UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IGOR RAPHAEL SILVA DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE – PB
2021

IGOR RAPHAEL SILVA DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE – PB
2021

M528e Melo, Igor Raphael Silva de.
Equações diferenciais ordinárias na formação inicial de professores de matemática através da resolução de problemas [manuscrito] / Igor Raphael Silva de Melo. - 2021.
245 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Resolução de problemas. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Educação matemática. 4. Licenciatura em matemática . 5. Ensino remoto. I. Título

21. ed. CDD 515.35

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

IGOR RAPHAEL SILVA DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovado em: 23/12/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Examinador Interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Glageane da Silva Souza

Profa. Dra. Glageane da Silva Souza (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

À Maria Salete (in memoriam), que dentre as mais de 500 mil ausências que se desdobraram em saudade, vazio, tristeza e solidão neste último estranho ano, a sua me mostrou que não se trata de ter alguém segurando a nossa mão, corpo ao lado, presença física. O que desfaz a solidão do vazio é o sentir juntos, o pensamento que nos põe em comunhão. O amor que nunca acaba. Como símbolo real de resiliência, essa conquista, eu dedico boa parte a ti. Esteja onde estiver!

Á minha mãe, Damiana Rizete, e ao meu pai, Davi Antônio, meus alicerces. Minha melhor representatividade de amor. Aqueles que nunca contaram esforços e nunca mediram limites para que eu pudesse almejar sonhos e alcançar novos voos. A vida simples, a rica sabedoria, a plenitude de viver.

EU VOS DEDICO.

AGRADECIMENTOS

YES, WE CAN!

Nem todas as flores florescem na mesma época e nem todas as frutas amadurecem na mesma estação, o que nos resta, a gratidão.

Ao encerrar esta etapa da minha vida acadêmica, momento em que alcanço a realização de um sonho, reflito sobre todos os elementos que fizeram parte desta conquista. Aqueles que nos cercam e nos acompanham durante um caminhar são fundamentais para que tenhamos força, persistência e a ousadia de enfrentar os múltiplos e inesperados desafios que se apresentam. Chegar a esta seção do trabalho e ter ao quê e a quem agradecer é uma dádiva.

A Deus, meu refúgio e fortaleza, pelo dom da vida, o desejo de sonhar, a sabedoria de seguir sempre em frente e o discernimento e força para persistir e tornar os meus sonhos realidade.

Ao Professor Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, meu orientador, conselheiro, companheiro, amigo e fonte de inspiração como educador matemático, pela confiança em me ter como aluno e pupilo acadêmico nesses últimos anos de pesquisa, pela paciência e empatia, por respeitar sempre as minhas ideias e por contribuir de forma enfática no meu crescimento intelectual, ao que me levou o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por se fazer presente em minha formação de forma tão significativa e por toda dedicação, competência e compromisso.

Aos professores, Drª Glageane da Silva Souza e Dr. Silvanio de Andrade, meus sinceros agradecimentos pelo aceite em serem membros da minha banca examinadora de qualificação e, agora, de defesa final de Dissertação de Mestrado. Obrigado pelas valiosas observações e contribuições na busca pela excelência deste trabalho e por toda paciência e cordialidade que me incentivaram fortemente para chegar até aqui, ao fim dessa jornada.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM) pelo aprimoramento da minha formação.

Aos meus colegas da turma de Mestrado e do Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática (GPRPEM), pelos ensinamentos, discussões e conhecimentos compartilhados nessa caminhada. Avante!

À família, amigos e a todos que contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional.

Gratidão.

“Saber alguma coisa para si mesmo ou para se comunicar com um colega especialista, não é a mesma coisa que sabê-la para explicar a um aluno (...) A Pedagogia, como uma linguagem em si mesma, pode ou liberar ou aprisionar ideias e inspirar ou sufocar o pensamento construtivo”

Hyman Bass

RESUMO

Este trabalho analisa as estratégias metodológicas da Resolução de Problemas nas Equações Diferenciais Ordinárias, evidenciando a sua importância na atualidade e a necessidade de ensino para tornar a aprendizagem significativa na formação inicial e continuada de professores de matemática. Trata-se de um estudo bibliográfico e intervenção qualitativa no contexto da metodologia científica de Romberg-Onuchic (2014). Oferecemos um curso de extensão denominado “EDO através da Resolução de Problemas: da prática a teoria”, destinado a alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), *campus* Cuité, para licenciandos de outras universidades e professores de diferentes estados do Brasil. O curso foi ministrado virtualmente e utilizamos os aplicativos Zoom Meetings com salas simultâneas para a dinâmica dos encontros virtuais e WhatsApp para contatos instantâneos e registros de tarefas. A coleta e análise dos dados levantados nessa investigação ocorreram por meio da aplicação de questionários, gravações de áudio e vídeo dos encontros remotos, material de produção dos participantes, roda de conversa, e anotações feitas no diário de campo. As descrições e as análises dos encontros e do questionário de avaliação revelam as alterações na postura dos participantes frente à construção e reconstrução de conceitos, teoremas e aplicações das EDO e suas implicações no processo formativo de compreensão dos conceitos matemáticos abordados, bem como da relevância em vivenciar uma nova abordagem para se trabalhar essa temática através da Resolução de Problemas. Os resultados mostram que este trabalho contribuiu com professores e futuros professores de matemática, favorecendo a aprendizagem, para que possam desenvolver uma prática reflexiva ao trabalharem na perspectiva da Resolução de Problemas, criando um novo caminho ao que se refere a formação inicial e continuada de professores. Conclui-se então, que o nosso trabalho criou um elo entre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a formação inicial e continuada de professores e as Equações Diferenciais Ordinárias, além das possibilidades no contexto do ensino remoto.

Palavras-Chave: Resolução de Problemas. Equações Diferenciais Ordinárias. Educação Matemática. Licenciatura em Matemática. Ensino Remoto.

ABSTRACT

This paper analyzes the methodological strategies of Problem Solving in Ordinary Differential Equations, highlighting its importance nowadays and the need for teaching to make meaningful learning in initial and continuing education of mathematics teachers. This is a bibliographic study and qualitative intervention in the context of the scientific methodology of Romberg-Onuchic (2014). We offered an extension course called "ODE through Problem Solving: from practice to theory", intended for the students the of Mathematics Teaching Course from the *Universidade Federal de Campina Grande* (UFCG), Cuité campus, to teaching course students from other universities and teachers from different states of Brazil. The course was taught virtually and we used the Zoom Meetings applications with simultaneous rooms for the dynamics of the virtual meetings and WhatsApp for instantaneous contacts and task records. The collection and analysis of the data collected in this research occurred through the application of questionnaires, audio and video recordings of the remote meetings, production material of the participants, chatting circle, and notes made in the field journal. The descriptions and analysis of the meetings and the evaluation questionnaire reveal the changes in the participants' attitude towards the construction and reconstruction of concepts, theorems, and applications of ODE and their implications in the formative process of understanding the mathematical concepts addressed, as well as the relevance of experiencing a new approach to work on this theme through Problem Solving. The results indicate that this paper contributed with teachers and future teachers of mathematics, favoring learning, in order that they can develop a reflective practice when working in the perspective of Problem Solving, creating a new path regarding the initial and continuing education of teachers. It is concluded, then, that our work created a link between the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving, the initial and continuing education of teachers and Ordinary Differential Equations, besides the possibilities in the context of remote teaching.

Keywords: Problem Solving. Ordinary Differential Equations. Mathematics Education. Degree in Mathematics. Remote Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma pesquisa que tem como Fenômeno de Interesse o Ensino das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) através da Resolução de Problemas. Todo o caminhar de investigação, imerso no Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, encaminhou a necessidade de se aprofundar teoricamente sobre três principais variáveis de interesse, são os temas: Formação Inicial de Professores de Matemática; Equações Diferenciais Ordinárias; e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Preliminarmente, em busca de explicitar, em linhas gerais, o contexto de todo o estudo, apresenta-se os objetivos (Geral e Específicos), em seguida discorre-se brevemente sobre a motivação, a trajetória acadêmica e profissional percorrida pelo pesquisador, a justificativa, a metodologia e a estrutura do trabalho de qualificação.

Em especial, nesta primeira parte do trabalho, o texto foi escrito, em nuances, na primeira pessoa do singular, quando algum fato é referido diretamente ao pesquisador ou ao discurso conjunto pesquisador-orientador, quando não, encontra-se na terceira pessoa do singular com partícula se.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Analisar as estratégias metodológicas da Resolução de Problemas nas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), levando em consideração a sua importância na atualidade e a necessidade de ensino para tornar significativa a aprendizagem dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Analisar, discutir e sintetizar o que vem sendo considerado nas pesquisas em relação ao ensino e aprendizagem das EDO;

- Analisar os aspectos pedagógicos referentes ao desenvolvimento da Resolução de Problemas na perspectiva das EDO e suas conexões com os conteúdos da Educação Básica;
- Planejar a aplicar problemas geradores seguindo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propostos por Allevato e Onuchic (2014), com possíveis modificações;
- Avaliar como os alunos (participantes da pesquisa) lidaram com as atividades desenvolvidas no Curso de Extensão, evidenciando as principais estratégias e dificuldades;
- Fornecer, a partir dos resultados da pesquisa, elementos que dinamizam o processo de ensino e aprendizagem pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, proporcionando um novo olhar para seu objeto de estudo e sua futura postura pedagógica-profissional.

1.2. A MOTIVAÇÃO E A JUSTIFICATIVA

A fim de apresentar algumas experiências pessoais e profissionais que me levaram a ingressar no curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGECM/UEPB, parto com uma fala de D'Ambrósio (1996), que diz: "Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo" (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 91).

Esta pesquisa não parte da inquietação de um professor com longa experiência de trabalho no Ensino Superior, ou ainda, de um professor que já vivenciou anos de carreira ensinando Cálculo; parte de um jovem professor que iniciou sua prática docente concomitantemente com sua formação inicial, e cada vez mais percebe o quanto que os cursos de Licenciatura em Matemática precisam estar próximos da sala de aula da Educação Básica, o quanto é necessário formar bem os professores para atuarem no Ensino Fundamental e Médio, o quanto é urgente mudar a licenciatura e inserir a Educação Matemática nesse processo formativo, explicitando seu sentido, seu papel, domínios e especificidades.

A Matemática e suas peculiaridades, presentes em nosso cotidiano, foi algo que sempre me cativou. Nunca fui um dos melhores alunos de classe e nem sempre obtive as notas máximas na disciplina, mas sempre fui um observador apaixonado pelas belezas que a matemática pode proporcionar por trás de tantos rigorosos cálculos. Também sempre mantive meu olhar crítico sobre a postura do professor mediante os tantos conceitos, bem como, sua abordagem em busca de tornar seu ensino, de fato, significativo.

Ao iniciar minha trajetória acadêmica no curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité, o qual ingressei no ano de 2015, tinha ali um grande dilema, a pretensão de permanecer ou não no curso, pois naquele momento meu objetivo era ir em busca do que realmente me interessava, a matemática aplicada – cursos de engenharia. Entretanto foram nos primeiros semestres, através de algumas oportunidades de experiência profissional docente, que me vi e me senti Professor. Uma sensação única e sublime, como a de uma arte de constante crescimento, sem caminho de volta.

Ao longo das minhas primeiras práticas metodológicas e experiências em sala de aula, exercendo a função de Professor de Matemática na rede pública e privada, por meio de vínculos empregatícios, na qual acredito que, felizmente, tive a chance de realizar cedo em minha carreira, fui amadurecendo minha percepção de criticidade ao processo de ensinar e aprender Matemática, fato este que me fez divergir entre duas grandes paixões naquele momento, duas subáreas da Matemática que, em meu curso, sempre pude notar uma certa heterogeneidade entre elas, quando tratadas por alunos e professores, que são: a Matemática Pura/Aplicada e a Educação Matemática. Duas áreas científicas que apenas se distinguem em seu objeto de estudo, mas que ambas, em cursos de formação de professores, especificamente de Matemática, se tornam imprescindíveis, enfatizando assim, a importância do elo entre o “saber” e o “saber ensinar”.

Não significa que devemos não dar tanta importância à assimilação de conteúdos com tanto rigor que a matemática exige, mas sim ir além, conectar ambos saberes para entender, ressignificar e dar sentido ao que está sendo ensinado e, assim, não nos tornarmos meros receptores e transmissores de conceitos, definições, teoremas e exemplos estruturais, sem qualquer ligação com a prática utilitária.

Essas afirmações se intensificaram ao decorrer das minhas práticas docentes em consonância com o curso, me fazendo perceber que pensar no ensino de matemática, nos dias atuais, remete a uma reflexão sobre que alunos queremos formar, pois mesmo diante das transformações que a educação vem passando em busca de novas alternativas didáticas-metodológicas que sanem os grandes *déficits* de aprendizagens em meio a múltiplos fatores de dificuldades na disciplina, dar significado ao que aluno “vê” na escola é o grande desafio que docentes enfrentam em salas de aula.

Nesse sentido, considerando uma perspectiva como futuros professores, sabemos que o nosso intuito é formar cidadãos capazes de transpassar conceitos vistos em aulas para seu cotidiano, ou vice-versa, e não apenas uma matemática limitada, isolada para si mesma. Nesse viés temos, além da preocupação de como esses professores lidarão com essa situação na Educação Básica, uma mais pertinente que é saber: como está sendo a formação de professores de Matemática na perspectiva de um ensino com significado e como a Educação Matemática pode contribuir para/com essa problemática ainda no Ensino Superior?

Portanto, a justificativa deste trabalho fundamenta-se em diferentes víeis, pois, além de fazer parte da vida humana e estar inserida em diversas peculiaridades do mundo, a Matemática está presente diariamente na educação escolar do cidadão, em qualquer nível de ensino, tornando-se um componente curricular de extrema importância, não só de forma singular, mas, também, em um contexto multidisciplinar, conectando várias outras áreas do conhecimento, como instrumento de uso para dentro e fora da sala de aula.

Observa-se que no Ensino Superior a Matemática está envolvida em diversas áreas e cursos de formação. Especificamente, para quem deseja estudar a Matemática propriamente dita, são oferecidos dois cursos: o Bacharelado em Matemática e a Licenciatura em Matemática, cursos esses que se debruçam sobre os principais conceitos epistemológicos da Matemática ao longo da história, porém cada um com suas especificidades e objetivos. Enquanto o bacharel concentra-se em pesquisas e aplicações voltadas ao ramo profissional da área, a Licenciatura é indicada àqueles que se identificam com a arte de aprender e ensinar, ensinar e aprender, ou seja, um curso voltado para formar professores que lecionem a Matemática na Educação Básica.

Apesar dessas duas áreas científicas supracitadas serem relativamente distantes, elas podem possuir a mesma base, ou seja, em cursos de Licenciatura em Matemática, ambas se tornam imprescindíveis para o desenvolvimento profissional do futuro professor.

Neste sentido, o componente curricular de Equações Diferenciais, por exemplo, faz parte do currículo de cursos do Ensino Superior, como Matemática, Física e Engenharias, por ser uma extensão da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e, por isso, exige também o entendimento de conceitos bem estabelecidos que o envolva. Nas palavras de Oliveira e Igliori (2013):

> (...) nossa experiência no ensino de Cálculo em Cursos de Engenharia e pesquisas na área de Educação Matemática revelam dificuldades no processo de aprendizagem dos alunos no estudo de Equações Diferenciais, tanto no uso de técnicas para resolução dessas equações, quanto na produção de significados e compreensão de conceitos. Essas dificuldades se evidenciam principalmente no momento em que são estudadas as aplicações em problemas

> contextualizados, envolvendo a Física, a Química, a Engenharia etc. Em muitas situações, os alunos dominam as técnicas de resolução, porém têm dificuldade em identificar como aplicar as Equações Diferenciais na resolução de problemas (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013, p. 2).

Neste contexto, busca-se esclarecer a importância em assimilar conteúdos com rigor, na perspectiva de entender formas de como o aluno pode identificar melhor tais dificuldades nas aplicações e resoluções de problemas de modo a sanar e melhorar sua compreensão acerca do que está sendo ensinado.

O artigo de Oliveira e Igliori (2013) traz um levantamento bibliográfico de pesquisas relacionadas à dificuldade dos alunos na disciplina de Equações Diferenciais quando explica que:

> O próprio enfoque que vem sendo dado ao conteúdo não propicia a compreensão do mesmo, o que pode acarretar aos alunos dificuldade em conceber o que é uma Equação Diferencial e, por conseguinte, em sua aplicação em problemas contextualizados que exijam interpretação. Alguns trabalhos expressam a dificuldade que os estudantes têm para pensar simultaneamente de modo algébrico e gráfico (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013, p. 21).

Então, na busca de tentar minimizar o problema, as autoras afirmam que em muitos trabalhos foi sugerido um ensino contextualizado a partir de situações-problema, favorecendo uma abordagem analítica, gráfica e numérica a partir da Modelagem Matemática e da utilização de tecnologias digitais, ou seja, ampliando possibilidades em seu ensino.

Neste seguimento, assevera-se a importância de discutir princípios de uma Matemática voltada para o cotidiano e que contemple a contextualização e interdisciplinaridade com as ciências no Ensino Superior. Como nas palavras de Araújo e Borba (2004):

> Quando decidimos desenvolver uma pesquisa, partimos de uma inquietação inicial e, com algum planejamento, não muito rígido, desencadeamos um processo de busca. Devemos estar abertos para encontrar o inesperado; o plano deve ser frouxo o suficiente para não “sufocarmos” a realidade, e, em um processo gradativo e não organizado rigidamente, nossas inquietações vão se entrelaçando com a revisão da literatura e com as primeiras impressões da realidade que pesquisamos, para suavemente, delinearmos o foco e o design da pesquisa (ARAÚJO; BORBA, 2004, p. 40).

Com isso, toma-se como objeto de estudo as Equações Diferenciais (ED), ou ainda, estritamente, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), componente curricular obrigatório em Licenciaturas em Matemática, que propõe justamente colocar em prática a Matemática conceitual relacionada a fenômenos físicos e naturais do mundo e, assim, dar aplicabilidade e compreensão a aspectos teóricos vistos em outras disciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real.

Nas palavras de Miranda e Laudares (2007), quando se busca a ênfase nas estratégias de estudo, as quais se fazem com abordagens variadas, sejam elas descritivas explicativas e de análise, com diversidade de metodologias do tipo algébrica, numérica ou geométrica, o tratamento conceitual matemático atrelado às situações e à resolução de problemas das ciências e da realidade, fugindo da abstração restrita, contribui para uma compreensão significativa das proposições matemáticas, ou seja, uma das metas principais do ensino e aprendizagem de Matemática é a focalização na compreensão conceitual.

Neste contexto, concordando com as palavras de Miranda e Laudares (2007), espera-se com este trabalho, provocar nos professores e estudantes do Ensino Superior, principalmente nos alunos em formação inicial, o desejo e a reflexão sobre a atual ou futura prática como educador, bem como a importância da Educação Matemática e suas possibilidades no ensino-aprendizagem.

Sendo assim, a presente pesquisa insere-se no campo da Educação Matemática no Ensino Superior, tendo como contexto o processo de ensino-aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias na Licenciatura em Matemática e suas possibilidades na formação inicial docente ao provocar nos professores e estudantes, principalmente em alunos em formação inicial, a vontade de buscarem novas práticas educacionais.

O motivo pelo qual optamos pela escolha do conteúdo ser Equações Diferenciais Ordinárias é por compreendermos o quanto ela é ampla, por abranger diferentes áreas do saber e ainda apresentar uma vasta aplicabilidade em problemas da realidade que provocam uma conexão natural entre a matemática e a vida humana, à frente das suas necessidades de conhecimento matemático. Além disso, é um conteúdo que abrange saberes de dois níveis escolares, Educação Básica e Educação Superior, ou seja, uma interação entre a sala de aula e o professor em formação inicial.

Na literatura, autores como Almeida e Borssoi (2004), Habre (2003), Rasmussen (2001) e Stephan e Rasmussen (2002), destacam-se ao apresentar estudos sobre Equações Diferenciais, argumentando a importância de um ensino de qualidade, tendo foco no processo do conhecimento, não tornando uma simples transferência de saberes. Estes autores desenvolveram pesquisas sobre o ensino de Equações Diferenciais (ED), prioritariamente as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), sempre apresentando possibilidades para este ensino com uma abordagem diversificada, como, por exemplo, o campo de direções como um meio para resolver EDO de primeira ordem.

Há, ainda, outros estudos acerca da investigação sobre a aceitação dos estudantes em resolver ED geometricamente; outros, com reflexões sobre as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em abordar equilibradamente e simultaneamente métodos analíticos, gráficos e numéricos para a análise e exploração conceitual.

Outra abordagem alternativa de ensino para as EDO é fazendo-se uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), em que é possível realizar uma abordagem geométrica dos conceitos vistos tradicionalmente (lápis e papel), através da exploração e visualização por meio de um novo ambiente, proporcionado pelos recursos digitais disponíveis nos *softwares* algébricos e/ou geométricos, fato que há décadas não era possível.

Em contrapartida, Rasmussen (2001) ressalta que, mesmo com a ocorrência de novas direções no ensino de EDO, existe a necessidade maior do desenvolvimento de pesquisas sobre o entendimento e as dificuldades dos alunos na aprendizagem dessa disciplina, na perspectiva de uma abordagem qualitativa de estudo e ensino da resolução de problemas, onde até mesmo as tecnologias digitais, por exemplo, que oferecem múltiplas contribuições no que se refere à compreensão e interpretação de soluções e resultados, que até então eram apenas analíticos e feitos à mão, via técnicas prontas que não possibilitam uma exploração do que é estudado, podem agora apresentar limitações quando não há um objetivo conciso.

Por esses motivos, pretende-se dar novos voos nessa temática, pensando a Resolução de Problemas como possível metodologia de ensino que possa preencher tais lacunas. Desse modo, a presente pesquisa de dissertação objetiva apresentar discussões teóricas e metodológicas no campo da Educação Matemática no Ensino Superior, trazendo novos olhares sobre o ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias em um curso de Licenciatura em Matemática e seus reflexos na formação inicial docente.

Portanto, diante desses pressupostos, temos como ponto de partida as seguintes questões de pesquisa: *Como e de que forma o aprendizado em Matemática pode ocorrer através da Resolução de Problemas no Ensino Superior? Quais as possibilidades e limitações de dar significado aos alvos da pesquisa ao envolver o saber matemático em questão e sua realidade? Qual será a reação dos alunos da licenciatura em matemática ao lidar com tendências de ensino aplicadas, ainda, em sua formação inicial? E, qual é sua percepção sobre a disciplina de EDO após a intervenção?*

1.3 METODOLOGIA

Em busca de uma metodologia cientifica adequada foi necessário analisar o caráter da pesquisa e o que se esperava desenvolver a partir da pergunta norteadora. No Mestrado, através do curso de Metodologia da Pesquisa em Ensino de Ciências e Educação Matemática do PPGECEM/UEPB, foi possível constatar que a problemática que versa essa investigação classifica-a como uma pesquisa do tipo qualitativa.

Segundo Martins (2019), a pesquisa possui características bem específicas, que permitem melhor se adequar a determinadas pesquisas em Educação e em Educação Matemática, ao submeter um tratamento de dados com informações descritivas, adquiridas na relação direta do pesquisador com o objeto em estudo, dando maior ênfase ao processo do que ao resultado (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

> Os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Esses dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los (GOLDENBERG, 2004, p. 53).

Nesse sentido, para conduzir essa investigação, apoiamo-nos pelo uso do *Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic*, que orienta o pesquisador sobre todo trilhar de seu trabalho, através de onze atividades essenciais da arte que é pesquisar. Em primeiro momento, identificamos a gênese desse trabalho, o *fenômeno de interesse*: Equações Diferenciais Ordinárias através da Resolução de Problemas.

Em seguida, após a criação de um *modelo preliminar* que contém um esquema relacionando o fenômeno de interesses com suas variáveis-chave de pesquisa, destacamos aqui três campos teóricos que fundamentam esta pesquisa e constituem em si, capítulos que marcam um momento crucial desse caminhar: "o conversar com os outros". São os seguintes temas: Formação de Professores; EDO; e a Resolução de Problemas.

É depois desse aprofundamento teórico que podemos tomar uma melhor direção no caminho do trabalho de pesquisa, se inteirando mais sobre o que está sendo discutido: *Modelo Modificado*. E, reformulando a conjectura de pesquisa e traçando *Estratégias e* consequentemente *Procedimentos* para alcançar os objetivos propostos.

Toma-se a Resolução de Problemas como o cerne de nossa pesquisa, uma vez que ela pode ser vista nesse cenário como um possível caminho para o professor mediar os conhecimentos por parte de seus alunos de forma construtiva, autônoma e significativa. O uso dessa Metodologia, inserida no campo da Educação Matemática, é apontada por diversas pesquisas como ser eficiente no processo de ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática, relevantemente consolidada em nível Fundamental e Médio, e agora, nós, corroborando com as crescentes pesquisas que vêm surgindo, no Ensino Superior.

1.4 A ESTRUTURA DO TRABALHO DE PESQUISA

Este trabalho de qualificação está organizado em cinco capítulos, além das Referências.

Capítulo 1 - Introdução

No primeiro capítulo, onde se insere a presente seção, é discorrido um breve relato sobre a trajetória acadêmica e profissional percorrida pelo pesquisador até chegar nesta investigação. Um tecer reflexivo entre o pesquisador e as entrelinhas que findaram neste estudo.

Em seguida, em uma contextualização da pesquisa, referente a uma proposta no Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias na Licenciatura em Matemática utilizando-se da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, é explanado os objetivos deste estudo seguido da motivação, justificativa e da problemática, a fim de explicitar qual foi a inquietação inicial que levou a busca de respostas pelo pesquisador e qual é a possível relevância que essa investigação pode agregar na Educação Matemática como um campo de estudo e qual contribuição pode-se trazer na Formação Inicial de Professores.

Por fim, é apresentado, de forma geral, a organização dos capítulos deste trabalho de qualificação.

Capítulo 2 – Aspectos Metodológicos da Pesquisa

Neste capítulo apresenta-se os principais aspectos metodológicos que embasa esse trabalho, uma conversa sobre a metodologia de pesquisa e a excitante atividade de investigar na área da Educação, estendendo-se a Educação Matemática, apresentando-a como um campo de estudo, repleto de fenômenos, pessoas, eventos e problemas, que, em si, carregam uma variedade de perspectivas e procedimentos de investigação para todos os envolvidos nos processos de ensinar e aprender matemática na/além da sala de aula.

Nesse viés, assume-se uma metodologia de pesquisa para guiar todos os passos desse trabalho. Apresenta-se o Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg e o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, seguida da descrição de onze atividades essenciais para pesquisadores propostas pelos autores que sustentará nosso caminhar investigativo.

Dentro da estrutura proposta pelo modelo, relata-se como seu deu a identificação do fenômeno de interesse desta pesquisa e o processo de elaboração de um modelo preliminar que direcionasse a uma conjectura de investigação, ou seja, a pergunta norteadora. Sendo assim, após a descrição das atividades de pesquisa trilhadas acerca do objeto de estudo, o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, é definido as variáveis-chave de interesse para que assim possa-se dar continuidade aos próximos passos que é o processo de "relacionar com ideias dos outros", segundo o modelo de Romberg-Onuchic, ou seja, explicitar direcionamentos para um levantamento bibliográfico dos temas que o envolvem.

Capítulo 3 – Fundamentação Teórica

Este capítulo submete um estudo mais aprofundado em busca de uma fundamentação acerca dos temas que envolvem o fenômeno de interesse dessa pesquisa. Momento de se relacionar com ideias de outros (ROMBERG, 2007), isto é, se debruçar na literatura acadêmica e ouvir o que pesquisadores que já trabalharam com essas temáticas que se pretende estudar tem a dizer.

Desse modo, inicialmente, é apresentado algumas considerações históricas sobre o surgimento das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) como um tópico matemático nos estudos do Cálculo Diferencial e Integral em cursos do Ensino Superior. Em seguida, são discutidos aspectos conceituais e didáticos da disciplina de EDO que são previstos em Cursos de Ciências Exatas, Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Enquanto os aspectos conceituais se mostram importantes para a elaboração do projeto de ensino dessa pesquisa, os aspectos didáticos revelam direções que se pode tomar na prática investigativa acerca das concepções didático-metodológicas dessa disciplina no contexto da sala de aula, explicitando desafios, dificuldades e possibilidades para seu ensino e aprendizagem. Ainda nessa temática, em busca de situar o objeto de estudo dessa pesquisa e destacar sua relevância e contribuição para a comunidade acadêmica, é realizado um levantamento bibliográfico, do tipo estado da arte, de pesquisas desenvolvidas e finalizadas nos últimos vinte anos no Brasil.

O próximo tópico da discussão teórica se debruça no estudo da força propulsora da construção desse trabalho de pesquisa, a Resolução de Problemas. Preliminarmente, o foco está no contexto histórico de um amplo trabalho de pesquisa sobre a Resolução de Problemas como metodologia, dentro do contexto da Educação Matemática, a partir do século XIX. Explanando caminhos, avanços e perspectivas sobre o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas.

Seguindo, apresenta-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e suas relações com o contexto da pesquisa. Por fim, é realizado um levantamento de trabalhos já realizados que abordam a Resolução de Problemas no Ensino Superior.

Capítulo 4 – O Modelo Modificado e a Pergunta Norteadora

Neste capítulo, após o momento de se “relacionar com as ideias dos outros”, retoma-se o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, dissertando sobre as influências causadas na pesquisa, pois, decorrido do aprofundamento teórico descrito no capítulo citado anteriormente, novas variáveis surgiram e foi proposto uma nova estrutura de pesquisa, explicitando sua relevância para o seguimento da investigação. Apresenta-se assim, o Modelo Modificado e consequentemente a nova Pergunta Norteadora.

Capítulo 5 – Estratégias e Procedimentos – 2º Bloco de Romberg

Neste capítulo, damos início ao segundo bloco de atividades de pesquisa de um pesquisador, proposto por Romberg-Onuchic (2014). Agora, buscamos meios e caminhos para responder a nossa pergunta norteadora de pesquisa - Conjectura de Pesquisa. São apresentadas, a Estratégia Geral, advinda da pergunta “O que fazer? ”, e, um respectivo Procedimento Geral, advinda da pergunta “Como fazer? ”.

Em continuidade, são descritas as Estratégias Auxiliares e seus respectivos Procedimentos Auxiliares, um detalhamento dos passos que foram planejados e executados antes da aplicação do Projeto de Ensino no curso de extensão – a pesquisa de campo, denominado por Procedimentos Auxiliares em Ação.

Além disso, também apresentamos, em um tópico a parte, a descrição do Projeto de Ensino e dos Problemas Geradores que define e descreve, detalhadamente, todas as etapas para a coleta de evidências da investigação no ambiente da pesquisa (curso de extensão), etapas ainda dos Procedimentos Auxiliares em Ação.

Capítulo 6 – Coleta e Análise de Evidências – 3º Bloco de Romberg

Neste capítulo, ao chegar no terceiro bloco de atividades de pesquisa, proposto por Romberg-Onuchic, é o momento de relatar resultados. Resultados advindos da coleta e interpretação de evidências, ainda do terceiro bloco de atividades.

Apresentamos uma descrição, em um contexto geral, de todo o processo prático de investigação desta pesquisa. Uma descrição minuciosa sobre cada etapa do Projeto de Ensino posto em ação durante os encontros do curso de extensão.

Momento de relatar, detalhadamente, cada momento de encontro do curso com os sujeitos envolvidos. Abordando todo o contexto da sala de aula virtual, do professor-pesquisador, alunos-participantes, situações-problemas e tarefas, produção, relatos de feedback durante e após a implementação do Projeto de Ensino aplicado ao curso de extensão.

Com isso, apresentar uma análise geral, enquanto professor-pesquisador, acerca das possibilidades e limitações da proposta de ensino "Equações Diferenciais Ordinárias através da Resolução de Problemas".

Considerações Finais

Por fim, apresentamos os teceres finais deste trabalho, enfatizamos novas considerações do que foi discutido no capítulo seis. Uma última reflexão em busca de, finalmente, apresentar uma resposta à pergunta de pesquisa. Além disso, ressaltamos um compartilhar de ideias, com toda comunidade científica, dos frutos dessa investigação. Discorremos sobre as contribuições da presente dissertação na Educação Matemática como campo de estudo, aos professores, matemáticos, educadores matemáticos e, sobretudo, aos futuros professores.

Ainda, num teor reflexivo retomamo-nos nas limitações que foram identificadas ao concluir este estudo e assim abrimos portas para que novas buscas sejam realizadas a partir desse trabalho, o que Romberg-Onuchic trata como "Antecipar Ações dos Outros".

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

2.1. O MODELO METODOLÓGICO DE ROMBERG

A presente pesquisa tem como guia de investigação o modelo metodológico Roberg-Onuchic que, inicialmente, foi desenvolvida por Thomas A. Romberg , publicada previamente no ano de 1992, em um artigo intitulado “Perspectives on Scholarship and Research Methods”, que foi posteriormente traduzido por Onuchic e Boero (2007) e impresso na revista do Boletim de Educação Matemática (Bolema), sob responsabilidade do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP-Rio Claro/SP, com o título: “Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa”.

Segundo Romberg (2007) a pesquisa possui características de uma arte e não simplesmente de um processo técnica e infalível, sendo assim, fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada.

Nesse sentido, Thomas A. Romberg, com o objetivo de orientar o pesquisador ou futuro pesquisador, descreve em seu artigo Romberg (2007), um conjunto de atividades que pode auxiliá-lo durante sua investigação científica. Entretanto, são atividades que mudam de acordo com cada pesquisa e ao longo dela. Ou seja, o autor ainda salienta que esse modelo não é algo obrigatório a ser seguido, ele pode servir apenas como uma orientação e seus passos não necessariamente precisam ser seguidos na sequência apresentada.

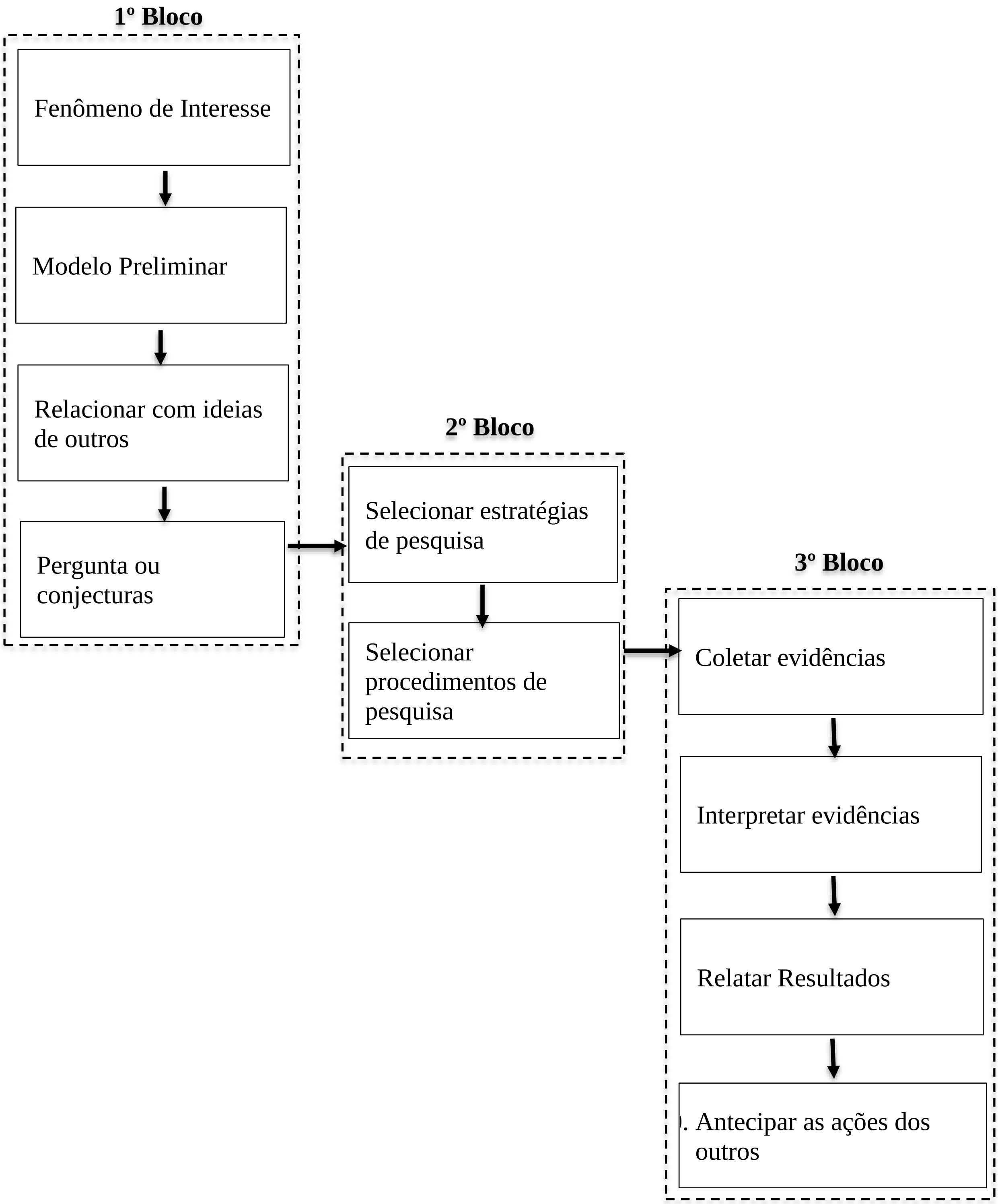
Para Romberg (2007), não há nada de exclusivo nesse conjunto de atividades, pois de fato quase todo texto de métodos de pesquisa resume uma reunião de atividades semelhantes. Ele ainda destaca que embora as atividades estejam em uma ordem sequencial, elas não precisam ser seguidas necessariamente nessa ordem, o que deixa o pesquisador livre para adequar a sua pesquisa ao modelo proposto e também alterá-lo se assim julgar necessário.

Corroborando com essa ideia, Noguti (2014) defende:

> Romberg não mostra apenas “um caminho para se chegar a um fim” – a pesquisa, mas sim, “o estudo dos caminhos a serem seguidos, dos instrumentos usados para se fazer ciência” – as atividades de pesquisa e todas as relações necessárias de análise e questionamentos em cada uma delas, sendo, portanto, não apenas um caminho a ser seguido, mas um caminho a ser pensado e, para tanto, uma Metodologia de Pesquisa (NOGUTI, 2014, p. 22).

Sendo assim, as dez atividades do pesquisador propostas por Thomas Romberg estão relacionadas no fluxograma a seguir:

Figura 1: Fluxograma do Modelo de Roberg (2007).



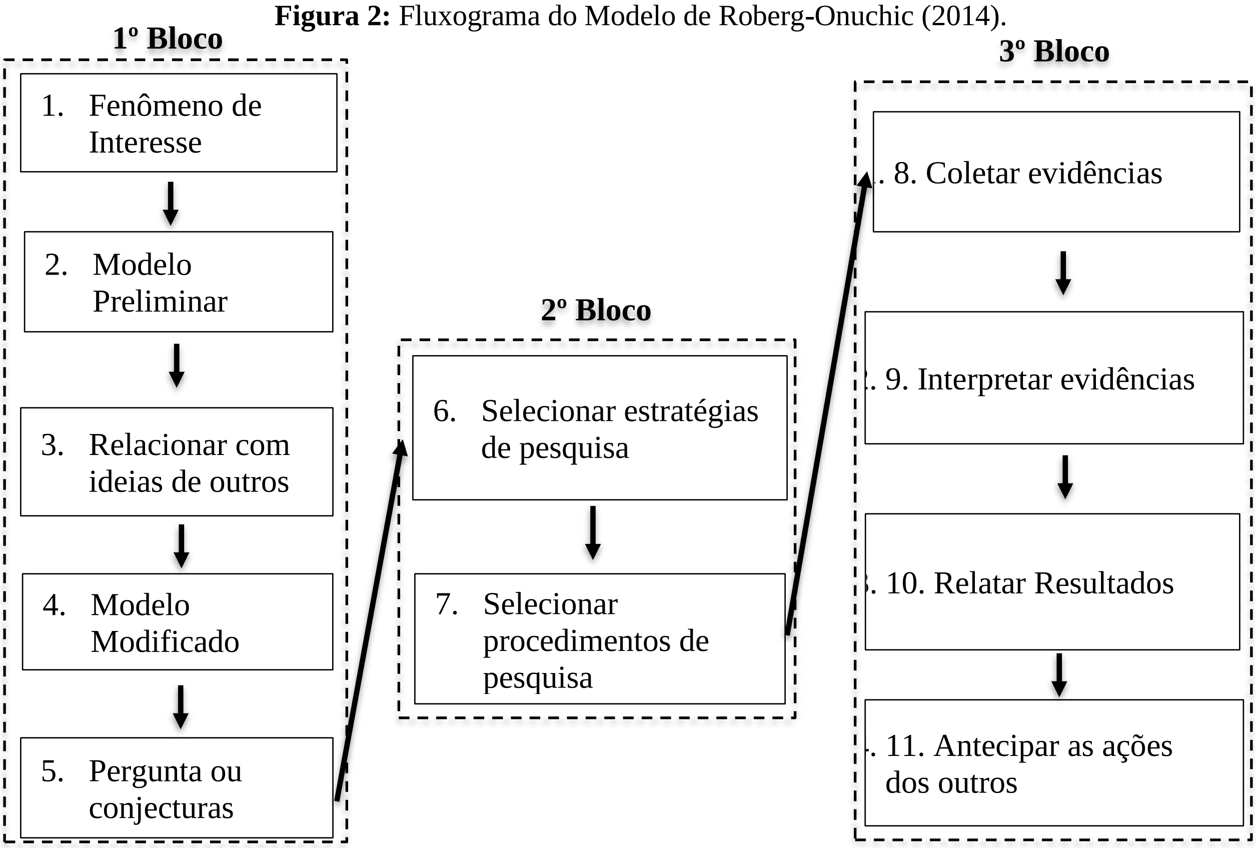
Fonte: (ROMBERG, 2007, p. 98).

Segundo Onuchic e Noguti (2014), esse modelo, há alguns anos, vem servindo de referência às pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. Com base em vários trabalhos de pesquisadores desse grupo, que adotaram o modelo de Romberg (2007) como metodologia científica para suas pesquisas, o grupo tem sugerido algumas alterações no modelo inicial proposto pelo autor e, ainda, acrescentou uma nova atividade a ser desenvolvida. O modelo, com as alterações sugeridas, denominado Modelo de Romberg-Onuchic, foi publicado, em 2014, no terceiro capítulo do livro: “Resolução de Problemas – Teoria e Prática”.

> Durante alguns anos de pesquisa, observação e uso do Modelo Metodológico de Romberg, os membros do GTERP, que utilizaram e utilizam esse modelo para compor as suas dissertações e teses, perceberam que alguns passos poderiam ser alterados a fim de estabelecer um modelo mais completo para a realidade e os objetivos do grupo (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 57).

As alterações propostas pelo grupo consistem em uma atividade a mais e de novas interpretações a respeito das atividades desenvolvidas ao longo do fluxograma proposto por Romberg (2007), assim como é ilustrado na figura a seguir:

Figura 2: Fluxograma do Modelo de Roberg-Onuchic (2014).



Fonte: (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

O Modelo de Romberg-Onuchic apresenta, como podemos ver na figura acima, uma nova atividade – Modelo Modificado. Segundo Onuchic e Noguti (2014), acredita-se que após "relacionar com ideias de outros" novos elementos podem surgir e, possivelmente, modificar a ideia inicial que o pesquisador tinha sobre a pesquisa. Além de acrescentar essa nova atividade ao modelo de Romberg, Onuchic e Boero (2007) fizeram algumas interpretações, não mencionada por Romberg em seu artigo.

Através dos trabalhos desenvolvidos pelo GTERP, percebeu que: antes de pôr em ação a terceira atividade, o pesquisador precisa evidenciar temas importantes que o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar trazem (variáveis-chave), para identificar quem são "os outros" para a pesquisa; a seleção de estratégias e procedimentos deve ser feita a partir uma Estratégia Geral e de seu respectivo Procedimento Geral, onde a Estratégia Geral demanda uma classe de estratégias auxiliares e, analogamente, o Procedimento Geral requer um conjunto de procedimento auxiliares; e para ser possível fazer a coleta de evidências é preciso colocar o Procedimento Geral em ação (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

A seguir, tem-se a descrição de cada uma das atividades do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, segundo é colocado por Onuchic e Noguti (2014).

1º Bloco de Atividades

Atividade 1 - Fenômeno de Interesse:

Segundo Onuchic e Noguti (2014), o primeiro passo de uma pesquisa é identificar esse objeto e nossas relações com ele que nos incomodam e que gostaríamos de observar, estudar, entender e, possivelmente, modificar. Em outras metodologias o fenômeno de interesse é conhecido como o "objeto da pesquisa". O fenômeno de interesse, em geral, nasce de uma curiosidade do pesquisador no contexto em que ele está inserido: na comunidade onde reside, no trabalho, ou em qualquer ambiente que ele frequenta.

Atividade 2 - Modelo Preliminar:

O Modelo Preliminar, segundo Romberg (2007), é uma ideia inicial que o pesquisador tem dos procedimentos que deverá seguir durante a pesquisa. Esses procedimentos são suposições feitas pelo pesquisador e o modelo é de extrema importância pois serve como um guia para suas ações. Mediante o Modelo Preliminar criado pelo pesquisador, poderá ser originada uma pergunta norteadora para pesquisa. Esse Modelo Preliminar também evidencia variáveis importantes sobre o fenômeno de interesse apontando temas que o pesquisador deverá estudar, analisar e fazer uso para fundamentar sua pesquisa. Em geral, esse modelo poderá sofrer modificações ocorrentes, dentre outros motivos, pela ampliação de seus conhecimentos sobre as variáveis constatadas.

Atividade 3 - Relacionar com ideias de outros:

Relacionar com ideias de outros significa, primeiramente, ouvir pessoas que já trilharam os mesmos caminhos que pretendemos trilhar, isto é, ouvir pesquisadores que já trabalharam sobre os mesmos temas que queremos investigar, ou sobre alguma das variáveis elencadas pelo modelo preliminar. De acordo com Romberg (2007), se alguém busca examinar a contribuição potencial das ideias de outros, deve relacionar aquelas ideias a uma particular visão de mundo. Nesta etapa, ouvir os outros não significa que tudo que ouvimos é relevante para o nosso trabalho, ou que devemos concordar e aceitar todas as ideias que esses "outros" defendem. Precisamos refletir, analisar e selecionar o que, de fato, vem ao encontro de nossas necessidades e que podem trazer contribuições ao nosso trabalho. Observamos que, mesmo as ideias com que não concordamos podem nos fazer refletir e ajudar a fortalecer nossa crença sobre o que defendemos ou, até mesmo, nos submeter a um estudo mais aprofundado em busca de uma fundamentação para nossas suposições.

Atividade 4 - Modelo Modificado:

O Modelo Modificado não aparece no fluxograma inicial proposto por Romberg. Ele é umas das contribuições, já mencionadas anteriormente, propostas pelo GTERP. A necessidade de um modelo modificado é justificada em Onuchic e Noguti (2014), pela defasagem do Modelo Preliminar após o pesquisador ter ouvido "outros", quando dizem que " após "ouvir os outros", o pesquisador percebe que seu Modelo Preliminar se encontra defasado ou possui poucas informações para ajudá-lo a formular uma Pergunta da Pesquisa (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 62).

Atividade 5 - Perguntas ou conjecturas:

Segundo Romberg (2007), um dos passos-chave no processo de pesquisa são as perguntas ou conjecturas levantadas porque, quando se examina um fenômeno particular, um determinado número de questões potenciais inevitavelmente surge, e decidir quais questões examinar não é fácil. Ele diz também que, mais do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores geralmente fazem uma ou mais conjecturas (suposições ou predições racionais) sobre o que seria necessário para responder as questões. As conjecturas baseiam-se na relação entre as variáveis que caracterizam o fenômeno de interesse e nas ideias sobre aquelas variáveis-chave e sua relação com o esboçado no Modelo Preliminar.

A partir da formulação das perguntas ou conjecturas, termina o primeiro bloco de Romberg-Onuchic. Os próximos itens (6 e 7) que serão descritos a seguir, apresentam as atividades do segundo bloco. Nesse bloco, faz-se um planejamento da pesquisa, isto é, uma seleção de estratégias e procedimentos correspondentes, em que, apoiados nas variáveis-chave evidenciadas no Modelo Preliminar, nos torne capazes de responder as perguntas da pesquisa ou verificar a veracidade das conjecturas.

2º Bloco de Atividades

Atividade 6 - Selecionar estratégias de pesquisa:

O segundo bloco de Romberg-Onuchic inicia-se logo após a elaboração da pergunta ou da conjectura da pesquisa. Neste ponto deve-se elaborar uma Estratégia Geral, que se constitui como um ponto de partida para o planejamento das ações necessárias para responder as questões evidenciadas pelo Modelo Modificado, relativas ao Fenômeno de Interesse. Esse planejamento é oriundo das reflexões sobre "o que devo fazer?", para responder as questões levantadas. Durante esse planejamento, são necessárias estratégias auxiliares que possibilitem atingir o objetivo proposto na Estratégia Geral.

Atividade 7 - Selecionar procedimentos específicos da pesquisa:

Após elaborar as estratégias, isto é, já sabermos o que devemos fazer para resolver o problema da pesquisa, surge uma outra pergunta: "como eu vou fazer isso?". Esta pergunta deve ser respondida com a elaboração de procedimentos adequados às estratégias levantadas. Assim, para a Estratégia Geral, corresponderá um Procedimento Geral e, cada Estratégia Auxiliar demanda um Procedimento Auxiliar.

Após configurado o Procedimento Geral, este deverá ser aplicado. Para a aplicação do Procedimento Geral é necessário que cada Procedimento Auxiliar seja aplicado antes.

3º Bloco de Atividades

Atividade 8 - Coletar evidências:

Nesse momento iniciamos o terceiro bloco de Romberg-Onuchic. É nesse bloco que tomamos as decisões sobre quais dados são relevantes para a pesquisa, fazemos a coleta desses dados e tiramos conclusões.

> Para responder as questões específicas que foram levantadas, evidências devem ser coletadas. É neste passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar a informação uma vez que ela tenha sido coletada, e assim por diante. Há um grande número de procedimentos específicos que se poderia seguir para diferentes tipos de questões. Deve-se tomar o cuidado em selecionar procedimentos que irão esclarecer as questões (ROMBERG, 2007, p. 102).

O primeiro passo, a coleta de evidências, deve ser bem cuidadoso, visto que, no momento em que colocamos os procedimentos em ação, muitas evidências poderão surgir, porém o pesquisador deve ter a habilidade em saber selecionar apenas aquelas que são relevantes para sua pesquisa.

Atividade 9 - Interpretar evidências:

Após coletar as evidências consideradas relevantes, é necessário que o pesquisador faça uma análise sobre os dados coletados. Nesse momento, deve entrar fortemente o posicionamento do pesquisador. Ele, embasado em uma fundamentação teórica, deve interpretar os dados a fim de tirar as conclusões necessárias para concluir a pesquisa, ou seja, responder as questões da pesquisa.

Segundo Romberg (2007), o pesquisador pode utilizar tanto métodos quantitativos no caso em que se atribui números às informações – quanto os métodos qualitativos – métodos de análise quando os números não forem necessariamente utilizados. Ele ainda diz que, dentre as informações coletadas, parte delas é relevante, parte é irrelevante e parte é não compreensível. É nesse momento que o pesquisador é mais exigido, cabe a ele selecionar as evidências realmente importantes para sua pesquisa.

Atividade 10 - Relatar resultados a outros:

Segundo Romberg (2007), após a interpretação das evidências é importante relatar, à comunidade de pesquisadores, os resultados encontrados, para que eles possam emitir suas opiniões e fazer críticas sobre o trabalho, o que seria uma espécie de julgamento, feito por outros especialistas, no campo em que a pesquisa foi desenvolvida. Essas opiniões são de suma importância para que o próprio pesquisador tome consciência do nível de qualidade de sua pesquisa.

