (1707-1783), por sua vez, mesmo pesquisando em vários campos da matemática, como a geometria, aritmética, mecânica, probabilidade e cálculo, foi de notável importância na estruturação da Teoria das Equações Algébricas, especialmente em três trabalhos brilhantes que desenvolveu: *A Simbologia*, *O número "e"* e *Os Números Complexos*. Segundo Silva (2017), nesses trabalhos, Euler aperfeiçoou a notação algébrica e explorou as raízes complexas de um polinômio não nulo, possibilitando que se conjecturasse que haviam n raízes para as equações polinomiais de grau n.

Nesses relatos, podemos identificar uma maior preocupação dos europeus em demonstrar propriedades gerais válidas a qualquer tipo de equação, não apenas em resolver problemas ou apenas em encontrar soluções. Esse trabalho generalista engajado na estrutura matemática da noção de equação só passa a crescer cada vez mais. E como não poderíamos deixá-lo de fora, o alemão Friedrich Gauss (1777-1855) deixou um grande legado na matemática e indispensáveis contribuições à álgebra.

Considerado um gênio desde criança, Gauss é, ainda hoje, um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele fez discussões sobre as obras de Euclides, aperfeiçoou-se em geometrias não euclidianas, desenvolveu o método para cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, aos 15 anos de idade "demostrou o teorema geral das potências binomiais, desenvolvido, mas não provado por Newton", dentre outros inúmeros grandes feitos, como aponta Silva (2020, p. 32).

Além disso, Gauss deu a primeira demonstração completa para o Teorema Fundamental da Álgebra, contribuiu na discussão das equações algébricas e forneceu bagagem para que outros matemáticos continuassem a explorar as mesmas, como Niels Abel (1802-1829) e Évariste Galois (1811-1832), inclusive.

Abel, nascido na Noruega, desenvolveu pesquisas em áreas diversas, publicando, dentre outros, um renomado trabalho intitulado como *"Grande Teorema de Abel"* ou *"Teorema Geral* *sobre as Integrais"*. Destacou-se no estudo das integrais, de funções elípticas e das equações algébricas, em especial as de quinto grau. Após alguns fracassos na tentativa de solucioná-las, acabou provando que, com exceção de alguns casos particulares, não era possível resolvê-las apenas com operações algébricas, o que representou, de acordo com Silva (2017), um avanço para as pesquisas na área.

Galois, nascido na França, também se dedicou a estudar as equações quínticas, muitas vezes sem ter conhecimento dos frutos dos estudos de Abel. Sofreu também algumas frustrações ao tentar solucionar essas famosas equações, chegando a acreditar erroneamente ter encontrado sua solução geral. Dentre seus trabalhos mais marcantes, podemos destacar *"Demonstração de um teorema sobre as frações contínuas"* e *"Pesquisando sobre as equações algébricas de grau primo"*, considerada a mais relevante de suas produções. Seus estudos tomaram rumos bastante abstratos e, conforme destaca Silva (2017), suas contribuições foram de grande valor na estruturação da Teoria dos Grupos. Para mais detalhes sobre o desenvolvimento dos métodos de resolução das equações ao longo da história sugerimos o trabalho de Costa (2016).

A partir desses relatos, evidenciamos o aspecto generalista, abstrato e estrutural que foi tomando o estudo das equações na Europa renascentista em diante, mudando totalmente a forma como as equações são concebidas e tratadas. Assim, as equações deixaram de ser exploradas apenas em situações práticas e passaram a ser estudadas a partir de suas propriedades e características estruturais.

3 A EQUAÇÃO O SEGUNDO GRAU NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo vamos desenvolver um estudo sobre a resolução da equação polinomial do 2º grau, no qual iremos proceder de forma similar ao que é feito no ensino básico e, caso o leitor se interesse por uma abordagem complementar, sugerimos consultar Hefez e Villela (2012). Para tanto, realizamos a seleção de duas coleções de livros didáticos, uma do Ensino Fundamental II e outra do Ensino Médio, a fim de nos auxiliar nesse estudo.

Para a seleção das coleções foram estabelecidos os seguintes critérios:

- Ter sido aprovada no PNLD 2017 (Ensino Fundamental II) e no PNLD 2018 (Ensino Médio);
- Ter sido adotada na rede pública municipal (Ensino Fundamental II) e na estadual (Ensino Médio) do município de São Joaquim do Monte - PE nos últimos três anos.

Durante a seleção dos livros do Ensino Fundamental II, verificamos que as coleções aprovadas no PNLD 2017 foram: *Praticando Matemática, Descobrindo e Aplicando a Matemática, Matemática do Cotidiano, Matemática - Compreensão e Prática, Projeto Teláris - Matemática, Projeto Araribá - Matemática, Matemática - Ideias e Desafios, Matemática - Bianchini, Matemática nos Dias de Hoje - Na Medida Certa, Convergências - Matemática* e *Vontade de Saber*. Após uma consulta a Secretaria Municipal de Educação, a coleção *Praticando Matemática* foi identificada como sendo adotada unanimemente na rede municipal e, assim, foi selecionada para a nossa pesquisa.

Com relação ao Ensino Médio, identificamos as coleções aprovadas no PNLD 2018: *Quadrante Matemática, Matemática: Interação e Tecnologia, Contato Matemática, Matemática Paiva, Matemática: Ciência e Aplicações, Conexões com a Matemática, Matemática para Compreender o Mundo* e *Matemática: Contexto e Aplicações*. Para atender ao nosso segundo critério, realizamos uma consulta a Escola de Referência em Ensino Médio Frei Epifânio, responsável pelo Ensino Médio do município, constatando que a coleção adotada em sua sede e anexos era a *Quadrante Matemática*, a qual adotamos para nossa análise.

Assim, munidos dessas duas coleções, procedemos uma sondagem das mesmas a fim de identificar os principais métodos de resolução das equações polinomiais do 2º grau no ensino básico, métodos esses que apresentaremos a seguir, nas próximas seções deste capítulo.

3.1 A fórmula de Bháskara

Uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{3.1}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é dita equação polinomial do $2^{\underline{o}}$ grau. Na resolução de tal equação na Educação Básica nos interessa determinar os valores reais que satisfazem a incógnita x. Ou seja, encontrar os possíveis $x_0 \in \mathbb{R}$ tais que $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

Considere a equação (3.1) nas condições dadas acima. Vamos obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro desta equação. Para tanto, multiplique toda a equação por $4a$ e some b^2 a ambos os membros, obtendo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2.$$

Para obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro, precisamos subtrair $4ac$ de ambos os membros, como segue:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Obtido o trinômio quadrado perfeito procurado, note que

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Desse modo, concluímos que:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.2}$$

Para analisar as soluções da equação do segundo grau, faça $\Delta = b^2 - 4ac$ e note que:

- Se $\Delta > 0$, então $\sqrt{\Delta} > 0$ e, assim, a equação do segundo grau terá duas soluções reais distintas;
- Se $\Delta = 0$, então $\sqrt{\Delta} = 0$ e, desse modo, a equação do segundo grau vai apresentar apenas uma solução;
- Se $\Delta < 0$, então $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, logo, a equação do segundo grau não terá solução real.

A aplicação da fórmula (3.2) é feita com muita frequência na resolução das equações do segundo grau, sendo aplicada tanto para as equações completas como para as equações incompletas. De acordo com o estudo histórico-epistemológico desenvolvido no Capítulo 2 deste trabalho, evidenciamos que os babilônios já tinham certo conhecimento a cerca dessa fórmula vários séculos antes de Bháskara. Mesmo assim, é comum que ela apareça com o nome de fórmula de Bháskara, já que sua demonstração é atribuída a tal matemático.

Exemplo 3.1. Resolver a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$:

Inicialmente, note que $a = 1$, $b = 2$ e $c = -3$. Aplicando os valores dos respectivos coeficientes na fórmula (3.2), temos que

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}.$$

Logo, podemos concluir que $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ e $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. Neste caso, percebe-se que $\Delta = 16$, o que justifica termos encontrado duas soluções reais distintas para a equação dada.

Exemplo 3.2. Resolver a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$:

Inicialmente, note que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$. Aplicando os valores dos respectivos coeficientes na fórmula (3.2), temos que:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2}.$$

Logo, podemos concluir que $x_1 = x_2 = -\dfrac{2}{2} = -1$. Observe que como $\Delta = 0$, as duas soluções reais são iguais.

Exemplo 3.3. Resolver a equação $2x^2 - 3x + 2 = 0$:

Inicialmente, note que $a = 2$, $b = -3$ e $c = 2$. Aplicando os valores dos respectivos coeficientes na fórmula (3.2), temos que

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4}.$$

Neste caso, nota-se que $\Delta = -7$, o que impossibilita calcular $\sqrt{\Delta}$ no conjunto dos números reais. Logo, não há solução real para a equação.

3.2 O método de completar quadrados

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$. Podemos encontrar as raízes reais da mesma completando quadrados. Para tanto, vamos dividir toda equação por a:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a} = 0. \tag{3.3}$$

Note que para termos um quadrado perfeito da soma de dois termos no primeiro membro da equação, temos que $\dfrac{b}{a}x$ é igual ao dobro do produto dos dois termos, mas como o primeiro termo é x, temos que $\frac{b}{a}x = 2 \cdot \frac{b}{2a}x$ e, consequentemente, o segundo termo é $\frac{b}{2a}$. Então, para aparecer o terceiro termo do trinômio quadrado perfeito no primeiro membro, adicione $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$ a ambos os membros da equação (3.3) e teremos:

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{3.4}$$

Observe que a partir da equação (3.4) é possível isolar o x extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da equação. Assim, temos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que nos fornece as soluções reais da nossa equação, como vimos na fórmula (3.2) da seção anterior.

Exemplo 3.4. Determinar as raízes reais da equação $4x^2 + 5x + 1 = 0$.

Para solucionar a equação pelo método de completar quadrados, perceba que

$$4x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{5}{4}x\right) + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{25}{64}\right) = \frac{25}{64} - \frac{1}{4}. \tag{3.5}$$

Reorganizando a equação (3.5) e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos que:

$$\left(x + \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{9}{64} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64}} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8} \pm \frac{3}{8}.$$

Portanto, as raízes reais procuradas são $x_1 = -\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = -\frac{1}{4}$ e $x_2 = -\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = -1$.

3.3 O método da soma e do produto

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais e $a \neq 0$. Pela fórmula geral (3.2), temos que as soluções reais x_1 e x_2 da equação geral do 2º grau podem ser dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim sendo, note que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Seja S a soma das raízes reais da equação do $2^{\underline{o}}$ grau, temos que:

$$S = -\frac{b}{a}. \tag{3.6}$$

Note ainda que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Seja P o produto das raízes reais da equação do $2^{\underline{o}}$ grau, temos que:

$$P = \frac{c}{a}. \tag{3.7}$$

Por outro lado, considere a equação $ax^2+bx+c = 0$ com coeficientes reais e $a \neq 0$. Dividindo ambos os membros da mesma por a e tomando $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$, conforme as equações (3.6) e (3.7), temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0. \tag{3.8}$$

A relação obtida em (3.8) é utilizada para encontrar as raízes reais de uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau, tendo em vista sua soma e seu produto. Particularmente, essa técnica pode ser empregada até mesmo para encontrar essas raízes mentalmente, principalmente quando $a = 1$ e as raízes são inteiras, pois isso facilita o cálculo mental.

Exemplo 3.5. Quais são as raízes reais da equação $x^2 - x - 6 = 0$?

Comparando a equação do exemplo com a relação (3.8), observamos facilmente que $S = 1$ e $P = -6$. Vamos procurar dois números reais tais que sua soma resulte em 1 e seu produto -6. Os números procurados são -2 e 3, que são as duas raízes reais procuradas.

Exemplo 3.6. Encontrar as raízes reais da equação $-2x^2 + 15x = 0$:

Nesse caso, não é tão imediato para o estudante identificar S e P, todavia podemos aplicar os coeficientes $a = -2$, $b = 15$ e $c = 0$ nas relações (3.6) e (3.7). Assim sendo, temos:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{15}{-2} = \frac{15}{2}.$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Então, precisamos encontrar dois números reais, tais que sua soma é $\frac{15}{2}$ e seu produto é 0. Assim, as raízes procuradas são 0 e $\frac{15}{2}$.

3.4 O método da fatoração

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$. Note que, colocando a em evidência e tomando $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$, conforme fizemos na equação (3.8), temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - Sx + P)$$

$$= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{3.9}$$

pois $S = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ e $P = \frac{c}{a} = x_1x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes da equação.

Desse modo, podemos encontrar as raízes procuradas fatorando a equação conforme fizemos em (3.9).

Exemplo 3.7. Determinar as soluções reais da equação $x^2 - 6x - 27 = 0$:

Note que

$$x^2 - 6x - 27 = (x - 9)(x + 3).$$

Portanto, comparando com a equação (3.9), nota-se que as soluções reais da equação são $x_1 = 9$ e $x_2 = -3$.

Exemplo 3.8. Encontre as raízes reais da equação $5x^2 - 4x - 1 = 0$:

De forma análoga ao exemplo anterior, temos:

$$5x^2 - 4x - 1 = 5\left(x^2 - \frac{4x}{5} - \frac{1}{5}\right) = 5(x - 1)\left(x + \frac{1}{5}\right).$$

Logo, as soluções reais procuradas são $x_1 = 1$ e $x_2 = -\frac{1}{5}$.

3.5 Uma análise da equação do segundo grau incompleta

Nesta seção analisaremos a equação polinomial do segundo grau incompleta, ou seja, quando $b = 0$ e/ou $c = 0$.

3.5.1 O caso $b = 0$

Considere a equação $ax^2 + c = 0$, em que $a, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Adicione $-c$ à ambos os membros da equação e teremos:

$$ax^2 = -c,$$

como $a \neq 0$, concluímos que

$$x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Observando a igualdade acima, temos alguns casos a analisar. A princípio, note que se $c = 0$ a equação admite duas raízes nulas, sejam $x_1 = x_2 = 0$.

Tomando $c \neq 0$, note que se a e c tem o mesmo sinal, ou seja, ambos positivos ou ambos negativos, caímos na situação de calcular a raiz quadrada de um um número negativo, o que resulta em duas raízes complexas, neste caso não há soluções reais que satisfaçam a equação. Se a e c possuem sinais distintos, ou seja, um é positivo e o outro negativo, a equação apresenta duas raízes reais, as quais são $x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Exemplo 3.9. Encontrar as raízes reais da equação $2x^2 - 2 = 0$:

Procederemos adicionando 2 unidades a ambos os membros e, posteriormente, multiplicando toda a equação por $\frac{1}{2}$ e obtemos:

$$2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Portanto, temos as soluções (raízes) reais: $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.

3.5.2 O caso $c = 0$

Considere agora a equação $ax^2 + bx = 0$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Neste caso, pondo x em evidência, teremos:

$$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Analisando tal situação, se $b = 0$ temos o mesmo caso já analisado anteriormente e a equação admite duas raízes nulas, sejam $x_1 = x_2 = 0$. Caso contrário, ou seja, sendo $b \neq 0$, teremos uma raiz nula e outra raiz real, as quais são $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Exemplo 3.10. Determinar as raízes reais da equação $-3x^2 + 5x = 0$:

Pondo x em evidência, temos

$$-3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Logo, as soluções (raízes) reais são: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{5}{3}$.

3.6 As Equações no contexto da Função Quadrática

Embora equação e função sejam conceitos distintos, estes detêm certas relações em comum. Nesse contexto, abordamos nessa seção uma discussão a cerca da função quadrática, porém de uma forma bastante sucinta, direcionando nosso estudo para as relações que a mesma tem em comum com a equação do segundo grau. Sugerimos as referências Lima (2013) e Lima et al. (2016) para um maior aprofundamento nesse tópico.

Assim, vamos nos debruçar sobre o estudo dos zeros da função quadrática, tanto algebricamente como a partir do gráfico dessa função, já que estes dizem muito sobre o comportamento das soluções da equação do segundo grau, que é nosso objeto de estudo..

Dados dois conjuntos X, Y, uma *função* $f : X \to Y$ é uma espécie de regra que permite associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$. Neste caso, dizemos que o conjunto X é o *domínio* da função e representamos por $D(f)$, enquanto o conjunto Y é o *contra-domínio* da mesma, o qual representamos por $CD(f)$. Cada elemento $y = f(x)$ é dito *imagem* de x pela função f. Ao conjunto de todos os elementos $y = f(x) \in Y$ que são imagens de algum $x \in X$ damos o nome de *conjunto imagem* da função e representamos por $Im(f)$.

Dada uma definição inicial de função e considerando que o leitor tenha certo conhecimento desse conceito matemático, vamos nos centrar no estudo da função quadrática.

Uma *função quadrática* é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela regra $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse contexto, os coeficientes da função quadrática ficam inteiramente determinados pelo valor que a função assume, conforme Lima (2013).

Para verificar, seja $ax^2+bx+c = a'x^2+b'x+c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se tomarmos $x = 0$ verificamos facilmente que $c = c'$. Desse modo, podemos escrever $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ não nulo. Dessa forma, podemos dividir toda a igualdade por x, obtendo $ax + b = a'x + b'$. Fazendo $x = 1$ e, em seguida, $x = -1$, conforme Lima (2013), temos:

$$a + b = a' + b'. \tag{3.10}$$

$$-a + b = -a' + b'. \tag{3.11}$$

Somando membro a membro as equações (3.10) e (3.11), temos que $b = b'$. Por outro lado, subtraindo membro a membro essas equações, temos que $a = a'$.

Portanto, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

A evidente relação dos coeficientes da função quadrática com a equação do 2º grau permite que em algumas situações o trabalho com esses dois entes matemáticos esteja interligado, mesmo que implicitamente.

Quando queremos estudar a função quadrática um conceito que se faz muito presente é o de *zero* da função. Em suma, um número real $x \in D(f)$ é chamado de zero da função f se, e somente se, sua imagem for nula, ou seja, $f(x) = 0$. Assim, quando existem, os zeros da função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ correspondem às raízes reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Desse modo, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos que:

- Se $\Delta > 0$, então $\sqrt{\Delta} > 0$ e, assim, como a equação do segundo grau tem duas soluções reais distintas, a função real $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem também dois zeros distintos;
- Se $\Delta = 0$, então $\sqrt{\Delta} = 0$ e, desse modo, a equação do segundo grau tem apenas uma solução, assim como a função real $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem apenas um zero.
- Se $\Delta < 0$, então $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, logo, a equação do segundo grau não terá solução real, assim como a função quadrática de mesmos coeficientes não terá zero.