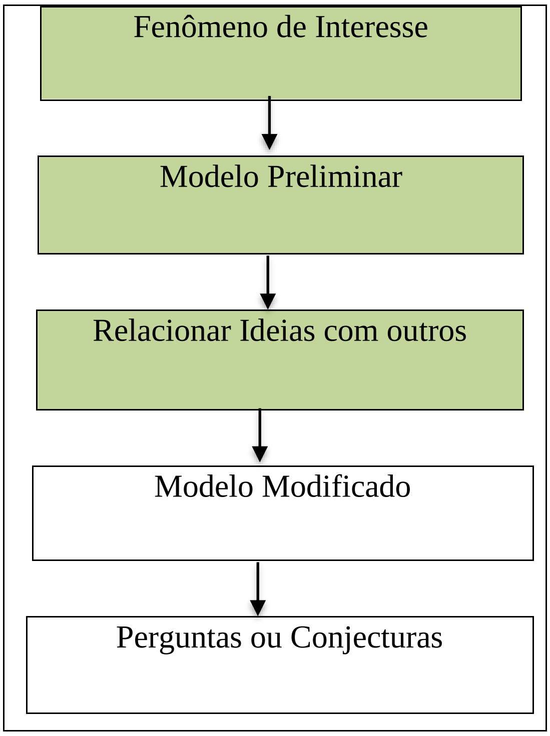
Atividade 11 - Antecipar as ações de outros:

Após concluir o que foi proposto pela pesquisa, os resultados devem ser divulgados para a sociedade, dando oportunidade à comunidade do campo trabalhado de avaliá-la, criticá-la e possivelmente sugerir modificações, ou fazer uso dos resultados produzidos por ela, para desenvolver novas pesquisas. Pensando dessa forma é que Romberg coloca a última atividade do seu Modelo Metodológico, a de “antecipar ações de outros”, pois os resultados que a pesquisa traz são algo novo que poderá servir de base para novos trabalhos.

2.2. A PESQUISA APOIADA NO MODELO METODOLÓGICO DE ROMBERG-ONUCHIC

Imerso no Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic o presente trabalho de dissertação, apresentamos neste capítulo os primeiros passos das nossas atividades de pesquisa. Iniciamos com o 1º Bloco, discorrendo aqui as duas primeiras atividades que é a identificação do *Fenômeno de Interesse* e a apresentação da construção do *Modelo Preliminar* que encaminhou a realização deste estudo e uma breve antecipação da terceira atividade que empreitará os próximos seguintes capítulos.

Figura 3:1º Bloco do Fluxograma de Romberg-Onuchic.



Fonte: (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

Antes de dar os primeiros passos no caminhar metodológico de uma pesquisa científica, é importante salientar que para que este trabalho surte alguma atribuição na construção de conhecimento de algum pesquisador em interesse, é necessário partir de uma concepção como a de Shulman (1998), quando trata a Educação como mais do que uma mera disciplina, mas sim um campo de estudo, ou seja, uma matéria-prima para constantes investigações, buscas, provas e refutações. Múltiplos fenômenos, eventos, problemas e processos que em si à tornam como um âmbito de inquietações, para qual for o sujeito inserido nela – a Educação.

Nessa perspectiva, estendendo a ideia, trazemos em nossa pesquisa a Educação Matemática como, também, um campo de estudo que aloca nosso interesse em desenvolver perspectivas que conduzam uma investigação no que cerne os variáveis processos envolvidos no ensino e na aprendizagem de Matemática na escola e nos demais níveis de ensino.

2.2.1. A Identificação Fenômeno de Interesse

O Fenômeno de Interesse dessa pesquisa tem raízes que refletem toda uma trajetória nossa como educadores matemáticos e pesquisadores, quando percebemos, através de pesquisas em consonância com a prática docente, o quanto ainda é fundamental provocar uma constante reflexão de transformação e reinvenção da sala de aula de Matemática nos dias atuais e, principalmente, que isso aconteça nos mais diferentes níveis de ensino, temos como foco neste trabalho a sala de aula que forma futuros professores, a Licenciatura em Matemática.

Segundo Onuchic e Noguti (2014), quando um estudioso decide realizar uma investigação em Educação Matemática, é porque nele nasce uma curiosidade ou inquietação sobre, geralmente, algo que tem a ver com sua formação ou implicações em sua prática profissional, que causam ali problemas dos quais você não consegue solucionar de imediato ou sozinho.

> [...] na Educação Matemática o Fenômeno de Interesse se manifesta, em geral, no envolvimento de professores; de alunos; de como se relacionam professores e alunos; de como os alunos se comportam nesse processo; de como os professores ensinam e como os alunos aprendem (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 59-60).

Nossa inquietação gera questionamentos do tipo: Como está a sala de aula de Matemática no Ensino Superior? Como os conceitos e conteúdos matemáticos são abordados nos diferentes cursos da área de exatas? E na Licenciatura em Matemática, como acontece? Existe alguma diferenciação no currículo ou na abordagem de ensino, por parte dos professores, entre um aluno da Engenharia e um da Licenciatura, por exemplo? Há a necessidade de alguma distinção, quais implicações? Quais são as principais dificuldades que alunos e professores enfrentam na sala de aula de Matemática na Licenciatura? De que forma estas dificuldades são combatidas? Aqui vemos, que mais do que nunca o termo "Educação Matemática" não pode ser mais desconhecido para muitos professores de Matemática do Brasil e que pesquisas nesse âmbito precisam convergir e se fazer realmente presente com/na sala de aula da Educação Básica e, em emergência, no Ensino Superior.

Sabemos que fazer pesquisa é uma ação constante, como um carrossel que nunca para de girar, o que pressupõe que devemos estar suscetíveis a mudanças e reformulações a cada volta. O caminhar metodológico é fluído e não trivial, não é mecânico como colocar em prática uma receita prescrita de uma torta de chocolate. Durante a caminhada podemos inverter os sentidos, prolongar percursos, inserir atalhos, errar o trajeto, mudar de rotas e até voltar ao ponto inicial, no entanto, quando estamos mesmo dispostos, sempre permanecemos no que motivou a ligar o GPS e partir, sim, o desejo de resposta, o desejo de mudança, o desejo do fazer.

Aqui não foi diferente. Ainda na graduação em Licenciatura em Matemática, fim do ano de 2018, realizava uma pesquisa para o trabalho de conclusão de curso, que em geral, pontuava todos os passos de um estudo teórico, se caracterizando como uma revisão da literatura. Apesar disso, o intuito em permear outras pesquisas desse campo de investigação e sintetiza-las era que a partir disso fosse possível identificar dificuldades e apresentar possibilidades de ensino para a aprendizagem de uma disciplina do próprio curso, nomeada como Equações Diferenciais Ordinárias.

A escolha de realizar uma investigação acerca dessa disciplina não se deu de uma forma aleatória, mas sim por um motivo próprio do pesquisador em buscar explicações, respostas e refutações para sua inquietação, que naquele momento era de entender o porquê de uma disciplina que traz tantos conceitos sólidos do Cálculo Diferencial e Integral de forma aplicável ao cotidiano causar tanta reprovação em uma turma, inclusive a sua quase própria reprovação, embora gostasse do que estava estudando e tivesse se esforçado o suficiente para realizar um boa avaliação.

Tratamos aqui de uma disciplina que por si só já apresenta inúmeras possibilidades de ir além do próprio conteúdo formal, uma disciplina que promove claramente uma conexão entre a Matemática e as outras vastas áreas do saber como Biologia, Química, Física, Economia, Computação, Medicina e Engenharias.

Uma disciplina que, em grande parte dos currículos em cursos superiores, inclusive na Licenciatura em Matemática, tem como foco a aprendizagem de técnicas e métodos para resoluções analíticas de equações. Equações essas que descrevem comportamentos físicos e sociais do mundo, entretanto, por mais simples que sejam as equações, quando são contextualizadas em um problema para ser interpretado e resolvido, percebemos que apenas os conceitos e métodos aprendidos não são suficientes para resolver, solucionar, verificar a solução e explorar o problema, relacionando-o com a situação envolvida.

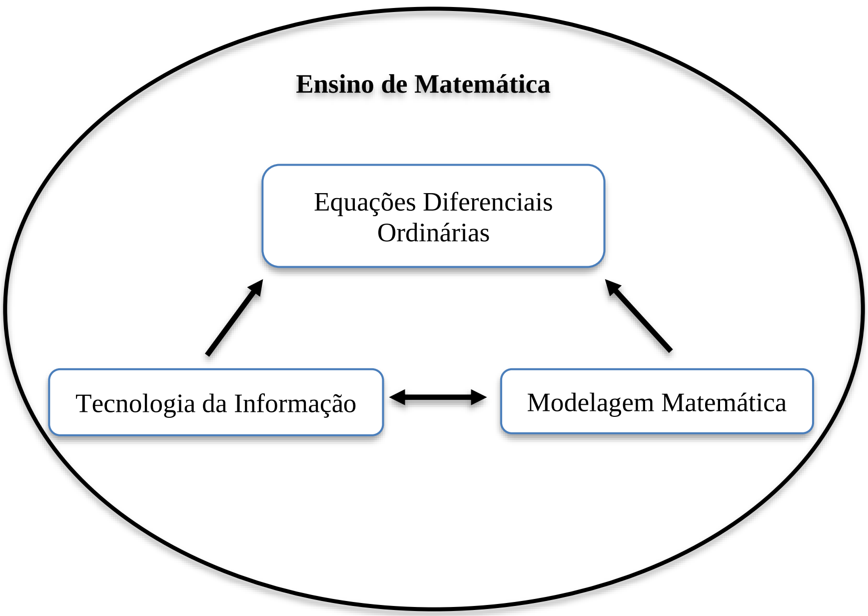
Sendo assim, como fruto dessas problemáticas adveio um trabalho que proporcionou uma melhor compreensão histórica das Equações Diferenciais tanto no contexto de seu estudo como no seu processo de ensino e aprendizagem. Foi evidenciado, através de um levantamento na literatura, que é possível promover numa perspectiva motivacional diferentes estratégias de ensino que facilitassem sua aprendizagem na sala de aula de Matemática, em cursos de nível superior.

Constatamos a existência de algumas pesquisas que já apresentam caminhos que possibilitam ir além dos métodos algébricos de resolução, propostas de ensino que visam diferentes abordagens na resolução de um problema envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias.

No que tange ao ensino de Matemática, percebemos uma forte tendência em trabalhos que concentram principalmente duas metodologias de ensino, a Tecnologia da Informação e a Modelagem Matemática. De fato, as pesquisas, em quase sua totalidade, envolvem modelos matemáticos e programas computacionais para atividades de modelagem e resoluções, além da algébrica, analítica e gráfica.

O diagrama abaixo apresenta a relação entre a forte tendência em pesquisas sobre o Ensino de Equações Diferencias convergirem para o uso da Tecnologia da Informação e Modelagem Matemática em cursos de nível superior como o Bacharelado em Matemática, Matemática Aplicada, Engenharias e, em minoria, a Licenciatura em Matemática.

Figura 4: Tendências metodológicas em pesquisas no Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse mesmo espaço de tempo, quando me candidatei e ingressei numa vaga para o Mestrado no curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB, estava bastante claro para mim que meu fenômeno de interesse seria o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias e aplicações, dando continuidade e aprofundamento sobre metodologias que versassem seu ensino. Desse modo, conforme a pesquisa vai se desenvolvendo nosso interesse sofre alterações, delimitações e mudança de foco.

Hoje, pensar no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, não me remete a apenas desenvolver uma pesquisa sobre dificuldades e possibilidades de aprendizagem numa disciplina. É bem mais profundo, implica em mim uma reflexão sobre que alunos queremos formar, ou ainda, sobre que professores queremos formar.

Esta pesquisa não parte da inquietação de um professor com longa experiência de trabalho no Ensino Superior, ou ainda, de um professor que já vivenciou anos de carreira ensinando Cálculo. Parte de um jovem professor que iniciou sua prática docente concomitantemente com sua formação inicial e cada vez mais percebe o quanto que os cursos de Licenciatura em Matemática precisam estar próximos da sala de aula da Educação Básica, o quanto é necessário formar bem os professores para atuarem no Ensino Fundamental e Médio, o quanto é urgente mudar a licenciatura e inserir a Educação Matemática nesse processo formativo, explicitando seu sentido, seu papel, domínios e especificidades.

Parece ser unânime, para professores, alunos e pesquisadores, que no curso de Licenciatura em Matemática há uma certa heterogeneidade entre as subáreas da Matemática, em caráter formativo, que acaba refletindo na qualidade do profissional que necessita de conhecimentos matemáticos para sua formação e, consequentemente, para sua prática no mercado de trabalho como professor, o que acarreta a necessidade também de conhecimentos pedagógicos do ensino de matemática.

A grande questão que corrobora com essa discussão, elencada por Ferreira (2017), seria: uma disciplina de matemática ministrada nos cursos de Licenciatura deveria ser ministrada de uma forma diferente da dos outros cursos, como, por exemplo, Engenharia, Computação, etc.?

O autor defende:

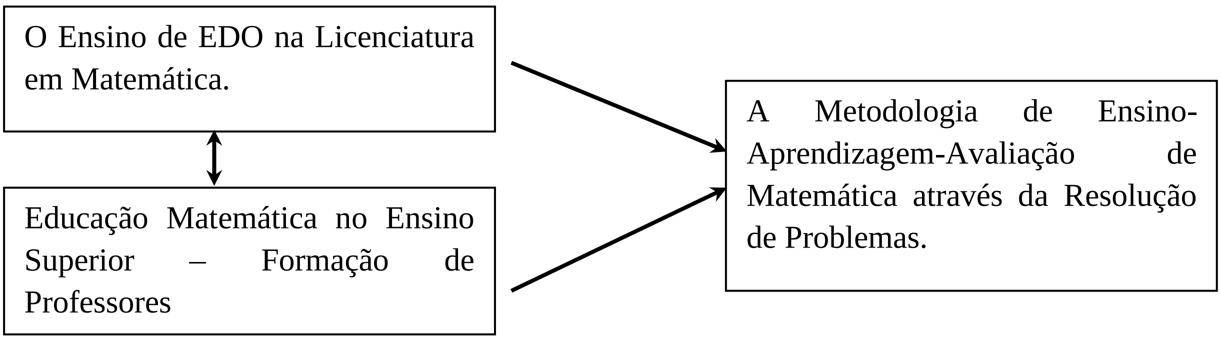
> O conteúdo ministrado não necessariamente precisaria ser diferente, mas, sim, a metodologia. Entretanto, a metodologia não deveria apenas produzir um método capaz de resolver problemas através de uma sequência de passos bem definidos. Ela deveria levar em consideração a produção de conhecimento, formando um ser pensante, crítico, produtivo e, principalmente, criativo. Essa metodologia deveria também ser capaz de dar, ao recém-formado, uma formação matemática bem fundamentada, capaz de ser aplicada à sua prática profissional, bem como lhe dar condições de ingressar em cursos de Pós-Graduação (FERREIRA, 2017, p. 30).

Nessa perspectiva, enfatizando aqui, a importância do elo entre o "saber" e "saber ensinar" para um licenciando em Matemática. O professor precisa saber muito bem o que ele vai ensinar e justificar o porquê ele faz "aquilo".

Não significa que devemos não dar tanta importância à assimilação de conteúdos com tanto rigor que a Matemática cobra, mas sim em ir além. Conectar ambos saberes, para entender, ressignificar e dar sentido ao que está sendo ensinado e assim não nos tornarmos meros receptores e transmissores de conceitos, definições, teoremas e exemplos estruturais, sem qualquer ligação com a prática utilitária.

Como base nessa discussão, definimos nosso interesse de pesquisa formulados nessas três variáveis de interesse:

Figura 5:Variáveis de Interesse.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tais variáveis de interesse refletem as preocupações diante desses fatores que buscam uma melhoria da formação de professores da Educação Básica, começando de sua própria formação inicial, o elo entre os conhecimentos matemáticos e pedagógicos que forma um educador matemático. Estabelecendo assim nosso fenômeno de interesse:

"As Equações Diferenciais Ordinárias através da Resolução de Problemas".

2.2.2. A Construção do Modelo Preliminar

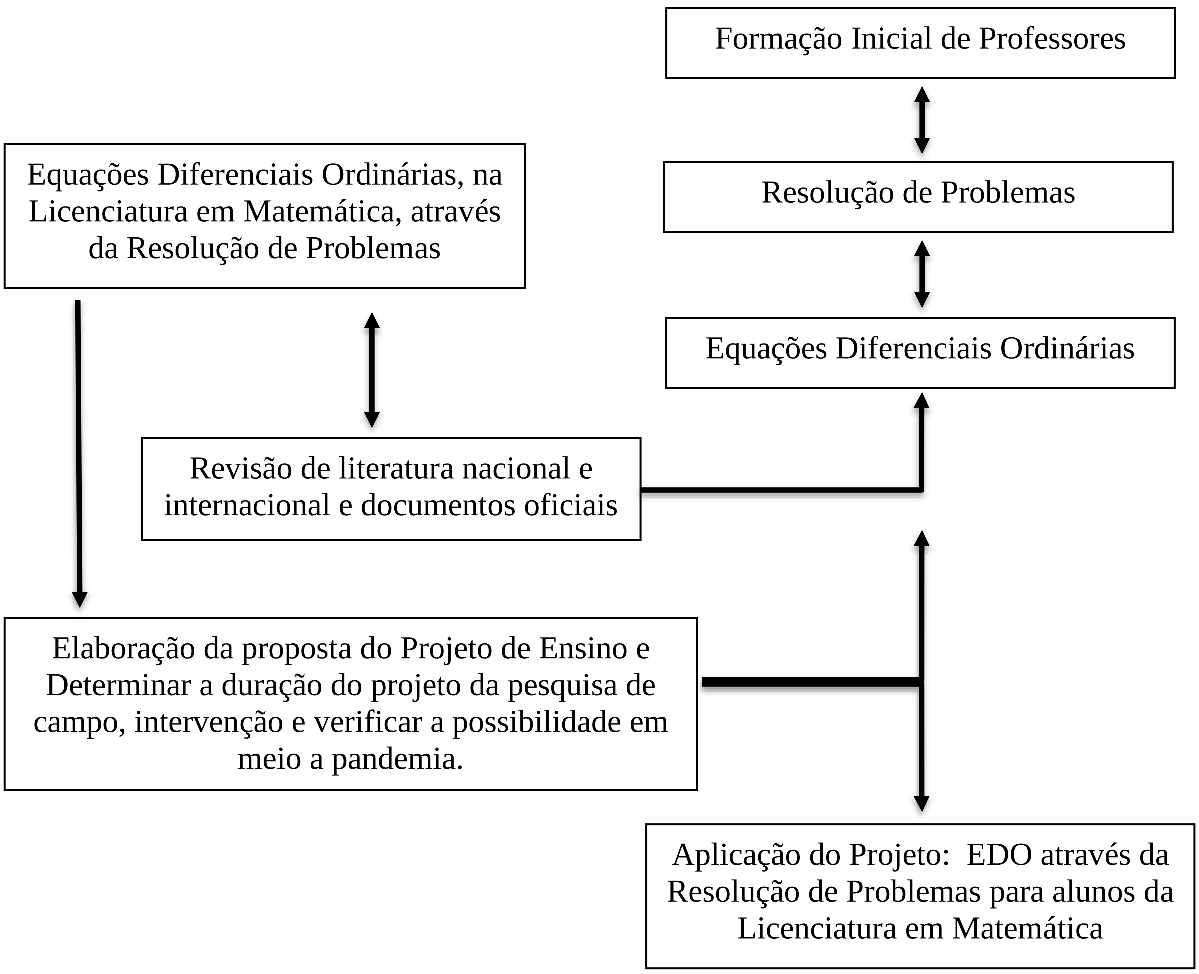
Com a definição do Fenômeno de Interesse, passamos a imaginar como poderia ser conduzida a nossa pesquisa.

> A partir do Modelo Preliminar, o pesquisador obtém variáveis-chave que irão auxiliá-lo a identificar e a relacionar o fenômeno e o modelo às ideias de outros – ou seja, pesquisar é "ouvir" o que outros (comunidade, pesquisadores,

> teóricos, os que fazem aplicação, ...) podem contribuir com sua pesquisa – trata-se de uma revisão teórica e de outros trabalhos já realizados que irão auxiliar o pesquisador, fundamentando sua pesquisa (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 61).

Romberg (2007), em seu artigo já citado, diz que esse modelo deve expressar a forma como se imagina, no início, o desenrolar da pesquisa. Para nós, o que tínhamos em mente, naquele momento, era o seguinte diagrama:

Figura 6: Nosso Modelo Preliminar.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse “Modelo preliminar” foi desenvolvido tendo como base nosso Fenômeno de Interesse – “As Equações Diferenciais Ordinárias através da Resolução de Problemas” e, como contexto da pesquisa, o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Essa pesquisa se concretiza como uma pesquisa de campo de abordagem qualitativa, havendo assim a necessidade de conhecer o perfil de cada personagem desse contexto.

Diante disso, originou-se uma possível pergunta inicial de pesquisa que busca guiar essa pesquisa a passos desse modelo preliminar, que é: Como futuros professores de Matemática, em formação inicial, exploram o conceito das Equações Diferenciais Ordinárias com a utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino?

2.2.3 Relacionando com Ideias dos Outros

Dando continuidade ao modelo metodológico proposto por Romberg-Onuchic, temos que:

> Uma atividade importante é examinar o que outras pessoas pensam sobre o fenômeno e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto. (...) Para fazer isso, o pesquisador deve reconhecer que cada investigador é um membro de um particular grupo de pesquisa que tem defendido uma determinada "visão de mundo". Se alguém busca examinar a contribuição potencial das ideias de outros, deve relacionar aquelas ideias a uma particular visão de mundo (ROMBERG, 2007, p. 100)

Nesse sentido, sabendo que a questão inicial que pretendesse responder é: Como futuros professores de Matemática, em formação inicial, exploram o conceito das Equações Diferenciais Ordinárias com a utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino?; e que o Modelo Preliminar supracitado aponta variáveis de interesse que o pesquisador precisará levar em consideração para obter êxito na pesquisa no que diz respeito ao aprofundamento teórico, toma-se como variáveis consideradas relevantes, denominadas variáveis-chave: A Formação Inicial de Professores de Matemática; Equações Diferenciais Ordinárias; e a Resolução de Problemas.

Para cada uma das variáveis-chave é realizado um estudo bibliográfico para relatar o que "os outros" disseram a esse respeito e, consequentemente, como contribuíram ou influenciaram de alguma forma nessa pesquisa.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A presente seção, incialmente, se preocupa em trazer algumas considerações históricas a respeito do surgimento das Equações Diferenciais (ED) como um tópico matemático nos estudos do Cálculo Diferencial e Integral e da Matemática Aplicada em cursos do Ensino Superior.

Para isso, baseando-se nos livros-texto Bassanezi (2002), Bassanezi e Ferreira (1988), Batschelet (1978), Boyce e DiPrima (2002) e Zill e Cullen (2001), é discorrido, brevemente, uma linha cronológica que a disciplina passou até chegar aos dias atuais em seu cenário no mundo acadêmico, enfatizando-se na presente pesquisa o curso de formação inicial de professores de Matemática – a Licenciatura em Matemática.

Em sequência, são apresentados alguns aspectos conceituais acerca dos estudos das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), que serão relevantes para o desenvolvimento prático deste trabalho de pesquisa, como os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, Taxa de Variação, Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias, Modelos e Aplicações, Principais Métodos de Resolução e alguns Tipos de Solução de uma EDO.

Em continuidade, aborda-se também aspectos didáticos acerca do ensino e aprendizagem de EDO no Ensino Superior presentes na literatura. Discute-se a forma de estudo dessa disciplina em cursos de Licenciatura e livros-texto, considerando aspectos metodológicos relevantes e como tais diferentes abordagens refletem na vida acadêmica/profissional do futuro professor de Matemática.

Este estudo evidencia a importância do ensino de EDO na área de Ciências Exatas e, em particular, no curso de Licenciatura em Matemática. Apresentando-a como uma disciplina inerente da continuidade e especificidade dos estudos de Cálculo, capaz de conectar uma matemática até então, puramente algébrica com o mundo real, despertando assim o interesse de promover novas alternativas metodológicas que atenda a necessidade de estudantes matemáticos e não matemáticos frente as dificuldades encontradas na academia.

3.1.1. Elementos Históricos do Cálculo Diferencial e Integral

A história sempre será uma imprescindível forma de registrar como o homem no passado reagiu em seu tempo a certas situações e problemas, ou seja, busca-se através da história da matemática entender como outras mentes e cabeças resolveram problemas clássicos e com que métodos e estratégias chegaram a soluções inovadoras que utilizamos até os dias atuais, pois como afirmam D'Ambrósio e Valente (2011), "a contribuição histórica da matemática pelos seus vários caminhos tortuosos, por várias culturas e civilizações apresenta na sua essência a solução dos problemas humanos no futuro, ou mesmo uma mudança na forma do pensar matemático" (D'AMBRÓSIO; VALENTE, 2016, p. 23).

Sendo assim, temos que o estudo do Cálculo Diferencial está fundamentado aos conceitos de Taxa de Variação, cuja origem é datada desde a idade antiga pelos gregos, porém só foi realmente formalizada e explorada pelos cientistas da Idade Média como René Descartes (1596 – 1650), Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), através da convergência das Ciências Matemáticas e Físicas, no estudo, especificamente, do cálculo infinitesimal, segundo o matemático e filósofo Marquês de Condorcet (1743-1794).

De acordo com Rezende (2003), foi em meados do século XVII o grande marco para o surgimento do Cálculo como um domínio próprio do conhecimento matemático, tendo em vista que, antes desse século o Cálculo foi Geometria, Aritmética, Filosofia, só não ainda era considerado propriamente como Cálculo.

Isso se deu, pois, apesar de terem sido os gregos os responsáveis pelo desenvolvimento do método de exaustão para os estudos do cálculo infinitesimal, foram os filósofos escolásticos, inseridos em outra realidade histórica e científica, que assumiram, primeiramente, o conceito de infinito através de um estudo particular sobre o cálculo de área de um círculo, pois para eles o círculo é um polígono de infinitos lados

Vê-se que o cálculo, ao decorrer da sua história, sofreu diversas modificações e aprimoramentos, na tentativa de cada vez mais oferecer uma abordagem mais rigorosa. Foi nesse momento que o cálculo se difundiu como "um ramo mais geral da matemática que a partir daí é chamado "Análise" - o estudo de processos infinitos" (BOYER, 1994).

A Análise ocupou, então, mais um ramo da Matemática, mesmo que seus conteúdos fossem basicamente os mesmos dos do Cálculo, seu foco era o rigor em suas demonstrações, ou seja, mais relacionada à álgebra, diferentemente do Cálculo que tem uma visão mais geométrica associada ao utilitário, ao prático.

> Esse campo se estabeleceu a partir da necessidade de prover formulações rigorosas as ideias intuitivas iniciadas pelo Cálculo Diferencial e Integral, como estudo dos números e das funções reais (de uma ou várias variáveis reais). Com a extensão desses conceitos a espaços abstratos, ampliou-se o campo de interesses da Análise e, desse modo, as abordagens dos tópicos do Cálculo passaram a ser tratadas, respectivamente, em duas áreas da assim

> chamada Análise Clássica, isto é, Análise Real (Análise na Reta) e a Análise no R^n (TOLEDO, 2008, p. 79).

O nome Cálculo Diferencial e Integral vem dos estudos desenvolvidos devido às necessidades dos cientistas do século XVII e XVIII associados à mecânica. Segundo Howard Eves (2004, p. 417) "primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o diferencial".

A integração se originou nas técnicas do cálculo de somatórios de áreas e volumes. A diferenciação partiu dos resultados de “problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos de funções”. (ELVES, 2004, p. 417).

Em outras palavras destaca-se aqui uma definição de Finney (2002), pois para ele o Cálculo é a matemática dos movimentos e das variações.

> O cálculo diferencial lidou com um problema de calcular taxa de variação. Ele permitiu definir os coeficientes angulares de curvas, calcular a velocidade e a aceleração de corpos em movimento [...] O Cálculo Integral lidou com o problema de determinar uma função a partir de informações a respeito de sua taxa de variação (FINNEY, 2002, p. 15).

Contudo, o que se pode perceber atualmente, é que o Cálculo, a Análise e suas demais aplicações atingem e extrapolam os limites da Matemática e das “Exatas”, tornando-se, então, disciplinas fundamentais no currículo acadêmico de cursos de Graduação e Pós-Graduação, até mesmo de áreas afins, como Biologia, Medicina, Economia, dentre outras.

Ao tratar de “disciplina”, retoma-se a uma variedade de elementos que a cercam. Embora que não seja foco dessa pesquisa, a discussão sobre currículo torna-se fundamental quando se aborda o ensino, já que se trata sobre a história de uma disciplina inserida, também, em cursos de formação de professores.

Nesse sentido, aprofundando essas ideias, pode-se encontrar na literatura diversas conceituações para definir o que é disciplina. Para Goodson (1998), a disciplina se refere ao modo de se entender e estudar as práticas educativas, que são desenvolvidas por meio: do estudo dos conteúdos programáticos, da metodologia utilizada, do professor mediador, do material didático utilizado, dos alunos, da legislação em vigor, e da avaliação realizada.

Figura 7: Esquema das constituintes de uma disciplina.

Fonte: Adaptado de Goodson (1998).

Já na obra "História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa", publicada em 1990, pelo autor André Chervel, ver-se algumas concepções históricas sobre a disciplina, sendo agora, retratado como uma matéria de ensino com tendência de servir como exercício intelectual, capaz de realmente "formar", e não ser apenas uma disciplina no sentido da palavra, intitulada humanidades clássicas.

> Com o desenvolvimento da industrialização, intensificada na segunda metade do século XIX, os conhecimentos das áreas denominadas de "exatas" como Biologia, Química, Botânica e Física, além da Matemática, passaram a ser considerados importantes e disputavam o espaço com as áreas de "humanidades clássicas" na formação escolar. Essa disputa sobre o papel formativo das "disciplinas humanísticas" ou das "disciplinas científicas" possibilitou a organização mais sistemática dos conhecimentos já tradicionalmente pertencentes ao currículo antigo e dos novos que estavam sendo introduzidos nas escolas (BITTENCOURT, 2004, p. 41).

Ou seja, se uma educação é fundamentalmente matemática ou cientifica, então, essa deve ser reconhecida como verdadeira formação dos espíritos. Formar ou "[...] disciplinar o espírito quer dizer, de lhe dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios do pensamento, do conhecimento e da arte" (CHERVEL, 1990, p. 180).

> Foi importante, então, nesse momento estabelecer as finalidades de cada uma das disciplinas, explicitar os conteúdos selecionados para serem "ensináveis" e definir métodos que garantissem tanto apreensão de tais conteúdos como a avaliação da aprendizagem (BITTENCOURT, 2004, p. 41).

Historicamente, nota-se que por mais que a disciplina Cálculo seja reconhecida pelos próprios discentes pela sua relevância, o alto índice de reprovações e dificuldades ao decorrer desse curso em diversas instituições. O que desencadeia múltiplos questionamentos sobre currículo, professor-didática, métodos e avaliação no ensino dessa disciplina.

Segundo Oliveira e Raad (2012), a cultura de ensino do cálculo é linear, isso quer dizer que um conhecimento só é realmente apreendido se o conteúdo que o antecede também foi assimilado corretamente, de modo que, caso haja alguma falha nesta sequência a reprovação é uma consequência natural. Ressaltam ainda que a solução mais adequada para essa problemática seria a implantação de disciplinas preparatórias, que possibilitassem aos alunos revisões de conteúdos de matemática básica, bem como, a introdução de noções básicas acerca do Cálculo Diferencial e Integral. Ação essa, que para eles não há eficácia, visto que essa iniciativa não resultou como esperado, o que causa um grande temor nos estudantes de exatas em plena entrada na graduação, até os dias atuais.

Já para Santos e Matos (2012), a interpretação da cultura do ensino de cálculo é subjetiva, mas a respeito do fracasso dos alunos na disciplina de Cálculo elas ressaltam principalmente o “jogo de responsabilidades”, pois, por um lado temos os estudantes e suas famosas falas, dentre elas: "o problema está nos professores” (seus procedimentos metodológicos).

Existe um determinado consenso acadêmico sobre uma queixa bastante ouvida por parte dos alunos de que muitos de seus professores são especialistas e dominam o conteúdo de ensino, entretanto, deixam de utilizar técnicas didáticas que ajudem numa melhor compreensão.

Sobre essa afirmação, Gil (2008) destaca que a didática passou a receber novos aportes ao decorrer da história, o que impulsionou muitos movimentos de reforma escolar que contestavam a didática do modelo tradicional como um método não suficiente para uma educação que considerasse os aspectos cognitivos relacionados com a realidade e o processo do ensino e da aprendizagem dos sujeitos envolvidos.

Portanto, mostra-se como um fator importante pensar propostas didáticas que forneçam instrumentos para que o educando atue como cidadão agente de sua própria aprendizagem. Para a realização de tais abordagens se torna imprescindível à colocação do autor a seguir, afirmando que:

> [...] não existe o aluno em geral, mas o aluno vivendo numa sociedade determinada, que faz parte de um grupo social e cultura determinado, sendo que estas circunstâncias interferem na sua capacidade de aprender [...] Um bom professor que aspira ter uma boa didática necessita aprender a cada dia como lidar com a subjetividade dos alunos, sua linguagem, sua percepções, sua prática de vida. Sem esta disposição, será incapaz de colocar problemas, desafios, perguntas relacionadas com o conteúdo, condição para se conseguir uma aprendizagem significativa (LIBÂNEO, 2001, p. 3).

Por outro lado, tem-se que os professores que atribuem o baixo rendimento à falta de motivação, à falta de raciocínio e interesse na disciplina, à falta de uma postura ativa dos estudantes frente ao novo conhecimento, onde não se desacomodam para conhecer outra aprendizagem que não seja a automática, a mecânica, como já vinda de uma educação precária. Isso se deve, principalmente, a circunstância de que o ensino da educação superior exige do aluno maior empenho e que ele próprio desenvolva habilidades que o auxiliem a construir a sua própria formação. Corroborando com essa afirmação, tem-se que:

> O que caracteriza o ensino de nível superior e que ele transmite diretamente o saber. Suas práticas coincidem amplamente com suas finalidades. Nenhum hiato existe entre os objetivos distantes e os conteúdos do ensino. O mestre ignora a necessidade de adaptar a seu público os conteúdos de acesso difícil e de modificar esses conteúdos em função das variações de seu público (CHERVEL, 1990, p. 185).

O aluno, inserido na Educação Superior, num curso que tenha a disciplina de Cálculo com componente curricular obrigatório, se depara com diferentes cursos que visam conduzir os alunos a estudarem funções a partir das análises de gráficos as quais têm uma ou mais variáveis reais.

O curso de Cálculo destaca o estudo de funções, limites de funções com variáveis reais, visando ainda, o estudo de taxa de variação de funções com definições de derivações, diferenciais e integrações, inserindo também o estudo das relações entre funções e sequências.

No âmbito da Educação Matemática, o curso de Cálculo Diferencial e Integral é analisado e discutido em diversas pesquisas sobre didática do Cálculo e formação de professores de Matemática, enaltecendo sua importância em cursos de graduação e pós-graduação, como também as dificuldades de aprendizagem que essa disciplina vem acarretando nos alunos, e ainda, como a forma do curso a ser trabalhada influenciam na formação didática docente do aluno (futuro professor).

A dualidade entre o rigor e formalismo matemático com os aspectos intuitivos no processo de ensino- aprendizagem, principalmente, de Cálculo e Análise, em cursos de graduação, nos faz perceber uma dicotomia entre um curso formal e um curso direcionado as noções intuitivas e dedutivas a partir de aplicações, que podem ser optadas ou não por professores nesse âmbito de ensino, segundo Reis (2011).

> Vale lembrar que, na prática da sala de aula do Cálculo, tanto o procedimental como o conceptual vêm carregados de aspectos intuitivos que devem ser explorados pelos professores e alunos que constroem estes conhecimentos. Cabe aos professores, então, refletir sobre uma melhor utilização, como

> referência para suas disciplinas, de livros que claramente apresentam uma abordagem rigorosa dos conteúdos e raramente exploram situações-problema, exemplos, contra-exemplos e ilustrações que poderiam produzir significados e melhor compreensão dos conceitos (REIS, 2011, p.196).

A Matemática, desde a Educação Básico é tratada como uma disciplina com grandes deficiências na aprendizagem escolar, isso devido, dentre vários outros fatores, ao seu rigor conceitual, que por diversas vezes é trabalhada em sala de aula seguindo manuais didáticos que contemplem um currículo norteador. Um currículo que pode, ou não, estar adequado à realidade do alunado envolvido.

Nesse sentido, Reis (2011), exclama essa problemática para o Ensino Superior, apontando uma variedade de possibilidades de abordar um curso de Cálculo, cabendo ao professor atingir ou não um determinado nível de rigor que a disciplina cobrará, dependendo, claro, de sua finalidade.

Um possível exemplo dessa problemática é a linguagem utilizada para cursos voltados a Engenharia e Física que foge totalmente de um teor formal, trabalhado em cursos de Bacharelado em Matemática, ou ainda, em Licenciaturas: a distinção do rigor ao provar ou justificar uma afirmação matemática deve variar para cada objetivo de ensino, respeitando os conhecimentos prévios dos alunos e considerando a que público o curso será destinado.

Nessa perspectiva, percebe-se que para alcançar os objetivos da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, na perspectiva discutida, o professor se torna o elemento principal nesse processo, visto que, é através de uma boa proposta metodológica que podemos despertar no aluno a curiosidade e a motivação para que este reconheça a importância dos conhecimentos dessa disciplina em sua formação universitária.

Santos e Matos (2012), ainda ressaltam que o professor deve mostrar ao aluno a importância e aplicabilidade do conteúdo na sua área de atuação, não se detendo tanto ao rigor formal dos teoremas, proposições e corolários, mas sim, na realidade que ele está vivenciando.

Sendo assim, enfatiza-se que ao decorrer desse estudo algumas colocações de Giraldo (2004), autor atuante na pesquisa na área de Educação Matemática, especificamente, relativos aos conteúdos de Cálculo, apoiando-se nas ideias de David Tall e Schlomo Vinner, que discutem a integração de recursos computacionais a prática docente e as possibilidades de conexões entre conteúdos, e assim criando novas formas de explorar e aprender.

O ensino de Cálculo e as tecnologias, segundo Reis (2010), têm por objetivo não somente promover a construção do conhecimento pelos alunos, mas também desenvolver novos ambientes (softwares e aplicativos) para serem utilizados, destacando que esse processo de visualização gráfica no entendimento de conceito de Cálculo Diferencial e Integral e áreas afins, enriquece as representações numéricas e algébricas, abrindo portas para novas aprendizagens, talvez até mais significativas.

Baseado no exposto e a partir de um levantamento teórico, em livros e textos teóricos-metodológicos, publicados recentemente, nota-se relevantes utilizações de recursos tecnológicos que aprimoram, reformulam e renovam esse ensino tão discutido em âmbito educacional, como será abordado ao longo da pesquisa.

3.1.2. Equações Diferenciais Ordinárias: Aspectos Conceituais

Neste tópico, é feita uma familiarização com alguns conceitos e métodos fundamentais das Equações Diferenciais trabalhados em qualquer curso de graduação, que contenha essa disciplina.

Mas, afinal, o que são Equações Diferenciais? Quais e que tipos de fenômenos, mais básicas, podemos expressar através de um modelo matemático?

Para isso, apresentamos a seguir algumas definições embasadas e mescladas de grandes autores que tratam sobre deste estudo e que é bastante usado como livros-texto em cursos de graduação, como Boyce e DiPrima (2002) e Zill e Cullen (2001).

Falar em equação e em diferencial nos remete a conceitos pertinentes a cursos de Cálculo e Álgebra. Onde, intuitivamente, nos levam a pensar em equações que certamente envolvem derivadas (diferencial).

De fato, num curso de Álgebra, por exemplo, são dadas equações como $x^2 + 3x + 5 = 0$ para resolução, tendo x como uma incógnita. Já em cursos de Equações Diferenciais, uma das tarefas é resolver equações, porém, do tipo $y'' + 3y' + 5 = 0$, onde temos como incógnita uma função $y = \phi(x)$.

Nos primeiros estudos de Cálculo Diferencial e Integral, o conceito de derivada deixa bem explicito que a derivada $\frac{dy}{dx}$ de uma função qualquer $y = \phi(x)$ gera outra função $\phi'(x)$, obtido por meio de regras apropriadas para cada função.

Seja $y = e^{0,1x^2}$, diferenciável no intervalo $(-\infty, \infty)$, e sua derivada:

$$\frac{dy}{dx} = 0,2\ e^{0,1x^2}. \tag{1}$$

Se substituirmos $e^{0,1x^2}$ no lado direito da derivada por y, obteremos:

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}2xy \qquad (2)$$

Ou seja, resolver uma equação diferencial propõe-se em descobrir qual é a função representada por y na equação (I), partindo da hipótese em que não fazemos ideia de como ela foi construída, ou seja, um problema familiar ao inverso do cálculo diferencial, dada uma derivada, devemos encontrar, agora, uma antiderivada.

Temos então, que a equação (I) é chamada de equação diferencial, devido aos seus atributos que discutiremos mais precisamente a seguir.

Definição 1. (*Equação Diferencial*): Denomina-se Equação Diferencial (ED) toda equação que contém como incógnita funções e suas respectivas derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Classificação pelo Tipo

As equações diferenciais, para um melhor esclarecimento, são classificadas por *tipo*, *ordem e linearidade.* Primeiramente sua classificação por *tipo*, expostas nas definições abaixo:

Definição 2. (*Equação Diferencial Ordinária*): Se uma equação contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis *dependentes* em relação a uma única variável *independente*, ela será chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO).

Exemplo 1: A equação $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$ apresenta duas variáveis dependentes, u e v, e apenas uma única variável independente x. De acordo com a definição anterior, temos uma Equação Diferencial Ordinária.

Exemplo 2: No caso da equação $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2$, nota-se que existe uma variável dependente y e uma variável independente x. Portanto é uma equação diferencial ordinária.

Perceba que o número de variáveis dependentes não define uma EDO, visto que é caracterizada por possuir apenas uma única variável independente. Nos nossos exemplos, os números de variáveis dependentes são diferentes, no entanto, por haver apenas uma variável independente, ambas são equações diferenciais ordinárias.

Vejamos mais alguns exemplos norteadores:

a) $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

c) $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$

d) $\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2x + y$

Observação 1: Neste texto, as equações diferenciais ordinárias serão escritas com a *notação de Leibniz*:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

Ou com a *notação linha: y', y'', y''',...* Dessa forma, podem-se escrever as equações diferenciais um pouco mais compactamente como:

a) $y' + 5y = 0$

b) $y'' + 2y' + 5y = 0$

c) $y' + 2xy = e^{-x^2}$

d) $y' + y' = 2x + y$

Devemos lembrar que a *notação linha* é somente usada para denotar as três primeiras derivadas. Da quarta derivada em diante é usada a notação $y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(n)},$ até a enésima derivada, $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Por mais que a notação linha seja mais fácil de escrever no desenvolver dos cálculos, a notação de Leibniz, ganha vantagem, em explicitar claramente as variáveis dependentes e independentes. Por exemplo, na equação $\frac{dx}{dt} + 64x = 0$, é claramente exposto que x é a variável dependente e t, uma variável independente.

Nesse sentido, o que diferencia e classifica o tipo de uma equação diferencial é justamente a relação entre os termos das variáveis dependentes e independentes. Veja, uma equação que envolva as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equações diferenciais parciais. De forma mais sucinta segue a definição de Zill, D. G. e Cullen, M. R. (2001) a seguir:

Definição 3. (*Equação Diferencial Parcial): Denomina-se Equação Diferencial Parcial (EDP),* se tal equação, também, correspondente a Definição (3.2) e, envolve mais de uma variável independente, denominadas por derivadas parciais.

São exemplos de equações diferenciais parciais:

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$

Classificação por Ordem

Definição 3.2.3. A ordem de uma equação diferencial é dada de acordo com a derivada de maior ordem que nela aparece, pode-se representar equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem como,

$$F(t, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}).$$

Em outras palavras, ordem de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é dada pela ordem mais alta da derivada na equação. Por exemplo,

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ (Percebemos que essa equação possui uma derivada de segunda ordem e outra derivada de primeira ordem, portanto classificamo-la como uma EDO de segunda ordem, por ser a ordem maior da equação).

b) $\frac{d^5y}{dx^5} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{d^6y}{dx^6} + 5y = 0$ (Nessa equação temos derivadas de várias ordens, que inclusive, estão misturadas, porém a sexta ordem não deixa ser a mais alta derivada da equação, portanto, classificamo-la como uma EDO de sexta ordem).

Pode-se assim denotar uma EDO de ordem n das seguintes formas:

i. $F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ (3)

Ou,

ii. $F(t, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$

Classificação por Linearidade

Definição 4. Uma Equação Diferencial Ordinária de ordem n é linear se F for linear em y, y',..., $y^{(n-1)}$. Ou seja, uma EDO de enésima ordem é linear quando (II) for da forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = g(x) \quad (4)$$

Observe que em (4) há duas propriedades características de uma Equação Diferencial Linear: primeiramente, a variável dependente e todas suas derivadas são do primeiro grau, a potência de cada termo envolvendo y é 1. Segundo cada coeficiente depende no máximo da variável independente x.

Exemplo 3:

a) $(x - y)dx + 4x\,dy = 0$

b) $y'' - 2y' + y = 0$

c) $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx}$ - $5y = e^x$

Essas são exemplos de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares que independem da ordem, ou seja, temos aí exemplos de EDO de primeira, segunda e terceira ordem.

Em especial, reescrevemos a equação (a) demonstrando sua linearidade na variável y, de ordem um (1), descrita na forma alternativa $4xy' + x = y$.

Uma equação que não for da forma (III) é dita não-linear. Funções não-lineares da variável dependente ou de suas derivadas não podem aparecer em uma equação linear. Assim sendo:

Exemplo 4:

a) $(1 - y)y' + 2y = e^x$ (Não é linear, pois possui um termo não-linear, coeficiente depende de y: (1-y)).

b) $y'' + sen\ y = 0$ (Não é linear, pois possui um termo não-linear em relação a y, uma função não-linear: (sen y)).

c) $y''' + y^2 = 0$ (Não linear, pois possui um termo não-linear em relação ao y, uma potencia diferente de 1).

Solução de uma EDO

Como já mencionado anteriormente, o objetivo principal deste trabalho é resolver ou encontrar soluções para determinadas equações diferenciais ordinárias. Então, na definição a seguir vamos apresentar o conceito de solução de uma EDO, de modo geral, encontrada no livro de Zill e Cullen (2001).

Definição 5. *(Solução de uma EDO):* Toda função $\emptyset$, definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I, as quais quando substituídas em uma equações diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma **solução** da equação diferencial no intervalo.

Não se pode pensar em solução de uma Equação Diferencial Ordinária sem se quer, pensar em *intervalo. Para isso definimo-lo a seguir.*

Definição 6. *(Intervalos de Definição):* Um intervalo I é alternativamente conhecido por intervalo de definição, intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução e pode ser um intervalo aberto (a,b), um intervalo fechado [a,b], um intervalo infinito (a,∞) e assim por diante.

Assim, uma solução de uma Equação Diferencial Ordinária de ordem n é uma função $\emptyset$ que tem pelo menos n derivadas e para o qual

$$\text{F } (x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \dots, \emptyset^{n}(x)) = 0, \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

De maneira geral, como afirma Machado (1988), as variadas equações correspondem às perguntas que em geral surgem na formulação de problemas a serem resolvidos. Portanto, equacionar um determinado problema é traduzir as perguntas, que devem ser respondidas, em equações. Responder às perguntas formuladas significa resolver as equações. Quando um problema envolve grandezas variáveis e taxa de variação, as equações resultantes costumam ser equações diferenciais. Uma Equação Diferencial representa uma pergunta do tipo: *qual é a função cuja derivada satisfaz determinada relação?*

Embora tenhamos definido o que vem a ser solução de F $(x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \dots, \emptyset^{n}(x)) = 0$, uma questão importante que surge, é a seguinte: *essa equação sempre tem solução?*

O fato descrever uma equação deste tipo não significa, necessariamente, que existe uma função *u*(*t)* que a satisfaça. Então, como saber se uma determinada Equação Diferencial Ordinária tem solução?

Essa é a questão de existência de solução e é respondida pelo Teorema da Existência e Unicidade que garante, sob determinadas condições, a equação tem sempre solução (BOYCE; DI PRIMA, 2002).

Essa preocupação com a existência da solução não é puramente uma preocupação matemática, pois se um problema não tem solução, gostaríamos de saber deste fato desde o início de sua análise para evitar investir tempo e esforço na tentativa de resolvê-lo. Além disso, se um problema físico, por exemplo, está sendo modelado matematicamente por uma Equação Diferencial, então a equação deveria ter solução, pois caso contrário presume-se que a formulação do problema deve ser avaliada.

Mas se supusermos que uma dada EDO tem pelo menos uma solução, uma segunda questão surge. *Quantas soluções ela tem? Que ou quais condições adicionais devemos* *especificar para se obter uma única solução?* Essas perguntas se referem à unicidade da solução.

Essa questão da unicidade também tem implicações práticas. Se conseguirmos determinar uma solução de um problema dado e se soubermos que este tem uma única solução, o problema é então resolvido. Caso contrário, sabendo da existência de outras soluções, talvez tenhamos que continuar a busca pelas demais soluções.

Uma terceira e última questão que surge é: dada uma EDO na F $(x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \ldots, \emptyset^n(x)) = 0$, podemos de fato determinar uma solução? Se sim, como? Observemos que, se encontrarmos uma solução da equação dada, respondemos, simultaneamente, a questão da existência da solução. No entanto, desconhecendo esta teoria, ou seja, o Teorema de Existência e Unicidade poderíamos, por exemplo, usar um computador e, por meio de uma rotina, encontrar uma aproximação numérica para uma 'solução' que não existe. Por outro lado, mesmo sabendo da existência da solução, pode não ser possível expressá-la em termos das funções elementares, conforme já discutimos na seção anterior. E, infelizmente, essa situação é a mais comum para a maioria das Equações Diferenciais (BASSANEZI, 2002; BOYCE, DI PRIMA, 2002).

Porém, em geral, nos cursos de graduação este resultado não impõe nenhuma dificuldade maior aos alunos já que este teorema é trabalhado logo no início da disciplina de uma única vez, e a partir daí buscam-se os métodos analíticos de resolução das equações, já que na grande maioria dos cursos, esta disciplina é basicamente operacional. E, além disso, a maioria dos modelos matemáticos, que são estudados na disciplina, envolve funções que atendem as condições do teorema. No entanto, esse resultado deve ter sua relevância quando o estudo de EDO é proposto, principalmente quando os modelos são analisados por métodos numéricos, onde se busca soluções aproximadas destes e, portanto, ter a garantia de que elas existem é imprescindível.

Exemplo 5: Dada a equação $y' = 25 + y^2$, devemos verificar se $y = 5.tg\,(5x)$ é uma solução para essa EDO. Como $y = 5.tg\,(5x)$, então $y' = 25.sec^2\,(5x)$.

Substituindo y e y' na equação, temos:

$$25sec^2\,(5x) - 25 - (5tg\,(5x))^2 = 0 \qquad (5)$$

Pelas propriedades das identidades fundamentais da trigonometria, temos que:

$$1 + tg^2\,(t) = sec^2\,(t) \Rightarrow 1 + tg^2\,(5x) = sec^2\,(5x), \text{ logo,} \qquad (7)$$

$$25(1 + tg^2\,(5x)) - 25 - (5.tg\,(5x))^2 = 0 \qquad (6)$$

Usando distributividade resulta em:

$$25 + 25tg^2\,(5x) - 25 - 25tg^2\,(5x) = 0 \qquad (8)$$

Portanto, y = 5tg (5x) é solução da equação é:

$$y' = 25 + y^2. \tag{9}$$

Equações Lineares de Primeira Ordem.

Podemos definir uma equação linear como uma equação diferencial da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = g(x) \tag{10}$$

Dividindo a equação (10) pelo coeficiente a_1(x), obtemos:

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)} \tag{11}$$

Tome P(x) = $\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e f(x) = $\frac{g(x)}{a_1(x)}$, substituindo na equação (11) obtemos uma forma mais útil de uma equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{12}$$

Usando diferenciais, multiplicando a equação (12) por dx, obtemos:

$$\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = dxf(x)$$

$$\Rightarrow dy + P(x)ydx = f(x)dx \tag{13}$$

Reescrevendo, adicionando o inverso aditivo de f(x)dx, obtemos:

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0 \tag{14}$$

Multiplicamos a equação (14) por μ(x),

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0 \tag{15}$$

Pelo Teorema do Critério para uma Diferencial Exata, o lado esquerdo da equação é uma diferencial exata, se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)] \tag{16}$$

Ou seja,

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x) \tag{17}$$

Multiplicando a equação (17) por $\frac{dx}{\mu}$, obtemos a equação separável:

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx \tag{18}$$

Encontrando o μ(x), integrando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x)dx \tag{19}$$

Assim,

$$\ln|u| = \int P(x)dx \tag{20}$$

Usando exponencial, temos:

$$e^{\ln|u|} = e^{\int P(x)dx} \tag{21}$$

Dessa forma encontramos que o fator integração para a equação linear é:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{22}$$

Para exemplificar a resolução de equações lineares de primeira ordem, segue o exemplo.

Exemplo 6: Seja a equação

$$x\frac{dy}{dx} + y = e^x \tag{23}$$

Como podemos observar a equação não se encontra na forma da equação linear de primeira ordem, então dividindo a equação por x que é o coeficiente $\frac{dy}{dx}$, obtemos assim a equação:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x} \tag{24}$$

Onde temos $P(x) = \frac{1}{x}$. Calculando o fator integração μ(x),

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln|x|} = x \tag{25}$$

Encontrando o $\mu(x) = x$, multiplicamos a equação por ele:

$$x\left[\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right] = x\left[\frac{e^x}{x}\right] \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = e^x \tag{26}$$

Reescrevendo a equação, obtemos

$$\frac{d}{dx}[x.y] = e^x \tag{27}$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{d}{dx}[x.y]dx = \int e^x dx \tag{28}$$

Obtemos assim,

$$x.y = e^x + c \Rightarrow y = \frac{e^x}{x} + \frac{c}{x}, \tag{29}$$

Onde c, é a constante de integração.

Problema de Valor Inicial (PVI)

O problema de valor inicial consiste na resolução de equações diferenciais de primeira ordem, que pode ser definida geometricamente em algum intervalo I, tal que o gráfico passe por um ponto (x_0, y_0) determinando que a equação:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{30}$$

Está sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$

Onde:

- x_0 – um número no intervalo I;
- y_0 – número real arbitrário.

Teorema 3.2.1. (Existência e unicidade de uma solução) Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \le x \le b, c \le y \le d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se f(x,y) e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe um intervalo I, centrado em x_0 e uma única função y(x) definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.

Equações Lineares de Segunda Ordem

As equações lineares de segunda ordem são de grande importância no estudo das equações diferencias por duas razões: por ter uma estrutura teórica rica, implícita a diversos métodos sistemáticos de resolução e por elas serem essenciais para qualquer investigação séria das áreas clássicas da física matemática. É da forma

$$\frac{d^2y}{d^2t} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \tag{31}$$

Onde:

f – uma função dada

t – uma variável independente

y – uma variável dependente

Para a equação acima ser linear a função f deve ter a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y. \tag{32}$$

Assim, se f é linear em y' e y'' na equação acima, temos que g, p e q são funções especificadas da variável independente t, porém não depende de y, logo podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y \qquad (33)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t) \qquad (34)$$

Ou

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \qquad (35)$$

Sistemas de Equações Diferenciais

Até agora discutimos uma única Equação Diferencial contendo uma função incógnita. Mas, o que frequentemente costuma acontecer na teoria e principalmente em aplicações é lidar com sistemas de equações diferenciais.

Em um sistema de equações diferenciais ordinárias duas ou mais equações envolvem as derivadas de duas ou mais funções incógnitas de uma variável independente. Por exemplo, se x e y denotarem variáveis dependentes e t denotar a variável independente, um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem será dado por:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y).$$

Uma **solução** de um sistema como o mostrado acima é um par de funções diferenciáveis $x = \emptyset_1(t)$ e $y = \emptyset_2(t)$, definidas em um intervalo I, que satisfazem cada equação do sistema nesse intervalo.

3.1.3. Equações Diferenciais Ordinárias: Aspectos Didáticos

A formação inicial de professores de Matemática é composta por disciplinas pedagógicas e disciplinas específicas que buscam dar ao futuro professor condições para que atuem na Educação Básica (Ensino Fundamental – Anos Finais e Ensino Médio). Enquanto as disciplinas pedagógicas versam o ensino, a aprendizagem e o estudo de modo geral da didática no contexto da sala de aula, as disciplinas específicas, por sua vez, envolvem a aprendizagem de conceitos matemáticos avançados e a ressignificação de conceitos elementares, de modo a contemplar tanto uma fundamentação e argumentação matemática, quanto sua prática profissional futura (SBEM, 2003).

As Diretrizes Curriculares Nacionais (Brasil, 2001), apontam que:

> Os Cursos de Bacharelado em Matemática existem para preparar profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto os cursos de Licenciatura têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica (BRASIL, 2001, p.1).

Desse modo, sobre a Licenciatura em Matemática, o documento enfatiza que ao chegar na universidade e adentrar ao curso, o aluno já tem passado por um longo processo de aprendizagem escolar e de construção de conceitos matemáticos durante a Educação Básica e que por isso, cabe a formação de professores propiciar um aprofundamento da compreensão dos significados destes conceitos, para que seja possível contextualiza-los adequadamente, a fim de que futuros professores construam sólidos conhecimentos matemáticos e façam uso disso em sala de aula para auxiliar seus alunos nesse processo de crescimento e superação (ONUCHIC, HUANCA, 2013).

É nesse sentido que o estudo, o ensino e a aprendizagem das disciplinas especificas na formação inicial do professor de Matemática (Álgebra, Cálculo, Geometria, Estatística, dentre outras) se torna relevante à ser discutido por documentos produzidos pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e por pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

Segundo Fiorentini (2005), as disciplinas específicas possuem um papel crucial na Licenciatura em Matemática e que as mesmas devem ser vistas como ampliadoras do conhecimento, pois elas permitem ampliar o conhecimento matemático do futuro professor, tanto do ponto de vista escolar quanto acadêmico. Tais disciplinas devem fomentar uma constante conexão entre os conceitos matemáticos da Educação Básica e do Ensino Superior.

A disciplina de Cálculo, por exemplo, em cursos de licenciatura, pode possibilitar o entendimento e a exploração do conceito de função e suas aplicações na vida real. Para Machado (1998), ampliar o entendimento desse conceito é um dos papéis da formação inicial do professor, pois as funções modelam diversas situações da própria matemática, do cotidiano e das ciências. Neste processo é necessário explorar os diferentes tipos de funções, sejam elas lineares, racionais, polinomiais, exponenciais, logarítmicas, dentre outras que fazem parte do currículo escolar de um aluno desde os anos finais do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, e que ao chegar na universidade poderá ter esse conhecimento ampliado tanto em aspectos algébricos quanto em aspectos formais da Análise Matemática.

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), por sua vez, considerada um conteúdo/conceito inerente a um curso de Cálculo ou como uma disciplina especifica na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, permite por si só um aprofundamento ao conceito de função, tanto nos conhecimentos matemáticos avançados no Ensino Superior, como também possibilita abordar situações reais do cotidiano por meio de diferentes funções, que modelam fenômenos naturais, sociais e econômicos que envolvem taxas de variação, ou seja, funções descritas e resultantes em equações diferenciais.

> Muitos dos princípios, ou leis, que descrevem o comportamento do mundo físico são proporções, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual determinados fenômenos acontecem. Ao modelar esses fenômenos, frequentemente se obtêm equações que envolvem as variações das quantidades (variáveis), presentes e consideradas essenciais na situação analisada. Assim, as leis que regem tal fenômeno pode ser representada por equações de variações. Quando essas variações são instantâneas e o fenômeno se desenvolve continuamente, as equações são denominadas equações diferenciais (JAVARONI, 2007, p. 30).

Nessa perspectiva, é concludente afirmar que, assim como pesquisas apontam (Machado, 1998; Javaroni, 2007; Laudares & Miranda, 2007; Dullius, Araújo & Veit, 2011; e Souza 2011), as EDO apresentam-se como um objeto de estudo que contribui fortemente, dentre outros aspectos, para relacionar a Matemática do Ensino Superior aos conteúdos matemáticos da Educação Básica, usando a derivação com as noções de "taxa de variação" em problemas de várias áreas do conhecimento, explorando o conceito e aplicações de funções e explicitando a Matemática como uma ferramenta para análise e interpretação de fenômenos reais.

Diante disso, entende-se que as disciplinas especificas oferecidas aos cursos de Licenciatura de Matemática possuem uma importante relevância na formação inicial do futuro professor, acarretando uma constante reflexão, por parte dos professores formadores, sobre o que será ensinado e qual o objetivo do conteúdo a ser explanado. Fatores estes que tornam essenciais a sempre serem discutidos e levados em consideração ao pensar no desenvolvimento profissional do professor de Matemática e seus impactos na sala de aula, tendo em vista que, um bom educador matemático "deve conhecer bem o que ensina e deve saber justificar o que faz" (ONUCHIC; HUANCA, 2013, p. 310).

A Matemática como uma ciência de padrão e ordem é muito mais do que aritmética e geometria, é uma disciplina que pode nos revelar novos olhares e perspectivas sobre o mundo ao nosso redor. Uma disciplina que trabalha com medidas, dados, inferência, dedução e prova, com modelos matemáticos que versam a ciência através da descrição e interpretação de fenômenos naturais e sociais.

Entretanto, surge a seguinte questão: o professor de Matemática, egresso do curso de Licenciatura, sai da universidade com estas concepções da formação e do conhecimento matemático e se sente apto a desenvolver um trabalho com essas demandas na sala de aula?

Onuchic e Huanca (2013), apontam uma preocupação relacionada à formação inicial do professor desenvolvida na licenciatura, pois, segundo os pesquisadores percebe-se que há um distanciamento entre o que está sendo ensinado na graduação com que eles, futuros professores, vão trabalhar em suas salas de aula.

Os autores ainda indagam:

> Como está a nossa matemática? Como está a nossa Educação Matemática? O que nós, pesquisadores, estamos produzindo nessa linha? Como nossa pesquisa acadêmica se relaciona com a Educação Básica? Há transferência do produto de nossas dissertações e teses para o trabalho do professor de matemática em sala de aula? Como concebemos a Educação Matemática no Ensino Superior? O que consideramos importante trabalhar, no processo de ensino e aprendizagem, com nossos alunos na licenciatura? (ONUCHIC; HUANCA, 2013, p. 310).

Tomando-se desses questionamentos e com o que foi discutido sobre as EDO em cursos de Licenciatura em Matemática, pergunta-se: Como está o ensino de EDO na formação inicial de professores? Como a Educação Matemática se insere nesse contexto? O que os pesquisadores andam produzindo sobre o ensino e aprendizagem de EDO? Como os produtos da pesquisa nessa temática refletem na sala de aula? O que os professores da disciplina EDO consideram importante trabalhar, no processo de ensino e aprendizagem, com alunos de licenciatura? Recorrendo a tais indagações seguem os próximos tópicos.

3.1.3.1.Algumas reflexões sobre o ensino de EDO

O Estudo das Equações Diferenciais começou no século XVII com o estudo de cálculo por Newton e Leibniz, sabe-se ainda que as primeiras aplicações foram nas ciências físicas, posteriormente em outras áreas, no entanto, mesmo após passar-se tanto tempo as Equações Diferenciais, continuam com problemas importantes e atrativos, a serem solucionados, essa é uma área de conhecimento que está profundamente ligado ao avanço geral da matemática, consequentemente, também a Educação Matemática.

Hoje, no Ensino Superior, as “Equações Diferenciais” integram o currículo de vários cursos, sejam eles das exatas ou áreas afins. Os conteúdos referentes a essa disciplina podem ser abordados em cursos de Biologia, Economia, Ecologia, Física e Engenharias, quando ministrado como tópico sequencial do conteúdo de Cálculo ou de uma disciplina específica como “Matemática aplicada”.

Já em cursos de exatas, especificamente em Bacharelado ou a Licenciatura em Matemática, as Equações Diferenciais (ED) são mais aprofundadas, podendo ser subdividas em dois tópicos, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e as Equações Diferenciais Parciais (EDP), sendo as EDO a mais presente nos cursos de formação de professores.

Em estudos de Silva et al (2021), no Brasil há 714 cursos de Licenciatura em Matemática em atividade, em todos os estados brasileiros, na modalidade presencial, cadastrados pelo Ministério de Educação (MEC). E destes cursos, ao analisar uma amostra de seus respectivos Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPC) foi constatado que 76,53% possuem o conteúdo de EDO em sua ementa e ainda destacam que estes dados incluem, em parte, disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral que abordam Equações Diferenciais e outros incluem disciplinas específicas de Equações Diferenciais.

Nesse sentido, apesar de nem sempre a disciplina de EDO estar presente na grade curricular de cursos de Licenciatura em Matemática, deve-se reconhecer que esta disciplina tem o poder de conectar a Matemática com outras áreas do conhecimento, uma disciplina que deveria ser o elo entre a Ciência e a própria Matemática (HABRE, 2000).

Entretanto, percebe-se que o ensino de EDO, tem sido pouco explorado diante dessa importância, pois, à luz do que foi discutido anteriormente, o ensino dessa disciplina poderia ser voltado para o trabalho e o desenvolvimento de ideias da modelagem e aplicações que favorecessem a ampliação e aprofundamento de conceitos matemáticos da Educação Básica e Superior, como o conceito de funções e aplicações do Cálculo, e não é o que vem acontecendo com tanta frequência (MELO, 2019).

O curso de EDO, no Ensino Superior, se constitui dos estudos de vários métodos de resolução para Equações Diferenciais Integráveis, que possam ser resolvidos analiticamente, e que por meio da aplicação de listas de exercícios os alunos possam resolver outros problemas similares pelos métodos já apresentados, ação que caracteriza um ensino mecânico e instrumental (MORENO; AZCÁRATE GIMÉNEZ, 2003).

Tomando este fato como uma problemática eminente no ensino e aprendizagem da disciplina, considerando que essa abordagem, unicamente, pode não atender eventuais dificuldades dos alunos, Javaroni (2007) ressalta que “nas últimas décadas vêm acontecendo movimentos para revitalizar o currículo e o ensino de Cálculo. Tanto em âmbito nacional como internacional existem várias pesquisas sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo com o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação - (TIC)" (JAVARONI, 2007, p. 48).

Para esse autor, foi em decorrência desses movimentos que passou a ocorrer mudanças, também no ensino de Equações Diferencias nos cursos de nível superior, baseando-se nos dois seguintes fatores: (i) devido à alta no uso de computadores e experimentos computacionais no curso básico de Cálculo, os estudantes iniciam o curso de Equações Diferenciais com experiência no uso de computadores e programas computacionais gráficos e algébricos para explorar e resolver problemas matemáticos; (ii) além disso, através do próprio avanço da ciência dos computadores é possível realizar investigações das soluções das Equações Diferenciais, as quais só eram possíveis tratar, em sala de aula, analiticamente – abordagem qualitativa.

A abordagem qualitativa no ensino de Equações Diferenciais propicia analisar o modelo (descrição de um fenômeno em termos de equações diferenciais) por meio de sua própria equação e não, apenas, através de suas soluções analiticamente explicitadas (resultados) (KALLAHER, 1999).

Esse termo, "abordagem qualitativa", surgiu a partir de fundamentos criados e desenvolvidos, no final do século XIX por Alexander Liapunov (1857- 1918) e Henry Poincaré (1854-1912) e por que intitularam esse fato como a Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais. Momento marcante na história da matemática, especificamente no desenvolvimento dos estudos das ED.

Foi a partir dessas descobertas que foi criado também à Teoria Geral do Comportamento das soluções das equações diferenciais de segunda ordem e com isto foi possível resolver um número de problemas fundamentais que antes por serem problemas analiticamente impossíveis de resolver eram deixados de lado.

Segundo Kallaher (1999), Poincaré fez o uso extensivo dos métodos geométricos, a respeito das soluções dos sistemas de equações diferenciais como curvas em um espaço apropriado e Liapunov fundou a teoria moderna da estabilidade do movimento, a "Teoria da Estabilidade".

Para um melhor entendimento do que se chama por "Abordagem Qualitativa no ensino de Equações Diferenciais", traz-se um exemplo da proposta de Liapunov que naquela época fazia total sentido para questionamentos como:

> O movimento do ponto descreve uma curva fechada? Permanece sempre no interior de certa porção do plano? Em outras palavras, perguntando na linguagem da astronomia, nós podemos questionar se a órbita é estável ou instável? (KLINE, 1972, p. 732).

Em busca de tais questionamentos, Liapunov propôs uma nova forma para determinar soluções periódicas de Equações Diferenciais, que descrevam o movimento planetário, a estabilidade dos planetas e as órbitas de satélites. No entanto, as equações para o movimento dos três corpos não podem ser resolvidas explicitamente em termos de funções elementares conhecidas. Desta forma, o problema da estabilidade não podia ser resolvido examinando a solução analítica, já que esta não podia ser explicitada. Assim, ele sugeriu um método no qual o problema poderia ser respondido examinando-se as próprias equações diferenciais de forma geométrica (KALLAHER, 1999).

O que se percebe é que esse tipo de problemática se faz presente até os dias atuais em sala de aula, quando em cursos ministrados de Equações Diferenciais Ordinárias o professor ainda deve se delimitar para problemas simples que envolvam modelos que possam ser resolvidos analiticamente a partir dos métodos que lhe forem apresentados, ou ainda quando é possível fazer aplicações de tais conceitos. Despertando nos alunos pensamentos críticos, onde, "mesmo quando as soluções podem ser escritas de uma forma elementar, a procura por fórmulas frequentemente oculta a questão central: como as soluções se comportam?", como afirma Hubbard (1986) apud Habre (2000).

É nesse sentido que se ressalta a necessidade de que o ensino de EDO tem da interferência de outras tendências de ensino que possa proporcionar uma associação entre os múltiplos contextos das ED e seus reflexos na parte motivacional de estudantes do Ensino Superior em sua aprendizagem, contribuindo assim para o desenvolvendo cognitivo do indivíduo como resultado de um processo sócio-histórico-cultural.

Já afirmava, Habre (2000), que mesmo que a disciplina EDO esteja passando por importantes mudanças em favor de novas abordagens, visuais e numéricas, que favorecem o seu ensino e aprendizagem, ainda se tem poucas pesquisas acerca dos efeitos dessas reformas com relação ao entendimento dos alunos quando essa abordagem é utilizada. O autor aponta que um curso de ED, em geral, consiste basicamente da apresentação de estratégias para determinar fórmulas para soluções, juntamente com a aplicação de inúmeros exercícios elaborados de tal forma que suas soluções possam ser determinadas, como funções elementares, por tais métodos.

E para Kallaher (1999), a abordagem que prioriza apenas o aspecto algébrico de resolução das Equações Diferenciais acarreta pouco entendimento do que podem representar as soluções em uma situação de aplicação utilizada. Por esse motivo, é enfatizado que o uso da abordagem qualitativa deve ser adotado, pois, "além das técnicas de resolução analíticas também devem ser utilizados métodos numéricos e ideias geométricas para esboçar soluções aproximadas, onde os alunos possam interpretar e justificar o que veem" (KALLAHER, 1999 apud JAVARONI, 2007, p. 50).

Moreno e Azcárate Giménez (2003) identificam, possíveis, quatro fatores que justificam a resistência de docentes aos métodos tradicionais de ensino em meio a variadas alternativas inovadoras no que se refere a abordagem qualitativa, que são: primeiramente a afirmação consensual entre professores sobre o baixo nível de competência e dificuldades conceituais por parte dos alunos para que seja possível trabalhar com um enfoque direcionado a situações que os façam pensar e raciocinar além da memorização e mecanização.

O segundo motivo, consiste na concepção formalista de professores sobre a Matemática Aplicada e sua posição no âmbito da Matemática. Segundo esses pesquisadores, as Equações Diferenciais, ocupa um lugar especial na matemática pura, tratada com um enfoque quase que estritamente algébrico, levando os alunos a se preocuparem exclusivamente com os métodos de busca de soluções, esquecendo-se do objetivo maior que seria entender o processo que gerou determinada Equação Diferencial, bem como interpretar suas soluções com relação ao fenômeno que ela descreve. Em outras palavras, dando primazia à matemática pura em relação à matemática aplicada.

Consequentemente, surge o terceiro fator, que seria a perca de conteúdos específicos, daquilo que alguns professores consideram como "a matemática de verdade", caso eles se detenham a favor de conteúdos e técnicas próprias da matemática aplicada, os quais não têm a mesma consideração que aqueles conteúdos da matemática pura para tal disciplina.

E por último, o quarto fator, relativo ao tempo de curso, apontado pelos autores como muito curto, para trabalhar outras investigações e tarefas a não ser a preparação dos alunos para tarefas institucionalmente mais valorizadas, referente a dedicação de tempo para o domínio conceitual.

Foi diante desse cenário que Almeida e Borssoi (2004), Habre (2000), Habre (2003), Rasmussen (2001), e Stephan e Rasmussen (2002), entre outros pesquisadores, deram um grande avanço nos estudos que se preocupam e se interessam com a importância de um ensino de qualidade para esse objeto de estudo, onde o modo de apresentar esses conceitos deve ir muito além de uma simples transferência de conceitos ou de apenas explanação de métodos.

Os referidos autores desenvolveram pesquisas sobre o ensino de Equações Diferenciais, prioritariamente das EDO, sempre apresentando possibilidades para este ensino com uma abordagem diversificada, como exemplo o campo de direções como um meio para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem, outros estudos acerca da investigação sobre a aceitação dos estudantes em resolver ED geometricamente, investigações sobre as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em abordar equilibradamente, métodos analíticos, gráficos e numéricos para a análise.

Enfim, uma sequência de estudos, que em geral, foi fundamentada nos pressupostos teóricos advindos de pesquisas como a de David Tall, que se preocupou com questões que giram em torno das dificuldades encontradas na aprendizagem de conceitos básicos de Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para suas análises epistemológicas, das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), que na década de 80 foi elencada fortemente pelo matemático Peter Lax que mobilizou um movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo, que ficou conhecido como *Calculus Reform*, enfatizando o uso de softwares computacionais e de calculadoras gráficas e, também, da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. (DULLIUS, 2011).

A abordagem alternativa de ensino para as EDO fazendo-se uso das TIC, no contexto da sala de aula, possibilita realizar uma abordagem geométrica dos conceitos vistos tradicionalmente (lápis e papel), através da exploração e visualização por meio de um novo ambiente, proporcionado pelos recursos digitais disponíveis nos softwares algébricos e/ou geométricos, fato que há décadas atrás não era possível.

No entanto, segundo Melo (2019), devemos ter alguns cuidados ao levar em conta a abordagem do ensino de ED, pois encontramos diversas lacunas que vão se desencadeando ao desenvolver de atividades como essas, onde até mesmo as tecnologias digitais, por exemplo, que oferecem múltiplas contribuições no que se refere à compreensão e interpretação de soluções e resultados que até então eram apenas analíticos e feitos à mão, via técnicas prontas que não possibilitam uma exploração do que é estudado, podem deixar lacunas quando não há um objetivo certo de pesquisa.

Corroborando com essa afirmação, Rasmussen (2001), já ressaltava que mesmo com a ocorrência de novas direções no ensino de EDO, existe a necessidade maior do desenvolvimento de pesquisas sobre o entendimento e as dificuldades dos alunos na aprendizagem dessa disciplina no contexto da sala de aula utilizando-se a abordagem qualitativa.

O autor, nesse sentido, chama a atenção ao citar exemplos de alguns livros-texto, produzidos por Artigue and Gautheron em 1983, David Tall em 1986 e Tall e West em 1986, que naquela época já auxiliava docentes e discentes universitários nessa questão, o destaque desses livros, segundo ele, é que neles já existia uma tendência de se introduzir os conceitos com abordagens geométrica e numérica para analisar o comportamento das equações diferenciais. Ao decorrer dos anos novas publicações eram feitas seguindo esse novo cenário, como: Differential Equations: a dynamical systems approach, de Hubbard & West (1991); Special issue on differential equations de West (1994); Differential Equations de Blanchard, Devaney & Hall (1998); Differential Equations: a modeling perspectives de Borrelli & Coleman (1998); Revolutions in differential equations de Kallaher (1999); e An Introduction to Differential Equations: order and chaos de Diacu (2000).

Segundo Lajolo (2008), os livros-texto possuem um papel importante na forma como se ensina e se aprende, pois, o processo de aprendizagem de conteúdos, mediante a adoção de livros-texto, ocorre pela forma como eles são apresentados e discutidos, além dos exemplos abordados e de atividades propostas.

Desse modo, olhando para a formação inicial de professores de matemática em cursos de Licenciatura, percebe-se a importância de se atentar a quais livros-texto que estão sendo utilizados e se os mesmos podem auxiliar, o professor formador e o futuro professor, no estabelecimento de relações entre os conteúdos estudados no Ensino Superior e os conteúdos que o futuro professor ensinará na Educação Básica e se este material possui alternativas metodológicas que favoreçam uma abordagem qualitativa desse estudo.

Portanto, a fim de identificar os livros-texto mais citados nas referências bibliográficas dos componentes curriculares que preveem a abordagem do conteúdo de EDO em cursos de Licenciatura em Matemática, foi realizado um mapeamento nos Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPC) de algumas universidades no estado da Paraíba, foi constatado os seguintes materiais mais utilizados:

1. “Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno” - Edwards e Penney (1995);
2. “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno” - Boyce e DiPrima (2002);
3. “Um Curso de Cálculo” - Guidorizz (2001);
4. “Cálculo” - Stewart (2001);
5. “Cálculo - Thomas (2002);
6. “Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem – Zill (2003);
7. “Equações Diferenciais” de Zill e Cullen (2005).

Na busca de realizar uma investigação mais aprofundada dos livros-texto supracitados, foi tomado dois parâmetros de observação se baseando nas concepções teóricas do ensino e aprendizagem de EDO já discutidas (Javaroni, 2007; Dullius, 2011; Dullius, Veit e Araújo 2013; e Laudares e Miranda, 2014), que são: (i) verificar quais são os aspectos conceituais de EDO que são explorados, de que forma, e como acontece o estudo do comportamento das soluções das EDO; (ii) compreender como os autores organizam seus livros-texto e constatar se são utilizadas a ideia de modelos matemáticos como proposta de ensino de funções e suas aplicações em situações reais.

Após fazer uma breve análise dessas obras pode-se perceber que há uma variedade de livros de Equações Diferenciais escritos, destacando o fato de que, a grande maioria, são contempladas de modo independente, desvinculadas do Cálculo, dando um enfoque maior as suas especificidades e aplicações. Ao explorar cada capítulo, verifica-se os direcionamentos para o ensino de EDO que coincidem com a forma como o conteúdo é exposto, ensinado e argumentado pelos autores, quanto à avaliação e feedbacks são evidenciados exemplos utilizados e atividades propostas, considerando que, respectivamente, os exemplos referem-se as atividades já solucionadas, apresentadas para discutir algum conceito, já as atividades propostas referem-se as atividades/exercícios que são deixadas para que os estudantes a solucionem, no intuito de praticarem o que está sendo ensinado.

De modo geral, nota-se que as propostas de ensino de EDO presentes nos livros-texto específicos, em exceção aos de Cálculo, apresentam possibilidades de contextualização, pois neles são apresentados diferentes modelos matemáticos que enriquecem suas aplicações em situações reais (humanas, sociais, econômicas, físicas, dentre outras). Além disso, esses modelos dão abertura a diversos conteúdos que são trabalhados na Educação Básica, tomando como exemplo a aplicação no crescimento/decrescimento de populações, variação de temperatura, meia-vida de elementos químicos, reações químicas, misturas, objetos em queda livre (física) e Matemática Financeira, onde todos estes abordam o estudo dos diferentes tipos de funções.

Em relação a abordagem qualitativa acerca do tratamento e exploração do comportamento da solução de uma EDO, verifica-se que há alguns livros-texto que não utilizam diferentes recursos, além da algébrica, para tratar este tópico, recursos estes que poderiam contribuir tanto para o professor quanto alunos ao potencializar sua aprendizagem. Rasmussen (2001), já chamava a atenção também para o livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno de autoria Boyce e DiPrima (2002), pois o mesmo, em duas diferentes versões, terceira e sétima edição, apresenta essa tendência de evidenciar os aspectos geométricos e gráficos como possibilidade para trabalhar e explorar a solução de uma EDO, indo além de apenas uma solução analítica.

Em vista disso, pode-se agregar aqui ao ensino de EDO, a relevância em pesquisas sobre a abordagem qualitativa. Expressão aqui utilizada como o processo de inferir sobre o comportamento das soluções de uma Equação Diferencial Ordinária, uma visão crítica sobre o modelo e suas aplicações, bem como as interpretações geométricas, gráfico-numéricas e analíticas, obtidas na sala de aula através de alguma metodologia alternativa de ensino.

3.1.3.2.Um olhar para a literatura

Em busca de situar o fenômeno de interesse dessa pesquisa e destacar sua relevância e contribuição para a comunidade acadêmica frente ao que já existe na literatura, apresenta-se um levantamento bibliográfico de pesquisas desenvolvidas e finalizadas nos últimos anos no Brasil.

Segundo Ferreira (2002), o intuito de realizar pesquisas desse tipo nasce pelo fato querer:

> Conhecer o já construído e produzido para depois buscar o que ainda não foi feito, de dedicar cada vez mais atenção a um número considerável de pesquisas realizadas de difícil acesso, de dar conta de determinado saber que se avoluma cada vez mais rapidamente e de divulgá-lo para a sociedade (FERREIRA, 2002, p. 259).

Este levantamento objetiva procurar, organizar, sintetizar e avaliar a produção científica de trabalhos na área da Educação Matemática que tem por temática de investigação o ensino e a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias, no que diz respeito as dificuldades dos alunos na aprendizagem, dos professores no ensino e as possibilidades e/ou alternativas que busquem superar ou amenizar essas dificuldades por meio do ensino.

Este estudo ocorreu em primeiro momento na busca pela produção acadêmica disponível na literatura, através da quantificação e de identificação de dados bibliográficos, com o objetivo de mapear essa produção num período delimitado, em anos, locais, áreas de produção. Posteriormente, é o momento de identificar quais são as tendências, ênfases, escolhas metodológicas e teóricas dos trabalhos selecionados. No primeiro momento, pergunta-se “quando”, “onde”, “quem”; na segunda fase, as questões são referentes à “o quê” e “o como” dos trabalhos (FERREIRA, 2002).

Nesse sentido, foi tomado como ponto de partida para a busca de trabalhos as palavras-chave que caracterizam o fenômeno de interesse desse estudo: “ensino – aprendizagem –

Equações Diferenciais Ordinárias”. Neste momento, foram encontrados inúmeros trabalhos que versam as Equações Diferenciais Ordinárias, porém, a grande maioria tratava do estudo, aplicações e atividades de modelagem que não versavam o interesse deste trabalho. Por esse motivo, foi delimitado pesquisas abordam enfaticamente o ensino e a aprendizagem de EDO no Ensino Superior, não necessariamente precisava ser na Licenciatura em Matemática, optou-se por deixar em aberto nessa questão.

Em seguida, foi delimitado também nesse mapeamento o período em anos, de 2000 a 2020, o local que foi realizado as consultas, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), o banco de teses da CAPES, Programas de Pós-Graduação brasileiros e em sites franceses (*EducMath do Instituto Francês de Educação; EduTice - Education et technologies de l'information et de la communication; e o Tel (thèses-en-ligne*), no objetivo de acessar alguns trabalhos (teses) julgadas como relevantes para essa discussão, por isso foram adicionadas nesse levantamento.

Foram encontradas e analisadas um total de dezesseis pesquisas, sendo onze dissertações de Mestrado (D) e cinco teses de Doutorado (T). Todos estes trabalhos, embora possuam sujeitos, abordagens, concepções e focos dos dados de pesquisa diferentes, tem como objeto principal de investigação o ensino e aprendizagem de EDO. Levantar e discutir tais pesquisas nos dá um norteamento sobre o que houve, como foi e quais são as perspectivas dessa temática no âmbito acadêmico e suas implicações na sala de aula.

1. Adriana Helena Borssoi - *A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino* – Dissertação de Mestrado (2004)

A investigação objetivou observar, descrever, comparar e compreender se a aprendizagem dos estudantes em um ambiente de ensino com atividades de Modelagem Matemática é significativa e como objetivos específicos: elaborar e aplicar uma proposta para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias para alunos do curso de Química, tomando a Modelagem Matemática como estratégia de ensino; observar, analisar e entender como os estudantes apreendem o conteúdo; analisar a contribuição da Modelagem Matemática como facilitadora da Aprendizagem Significativa.

2. Salahattin Arslan - *L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S : Estelle viable ? Quels sont les enjeux et les consequences?* – Tese de Doutorado (2005)

Esta tese objetivou investigar as possibilidades de desenvolver uma abordagem qualitativa de Equações Diferenciais no Ensino Médio na França, no qual já eram feitas abordagens algébrica e numérica dessas equações. Baseada em resultados de pesquisas desenvolvidas no nível universitário acerca da abordagem qualitativa de Equações Diferenciais, Arslan lançou a hipótese de ser viável essa abordagem no nível secundário de ensino e de que a introdução às Equações Diferenciais poderia ser feita pela abordagem qualitativa antes de ser ensinada a resolução algébrica.

O experimento foi realizado com uma turma do Terminale S (equivalente à 3ª série do Ensino Médio - modalidade científico) do liceu Pablo Néruda, em Saint Martin d'Hères, na França. Arslan ressaltou que a turma era composta por alunos não repetentes e repetentes, e que isso forneceu a oportunidade de observar a viabilidade da abordagem qualitativa para estudantes que não conheciam a resolução algébrica (ou seja, estudantes não repetentes) e, por outro lado, permitiu medir, por meio dos repetentes, o impacto do conhecimento de resolução algébrica diante da abordagem qualitativa.

3. Ruth Rodriguez Gallegos - *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S* - Tese de Doutorado (2007)

A autora, nessa pesquisa, abordou o ensino e a aprendizagem da modelagem como objeto de ensino no Nível Médio no sistema escolar francês. A tese apresentou dois objetivos principais: (i) O primeiro consistiu em estudar de que forma a modelagem vista como abordagem de ensino é empregada no sistema escolar francês; (ii) O segundo consistiu em investigar os processos cognitivos dos alunos quando estão diante de tarefas de modelagem, de forma a identificar as suas dificuldades ao resolver um problema particular.

4. Sueli Liberatti Javaroni - *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias* – Tese de Doutorado (2007)

A pesquisa teve por objetivo analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias a partir da abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos, auxiliada pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). A pesquisa foi conduzida pela pergunta diretriz: quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?

5. Murilo Barros Alves - *Equações Diferenciais Ordinárias em Cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática* – Dissertação de Mestrado (2008)

A questão de pesquisa foi elaborada como sendo: como a Equação Diferencial com a resolução de problemas e iniciação à modelagem em ciências complementa a aprendizagem da derivada, ressignificando-a como taxa de variação? Teve como objetivo específico mostrar como o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias pode complementar e ressignificar o entendimento do conceito de derivada com estudo de fenômenos das ciências, por meio de taxa de variação, para contribuição ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Licenciatura em Matemática.

6. Alyne Maria Rosa de Araújo - *Modelagem Matemática nas aulas de Cálculo: uma estratégia que pode contribuir com aprendizagem dos alunos de engenharia* - Dissertação de Mestrado (2008)

A dissertação objetivou analisar os possíveis efeitos que o uso da Modelagem Matemática, como estratégia de ensino, provoca no processo de aprendizagem dos alunos da disciplina Cálculo III – EDO (Equações Diferenciais Ordinárias). A pergunta norteadora da pesquisa foi: como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de aprendizagem dos alunos da disciplina Cálculo III – Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) – em um curso de Engenharia da Computação?

A autora destacou que a Modelagem Matemática possibilitou aos estudantes a interação com outras áreas do conhecimento, estimulando-os à realização de pesquisas. Concluiu que essa estratégia de ensino contribuiu com a aprendizagem dos alunos, proporcionando a eles o resgate de alguns conceitos estudados em outras disciplinas de Cálculo e despertando-os para aspectos reflexivos e críticos.

7. Roberta Modesto Braga - *Modelagem Matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias* – Dissertação de Mestrado (2009)

A pesquisa investigou como o ambiente gerado pela Modelagem Matemática favorece o tratamento do erro no processo de ensino e aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias. A pesquisa foi qualitativa, descritiva e interpretativa, desenvolvida com 38 alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Campus de São Miguel do Guamá da Universidade do Estado do Pará (UEPA), na disciplina Cálculo II. A coleta de dados contou com observações, fotografias, filmagens, registros escritos, relatório, dentre outros instrumentos. Braga concluiu que o ambiente gerado pela Modelagem Matemática favoreceu o tratamento do erro matemático na medida em que os alunos foram motivados a refletir sobre suas próprias concepções a partir de situações de seus interesses.

8. Maria Madalena Dullius - *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico* – Tese de Doutorado (2009)

A autora investigou uma abordagem diferenciada de ensino para tratar o conteúdo de Equações Diferenciais, baseada na solução de situações-problema e no uso de recursos computacionais. Teve como objetivos a identificação das principais dificuldades dos alunos na aprendizagem das Equações Diferenciais; a elaboração de uma proposta pedagógica que potencialmente os auxiliasse na superação dessas dificuldades e que os ajude a perceber a importância desse conteúdo para a sua formação; o estudo das potencialidades do uso de recursos computacionais no processo de ensino e aprendizagem das Equações Diferenciais nesse contexto; o estudo da contribuição da interação entre professor-aluno-material didático, de modo que proporcione condições favoráveis para uma aprendizagem significativa desse conteúdo.

9. Vagner Donizeti Tavares Ferreira - *A Modelagem Matemática na introdução ao estudo de Equações Diferenciais em um curso de Engenharia* – Dissertação de Mestrado (2010)

Esta pesquisa objetou investigar como a utilização da Modelagem na introdução ao estudo de Equações Diferenciais em um curso de Engenharia pode contribuir para estimular a habilidade de relacionar a Matemática com fenômenos do mundo real, que envolvam variação, além de tomar decisões a respeito de tais fenômenos, com base na interpretação das informações contidas na solução da equação correspondente.

10. Roberto Fecchio - *A Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade na introdução do conceito de Equação Diferencial em cursos de Engenharia* – Tese de Doutorado (2011)

Esta tese objetivou investigar a utilização da Modelagem Matemática segundo Bassanezi aliada à Interdisciplinaridade e à Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, como recursos facilitadores na introdução do conceito de Equação Diferencial para os alunos do ciclo básico da Engenharia. A pesquisa foi norteada pela seguinte questão: atividades interdisciplinares que utilizam a Modelagem Matemática propiciam a aprendizagem de Equações Diferenciais?

11. Galvina Maria de Souza - *Uma estratégia metodológica para a introdução de um curso de equações diferenciais ordinárias* – Dissertação de Mestrado (2011)

Esta dissertação teve como proposta de trabalho investigar o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias. O objetivo foi verificar como o resgate dos conceitos fundamentais de Cálculo I, desde elementos funcionais até conceitos referentes às derivadas e integrais, taxas e o estudo da Modelagem Matemática aplicada a problemas classicamente enunciados, como parte introdutória de um curso de Equações Diferenciais Ordinárias, pode contribuir para o ensino e aprendizagem dessas equações e suas aplicações.

12. Eliane Alves de Oliveira – *Uma engenharia didática para abordar o conceito de equação diferencial em cursos de engenharia* – Tese de Doutorado (2014)

Esta pesquisa teve por objetivo investigar estratégias de ensino com vistas a favorecer a aprendizagem de estudantes acerca de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em cursos de graduação em Engenharia. O estudo direcionou-se para a elaboração de uma engenharia didática, e centrou-se na definição do elenco de componentes dessa engenharia, tendo por alvo abordagens gráfica, algébrica e numérica, que envolvessem situações-problema, por meio da utilização de recursos computacionais. A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e a Engenharia Didática segundo Michèle Artigue compõem os aportes teórico-metodológicos principais da pesquisa.

13. Edcarlos Vasconcelos da Silva – *Contribuições da Modelagem Matemática e das Tecnologias para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias* – Dissertação de Mestrado (2015)

Esta dissertação apresenta os resultados de um estudo feito com alunos da Licenciatura Plena em Matemática. O objetivo foi o de investigar como o uso da Modelagem Matemática, apoiada por recursos tecnológicos, pode contribuir para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias ao se relacionar a problemas não matemáticos do mundo real.

14. Ronero Marcio Cordeiro Domingos – *Resolução de problemas e modelagem matemática: uma experiência na formação inicial de professores de física e matemática* – Dissertação de Mestrado (2016)

O objetivo deste trabalho foi identificar e compreender como os alunos de Licenciatura em Física e Matemática desenvolvem suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula no contexto da Modelagem Matemática, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Para a realização desta pesquisa, foi empregada como metodologia cientifica, o Modelo de Thomas A. Romberg, em que ele apresenta dez atividades essenciais para o desenvolvimento de uma Pesquisa Cientifica. A partir desse Modelo, foi possível a realização da investigação, planejamento e desenvolvimento deste trabalho.

15. Talita Breschilare Piffer Freire – *Uma unidade de ensino potencialmente significativa para o estudo de equações diferenciais ordinárias* – Dissertação de Mestrado (2017)

Esta dissertação é resultado de uma pesquisa que objetivou propor, implementar e analisar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias no contexto de uma turma do sexto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática. A unidade de ensino constitui o Produto Educacional vinculado à pesquisa, o qual associa o uso de recursos tecnológicos, assim como atividades de Modelagem Matemática como parte das atividades componentes do material. Assim, os referenciais teóricos deste trabalho remetem a Teoria da Aprendizagem Significativa concebida por David Ausubel, onde a proposta de Unidades de Ensino Potencialmente Significativa está alicerçada.

16. Marcos Santos de Sá – *Equações diferenciais ordinárias: aplicações e uma proposta de intervenção no ensino básico* – Dissertação de Mestrado (2019)

O presente trabalho teve como objetivo estudar as Equações Diferenciais Ordinárias, sobretudo seu viés quantitativo. Para tanto, os autores realizaram o estudo dos modelos populacionais de Malthus e Verhust aplicados à população de Aracaju, através de dados oficiais. Além disso, abordaram a Lei de Resfriamento de Newton, a modelagem do Decaimento Radioativo e realizaram aplicações no sistema massa-mola, com e sem amortecimento, no circuito elétrico em série L-R-C e no pêndulo simples de Galileu para apresentar o estudo como uma proposta de intervenção a alunos da educação básica de ensino, em que, através de conceitos próprios dessa modalidade, eles poderão não só compreender, como também resolver problemas específicos, relacionados a modelagem de alguns fenômenos naturais.

Para uma melhor compreensão em termos do mapeamento realizada, segue um quadro com uma síntese das pesquisas que foram levantadas e analisadas, apresentando seus principais aspectos teórico-metodológicos dentro da temática aqui discutida.

Quadro 1:Sínteses de Pesquisas sobre o Ensino de EDO analisadas

Ano	Abordagens e Concepções Teóricas	Foco dos Dados da Pesquisa	Apontamentos Gerais	Tipo
2004	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009); Teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1999).	Alunos do curso de Bacharelado em Química.	A utilização da Modelagem Matemática como alternativa viável e eficiente estratégia de ensino que vem a ser uma facilitadora da Aprendizagem Significativa, enfatizando que as atividades de ensino em ambiente de	D

			Modelagem permitem emergir uma grande quantidade de conceitos matemáticos e extras-matemáticos.	
2005	Teoria da Abordagem Qualitativa Representação Semiótica (DUVAL, 2003); Engenharia Didática (ARTIGUE 1989).	Alunos da turma do Terminale S (equivalente à 3ª série do Ensino Médio - modalidade científico) do liceu Pablo Néruda, em Saint Martin d'Hères, na França	A viabilidade da abordagem qualitativa no nível secundário de ensino e de que a introdução às Equações Diferenciais poderia ser feita pela abordagem qualitativa antes de ser ensinada a resolução algébrica.	T
2007	Teoria da Abordagem Qualitativa; e TIC.	Alunos do Curso de Matemática e Ecologia (Bacharelado).	A interação entre os estudantes e os softwares utilizados proporciona novas possibilidades para a abordagem qualitativa dos modelos estudados, sugerindo a necessidade de repensar o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias de forma a enfatizar o aspecto geométrico de modelos matemáticos além do aspecto algébrico.	T
2007	Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD) Atividades de Modelagem na perspectiva congnitiva (BORROMEO, 2006).	Alunos das turmas de Física e de Matemática de classes de Terminale S dos liceus Pablo Neruda, International e La Saulaie, na região de Grenoble, na França.	Com relação às Equações Diferenciais como uma ferramenta de modelagem na experimentação, O autor observou que esse conceito matemático em classe de Terminal S está relacionado às dificuldades dos estudantes em conceber o que é uma Equação Diferencial. Evidenciou dificuldades para o estabelecimento de uma condição inicial relacionada com a Equação Diferencial, e também para compreender que as soluções de uma Equação Diferencial são funções, e não constantes.	T
2008	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009).	Alunos do curso de Licenciatura de Matemática que cursaram a disciplina de EDO.	A Modelagem Matemática aliada as TIC como um meio satisfatório na ressignificação do conceito de taxa de variação para o estudante de Cálculo e na aprendizagem de Equações Diferenciais.	D

2008	Modelagem Matemática (BARBOSA, 2004 apud ARAÚJO, 2008)	Alunos do curso de Engenharia da Computação.	A Modelagem Matemática possibilitou aos estudantes a interação com outras áreas do conhecimento, estimulando-os à realização de pesquisas. Concluiu que essa estratégia de ensino contribuiu com a aprendizagem dos alunos, proporcionando a eles o resgate de alguns conceitos estudados em outras disciplinas de Cálculo e despertando-os para aspectos reflexivos e críticos.	D
2009	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009);	Alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática.	O ambiente gerado pela Modelagem Matemática favorece o tratamento do erro matemático na medida em que os alunos são motivados a refletir sobre suas próprias concepções a partir de situações de seus interesses.	D
2009	Teoria Sociointeracionista (VYGOTSKY); Teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1999).	Professores e alunos do Curso de Licenciatura em Ciências Exatas e alunos do curso de Quimica Industrial e Engenharias no Centro Universitário UNIVATES em Lajeado – RS.	O estudo constatou uma rejeição pelo enfoque geométrico por parte dos alunos e também mostrou que os estudantes encontraram dificuldades para pensar simultaneamente de modos diferentes (algébrico e gráfico). Na segunda pesquisa, Dullius relatou que o autor investigou a aceitação dos estudantes em resolver Equações Diferenciais geometricamente, e os resultados mostraram que inicialmente os estudantes apresentaram resistência em aceitar a abordagem geométrica, mas ao longo do curso muitos estudantes aceitaram e apreciaram sua utilidade.	T
2010	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009); (BASSANEZI; FERREIRA, 1988 apud FERREIRA, 2010).	Alunos voluntários do curso de Engenharia de Produção, Mecânica, Elétrica e Mecatrônica).	A modelagem propicia aos estudantes a possibilidade de construir o seu próprio conhecimento e contribuiu para o entendimento de conceitos no estudo de Equações Diferenciais Lineares e a motivação dos	D

			alunos da área de Engenharia.	
2011	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009); Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986)	Alunos de um curso de Engenharia.	a Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade, conduzidas conforme indicado em sua tese, apresentaram novas possibilidades de exploração do conteúdo Equações Diferenciais, permitindo aos alunos aplicarem seus conhecimentos em novas situações, contribuindo para o entendimento e a motivação dos estudantes da área de Engenharia.	T
2011	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2006 apud SOUZA, 2011); Atividades Sequenciais (PONTE, 2003; 2005 apud SOUZA, 2011).	Professores e alunos do curso de Engenharia (Química, de Produção, Telecomunicações, de Controle e de Computação).	A possibilidade de elaborar e realizar estratégias e situações que possam vir a minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias.	D
2014	Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e a Engenharia Didática segundo Michèle Artigue	Alunos do segundo ano de graduação em Engenharia Ambiental e Engenharia de Produção.	O uso do software GeoGebra favoreceu a realização das atividades e revelaram a importância e a produtividade das discussões em dupla. A análise dos dados obtidos possibilitou afirmar que as características da engenharia didática desenvolvida no trabalho favoreceram a construção de conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias pelos alunos.	T
2015	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009).	Alunos da Licenciatura Plena em Matemática.	O uso da Modelagem Matemática, apoiada por recursos tecnológicos, pode contribuir para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias ao se relacionar a problemas não matemáticos do mundo real. A principal característica foi a motivação destes diante de atividades desafiadoras.	D
2016	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009); Modelo Metodológico (ROMBER, 2007;	Alunos dos cursos de Licenciatura em Física e Matemática.	A pesquisa constatou que a Metodologia Resolução de Problemas, trabalhada no contexto da Modelagem Matemática, foi um caminho promissor no preparo de	D

	ONUCHIC et ao, 2014).		futuros professores de Física e Matemática para o desenvolvimento de habilidades e atitudes para a prática da sala de aula.	
2017	Teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1999).	Curso de Licenciatura em Matemática.	Foram identificadas três categorias de análise (Modelagem Matemática, Recursos Tecnológicos e Aprendizagem Significativa) que permitiram identificar evidências sobre a Aprendizagem Significativa dos alunos e a concluir que a proposta se consolidou como uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa exitosa, no sentido considerado na literatura que a fundamenta.	D
2019	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009).	Alunos da Educação Básica.	Abordar modelos matemáticos que envolvem EDO como uma proposta de intervenção a alunos da educação básica de ensino, em que, através de conceitos próprios dessa modalidade, eles poderão não só compreender, como também resolver problemas específicos, relacionados a modelagem de alguns fenômenos naturais.	D

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode constar no quadro acima, apesar de que essas pesquisas possuam sujeitos, abordagens, concepções e focos dos dados de pesquisa diferentes, todas elas têm em comum o desejo e a preocupação em explicitar desafios e fornecer possibilidades para o ensino e aprendizagem de EDO em cursos de nível superior.

Em relação as problemáticas e dificuldades, é um consenso entre as pesquisas levantadas que ao decorrer dos anos o ensino dessa disciplina em cursos de nível superior vem ocorrendo de modo que o foco curricular e pedagógico continua sendo no trabalho de apresentações de definições, propriedades e no ensino de métodos resolutivos, onde a solução, na maior parte das vezes, é abordada de forma analítica através de manipulações algébricas. O que para os autores pode ser satisfatório, porém em suas pesquisas evidenciam que isso vem causando, cada vez mais, dificuldades nos alunos até mesmo em conceber o que é uma Equação Diferencial, pois é notória as dificuldades referentes à matemática básica, à aplicação dos conceitos de derivada e integral e à interpretação de problemas quando o enfoque é dado de modo quantitativo na abordagem.

Por esse motivo, que todas as pesquisas encontradas e analisadas desenvolveram trabalhos na tentativa de sanar essa problemática e acabaram apontando o enfoque qualitativo de ensino como o mais promissor e efetivo nesse cenário. O enfoque qualitativo defende um ensino que vá além da abordagem analítica das EDO, ressalta a importância da contextualização a partir de situações-problema, a presença de modelos e aplicações que favoreçam a conexão com conceitos importantes para um professor de Matemática da Educação Básica e abordagens na solução da EDO tragam ao aluno significado do que está fazendo, mesmo que para isso tenha que se fazer uso das tecnologias digitais. Não quer dizer que tenha de extinguir uma abordagem ou outra, mas sim um equilíbrio entre a abordagem analítica, numérica e gráfica, por meio da utilização de recursos computacionais que auxiliem e agilizem o processo.

Outro fato a salientar é que é nítido que a Modelagem Matemática como metodologia de ensino vem sendo a mais apontada pelas pesquisas, uma vez que o próprio conceito de EDO já traz em si atividades de modelagem para sua resolução, mas que a forma como foi trabalhada pelos pesquisadores foi obtido um bom retorno aos participantes da pesquisa no que diz respeito a motivação do estudo.