Exemplo 3.11. Determinar os zeros da função real dada por $f(x) = x^2 - 5x - 14$:

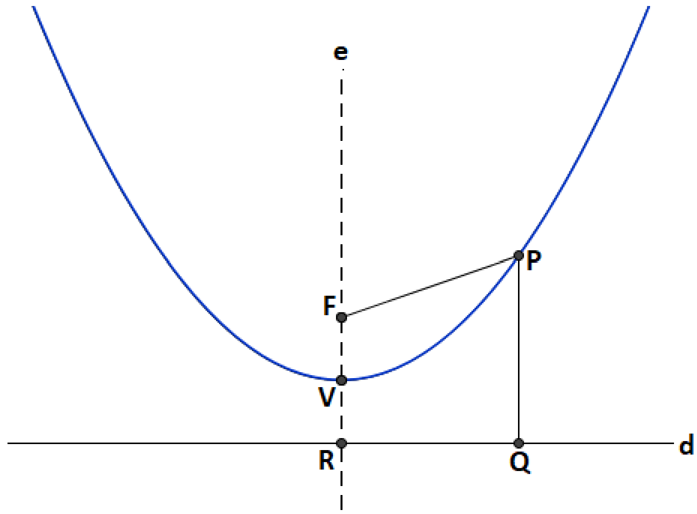
Precisamos encontrar o(s) valor(es) de x para os quais $f(x) = 0$, então vamos resolver a equação $x^2 - 5x - 14 = 0$. Pelo método da fatoração, temos que

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2) = 0.$$

Portanto, $x_1 = 7$ e $x_2 = -2$ são as raízes da equação dada e, consequentemente, os zeros da função em questão.

O gráfico desse tipo de função é uma curva chamada de parábola. Dados um ponto F, chamado de *foco* e uma reta *diretriz* d, que não contém o foco, geometricamente falando, uma *parábola* de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d, conforme a figura abaixo:

Figura 3.6.1 – Parábola



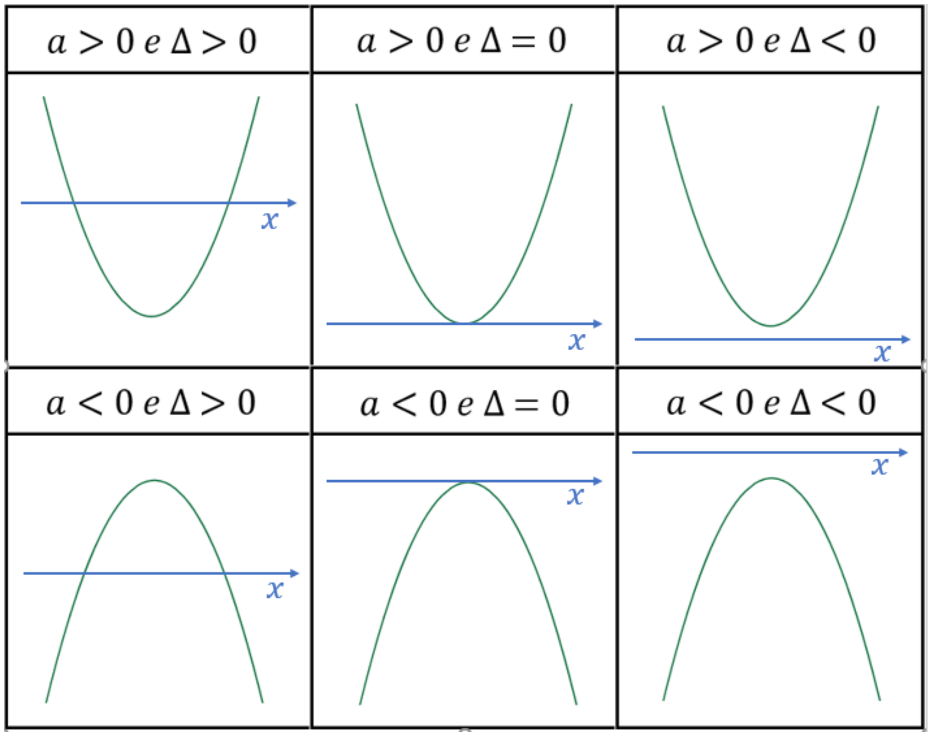
Fonte: O autor.

Na figura, observa-se o eixo de simetria e, que é também chamado de *reta focal* e o ponto V de intersecção entre a parábola e a reta focal, à esse ponto dá-se o nome de *vértice* da parábola.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola na qual sua reta diretriz é paralela ao eixo das abscissas e sua reta focal é paralela ao eixo das ordenadas. Por outro lado, toda parábola nessas condições é gráfico de uma função quadrática.

Como vimos anteriormente, os zeros de uma função são números reais $x \in D(f)$, tais que $f(x) = 0$. Graficamente, isso é representado pela(s) coordenadas das abscissa(s) do(s) ponto(s) em que o gráfico da função intersepta o eixo das abscissas no plano cartesiano. No caso da função quadrática há 3 possibilidades: 2 zeros distintos, 1 zero ou nenhum zero, a depender do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e, consequentemente, dos coeficientes a, b e c.

Figura 3.6.2 – Zeros da função quadrática



Fonte: O autor.

Como a noção de função não é o objeto principal de nosso trabalho, estamos apenas interessados em discutir como ela pode ajudar a compreender o comportamento das raízes reais de uma equação através de seus zeros. Para uma abordagem mais completa, sugerimos a referência Delgado, Fransel e Crissaff (2017).

4 AS EQUAÇÕES NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Após termos analisado as equações polinomiais do $2^{\underline{o}}$ grau na perspectiva da matemática do ensino básico, estamos agora interessados em analisar tal conceito sob a ótica da Educação Matemática, para que possamos compreender aspectos e peculiaridades relevantes à sua prática pedagógica. Sendo assim, discutiremos um pouco sobre o ensino de matemática, algumas dificuldades que surgem em seus processos de ensino-aprendizagem e trataremos da importância do desenvolvimento do pensamento algébrico. Em seguida, iremos delimitar nossa discussão ao conceito de equação e apresentar as concepções da noção de equação, que irão nos acompanhar até o final deste trabalho.

4.1 Dificuldades de aprendizagem em matemática e o pensamento algébrico

Não é segredo que a matemática é uma das disciplinas mais importantes do currículo da educação básica. Sua importância está atrelada a necessidade que temos de usá-la e desenvolvê-la nas mais variadas áreas da ciência, tecnologia e até mesmo no nosso dia a dia. Porém, a mesma é tida como uma das "piores" disciplinas, se não a pior, por grande parte dos educandos. Como Silva (2018) aponta, os motivos que fazem a matemática ser tão rejeitada são variados e incluem a forma mecânica e descontextualizada com que ela é tratada nas salas de aula, o que acaba se agravando quando são introduzidos conceitos algébricos nas aulas de matemática.

Porém, não são apenas os estudantes que sentem rejeição ou dificuldade nas aulas de matemática. Barbosa (2009) evidenciou, em sua pesquisa de dissertação, diversos casos de insegurança e dificuldade apresentadas por professores de matemática ao lidarem com conceitos algébricos, em especial equações. Seja por conta da insegurança sobre certos conteúdos ou da dificuldade em aplicar metodologias adequadas, as equações acabam sendo tratadas de forma bastante superficial, deixando grandes lacunas na aprendizagem dos estudantes.

Com relação a isso, Ribeiro e Cury (2015) apontam que mesmo após a escolarização básica é comum que os estudantes não reconheçam as estruturas matemáticas da noção de equação, evocando apenas seus procedimentos mecânicos de resolução. Assim, eles normalmente conseguem resolver atividades como "encontre o valor de x", mas não conseguem abstrair equações para modelagem de um problema ou mesmo deduzir equações de situações geométricas.

Para Silva (2017)(p. 45), isso ocorre porque "muitas vezes o ensino de álgebra é ancorado na prática mecânica e tecnicista sem a preocupação com a assimilação profunda do conceito", o que acaba sendo um problema para a aprendizagem, pois, de acordo com Ponte, Branco e Matos Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10), a capacidade de resolver equações e outros entes algébricos deve estar aliada ao seu uso "na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios". Além disso, Teles (2004) destaca que muitas vezes as dificuldades em álgebra são provenientes de problemas acumulados da aprendizagem da própria aritmética, acarretando erros e insegurança na manipulação de operações básicas.

Um dos problemas verificados frequentemente na prática pedagógica, ocorre quando o estudante compreende uma equação apenas como um exercício para aplicação de técnicas e cálculos objetivando encontrar sua solução. Para Veloso e Ferreira (2011, p. 61), quando isso acontece é muito comum que os alunos não aceitem uma expressão algébrica como resultado final de uma atividade, pois "eles comumente acreditam que devem apresentar uma resposta numérica". Nesse contexto, para que o ensino alcance seus objetivos é preciso adotar uma metodologia que trabalhe "o concreto, o abstrato e as aplicações", como afirmam Rocha e Sant'Ana (2011, p. 1).

Os PCN's destacam, de acordo com Brasil (1998) e Silva (2019), que um dos grandes problemas reside na insistência em se trabalhar técnicas algébricas sem antes desenvolver a capacidade de generalização e abstração nos estudantes. É nesse contexto que várias pesquisas no campo da Educação Matemática têm mostrado a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolarização. Mas, o que seria esse pensamento algébrico?