3.2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O presente capítulo tem como objeto de estudo a força propulsora para a construção deste trabalho de pesquisa. Escrever sobre Resolução de Problemas e de sua inquestionável importância nos processos formativos de aprendizagem, na teoria do conhecimento e prioritariamente, neste contexto, na Educação Matemática não é uma tarefa fácil, porém, a forma como ela vem se difundindo e impactando de maneira positiva e construtivista na sala de aula de Matemática e, em todo o mundo, é o que incentiva os pesquisadores a desenvolverem o presente estudo.

No desenrolar do texto, enfatiza-se o cuidado quanto ao uso de uma mesma expressão que pode se referir a significados ou contextos diferentes, toma-se como exemplo aqui, as expressões *Resolução de Problemas* e *resolução de problemas*.

Não é incomum ouvir o termo “resolução de problemas” vinculado a matemática, pois nota-se uma ligação entre esse termo e o ato de resolver questões, cálculos aritméticos e algébricos. Ou ainda, tal termo também pode estar relacionado ao ato de solucionar uma determinada problemática ou desafio que não se consegue resolver de imediato, tendo assim que fazer o uso de diferentes caminhos estratégicos, por meio dos conceitos matemáticos para encontrar uma solução, quando ela existir.

Por outro lado, destaca-se o uso da expressão Resolução de Problemas (RP), com letras maiúsculas, referindo-se ao cenário da presente pesquisa, por tratar-se, enfaticamente, ao movimento educacional da Resolução de Problemas como abordagem metodológica, a qual teve início na primeira metade do século XX e até os dias atuais vem se apresentando como um tema efetivamente central no ensino de Matemática, por lidar, inicialmente, com problemas matemáticos que surgem na educação em diferentes níveis, mas que ao longo do tempo vem adquirindo outras dimensões que ultrapassam apenas a mera visão de uma ferramenta prática de ensino. Dessa forma, a Resolução de Problemas nasce e se consolida como uma área de pesquisa que questiona a natureza do conhecimento matemático e da educação desde os seus princípios filosóficos (MORAIS; ONUCHIC, 2014).

Leal Junior (2018), ao analisar discursos de muitos pesquisadores do Brasil e do mundo em Educação Matemática sobre o conhecimento dos pressupostos teórico-filosóficos que permeiam suas práticas educativas e vivências de pesquisa, respaldadas em seus sistemas de crenças, acerca da termologia utilizada, defende que não se trata apenas de uma diferenciação ortográfica, mas, sim, de discursos que tornam a expressão Resolução de Problemas muito além de um compreensão da palavra por palavra, há pesquisas e pesquisadores que dão um sentido amplo do termo. Nesse sentido, na pesquisa de campo deste trabalho será diferenciada a Resolução de Problemas com letras maiúsculas e minúsculas, quando a Resolução de Problemas está escrito com maiúsculo se refere a Metodologia e resolução de problemas escrito com letras minúsculas se refere ao ato de resolver problemas.

> A expressão resolução de problemas refere-se ao ato de resolver problemas ou situações-problemas, algo que pode ser esporádico ou momentâneo, uma atividade de cunho recognitivo e puramente heurístico, que vise à exploração pontual de problemas matemáticos e que pode assumir várias nuanças dependendo dos sistemas de ensino e crenças dos docentes. Já a expressão Resolução de Problemas diz de uma prática institucionalizada ou um movimento educacional, algo que acontece em atividades e perpassa todo um movimento educacional e, por sua vez, ultrapassa os limites impostos pelo tempo e pelo espaço, extravasando as paredes da escola, problematizando a vida de alguma forma (LEAL JUNIOR, 2018, p. 71).

Seguindo as definições discursivas supracitadas, evidencia-se, em um nível mundial da literatura, no idioma da Língua Inglesa, que esses termos, em relação a essa compreensão de utilização e sentido, possui uma diferenciação na própria palavra, utilizando *Problem Solving* ao nos referir à Resolução de Problemas e *solving problem* para resolução de problemas.

Em um dos capítulos do Livro *Perspectivas para Resolução de Problemas*, intitulado "*Perspectivas de Resolução de Problemas por meio de Articulações entre Teoria, Prática e Conceitos sobre Comunidade Prática"* de autoria de Leal Junior e Miskulin (2017), a relevância da diferenciação desses termos foi enfatizada, apontando que esse fato já se fazia presente desde os Standards (2000) e vem se intensificando fortemente em trabalhos de pesquisadores e educadores matemáticos, reportando a Resolução de Problemas como um campo de estudos multifacetado, uma área com vários elementos e aspectos, que podem convergir ou divergir dependendo dos pressupostos teóricos considerados na prática educacional.

Sendo assim, o interesse em frisar e problematizar o uso e as diferenciações desses termos, no contexto desta pesquisa, é para provocar uma reflexão previamente sobre onde, quando, como e por que a diversidade de concepções em torno da Resolução de Problemas se dá desde a pesquisa até a prática educacional no cotidiano das aulas de Matemática, tendo em vista que a mesma, deve se apresentar como um papel unificador, atravessando os processos de ensino e de aprendizagem, numa interface entre teoria e prática, como defendem Onuchic et al. (2014).

Nessa perspectiva, propõe-se a discutir nesta subseção a Resolução de Problemas e a sua efetivação no contexto do trabalho didático-pedagógico, a qual pesquisas apontam como o agente motivador da prática de desenvolvimento social e de construção e desenvolvimento de conhecimento, dando ênfase à sua inserção no âmbito da Matemática e Educação Matemática.

Para melhor estruturar o capítulo, inicialmente faz-se um breve resgate do contexto histórico sobre o uso da Resolução de Problemas na sociedade, enfatizando o seu caminhar como um instrumento pedagógico diante das reformas curriculares ocorridas a partir do século XX, culminando suas diferentes abordagens de ensino ao longo da história até onde a trouxe como responsável pela construção do conhecimento matemático. Em seguida, apresenta-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, base principal deste trabalho, discutindo seus domínios e interfaces que refletem na atividade de pesquisa. Por fim, é realizada uma discussão sobre a Resolução Problemas no Ensino Superior, apontando e discutindo um levantamento das principais pesquisas desenvolvidas no Brasil que fazem o uso dessa metodologia e que possuem enfoque na Formação Inicial de Professores (Licenciatura), de modo a situar a presente pesquisa, face aos tópicos a abordar no projeto de ensino de Equações Diferenciais Ordinárias.

3.2.1. Resolução de Problemas: Aspectos Históricos

Apresente-se neste tópico alguns aspectos históricos da Resolução de Problemas, visando discutir, numa breve linha cronológica de acontecimentos, como se deu, dentre as demais tendências e demandas mundiais para o ensino e aprendizagem de Matemática, a consolidação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas como uma tendência atual e relevante no âmbito da Pesquisa em Educação Matemática e seus impactos na sala de aula e à formação de professores.

Como já dizia Lester Junior (2003), a resolução de problemas está no âmago de toda a Matemática. Por conseguinte, percebe-se que, nesse quesito, a vida humana, a matemática e os problemas possuem uma relação intrínseca.

Entre a vida e a matemática há uma inerência primordial quanto a existência do homem na terra. Assim como as raízes que subjazem as árvores e o solo que subjaz ao oceano, os problemas apresentam-se como as sementes que geram a atividade de desenvolvimento humano e o da matemática, são os elementos que a subjazem.

O problema é o elemento que concebe uma intersecção entre esses dois campos, não são disjuntos. Veja, o homem por si só lida com problemas em seu cotidiano desde a sua existência e, consequentemente, as maneiras de como resolvê-los torna-se também primitiva. Sendo assim, falar sobre resolução de problemas em um contexto geral não é foco desta pesquisa, a não ser que a intenção fosse discorrer sobre todas as áreas do conhecimento, numa linha antropológica do saber.

A motivação em explorar e resolver problemas não somente da natureza matemática como também do dia a dia, sempre esteve presente nos seres humanos, sendo assim, é inegável afirmar suas fortes relações com a Matemática e como tais conhecimentos, juntos, convergem para/na vida humana, de forma natural e efetiva, atuando no seu desenvolvimento em meio a uma sociedade constantemente em ascensão.

Em outras palavras, considera-se o ato de resolver problemas como uma atividade inerente e essencial da vida, assim como da matemática, ou seja, quando há a necessidade de entender e estar disposto para usar tais conhecimentos matemáticos na realidade, seja num contexto diário ou de trabalho.

Entretanto, seguindo a ideia de que um problema é uma determinada situação a ser resolvida e para isso deve-se encontrar alguma forma de solução que satisfaça a problemática e assim, considerando que essa mesma problemática possa ser um problema para nós, mas, possa não ser para o outro, surge então alguns questionamentos importantes para uma compreensão mais efetiva da Resolução de Problemas, são eles: *o que é um problema? O que é um problema matemático? O que define uma atividade de resolução de problemas? Ensino de Matemática e a resolução de problemas: como acontece? Quais foram os caminhos e quais são as perspectivas para a Resolução de Problemas no contexto da sala de aula de Matemática?*

Sobre o primeiro questionamento, Polya (1985), ressalta:

> Temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo. Quando temos um desejo que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos nos meios de satisfazê-lo e assim se põe um problema. A maior parte da nossa atividade pensante, que não seja simplesmente sonhar acordado, se ocupa daquilo que desejamos e dos meios para obtê-lo, isto é, de problemas (POLYA, 1985, p. 13).

Ao pensar no contexto da sala de aula, do conhecimento e do desenvolvimento da sociedade, que embasam o segundo e o terceiro questionamento, segundo Onuchic (1999), até meados do início do século XX, os problemas, apesar de se fazerem presentes nos currículos de matemática das escolas, eles não apresentavam, ainda, a visão da resolução de problemas como um caminho de ensinar matemática ou mesmo de se ensinar sobre resolver problemas.

Stanic e Kilpatrick (1989) também ressaltam:

> Os problemas ocupam um lugar central nos currículos desde a Antiguidade, mas a resolução de problemas não. Só *recentemente* apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece especial atenção (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 1).

Ou seja, os problemas matemáticos, de acordo com registros na história antiga, datam ser enfrentados desde as primeiras civilizações egípcias, chinesas e gregas que já se envolviam em questões, problemas e descobertas de seu próprio cotidiano, acarretando assim a relevância de discutir a resolução de problemas na matemática por meio de publicações entre os séculos XIX e meados do século XX, claro, que tais discussão versam cada período histórico e suas respectivas demandas no que se refere a ensinar e aprender matemática.

Stanic e Kilpatrck (1990), apontam que neste período ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, até incluir um exemplo com uma resolução realizada a partir da aplicação de alguma técnica específica, uma concepção limitada no que se refere à aprendizagem de resolução de problemas frente as diferentes abordagens utilizadas na atualidade (STANIC; KILPATRICK apud ONUCHIC, ALLEVATO, 2011).

Dando continuidade as variadas definições do que possa ser *problema*, Lester (1982), apresenta que uma maneira simples de se pensar num problema matemático é o considera-lo como uma situação qualquer que o indivíduo ou grupo que precisa resolver, mas não possui um caminho de imediato que o leve a situação.

Numa visão mais exploratória, no contexto da sala de aula, define-se um problema matemático como "qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de solução" (HIEBERT apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Corroborando com as definições elencadas acima e buscando responder o terceiro questionamento feito incialmente, destaca-se aqui uma concepção de Onuchic (1999), a qual tenta resumir as mais variadas concepções e definições sobre o que deva ser um problema e/ou problema matemático, no contexto da sala de aula, do ensino e da aprendizagem de matemática, afirmando suscintamente "problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver" (ONUCHIC, 1999, p.215).

Ao pensar na sala de aula, não é novidade que a dificuldade, para muitos, é sinônimo de "aprender" ou ter que "ensinar" matemática, entretanto asseverar a sua importância para entender o mundo e nele viver não é uma tarefa tão difícil. Desse modo, historicamente, o ensino de Matemática tem sido fortemente remodelado e pensado para que sua aprendizagem seja mais eficiente e utilitária. É preciso que muita gente saiba e saiba bem a Matemática, é necessário democratizar seu conhecimento, algo cada vez mais emergente.

Sobre esse ponto de vista, Onuchic (1999) relata que:

> Ao passar de uma sociedade rural, onde "poucos precisam conhecer matemática", para uma sociedade industrial onde mais gente "precisava aprender matemática" em razão da necessidade de técnicos especializados, daí para uma sociedade da informação onde a maioria das pessoas "precisa saber muita matemática" e, agora, caminhando para uma sociedade do conhecimento que exige de todos "saber muita matemática" é natural que o homem se tenha interessado em promover mudanças na forma como se ensina e como se aprende matemática (ONUCHIC, 1999, p. 200).

É nesse viés, de que coube a Matemática, dentre todas as ciências escolares, a responsabilidade de cumprir com o papel de fornecer conhecimentos e melhor preparar o cidadão para atuar na sociedade em mudança, mas que, pontuado por crenças de que a aprendizagem matemática não atinge a grande maioria da população, a Resolução de

Problemas, a partir da metade do século XX, surge como uma teoria que vai além das diferentes estratégias de ensino já existentes, para se ensinar matemática (MORAIS; ONUCHIC, 2014).

Segundo Morais e Onuchic (2014), o movimento da RP somente aparece no cenário mundial após algumas importantes mudanças no ensino da Matemática, tendo os Estados Unidos como o país que a consolidou como uma teoria.

Desse modo, para melhor compreender os caminhos, avanços e perspectivas para a Resolução de Problemas nos dias atuais, devemos voltar o nosso olhar, em especial, para as reformas curriculares ocorridas no século XX nesse país para que assim possa-se efetuar uma melhor compreensão de como se deu sua abrangência para os outros países do mundo, tomando como foco o Brasil.

3.2.2. A Resolução de Problemas no Ensino de Matemática

Em busca de uma compreensão efetiva de como a Resolução de Problemas se configurou como uma forma de se ensinar conceitos matemáticos ao longo dos anos e em aprofundar os princípios da abordagem que se apresenta como uma tenência atual no ensino de Matemática, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, traz-se uma síntese de algumas fases que a educação, em geral, passou durante mudanças radicais no currículo ocorridas em outros lugares do mundo, como os EUA, mas que exerceram forte influência na forma como trabalhar a matemática escolar em diferentes países.

Um momento de situar quais foram as diferentes práticas educacionais inovadoras para a Educação Matemática à luz das Teorias Psicológicas de Aprendizagem que vinham a surgir em cada período da história em destaque e seus impactos filosóficos e sociais no contexto da sala de aula de Matemática.

As pesquisadoras Lambdin e Walcott (2007), em um dos seus trabalhos sobre as mudanças ocorridas ao longo dos anos no currículo da matemática escolar e as conexões com as teorias da aprendizagem psicológica, tomando como referência as escolas americanas, apontam seis importantes fases que o ensino de matemática atravessou, a qual destaca-se as iniciativas de considerar a Resolução de Problemas como uma forma de se ensinar. São elas:

i. Exercício e prática;
ii. Aritmética significativa;
iii. Matemática Moderna;
iv. Volta às bases;

v. Resolução de problemas;

vi. Padrões e responsabilidade

A seguir, apresente-se um quadro elaborado pelas autoras que resume cada uma dessas fases, quanto as teorias psicológicas de aprendizagem, seu foco e seu procedimento na prática de ensino de Matemática ao longo dos anos no século XX.

Quadro 2: Relações entre as Fases da Educação Matemática e as Teorias de Aprendizagem

Fases	Principais Teorias e Teóricos	Foco	Como atingir
Exercício e prática (aprox. 1920 - 1930)	Coneccionismo e Associacionismo (Thorndike)	Facilidade com cálculo	• Rotina, memorização de fatos e algoritmos. • Quebrar todo o trabalho em série de pequenos passos
Aritmética significativa (aprox. 1930 - 1950s)	Teoria da Gestalt (Brownell, Wertheimer, van Engen, Fehr)	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas. Aplicações da matemática em problemas do mundo real.	• Ênfase nas relações matemáticas. • Aprendizagem incidental. • Abordagem de atividade orientada.
Matemática Moderna (aprox. 1960 - 1970s)	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural (ex. Brunner, Piaget, Dienes)	Compreensão da estrutura da disciplina.	• Estudo das estruturas matemáticas. • Currículo em espiral. • Aprendizagem por descoberta.
Volta às bases (aprox. 1970s)	(Retorno ao) coneccionismo.	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades.	• (Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e prática.
Resolução de problemas (aprox. 1980s)	Construtivismo, psicologia cognitiva e teoria sociocultural (Vygotsky)	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático.	• Retorno à aprendizagem por descoberta. • Aprendizagem através da resolução de problemas
Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1990 até o presente)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural vs renovada ênfase na psicologia experimental. (NCBL)	Guerras matemáticas: preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos vs	• NSF - desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados ao estudante vs foco na

		preocupação com a gestão dos sistemas educacionais.	preparação para os testes com expectativas específicas

Fonte: Traduzido de Lambdin e Walcott (2007, p. 5, apud Onuchic e Allevato, 2011, p.77).

Com isso, pode-se destacar que apesar da fase da Resolução de Problemas, segundo Lambdin e Walcott (2007), datar aproximadamente os anos de 1980, Onuchic e Allevato (2011) ressaltam que a pesquisa sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considera-la como uma forma de ensinar Matemática receberam atenção desde meados dos anos de 1940 através de Polya (1944), uma obra intitulada *"A Arte de Resolver Problema".* Um trabalho que se discute sobre a resolução de problemas e o ensino de matemática, porém em um viés que se preocupava em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas.

Ao relacionar este fato com as fases supracitadas de Lambdin e Walcott (2007), evidencia-se que o trabalho inicial de Polya (1944) se insere no período em que a ênfase do ensino de Matemática estava sendo colocada na aritmética significativa.

Anos depois, por volta dos anos sessenta e setenta do século XX, percebe-se que um ensino de matemática voltado a compreensão de ideias e habilidades aritméticas e ainda à aplicações da matemática em problemas do mundo real não era suficiente para as demandas sociais naquele momento. O mundo foi influenciado por recomendações de ensinar Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos, período conhecido como o Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Entretanto, o ensino com tratamento excessivamente abstrato, o despreparo dos professores para este trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, fadou-o ao fracasso desta fase na educação americana e dos outros países que a seguiram (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Num espaço tempo, entre as décadas de setenta e oitenta, recorrente do fracasso do MMM, houve nos EUA uma tentativa de retomar as práticas escolares à luz das teorias de aprendizagens das fases anteriores, como a *Aritmética significativa* e o *Exercício e Prática*, segundo Lambdin e Walcott (2007). Porém, com as mudanças sociais e educacionais do tempo, essa nova fase, nomeada por *Volta às bases*, também não teve sucesso, nem no próprio EUA, nem nos demais países.

Nesse momento crítico da educação americana, segundo Onuchic e Allevato (2011), no fim dos anos setenta, educadores matemáticos que não desistiram de ideais preconizados anteriormente, citadas no período Polya (1944), que acreditavam no potencial da Resolução de Problemas e visavam a um ensino e aprendizagem com compreensão e significado, continuaram trabalhando nessa busca.

Foi então que a Resolução de Problemas tomou novas proporções, nos EUA e consequentemente ao redor do mundo, a partir de uma publicação, editada em 1980, do National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática), que apresenta um documento intitulado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's* (Uma Agenda de Ação: Recomendações para a Matemática Escolar dos anos 80), com a indicação de que a "resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar" (ONUCHIC, 1999, p. 204).

Esse documento foi a mola propulsora para o engajamento de professores e pesquisadores em Educação Matemática se engajarem no trabalho com Resolução de Problemas no contexto da sala de aula de matemática. Uma abordagem nova e desafiante, mas que parecia ser promissora.

O documento *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's,* dentre as variadas ações expostas recomendava as seguintes ações a destacar:

- o currículo matemático deveria ser organizado ao redor da resolução de problemas;
- a definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática deveriam ser desenvolvidas e expandidas a partir de estratégias que destacassem o potencial das aplicações matemáticas;
- aos professores de matemática caberia a função de criar ambientes com ênfase na resolução de problemas (para que elas pudessem prosperar);
- materiais adequados ao ensino de resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade;
- para todos os níveis, os programas de matemática dos anos 80 deveriam envolver estudantes com resolução de problemas;
- pesquisadores e agências de fomento à pesquisa deveriam priorizar, nos anos 80, investigações em resolução de problemas.

Como exposto no quadro das fases das autoras Lambdin e Walcott (2007), esse momento em que a resolução de problemas se torna o foco do ensino de Matemática, se enquadra como a fase em que o foco são os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, baseado fortemente dos fundamentos de construtivismo e na teoria sociocultural, tendo Vygotsky como principal teórico.

Em síntese, uma outra maneira de visualizar as constantes mudanças que sofreu o ensino de Matemática no século XX é fazendo uma análise dos movimentos de *Reforma do Ensino de Matemática no século XX*, assim como é discutido por Onuchic (1999), da qual é relacionado com o trabalho das autoras Lambdin e Walcott (2007).

Quadro 3: Movimentos no Ensino de Matemática no Século XX – Relações entre os olhares de Onuchic (1999) e Lambdin e Walcott (2007)

Reformas (Onuchic, 1999)	**Foco do Movimento**	**Fases**
Ensino de matemática por repetição	Nesse movimento, o ensino de matemática foi marcado pela ideia de repetição, ou seja, a memorização das tabuadas foi um fato determinante que até hoje ainda há implicações. Pedagogicamente, o professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Avaliava-se o aluno através de testes nos quais ele deveria repetir o que o professor havia ensinado.	*Exercício e prática (aprox. 1920 - 1930)*
Ensino de matemática com compreensão	Anos depois, nasceu a ideia que os alunos deveriam aprender matemática com compreensão, ou seja, a memorização já não era permitida e o aluno deveria entender o que estava estudando. Segundo Onuchic (1999), como os professores não estavam preparados para trabalhar com essas ideias, a sala de aula era um treinamento de técnicas operatórias que eram aplicadas em problemas-padrão para aprender novos conteúdos.	*Aritmética significativa (aprox. 1930 - 1950s)*
Matemática Moderna	No início da década de 60 do século XX, houve o movimento da Matemática Moderna, onde o aluno deveria conhecer a matemática das estruturas algébricas e da teoria dos conjuntos, com ênfase na linguagem própria da matemática. Segundo Onuchic (1999), era um ensino que focava prioritariamente na formalização, sendo que professores e alunos não conseguiam perceber a importância dessa matemática no dia-a-dia, pois passou-se a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões prática	*Matemática Moderna (aprox. 1960 - 1970s)*

Ensino da Resolução de Problemas	Enfim, como proposta, inicialmente por impulso dos trabalhos de George Polya e posteriormente apoiada e difundida pelo NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) através do documento An Agenda for Action (NCTM, 1980), passamos a assumir o ensino da resolução de problemas. Momento em que é enfatizado que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar para a década de 1980.	*Resolução de problemas - Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1980 até o presente)*

Fonte: Elaborado pelo autor.

O Quadro 2, já mencionado, destaca algumas fases dessas mudanças no ensino de matemática no século XX, valendo ressaltar que a cada novo movimento descrito por Onuchic (1999), encontra-se convergências de bases epistemológicas da psicologia, quando colocado por Lambdin e Walcott (2007).

3.2.2.1.Abordagens da Resolução de Problemas

No final da década de 80, mesmo sendo o foco da matemática escolar o ensino e parecendo promissor, as coisas não iam tão bem. Apesar de que a Resolução de Problemas tenha ganhado espaço como um ponto central no ensino de matemática, promovendo ações inovadoras no currículo, nos materiais didáticos, na prática educativa de professores e alunos e em todo o contexto da sala de aula, ainda haviam problemáticas a serem resolvidas.

Onuchic e Allevato (2011), afirmam que:

> Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. Entretanto, não havia coerência e clareza na direção necessária para se atingir bons resultados com o ensino de Matemática apoiado na resolução de problemas; ou seja, não havia concordância quanto à forma pela qual esse objetivo seria alcançado (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Segundo Onuchic (1999), mesmo com a como recomendação do An Agenda for Action (NCTM, 1980), a qual enfatizava a “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”, os profissionais e grupos da educação apresentavam diferentes concepções sobre o que seria trabalhar resolução de problemas na sala de aula de matemática. Havendo assim, no decorrer da década de 80, uma alta produção de material com vistas a apoiar o professor em sua prática na sala de aula, que iam de coleções de problemas a serem utilizados até estratégias para proceder à avaliação sob a perspectiva da Resolução de Problemas.

Dentre esses materiais, Schroeder e Lester (1989, p. 31), em uma obra intitulada *Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving*, apresentam três maneiras de abordar a resolução de problemas que podem ajudar a entender e a refletir sobre essas diferenças de entendimento ou de abordagem que emergiam, com maior ou menor intensidade, no contexto do ensino, são elas:

- Ensinar **sobre** resolução de problemas;
- Ensinar **para** resolver problemas;
- Ensinar matemática **através** da Resolução de Problemas

Uma maneira simples de entender essas abordagens postas por Schroeder e Lester (1989), é pensar que o ensino *sobre* resolução de problemas advém de seguidores de Polya (1944), com algumas variações, acreditavam em teorizar sobre esse tema, ou seja, que era necessário ensinar estratégias e métodos para resolver problemas.

Por outro lado, haviam aqueles que interpretavam a resolução de problemas no ensino de matemática no sentido de que o professor deveria apresentar a matemática formal para, depois, oferecer aos alunos o problema como aplicação dessa matemática construída, acreditando que deveriam ensinar matemática *para* resolver problemas.

No ensino de Matemática *através* da Resolução de Problemas, o ato de resolver problemas não é considerado como meio para se ensinar estratégias ou como um fim de uma atividade de ensino, mas sim como um início, o ponto de partida. Nesta abordagem, o ensino inicia com a apresentação de uma situação problema que traz em si aspectos chave do tema que se deseja ensinar e no decorrer da resolução, com emprego de técnicas matemáticas se busca a construção de respostas razoáveis. O ensino de matemática se apresenta fluindo do concreto, situação-problema do mundo real, para o abstrato, representação simbólica do problema e a manipulação adequada destes símbolos (SCHROEDER; LESTER, 1989).

Sendo assim, vale destacar que, ainda no final dos anos oitenta e durante os anos noventa, foi observado que embora muitas questões e dúvidas da prática docente em relação a resolução de problemas fossem discutidas por pesquisadores da época, houve um aumento notório de pessoas que sabiam resolver problemas e teorizar sobre as abordagens da resolução de problemas, entretanto não tinham um equivalente crescimento entre os estudantes que sabiam matemática – conceitos matemáticos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2011), destaca o trabalho realizado pelo NCTM, a partir do final dos anos oitenta e durante os anos noventa, com a finalidade de auxiliar os professores e destacar aspectos considerados essenciais para o ensino de Matemática. O NCTM, em busca de dar mais eficácia à reforma iniciada com a Agenda, edita mais três publicações:

i. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathemathics, em 1989;
ii. Professional Standards for Teaching Mathematics, em 1991 e;
iii. Assessment Standards for School Mathematics, em 1995.

Essa sequência de publicações, além de atestar o esforço do NCTM na ascensão desse novo movimento, culminou com a criação e publicação do Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000), ou também conhecido por Standards 2000. Um documento que apresenta os princípios e padrões para a matemática escolar nos EUA e que repercutiu em outros países, como referência nos currículos e práticas docentes no ensino de Matemática. Tais princípios e padrões são enunciados e organizados no quadro a seguir:

Quadro 4: Princípios e Padrões segundo os Standards 2000 – NCTM

Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000)		
Princípios	**Padrões de Conteúdo**	**Padrões de Procedimento**
Equidade	Números e Operações	**Resolução de Problemas**
Currículo	Álgebra	Raciocínio e Prova
Ensino	Geometria	Comunicações
Aprendizagem	Medida	Conexões
Avaliação	Análise de Dados e Probabilidade	Representação
Tecnologia	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

É nesse momento que é possível retomar as fases dos movimentos de reforma no ensino de Matemática, proposto por Lambdin e Walcott (2007), onde evidencia-se a à passagem da penúltima fase, onde é destacada a aprendizagem através da resolução de problemas, para a última fase, em que se apresenta a tendência ao desenvolvimento de currículos baseados em padrões, fazendo-se presente até os dias atuais.

O que traz de mais espacial a este fato é o que Onuchic e Allevato (2011) apontam sobre este momento da história, pois segundo as pesquisadoras foi a partir dos Standards 2000 "que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 79-80).

Para Morais e Onuchic (2014), a Metodologia de Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas amplia as três abordagens apresentadas por Schroeder e Lester (1989), pois esse trabalho metodológico se apoia na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino-aprendizagem é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática e de que o ensino pode ser feito por meio (durante) da resolução de problemas.

Na busca de levar em consideração a natureza da Resolução de Problemas nas mais variadas áreas do mundo atual e em seu contexto da sala de aula de matemática, enquanto suas abordagens, e, assim, modernizar perspectivas sobre o ensino e aprendizagem de Matemática e do conteúdo matemático através da Resolução de Problemas, retoma-se, de forma mais enfática as abordagens Schroeder e Lester (1989) e suas implicações na Resolução de Problemas como Metodologia.

Quadro 5: Abordagens da Resolução de Problemas no Ensino de Matemática

ENSINAR		
SOBRE	PARA	ATRAVÉS
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS		
Para *ensinar sobre resolução de problemas*, deve-se teorizar sobre o assunto. O professor que ensina sobre resolução de problemas realça o modelo de Resolução de Problemas de Polya (1994), enfocado nas quatro fases descritas pelo autor na obra How to solve it, são elas: compreender o problema; estabelecer um plano; executar o	Ao *ensinar para resolver problemas*, o professor deve concentrar-se nas formas como a matemática é ensinada e como pode ser aplicada. Devem-se evidenciar estratégias e usar o conhecimento adquirido pelo aluno anteriormente na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. É importante saber usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas.	Para *ensinar através da resolução de problemas* o professor utiliza um problema como ponto de partida e um meio para ensinar matemática. Nesse caso, temos a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. Nessa abordagem o objetivo primeiro é apresentar para os

plano; e fazer um retrospecto a fim de validar a solução encontrada.		alunos problemas que gerarão novos conceitos ou conteúdos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Focando na terceira e última abordagem, traz-se uma fala de Onuchic e Allevato (2004, p. 221), na qual diz:

> Ensinar matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que a mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase do "durante", os alunos trabalham e o professor observa e avalia o trabalho. Na terceira, "depois", o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-los e conduz a discussão enquanto os alunos justificam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 221).

Internalizar a discussão entre essas três formas de abordar a Resolução de Problemas em busca de determinar um ponto central para uma delas e elencar como a mais utilizada ou a mais correta no ensino de matemática não é a intenção deste trabalho de pesquisa, tendo em vista de há a mesma visão que Schroeder e Lester (apud ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 216), quando afirmam que essas três abordagens podem ser classificadas e concebidas separadamente, porém, todas elas podem acontecer, naturalmente ou não, no ensino, inclusive a combinação de todas elas juntas.

O fato é que ao considerar o ensino *através* da Resolução de Problemas, enfatiza-se que no decurso do processo ambas, Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente de modo continuo e mutuamente construtivo.

Segundo Morais e Onuchic (2014), após a consolidação dessa teoria ao decorrer da década de 90 nos EUA com a produção de vários trabalhos pelo NCTM, como já supracitado, e da publicação dos *Standards* 2000 (NCTM, 2000), O Brasil começa a acompanhar esse movimento e renova suas orientações curriculares (Brasil, 1997; 1998; 1999), na qual a resolução de problemas também é apontada como o ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula, o que vai de encontro com os fundamentos da concepção do ensino de Matemática *através* da Resolução de Problemas.

Por ser essa a concepção mais recomendada pelas principais organizações de orientações curriculares e de ensino no início dos anos 2000, o NCTM, nos EUA, efetiva mais duas publicações na linha do "através" da Resolução de Problemas (Lester Jr, 2003; Schoen, 2003), o que levou a fortalecer ainda mais sua relevante influência, além da matemática escolar, no âmbito da pesquisa e da formação de professores, ressaltando seus aspectos que vão além do ensino e da aprendizagem, mas também da avaliação.

3.2.3 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Toma-se como ponto central deste tópico a continuidade das pesquisas e os novos conhecimentos que foram construídos sobre a Resolução de Problemas na Educação Matemática, no Brasil. O Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produção científica na linha de Resolução de Problemas e de maior produtividade atualmente.

Em estreita colaboração, o Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática – GPRPEM, que é um Grupo de Pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, UEPB – Campina Grande e do Centro de Ciências Humanas e Exatas da UEPB – Monteiro, Paraíba, Brasil, se dedica ao ensino e pesquisa na graduação e pós-graduação da UEPB. Sua principal área de atuação é na Resolução de Problemas e Ensino e Aprendizagem de Matemática. Nessa linha, os principais trabalhos do grupo relacionam-se com Modelização Matemática, Modelagem, Educação Estatística, Inclusão e Formação de Professores.

O presente trabalho, como fruto dos estudos e pesquisas sobre Resolução de Problemas, embasado e construído frente ao GPRPEM, adota a *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas* em seus principais fundamentos teóricos e práticos para a concretização do uso da resolução de problemas no ensino de matemática.

É importante ressaltar que pensar no uso da Resolução de Problemas como uma metodologia no ensino de Matemática, mesmo com todo avanço diante dos movimentos educacionais ao longo da história e do vasto acervo que há sobre seus pressupostos na literatura, é importante refletir previamente sobre quais motivos o professor/pesquisador pode usar a RP como uma alternativa metodológica.

Frente a essa indagação, Van de Walle (2009) reflete em seu trabalho algumas características relevantes que empoderam o uso da resolução de problemas na sala de aula de Matemática: Em síntese, tem-se que:

i. a resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido em função do fortalecimento da autoestima e da autoconfiança que florescem quando ocorre por parte dos alunos o desenvolvimento da compreensão durante a resolução de um problema;
ii. a resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos em virtude de oportunizar a cada aluno abordar o problema sob seu próprio ponto de vista e estratégias, bem como incrementa-las a partir das discussões com as estratégias dos demais. Considera fortemente a diversidade de ideias que constitui a realidade da sala de aula; a resolução de problemas concentra a atenção sobre as ideias
iii. e em dar sentido às mesmas, propiciando uma integração entre as ideais que o aluno reflete durante o processo de resolução com as ideias geras que ele possui, indo além das instruções ou explicações oferecidas pelo professor;
iv. a resolução de problemas fornece dados contínuos para avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a obterem bom desempenho e manter os pais informados, uma vez que os alunos fornecerão aos professores informações valiosas no decorrer do processo de resolução do problema por meio das discussões, representações pictóricas, defesa de seus argumentos e ao relatar as suas estratégias e métodos;
v. uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina ao tornar a tarefa de aprendizagem envolvente, pois resolver problemas permite aos alunos uma ação integrada e com sentido, em contraposição a resistência às instruções do professor, quer seja por não as compreender ou por considera-las

Onuchic (2005), ainda corrobora que ao adotar tarefas e problemas, pode-se incentivar o engajamento dos alunos na prática de pensar sobre a matemática que lhes é importante aprender, de modo que o processo de resolver problemas estará completamente entrelaçado com a aprendizagem, criando condições para que os alunos aprendam matemática, fazendo matemática.

Nesse sentido, ao pensar na sala de aula, no professor, nos alunos e nas múltiplas possibilidades de adotar uma metodologia que atenda ao público inserido e aos objetivos propostos, nasce então três aspectos essenciais a serem considerados nesse processo: o ensino; a aprendizagem; e a avaliação.

É comum pensar nesses três aspectos, ensino, aprendizagem e avaliação como três elementos distintos, que no contexto da sala de aula eles não necessariamente ocorrem ao mesmo tempo ou como decorrência um do outro. Porém, com as muitas reformas no ensino de Matemática ocorridas no século XX, passou a entender que o ensino e aprendizagem deveriam ocorrer simultaneamente. O que levou pesquisadores a utilizarem o termo, palavra composta, Ensino-Aprendizagem.

Uma das pesquisadoras percursoras da RP no Brasil, falando sobre esse momento de adoção ao termo, ressalta:

> Adotando este objetivo, nosso grupo de trabalho e estudo – GTERP – passou a utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem. As comunidades de pesquisa em Educação Matemática se interessaram em criar novos produtos com a intenção de melhorar o ensino e a aprendizagem. Esses produtos, que podem ser novos materiais educativos, envolvem um processo de engenharia, de inventar partes e colocá-las juntas para formar algo novo. Assim, qualquer produto novo criado requer avaliação (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 80).

Com isso, logo depois o conceito de avaliação começou a ser repensado e novas configurações foram tomadas sobre este elemento no que diz respeito ao ensino-aprendizagem na sala de aula. Segundo Onuchic e Allevato (2011), houve a necessidade de adotar alguns princípios no processo de avaliação, considerada como avaliação contínua e formativa, esta passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos a apenas um julgamento dos resultados obtidos com esses processos. Ou seja, além de ser apenas uma mera atividade quantitativa, passou-se a ser qualitativa e com isso, percebeu-se que no ensino-aprendizagem a avaliação é um componente extremamente importante

Para uma melhor compreensão desses aspectos de ensino, aprendizagem e avaliação Pironel e Onuchic (2016) defendem que na sala de aula de Matemática, por exemplo:

1. Pode ocorrer ensino e aprendizagem sem que exista uma avaliação desse processo;
2. Pode haver ensino e avaliação sem que tenha havido aprendizagem; e

3. Pode haver aprendizagem e avaliação dessa aprendizagem, sem que ela tenha acontecido a partir do ensino;

Com isso, como ressalta os autores, compreende-se a necessidade de que os processos de ensino, aprendizagem e avaliação ocorram integradamente quando se pensa na sala de aula de Matemática. Mas afinal, o que seria integrar o ensino, a aprendizagem e a avaliação? Como ocorre?

Com as novas proporções que estava tomando o conceito de avaliação em âmbito educacional e considerando o efetivo trabalho e estudo na concepção de se ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas, o GTERP passou a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, dentro da sala de aula em trabalho dinâmico, passado a entender como uma metodologia. Encara-se esse processo de trabalho como uma forma Pós-Polya de ver Resolução de Problemas.

Segundo as autoras Onuchic e Allevato (2011):

> Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, **enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos**. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. **Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático**, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário - **grifo do autor** (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 80).

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas visa o problema como o ponto de partida de todo o processo metodológico. Ensinar matemática, na e além da sala de aula, através da Resolução de Problemas, promovem os alunos fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (HUANCA, 2006).

Além disso, as autoras ainda afirmam:

> Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto da Resolução de Problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experiências em Resolução de Problemas, e o trabalho de ensino de Matemática deve acontecer num ambiente de

> investigação orientada em resolução de problemas. Em nossa visão, a compreensão de Matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando o aluno é capaz de: relacionar uma determinada ideia Matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos, relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele, construir relações entre as várias ideias Matemáticas contidas num problema (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 222).

O *problema*, por sua vez, é novamente enfatizado conforme uma fala de Van de Walle (2001), quando defende que para trabalhar com problemas como meio de se ensinar Matemática há a necessidade que os praticantes tenham clareza do que é um problema. Neste trabalho, considera-se problema como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Nesse sentido, é importante salientar que por mais que seja tomado essa definição para problema, não deve ser esquecido que há diversos autores e trabalhos já publicados que apresentam muitos conceitos de problema, porém, normalmente é mais utilizado uma adjetivação, da qual pode ser refletindo sobre diferentes tipos de problema, cada um com suas qualidades específicas, como: "problemas de fixação, exercícios, problemas abertos, problemas fechados, problemas padrão, problemas rotineiros e não rotineiros, quebra-cabeças, desafios, entre outros" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Como dito, segundo as autoras, são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias, principalmente para a forma como o professor vai utilizar no processo de ensino-aprendizagem-avaliação.

3.2.3.1 Como e Por que utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Inicialmente, versa-se que o trabalho em sala de aula utilizando-se da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática se mostra realmente eficaz quando se é fundamentando bem acerca de seus pressupostos teóricos e práticos, além disso, refletir sobre seus possíveis impactos, negativos ou positivos, no contexto em que se decida implementa-la, em qualquer nível de ensino da Educação Básica e Superior, é primordial.

No que se refere ao ensino de Matemática, Van de Walle (2001) já recomendava fortemente que o uso da RP em sala de aula deve ser a primeira estratégia de ensino a ser pensada. Allevato e Onuchic (2014), por sua vez, consideram-na como o "coração" da atividade matemática, ou seja, a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e consequentemente para a proposição e resolução de problemas.

Ademais, a Resolução de Problemas tem um constante destaque diante as recomendações dos principais documentos que legislam a educação brasileira e internacional no mundo, tomando como exemplo as recomendações do NCTM e as de orientações nacionais oficiais (Brasil, 1997; 1998; 1999; e 2018). Uma das principais convergências nesses documentos é que com essa metodologia, conceitos e habilidades são aprendidas no decurso da resolução de problemas, o que promove aos alunos o desenvolvimento de processos mais sofisticados de pensamento matemático e no trabalho de ensino que acontece em um ambiente de constante investigação de descobertas orientada (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Ao asseverar as declarações supracitadas, toma-se como síntese de tais razões as seguintes colocações sobre o porquê de usar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática.

> - Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido.
> - Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
> - Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
> - Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
> - Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
> - A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.
>
> (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Já ao pensar na implementação dessa metodologia em sala de aula, segundo Onuchic e Allevato (2014), pesquisadores e educadores matemáticos de todo mundo (Van de Walle, 2001; Shimizu, 2003; Krulik; Rudnick, 2005; Onuchic; Allevato, 2011), já vinham trabalhando sob tentativas de sugerir maneiras efetivas de colocar em prática a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução, pois mesmo com uma quantidade considerável de documentos, pesquisas e orientações, ainda sim haviam dúvidas sobre sua prática cotidiana acerca de seus viés teórico.

Onuchic e Allevato (2011), chama atenção ao afirmar que esse trabalho exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes em suas práticas em sala de aula, tendo em vista que: (1) o professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir; (2) o professor precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir; e (3) os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Segundo as pesquisadoras, esses atos exigem de ambos, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir.

Nesse sentido, percebe-se que não há uma padronização de como se trabalhar resolução de problemas em sala de aula, como já dito, é um trabalho dinâmico, fluído, subjetivo, possui características de uma arte. Entretanto, não se pode deixar de considerar que é um trabalho apoiado em fundamentos claros e que mesmo que tenha uma abordagem renovadora ele deve ser orientado.

Onuchic (1999), com o intuito de contribuir com os professores a empregar essa metodologia em suas aulas, no ano de 1998, com a participação de 45 professores participantes de um Programa de Educação Continuada, criou um Roteiro de Atividades (1º roteiro), que permitia fazer uso dessa metodologia, promover mais entusiasmo em suas salas de aula e fazer com que os alunos vissem a Matemática com um olhar mais confiante. Esta primeira versão do roteiro para implementação de um trabalho através da resolução de problemas era formada pelas seguintes etapas: (1) formar grupos e entregar uma atividade; (2) o papel do professor; (3) registrar os resultados na lousa; (4) realizar uma plenária; analisar os resultados; (5) buscar um consenso; e (6) fazer a formalização (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Posteriormente, Onuchic e Allevato (2014) em busca de atender as novas demandas do que se refere ao trabalho em sala de aula utilizando-se da Metodologia mencionada, propõem uma nova proposta mais atual, a qual indicam atividades que devem ser organizadas, agora, em dez etapas, são elas:

Figura 8: Roteiro de Atividades da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino de Matemática segundo Onuchic e Allevato (2014).

Roteiro de Atividades no trabalho da Resolução de Problemas como Metodologia (Onuchic; Allevato, 2014)	
Atividades	***Enfoque***
Preparação do problema	Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo

	matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
Leitura individual	Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
Leitura em conjunto	Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. • Se houver dificuldade na leitura do texto. O próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema. • Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
Resolução do problema	A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, O problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
Observar e incentivar	Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho
Registro das resoluções na lousa	Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
Plenária	Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

Formalização do conteúdo	Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal organizada e estruturada em linguagem matemática padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto
Proposição e resolução de novos problemas	Após a etapa de formalização, é o momento de ser fomentado a construção de novos problemas relacionados ao problema gerador, propostos pelos alunos, possibilitando analisar se os elementos essenciais do conteúdo matemático propostos inicialmente foram compreendidos e consolidados através das atividades anteriores e ir além deles.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em Onuchic e Allevato (2014), em sintonia com as orientações de Krulik e Rudnick (2005), foi inserido uma nova atividade ao roteiro de atividades essenciais da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, a *proposição e resolução de novos problemas*, que ocorre após a etapa de formalização, onde novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos pelos alunos. Um momento rico que é possível analisar se os elementos essenciais do conteúdo matemático proposto foram compreendidos e consolidados através das atividades anteriores. Além disso, é um momento exploratório para aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas.

Considera-se uma visão importante, posta por Onuchic e Allevato (2014), sobre os problemas nesse processo, é que a forma como o aluno interage, seja entendendo, não conseguindo interpretar, ou mesmo, não entendendo as ideias matemáticas presentes no problema, é absolutamente normal e promissor, pois significa que há compreensão, pois de acordo com as autoras, compressão de Matemática, por parte dos alunos, evolve a ideia de relacionar, por essência. Ou seja, relacionar-se com o problema, com o processo.

Desse modo, salienta-se que:

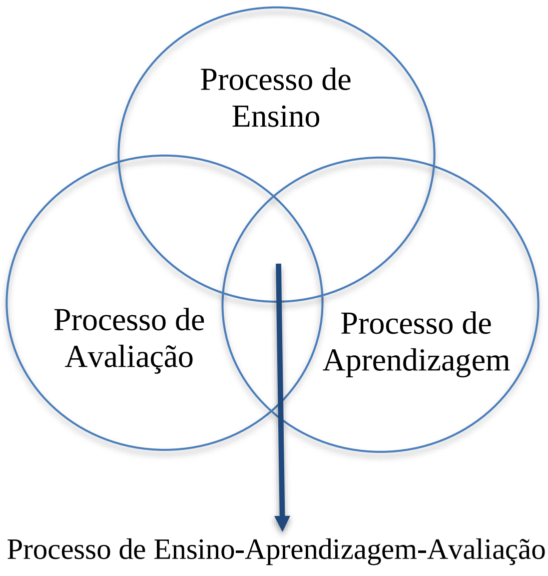
> Nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser

> desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema (ALLEVATO; ONUCHIC, 2011, p. 85).

Seguindo, em relação a avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, Pironel e Vallilo (2017), ressaltam que a metodologia, em si, já tem procurado, há algum tempo, desenvolver e implementar o uso da avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem numa perspectiva de melhorar o desenvolvimento do estudante e lhe garantir sucesso em matemática e para auxilia-lo em seus desenvolvimentos crítico e criativo.

Assim como a figura a seguir tenta ilustrar, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas propõe que a avaliação deva acontecer durante todo o desenvolvimento da atividade proposta pelo professor.

Figura 9: Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação.



Fonte: (PIRONEL; ONUCHIC, 2017).

É importante enfatizar que no contexto da prática do professor de Matemática quando utiliza a referida Metodologia, o processo de avaliação não acontece apenas no decurso da atividade, mas, deve ser iniciado antes do início da aula proposta, ou seja, quando o professor vai elaborar o problema gerador ou mesmo utilizar um problema já existente. Pois, segundo Pironel e Vallilo (2017), o professor precisa saber, de modo bastante claro, quando avaliar, o que avaliar, como avaliar e porque avaliar.

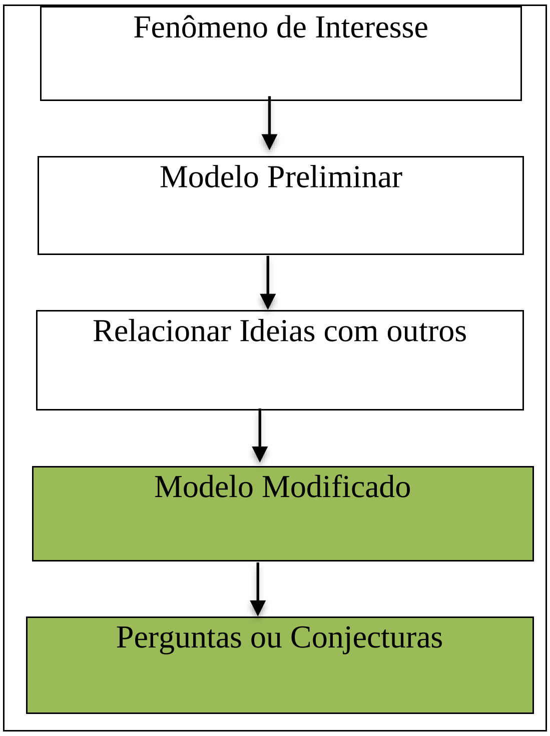
De modo geral, não há dúvidas de que educadores matemáticos de todo o mundo têm se preocupado em melhor entender e promover o ensino e a aprendizagem de Matemática, em todos os níveis de ensino, e com a Resolução de Problemas tem um papel essencial e intrínseco nesse processo.

A metodologia de ensino aqui apresentada constitui uma forma de trabalho, em sala de aula, a partir de problemas geradores. Valendo-se da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a construção de conhecimentos, relacionados a conceitos e conteúdos matemáticos, se realiza de forma mais significativa e efetiva pelos alunos.

4. O MODELO MODIFICADO E A PERGUNTA NORTEADORA DA PESQUISA

Este capítulo retoma as atividades de pesquisa do 1º Bloco do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic (2014), momento este destinado para refletir sobre o estudo bibliográfico realizado no capítulo anterior da fundamentação teórica, para que a partir disso possa-se dar um novo olhar para a pesquisa à luz do que outros pesquisadores já vêm discutindo na literatura. Nesse sentido, seguindo as atividades, apresenta-se:

Figura 10: 1º Bloco do Fluxograma de Romberg-Onuchic (Modelo Modificado e a Conjectura de Pesquisa).



Fonte: (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

Em decorrência do aprofundamento teórico realizado no Capítulo 3 acerca das variáveis-chave que envolvem o nosso fenômeno de interesse, definidas na página 40, que são as temáticas tomadas como relevantes a se estudar, foi possível compreender e definir melhor a presente pesquisa. Nesse sentido, como resultado desse estudo sentiu-se a necessidade de elaborar um novo modelo que, segundo Onuchic e Allevato (2014), é uma evolução do Modelo Preliminar, que tem como objetivo guiar novos caminhos para efetivação da pesquisa. Portanto, apoiado na referida investigação bibliográfica, denomina-se a este novo modelo, o Modelo Modificado, seguindo da Pergunta Norteadora da Pesquisa.

4.1 A INFLUÊNCIA DA FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA NA NOSSA PESQUISA

Dado o Fenômeno de Interesse desse trabalho, Equações Diferenciais Ordinárias através da Resolução de Problemas, e a construção do Modelo Preliminar, no contexto da metodologia científica de Romberg-Onuchic (2014), foram identificados outros trabalhos que exploram e discutem as seguintes temáticas: Formação Inicial de Professores de Matemática, Equações Diferenciais Ordinárias, e Resolução de Problemas; que serviram para realizar uma revisão bibliográfica e, consequentemente, a construção de uma fundamentação teórica adequada ao objeto de estudo.

O Capítulo 3 teve início com algumas considerações históricas sobre o surgimento das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) como um tópico matemático nos estudos do Cálculo Diferencial e Integral em cursos do Ensino Superior. Em seguida, foram discutidos aspectos conceituais e didáticos da disciplina de EDO que são previstos em Cursos de Ciências Exatas, Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Percebeu-se que os aspectos conceituais se mostraram importantes para a elaboração do projeto de ensino dessa pesquisa. Enquanto os aspectos didáticos revelaram direções que podem ser tomadas na prática investigativa acerca das concepções metodológicas e estratégicas dessa disciplina no contexto da sala de aula, explicitando desafios, dificuldades e possibilidades para seu ensino e aprendizagem.

Ainda seguindo temática do ensino das EDO, buscou-se situar o objeto de estudo dessa pesquisa e destacar sua real importância e contribuição para a comunidade acadêmica, na qual foi realizado um levantamento bibliográfico, do tipo estado da arte, de pesquisas desenvolvidas e finalizadas nos últimos vinte anos no Brasil. Neste estudo não foi identificado nenhum trabalho que apresente como tema o ensino das EDO na perspectiva da Resolução de Problemas para alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Essa constatação se mostra importante, pois garante a originalidade e o aspecto inovador desta dissertação.

Desse modo, considerando a necessidade de se pesquisar sobre a Resolução de Problemas, foi realizado uma discussão teórica que se apresentou como a força propulsora da construção desse trabalho. Sendo assim, contemplando o período histórico analisado, foi possível compreender como se desenvolveu a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino dentro do contexto da Educação Matemática, a partir do século XIX, explanando caminhos, avanços e perspectivas sobre o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Por conseguinte, foi analisada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e suas relações com o contexto da pesquisa, da qual demonstrou-se a necessidade de pensar em adaptações que adequassem as condições da atualidade desencadeadas pela pandemia.

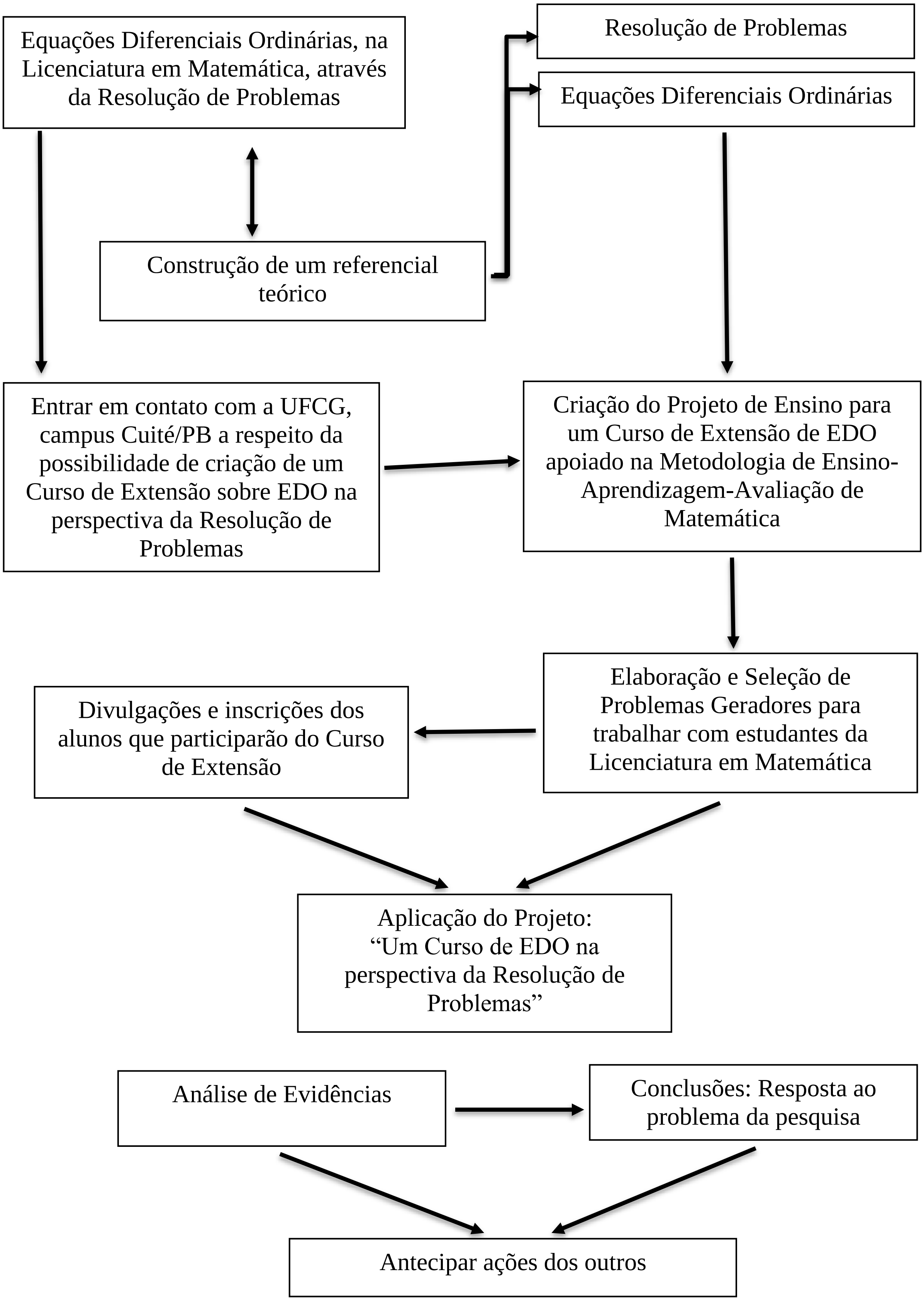
4.2 O MODELO MODIFICADO

Assim como já foi exposto anteriormente, o Modelo Preliminar apresenta a nossa primeira planificação do que se pretendeu trabalhar, sem nem mesmo que as investigações tivessem acontecido. Como afirma Romberg (2007), o Modelo Preliminar se encara como uma espinha dorsal para um Modelo Modificado, ou seja, apenas um plano de trabalho prévio à luz do que foi elencado, inicialmente, pelo pesquisador. Onuchic e Allevato (2014), chamam a atenção para essa atividade de pesquisa, pois, segundo as autoras o Modelo Modificado:

> apresenta-se como uma nova atividade no fluxograma de Romberg (2007) e se faz importante a partir do momento que, após “ouvir os outros”, o pesquisador percebe que seu Modelo Preliminar encontra-se defasado ou possuir poucas informações para ajudá-lo a formular uma Pergunta de Pesquisa. Desta forma o Modelo Modificado da pesquisa, em geral, é mais abrangente do que o inicialmente proposto, e deve conduzir o pesquisador à sua Pergunta ou Conjectura de Pesquisa (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 62).

Sendo assim, para a constituição do Modelo Modificado deste trabalho foi considerado as influências da fundamentação teórica na nossa pesquisa, para eu assim fosse reelaborado nosso projeto de trabalho de pesquisa, assim como se apresenta a seguir.

Figura 11: Modelo Modificado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 A PERGUNTA NORTEADORA DE PESQUISA

A natureza desta pesquisa é de cunho qualitativo. Para a coleta e análise dos dados produzidos durante a pesquisa de campo serão utilizados os pressupostos de Ludke e André (2018) (Fase Exploratória, coleta sistemática de informações e análise sistemática das informações).

Entretanto, vale ressaltar que para realizar esse trabalho será necessário, primeiramente, determinar qual é o problema norteador desta pesquisa, pois, como afirma Goldenberg (2004), só se escolhe o caminho quando se sabe aonde quer chegar. Nesse sentido, toma-se a Pergunta Norteadora como um ponto de partida para a escolha das Estratégias e Procedimentos deste estudo.

Sendo assim, considerando o Fenômeno de Interesse desse trabalho, a influência dos outros discutidas na fundamentação teórica e a construção do Modelo Modificado, desencadeou-se a proposta de uma Pergunta Norteadora de pesquisa, que é:

Como, utilizando a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, durante um Curso de Extensão, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática da UFCG/CES a (re) construir conhecimentos sobre as Equações Diferenciais Ordinárias?

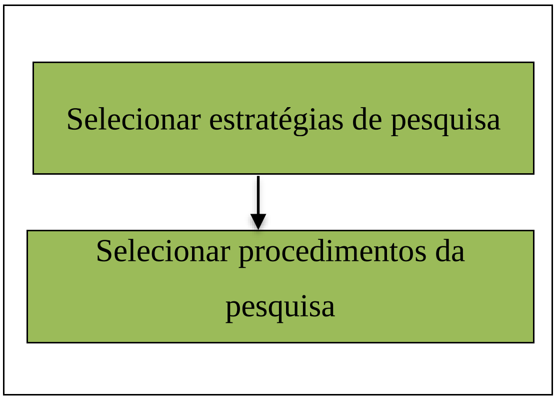
Para responder essa pergunta, a nossa produção inicial de dados acontecerá por meio de um questionário diagnóstico. Durante a aplicação dos problemas, o pesquisador registrara em seu diário de campo suas observações e analise. As aulas remotas serão aplicadas por meio da plataforma Google Meet, na qual serão gravadas para análise posterior. A fim de cada encontro do curso, o aluno participante registrará suas considerações no documento Google, disponível no Google Sala de Aula.

Também, o pesquisador assumirá o papel de observador-participante, dessa forma, procurará uma abordagem que será significativa para o futuro professor (participante da pesquisa), buscando sempre incentivar a sua autonomia durante o curso. Para isso, utilizaremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014), adaptado para o Ensino Remoto.

5 ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS - 2º BLOCO DE ROMBERG

Ao encerrar o Primeiro Bloco de Romberg-Onuchic com a formulação do Modelo Modificado, apresentado na página 107, e a definição da questão que norteia esta pesquisa, este capítulo consiste em apresentar o Segundo Bloco – estratégias e procedimentos, e posteriormente colocar em prática a pesquisa de campo com as respectivas coleta e análise de evidências.

Figura 122: 2º Bloco do Fluxograma de Romberg-Onuchic (Estratégias e Procedimentos da Pesquisa).



Fonte: (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

Segundo Onuchic e Noguti (2014), essa fase da pesquisa é complexa e deve ser desenvolvida cuidadosamente, pois, pensar em selecionar quais estratégias e procedimentos utilizar é o que define o bom andamento da investigação. Em outras palavras, este momento significa descobrir "o que fazer" e "como agir" para atender a pergunta norteadora da pesquisa.

Nesse sentido, foi proposto para responder a nossa pergunta de pesquisa, identificada na página 108, elaborar um plano de ação. Este plano é focado no Modelo Modificado que deve contemplar as variáveis-chave que nele aparece. Para isso, no Segundo Bloco, Romberg-Onuchic apresenta as atividades 5 e 6, e defende que o pesquisador deve primeiramente planejar uma Estratégia Geral (o que fazer? - Atividade 5) e correspondentemente um Procedimento Geral (como agir? - Atividade 6) e, como extensão disso, também são planejadas as Estratégias e Procedimentos Auxiliares que darão um delineamento dos caminhos de investigação para que se obtenha sucesso no desenvolvimento deste trabalho.

Para Romberg (2007), a decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona; da visão de mundo na qual as questões estão situadas; do Modelo Preliminar que foi construído a fim de explicar o Fenômeno de Interesse e da Conjectura ou

Pergunta que se faz sobre a evidência necessária buscada. Desse modo, para responder à pergunta que foi levantada, evidências deverão ser coletadas. O autor ainda faz uma advertência em relação aos Procedimentos Auxiliares, dizendo que há uma variedade deles que se poderia seguir para diferentes tipos de questões, orientando assim selecionar de forma cuidadosa tais procedimentos, pois são eles que esclarecerão as questões elencadas para a pesquisa.

Nessa perspectiva, por se tratar de uma pesquisa que tem como foco o ensino das EDO, com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campus Cuité/PB, a mesma se constitui em uma abordagem qualitativa. Sendo assim, para a coleta de dados, utilizamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tendo como procedimentos metodológicos: observação, material escrito/digitalizados pelos alunos, questionários utilizando o Google Forms, fotos, gravações pela plataforma Zoom Meetings e diário de campo. Nesse contexto, o professor-pesquisador atua como observador e atuante no ambiente a ser pesquisado (Curso de Extensão), a fim de compreendê-lo e, sobretudo, tentar modificá-lo em direções que permitam a melhoria da prática em sala de aula.

Em seguida, apresentadas as Estratégias e Procedimentos da pesquisa, se sucedem os demais passos da Metodologia de Romberg-Onuchic, Selecionar e Interpretar Evidências, resultantes dessa aplicação. E ainda, no Terceiro Bloco, após o Procedimento Geral ser posto em ação, os resultados obtidos serão relatados. Após essas ações, com resultados de uma particular investigação, supõem-se que cada investigador estará interessado no que acontecerá depois e, assim, deverá antecipar ações posteriores. Como diz Romberg (2007), coisas que vierem antes e coisas que vêm após qualquer estudo particular são importantes. Esse bloco de atividades é dissertado nos capítulos seguintes.

5.1 ESTRATÉGIAS GERAIS (EG)

Após o exame de qualificação, com a contribuição proveniente da discussão da banca examinadora, e ao refletir sobre os passos que devem abranger todos os elementos relevantes do processo de investigação presentes no Modelo Modificado, decidiu-se elaborar um plano de ação para a pesquisa de campo, pensando em estratégias eficientes na busca de responder à pergunta que norteia este trabalho.

Com esse direcionamento, frente a pergunta norteadora proposta:

- **Como, utilizando a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas durante um Curso de Extensão, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática da UFCG/CES a (re) construir conhecimentos sobre as Equações Diferenciais Ordinárias?**

Foi elaborado um plano de ação baseado incialmente em uma estratégia geral (o que fazer?) que condissesse com os objetivos da pesquisa, com os caminhos investigativos que encaminham a resposta da pergunta norteadora e, sobretudo, com o contexto atual do pesquisador, do cenário e dos sujeitos da pesquisa. Para isso, foi considerada a seguinte estratégia geral:

Estratégia Geral (EG)

Ministrar um curso de extensão universitária sobre Equações Diferenciais Ordinárias, fundamentado e apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com alunos do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), campus Cuité/PB.

5.1.1 Estratégias Auxiliares (EA)

Selecionada a Estratégia Geral, percebeu-se que para que ela se consolide, é preciso criar e assumir Estratégias Auxiliares (EA) que deem suporte e continuidade à concretização do plano determinado, ou seja, as EA são caracterizadas como uma ou mais estratégias que derivam da Estratégia Geral (EG) e que precisam ser consideradas e bem definidas para o seu cumprimento efetivo.

Desse modo, para que a EG se consolide, tem-se as seguintes Estratégias Auxiliares ($\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3}, \boldsymbol{E_4}, \boldsymbol{E_5}, \boldsymbol{E_6}, \boldsymbol{E_7}, \boldsymbol{E_8}$):

$\boldsymbol{E_1}$**:** Identificar o local, o curso de extensão universitária e os sujeitos da pesquisa;
$\boldsymbol{E_2}$**:** Definir o meio de aplicação do curso de extensão no contexto remoto (devido ao cenário atual da pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2);
$\boldsymbol{E_3}$**:** Consultar os representantes legais (Coordenadores do Curso de Licenciatura em Matemática) do local da pesquisa (Instituição) sobre a possibilidade da autorização de aplicação da pesquisa de campo;

$\boldsymbol{E_4}$**:** Criar um Projeto de Ensino (PE) para o Curso de Extensão, que utilize a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;
$\boldsymbol{E_5}$**:** Baseado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, elaborar e analisar Problemas Geradores para o curso de extensão;
$\boldsymbol{E_6}$**:** Divulgar o Curso de Extensão e realizar as inscrições dos participantes;
$\boldsymbol{E_7}$**:** Aplicar o Projeto de Ensino (PE) no curso de extensão;
$\boldsymbol{E_8}$: Aplicar um Questionário de Avaliação para os alunos-participantes.

5.2 PROCEDIMENTOS GERAIS (PG)

Partindo das estratégias, tanto da geral, quanto das auxiliares, faz-se necessário determinar os procedimentos, sendo eles correspondentes a cada uma das estratégias elencadas. Segundo Romberg (2007), selecionar os procedimentos é uma tarefa que requer cuidado, pois, nesse momento, o pesquisador deve se assegurar de definir os caminhos de execução do plano de ação.

Propomos executar nosso plano de ação da seguinte maneira:

Procedimento Geral (PG)

Criar um Projeto de Ensino (PE) a ser aplicado no curso de extensão universitária sobre Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, para alunos do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campus Cuité/PB.

5.2.1 Procedimentos Auxiliares

Para que o PG possa ser desenvolvido, precisamos assumir os seguintes Procedimentos Auxiliares $\boldsymbol{(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8)}$:

$\boldsymbol{P_1}$**:** A instituição identificada foi a Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité – (UFCG/CES) – cenário onde foi realizada a pesquisa de campo, ou seja, local que se destina a oferta do curso de extensão. Os sujeitos da pesquisa, alunos da Licenciatura em Matemática, mas que para a homologação da inscrição e participação no curso, os mesmos deveriam atender, no mínimo, o seguinte requisito: ter cursado Cálculo Diferencial e Integral I e II, ou seja, os sujeitos da pesquisa foram alunos de diversos períodos que podem ou não já ter cursado a disciplina EDO.

$\boldsymbol{P_2}$**:** Devido ao cenário atual da pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2, sem as aulas presenciais nas instituições de Ensino Superior, houve a necessidade de se pensar em algum recurso tecnológico para ocorrerem os encontros e atividades do curso de extensão. O aplicativo escolhido foi o Zoom Meetings (serviço de conferência remota que combina videoconferência, reuniões online, bate-papo e colaboração móvel) e WhatsApp;

$\boldsymbol{P_3}$**:** Reunião com a Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité – (UFCG/CES);

$\boldsymbol{P_4}$**:** Criação do Projeto de Ensino (PE) para o Curso de Extensão e elaboração de um roteiro de atividades apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;

$\boldsymbol{P_5}$**:** Proposição e seleção de Problemas Geradores para o curso de extensão;

$\boldsymbol{P_6}$**:** A divulgação do Curso de Extensão, realização das inscrições e homologação dos participantes da pesquisa de campo;

$\boldsymbol{P_7}$**:** A execução do Projeto de Ensino (PE) no curso de extensão;

$\boldsymbol{P_8}$**:** A aplicação do Questionário de Avaliação para os alunos e outros participantes.

5.3 PROCEDIMENTOS AUXILIARES EM AÇÃO

Para a execução do nosso Procedimento Geral (PG), foi necessário antecipar a execução dos procedimentos auxiliares.

Neste tópico, descreveremos como se deu a execução desses procedimentos $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$.

5.3.1 $\boldsymbol{P_1}$ Em Ação – O Local e os Sujeitos da pesquisa

A proposta de pesquisa que elaboramos inicialmente, tinha como propósito desenvolver a pesquisa durante o curso do componente curricular Equações Diferenciais Ordinárias no formato de aulas presenciais. A instituição escolhida foi o Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité – (UFCG/CES).

A escolha se deu pelo fato da instituição e o campus terem sido o local onde pesquisador realizou a sua graduação em Licenciatura em Matemática, tornando-se pesquisador e professor, este foi o período em que se desencadeou a inquietação que promoveu a realização desse estudo, em outras palavras, foi o local em que o pesquisador, como estudante da Licenciatura, refletiu sobre os processos formativos do professor de matemática na atualidade e resolveu encontrar novos voos em sua prática educativa.

Entretanto, no ano de 2020, a pesquisa de campo deveria ter iniciado, porém, com o surgimento da pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2, não foi possível. Prevendo a sua disseminação internacional e o rápido surto do novo coronavírus, políticas de distanciamento e isolamento social foram adotadas em todo o Brasil, interrompendo a realização da pesquisa, sem data prévia devido à suspensão das aulas presenciais em todas as instituições de ensino.

Nesse momento, toda a proposta de pesquisa foi reelaborada, desde a sua fundamentação teórica até o planejamento de uma nova pesquisa de campo, buscando a possibilidade de sua realização nesse contexto remoto.

A nova proposta de pesquisa foi apresentada a uma banca examinadora de qualificação, discutindo e consolidando a escolha de realizar um Curso de Extensão Universitária, pois nesse formato teríamos mais flexibilidade na execução da pesquisa, em termos de tempo e disponibilidade para o pesquisador e alunos-participantes participarem efetivamente.

Vale salientar que nesse período de aulas remotas a educação brasileira, assim como a saúde, se destaca nos impactos sofridos em virtude da pandemia. Efeitos negativos e fragilidades que permeiam todos os espaços e campos educacionais. Desse modo, realizar uma pesquisa a nível de mestrado em Educação Matemática, frente a esse cenário caótico, se tornou importante e necessário para contribuir no ensino de Matemática dessa instituição, com alunos em formação inicial e nas demais instâncias sociais.

Figura 13: Centro de Educação e Saúde (CES) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), campus Cuité.

Fonte: https://www.ces.ufcg.edu.br/portal/campus.

O Centro de Educação e Saúde (CES) da Universidade Federal de Campina Grande está situado no acesso Profª. Maria Anita Furtado Coelho, localidade do Olho D'Água da Bica, a 2Km do centro do município de Cuité–PB e tem uma área de 80 hectares.

O campus é dividido em 4 (quatro) unidades acadêmicas: de Biologia e Química; de Física e Matemática; de Saúde e de Enfermagem. A Unidade Acadêmica de Biologia e Química (UABQ) é composta pelas licenciaturas de Ciências Biológicas e Química. A Unidade Acadêmica de Física e Matemática (UAFM) é composta pelas licenciaturas de Física e Matemática. Os cursos que fazem parte da Unidade Acadêmica de Saúde (UAS) são os bacharelados em Farmácia e Nutrição. Já a Unidade Acadêmica de Enfermagem (UAENFE) é composta pelo curso de bacharelado em Enfermagem. A instituição também oferece o Mestrado Acadêmico em Ciências Naturais e Biotecnologia, pertencente à UABQ.

O CES é uma instância deliberativa e normativa composto pela Diretoria, pelo Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão – CEPE e pelo Conselho Administrativo – CONSAD.

5.3.2 P_2 Em Ação – O Cenário de aplicação do Curso de Extensão

Pensar o Cenário de aplicação do curso de extensão foi uma das novas implementações feitas na reelaboração da proposta de pesquisa, pois, outrora, pensávamos em aulas presenciais, local e sujeitos da pesquisa e, agora, neste novo cenário remoto, houve a necessidade de se pensar em algum recurso tecnológico para a execução dos encontros e para o desenvolvimento das atividades do curso de extensão.

Uma das dificuldades encontradas nesta fase foi a de decidir qual recurso e/ou plataforma usaríamos para atender ao que pretendíamos. Baseados em nossa questão norteadora e nos objetivos de pesquisa, tínhamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com uma dinâmica de trabalho de ensino em salas de aulas presenciais, ou seja, o nosso desafio principal seria adaptar a referida metodologia para o contexto remoto, de modo que não fugisse inteiramente de seus pressupostos teóricos.

Depois de muitas buscas e discussões, vimos que o aplicativo Zoom Meetings (serviço de conferência remota que combina videoconferência, reuniões online, bate-papo e colaboração móvel) era o que mais se aproximava do que queríamos, pois, dentre uma gama de ferramentas, o aplicativo oferece a ferramenta *Salas Simultâneas*.

Figura 14: Barra de Ferramentas Zoom Meetings (Salas Simultâneas).

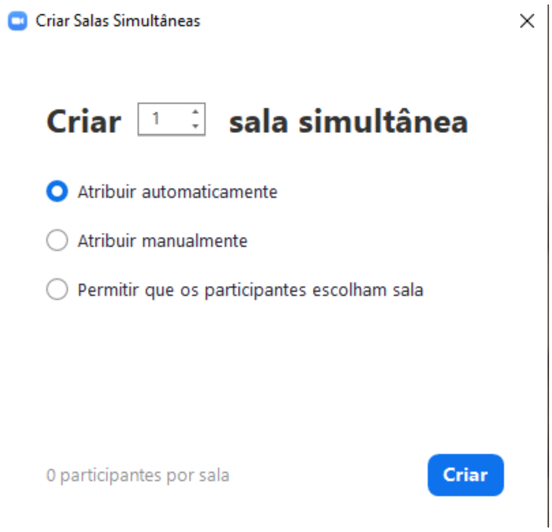
Fonte: acervo do curso de extensão.

A ferramenta *Salas Simultâneas* permite dividir a reunião no aplicativo Zoom – versão web – em até 50 sessões separadas. O anfitrião (organizador) da reunião pode separar os participantes em sessões, de forma automática ou manualmente, podendo ainda, se fazer presente em cada sessão de forma alternada a qualquer momento.

Essa interface se aproxima muito de um dos pressupostos teóricos da dinâmica de trabalho de ensino na perspectiva da Resolução de Problemas, que visa um trabalho colaborativo e cooperativo no processo de ensino-aprendizagem. Desse modo, tendo em vista que com o distanciamento social e a suspensão das aulas presenciais, este tipo de trabalho ficaria comprometido, assim, essa ferramenta tecnológica tornou-se imprescindível nessa pesquisa.

A criação de salas simultâneas pode acontecer em qualquer momento da reunião e quantas vezes for preciso, porém, apenas pelo anfitrião. O processo é simples e de fácil acesso, podendo ocorrer a distribuição dos participantes nos grupos (salas simultâneas) de forma automática ou manual, ou ainda, cria-las e permitir que os próprios participantes escolham a que desejar.

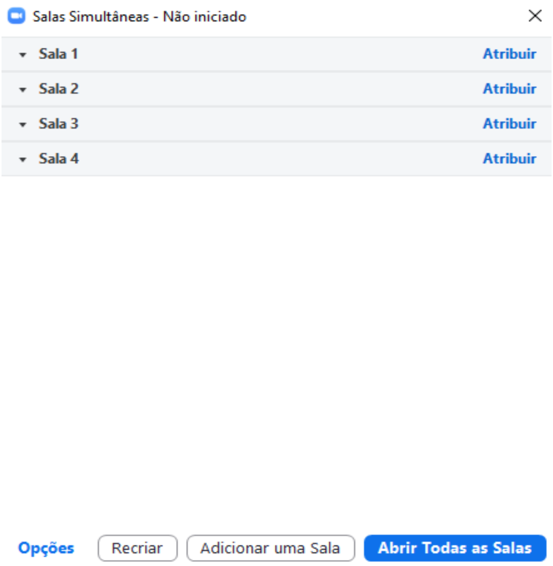
Figura 15: Print Screen da Criação de Salas Simultâneas (Exemplo).



Fonte: acervo do curso de extensão.

Segue um exemplo de criação de salas simultâneas de maneira manual pelo anfitrião na figura a seguir.

Figura 16: Print Screen das Salas Simultâneas criadas (Exemplo).



Fonte: acervo do curso de extensão.

Após o anfitrião criar as salas, que se limita a cinquenta unidades, clica em “Atribuir” para direcionar os participantes em seus devidos grupos, nomeando-os conforme a necessidade. Após todos os participantes estarem atribuídos, o anfitrião pode ficar alternando de sala em sala para acompanhar cada reunião, em nosso caso, acompanhar de grupo em grupo o processo de resolução dos problemas pelos alunos-participantes. Vale salientar que se a reunião estiver sendo gravada, a gravação acompanhará a tela do anfitrião, ou seja, só poderá registrar as salas simultâneas no momento em que o anfitrião estiver presente.

Além do aplicativo Zoom Meetings, também utilizamos o aplicativo WhatsApp com o intuito de manter contato instantâneo com os participantes e, ainda, para o compartilhamento de materiais de apoio do curso por parte do professor-pesquisador e envio dos registros de resolução das atividades e tarefas propostas por parte dos alunos-participantes.

Figura 17: Grupo do WhatsApp do Curso de Extensão.

Fonte: acervo do curso de extensão.

O primeiro contato com os participantes aconteceu via e-mail após o preenchimento de seus dados na ficha de inscrição on-line. Com isso, foi criado no dia 27 de outubro, antecedente ao horário do primeiro dia de curso, o grupo no WhatsApp que serviu para o envio dos avisos gerais e como mais um meio de envio do link de acesso à reunião.

5.3.3 P_3 Em Ação – Reunião com a Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática

A proposta de pesquisa, mesmo com as modificações em formato remoto, continuou tendo como local e sujeitos-alvo os alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UGCG/CES. A autorização para aplicação de qualquer projeto que vise a sala de aula (remota ou não-remota) e os alunos dessa instituição é de competência do Coordenador de curso juntamente com a Coordenação de Pesquisa, Ensino e Extensão do departamento.

A primeira conversa com a Coordenadora do curso aconteceu no final do mês de agosto de 2021, durante o próprio exame de qualificação de dissertação de Mestrado do professor-pesquisador, a mesma fazia parte da banca examinadora e, ao analisar a proposta de trabalho, apoiou e permitiu com empolgação sua realização como também se colocou à disposição de contribuir no que fosse preciso.

Em meados de setembro, com a possibilidade de aplicar o curso de extensão com alunos da licenciatura da referida instituição, tivemos uma outra reunião via videoconferência no aplicativo WhatsApp para esclarecer detalhes a respeito do tempo de realização do curso, levando em consideração que o período letivo já estava em andamento e que, devido à forma remota, o calendário precisava ser analisado. Também foram discutidos os meios de divulgação do curso, critérios para a homologação dos participantes e, além disso, os documentos necessários, seguindo os parâmetros formais da universidade.

Ficou acordado por ambas as partes que o curso de extensão ficaria disponibilizado após o encerramento do período letivo, na última semana de outubro, pois, haveria maior possibilidade de alcançar mais estudantes para essa intervenção, uma vez que, os estudantes estariam, momentaneamente, livres das demandas da academia.

Nesse espaço de tempo, o professor-pesquisador pôde trabalhar na criação de seu Projeto de Ensino para o curso de extensão e preparar as atividades e tarefas que seguem as etapas da dinâmica de trabalho de ensino na perspectiva da Resolução de Problemas e elaborar e/ou selecionar os Problemas Geradores a serem utilizados, o que também foi mencionado pela banca examinadora de qualificação da proposta de pesquisa.

5.3.4 P_4 Em Ação – A criação do Projeto de Ensino para o Curso de Extensão

O detalhamento da criação do Projeto de Ensino (PE) para o curso de extensão será exposto em um tópico a parte, que chamaremos de “Tópico 5.4.: O Projeto de Ensino (PE)”, salientando que a descrição desse curso, em termos de suas informações gerais, objetivos e explanação detalhada dos encontros merecem um destaque maior.

5.3.5 P_5 Em Ação – Proposição e seleção de Problemas Geradores para o roteiro de atividades utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Analogamente, o detalhamento do processo de proposição, seleção e apresentação dos Problemas Geradores para as atividades do curso de extensão, fará parte de um subtópico do “Tópico 5.4.: O Projeto de Ensino (PE)”, salientando que, também, a descrição dessas atividades necessita de uma atenção maior.

5.3.6 P_6 Em Ação - A divulgação do Curso de Extensão e a realização das inscrições e homologação dos participantes

Com a finalização do Projeto de Ensino e a elaboração dos Problemas Geradores, iniciou-se a divulgação do curso de extensão, em meados de 07 de outubro, por meio das redes sociais, fazendo o compartilhamento do banner de divulgação e do link de acesso à ficha de inscrição, ilustrados na figura a seguir. O compartilhamento aconteceu no Facebook e Instagram (contas pessoais do professor-pesquisador, da Coordenadora do curso, professor orientador dessa pesquisa e na conta da instituição-alvo), além disso, também foi divulgado por meio de grupos de WhatsApp em que estão presentes alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFCG/CES.

Vale salientar que buscou-se anexar todas as informações importantes no banner, pois como a divulgação ocorreria, dessa vez, de forma on-line, precisaríamos deixar tudo o mais claro e conciso possível para não ficarem dúvidas nos interessados.

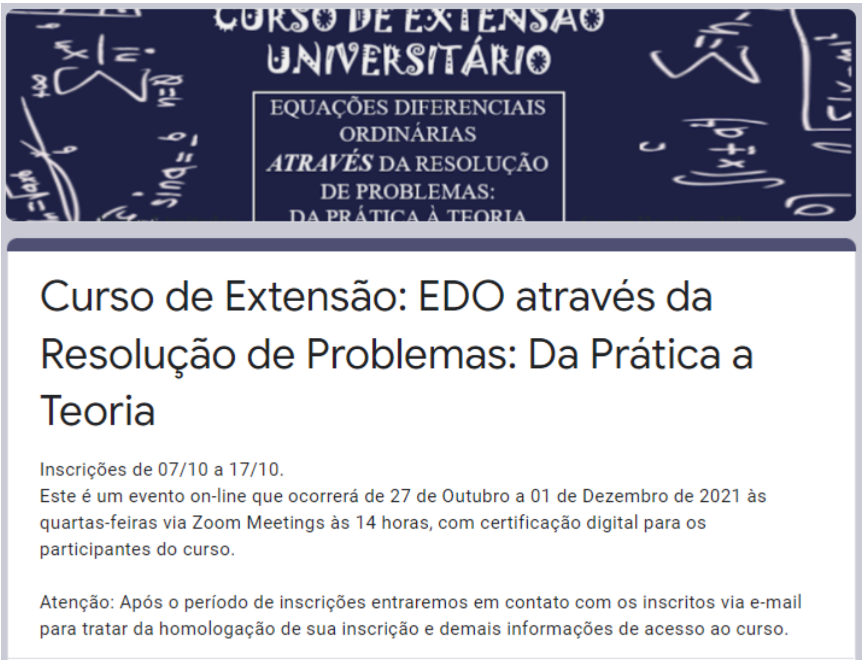
No banner foram explanadas informações gerais como: tema do curso, público-alvo, prazo das inscrições, link de acesso à ficha de inscrição virtual, datas e horários dos encontros, rede apoio à realização do curso, plataforma em que o curso seria realizado, aviso de certificação de 30 horas e o ministrante do curso.

Figura 18: Banner de divulgação do curso de extensão.

Fonte: acervo do curso de extensão.

Ao acessar o link disponibilizado na divulgação, o (a) interessado (a) era redirecionado (a) à uma página na web que o (a) encaminharia ao formulário de inscrição elaborado pelo professor-pesquisador, na plataforma Google Forms. Neste momento, o (a) interessado (a) era mais uma vez inteirado (a) das informações gerais do curso, com avisos de que aconteceria um contato formal no final das inscrições, afim de divulgar sobre a homologação das mesmas.

Figura 19: Print Screen do Formulário de Inscrição.



Curso de Extensão: EDO através da Resolução de Problemas: Da Prática a Teoria

Inscrições de 07/10 a 17/10.
Este é um evento on-line que ocorrerá de 27 de Outubro a 01 de Dezembro de 2021 às quartas-feiras via Zoom Meetings às 14 horas, com certificação digital para os participantes do curso.

Atenção: Após o período de inscrições entraremos em contato com os inscritos via e-mail para tratar da homologação de sua inscrição e demais informações de acesso ao curso.

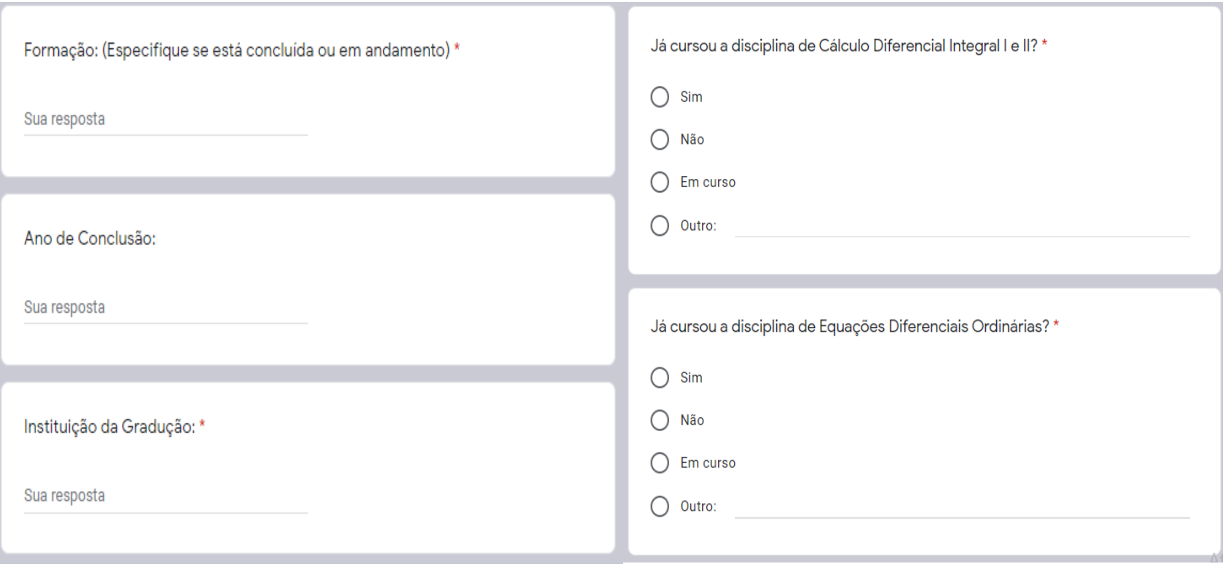
Fonte: dados da pesquisa.

No formulário de inscrição, foi requerido inicialmente, os dados pessoais do interessado (a) com o intuito de identificação e coleta de dados para a construção dos certificados após a finalização do curso. Em seguida, nas próximas perguntas, os interessados eram questionados sobre informações de sua formação acadêmica, como: formação (concluída ou em andamento), instituição e ano de conclusão. O objetivo desses questionamentos era de obter dados sobre o perfil dos nossos possíveis participantes.

Além disso, como exposto na figura a seguir, também inserimos no formulário a pergunta principal “Já cursou a disciplina de Cálculo Diferencial Integral I e/ou II ?”, tendo em vista que, como foi explanado no banner, tínhamos isso como único pré-requisito para a homologação dos participantes.

Outro interesse relevante para o levantamento de dados dos partipantes, era saber se o aluno (a) já tinha cursado ou não a disciplina de EDO, considerando que o professor-pesquisador, como ex-aluno, sabia que existia esse componente curricular no currículo do curso de Licenciatura em Matemática. Em caso do interessado (a) não ter tido este componente curricular em seu curso, mas ter estudado EDO como parte integrada do Cálculo, tinha a opção “Outro” para responder.

Figura 20: Print Screen das questões de 11 a 15 do Formulário de Inscrição.


Formação: (Especifique se está concluída ou em andamento) *

Sua resposta

Ano de Conclusão:

Sua resposta

Instituição da Gradução: *

Sua resposta

Já cursou a disciplina de Cálculo Diferencial Integral I e II? *

- Sim
- Não
- Em curso
- Outro:

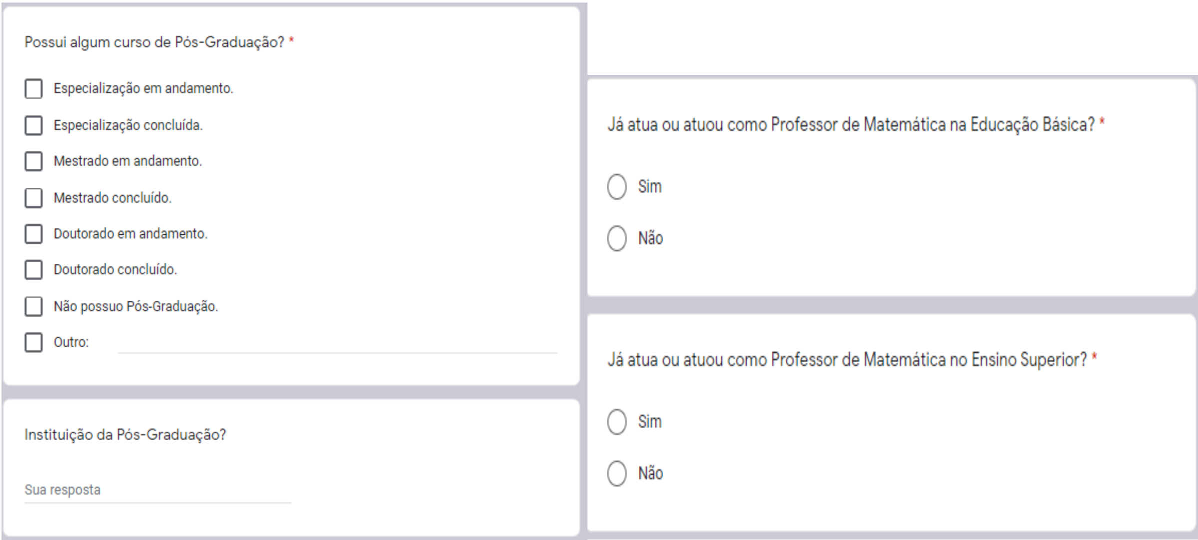
Já cursou a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias? *

- Sim
- Não
- Em curso
- Outro:

Fonte: dados da pesquisa.

Objetivando investigar os participantes que tinham sua graduação concluída, foi inserido no questionário as questçoes (17 a 20), que retratam sobre formação continuada e experiência profissional. Vejamos:

Figura 21: Print Screen das questões de 17 a 20 do Formulário de Inscrição.



Fonte: dados da pesquisa.

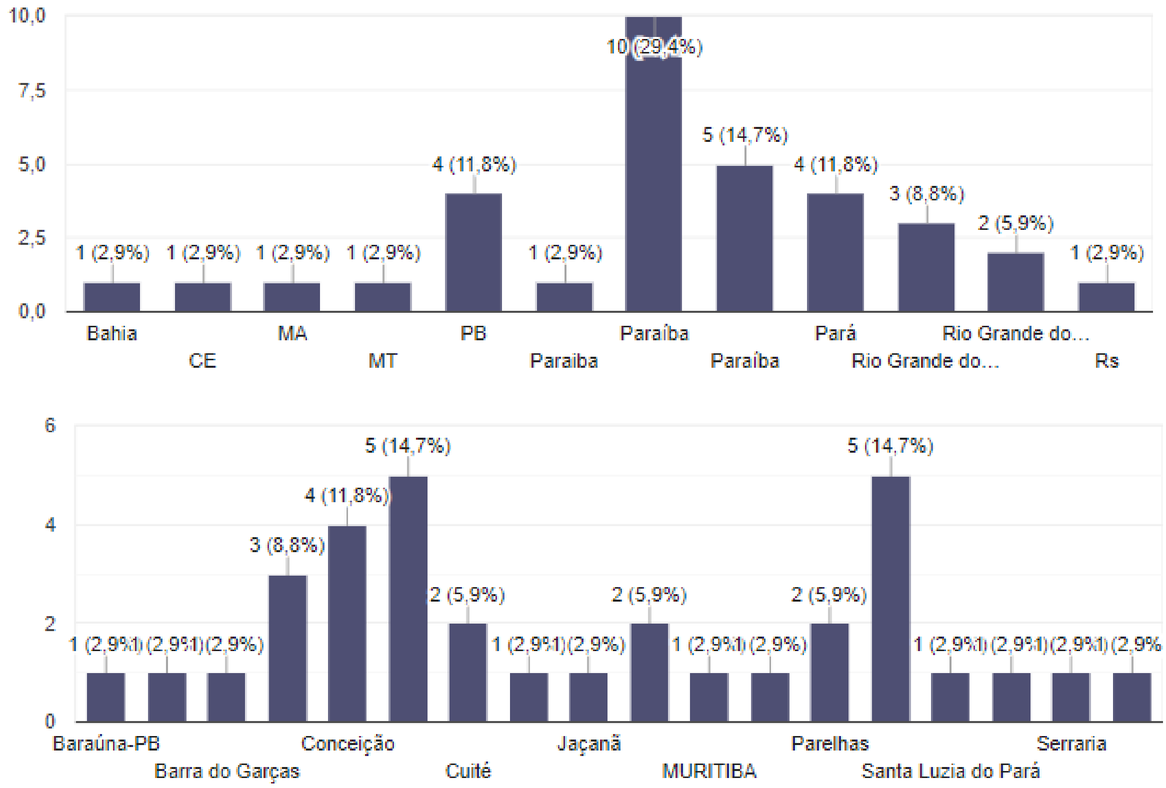
A escolha do público-alvo, estendendo-se para professores de Matemática, justifica-se pelo fato da proximidade que o universo tecnológico proporciona, já que o nosso curso de extensão aconteceria de forma remota e com grande abrangência.

A inscrições iniciaram no dia 7 de outubro, com o encerramento previsto para o dia 17 do mesmo mês; entretanto, a repercussão surpreendeu, pois no primeiro dia, obtivemos um número relevante de inscrições, e ao quinto, ultrapassamos o número de vagas; embora as mesmas fossem limitadas, foi permitido que esse número excedesse, permitindo que ocorresse até o dia 17, para que no final, pudéssemos analisar os formulários e verificar se os inscritos atendiam aos critérios estabelecidos.

De posse de todas as inscrições e com expectativas das vagas excedidas, foi possível analisar os formulários, que se totalizaram em 34, entre essas inscrições haviam alunos com graduação em Licenciatura em Matemática, alguns em curso, bem como, mestrandos, mestres e doutores na área de Matemática. Outro ponto importante para o nosso levantamento de dados foi a diversidade de instituições e estados do Brasil que a nossa divulgação atingiu.

Com as informações obtidas a partir do questionário, foi realizada a coleta de dados a partir das ferramentas de tratamento de dados da própria plataforma Google Forms, como podemos verificar nas figuras a seguir:

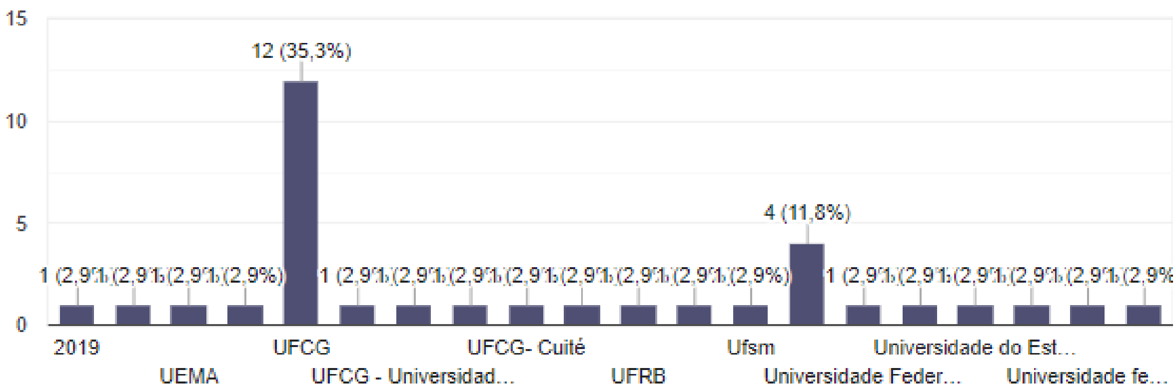
Figura 22: Dados do total de inscritos – Estado/Cidade.



Fonte: acervo do curso de extensão.

É importante ressaltar que, com a inserção das Tecnologias Digitais nesse contexto remoto, o curso tomou proporções consideráveis, alcançando estudantes e profissionais da Educação Matemática em diferentes estados e cidades do Brasil.

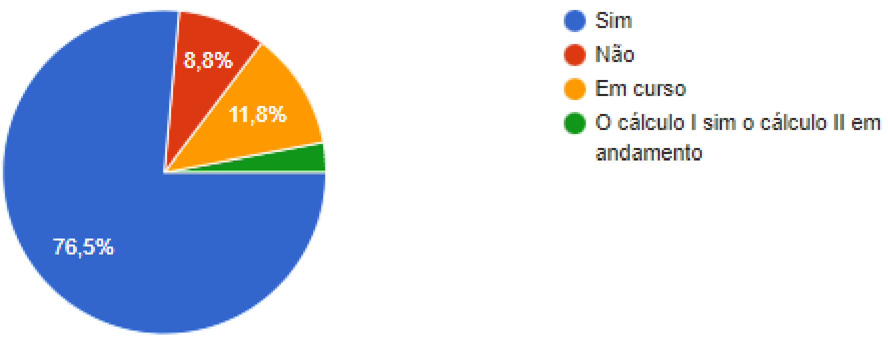
Figura 23: Dados do total de inscritos – Instituição da Graduação.



Fonte: acervo do curso de extensão.

Como resultado da abrangência de divulgação em diferentes Estados e cidades, conseguimos realizar uma conexão entre variadas instituições, o que realmente enfatiza a ideia de um curso de “extensão”.

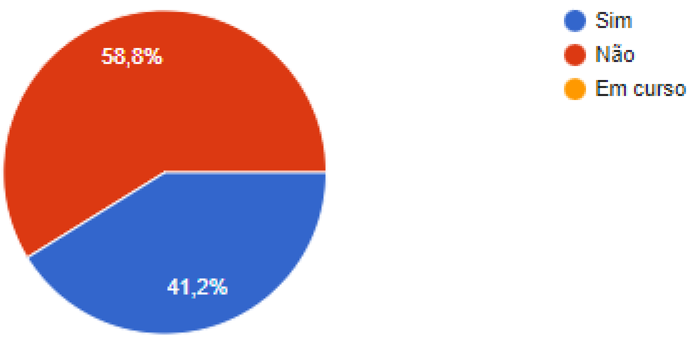
Figura 24: Dados do total de inscritos – “Cursou a disciplina de Cálculo I e/ou II?”



Fonte: acervo do curso de extensão.

Atendendo um dos critérios para a participação do curso, observamos que 8,8% do total de inscritos não poderiam ter a inscrição homologada e que 11,8% ainda estão em curso, no entanto, ainda assim, poderiam ter a participação no curso efetivada. 79,4% tiveram a inscrição homologada.

Figura 25: Dados do total de inscritos – “Cursou a disciplina de EDO?”

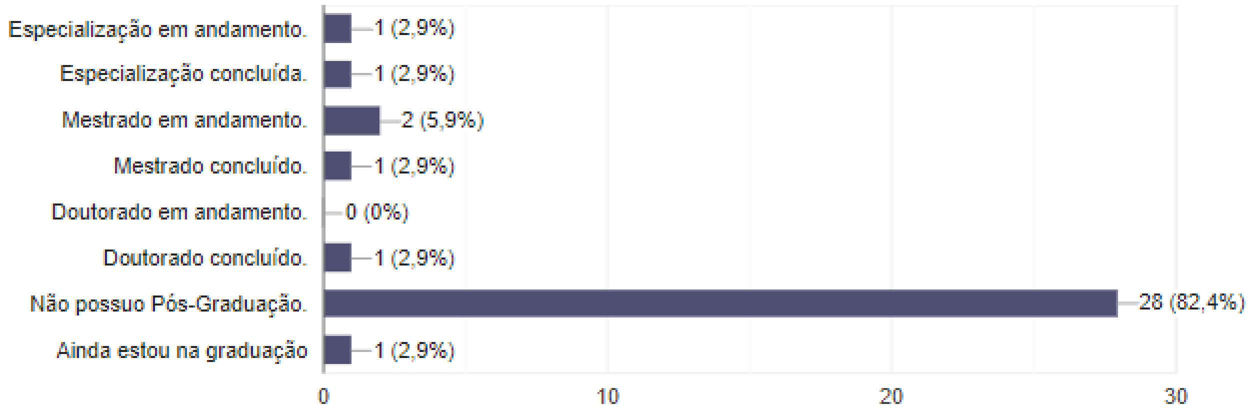


Fonte: acervo do curso de extensão.

Do total de inscritos, 58,8% não haviam cursado ainda a disciplina EDO, por outro lado, 41,2% já tinham essa experiência, uma estatística considerável que nos deixou bastante entusiasmados para a realização do curso, pois nos deparamos com diversidade de perfis dos participantes, o que enfatiza a ideia de construir e/ou reconstruir conhecimentos sobre EDO.

Dos participantes que já são formados, interessava-nos saber quantos deram continuidade à sua formação inicial e se engajaram em um curso de Pós-Graduação. Do total, nota-se uma quantidade parcial de especialistas, mestres e doutores.

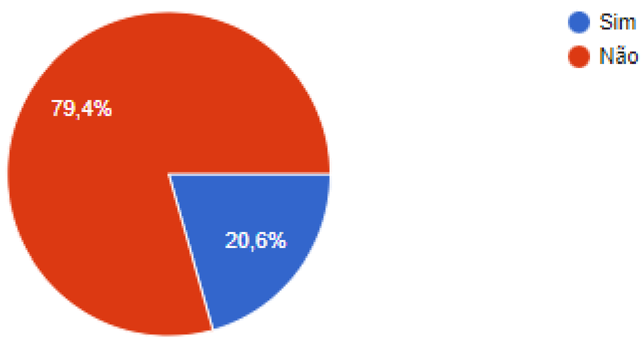
Figura 26: Dados do total de inscritos – Pós-Graduação.



Fonte: acervo do curso de extensão.

De 34 inscritos, 7 já atuaram como professores na Educação Básica e 27 ainda não. Vale salientar que dentre os sete participantes que já atuaram, alguns ainda estão em curso.