Para Fiorentini, Miorin e Miguel (1993, p. 87), o pensamento algébrico pode ser evidenciado a partir da capacidade de "percepção de regularidades, percepção de aspectos variantes em contraste com outros que não variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização".

Essas capacidades precisam ser desenvolvidas nas práticas pedagógicas de matemática desde o inicio da escolarização, pois assim "o desenvolvimento do pensamento algébrico pode permitir que sejam realizadas abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem matemática da vida real", como destacam Ribeiro e Cury (2015, p.11).

De acordo com Brasil (1997), já é possível desenvolver uma pré-álgebra nas séries iniciais do Ensino Fundamental, sendo esses trabalhos ampliados dos anos finais. Em suma, é preciso capacitar os estudantes quanto ao desenvolvimento das capacidades pertinentes ao pensamento algébrico, a compreensão dos papeis desempenhados pelas letras nas equações, fazendo isso desde o inicio do Ensino Fundamental, como defende Gomes (2013). É preciso ainda que os entes algébricos, como equações, expressões algébricas e função sejam tratados a partir da contextualização e da interdisciplinaridade, possibilitando sua aplicação em outras áreas.

Nessa perspectiva, passaremos a nos concentrar na noção de equação, objeto de estudo deste trabalho. Pretendemos, portanto, compreender como as equações são categorizadas no contexto da Educação Matemática a partir de suas diferentes concepções, estas que nos permitirão investigar um pouco mais a fundo tal ente matemático na perspectiva pedagógica, pois como destaca Usiskin (1995), as finalidades da álgebra estão relacionadas com suas concepções.

4.2 As concepções de equação

Ocupando lugar de destaque na matemática, as equações mexem muito com alunos e professores de matemática da educação básica e é sobre elas que trataremos agora. Pretendemos identificar como as equações são concebidas a partir do contexto ao qual se inserem e da forma como são tratadas. É por esse motivo que nosso trabalho iniciou-se trazendo uma abordagem sobre as equações na história e sobre suas principais técnicas de resolução, para que possamos compreender melhor a categorização das mesmas.

Com o intuito de identificar as concepções de equação presentes no ensino básico, Ribeiro (2007) desenvolveu, em sua tese de doutorado, um série de estudos a cerca dessa noção. A princípio, o mesmo fez um estudo histórico e, a partir dele, verificou algumas peculiaridades de cada povo no trato com as equações.

Com relação aos babilônios e egípcios, Ribeiro (2007) verificou, assim como vimos no capítulo 2 deste trabalho, que os mesmos manipulavam equações oriundas de problemas cotidianos, preocupados apenas em encontrar alguma solução particular positiva. Suas manipulações eram bastante aritméticas. Com relação aos gregos antigos, foi verificado uma ampliação nas situações que abrangiam equações sob uma ótica geométrica, originando também resultados oriundos de algumas deduções, objetivando principalmente soluções particulares, porém exigindo justificativas mais formais do que as que faziam os babilônios e os egípcios.

No estudo das culturas árabe e hindu percebeu-se uma maior importância por aspectos mais estruturais, por expressar todas as possíveis formas ou soluções que uma equação possa apresentar. Embora o rigor algébrico de hoje não estivesse presente ainda, essas civilizações adotavam uma certa álgebra retórica em suas manipulações. Posteriormente, os europeus mostraram um trabalho muito mais generalista, trabalhando as equações sob um aspecto mais abstrato, não mais interessados apenas em obter alguma solução para um problema prático, mas sim estudando-as “dentro de sistema estrutural com propriedades e características bem definidas”, como aponta Ribeiro (2007, p. 81).

A partir de tal estudo, o autor identificou algumas categorias prévias que estabelecem as formas como as equações eram concebidas historicamente. Mais a diante, o mesmo realizou um estudo didático a partir da análise de dicionários etimológicos, livros de fundamentos de matemática, artigos e livros didáticos, estabelecendo mais algumas categorias e, assim, propôs uma classificação, conhecida como Teoria dos Multisignificados de Equação, com os seguintes significados:

- **Intuitivo-Pragmático**: a equação é obtida a partir de problemas práticos, assim como faziam babilônios e egípcios, concebida como uma noção intuitiva;
- **Dedutivo-Geométrico**: a equação é deduzida de situações geométricas, como faziam frequentemente os gregos, hindus e árabes;
- **Estrutural-Generalista**: a equação é tratada a partir de sua noção estrutural, com propriedades bem definidas. É o caso de como as equações eram tratadas pelos europeus;
- **Estrutural-Conjuntista**: a equação continua sendo manipulada a partir de sua estrutura e propriedades, porém relacionada a noção de conjuntos;
- **Processual-Tecnicista**: a equação é concebida a partir de suas técnicas mecânicas ou procedimentos de resolução;
- **Axiomático-Postulacional**: a equação é tida como uma noção que não carece de definição, como uma noção primitiva, da qual nascem outras noções.

A partir dessa categorização, algumas pesquisas foram desenvolvidas na investigação das equações no ensino básico. Dentre elas, destacamos os trabalhos Barbosa (2009) e Dorigo (2010). Os resultados obtidos e divulgados por eles contribuíram significativamente na teoria dos Multisignificados de equação.

Barbosa (2009) investigou professores de matemática do ensino básico através de entrevistas semi-estruturadas para identificar quais dos significados da noção de equação eram evocados enquanto os mesmos eram imersos em situações que remetiam à noção de equação. Durante sua análise, ele verificou que alguns significados não se fizeram presentes nas respostas dos professores pesquisados, são eles: o dedutivo-geométrico, o estrutural-conjuntista e o estrutural-generalista.

Barbosa (2009) ainda completa destacando que os professores muitas vezes procuraram evocar procedimentos e fórmulas prontas de resolução quando submetidos a situações pertinentes a esses significados, o que demonstra um grande apego ao significado processual-tecnicista. Após uma análise aprofundada, o autor conclui que o significado axiomático-postulacional perpassa por todos os demais, não se apresentando como um significado isolado. Já os significados Intuitivo-pragmático e, principalmente, o processual-tecnista foram bem evidenciados nas respostas analisadas.

Aliada a esses resultados, a pesquisa de Dorigo (2010) vem balançar as estruturas da teoria dos Multisignificados de Equação. Isso porque ele investigou, a partir de uma sequência de atividades, um grupo de estudantes do Ensino Médio sobre quais significados de equação estavam presentes na compreensão dos estudantes. Em sua pesquisa, ele verificou que os significados apresentados pelos estudantes muitas vezes não eram coerentes com a atividade proposta, além de que muitas vezes os mesmos nem sequer chegavam a perceber que tais atividades remetiam a ideia de equação. Em suma, os significados que foram comumente evocados pelos estudantes foram o processual-tecnicista, como já era esperado e o intuitivo-pragmático, isso porque os estudantes, muitas vezes sem identificar a ideia de equação, buscaram aplicar procedimentos ariméticos na resolução de suas atividades.

A partir dos resultados publicados por Barbosa (2009) e Dorigo (2010), a teoria dos Multisignificados de Equação mostrou-se carente de algumas adequações. Nessa perspectiva, Ribeiro (2013) faz algumas considerações e apresenta uma reelaboração dos significados de equação no modelo de perfil conceitual, destacando uma categorização com cinco concepções baseadas nas anteriores, são elas:

- **Pragmática**: a equação é obtida e interpretada a partir de problemas práticos, podendo a mesma ser admitida como uma noção primitiva. Nesta concepção é comum o uso de raciocínios intuitivos e a busca por soluções aritméticas, muitas vezes obtidas, inclusive, com uso de técnicas e algoritmos aritméticos;

- **Geométrica**: a equação é deduzida e interpretada através de problemas de ordem geométrica, normalmente envolvendo noções como área, perímetro, volume e semelhança de figuras. Há uma busca por soluções que, mesmo expressas aritmeticamente ou algebricamente, representem ou quantifiquem conceitos geométricos;

- **Estrutural**: a equação é concebida a partir de suas características estruturais. As soluções objetivadas em atividades com essa concepção são predominantemente algébricas, normalmente expressas por meio de expressões algébricas, generalizações ou estudo de suas propriedades;

- **Processual**: a equação é interpretada através de seus processos e técnicas de resolução, normalmente exigindo apenas encontrar sua solução. Essa concepção é comumente encontrada em exercícios de fixação do tipo "resolva"ou "encontre a solução". Uma característica dessa concepção é que a equação é apresentada explicitamente na atividade. As soluções obtidas nessa concepção são predominantemente expressas aritmeticamente ou algebricamente;

- **Aplicacional**: nesta concepção, a equação é obtida e interpretada a partir de suas aplicações. Embora seja comum adentrar em conceitos geométricos, sua solução normalmente é expressa aritmeticamente. É muito evidenciada quando a equação é obtida a partir da aplicação de uma fórmula pronta, como a relação de Euler, fórmulas de volume, teorema de Pitágoras, etc, e não apenas com deduções ou modelagem do problema proposto.