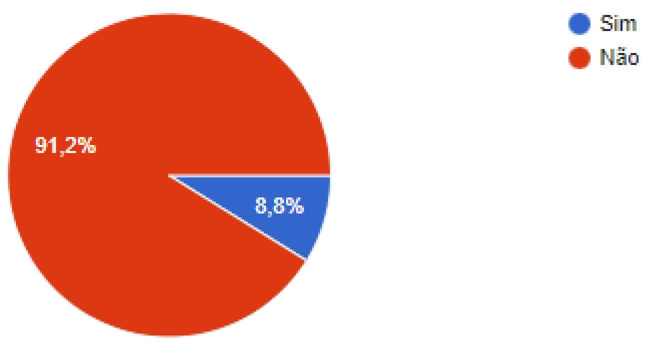
Figura 27: Dados do total de inscritos – Atuou como Professor na Educação básica.



Fonte: acervo do curso de extensão.

Em relação ao Ensino Superior, em nossa listagem de inscritos, três já atuam no ensino de matemática em universidades e institutos federais, enquanto 31 ainda não tiveram essa experiência.

Figura 28: Dados do total de inscritos – Atuou como Professor no Ensino Superior.



Fonte: acervo do curso de extensão.

Do total de inscritos (34), após as análises feitas, foram homologadas 27 inscrições. A não efetivação dos demais inscritos se deu pelo fato desses interessados não terem cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e por estarem no primeiro período do curso. O quadro a seguir ilustra os dados dos inscritos homologados.

Quadro 6: Homologação das inscrições no Curso de Extensão.

Participantes	Formação	Ano de Conclusão	Curso de Cálculo I e II	Curso de EDO
A1	Lic. Em matemática (UFCG)	2021	Sim	Sim
A2	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Sim
A3	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Sim
A4	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A5	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A6	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A7	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A8	Lic. Em matemática (UFCG) / Mestrado em andamento (UFCG)	2018	Sim	Sim
A9	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A10	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A11	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A12	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A13	Lic. em Ciências Habilitação Matemática (UEMA)/ Mestrado concluído (UNESP)	2005	Sim	Sim
A14	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Sim
A15	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A16	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Sim
A17	Graduação (UFU)/ Doutorado concluído (UFU)	-	Sim	Sim
A18	Lic. Em matemática (UFRB)/ Mestrado em andamento (UEPB)	2014	Sim	Sim
A19	Lic. Em matemática (UEPA)	Em curso	Sim	Não
A20	Lic. Em matemática (UEPA)	Em curso	Sim	Sim
A21	Lic. Em matemática (UEPA)/ Especialização em andamento (FIS)	2021	Sim	Sim

A22	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Sim
A23	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Sim
A24	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Sim
A25	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A26	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não
A27	Lic. Em matemática (UFCG)	Em curso	Sim	Não

Fonte: dados da pesquisa.

Com a análise dos formulários, um e-mail foi enviado para todos os inscritos informando-os sobre a homologação e não homologação das inscrições, dando boas-vindas aos participantes e agradecendo pelo interesse dos que não poderiam fazer parte dessa experiência.

5.3.7 P_7 Em Ação - A execução do Projeto de Ensino (PE) no curso de extensão

A execução do Projeto de Ensino (PE) no curso de extensão será dissertada no Capítulo 6, intitulado de: "Descrição e Análise de Evidências – 3º Bloco de Romberg". Os relatos da aplicação do curso fazem parte de uma outra etapa desse trabalho de pesquisa e merecem uma atenção maior.

5.3.8 P_8 Em Ação - A aplicação do Questionário de Avaliação para os alunos-participantes

Após a execução do Projeto de Ensino no curso de extensão, foi aplicado um Questionário de Avaliação para os alunos-participantes com o intuito de enfatizar a avaliação de todo o processo. Em busca de analisar a avaliação dos alunos-participantes de todo curso, foi entregue um questionário com 14 questões, divididos em duas seções, são elas:

- **Seção 1** – Avaliação ampla do Curso de Extensão utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
- **Seção 2** – Avaliação da Dinâmica de trabalho da Resolução de Problemas no Ensino Remoto.

A descrição detalhada dos resultados obtidos pelos alunos-participantes no questionário foi discorrida em dois subtópicos do capítulo 6 deste trabalho.

5.4 O PROJETO DE ENSINO

O presente Projeto de Ensino foi elaborado com atividades aplicadas em um curso de extensão universitário no contexto do ensino remoto, desenvolvidas durante um período de seis encontros virtuais no formato de aulas síncronas e seis encontros de atendimento e orientações no formato de aulas assíncronas. Cada encontro virtual aconteceu por meio da plataforma Zoom Meetings, com duração de duas horas, utilizando-se a dinâmica de trabalho das dez atividades da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de

Problemas. Além disso, também foram trabalhadas Tarefas Extraclasse, com o intuito de fixar conceitos introduzidos e discuti-los na sequência de cada encontro.

Objetivo Geral do Projeto de Ensino: Utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em um curso de extensão, foi proposto oportunizar os alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFCG/CES e professores de Matemática a (re) construírem conhecimentos sobre Equações Diferenciais Ordinárias e, promover possibilidades de refletir sobre as potencialidades que esse conhecimento poderá ter em sua presente/futura prática docente.

Projeto de Ensino (PE)

Curso de Extensão: Equações Diferenciais Ordinárias Através da Resolução de Problemas: Da Prática a Teoria.
Período: 27/10/2021 a 01/12/2021.
Carga Horária: 30 horas.
Local (Instituições de apoio):

- Universidade Federal de Campina Grande (UFCG);
- Universidade Estadual da Paraíba (UEPB).

Público-alvo:

- Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática (Importante ter cursado Cálculo Diferencial e Integral I e II);
- Professores de Matemática.

Plataforma e Instrumentos necessários:

- Zoom Meetings;
- Grupos de WhatsApp;
- Google Forms.

Horário dos Encontros (Ensino Síncrono): 14:00 às 16:00 (todas as quartas-feiras)
Horário de Atendimento (Ensino Assíncrono): 14:00 às 18:00 (todas as quintas-feiras)
Local: Link de acesso à reunião enviado no Grupo do WhatsApp.

Cronograma dos Encontros (Ensino Síncrono)

Encontro 01

Data: 27/10

Objetivos do Encontro:

- Apresentar o curso e explanar conhecimentos prévios da Metodologia a ser utilizada como uma dinâmica para a sala de aula (remota) durante o curso de extensão;
- Apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas de forma que os alunos possam compreender como serão trabalhadas as aulas em encontros posteriores.

Descrição:

1º Momento - Acolhimento: Boas-vindas aos alunos-participantes; homologação da inscrição; sondagem sobre o que os alunos-participantes esperam do curso conforme o título proposto.

2º Momento - Apresentações: Vídeo motivacional; explanação sobre o que o professor-pesquisador espera do curso; apresentação pessoal/profissional – trajetória; apresentação do curso de extensão com objetivos explanados.

3º Momento - Cronograma do curso; local e horários; meios de comunicação e ferramentas necessárias.

4º Momento - Termo de Consentimento da participação nesta pesquisa.

5º Momento - Apresentações dos alunos-participantes; o que conhecem sobre EDO e Resolução de Problemas.

6º Momento - Exposição sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Atividade Extraclasse:

Leitura do Texto 1: "Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: Por que através da Resolução de Problemas?" de Allevato e Onuchic (2014).

Encontro 02

Data: 03/11

Objetivos do Encontro:

- Aplicar na perspectiva da prática à teoria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas abordando Problemas Geradores que envolvem os conteúdos introdutórios sobre Equações Diferenciais Ordinárias. Ênfase no contexto de trabalho da referida no ensino remoto;
- Motivar os alunos-participantes a uma possibilidade de estudo de caráter investigativo e exploratório, instigando o raciocínio e as diferentes formas de pensar e encontrar caminhos distintos de resolução a partir de um problema;
- Incentivar o trabalho em grupo de forma colaborativa e cooperativa, mesmo que em um contexto de distanciamento social, apresentando possibilidades desse tipo de atividade em aulas remotas;
- Diagnosticar o desempenho dos alunos-participantes em frente aos conceitos matemáticos que possam vir a surgir na resolução do problema proposto;
- Apresentar os conceitos introdutórios de EDO (Definição; Ordem de uma EDO; EDO Linear e Não-Linear; Solução de uma EDO; Resolução de uma EDO de 1º Ordem; PVI; e o Método do Fator Integrante);
- Aprofundar os conceitos da Matemática Financeira;
- Apresentar aos alunos-participantes uma nova abordagem de ensino e aprendizagem de EDO.

Descrição:

1º Momento – Entrada dos alunos-participantes na reunião; diálogo inicial; **proposição do Problema** – **Situação-problema 1.**

2º Momento – Solicitar que um aluno-participante faça a **Leitura Individual** da Situação-problema 1.

3º Momento - **Leitura Coletiva** da Situação-problema 1.

4º Momento - Dada a explicação da dinâmica metodológica na perspectiva da Resolução de Problemas no Encontro 01, dividir aleatoriamente e atribuir os alunos-participantes nas salas simultâneas - grupos (Alpha, Beta, Gamma e Phi) – na própria reunião virtual Zoom Meetings e solicitar que em suas salas discutam e tentem resolver o problema proposto – **Resolução do Problema.** Além disso, lembrá-los que foram criados também grupos no WhatsApp de seus respectivos grupos para discussão e envio de registros da resolução.

5º Momento - Nesse momento o professor-pesquisador ficará acompanhando a resolução e discussão entre os alunos-participantes, entrando de sala em sala, **observando e incentivando** o processo.

6º Momento - Ao fim do tempo determinado para a resolução do problema, solicitar que cada grupo compartilhe as suas resoluções enviando os registros nos grupos de WhatsApp para que o professor-pesquisador os salve e insira no slide de apresentação de cada encontro para iniciar a próxima etapa.

7º Momento – Atribuir todos os alunos-participantes a uma sala única novamente. Este momento é destinado à **Plenária,** onde cada grupo, a partir de um representante, apresenta suas resoluções da Situação-problema 1. As apresentações irão ocorrer por ordem alfabética – 1º Grupo Alpha, 2º Grupo Beta, 3º Grupo Gamma e, por fim, 4º Grupo Phi.

8º Momento - A partir das discussões apresentadas e defendidas pelos grupos acerca da resolução da Situação-problema 1, realizar a **Formalização do Conteúdo,** apresentando os conceitos introdutórios das EDO, relacionando sua definição formal com os aspectos dos estudos de equações da Educação Básica e, em seguida, ir apresentando os outros conceitos propostos (Ordem de uma EDO; EDO Linear e Não-Linear; Solução de uma EDO; Resolução de uma EDO de 1º Ordem; PVI; e o Método do Fator Integrante), conectando com o que foi discutido pelos grupos na resolução do problema.

9º Momento - Após a explanação, instigar a discussão de uma **Busca do Consenso** para uma resolução válida e que faça sentido para a Situação-problema 1.

10º Momento - Ao fim do encontro, **propor novos problemas** aos alunos-participantes. Apresentar a Situação-problema 2, como uma tarefa extraclasse e solicitar que tentem resolver para discutirmos no próximo encontro.

11º Momento - Discussão Teórica do texto "Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: Por que através da Resolução de Problemas?" de Allevato e Onuchic (2014), deixado como tarefa extraclasse no encontro 01.

Atividade Extraclasse:

Resolução do Problema: Situação-Problema 2.

Encontro 03

Data: 10/11

Objetivos do Encontro:

- Instigar os alunos-participantes a refletirem sobre alguns conceitos aritméticos, das EDO, do Cálculo Diferencial, das Funções Exponenciais, da Física e de proporcionalidade;
- Reconhecer a partir da prática, na resolução do problema, como ocorre o processo de aquecimento e resfriamento de um corpo em uma determinada temperatura ambiente;

- Explorar o Modelo de Resfriamento de Newton;
- Relacionar a Educação Matemática com a Matemática Aplicada de frente à dinâmica de trabalho da referida metodologia.

Descrição:

1º Momento – Perguntar aos alunos-participantes e/ou grupo se conseguiram resolver a Situação-problema 2 (Tarefa Extraclasse) e pedir que apresentem suas resoluções para que assim possam ser discutidas, exploradas a partir da busca de um consenso em sua solução e sanadas todas as dúvidas.

2º Momento – Entrada dos alunos-participantes na reunião; diálogo inicial; **proposição do Problema** – **Situação-problema 3.**

3º Momento – Solicitar que um aluno-participante faça a **Leitura Individual** da Situação-problema 3.

4º Momento - **Leitura Coletiva** da Situação-problema 3.

5º Momento - Atribuir os alunos-participantes às salas simultâneas – grupos (Alpha, Beta, Gamma e Phi) – na própria reunião virtual Zoom Meetings e solicitar que em suas salas discutam e tentem resolver o problema proposto – **Resolução do Problema.**

6º Momento - Nesse momento, o professor-pesquisador ficará acompanhando a resolução e discussão entre os alunos-participantes, entrando de sala em sala, **observando e incentivando** o processo.

7º Momento - Ao fim do tempo determinado para a resolução do problema, solicitar que cada grupo compartilhe as suas resoluções enviando os registros nos grupos de WhatsApp para que o professor-pesquisador os salve e insira no slide de apresentação de cada encontro para iniciar a próxima etapa.

8º Momento – Atribuir todos os alunos-participantes a uma sala única novamente. Este momento é destinado à **Plenária,** onde cada grupo, a partir de um representante, apresenta suas resoluções da Situação-problema 3. As apresentações irão ocorrer por ordem alfabética – 1º Grupo Alpha, 2º Grupo Beta, 3º Grupo Gamma e, por fim, 4º Grupo Phi.

9º Momento - Após as discussões, instigar os alunos-participantes a uma **Busca do Consenso** de uma resolução válida e que faça sentido para a Situação-problema 3.

10º Momento - A partir das discussões apresentadas e defendidas pelos grupos acerca da resolução da Situação-problema 3 e da busca do consenso na validação de um resultado, realizar a **Formalização do Conteúdo,** apresentando o Modelo de Resfriamento de Newton e aprofundando os conceitos de resolução de uma EDO, referente ao método de resolução de Equações Separáveis, sempre fazendo conexão com os conceitos da Educação Básica, como funções exponenciais e proporcionalidade, em caso de não vir a surgir na discussão dos grupos.

11º Momento - Ao fim do encontro, **propor novos problemas** aos alunos-participantes. Apresentar a Situação-problema 4 como uma tarefa extraclasse e solicitar que tentem resolver para discutirmos no próximo encontro.

Atividade Extraclasse:

Resolução do Problema: Situação-problema 4.

Encontro 04

Data: 17/11

Objetivos do Encontro:

- Aprofundar os conceitos referentes aos métodos de resolução de uma EDO de 1ª Ordem;
- Aprofundar os conceitos referentes ao Problema de Valor Inicial (PVI);
- Aprofundar os conceitos relacionados a taxas de variação e proporcionalidade;

- Dar a possibilidade da atividade de construção de um modelo matemático que possibilite a resolução da situação-problema proposta.

Descrição:

1º Momento – Perguntar aos alunos-participantes e/ou grupo se conseguiram resolver a Situação-problema 4 (Tarefa Extraclasse) e pedir que apresentem suas resoluções para que assim possam ser discutidas, exploradas a partir da busca de um consenso em sua solução e sanadas todas as dúvidas.

2º Momento – Entrada dos alunos-participantes na reunião; diálogo inicial; **proposição do Problema** – **Situação-problema 5.**

3º Momento – Solicitar que um aluno-participante faça a **Leitura Individual** da Situação-problema 5.

4º Momento - **Leitura Coletiva** da Situação-problema 5.

5º Momento - Atribuir os alunos-participantes às salas simultâneas – grupos (Alpha, Beta, Gamma e Phi) – na própria reunião virtual Zoom Meetings e solicitar que em suas salas discutam e tentem resolver o problema proposto – **Resolução do Problema.**

6º Momento - Nesse momento, o professor-pesquisador ficará acompanhando a resolução e discussão entre os alunos-participantes, entrando de sala em sala, **observando e incentivando** o processo.

7º Momento - Ao fim do tempo determinado para a resolução do problema, solicitar que cada grupo compartilhe as suas resoluções enviando os registros nos grupos de WhatsApp para que o professor-pesquisador os salve e insira no slide de apresentação de cada encontro para iniciar a próxima etapa.

8º Momento – Atribuir todos os alunos-participantes a uma sala única novamente. Este momento é destinado à **Plenária,** onde cada grupo, a partir de um representante, apresenta suas resoluções da Situação-problema 5. As apresentações irão ocorrer por ordem alfabética – 1º Grupo Alpha, 2º Grupo Beta, 3º Grupo Gamma e, por fim, 4º Grupo Phi.

9º Momento - Após as discussões, instigar os alunos-participantes a uma **Busca do Consenso** de uma resolução válida e que faça sentido para a Situação-problema 5.

10º Momento - A partir das discussões apresentadas e defendidas pelos grupos acerca da resolução da Situação-problema 5 e da busca do consenso na validação de um resultado, realizar a **Formalização do Conteúdo,** aprofundando os conceitos de PVI e métodos de resolução de EDO de 1º ordem, sempre fazendo conexão com os conceitos relacionados a taxa de variação e proporcionalidade e demais conceitos matemáticos que possa vir a surgir.

Atividade Extraclasse:

Leitura do Texto 2: "Cálculo Diferencial sob a perspectiva da Resolução de Problemas" de Huanca, Silva e Souza (2021).

Encontro 05

Data: 24/11

Objetivos do Encontro:

- Aprofundar os conceitos referentes a taxa de variação, proporcionalidade, funções e alguns conceitos da Física, como: força, a Segunda Lei de Newton e Lei de Hooke e demais conexões matemáticas que possa vir a surgir a partir do problema gerador;
- Introduzir os conceitos das EDO de 2º Ordem;
- Construir, formalizar e compreender um modelo matemático que possibilite a resolução da situação-problema proposta.

Descrição:

1º Momento – Discussão Teórica do texto "Cálculo Diferencial sob a perspectiva da Resolução de Problemas" de Huanca, Silva e Souza (2021), deixado como tarefa extraclasse no encontro 04.

2º Momento – Entrada dos alunos-participantes na reunião; diálogo inicial; **proposição do Problema** – **Situação-problema 6.**

3º Momento – Solicitar que um aluno-participante faça a **Leitura Individual** da Situação-problema 6.

4º Momento - **Leitura Coletiva** da Situação-problema 6.

5º Momento - Atribuir os alunos-participantes às salas simultâneas – grupos (Alpha, Beta, Gamma e Phi) – na própria reunião virtual Zoom Meetings e solicitar que em suas salas discutam e tentem resolver o problema proposto – **Resolução do Problema.**

6º Momento - Nesse momento, o professor-pesquisador ficará acompanhando a resolução e discussão entre os alunos-participantes, entrando de sala em sala, **observando e incentivando** o processo.

7º Momento - Ao fim do tempo determinado para a resolução do problema, solicitar que cada grupo compartilhe as suas resoluções enviando os registros nos grupos de WhatsApp para que o professor-pesquisador os salve e insira no slide de apresentação de cada encontro para iniciar a próxima etapa.

8º Momento – Atribuir todos os alunos-participantes a uma sala única novamente. Este momento é destinado à **Plenária,** onde cada grupo, a partir de um representante, apresenta suas resoluções da Situação-problema 6. As apresentações irão ocorrer por ordem alfabética – 1º Grupo Alpha, 2º Grupo Beta, 3º Grupo Gamma e, por fim, 4º Grupo Phi.

9º Momento - Após as discussões, instigar os alunos-participantes a uma **Busca do Consenso** de uma resolução válida e que faça sentido para a Situação-problema 6.

10º Momento - A partir das discussões apresentadas e defendidas pelos grupos acerca da resolução da Situação-problema 6 e da busca do consenso na validação de um resultado, realizar a **Formalização do Conteúdo,** aprofundando os conceitos referentes à taxa de variação, proporcionalidade, funções e alguns conceitos da Física, como: força, a Segunda Lei de Newton e Lei de Hooke e demais conexões matemáticas que possa vir a surgir

Atividade Extraclasse:

Leitura do Texto 3: "A Educação Matemática no Ensino Superior: Perspectivas e Desafios no Ensino de Equações Diferenciais" de Melo e Huanca (2019).

Encontro 06

Data: 01/12

Objetivos do Encontro:

- Aprofundar os conceitos das EDO de 1ª e 2ª Ordem trabalhados nas situações-problema anteriores;
- Aprofundar e consolidar relações entre os conceitos das EDO e conexões matemática com conteúdo da Educação Básica e Superior, principalmente de ver as EDO como uma extensão do Cálculo Diferencial e Integral;
- Possibilitar os alunos a explorarem conceitos da Educação Básica como: funções, funções exponenciais e logarítmicas, progressão aritmética e geométrica e proporcionalidade;
- Trabalhar, na perspectiva da Matemática aplicada, conceitos aritméticos, geométricos, algébricos e biológicos;
- Construir, formalizar e compreender um modelo matemático que possibilite a resolução da situação-problema proposta;
- Explorar diferentes modelos matemáticos para a Dinâmica Populacional.

Descrição:

1º Momento – Discussão Teórica do artigo “A Educação Matemática no Ensino Superior: Perspectivas e Desafios no Ensino de Equações Diferenciais ” de Melo e Huanca (2019), deixado como tarefa extraclasse no encontro 05.

2º Momento – Entrada dos alunos-participantes na reunião; diálogo inicial; **proposição dos Problema**s – **Situação-problema 7 e Situação-problema 8.**

3º Momento – Solicitar que um aluno-participante faça a **Leitura Individual** das Situações-problema 7 e 8.

4º Momento - **Leitura Coletiva** das Situações-problema 7 e 8.

5º Momento - Atribuir os alunos-participantes às salas simultâneas – grupos (Alpha, Beta, Gamma e Phi) – na própria reunião virtual Zoom Meetings e solicitar que em suas salas discutam e tentem resolver os problemas propostos – **Resolução do Problema.**

6º Momento - Nesse momento, o professor-pesquisador ficará acompanhando a resolução e discussão entre os alunos-participantes, entrando de sala em sala, **observando e incentivando** o processo.

7º Momento - Ao fim do tempo determinado para a resolução do problema, solicitar que cada grupo compartilhe as suas resoluções enviando os registros nos grupos de WhatsApp para que o professor-pesquisador os salve e insira no slide de apresentação de cada encontro para iniciar a próxima etapa.

8º Momento – Atribuir todos os alunos-participantes a uma sala única novamente. Este momento é destinado à **Plenária,** onde cada grupo, a partir de um representante, apresenta sua (s) resoluções das Situações-problema 7 e 8. As apresentações irão ocorrer por ordem alfabética – 1º Grupo Alpha, 2º Grupo Beta, 3º Grupo Gamma e, por fim, 4º Grupo Phi – para cada problema.

9º Momento - Após as discussões, instigar os alunos-participantes a uma **Busca do Consenso** de uma resolução válida e que faça sentido para as soluções das Situações-problema 7 e 8.

10º Momento - A partir das discussões apresentadas e defendidas pelos grupos acerca da resolução das Situações-problema 7 e 8 da busca do consenso na validação de um resultado, realizar a **Formalização do Conteúdo,** consolidando os conceitos referentes às EDO de 1ª e 2ª ordem e suas conexões com exploração de tópicos como: funções, funções exponenciais e logarítmicas, progressão aritmética e geométrica, proporcionalidade e a taxa de variação – derivada. Tudo isso visando, a partir dos problemas, relacionar e identificar diferentes modelos matemáticos para a Dinâmica Populacional.

11º Momento: Diálogo de encerramento e agradecimentos.

12º Momento: Aplicação do Questionário de Avaliação via Google Forms.

5.4.1 Problemas Geradores

O ponto de partida para o Projeto de Ensino do Curso de Extensão proposto para a investigação prática da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema no ensino de EDO, têm-se os seguintes Problemas Geradores (ONUCHIC; ALLEVATO, 2014):

Situação-problema 1:

Seu José abriu uma caderneta de poupança com o objetivo de no futuro adquirir um bem no valor de R$ 40.000, 00. Foi proposto ao Seu José que os juros sejam creditados continuamente a uma taxa de r = 1 % ao mês e que os depósitos também sejam feitos continuamente a uma taxa constante, sendo no início o saldo igual a zero.

Nessas condições qual deve ser a taxa de depósito mensal para que Seu José, em 20 meses, consiga atingir o valor pretendido?

Objetivos do Problema:

- Apresentar os conceitos introdutórios de EDO (Definição; Ordem de uma EDO; EDO Linear e Não-Linear; Solução de uma EDO; Resolução de uma EDO de 1º Ordem; PVI; e o Método do Fator Integrante);
- Desenvolver e explorar conceitos e conteúdos matemáticos da Educação Básica, como: Progressão Aritmética (P.A.); Progressão Geométrica (P.G); Juros simples; Juros Compostos, Funções; Função Exponencial; Taxa de Variação; Derivada e Proporcionalidade;
- Aprofundar a compreensão dos conceitos da Matemática Financeira;
- Explorar o modelo matemático tipo exponencial que representa o tema juros.

Conteúdos Específicos:

- Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem;
- Equações Diferenciais Ordinárias Lineares;
- Solução de uma EDO;
- Problema de Valor Inicial (PVI);
- Resolução de uma EDO de 1º Ordem utilizando o método do Fator Integrante.

Situação-problema 2:

Com o objetivo de fazer uma previdência particular, uma pessoa deposita uma quantia de R$ 100, 00 por mês durante 20 anos (suponha que o depósito seja feito continuamente a uma taxa de R$ 100,00 por mês).

a) Supondo que neste período a taxa de juros seja de 1 % ao mês (contínua), qual o valor que esta pessoa iria ter ao fim deste período?

b) Se após o período anterior, esta pessoa quisesse fazer retiradas mensais, qual deveria ser o valor destas retiradas para que em 20 anos tenha desaparecido o capital, se a taxa de juros continuasse em 1 % (contínua)?

Objetivos do Problema:

- Aprofundar os conceitos trabalhados na situação-problema anterior;
- Explorar conceitos da Matemática Financeira relacionando-os com os conceitos introdutórios das EDO;
- Reconhecer todas as variáveis (dependentes e independentes) em uma situação-problema.

Conteúdos Específicos:

- Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1ª Ordem;
- Problema de Valor Inicial (PVI);
- Resolução de uma EDO de 1ª Ordem utilizando o método do Fator Integrante.

Situação-problema 3:

Quem não gosta de um cafezinho bem quentinho?
Dona Adelieta, preparou um café que, depois de coado, está a 90°C e verificou que um minuto depois sua temperatura passa para 85°C, em uma cozinha a 25°C. Nessas condições, quanto tempo levará para o café chegar a 60°C?

Objetivos do Problema:

- Entender como ocorre o processo de aquecimento e resfriamento de um corpo em uma determinada temperatura ambiente, em termos dos conceitos matemáticos;
- Desenvolver e explorar conceitos e conteúdos matemáticos da Educação Básica, como: Progressão Aritmética (P.A.); Progressão Geométrica (P.G); Funções e Proporcionalidade;
- Instigar o pensamento exploratório acerca dos conceitos de taxa de variação contínua ou constante e a ideia do conceito de Derivada;
- Analisar a importância do jogo de sinais (Conjunto Z) em aplicações matemáticas;
- Explorar o Modelo de Resfriamento de Newton.

Conteúdos Específicos:

- Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem;
- Equações Diferenciais Ordinárias Lineares;
- Problema de Valor Inicial (PVI);
- Equações Separáveis.

Situação-problema 4:

Um termômetro é levado de uma sala, onde a temperatura é de 20º C, para fora dela, onde a temperatura e de 5º C. Após $\frac{1}{2}$ minuto o termômetro marca 15º C.

a) Determine a temperatura marcada no termômetro como função do tempo.

b) Qual será a leitura do termômetro após 1 minuto?

c) Em quanto tempo o termômetro irá marcar 10º C?

Objetivos do Problema:

- Aprofundar a compreensão do processo de aquecimento e resfriamento de um corpo em uma determinada temperatura ambiente, em termos dos conceitos matemáticos;
- Explorar conceitos de Progressão Aritmética (P.A.); Progressão Geométrica (P.G); Funções e Proporcionalidade, relacionando-os com os conceitos de EDO;
- Analisar Taxa de Variação e Proporcionalidade;
- Reconhecer todas as variáveis (dependentes e independentes) em uma situação-problema.

Conteúdos Específicos:

- Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem;
- Equações Diferenciais Ordinárias Lineares;
- Problema de Valor Inicial (PVI);
- Equações Separáveis.

Situação-problema 5:

Um tanque contém inicialmente 100 litros de água e 100 gramas de sal. Então, uma mistura de água e sal, na concentração de 5 gramas de sal por litro, é bombeada para o tanque a uma taxa de 4 litros por minuto. Simultaneamente a solução (bem misturada) é retirada do tanque na mesma taxa.

a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.
b) Calcule a concentração limite de sal no tanque

Objetivos do Problema:

- Explorar os conceitos de EDO Linear de 1º Ordem, identificando o método de resolução correto para resolve-la (Equações Separáveis – Fator Integrante);
- Formalizar os conceitos de funções inversas;
- Desenvolver conceitos práticos da Integral e Derivada;
- Reconhecer todas as variáveis (dependentes e independentes) em uma situação-problema.

Conteúdos Específicos:

- Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem;
- Equações Diferenciais Ordinárias Lineares;
- Problema de Valor Inicial (PVI);
- Equações Separáveis;
- Fator Integrante.

Situação-problema 6:

Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao *quadrado. Encontre a frequência, o período e a amplitude do movimento. Determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico:*

a) Se a massa é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontada para cima de 4 centímetros por segundo.
b) Se a massa é puxada para baixo contraindo a mola 1 centímetro e depois colocada em movimento com uma velocidade para baixo de 10 centímetros por segundo.
c) Se a massa é puxada para baixo contraindo a mola 2 centímetros e depois é solta.

Objetivos do Problema:

- Reconhecer todas as variáveis (dependentes e independentes) em uma situação-problema;
- Desenvolver conceitos das EDO de 2ª Ordem;
- Trabalhar conceitos da Física, como: força de ação e reação; Lei de Hooke; e Segunda Lei de Newton;
- Construir, formalizar e compreender um modelo matemático que possibilite a resolução da situação-problema proposta.

Conteúdos Específicos:

- Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem;
- Equações Diferenciais Ordinárias Lineares;
- Equações Homogêneas;
- Problema de Valor Inicial (PVI).

Situação-problema 7:

Um dos problemas clássicos em Farmacologia consiste em saber como decai a concentração de uma droga administrada em um paciente. Uma aplicação prática do problema de absorção de drogas pode ser a determinação do tempo que o organismo leva para eliminar certa dosagem de uma substância aplicada em um paciente.

A informação sobre esse fato admite que a dosagem seja aplicada na medida correta no paciente e o intervalo de tempo adequado entre cada aplicação. Sabendo que a concentração C(t) de um remédio na circulação sanguínea de um determinado paciente diminui a uma taxa proporcional à quantidade de medicamento que está presente naquele momento

Determine quanto tempo o paciente leva para eliminar 90% do medicamento aplicado, sabendo-se que o corpo elimina metade do remédio em 30 horas.

Objetivos do Problema:

- Aprofundar os conceitos das EDO de 1ª e 2ª Ordem trabalhados nas situações-problema anteriores;
- Compreender modelos matemáticos que descrevem a Dinâmica Populacional (Decrescimento);
- Explorar conceitos como: Progressão Aritmética (P.A.); Progressão Geométrica (P.G); Funções; Função Exponencial; Taxas de Variação e Proporcionalidade;
- Aprofundar e consolidar relações entre os conceitos das EDO e conexões matemáticas com conteúdo da Educação Básica e Superior, principalmente ver as EDO como uma extensão do Cálculo Diferencial e Integral.

Conteúdos Específicos:

- Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem;
- Equações Diferenciais Ordinárias Lineares;
- Problema de Valor Inicial (PVI);
- Equações Separáveis;
- Fator Integrante;
- Análise Qualitativa – Campo de Direções.

Situação-Problema 8:

Em uma cultura há inicialmente P_0 bactérias. Uma hora depois, t=1 o número de bactérias passa a ser $\frac{3}{2}P_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.

Objetivos do Problema:

- Relacionar diferentes situações-problemas que envolvem Dinâmica Populacional;
- Aprofundar os conceitos das EDO de 1ª e 2ª Ordem trabalhados nas situações-problema anteriores;
- Compreender modelos matemáticos que descrevem a Dinâmica Populacional (Crescimento);
- Explorar conceitos como: Progressão Aritmética (P.A.); Progressão Geométrica (P.G); Funções; Função Exponencial; Taxas de Variação e Proporcionalidade.

Conteúdos Específicos:

- Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem;
- Equações Diferenciais Ordinárias Lineares;
- Problema de Valor Inicial (PVI);
- Equações Separáveis;
- Fator Integrante;
- Análise Qualitativa – Campo de Direções.

Os Problemas Geradores (ONUCHIC; ALLEVATO, 2014) supracitados foram reelaborados e selecionados de acordo com os conceitos pertinentes ao conteúdo das EDO, o qual pretende-se introduzir durante os encontros no Curso de Extensão, seguindo os pressupostos teóricos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, no contexto do ensino remoto.

6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE EVIDÊNCIAS – 3º BLOCO DE ROMBERG

Neste capítulo, ao chegar no terceiro bloco de atividades da pesquisa, proposto por Romberg-Onuchic, tem-se o momento de relatar resultados, os quais condiz com a coleta e interpretação de evidências.

Apresentamos uma descrição, em um contexto geral, de todo o processo prático de investigação desta pesquisa, relatando de forma minuciosa cada etapa do Projeto de Ensino, durante às ações do curso de extensão.

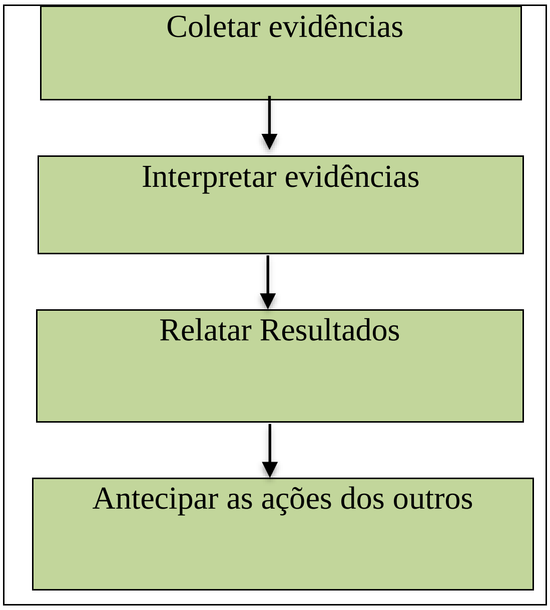
Logo, esse é o momento de relatar, detalhadamente, cada encontro do curso, com a participação dos sujeitos envolvidos, abordando todo o contexto da sala de aula virtual, do professor-pesquisador, alunos-participantes, situações-problema e tarefas, produção, relatos e *feedbacks,* durante e após a implementação do Projeto de Ensino, aplicado ao curso de extensão.

Com isso, será apresentada uma análise geral, como professor-pesquisador, acerca das possibilidades e limitações da proposta de ensino "Equações Diferenciais Ordinárias através da Resolução de Problemas".

6.1 PROCEDIMENTO GERAL EM AÇÃO

Ao encerrar o 2º Bloco de Romberg-Onuchic (2014), com a descrição das Estratégias e Procedimentos Gerais e suas respectivas Estratégias e Procedimentos Auxiliares, apresentamos nesse capítulo a descrição e análise da execução do Projeto de Ensino (PE) no curso de extensão, o que compõe as atividades do último e 3º Bloco de Romberg-Onuchic – coleta de evidências, interpretação de resultados, relatos dos resultados e, por fim, antecipação das ações dos outros.

Figura 29: 3º Bloco do Fluxograma de Romberg-Onuchic.



Fonte: (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

Inicialmente, apresentaremos o Procedimento Geral em ação, ou seja, descreveremos como se deu a coleta das evidências durante a pesquisa de campo, visto que os procedimentos auxiliares já foram executados e descritos no capítulo anterior. Em seguida, também descreveremos como aconteceu cada um dos encontros, explicitando a dinâmica de trabalho no contexto de ensino remoto e, assim, através das evidências expressadas e analisadas, buscaremos responder à pergunta norteadora da pesquisa a partir de uma discussão sobre a análise dos dados coletados.

Definido o Procedimento Geral (PG):

Criar um Projeto de Ensino (PE) para ser aplicado em um curso de extensão universitária sobre Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para alunos do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), campus Cuité/, e professores de Matemática.

Colocá-lo em ação, significa executá-lo. O PE, como já foi descrito no capítulo anterior, foi elaborado com o objetivo de ser aplicado em um curso de extensão no formato remoto, e a partir dele, coletar evidências que possam responder à pergunta de pesquisa. Nesse sentido, temos o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como foco principal, pois, baseados em pesquisas levantadas e discutidas na fundamentação teórica, percebemos que por meio dela podemos possibilitar aos alunos-participantes a re (construírem) conhecimentos sobre as EDO, possibilitando que se tornem construtores do seu próprio conhecimento.

6.1.1 EDO através da Resolução de Problemas: da prática à teoria

O curso de extensão “EDO através da Resolução de Problemas: da prática à teoria”, com carga horária de 30 horas, ocorreu durante os meses de outubro, novembro e dezembro, em seis encontros (síncronos), paralelamente a isso, aconteciam atendimentos (assíncronos), nas quartas e quintas-feiras, no período de 27 de outubro a 01 de dezembro.

Os encontros síncronos ocorreram no formato online por meio da plataforma Zoom Meetings, com uso também do aplicativo WhatsApp, como meio de contatos instantâneos, compartilhamento de avisos, tarefas e resoluções de atividades propostas, durante os encontros virtuais.

A abertura das inscrições por meio do preenchimento de formulários on-line – Google Forms – permaneceu recebendo respostas num período de 07 a 17 de outubro, tendo como público-alvo alunos do curso de Licenciatura em Matemática e professores de matemática. Durante esse período, obtivemos um número satisfatório de interessados de diferentes Estados, cidades e instituições universitárias do Brasil.

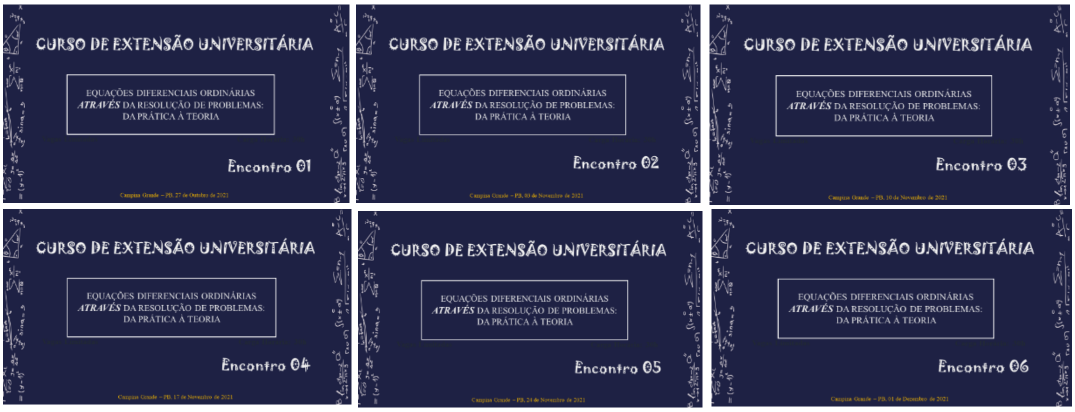
O contato inicial do professor-pesquisador com os inscritos, aconteceu pelo e-mail que informaram no ato da inscrição. Após isso, o professor-pesquisador criou um grupo no WhatsApp denominado “CEU – EDO através da RP” e adicionou todos os inscritos homologados por meio de um link de acesso a este grupo, o que facilitou o contato direto e célere, através das mensagens instantâneas e recebimento de link de acesso aos encontros síncronos.

Os encontros aconteceram nas quartas-feiras, em tempo real e de forma remota, num período estabelecido de duas horas. No entanto, em alguns encontros, foi superado o tempo de três horas de duração, e isso se justifica por acontecer atrasos, problemas tecnológicos, bem como, o relevante envolvimento entre os alunos-participantes e o professor-pesquisador. Vale salientar que a dinâmica de trabalho durante os encontros superou as nossas expectativas em relação ao tempo, tendo em vista que o trabalho remoto dificultava a agilidade de algumas ações desse processo.

Durante os encontros dois e três, especificamente, começou a ser utilizada como dinâmica de trabalho a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, no entanto, foi percebido uma relevante dificuldade no processo de ação, tanto por parte dos alunos-participantes, a entenderem essa dinâmica, quanto do professor-pesquisador em aplicar a dinâmica.

Foi preparado para os encontros um material de apoio composto por uma sequência de slides que continha todo o roteiro da dinâmica do curso. Isso se mostrou importante, pois conseguimos manter uma organização melhor na sequência pedagógica da referida metodologia, tendo em vista que, a mesma foi elaborada, estudada e desenvolvida para salas de aulas presencias. Ou seja, criar um ambiente adaptado para esse contexto remoto, contribuiu relevantemente para a sua aplicação, seguindo seus pressupostos teóricos, bem como para o usufruir melhor do tempo, o que permitiu os alunos-participantes sentir-se inseridos em um ambiente confortável para sua participação efetiva no processo.

Figura 30: Materiais de apoio de cada encontro do curso de extensão.



Fonte: acervo do curso de extensão.

Cada material de apoio foi elaborado com os seguintes tópicos:

- Capa de apresentação;
- Situação-Problema – Problema Gerador de cada encontro;
- Espaço para a colagem das resoluções de cada grupo (Alpha, Beta, Gamma e Phi) – Registros na lousa (virtual);
- Espaço para a Plenária;
- Formalização do Conteúdo proposto;
- Busca do Consenso – Resolução do Problema.

- Situação-problema como proposta de tarefa extraclasse – Proposição de novos problemas;
- Em alguns momentos, material teórico sobre Resolução de Problemas.

Vale salientar, que os seis materiais de apoio só eram enviados ao grupo de participantes após a finalização de cada encontro, uma vez que continha neles, além da formalização de conteúdo, a proposta de tarefa extraclasse.

Foi nesse formato que ocorreram os seis encontros virtuais do curso de extensão.

6.1.1.1 Os encontros

PRIMEIRO ENCONTRO (27/10/2021)

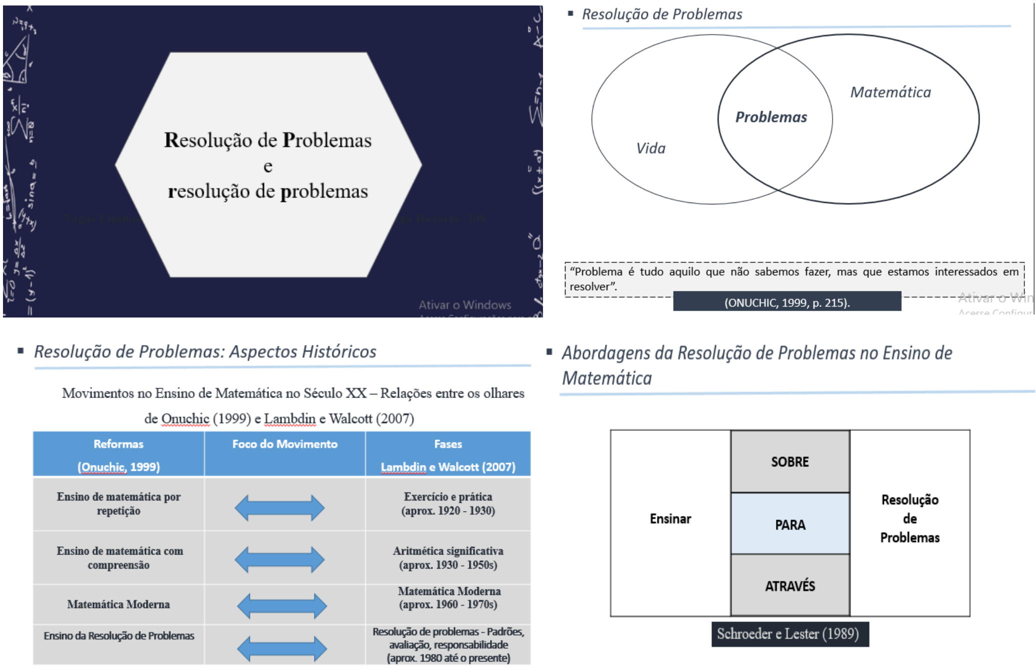
O primeiro encontro objetivou acolher os alunos-participantes. Após as boas-vindas, o professor-pesquisador sugeriu que a turma se apresentasse e relatasse sobre suas expectativas pelo o tema e início do curso; então foi interrogado: “O que trouxe vocês aqui?”.

Após suceder o primeiro momento, foi realizada, por meio de slides e vídeo, uma apresentação do professor-pesquisador, mostrando um pouco da sua formação e trajetória. Além disso, foi explanado sobre as especificações do curso, desde sua origem até a sua presente prática. Nesse momento, também foi informado os objetivos, cronograma, local, meio e instrumentos de acesso, ferramentas tecnológicas necessárias, horários e o Termo de Consentimento da participação desta pesquisa. O professor-pesquisador ainda questionou aos alunos, sobre suas disposições a participar, e a resposta foi unânime, todos afirmaram que estavam curiosos e empolgados.

Nesse momento, foi apresentado a dinâmica de trabalho que iria ser abordada em cada encontro. Ficou sabido que iríamos colocar em prática a Resolução de Problemas, que na realidade, parte dos alunos-participantes apresentaram em seus discursos não ter conhecimento sobre o assunto, enquanto outros falaram já ter conhecimento prévio, por terem estudado em suas graduações, e por utilizarem esse método em suas práticas pedagógicas.

Inicialmente foi abordada a distinção quanto ao uso do termo Resolução de Problemas e resolução de problemas, buscando diferenciar não somente à etimologia das palavras, mas sobretudo quanto aos aspectos utilitários, baseados em nossa fundamentação teórica, quando nos referimos à Teoria Resolução de Problemas. Com isso, foram aprofundados aspectos históricos dos movimentos no ensino de matemática desde o século XX, em busca de identificar o surgimento e o desenvolvimento da RP ao longo da história, enfatizando as diferentes abordagens de se utilizar a RP no ensino de matemática, desde a Educação Básica até o Ensino Superior. A figura a seguir ilustra os slides utilizados.

Figura 31: Print Screen – Primeiros slides da apresentação sobre Resolução de Problemas.

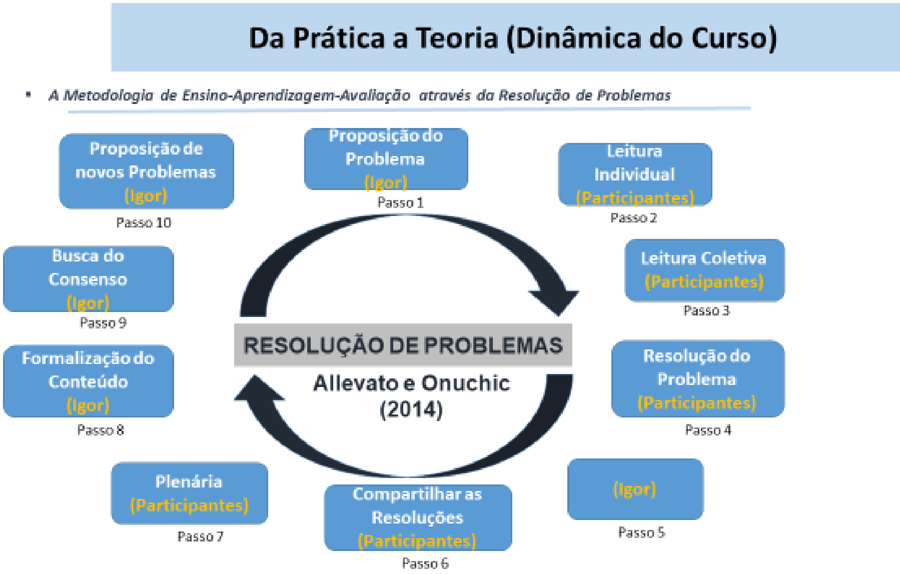


Fonte: acervo do curso de extensão.

Posteriormente, foi apresentado um slide, conforme a figura a seguir, ilustrando a dinâmica utilizada quando se trabalha a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Através da Resolução de Problemas, entretanto, com algumas adaptações, tendo em vista que a nossa utilização aconteceria em formato virtual. As modificações foram discutidas com os participantes e justificadas, tendo em vista o nosso cenário.

Uma boa compreensão dessa dinâmica era necessária, haja vista que a partir do próximo encontro (Encontro 02), iríamos colocá-la em prática. Os participantes se mostraram satisfeitos ao que foi explanado, pois, interviam expondo suas dúvidas quanto às etapas do curso nessa abordagem virtual. Vale salientar que um dos pontos fortes dessa metodologia é o trabalho coletivo e cooperativo. Abaixo, apresentamos registro desse momento, vejamos:

Figura 32: Print Screen – Slide da apresentação sobre a Dinâmica de trabalho da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas no contexto remoto.



Fonte: acervo do curso de extensão.

Em busca de responder aos questionamentos dos participantes, o professor-pesquisador explicou as ferramentas da plataforma nas quais eles estavam inseridos, Zoom Meetings, explanando suas utilidades para a necessidade do momento, enfatizando a ferramenta de Salas Simultâneas, que permitiam a divisão dos participantes em pequenos grupos.

Entretanto, ficou esclarecido aos alunos a forma como o professor-pesquisador iria receber os *feedbacks* ao longo da realização das atividades e tarefas, que iriam ser aplicadas nos encontros virtuais, bem como o extraclasse.

Nesse sentido, ficou combinado com os participantes, que outros grupos seriam criados, além do que já existia (o grupo CEU – EDO através da RP). O intuito da criação e utilização desses grupos extras, justifica-se por proporcionar organização dinâmica de trabalho de cada encontro, ou seja, seguindo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Assim, no momento em que todos os participantes lessem a situação-problema – Problema Gerador – e fossem convidados a resolverem coletivamente, seriam separados em grupos e atribuídos às salas simultâneas, para que assim pudessem resolver o problema de forma cooperativa, separados em menores quantidades e de forma privada.

Desse modo, feitas as atribuições dos grupos na plataforma Zoom Meetings, esses participantes teriam como meio auxiliar os seus respectivos grupos no WhatsApp, para que também pudessem discutir, conversar e principalmente enviar registros, tanto para os seus colegas, quanto para o professor-pesquisador, visto que o mesmo, ao fim das resoluções, teria que salvar as imagens e arquivos para inseri-los nos slides – Registros na Lousa (virtual).

Em busca de aproveitar o tempo e de manter a organização, o professor-pesquisador, de acordo com uma análise prévia feita nos formulários de inscrições sobre os perfis dos participantes, estabeleceu critérios para a organização dos grupos, dos que já cursaram e não cursaram EDO.

Os grupos formados foram:

1. Grupo Alpha
2. Grupo Beta
3. Grupo Gamma
4. Grupo Phi

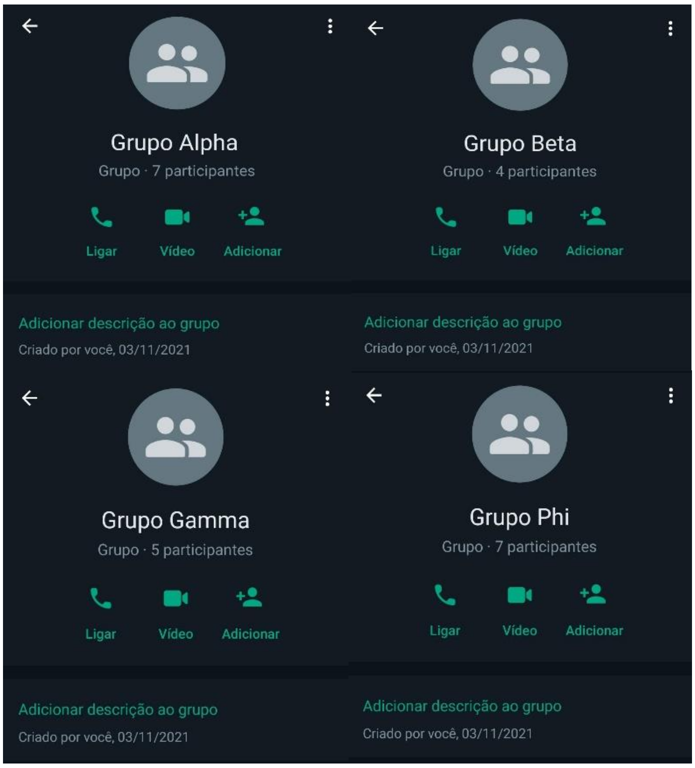
Antes da finalização do primeiro encontro, foi enviado um link de acesso para cada grupo, considerando que a divisão desses participantes já estava estabelecida. Vejamos na figura abaixo, a identificação de cada um:

Figura 33: Print Screen – Envio do link de acesso aos subgrupos (Alpha, Beta, Gamma e Phi) de WhatsApp.

Fonte: acervo do curso de extensão.

É relevante ressaltar que, a criação desses grupos, também se justifica, por favorecer o envio das resoluções de suas tarefas de forma particular, além disso, no momento de registros na Lousa (virtual), seria de fato uma novidade a explanação da determinada resolução, pois, apenas o professor-pesquisador teria acesso a todos os grupos. Abaixo, há mais uma imagem da criação dos mesmos:

Figura 34: Print Screen – Subgrupos do WhatsApp (Alpha, Beta, Gamma e Phi).



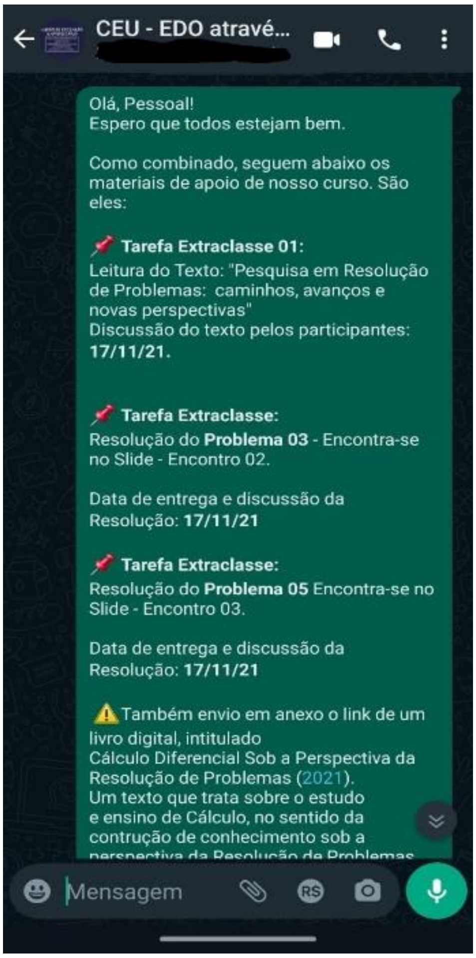
Fonte: acervo do curso de extensão.

No primeiro encontro, reuniram-se 16 participantes, o que favoreceu a divisão exata, na formação de quatro grupos, no entanto, nos demais momentos desses encontros, o número de participantes sofria alteração, logo, acontecia relocações.

As relocações não interferiram na nossa pesquisa, visto que, tínhamos o controle das identificações dos participantes desde a inscrição do curso, e mantivemos os dados atualizados no diário de campo após cada encerramento, o que favoreceu o conhecimento sobre a assiduidade de cada aluno, que aliás, era pré-requisito para obtenção do certificado no final do curso.

Salienta-se que a utilização do grupo geral de participantes não foi ignorada, ele era usado constantemente, especialmente como meio de avisos gerais e envio de materiais e tarefas, como é ilustrado na figura a seguir:

Figura 35: Print Screen – Envio de avisos e tarefas ao Grupo Geral de participantes no WhatsApp.



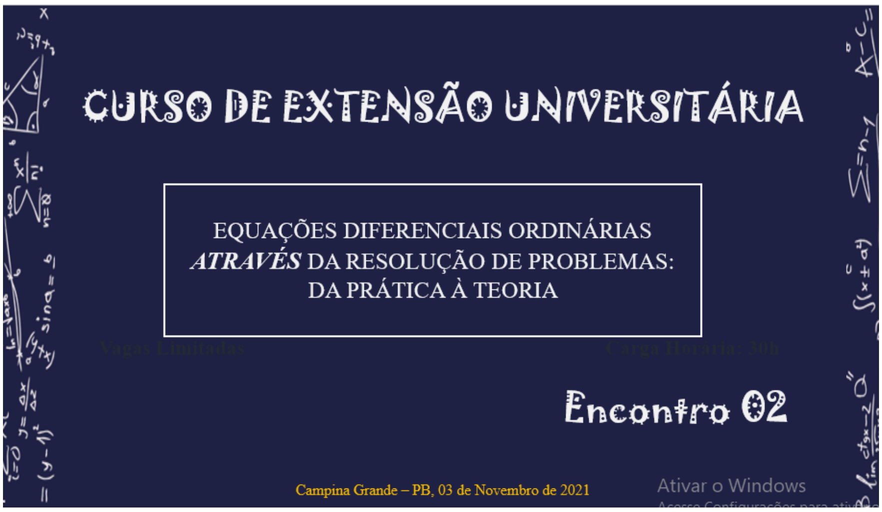
Fonte: acervo do curso de extensão.

A organização do grupo geral e dos subgrupos, favoreceu a segurança e nos impulsionou na continuidade dos próximos desafios, que está regido desde a prática à teoria, essência da realização dessa intervenção e assim, sucedeu.

SEGUNDO ENCONTRO (03/11/2021)

Ao iniciar o segundo encontro, foi possível perceber entusiasmos por parte dos participantes em dar continuidade ao trabalho e vivenciar essa experiência. Este encontro começou as 14 horas e 16 minutos do dia 03 de novembro. Abaixo, imagem desse momento, que destaca a relevância de que cada encontro houvesse um ambiente virtual adequado.

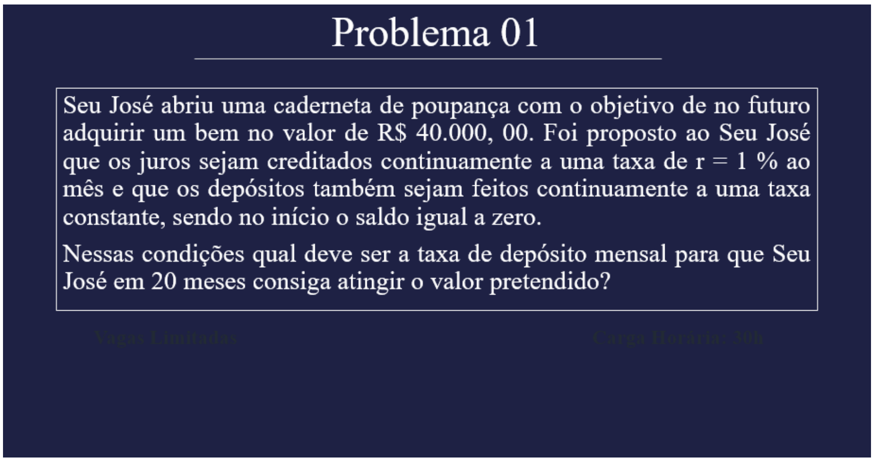
Figura 36: Print Screen – Slide da apresentação de abertura do Encontro 02.



Fonte: acervo do curso de extensão.

Após às introduções, apresentou-se a situação-problema 01, que na realidade o intitulamos como Problema 01– o Problema Gerador. Vejamos:

Figura 37: Print Screen – Slide da apresentação da Situação-Problema 01 (Juros).



Fonte: acervo do curso de extensão.

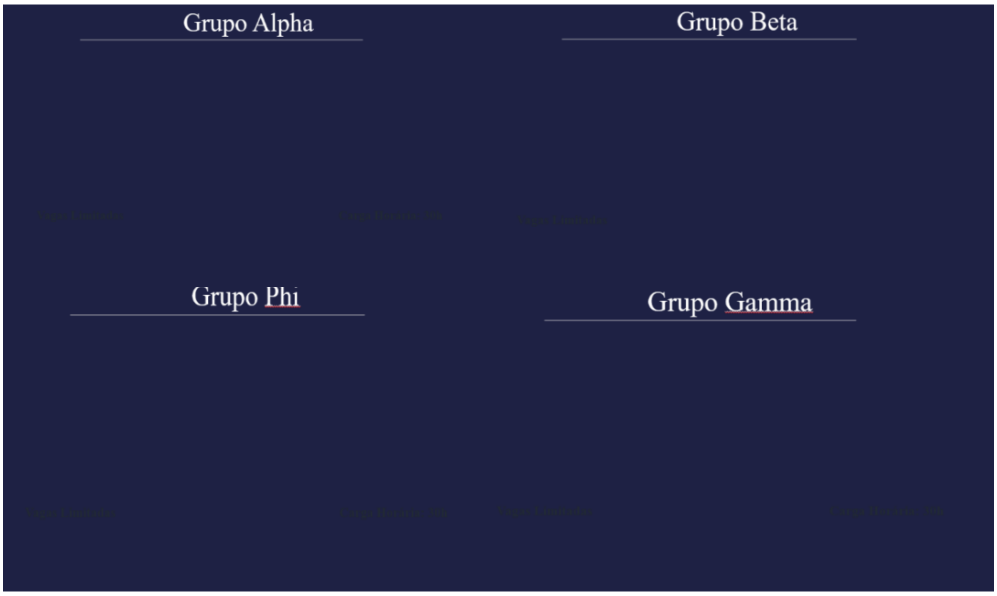
Nesse momento, seguindo a metodologia mencionada, foi solicitado que um participante realizasse a leitura do problema, liberando o seu áudio. Em seguida, foi sugerido uma leitura coletiva, onde o professor-pesquisador questionou se todos entenderam o problema e se alguma dúvida existia a respeito do enunciado. Conferido que não existiam dúvidas, aconteceu a divisão dos participantes nos seus respectivos grupos, intitulados como: (Alpha, Beta, Gamma e Phi).

Após as divisões, o professor-pesquisador ficou sozinho nesse instante, podendo ele, como anfitrião da reunião, entrar em cada sala simultânea, quantas vezes desejasse. Uma limitação observada deste formato remoto durante a nossa pesquisa, em relação a análise de dados, é que a gravação da reunião acompanhava apenas onde o professor-pesquisador estava no momento, ou seja, não era possível o professor-pesquisador e a gravação de tela acompanharem tudo simultaneamente.

Durante a etapa da resolução do problema, o professor-pesquisador orientou que os grupos enviassem seus registros nos grupos do WhatsApp para que pudesse arquivar e posteriormente os utilizasse nas próximas etapas. Desse modo, com o término do tempo proposto para essa etapa de resolução da situação-problema, o anfitrião fechou as salas, simultaneamente, permitindo que os participantes se encontrassem em uma única sala novamente. A partir desse momento, foi sugerido que os participantes escolhessem um representante de cada grupo para apresentar a sua resolução. Esse momento denominamos de Registros na Lousa (virtual).

Conforme já foi mencionado, foi preparado pelo professor-pesquisador o espaço para serem inseridas as imagens da resolução de cada grupo, dessa forma, o representante de cada grupo poderia explicar como se procedeu a sua realização. A figura a seguir ilustra o ambiente em que cada grupo iria apresentar seus registros, respectivamente.

Figura 38: Print Screen – Slide da apresentação do momento da Plenária de cada grupo.



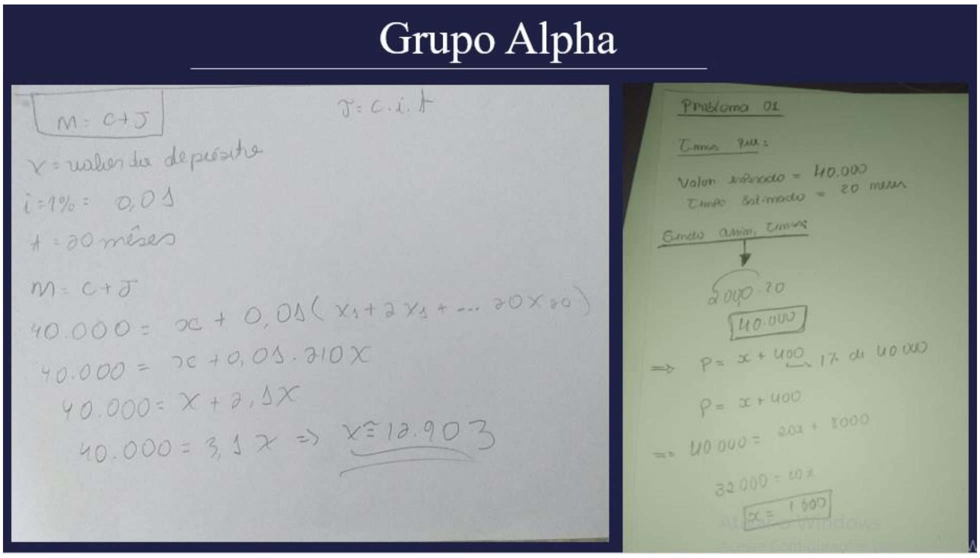
Fonte: acervo do curso de extensão.

No momento de Registros na Lousa (virtual) e explicação das resoluções do Problema Gerador, apenas o representante haveria de ficar com o áudio ligado, pois nesse momento, as intervenções não eram aceitas entre os grupos, assim, cada um poderia refletir individualmente sobre os caminhos que foram percorridos e pensados para as resoluções. Com isso, a sequência das apresentações, na lousa (virtual), aconteceu obedecendo uma ordem, no caso, pelas iniciais do alfabeto grego:

1. Apresentação Grupo Alpha
2. Apresentação Grupo Beta
3. Apresentação Grupo Gamma
4. Apresentação Grupo Phi

As figuras a seguir ilustram e detalham como aconteceram esses momentos.

Figura 39: Print Screen – Slide da apresentação da etapa Registros na Lousa (virtual) do Grupo Alpha na Situação-problema 01.

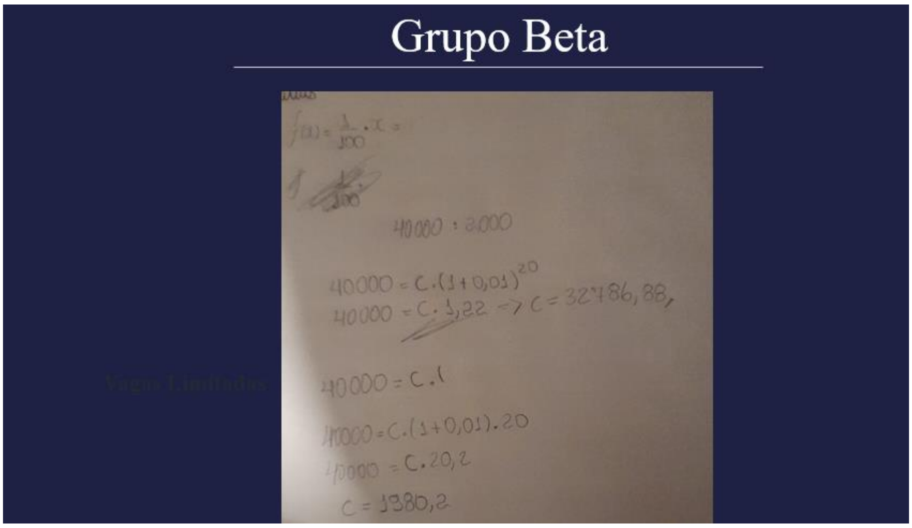


Fonte: acervo do curso de extensão.

O grupo Alpha apresentou suas resoluções, mostrando caminhos distintos entre os próprios participantes do grupo. Em consenso, os participantes resolveram apresentar os dois caminhos de resolução. O primeiro, utilizando aspectos da Matemática Financeira, abordando fórmulas e modelos de juros simples; a segunda maneira, por meio da linguagem algébrica, onde construíram uma equação/modelo que descrevesse a situação.

A seguir, vejamos a resolução do grupo Beta:

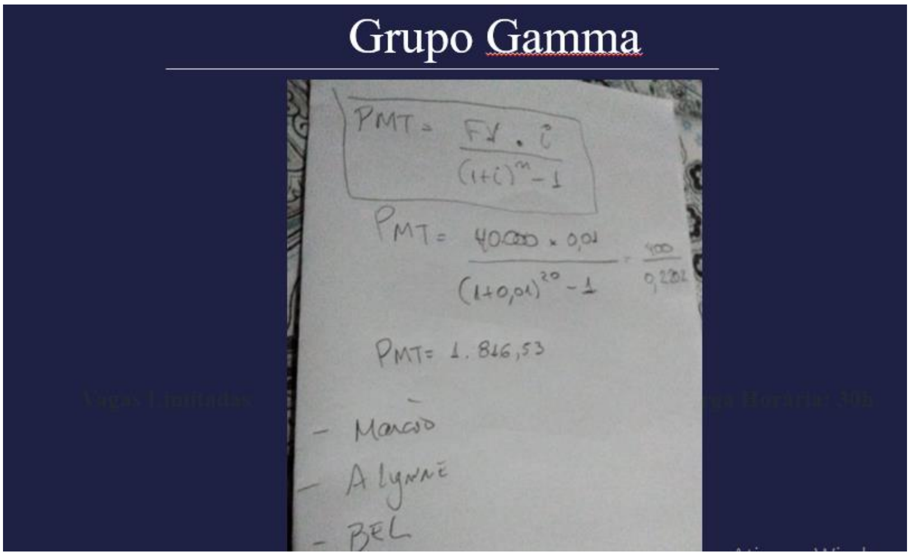
Figura 40: Print Screen – Slide da apresentação da etapa Registros na Lousa (virtual) do Grupo Beta na Situação- Problema 01.



Fonte: acervo do curso de extensão.

O grupo Beta também apresentou aspectos da Matemática Financeira, chegando a um resultando diferente do alcançado pelo grupo anterior. Após essa apresentação, verificamos a resolução do grupo Gamma:

Figura 41: Print Screen – Slide da apresentação da etapa Registros na Lousa (virtual) do Grupo Gamma na Situação- Problema 01.

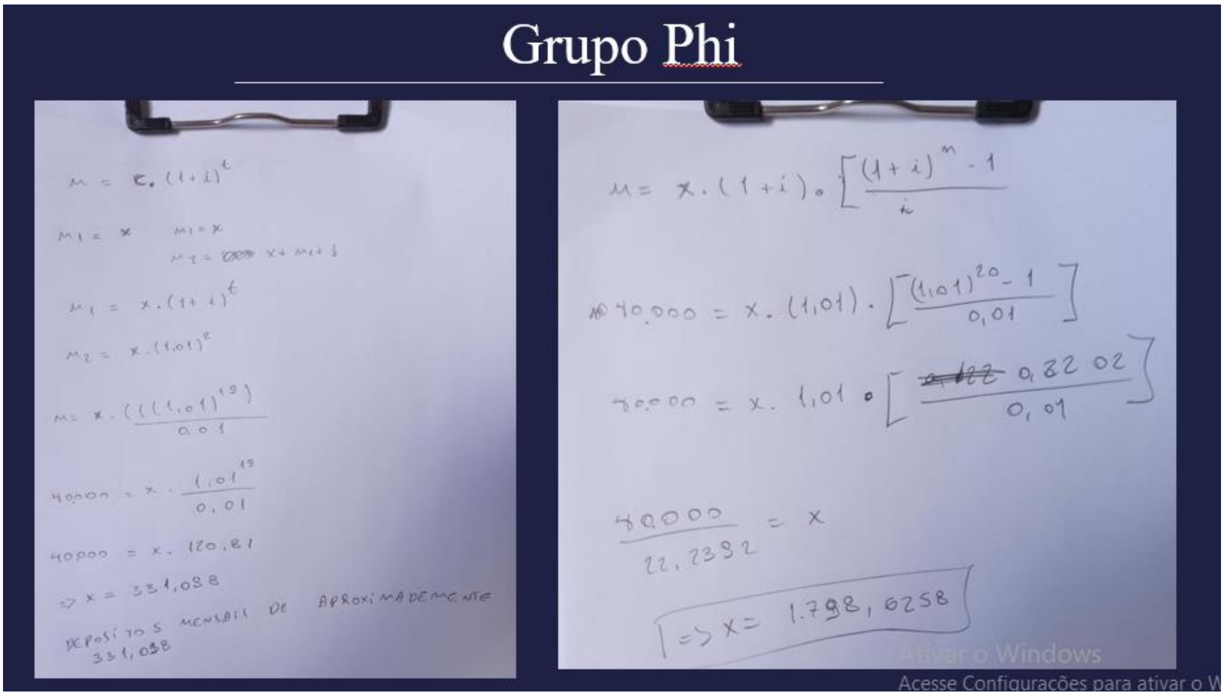


Fonte: acervo do curso de extensão.

O grupo Gamma, assim como os grupos anteriores, recorreu às fórmulas e modelos da Matemática Financeira para resolver o problema, apresentando um resultado que se aproximava superiormente ao do grupo Beta.

A seguir, é possível observar os resultados do grupo Phi:

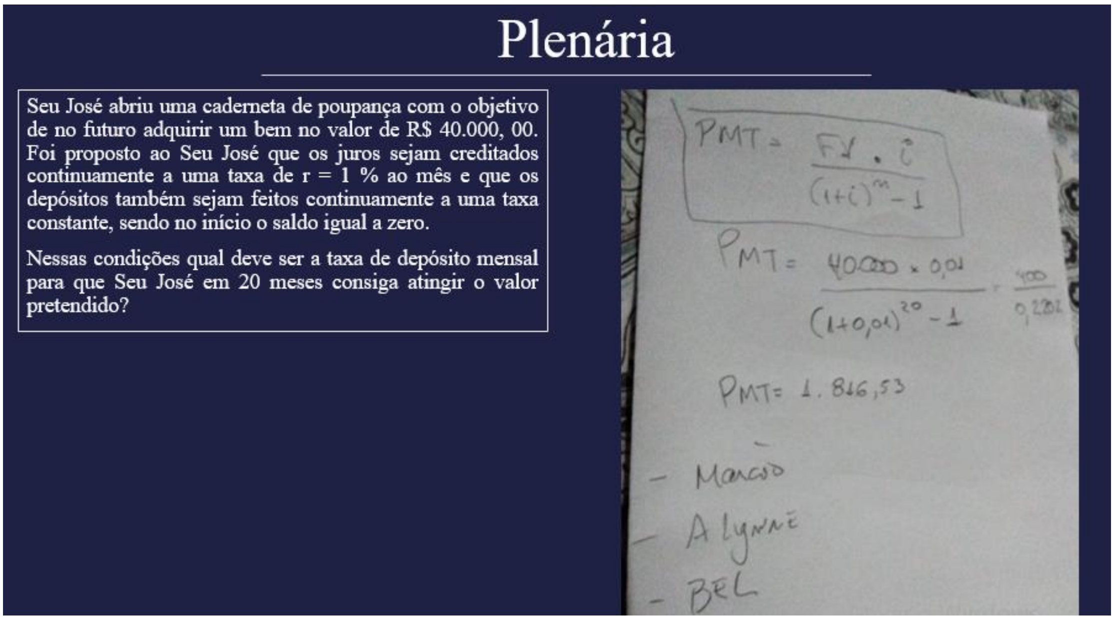
Figura 42: Print Screen – Slide da apresentação da etapa Registros na Lousa (virtual) do Grupo Phi na Situação- Problema 01.



Fonte: acervo do curso de extensão.

O grupo Phi apresentou um resultado também distinto dos outros grupos, porém utilizando um modelo semelhante ao do grupo Alpha. Após esses momentos de apresentações, chegou a hora de uma discussão livre – a Plenária. O professor-pesquisador selecionou uma das resoluções apresentadas para ser discutida por todo o grupo. Acompanhemos:

Figura 43: Print Screen – Slide da apresentação do momento da Plenária de discussões das resoluções da Situação- Problema 01.



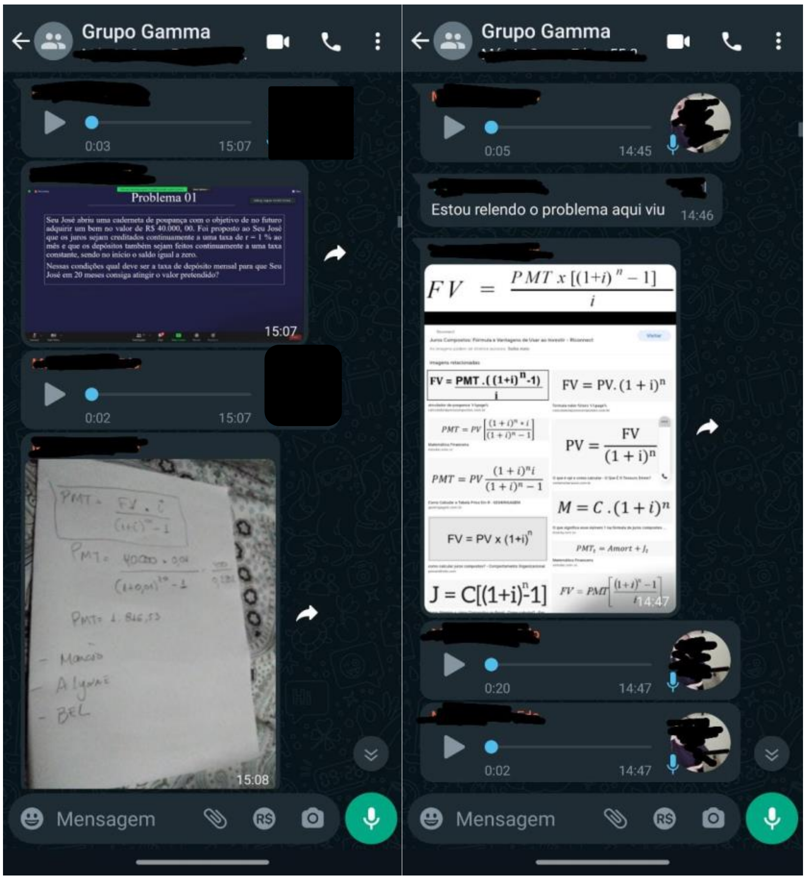
Fonte: acervo do curso de extensão.

Foi escolhida a resolução do grupo Gamma, pois foi a que mais se aproximou do resultado correto. A discussão foi muito proveitosa, o professor-pesquisador interviu em poucos momentos, atuando apenas como mediador.

Vale salientar que a discussão ocorria com todos os participantes do grupo Gamma, o que fortalece a ideia de um trabalho colaborativo e cooperativo. Dos três participantes desse grupo, no encontro 01, dois ainda não tinham cursado EDO, enquanto o outro participante possuía doutorado na área, porém naquele momento, todos foram solucionadores do problema com equidade.

Os grupos no WhatsApp também nos forneceram tais constatações, ao vermos todos os participantes dialogando, trocando registros e, consequentemente, compartilhando saberes mutuamente, numa contribuição coletiva e cooperativa de trabalho. Abaixo, vejamos o envio de resoluções em grupo de WhatsApp:

Figura 44: Print Screen – Envio de resoluções da Situação-Problema 01 no WhatsApp (Grupo Gamma).



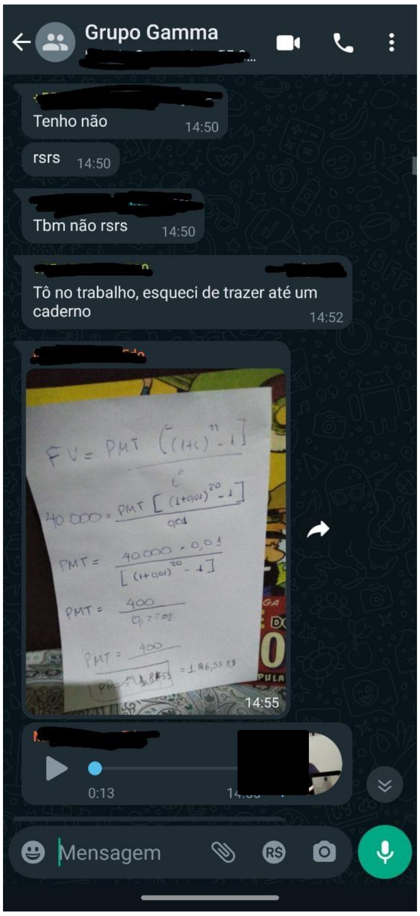
Fonte: acervo do curso de extensão.

Nesse momento, percebe-se o instante em que os integrantes do grupo discutem a sua resolução mencionando aspectos da Matemática Financeira ao pesquisarem fórmulas e modelos que descrevam a situação-problema.

É importante lembrar que a validade desse momento não está só no fato deles buscarem fórmulas e modelos, mas sim no fato de terem que analisar se aqueles conceitos e termos algébricos faziam sentido para o que eles queriam do problema - processo de validação do modelo e reconhecimentos de varáveis.

Na figura abaixo, podemos ver alguns registros das discussões sobre a situação problema:

Figura 45: Print Screen – Discussões no momento de resolução da Situação-Problema 01 no WhaatsApp (Grupo Gamma).



Fonte: acervo do curso de extensão.

Seguindo as etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), após a sessão plenária, ou seja, num momento de um esforço conjunto, do professor-pesquisador e alunos-participantes, discutindo acerca do painel de soluções apresentadas e analisando questões e conceitos matemáticos, avançamos para a etapa (8), Busca do Consenso, entretanto, como já mencionado, o público do nosso curso de extensão era composto por um grupo diverso de estudantes, desde os que estavam em formação inicial, até professores com formação continuada em andamento e concluída.

Essa heterogeneidade fez com que tivéssemos um desafio maior de contribuir de alguma forma com todos, sem deixar de atender a alguma necessidade. Sendo assim, foi percebido que durante a resolução da situação-problema 01, alguns participantes de alguns grupos mencionaram a ideia de poder resolver por EDO, já outros afirmaram não terem ideia como seria esse tipo de resolução.

Nessa perspectiva, o intuito de construir e reconstruir conceitos das EDO a partir de uma situação-problema, se torna cada vez mais desafiador, considerando que essa temática, apesar de ser considerada uma disciplina com uma vasta possibilidade de aplicabilidade em diferentes áreas do conhecimento, possui conceitos específicos que não são fáceis de construir se não houver um planejamento do problema gerador ou de como explorar os conceitos que possam conectar os conhecimentos prévios com os específicos.

O que nos surpreendeu foi que, ainda no momento de plenária, um dos participantes apontou na situação-problema 01, que a mesma poderia envolver uma taxa de variação, e a partir disso, o professor-pesquisador, em *insight*, começou a questioná-lo sobre esse pensamento e aprofundou; dessa forma, as ideias instigaram o aluno a afirmar que além de existir uma taxa de variação, ela não era constante, e por isso alguns métodos de resoluções apresentados por alguns grupos, não seriam válidos.

Ainda no segundo encontro, o professor questionou sobre qual conceito, visto ainda no Ensino Superior remete à taxa de variação. O mesmo participante que mencionou sobre a existência da taxa de variação, citou “derivada”. Com essa resposta, o debate se aprofundou, e assim o professor lançou outros questionamentos a respeito de outros conceitos matemáticos. Logo, outro participante citou proporcionalidade, já que no próprio enunciado no problema essa palavra era citada.

Em meio a essa discussão, o professor-pesquisador confirma tais hipóteses e assume a necessidade de iniciar a etapa da formalização, onde o professor aprofunda a discussão citando a ideia do conceito de derivada, de proporcionalidade e a de ter um resultado desconhecido a encontrar. Com isso, o momento favoreceu que fosse abordado um outro questionamento: “O que são Equações Diferenciais? ”.

Logo, esse momento foi imprescindível para que pudéssemos explorar a correlação entre a matemática do Ensino Superior com a matemática da Educação Básica, ao relacionar uma equação algébrica do 2º Grau e uma Equação Diferencial Ordinária – A álgebra escolar e o Cálculo Diferencial e Integral.

Na equação:

$$\boldsymbol{x^2 + 3x + 5 = 0}$$

As incógnitas são números**.**

E, na equação:

$$\boldsymbol{y'' + 3y' + 5 = 0}$$

As incógnitas são funções: $\boldsymbol{y(t)}$.

Ou seja, resolver uma Equação Diferencial propõe-se em descobrir qual é a função representada por y, partindo da hipótese em que não fazemos ideia de como ela foi construída. Ou seja, um problema familiar ao inverso do Cálculo Diferencial, dada uma derivada, devemos encontrar, agora, uma antiderivada.

Esse momento surpreendeu o professor-pesquisador, como também os alunos-participantes, pois através dessa discussão pudemos observar como essa dinâmica de trabalho pode nos levar a situações inesperadas, ressaltando que se soubermos explorar essa determinada situação, podemos obter resultados satisfatórios.

Sendo assim, o professor-pesquisador expôs um slide, através do qual tentou introduzir o conceito de uma Equação Diferencial a partir das questões discutidas, relacionando-as com os conceitos básicos da matemática escolar. Enfatizando as equações da álgebra escolar, onde nós temos o “x” como a incógnita com equações do tipo que a incógnita são funções; ou seja, os participantes perceberam que equações diferencias nada mais são do que equações que envolvem as derivadas dessas funções.

A partir disso, alunos que ainda não tinham participado, começaram a socializar suas concepções pelo chat e áudio, relatando que compreenderam as relações, demonstrando também curiosidade e interesse em entender mais sobre o assunto. Desse modo, outros slides foram explanados acerca dos conteúdos introdutórios das EDO, sendo explicados pelo professor-pesquisador de tal maneira que facilitasse a compreensão dos participantes presentes. Assim, foram abordados os seguintes conteúdos introdutórios:

- Definição (ED – EDO – EDP);
- Ordem de uma EDO;
- EDO Linear e Não-Linear;
- Solução de uma EDO.

Entretanto, esses conteúdos introdutórios ainda não eram suficientes para encaminhar os participantes a uma compreensão de uma resolução de forma organizada, estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos no contexto das EDO.

Posto isso, ainda na etapa de formalização, foi exposto um slide denominado Conexões do Problema, onde, além das conexões feitas pelos alunos-participantes, o professor apresenta conexões específicas para essa resolução em termos da utilização das EDO.

As conexões (específicas) do problema nos levou a discutirmos sobre os seguintes conceitos:

- Resolução de uma EDO de 1ª Ordem;
- Problema de Valor Inicial (PVI);
- Método do Fator Integrante.

Conexões do Problema

Equações Lineares de Primeira Ordem

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

Fator Integrante de uma Equação Linear

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Com a explanação desses conceitos foi possível seguir para a próxima etapa, onde foi apresentada por Busca do Consenso, uma resolução da situação-problema por meio do desenvolvimento dos conceitos das EDO, seguindo as seguintes etapas:

1. Levantamento dos dados da situação-problema;
2. Exploração dos dados da situação-problema;
3. Identificação das variáveis (independente e dependente);
4. Análise e exploração da taxa de variação mencionada pelos próprios alunos-participantes;
5. Verificação da proporcionalidade;
6. Construção de um modelo inicial;
7. Inserção do conceito de derivada no modelo;
8. Validação do modelo construído;
9. Execução da resolução do modelo com orientação passo a passo;

10. Aplicação do método do fator integrante, explicitando quando devemos usá-lo;
11. Exploração dos conceitos de Derivada, Integral e Funções Inversas;
12. Por fim, validação dos resultados.

Os momentos de resolução utilizados foram apresentados pelos slides em aula remota assim como é mostrado a seguir.

Dados:

$$\begin{cases} S(t) = 40.000 \\ r = 1\% = \dfrac{1}{100} \\ S(0) = 0 \\ t = 20 \\ d = ? \end{cases}$$

Temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{100}S + d \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

Como a equação é linear, podemos reescrevê-la como:

$$\frac{dS}{dt} - \frac{1}{100}S = d$$

Fazendo uso do fator integrante para resolver essa Eq., temos que:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt}$$

$$= \mu(t) = e^{-\frac{1}{100}t}$$

Agora, multiplicando a Eq. Abaixo por $\mu(t)$**,** obtemos:

$$\left(e^{-\frac{1}{100}t}\right) \cdot \left(\frac{dS}{dt} - \frac{1}{100}S\right) = d \cdot e^{-\frac{1}{100}t}$$

$$= \left(\frac{d}{dt} e^{-\frac{1}{100}t} S\right) = d \cdot e^{-\frac{1}{100}t}$$

Integrando ambos os membros da Eq., obtemos:

$$\int \frac{d}{dt} e^{-\frac{1}{100}t} S = \int d \cdot e^{-\frac{1}{100}t}$$

$$= e^{-\frac{1}{100}t} S(\mathrm{t}) = -100\mathrm{d} \cdot e^{-\frac{1}{100}t} + \mathrm{C}$$

$$= S(\mathrm{t}) = \mathrm{C} \cdot e^{\frac{1}{100}t} - 100\mathrm{d}$$

Fazendo $t = 0\ e\ S = 0$ e substituindo, temos:

$0 = \mathrm{C} \cdot e^{\frac{1}{100} \cdot 0} - 100\mathrm{d}$

$$\mathrm{C} = 100\mathrm{d}$$

Ou seja, a solução do PVI, é:

$$S(\mathrm{t}) = 100\mathrm{d} \cdot \left(e^{\frac{1}{100}t} - 1\right)$$

Assim, fazendo $t = 20\ e\ S(t) = 40.000$ e substituindo na Eq., temos:

$$S(\mathrm{t}) = 100\mathrm{d} \cdot \left(e^{\frac{1}{100}t} - 1\right)$$

$$40.000 = 100\mathrm{d} \cdot \left(e^{\frac{1}{100} \cdot 20} - 1\right)$$

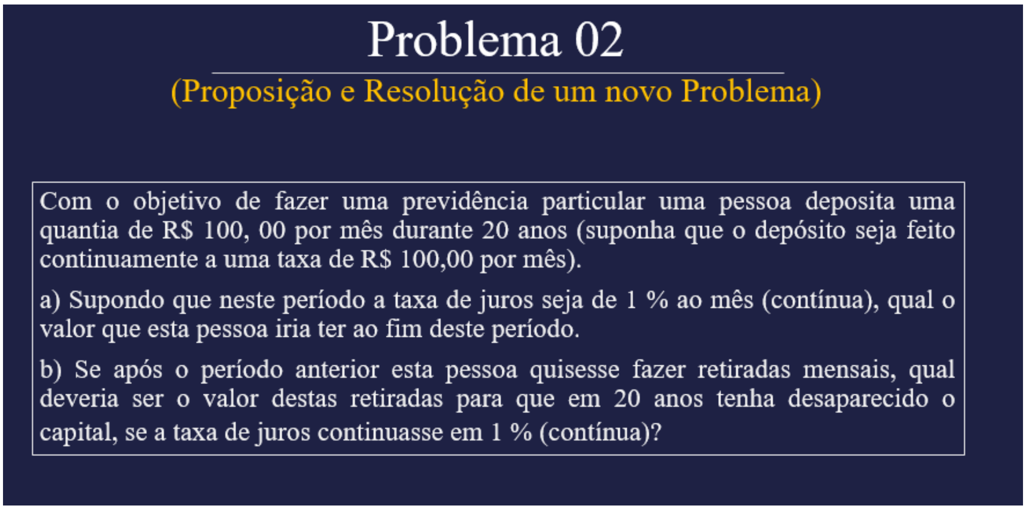
$$40.000 = 100\mathrm{d} \cdot \left(e^{\frac{2}{10}} - 1\right)$$

$$d = \frac{400}{e^{\frac{2}{10}} - 1} \approx \frac{400}{0{,}22} \approx 1.818{,}18$$

Sendo assim, Seu José, para atingir o valor pretendido, de R$ 40.000, em um período de 20 meses, deve depositar em sua caderneta de poupança o valor de aproximadamente R$1.818,18 a cada mês. Considerando que os depósitos sejam feitos continuamente a uma taxa de 1%.

Para encerrar o segundo encontro, em sintonia com as orientações de Krulik e Rudnick (2005), no que diz respeito a uma avaliação contínua, após esta etapa, novos problemas relacionados ao problema gerador foram propostos aos alunos-participantes, dessa vez como tarefa extraclasse, para ser realizada até o próximo encontro e discutida com o intuito de aprofundar o que já havíamos dialogado anteriormente. A seguir, apresentamos a proposta da tarefa extraclasse:

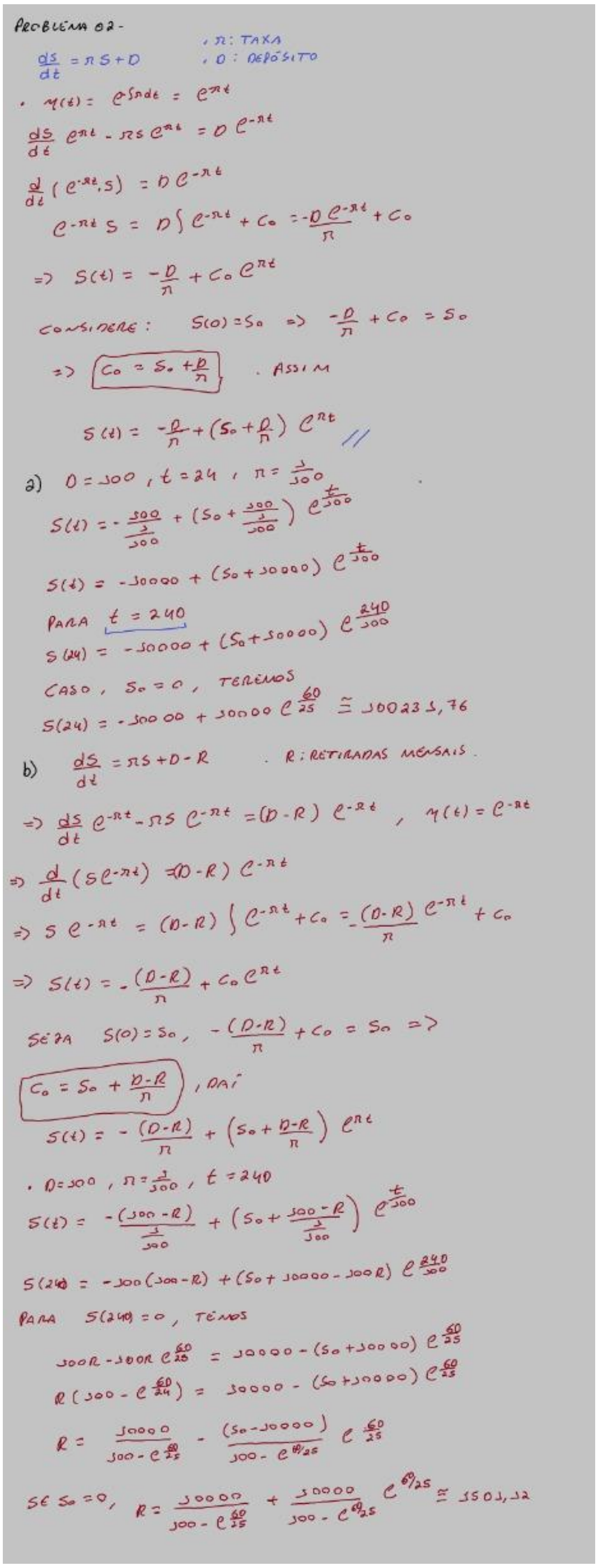
Figura 46: Print Screen – Slide da apresentação da proposta de tarefa extraclasse (Situação-problema 02).



Fonte: acervo do curso de extensão.

Neste momento solicitou-se que as resoluções também fossem sendo enviadas para os subgrupos do WhatsApp, até a data do próximo encontro, além de serem apresentados seus referentes registros no início de cada encontro a posteriori. A figura a seguir ilustra a resolução de alguns grupos, onde podemos perceber, que os participantes já puderam considerar os conceitos das EDO, abordados nos encontros anteriores.

Figura 47: Print Screen – Resolução da Situação-Problema 02 pelo Grupo Beta.



PROBLEMA 02 -

$\frac{dS}{dt} = rS + D$ · r: TAXA · D: DEPÓSITO

· $\mu(t) = e^{\int r dt} = e^{rt}$

$\frac{dS}{dt} e^{rt} - rS e^{rt} = D e^{-rt}$

$\frac{d}{dt}(e^{-rt} \cdot S) = D e^{-rt}$

$e^{-rt} S = D \int e^{-rt} + C_0 = -\frac{D e^{-rt}}{r} + C_0$

$\Rightarrow S(t) = -\frac{D}{r} + C_0 e^{rt}$

CONSIDERE: $S(0) = S_0 \Rightarrow -\frac{D}{r} + C_0 = S_0$

$\Rightarrow \boxed{C_0 = S_0 + \frac{D}{r}}$. ASSIM

$S(t) = -\frac{D}{r} + \left(S_0 + \frac{D}{r}\right) e^{rt}$ //

a) $D = 100$, $t = 24$, $r = \frac{1}{100}$

$S(t) = -\frac{100}{\frac{1}{100}} + \left(S_0 + \frac{100}{\frac{1}{100}}\right) e^{\frac{t}{100}}$

$S(t) = -10000 + (S_0 + 10000)\, e^{\frac{t}{100}}$

PARA $t = 240$

$S(24) = -10000 + (S_0 + 10000)\, e^{\frac{240}{100}}$

CASO, $S_0 = 0$, TEREMOS

$S(24) = -10000 + 10000\, e^{\frac{60}{25}} \cong 100231,76$

b) $\frac{dS}{dt} = rS + D - R$. R: RETIRADAS MENSAIS.

$\Rightarrow \frac{dS}{dt} e^{-rt} - rS e^{-rt} = (D - R)\, e^{-rt}$, $\mu(t) = e^{-rt}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(S e^{-rt}) = (D - R)\, e^{-rt}$

$\Rightarrow S e^{-rt} = (D - R) \int e^{-rt} + C_0 = -\frac{(D-R)}{r} e^{-rt} + C_0$

$\Rightarrow S(t) = -\frac{(D-R)}{r} + C_0 e^{rt}$

SEJA $S(0) = S_0$, $-\frac{(D-R)}{r} + C_0 = S_0 \Rightarrow$

$\boxed{C_0 = S_0 + \frac{D-R}{r}}$, DAÍ

$S(t) = -\frac{(D-R)}{r} + \left(S_0 + \frac{D-R}{r}\right) e^{rt}$

· $D = 100$, $r = \frac{1}{100}$, $t = 240$

$S(t) = -\frac{(100 - R)}{\frac{1}{100}} + \left(S_0 + \frac{100 - R}{\frac{1}{100}}\right) e^{\frac{t}{100}}$

$S(240) = -100(100 - R) + (S_0 + 10000 - 100R)\, e^{\frac{240}{100}}$

PARA $S(240) = 0$, TEMOS

$100R - 100R\, e^{\frac{60}{25}} = 10000 - (S_0 + 10000)\, e^{\frac{60}{25}}$

$R(100 - e^{\frac{60}{24}}) = 10000 - (S_0 + 10000)\, e^{\frac{60}{25}}$

$R = \frac{10000}{100 - e^{\frac{60}{25}}} - \frac{(S_0 - 10000)}{100 - e^{60/25}}\, e^{\frac{60}{25}}$

SE $S_0 = 0$, $R = \frac{10000}{100 - e^{\frac{60}{25}}} + \frac{10000}{100 - e^{60/25}}\, e^{60/25} \cong 1501,12$

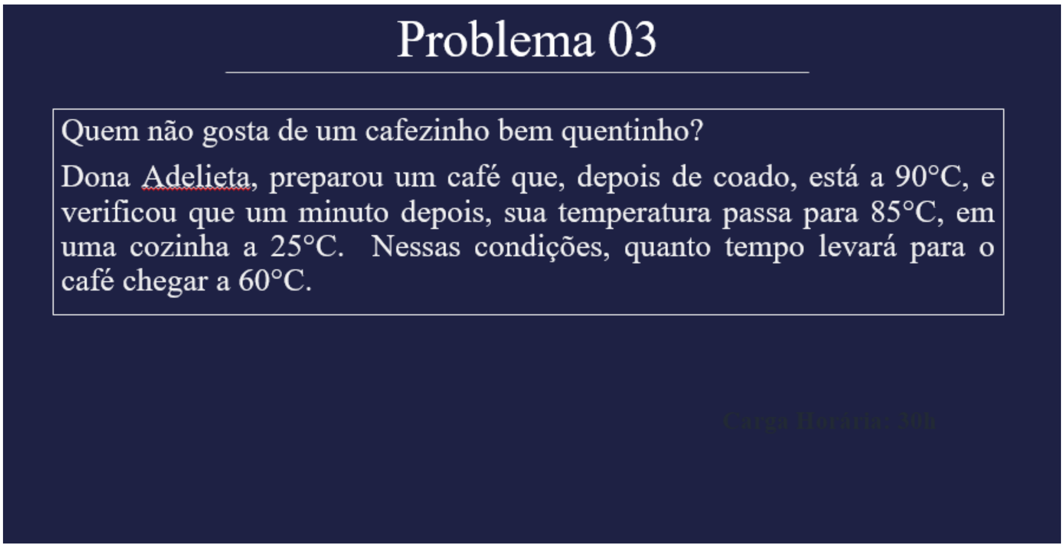
Fonte: acervo do curso de extensão.

TERCEIRO ENCONTRO (10/11/2021)

Ao iniciar o terceiro encontro, o professor-pesquisador, orientou que acontecesse os debates e discussões da situação-problema 02, referente a tarefa extraclasse, e assim sucedeu. No segundo momento, após as arguições, repetiu-se o processo da dinâmica de trabalho, que objetivava propor um Problema Gerador, e seguir as demais etapas da metodologia.

Nesse encontro tínhamos como proposta a aplicação das EDO envolvendo a Lei de resfriamento de Newton, porém nada disso era comentado com os participantes, o que enfatiza a autonomia deles durante todo o processo. Vejamos a situação-problema referente ao terceiro encontro:

Figura 48: Print Screen – Slide da apresentação da Situação-problema 03 (Lei de Resfriamento de Newton).

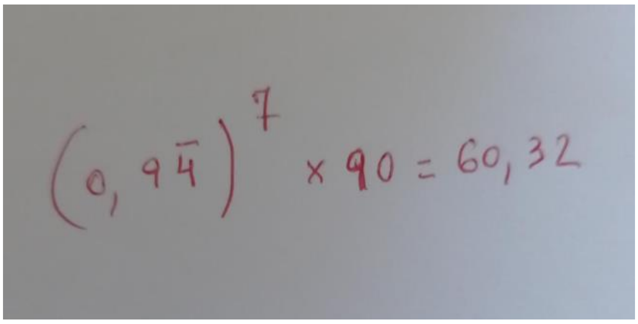


Fonte: acervo do curso de extensão.

Algo interessante que é importante mencionar, foi a maneira pela qual o debate sobre a resolução desse problema, aconteceu entre os grupos. Já constatamos desde o encontro 02 que os alunos buscavam diferentes caminhos para resolver o problema, estando certos ou não, sempre havia a tentativa e, assim, conseguiam realizar conexões com diversos conceitos matemáticos, sejam eles aritméticos, algébricos ou geométricos.

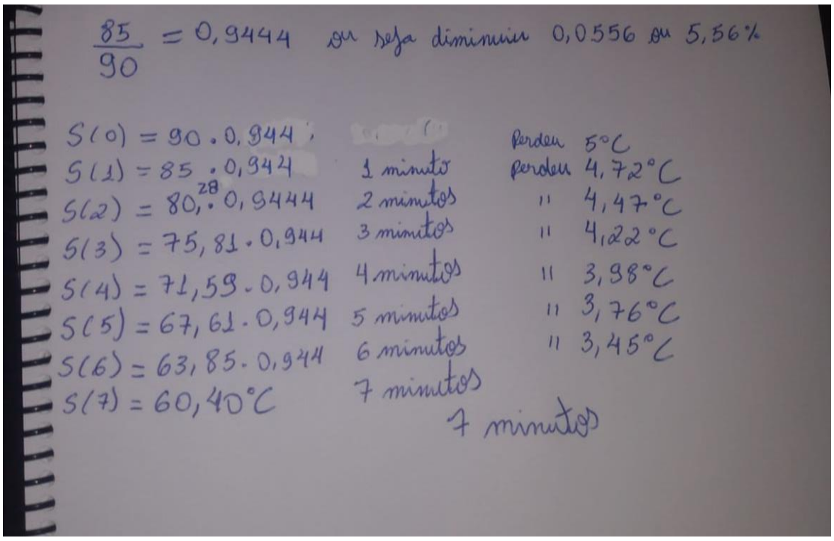
Entretanto, cada vez mais surpreendido pelas explanações, o professor-pesquisador ao entrar na sala simultânea do grupo Alpha, acompanha silenciosamente suas discussões, solicitando ao grupo o envio de todas as resoluções concluídas e, em seguida, no momento de registros na lousa, expõe as diferentes representações de resolução do problema, realizadas pelos três participantes do grupo, que serão identificados pela letra “A”, seguida de uma numeração. As resoluções de “A15”, “A6” e “A13” seguem abaixo, vejamos:

Figura 49: Print Screen – Resolução de A15 do Grupo Alpha da Situação-problema 03.