Essa categorização, apresentada na forma de perfil conceitual, categoriza as cinco concepções da noção de equação que iremos utilizar para analisar como as equações polinomiais do 2º grau se fazem presentes no Exame Nacional do Ensino Médio. Isso porque, conforme discutimos anteriormente, consideramos que o ensino de matemática deve possibilitar o desenvolvimento dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico e dar subsídios para que os educandos sejam capazes de resolver os mais variados problemas, não apenas a execução de algoritmos. Para isso, faz-se necessário o desenvolvimento de um trabalho pedagógico que contemple a exploração de todas as concepções da álgebra e, consequentemente, as concepções da noção de equação discutidas neste capítulo.

5 A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

Com o intuito de enriquecer nossas investigações, iremos unir aos estudos já realizados uma pesquisa no Exame Nacional do Ensino Médio. Tendo em vista a importância que o ENEM detêm no ensino básico, sendo a principal porta de entrada para a Universidade, e o fato de que muitas vezes ele é utilizado como direcionador de práticas pedagógicas, pretendemos compreender a influência que o mesmo causa nos processos de ensino-aprendizagem a partir de uma análise sobre como as cinco concepções discutidas no capítulo anterior são verificadas na abordagem das equações polinomiais do 2º grau em suas mais recentes edições.

5.1 Considerações iniciais e Metodologia

Para dar início a nossa investigação, selecionamos as provas do ENEM dos últimos 10 anos, o que compreende as edições que vão de 2012 até 2021. Assim, realizamos o *download* das mesmas na versão digital (PDF) no site oficial do INEP, escolhendo, aleatoriamente e sem qualquer perda, a prova do tipo amarela em todas as edições a serem utilizadas. Feito isso e munidos dos resultados obtidos nas investigações que realizamos e apresentamos nos capítulos anteriores deste trabalho, procedemos, então, com a coleta e análise de dados.

A coleta de dados se deu seguindo alguns passos importantes. A princípio, nos concentramos apenas na investigação das questões da área de “Matemática e Suas Tecnologias”, realizando uma leitura e, quando necessário, a resolução de cada questão, a fim de verificar se a mesma tratava do conceito de equação polinomial do 2º grau ou não. Durante este processo, recorremos várias vezes à resoluções dispostas em canais abertos do YouTube, objetivando explorar variados tipos de resolução para verificar se o nosso objeto de estudo se fazia presente naquela determinada questão. Feito isso, selecionamos as questões que verificamos que trabalhavam com equações do 2º grau para, assim, procedermos uma análise mais minuciosa.

Em posse das questões selecionadas, realizamos uma nova análise dessas com o intuito de verificar qual(is) das concepções de equação se faziam presentes nas mesmas. Assim, verificamos como essas concepções foram evidenciadas nas questões que envolvem o nosso objeto de estudo, a equação polinomial do 2º grau, e pudemos tirar algumas considerações, que serão apresentadas e discutidas na seção a seguir.

5.2 Resultados e discussões

Durante nossas investigações foram sondadas, a priori, 450 questões do Exame Nacional do Ensino Médio, sendo 45 questões de cada uma das 10 edições (2012-2021) selecionadas. Nessa sondagem inicial ficou perceptível, do ponto de vista dos conteúdos abordados, um trabalho bem diversificado nas atividades propostas pelo ENEM, contemplando todos os eixos da BNCC: Geometria, Estatística e Probabilidade, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas e Números e Operações.

Nossa sondagem apontou também para um significativo número de questões envolvendo a noção de equação, principalmente equações do 1º grau. Já no que diz respeito as equações polinomiais do 2º grau, nosso objeto de estudo, encontramos 25 questões, distribuídas dentre as 10 edições analisadas que faziam referência à ideia de equação do 2º grau. Porém, após uma análise mais minuciosa, percebemos que 6 delas faziam apenas uma referência muito superficial a esse conceito, pois apresentavam uma equação explicitamente como um comentário a parte no enunciado, sem que houvesse necessidade de se manipular a mesma ou de ter qualquer conhecimento sobre ela para a resolução do problema, como uma possível distração para a sacada real do problema. Uma delas pode ser conferida logo abaixo:

Figura 5.2.1 – Questão 179 do ENEM 2021

Questão 179 enem2021

Um segmento de reta está dividido em duas partes na proporção áurea quando o todo está para uma das partes na mesma razão em que essa parte está para a outra. Essa constante de proporcionalidade é comumente representada pela letra grega φ, e seu valor é dado pela solução positiva da equação $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Assim como a potência φ^2, as potências superiores de φ podem ser expressas da forma $a\varphi + b$, em que a e b são inteiros positivos, como apresentado no quadro.

φ^2	φ^3	φ^4	φ^5	φ^6	φ^7
$\varphi + 1$	$2\varphi + 1$	$3\varphi + 2$	$5\varphi + 3$	$8\varphi + 5$	...

A potência φ^7, escrita na forma $a\varphi + b$ (a e b são inteiros positivos), é

A. $5\varphi + 3$
B. $7\varphi + 2$
C. $9\varphi + 6$
D. $11\varphi + 7$
E. $13\varphi + 8$

Fonte: ENEM (2021).

Durante nossa análise, resolvemos a questão e pesquisamos outras possíveis resoluções e percebemos que, embora o enunciado faça um comentário sobre a "solução positiva da equação $\phi^2 = \phi + 1$", não é necessário proceder qualquer trabalho com equação do 2º grau para resolver o problema que, por sua vez, só exige que o leitor identifique uma recorrência em que cada expressão de ϕ^n, com $n > 3$ e inteiro é obtida somando-se as expressões de seus dois antecessores ϕ^{n-1} e ϕ^{n-2}. No caso específico do problema, teríamos:

$$\phi^7 = \phi^6 + \phi^5 = (8\phi + 5) + (5\phi + 3) = 13\phi + 8.$$

Por esse motivo, resolvemos excluir essas 6 questões de nossos dados coletados, considerando apenas as demais 19 questões que realmente articulavam um trabalho com equações do 2º grau, o que representa 4,22% de todas as atividades sondadas.

Feito isso, procedemos com a análise das 19 questões coletadas. Para tanto, realizamos, em cada uma delas, uma leitura cautelosa de seu enunciado, a fim de identificar o que a questão realmente propõe. Evidentemente, também fizemos a resolução de tais questões, bem como pesquisas na internet por possíveis resoluções diferentes. Assim, pretendíamos entender qual o trabalho objetivado por essas questões, se era objetivado um trabalho mais intuitivo, dedutivo, estrutural, técnico ou aplicado e se a solução procurada estava nos campos da álgebra, aritmética ou geometria, para que pudéssemos categorizá-las quanto as diferentes concepções de equação que discutimos anteriormente. Quanto a isso, antes de prosseguirmos é importante destacar que a presença de uma concepção em uma determinada atividade não exclui a presença de outras concepções. Em outras palavras, é comum que hajam questões que trabalham mais de uma concepção.

Então, a partir de nossa análise, estabelecemos a seguinte categorização das referidas 19 questões:

Tabela 5.2.1 – Distribuição das concepções de equação nas 19 atividades analisadas

Ano	Questão	Pragmática	Geométrica	Estrutural	Processual	Aplicacional
2013	136	Não	Sim	Não	Sim	Não
2013	142	Não	Não	Não	Sim	Não
2013	145	Não	Sim	Não	Não	Sim
2013	165	Sim	Não	Não	Sim	Não
2014	163	Sim	Sim	Não	Não	Sim
2014	164	Não	Não	Sim	Não	Não
2015	136	Sim	Não	Não	Sim	Não
2015	145	Sim	Sim	Não	Não	Não
2015	157	Sim	Não	Não	Não	Não
2015	163	Não	Sim	Não	Não	Sim
2015	171	Não	Sim	Não	Não	Não
2016	152	Não	Sim	Não	Sim	Não
2016	166	Não	Sim	Não	Não	Não
2017	163	Não	Sim	Não	Não	Sim
2017	168	Sim	Sim	Não	Não	Não
2017	180	Não	Sim	Não	Não	Sim
2019	171	Não	Sim	Não	Não	Sim
2020	179	Não	Sim	Não	Não	Sim
2021	162	Não	Não	Não	Sim	Não
Total	19	6	13	1	6	7

Fonte: o autor.

Nessa perspectiva, apresentamos a seguir os resultados da análise dessas questões. Para uma melhor organização e compreensão do leitor, destacamos os resultados de cada concepção pesquisada acompanhados de algumas discussões que visam estabelecer um diálogo entre os resultados encontrados e os resultados de outras pesquisas desenvolvidas na área.

- **A concepção "pragmática"**

Como vimos anteriormente, a concepção pragmática é identificada pela presença de caminhos e raciocínios intuitivos na resolução dos problemas. A solução final normalmente é apresentada no campo da aritmética, como valores numéricos, encontrados a partir de soluções reais de equações. Além disso, é comum que a equação não apareça explicitamente, sendo necessário abstraí-la intuitivamente da questão, a fim de modelar a situação-problema.

Essa concepção foi evidenciada em 6 das 19 questões analisadas, o que representa, aproximadamente, 31,58% das atividades que estavam trabalhando o conceito de equação do 2º grau. Na grande maioria surgiam em problemas de ordem prática e exigiam soluções aritméticas, como esperado. Observe o exemplo abaixo:

Figura 5.2.2 – Questão 157 do ENEM 2015

QUESTÃO 157

Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400 - 100p,$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

A R$ 0,50 $\leq p <$ R$ 1,50
B R$ 1,50 $\leq p <$ R$ 2,50
C R$ 2,50 $\leq p <$ R$ 3,50
D R$ 3,50 $\leq p <$ R$ 4,50
E R$ 4,50 $\leq p <$ R$ 5,50

Fonte: ENEM (2015).

Observe que a situação proposta acima não apresenta a equação do 2º grau explicitamente, objetivando que o leitor expresse-a como uma forma de modelar o problema. Analisando a situação, perceba que a arrecadação média diária da padaria (R$ 300,00) é o produto entre quantidade de pães especiais vendidos (q) e o seu preço (p), então, temos a equação que modela o problema:

$$-100p^2 + 400p = 300 \Leftrightarrow -p^2 + 4p = 3.$$

Resolvendo-a, encontramos as suas soluções, que são $p_1 = 1$ e $p_2 = 3$. Como a questão objetiva que seja vendida a maior quantidade de pães, necessariamente isso irá ocorrer quando o preço do mesmo for o menor, ou seja, $p_1 = 1$, que pode ser facilmente localizado no item (A).

Durante a análise dessa e de algumas outras atividades identificamos um enunciado com uma problemática cotidiana, a equação do 2º grau é implícita, necessitando ser abstraída pelo leitor, normalmente de forma intuitiva e a solução procurada para o problema é totalmente aritmética, obtida a partir da resolução da equação formulada. Dessa forma, a partir dessas características, concluímos que tal questão trabalha a concepção pragmática.

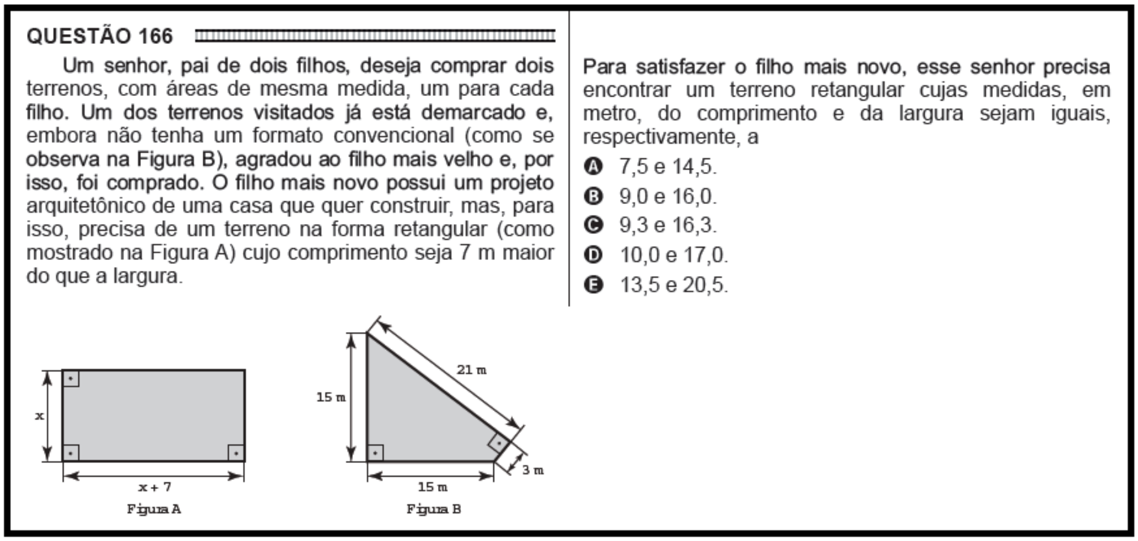
Para Silva (2018), essa concepção é comumente evidenciada nas pesquisas com equações, inclusive a partir do Ensino Fundamental. Silva (2018), que analisou as concepções de equação em um livro didático do 6º ano, destaca a concepção pragmática como a mais trabalhada no livro, estando presente em quase 60% das questões que remetem a ideia de equação. Isso se justifica porque essa concepção pode ser introduzida mesmo antes de se formalizar algebricamente o conceito de equação, possibilitando que estudantes possam articular métodos aritméticos de resolução, como o método das tentativas ou da inversão. Todavia, essa concepção é mais comum em problemas com equações do 1º grau, o que pode ser um motivo para que ela tenha se apresentado, nesta nossa pesquisa, em apenas 31,58% das questões que envolvem equação do 2º grau, o que podemos considerar uma quantidade razoável.

- **A concepção "geométrica"**

Como vimos, essa concepção é frequente em situações geométricas, nas quais a equação é abstraída por meio de deduções geométricas, normalmente se tratando de medidas de segmentos em problemas que abordam as noções de área, perímetro e volume, por exemplo. Nessa concepção é comum a busca por soluções que, mesmo expressas de forma aritmética ou algébrica, quantificam ou expressam alguma medida ou relação geométrica.

Em nossa análise, essa concepção foi a mais presente dentre as cinco, sendo contemplada em 13 das 19 atividades analisadas, o que representa 68,42% das mesmas. Na grande maioria dos problemas, a equação do 2º grau era deduzida a partir de figuras, nas quais as soluções procuradas deviam ser expressas aritmeticamente e quantificavam medidas de segmentos, como já esperávamos. Observe o exemplo abaixo:

Figura 5.2.3 – Questão 166 do ENEM 2016



QUESTÃO 166

Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

A 7,5 e 14,5.
B 9,0 e 16,0.
C 9,3 e 16,3.
D 10,0 e 17,0.
E 13,5 e 20,5.

Fonte: ENEM (2016).

Na análise da questão acima, temos um terreno retangular de área $x(x+7) = x^2 + 7x$ e um terreno na forma de quadrilátero irregular, cuja área pode ser calculada de forma simples se traçarmos uma diagonal dividindo o terreno em 2 terrenos triangulares, ambos com a forma de triângulos retângulos, cujas medidas dos catetos, em metros, são 15 e 15 em um deles e 21 e 3 no outro, o que nos dá a área total do quadrilátero irregular, em metros, como sendo:

$$\frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2} = \frac{225 + 63}{2} = \frac{288}{2} = 144.$$

Como ambos terrenos precisam ter a mesma área, chegamos na nossa equação do 2º grau:

$$x^2 + 7x = 144.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos as soluções reais $x_1 = -16$ e $x_2 = 9$. Porém, por se tratar de uma medida de segmento, a única solução admissível é a positiva, ou seja, $x_2 = 9$. Tomando $x = 9$ encontramos as medidas do terreno retangular, que são 9 e 16 e, portanto, a alternativa (B) é a correta.

Percebe-se, na situação apresentada, que a equação do 2º grau surge a partir de deduções geométricas de medidas e propriedades presentes nas figuras representadas. Além disso, objetiva a obtenção de uma solução que quantifica medidas de segmentos, ou seja, de caráter geométrico. Portanto, pudemos concluir que a concepção geométrica está presente nesta questão.

Nossos resultados parecem coerentes com a pesquisa de Silva (2017), que apresentou as concepções de equação em uma coleção de 4 volumes de livros didáticos e o mesmo pôde concluir que a concepção geométrica foi também a com mais frequência na coleção analisada. Além disso, essa concepção fica bastante evidente nos relatos históricos que trouxemos a cerca de algumas civilizações, como a Grécia antiga, por exemplo.

- **A concepção "estrutural"**

Nessa concepção as equações são trabalhadas e/ou obtidas a partir de estudos focados em suas propriedades algébricas, em atividades que trabalham generalizações ou na obtenção de relações entre entes matemáticos. É comum, portanto, que a solução procurada seja expressa algebricamente, como uma fórmula geral, uma igualdade entre expressões algébricas ou algo do tipo.

Durante nossa análise percebemos uma baixa frequência de atividades dessa concepção, em especial trabalhando a equação polinomial do 2º grau. Assim, das 19 questões analisadas, identificamos essa concepção em apenas 1 delas, o que representa um percentual de, aproximadamente, 5,26% do total. Observe a referida questão:

Figura 5.2.4 – Questão 164 do ENEM 2014

QUESTÃO 164

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial *f*, de grau menor que 3, para alterar as notas *x* da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

A) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

B) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

C) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

D) $y = \frac{4}{5}x + 2$

E) $y = x$

Fonte: ENEM (2014).

Na análise da atividade acima identificamos a presença do conceito de função do 2º grau, o qual muitas vezes acaba trabalhando aspectos da equação do 2º grau, visto as relações entre ambos conteúdos. A princípio, para resolvermos a questão, acreditamos que os passos mais óbvios sejam tomar uma função genérica $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Feito isso, observamos que $f(0) = 0$, portanto $c = 0$. Além disso, como $f(10) = 10$ e $f(5) = 6$, temos que:

$$\begin{cases} 10a + b = 1 \\ 25a + 5b = 6. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, concluímos que $a = -\dfrac{1}{25}$ e $b = \dfrac{7}{5}$. Nesse caso, podemos expressar uma relação entre a nota x e a nota y através da expressão:

$$y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$$

Essa expressão, apesar de tratar-se de uma função, explora o conceito de equação do 2º grau sempre que tomarmos uma nota y fixada. Porém, não é uma questão de ordem geométrica ou mesmo que busque uma solução aritmética. Na verdade, busca-se uma expressão que generalize a situação estabelecendo uma relação algébrica entre variáveis, caracterizando um trabalho com a concepção estrutural da noção de equação.

A respeito desse tipo de questão, Ribeiro e Cury (2015)(p. 88) destaca que uma atividade que "propõe que o aluno busque uma regra que defina y como função de x" está contextualizada na própria matemática e auxilia os alunos "a desenvolverem significados mais abstratos". Assim, o autor conclui que este tipo de trabalho é análogo ao que foi definido na concepção estrutural

O fato dessa concepção ter sido a menos frequente em nossa análise não nos surpreende, isso porque Silva (2017) também verificou, em sua pesquisa, que essa concepção é a que menos é trabalhada na coleção de livro didático de matemática por ele analisada. Esses fatos nos dão grandes indícios de que os aspectos estruturais das equações não são o foco dos trabalhos com equação durante a escolarização básica.

- **A concepção "processual"**

Como já vimos, essa concepção trata de trabalhos pouco ou nada contextualizados. Normalmente estão presentes em atividades que propõem apenas que se resolva uma equação dada ou que se aplique algorítimos, técnicas ou uma série de operações meramente mecânicas para se obter um resultado ou uma simplificação, que podem ser apresentados tanto aritmeticamente como algebricamente.

Em nossa análise encontramos 6 atividades que trabalham os aspectos dessa concepção, o que representa 31,58% das atividades selecionadas. Observe o exemplo abaixo:

Figura 5.2.5 – Questão 162 do ENEM 2021

Questão 162 enem2021

Para a comunicação entre dois navios é utilizado um sistema de codificação com base em valores numéricos. Para isso, são consideradas as operações triângulo Δ e estrela $*$, definidas sobre o conjunto dos números reais por $x \Delta y = x^2 + xy - y^2$ e $x * y = xy + x$.

O navio que deseja enviar uma mensagem deve fornecer um valor de entrada b, que irá gerar um valor de saída, a ser enviado ao navio receptor, dado pela soma das duas maiores soluções da equação $(a \Delta b) * (b \Delta a) = 0$. Cada valor possível de entrada e saída representa uma mensagem diferente já conhecida pelos dois navios.

Um navio deseja enviar ao outro a mensagem "ATENÇÃO!". Para isso, deve utilizar o valor de entrada $b = 1$.

Dessa forma, o valor recebido pelo navio receptor será

A) $\sqrt{5}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\sqrt{1}$

D) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

E) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Fonte: ENEM (2021).

Para solucionar a questão acima precisamos calcular $a \Delta b$ e $b \Delta a$, com $b = 1$. Pela definição da operação Δ, dada acima, temos que:

$$a \Delta 1 = a^2 + a - 1$$

e

$$1 \Delta a = 1 + a - a^2.$$

Daí, pela definição da operação $*$, sabemos que $x * y = xy + x = x(y+1)$. Assim, temos que:

$$(a \Delta 1) * (1 \Delta a) = (a^2 + a - 1) * (1 + a - a^2) = (a^2 + a - 1)(-a^2 + a + 2) = 0$$

Para resolvermos o problema, precisamos encontrar as soluções reais da equação acima, porém, como $(a^2 + a - 1)(-a^2 + a + 2) = 0$, sabemos que $a^2 + a - 1 = 0$ ou $-a^2 + a + 2 = 0$.

- Se $a^2 + a - 1 = 0$, temos as soluções $a_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $a_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$;
- Se $-a^2 + a + 2 = 0$, temos as soluções $a_3 = -1$ e $a_4 = 2$.

Assim, precisamos pegar a soma das duas maiores soluções encontradas, ou seja:

$$a_1 + a_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Na questão acima verificamos, a priori, que a equação em si já é praticamente apresentada explicitamente na questão, objetivando que se manipule uma significativa quantidade de processos técnicos de resolução, definidos pelas operações Δ e $*$, além das técnicas de resolução de equação do 2º grau. Essas características nos permitem concluir que a questão tem o intuito de trabalhar a concepção processual das equações.

Os resultados que encontramos quanto ao aspecto processual mostram um equilíbrio entre as concepções pragmática e processual. Em sua pesquisa, Silva (2017) verificou que, na coleção de livros por ele analisada, essas duas concepções apareceram como sendo a segunda e terceira mais trabalhadas nos livros, respectivamente, com pouca diferença de uma para a outra.

Nessa perspectiva, embora hajam críticas ao trabalho mecânico na resolução das equações no ensino básico, compreendemos que o problema não reside nessa concepção, uma vez que é muito importante a aprendizagem dos algorítimos e técnicas de resolução. Na verdade, o problema ocorre quando as aulas e atividades apenas se concentram em trabalhar essa concepção exclusivamente, esquecendo as demais, o que vem a causar uma grande descontextualização da matemática e limitar as condições de desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

- **A concepção "aplicacional"**

Essa concepção pode surgir em contextos variados, normalmente em situações cotidianas ou geométricas. O que a diferencia das concepções pragmática e geométrica, por exemplo, é o fato de que a equação em questão não é abstraída intuitivamente, nem mesmo a partir apenas de deduções geométricas. Nesse caso, mesmo fazendo uso de abstrações ou deduções geométricas, a equação em si é obtida como uma aplicação ao problema, como uma regra ou fórmula pronta que não está explícita no enunciado.

Essa concepção é, então, muitas vezes identificada no trabalho com equações do 2º grau quando há necessidade de aplicação de fórmulas de volume, do teorema de Pitágoras, da lei dos cossenos, por exemplo, ou seja, quando a incógnita é um termo que encontra-se elevado ao expoente 2 na respectiva fórmula. No decorrer de nossa análise foram encontradas 7 atividades que abordavam essa concepção, o que representa 36,84% das questões analisadas. Observe uma delas abaixo:

Figura 5.2.6 – Questão 163 do ENEM 2015

QUESTÃO 163

Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

- A 0,5
- B 1,0
- C 2,0
- D 3,5
- E 8,0

Fonte: ENEM (2015).

Na resolução do problema proposto acima, precisamos de uma cisterna cilíndrica de raio R, com $3m$ de altura e volume de $81m^3$. Parece evidente a necessidade da aplicação da fórmula para cálculo de volume do cilindro, daí, com $\pi = 3$, temos:

$$\pi \cdot R^2 \cdot h = 81 \Leftrightarrow R^2 = 9.$$

A equação do 2º grau incompleta, obtida logo acima, nos dá as soluções $R_1 = -3$ e $R_2 = 3$, sendo viável apenas considerarmos essa última, já que se trata de uma medida de comprimento. Como o raio da cisterna antiga era $r = 1m$, o problema se resume a $R - r = 3 - 1 = 2$ e, portanto, a alternativa correta é a (C).

Note, nessa questão, que a equação do 2º grau "$R^2 - 9$" só é obtida no problema a partir da aplicação de uma fórmula, na qual a incógnita é o raio R procurado, que tem expoente 2. Nesse caso, identificamos os elementos caracterizadores do trabalho com a concepção aplicacional. Na grande maioria, as questões categorizadas por trabalharem essa concepção foram frutos de questões associadas a contextos geométricos, o que também foi percebido no trabalho de Silva (2018), que verificou como a noção de equação é concebida no 7º ano do Ensino Fundamental a partir de uma análise de livro didático.

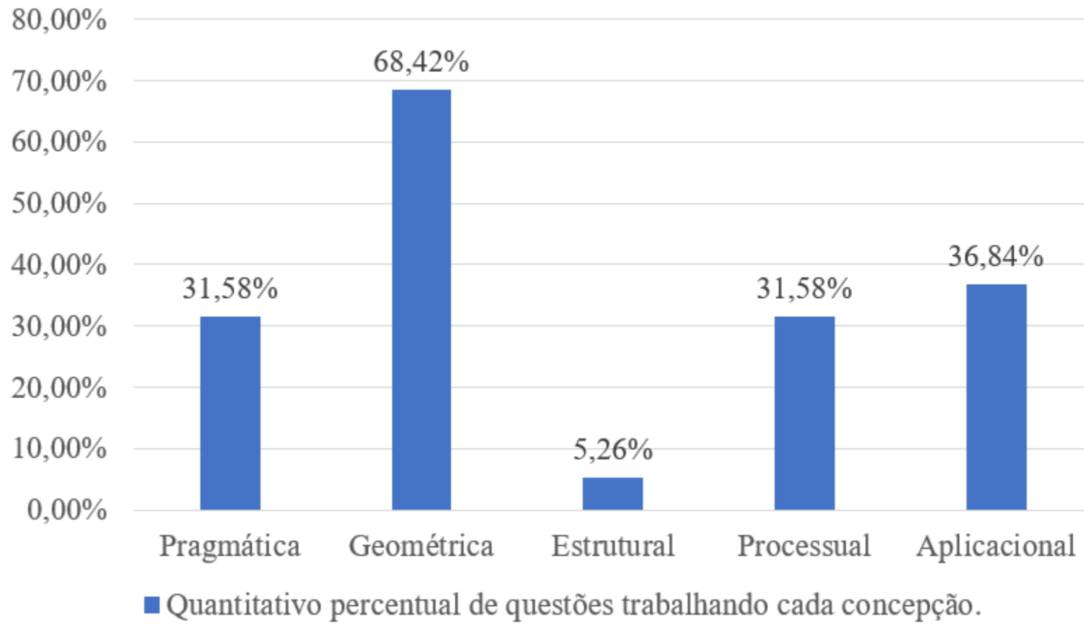
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos estudos históricos, desenvolvidos no Capítulo 2, pudemos compreender os principais contextos nos quais as equações surgiam e como eram tratadas por variados povos. Compreendemos que a mesma nasceu da necessidade do homem em aperfeiçoar suas atividades práticas, originando-se em situações cotidianas. Além disso, teve sua grande importância no estudo da geometria, estimulado inicialmente pela necessidade de desenvolvimento da agricultura, demarcação de terras e engenharia, por exemplo. Com o aperfeiçoamento da álgebra, as equações passam a ser tratadas sob aspectos generalistas, sendo estudada num campo mais abstrato, no qual, muitas vezes, a equação passa a ser concebida como uma generalização ou uma fórmula, com aplicações além da matemática. Não separado desses contextos, mas caminhando paralelamente a eles, o aspecto tecnicista desenvolvido para o cálculo mais eficiente e direto perpassa pelo desenvolvimento da noção de equação ao longo da história.

Os estudos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4 nos propiciaram bagagem para conhecer e se aprofundar nos principais métodos de resolução de equações do 2º grau no ensino básico, bem como entender um pouco dos desafios que permeiam o ensino de álgebra e a importância de se desenvolver no educando as capacidades características do pensamento algébrico desde cedo. Ainda, entendemos quais são as cinco concepções da noção de equação e como cada uma é concebida. A partir daí, salientamos a importância do desenvolvimento paralelo de todas essas concepções nas práticas pedagógicas em matemática, uma vez que só assim será possível formarmos educandos críticos e autônomos, com capacidades pertinentes a uma aprendizagem significativa, possibilitando a compreensão e manipulação de equações nos mais variados contextos e sob os mais variados tipos de tratamentos.

Subsidiados pelas pesquisas que desenvolvemos, bem como uma sondagem de alguns trabalhos que investigaram as concepções de equação em livros didáticos, que podem ser consultadas nas referências Silva (2017), Silva (2018) e Silva (2020), pudemos realizar uma exploração no Exame Nacional do Ensino Médio, que mostrou como as cinco concepções de equações se fizeram presentes nas atividades sobre equação do 2º grau nas últimas 10 edições do exame, como segue abaixo:

Figura 6.0.1 – Distribuição das concepções de equação nas questões analisadas



Fonte: O autor.

Notamos no gráfico acima que a soma dos percentuais evidenciados nas cinco concepções investigadas ultrapassa os 100%, isso ocorre porque, como vimos na tabela 5.2.1, há várias questões trabalhando paralelamente mais de uma concepção de equação.

Diante de nossa análise, no que diz respeito as questões práticas, contextualizadas em problemas mais cotidianos, as equações mais trabalhadas eram as de 1º grau, sendo as do 2º grau verificadas com menor frequência, talvez porque não seja tão intuitivo abstrair uma equação desse tipo em relação a uma de 1º grau. Mesmo assim, as atividades propostas foram bem elaboradas, com enunciados ricos e que exigiam algumas abstrações não tão diretas, explorando o pensamento algébrico do leitor.

A partir dos resultados analisados, percebemos que as equações do 2º grau aparecem comumente em contextos geométricos, sendo abstraídas a partir de deduções envolvendo conceitos como medidas de segmentos, áreas, volumes, etc. A maioria das questões categorizadas por trabalhar a concepção geométrica eram dotadas de um enunciado problematizador, o que faz com que o educando seja instigado a mergulhar em outras concepções para compreender o problema e não apenas em ir direto para uma figura e deduzir uma relação geométrica como uma equação. Assim, muitas das questões que lidavam com a concepção geométrica também contemplavam outras concepções, em especial, a aplicacional.

O tratamento estrutural dado as equações foi o menos frequente, apontando que o mesmo não é o foco no ensino básico ou pelo menos no ENEM. Embora seja muito importante na compreensão da equação enquanto ente matemático, a concepção estrutural é normalmente explorada em estudos de nível superior, quando são formalizadas definições mais rigorosas e se fazem necessárias demonstrações. Algumas atividades de generalização, muitas vezes articuladas junto com a noção de função do 2º grau é que são mais frequentes no ensino básico, em especial nos últimos anos da escolarização. Pelo menos é o que tem mostrado a pesquisa de Silva (2017), em que tal concepção não é verificada no 6º ano do Ensino Fundamental, passa a ser vista em poucas situações no 7º e 8º ano e ganham um pouco mais de força no 9º ano, mas ainda aparecendo com menor incidência entre as cinco concepções analisadas.

Já o trabalho mecânico, caracterizado na concepção processual, é verificado com uma razoável frequência e mesmo nos casos em que foi verificado não se tratava exclusivamente de atividades totalmente descontextualizadas. Isso evidencia uma importância dada a um trabalho mais significativo por parte do exame. Além disso, mesmo apresentando explicitamente a equação, os problemas não se resumiam a enunciados como "resolva" ou "calcule", mas sim apresentavam alguma problemática em seu contexto, o que é bastante enriquecedor.

No que diz respeito ao aspecto aplicacional, também identificamos um trabalho quantitativamente razoável, especialmente em situações geométricas. As principais aplicações verificadas eram de fórmulas de volume e, principalmente, do teorema de Pitágoras. Essas atividades eram contempladas em um enunciado bastante amplo, que não permitia, na maioria das vezes, uma aplicação imediata, sendo necessário articular a aplicação com raciocínios dedutivos e, por esse motivo, muitas das questões que foram categorizadas por contemplar a concepção aplicacional também trabalhavam a concepção geométrica das equações, o que caracteriza uma abordagem enriquecedora.

Em suma, consideramos que, a partir de tais estudos conseguimos compreender os aspectos que permeiam a história, o trabalho pedagógico e matemático da noção de equação do ensino básico, bem como apresentar e discutir os resultados dessa pesquisa, ancorada no Exame Nacional do Ensino Médio, que deve contribuir para o debate sobre o ensino de equação e suas diferentes concepções na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Coleção Praticando Matemática**. 4^a ed. renovada. Ensino Fundamental. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

BARBOSA, Y. O. **Multisignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática**. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, (1998).

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática: ensino de primeira à quarta série**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, (1997).

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Coleção Quadrante matemática**. 1^a ed. Ensino Médio. São Paulo: Edições SM, 2016.

COSTA, L. C. **A evolução na resolução das equações algébricas**. 2016. 48 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2016.

DELGADO, J.; FRANSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DORIGO, M. **Investigando as concepções de equações de um grupo de alunos do ensino médio**. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5^a ed. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um repensar...a educação algébrica elementar**. Proposições, Campinas, v. 4, p. 78–90, 1993.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 4^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 4^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GOMES, L. M. M. **Álgebra e funções na educação básica**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

HEFEZ, A.; VILLELA M. L. **Polinômios e Equações Algébricas**. (Coleção PROFMAT), SBM, 2012.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 11^a ed. Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PITOMBEIRA, J. B. **Revisitando uma velha conhecida**. Conferência da II Bienal da SBM, Conferências, p. 1–38, 2004. Disponível em <http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf>. Acesso em 15/10/2021.

PONTE, J. P.; BRANCO. N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2009.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N.; **Álgebra para a formação do professor. Explorando os conceitos de equação e de função**. 1^a ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

RIBEIRO, A. J. **Elaborando um perfil conceitual de equações: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática**. Ciência e Educação, Bauru, v. 19, n. 1, p. 55-71, 2013.

RIBEIRO, A. J. **Equações e seus multissignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. 2007. 141 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ROCHA, E. A. R.; Sant'Ana, C. C. **Dificuldades no ensino e aprendizagem de aritmética e álgebra nas escolas públicas**. Anais da III Semana de Educação Matemática da UESB: Matemática: com carinho e com afeto. Vitória da Conquista - BA, 2011.

SILVA, J. E. M. **Investigando a noção de equação no livro didático de matemática**. 2017. 127 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática-Licenciatura) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.

SILVA, J. E. M. **A noção de equação em um livro didático de matemática do 6º ano**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 03, ed. 02, vol. 04, p. 57-69, ISSN: 2448-095, 2018.

SILVA, J. E. M. **Educação matemática: o ensino de equação e suas diferentes concepções na construção de uma aprendizagem significativa**. DNA Educação, org. Ivanio Dickmann. São Paulo: Diálogo Freiriano, p. 116–130, 2018.

SILVA, J. E. M. **Equações na educação básica: uma análise de livro didático do 7º ano do ensino fundamental**. V Encontro de Matemática do Agreste Pernambucano. Caruaru, 2018.

SILVA, J. E. M. **O desenvolvimento da aprendizagem e da argumentação em matemática através da ludicidade**. Rumos da Educação, org. Ivanio Dickmann. São Paulo: Diálogo Freiriano, p. 327–345, 2018.

SILVA, J. E. M. **Investigando as concepções de equação em um grupo de alunos do programa de iniciação científica da OBMEP**. Vozes da Educação, org. Vilmar Baggio. São Paulo: Diálogo Freiriano, p. 123–137, 2019.

SILVA, J. E. M. **Investigando a noção de equação: perspectivas histórico-epistemológicas, pedagógicas e análise de livro didático**. 1ª ed. Veranópolis: Diálogo Freiriano, 2020.

TELES, R. A. M. **A aritmética e a álgebra na matemática escolar**. Educação Matemática em Revista. Número 16, 2004.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis**. As ideias da álgebra. COXFORD, A; SHULTE, A. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo, 1995.

VELOSO, D. S; FERREIRA, A. C. **Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra**. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011.