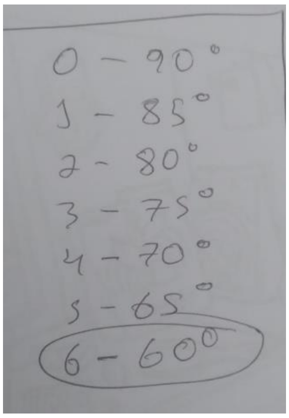
Fonte: acervo do curso de extensão.

Figura 50: Print Screen – Resolução de A6 do Grupo Alpha da Situação- Problema 03.



Fonte: acervo do curso de extensão.

Figura 51: Print Screen – Resolução de A13 do Grupo Alpha da Situação- Problema 03.

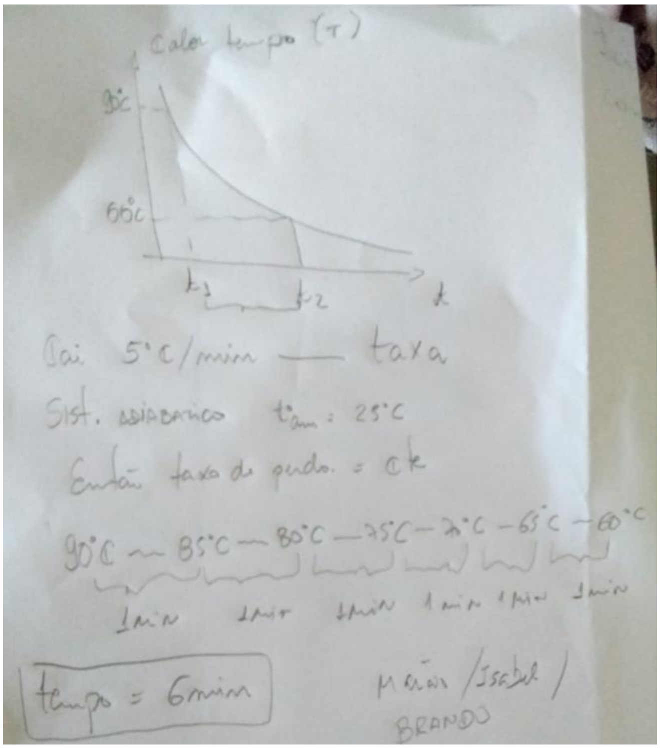


Fonte: acervo do curso de extensão.

Conforme o que foi exposto, é possível destacar que diante das três resoluções, nenhuma apresenta o resultado correto, no entanto, as três resoluções se complementam, se relacionam, se conectam. Diferentes conceitos matemáticos podemos identificar nessas resoluções, porém o que se destacou foi a forma como o grupo discutiu e construiu as constatações.

Seguindo a análise das resoluções, apresentamos as considerações do grupo Gamma:

Figura 52: Print Screen – Resolução do Grupo Gamma em consenso da Situação- Problema 03.



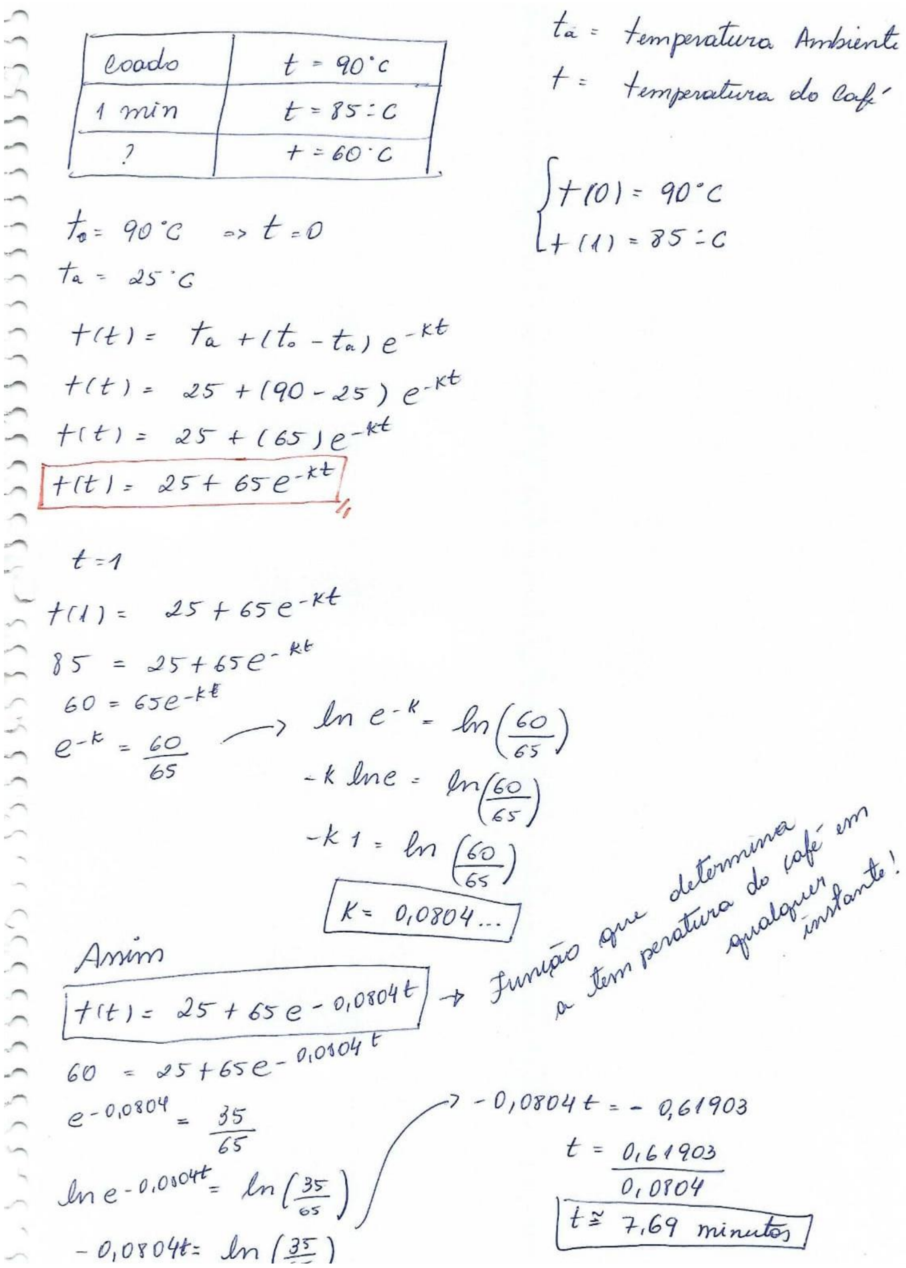
Fonte: acervo do curso de extensão.

Na resolução acima, do grupo, Gamma, verificamos um novo caminho e novas constatações. É possível perceber que os alunos relacionaram conceitos como progressão aritmética, mas que através da observação do gráfico, nota-se que também fizeram uso de outros conceitos, como função, tipos de função e construção de gráficos. Vale salientar que durante a arguição desse grupo, no momento de registros na lousa (virtual), o representante validou essas hipóteses, enfatizando, ainda, a partir do que ele viu das explanações dos colegas, que no problema também poderia ser explorado o conceito de derivada, percebendo através das discussões coletivas que o mesmo também envolve taxa de variação e que gráfico poderia representar uma reta tangente à curva de comportamento da função.

Além disso, o grupo também percebeu durante as discussões no momento da plenária, com a participação do professor-pesquisador, que dentre as resoluções apresentadas, a ideia de uma taxa de variação constante não se encaixava naquele problema e, por isso, a razão de se usar a taxa de variação pensando na proporcionalidade e nas variáveis do problema, pois o fato da taxa não ser constante implicava no porquê do uso das EDO na resolução dessa situação-problema.

Continuando com as apresentações das soluções dos problemas, segue abaixo a resolução do grupo Phi:

Figura 53: Print Screen – Resolução do Grupo Phi em consenso da Situação- Problema 03.



Cedo	$t = 90°C$
1 min	$t = 85°C$
?	$t = 60°C$

t_a = temperatura Ambiente

t = temperatura do café

$\begin{cases} t(0) = 90°C \\ t(1) = 85°C \end{cases}$

$t_0 = 90°C \Rightarrow t = 0$

$t_a = 25°C$

$t(t) = t_a + (t_0 - t_a)e^{-kt}$

$t(t) = 25 + (90 - 25)e^{-kt}$

$t(t) = 25 + (65)e^{-kt}$

$\boxed{t(t) = 25 + 65e^{-kt}}$

$t = 1$

$t(1) = 25 + 65e^{-kt}$

$85 = 25 + 65e^{-kt}$

$60 = 65e^{-kt}$

$e^{-k} = \frac{60}{65} \rightarrow \ln e^{-k} = \ln\left(\frac{60}{65}\right)$

$-k \ln e = \ln\left(\frac{60}{65}\right)$

$-k\,1 = \ln\left(\frac{60}{65}\right)$

$\boxed{k = 0{,}0804\ldots}$

Assim

$\boxed{t(t) = 25 + 65e^{-0{,}0804t}} \rightarrow$ Função que determina a temperatura do café em qualquer instante!

$60 = 25 + 65e^{-0{,}0804t}$

$e^{-0{,}0804} = \frac{35}{65}$

$\ln e^{-0{,}0804t} = \ln\left(\frac{35}{65}\right)$

$-0{,}0804t = \ln\left(\frac{35}{\ldots}\right) \rightarrow -0{,}0804t = -0{,}61903$

$t = \frac{0{,}61903}{0{,}0804}$

$\boxed{t \cong 7{,}69 \text{ minutos}}$

Fonte: acervo do curso de extensão.

Um dos grupos apresentou essa possibilidade e explanou muito bem durante o momento de registros na lousa (virtual) a construção dessa resolução, validando os resultados encontrados e a partir da plenária compreendo os motivos de utilizar tais conceitos e métodos.

Para finalizar o terceiro encontro, buscando um consenso para o problema em questão, foi discutido sobre as diferenças dos resultados apresentados pelos grupos, demonstrando mais uma vez, a eficácia da resolução por meio das EDO, já que tem se mostrado como o método de resolução que apresentou resultados mais próximos da realidade da situação-problema proposta – validação do modelo e dos resultados – compreensão dos conceitos específicos e conexões – compreensão das EDO como Matemática Aplicada a diferentes áreas do conhecimento.

Dados:

$$\begin{cases} T(t) = ? \\ T(0) = 90 \\ T(1) = 85 \\ T_m = 25 \\ k = ? \\ T(60) = ? \end{cases}$$

Temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 25) \\ T(0) = 90 \\ T(1) = 85 \end{cases}$$

Podemos dividir a equação por $(T - 25)$, temos:

$$\frac{\frac{dT}{dt}}{(T-25)} = \frac{k(T-25)}{(T-25)}$$

$$\frac{1}{(T-25)}T' = k$$

Integrando a Equação em relação a t, tem-se:

$$\int \frac{1}{(T-25)}T'dt = \int kdt$$

$$\int \frac{1}{(T-25)}dT = \int kdt$$

$$ln|T-25| = kt + C_1$$

$$T(t) = 25 \pm e^{C_1}e^{kt}$$

$$T(t) = 25 + Ce^{kt}$$

Substituindo $t = 0\ e\ T = 90$:

$$T(t) = 25 + Ce^{kt}$$

$$T(0) = 25 + Ce^{k\cdot 0}$$

$$90 = 25 + C$$

$$C = 65$$

Sendo assim, temos:

$$T(t) = 25 + 65e^{kt}$$

Substituindo $t = 1\ e\ T = 85$:

$$T(1) = 25 + 65e^{kt}$$

$$85 = 25 + 65e^{k\cdot\prime}$$

$$85 - 25 = 65\ e^{k}$$

$$60 = 65\ e^{k}$$

$$\frac{60}{65} = e^{k}$$

$$k = ln\frac{60}{65}$$

Assim, a temperatura do café em função do tempo é dada por:

$$T(t) = 25 + Ce^{kt}$$

$$T(t) = 25 + 65e^{ln\frac{60}{65}t}$$

Substituindo $T = 60$, tem-se:

$$60 = 25 + 65e^{ln\frac{60}{65}t}$$

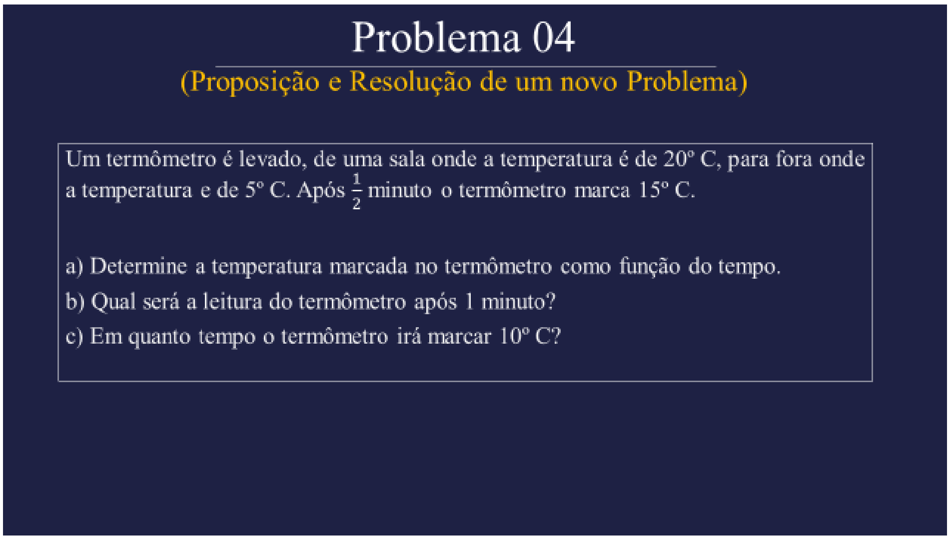
$$t = \frac{\ln\frac{35}{65}}{\ln\frac{60}{65}} \approx 8$$

Logo, o tempo necessário para que o café da Dona Adelieta atinja 60º é de:

$$t = \frac{\ln\frac{35}{65}}{\ln\frac{60}{65}} \approx 8\,minutos$$

Outras situações-problema foram sendo propostas, procurando manter relações com os problemas trabalhados anteriormente. Logo abaixo, temos uma outra tarefa extraclasse, vejamos:

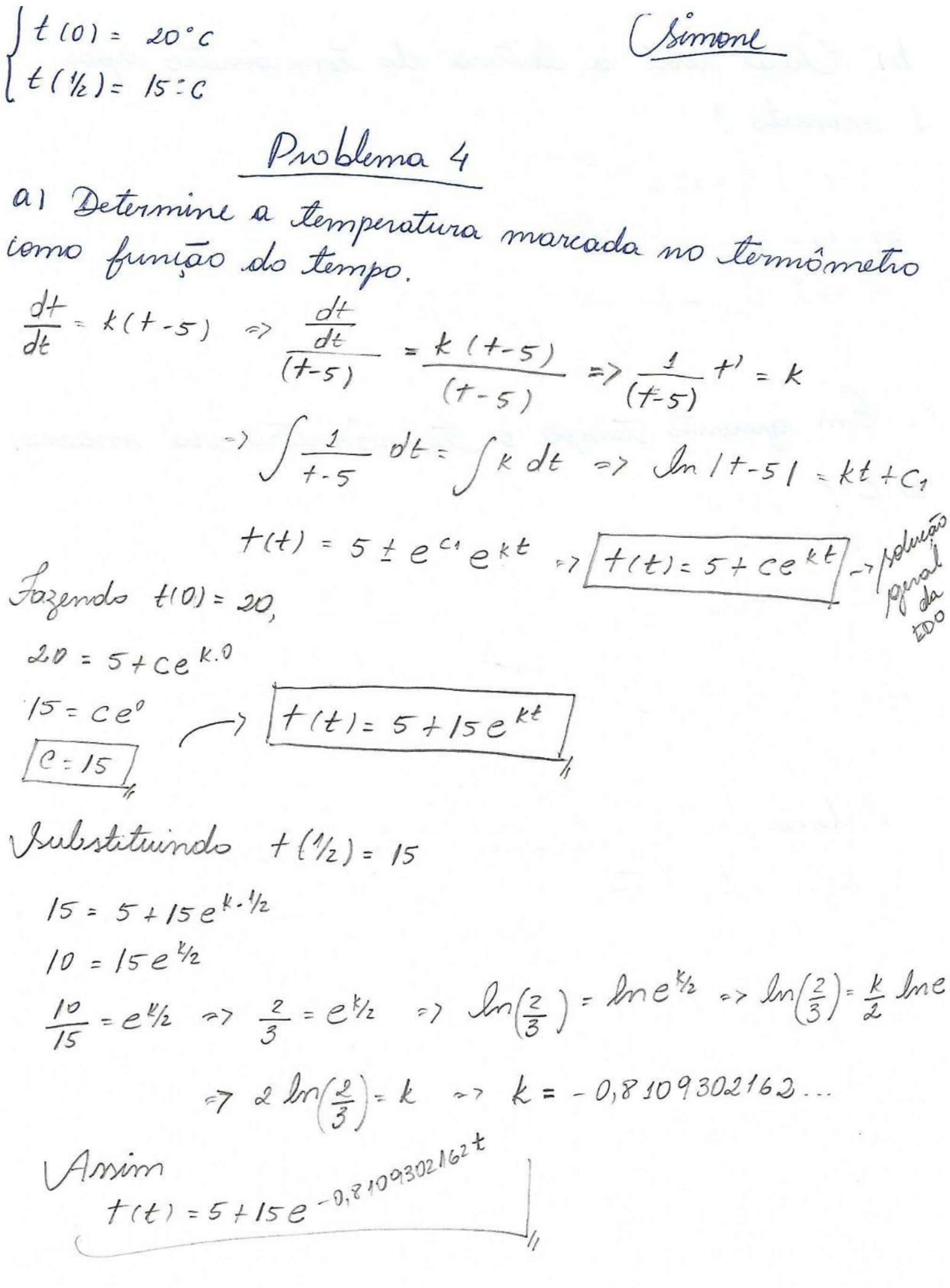
Figura 54: Print Screen – Slide da apresentação da proposta de tarefa extraclasse (Situação-problema 04).



Fonte: acervo do curso de extensão.

Cumprindo os objetivos em relação à escolha dos problemas geradores, as situações-problema e seus respectivos conteúdos abordados, eram explorados com a realização das tarefas extraclasse e a discussão em cada encontro seguinte, como ilustra a resolução do grupo Phi, a seguir:

Figura 55: Print Screen – Resolução do Grupo Phi referente a discussão da atividade extraclasse (Situação- Problema 04 – item a).



$$\begin{cases} t(0) = 20°C \\ t(1/2) = 15°C \end{cases}$$

Simone

Problema 4

a) Determine a temperatura marcada no termômetro como função do tempo.

$$\frac{dt}{dt} = k(t-5) \Rightarrow \frac{\frac{dt}{dt}}{(t-5)} = \frac{k(t-5)}{(t-5)} \Rightarrow \frac{1}{(t-5)}t' = k$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{t-5}\,dt = \int k\,dt \Rightarrow \ln|t-5| = kt + C_1$$

$$t(t) = 5 \pm e^{c_1}e^{kt} \Rightarrow \boxed{t(t) = 5 + ce^{kt}}$$ solução geral da EDO

Fazendo $t(0) = 20$,

$20 = 5 + ce^{k.0}$

$15 = ce^0$

$\boxed{c = 15}$ $\rightarrow$ $\boxed{t(t) = 5 + 15e^{kt}}$

Substituindo $t(1/2) = 15$

$15 = 5 + 15e^{k.1/2}$

$10 = 15e^{k/2}$

$\frac{10}{15} = e^{k/2} \Rightarrow \frac{2}{3} = e^{k/2} \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln e^{k/2} \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{k}{2}\ln e$

$\Rightarrow 2\ln\left(\frac{2}{3}\right) = k \Rightarrow k = -0{,}8109302162...$

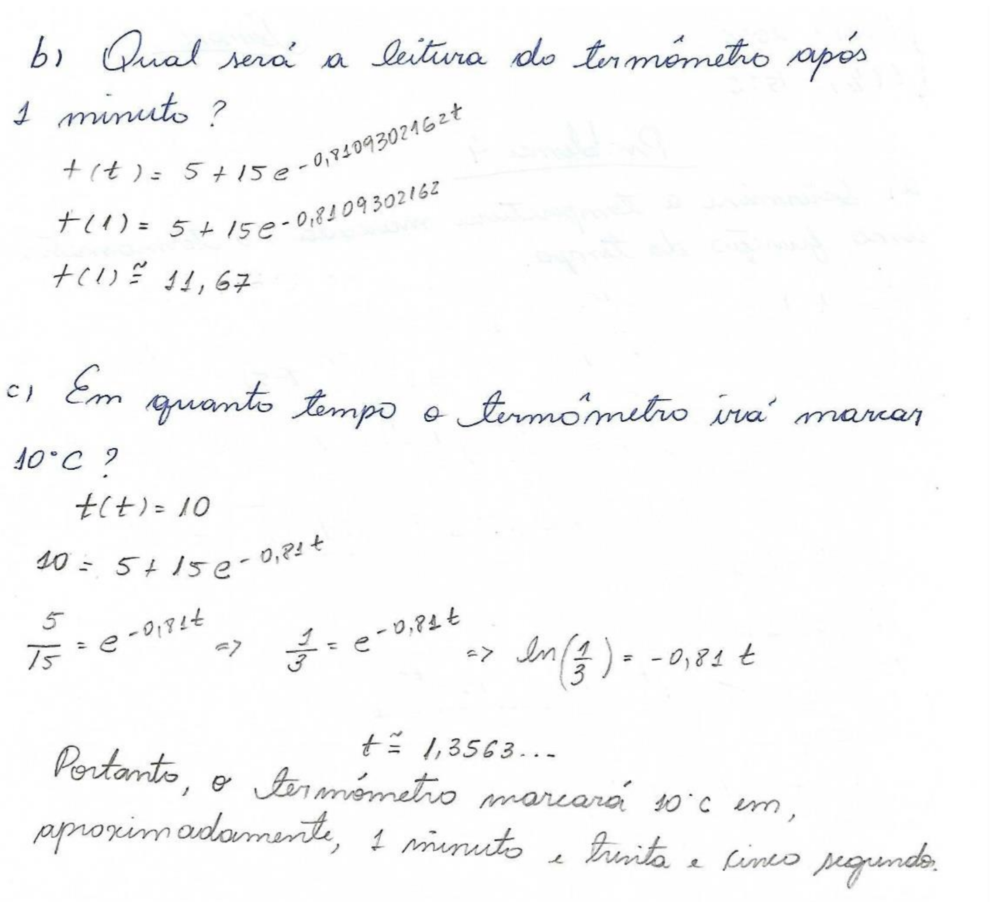
Assim

$t(t) = 5 + 15e^{-0{,}8109302162t}$

Fonte: acervo do curso de extensão.

Resolução da tarefa extraclasse (situação-problema 04) item a, utilizando-se dos conceitos de resolução por meio das EDO, tendo como aplicação também, a Lei de Resfriamento de Newton.

Figura 56: Print Screen – Resolução do Grupo Phi referente a discussão da atividade extraclasse (Situação- Problema 04 – item b e item c).



b) Qual será a leitura do termômetro após 1 minuto?

$T(t) = 5 + 15e^{-0,8109302162t}$

$T(1) = 5 + 15e^{-0,8109302162}$

$T(1) \cong 11,67$

c) Em quanto tempo o termômetro irá marcar 10°C?

$T(t) = 10$

$10 = 5 + 15e^{-0,81t}$

$\frac{5}{15} = e^{-0,81t} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-0,81t} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -0,81t$

$t \cong 1,3563...$

Portanto, o termômetro marcará 10°C em, aproximadamente, 1 minuto e trinta e cinco segundos.

Fonte: acervo do curso de extensão.

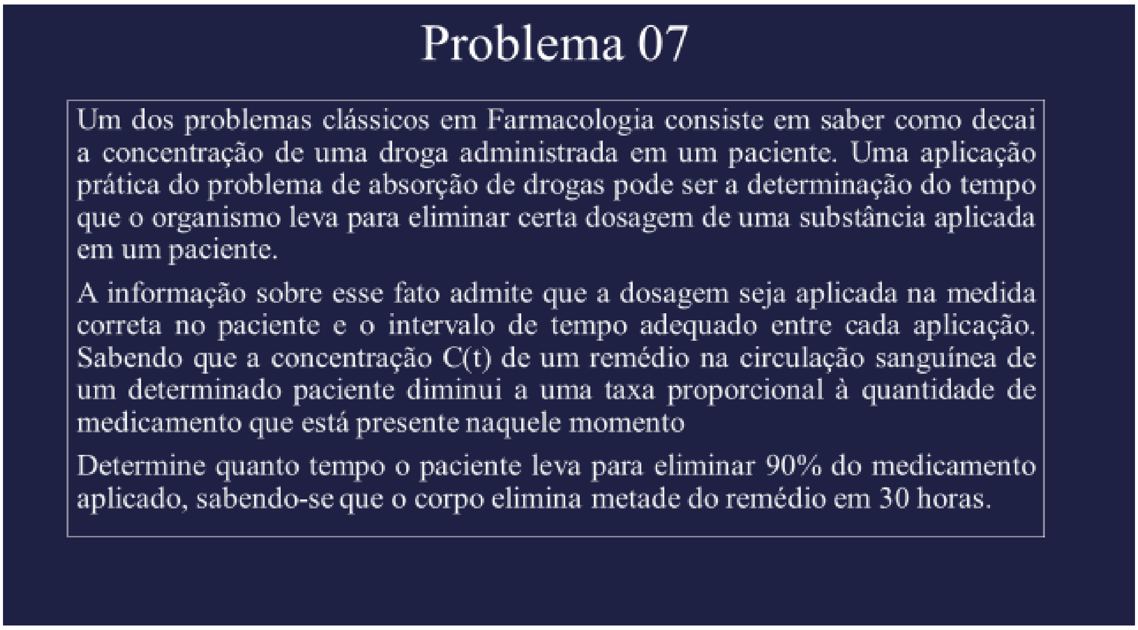
SEXTO ENCONTRO (01/12/2021)

O último encontro foi dividido em dois momentos. O primeiro para aplicar a dinâmica de trabalho com mais duas situações-problema, e o segundo momento para realizar o encerramento do curso de extensão, agradecer enfaticamente a todos os alunos pela participação, empenho e contribuição com a pesquisa e com o professor-pesquisador.

Sendo assim, o sexto encontro começou com uma rica discussão a partir das falas dos participantes, isso aconteceu devido à realização da tarefa extraclasse anterior, referente a leitura de um texto que abordava o ensino e a aprendizagem das EDO no Ensino Superior. O intuito de propor esse texto para leitura, era de proporcionar aos participantes, informações sobre o que está sendo discutido na literatura em Educação Matemática, concernente ao assunto e contrastar com que havíamos realizado no curso, considerando que também faz parte de uma abordagem inovadora que provoca reflexão sobre o ensino dessa disciplina em um curso de licenciatura.

Dessa forma, após a discussão coletiva do texto com os participantes, eles foram mais uma vez convidados a fazerem uma leitura individual e coletiva das duas situações-problema a seguir:

Figura 57: Print Screen – Slide da apresentação da Situação-problema 07 (Dinâmica Populacional).

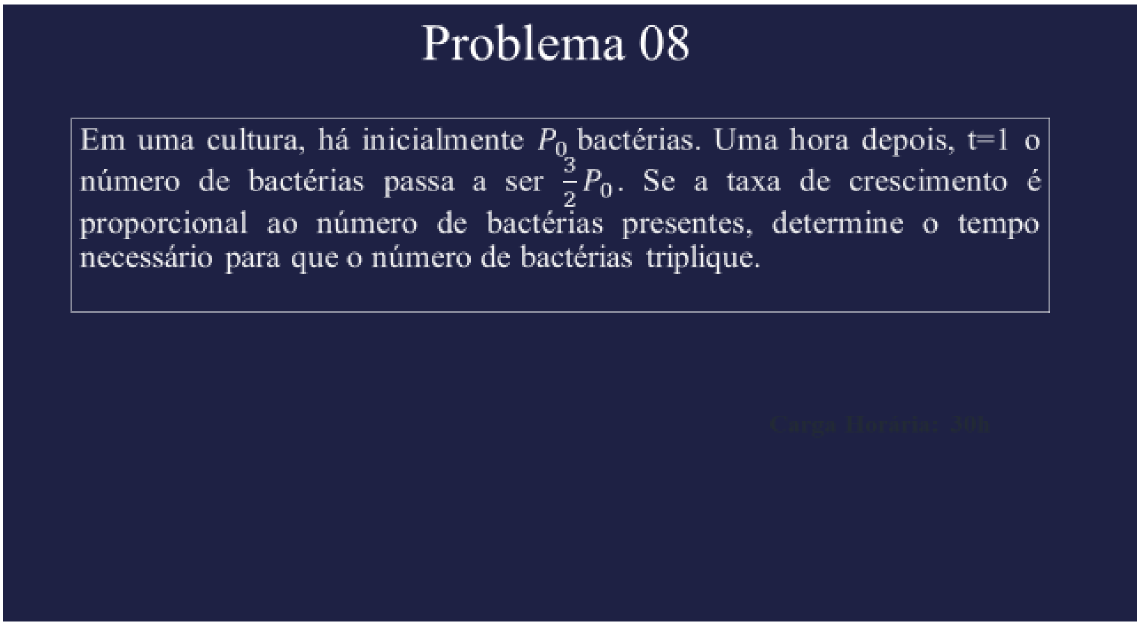


Fonte: acervo do curso de extensão.

A situação-problema acima aborda a aplicação das EDO sobre Dinâmica Populacional, no contexto de decrescimento populacional, ligados à problemas clássicos em Farmacologia – absorção de drogas na corrente sanguínea de um corpo. Esse Problema já foi utilizado na pesquisa de TCC do professor-pesquisador e agora, adaptado para este momento.

Vejamos na imagem abaixo, outra situação que aborda a aplicação de EDO sobre Dinâmica Populacional, no contexto de crescimento populacional, ligados a uma taxa de disseminação de bactérias – problema clássico em livros das EDO.

Figura 58: Print Screen – Slide da apresentação da Situação- problema 08 (Dinâmica Populacional).

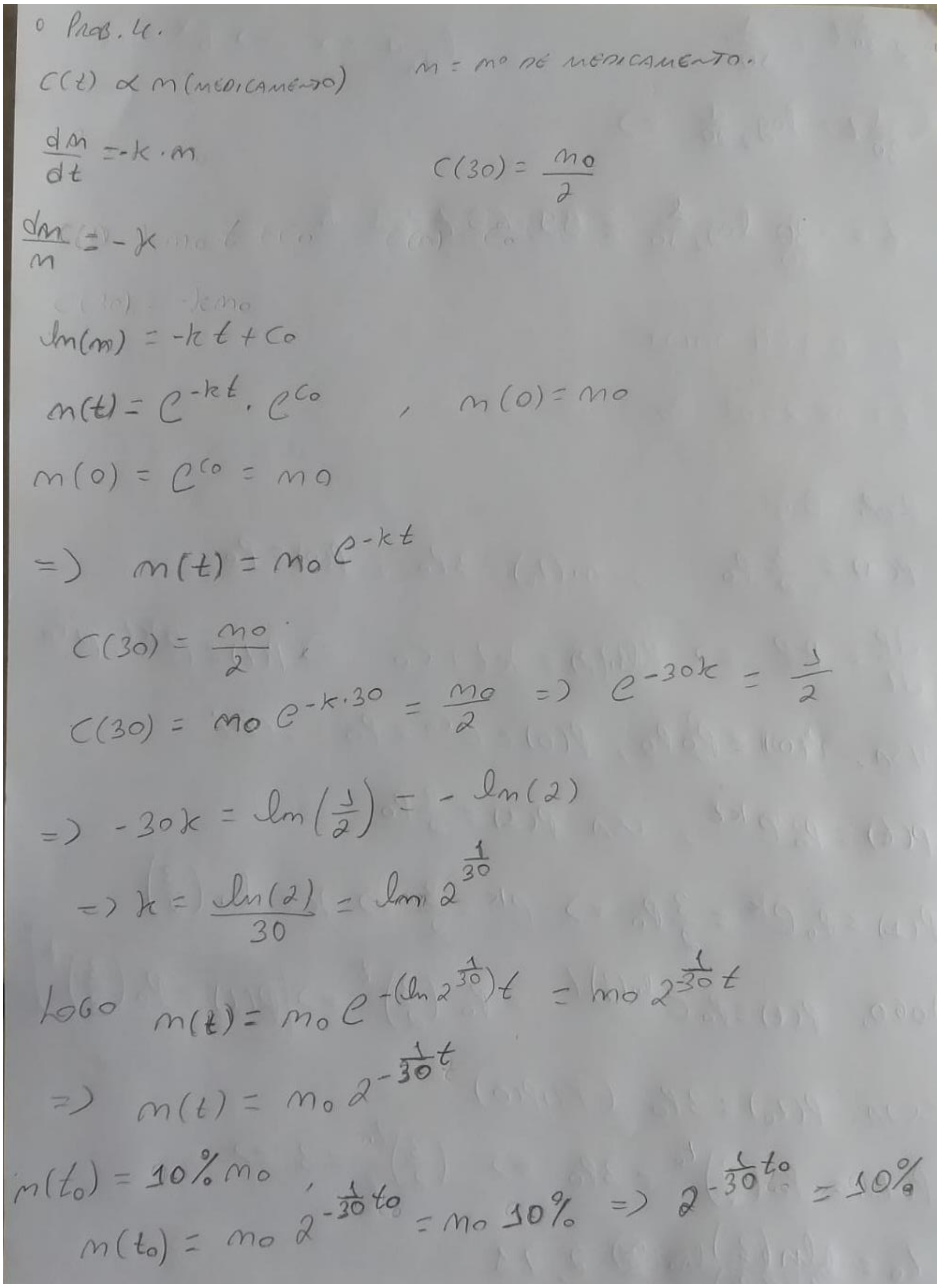


Fonte: acervo do curso de extensão.

O motivo de utilizar duas situações-problema para serem resolvidos simultaneamente, se justifica porque tínhamos como objetivos para esse encontro: (i) relacionar diferentes situações-problema que envolvem Dinâmica Populacional; (ii) aprofundar os conceitos das EDO de 1ª e 2ª Ordem, trabalhados nas situações-problema anteriores; (iii) compreender modelos matemáticos que descrevem a Dinâmica Populacional (Crescimento); e (iv) explorar conceitos como: Progressão Aritmética (P.A); Progressão Geométrica (P.G); Funções; Função Exponencial; Taxas de Variação; e Proporcionalidade.

Durante o processo de aplicação dos problemas, foi possível atender parcialmente aos objetivos propostos, pois os participantes conseguiram demonstrar através de seus discursos, nos momentos de registros na lousa (virtual) e plenária, que internalizaram e aprofundaram os conceitos de resolução de uma EDO de 1ª ordem, em contraste com situações que podem vir a surgir para uma EDO de 2ª ordem, por meio da identificação de variáveis dependentes e independentes nos problemas, como notamos na resolução da situação-problema 07 do grupo Beta. Vejamos:

Figura 59: Print Screen – Resolução do Grupo Beta em consenso referente a Situação- Problema 07.



° Prob. 4.

$C(t) \propto m$ (medicamento) $\quad m =$ nº de medicamento.

$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m \qquad C(30) = \frac{m_0}{2}$

$\frac{dm}{m} = -k$

$\ln(m) = -kt + C_0$

$m(t) = e^{-kt} \cdot e^{C_0} \quad , \quad m(0) = m_0$

$m(0) = e^{C_0} = m_0$

$\Rightarrow \quad m(t) = m_0 e^{-kt}$

$C(30) = \frac{m_0}{2}$

$C(30) = m_0 e^{-k \cdot 30} = \frac{m_0}{2} \Rightarrow e^{-30k} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -30k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

$\Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{30} = \ln 2^{\frac{1}{30}}$

Logo $m(t) = m_0 e^{-(\ln 2^{\frac{1}{30}})t} = m_0 2^{\frac{1}{30}t}$

$\Rightarrow \quad m(t) = m_0 2^{-\frac{1}{30}t}$

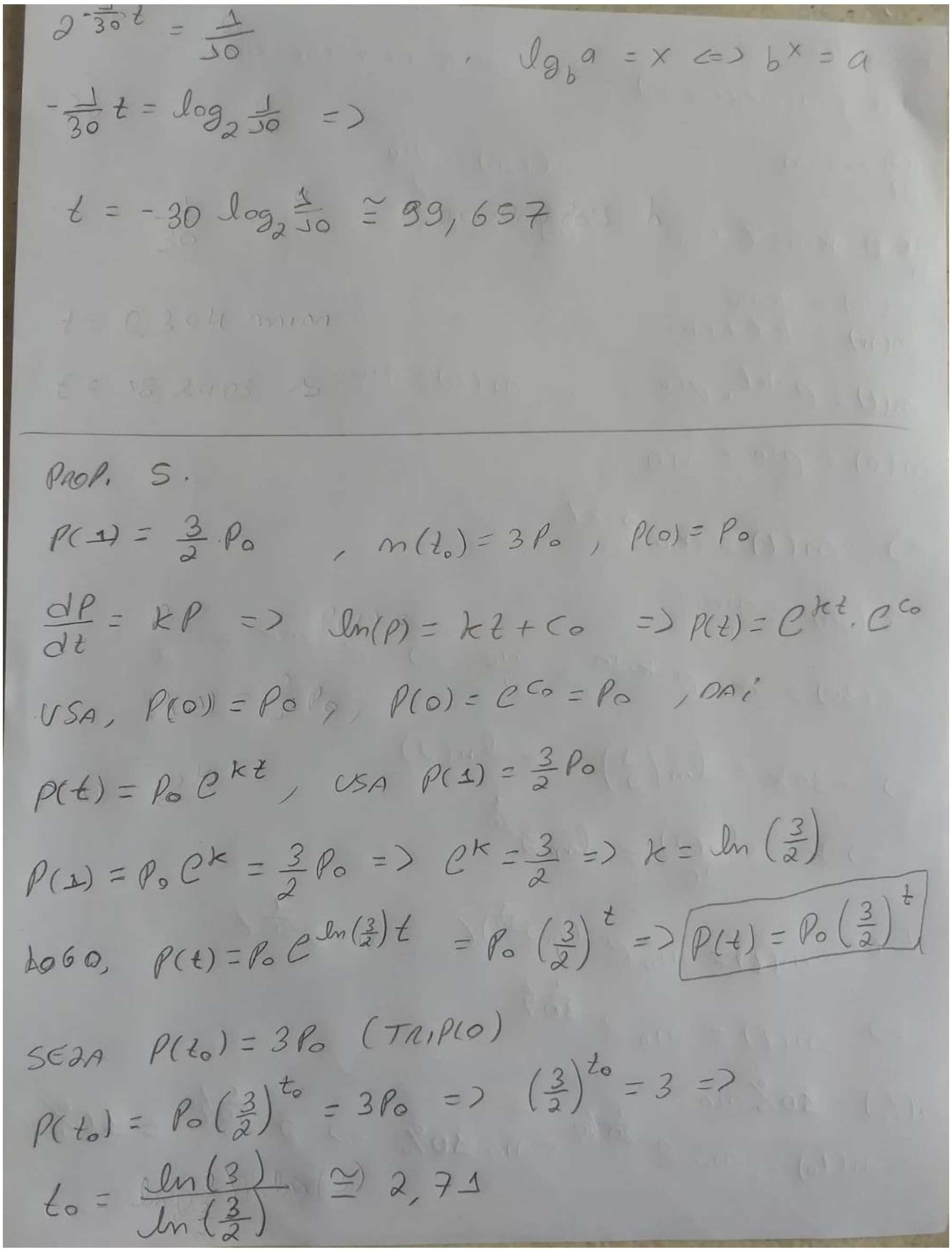
$m(t_0) = 10\% m_0 \quad , \quad 2^{-\frac{1}{30}t_0} = 10\%$

$m(t_0) = m_0 2^{-\frac{1}{30}t_0} = m_0 10\% \Rightarrow$

Fonte: acervo do curso de extensão.

As mesmas observações servem para a resolução da situação-problema 08 do grupo Beta, como ilustra a figura a seguir.

Figura 60: Print Screen – Resolução do Grupo Beta em consenso referente a Situação- Problema 07 e 08.



$2^{-\frac{1}{30}t} = \frac{1}{30}$, $\log_b a = x \iff b^x = a$

$-\frac{1}{30}t = \log_2 \frac{1}{30} \Rightarrow$

$t = -30 \log_2 \frac{1}{30} \cong 99,657$

PROP. 5.

$P(1) = \frac{3}{2} P_0$, $m(t_0) = 3P_0$, $P(0) = P_0$

$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \ln(P) = kt + C_0 \Rightarrow P(t) = e^{kt} \cdot e^{C_0}$

USA, $P(0) = P_0$, $P(0) = e^{C_0} = P_0$, DAí

$P(t) = P_0 e^{kt}$, USA $P(1) = \frac{3}{2} P_0$

$P(1) = P_0 e^{k} = \frac{3}{2} P_0 \Rightarrow e^{k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

LOGO, $P(t) = P_0 e^{\ln(\frac{3}{2})t} = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^t \Rightarrow \boxed{P(t) = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^t}$

SEJA $P(t_0) = 3P_0$ (TRIPLO)

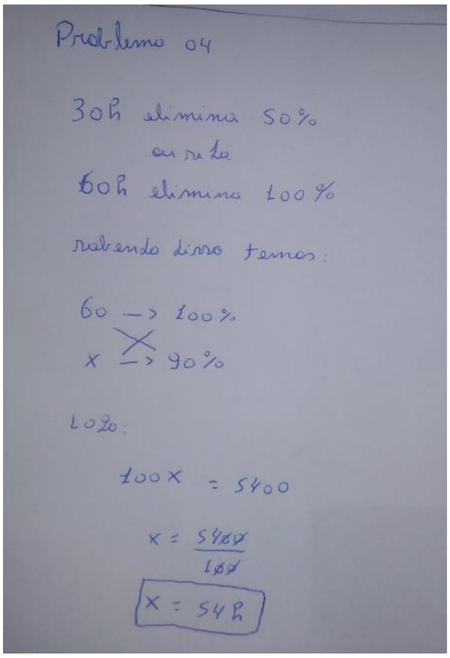
$P(t_0) = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{t_0} = 3P_0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{t_0} = 3 \Rightarrow$

$t_0 = \frac{\ln(3)}{\ln(\frac{3}{2})} \cong 2,71$

Fonte: acervo do curso de extensão.

Vale salientar que nesse momento do curso, ainda tínhamos resoluções em que não se utilizavam métodos advindos das EDO, porém, os participantes conseguiram relacionar com demais conceitos da Matemática. Em suas discussões os alunos citavam: Progressão Geométrica (P.G), Função Exponencial, Taxas de Variação, Proporcionalidade, além disso, o método da Regra de Três, como ilustra a resolução apresentada pelo grupo Alpha a seguir.

Figura 61: Print Screen – Resolução do Grupo Alpha em consenso referente à Situação- problema 07.



Fonte: acervo do curso de extensão.

Embora a resolução do grupo Alpha não apresente uma solução coerente com a situação-problema em questão, as representações e discussões apresentadas motivaram uma explanação no momento da formalização, que nos levou a explorar compreensão de diferentes modelos matemáticos, que podem descrever a Dinâmica Populacional (Crescimento ou Decrescimento), bem como a possibilidade de constatar que, no processo de modelagem matemática, quanto mais o modelo se aproximar de uma situação real, mais difícil será sua resolução, pelo menos de forma analítica.

Além disso, dois grupos não conseguiram obter sucesso ao tentar resolução da situação-problema 07. No momento de registros na lousa (virtual), os grupos relataram sobre suas dificuldades, e afirmaram não compreender profundamente o enunciado e interpretação dos dados. Por outro lado, após o momento de formalização e busca de consenso, essas questões foram discutidas e elencadas para talvez serem discutidas em uma outra oportunidade de curso de extensão. Todos se mostraram animados a vivenciar essa outra experiência.

Antes de encerrar a reunião, foi solicitado que todos respondessem um questionário de avaliação sobre o curso de extensão, via formulário online – Google Forms. E foi assim que o curso foi finalizado. Muitos desafios, dúvidas, explorações, risos, silêncios, superações e, sobretudo, problemas.

6.2 ANÁLISE GERAL DAS EVIDÊNCIAS

6.2.1 Análise do cenário e do contexto da pesquisa

Como já mencionado, esta pesquisa teve que ser realizada em contexto remoto, em consequência de uma pandemia que afetou não só o Brasil, mas também outros países do mundo. Com isso, tivemos como cenário da nossa pesquisa, a possibilidade de um ambiente virtual, para realizar nossas investigações durante um curso de extensão, ministrado por meio de duas plataformas digitais, as quais, juntas, consideramos inovadoras para esse processo, aplicando uma metodologia de ensino até então estudada e desenvolvida para salas de aulas presenciais. Destacamos o Zoom Meetings como uma plataforma promissora, considerando que a mesma foi a que mais possibilitou a simulação de uma sala de aula presencial, ofertando ferramentas que favoreceram o desenvolvimento da dinâmica de trabalho da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas de forma efetiva, conforme seus pressupostos teóricos.

6.2.2 Análise dos sujeitos da pesquisa

Inicialmente, a ideia seria apenas de aplicar o curso aos alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, porém, enxergamos a necessidade de estendê-las para alunos do curso de Licenciatura de Matemática de outras instituições, bem como para professores de Matemática de todo o Brasil. Com isso, corroboramos que essa atitude foi assertiva e relevante para esse estudo, uma vez que, com a diversidade desse público, obtivemos diferentes perfis dos participantes, o que foi proveitoso para o trabalho pedagógico colaborativo e cooperativo de aprendizagem. Tivemos como perfis dos participantes do curso:

- Aluno-participante que ainda não cursou EDO;
- Aluno-participante que já cursou EDO, mas ainda está em curso (graduação);
- Aluno-participante graduado e pós-graduado.

6.2.3 Análise da execução do Projeto de Ensino aplicado no Curso de Extensão

A seguir, apresentamos um quadro como síntese de uma análise geral sobre o desenvolvimento da aplicação do Projeto de Ensino no curso de extensão, em consonância com os resultados coletados do questionário de avaliação presente nos anexos 3 a 16.

Quadro 7: Síntese da análise do desenvolvimento do curso de extensão.

Etapas do curso	Aspectos da análise	Respostas representativas
Acolhimento ao curso (1º Encontro)	**A expectativa dos alunos em relação ao curso de extensão se baseava em uma noção de "reciclagem" ou aprimoramento para a sua formação e na possibilidade de compreensão da aplicação prática dos conceitos no dia a dia, bem como sua contextualização.**	"Uma dificuldade minha no uso das EDO sempre foi construir o modelo matemático a partir de dados empíricos, então a minha ideia é fazer essa reciclagem e a aprender as técnicas contigo para que eu possa "pegar" um problema prático e modelar ele através das EDO e EDP de forma bastante eficiente. " – A17 "Como o pessoal aí também, queria reciclar também né? Porque o curso passa bastante rápido, o curso de EDO (na graduação), e a gente não pode nem ver tanto assim as aplicações, e eu tenho muita dificuldade em modelar as coisas pra chegar em uma EDO, então eu acho que esse curso vai ajudar bastante a aprender essas coisas para melhorar o conhecimento. " - A2 "Eu ainda não cursei EDO... O que eu espero desse curso, minicurso, é que eu filtre alguma coisa, uma coisa ou outra, porque já que eu ainda não cursei EDO, eu gostaria de aprender mais para ficar mais fácil, sabe, o curso para mim e ter um aproveitamento melhor na disciplina quando eu for "pagar"."- A8
		"Ainda não paguei a disciplina de EDO, mas esse curso proporcionou ter esse contato inicial, muito interessante, por exemplo o método de resfriamento de Nilton que eu nunca tinha ouvido falar, pude compreender mais um pouco e isso vai

Desenvolvimento do curso (2º ao 6º Encontro)	**Contribuição do curso para a (re)construção dos conceitos de EDO**	ser muito importante quando eu for pagar a disciplina de EDO. ”– A3 “Sim, quando eu vi o curso de EDO muitas das vezes vinham teoremas e problemas que eram distantes da realidade, simplesmente era preciso aplicar o que foi visto na teoria e não precisava de muito esforço pra modelar ou até mesmo entender o problema para que ele fosse solucionado, já o curso mostra uma dinâmica bem contrária disso e no curso de extensão consegui ver alguns tópicos e como aquilo acontecia na prática, então eu creio que o curso de EDO ou algumas didáticas precisam ser reconstruídas.” - A5 “A pesar de estar apenas começando no curso de EDO, já tenho uma ideia do que irei presenciar durante o curso. Isso diminui a ansiedade, medo, insegurança...” – A9
	EDO e conexões matemáticas através da Resolução de Problemas	“Sim, quando se trabalha com a resolução de problemas abre muito sua mente e você "viaja" em outros conceitos que, mesmo sendo diferentes, envolvem também os conceitos do problema estudado. ” - A1 “Sim, foi visto que em problemas de situações não muito realistas podemos usar conteúdos "tradicionais" do ensino básico para resolver e o uso das EDO nos permite nos aproximar mais da realidade. ” – A4 “O problema que nos foi dado poderia ser resolvido por diferentes conteúdos, por isso a

		resolução de problemas é uma ferramenta importante no aprendizado, nos faz pensar em diferentes formas de resolver. ” – A7 “Sim com diversos conteúdos matemáticos, alguns básicos outros mais voltados para o Cálculo Diferencial e Integral, questão também da Física e muitas outras áreas do conhecimento. ” – A6
	O problema como ponto de partida na dinâmica de trabalho de ensino sob a perspectiva da Resolução de Problemas	“Achei interessante, pois aquilo faz os estudantes buscarem ferramentas para solucionar o problema mesmo sem que o professor dê a ferramenta que ele utilizou e isso torna-se uma metodologia que o aluno não resolve os problemas de forma mecânica. ” – A5 “Como aluna, achei bastante desafiador rsrsrs Mas que me proporcionou muitos momentos de reflexão e debate com os colegas. ” – A8 “Achei uma boa ideia, pois partindo do debate de uma questão, já se cria um ambiente de curiosidade que vai colaborar com a fixação do conhecimento depois que o problema for sendo explicado e solucionado. ” – A9 “Gostei, porque ativou nosso raciocínio até chegar em uma solução seja ela certa ou errada, já que o erro é visto como forma de aprendizagem. ” – A14

	O trabalho cooperativo e colaborativo através da Resolução de Problemas no contexto de ensino remoto – Salas simultâneas	“Sim, podemos discutir diversos pensamentos e assim construirmos a resposta mais próxima possível da realidade do problema. ” – A5 “Sim, pois gerou mais debates de ideias e alguns alunos que já tiveram contato com EDO ajudaram os que não tiveram. ” – A9 “Gostei sim, só que ficava perdida pq uns resolviam já com a EDO e eu não tinha conhecimento nenhum a respeito. ” – A13 “Ótima proposta, fez a turma se aproximar e os colegas super solícitos, compartilhando seus conhecimentos. ” – A15

Fonte: dados da pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste momento, procuramos cumprir a décima primeira atividade do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic. Momento este de refletir sobre os relatos descritos no capítulo anterior e *Antecipar as ações de outros,* ou seja, em avaliação da pesquisa, apresentamos as suas contribuições.

Esta pesquisa teve como questão norteadora: Como, utilizando a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, durante um Curso de Extensão, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática da UFCG/CES a (re) construir conhecimentos sobre as Equações Diferenciais Ordinárias? Nesse sentido, para finalizar esse trabalho gostaríamos de compartilhar algumas reflexões sobre a questão norteadora, justamente como os frutos obtidos antes, durante e depois da aplicação do projeto durante a pesquisa de campo.

Considerando tudo que foi apresentado, com a elaboração e execução do Projeto de Ensino (PE), apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e com as descrições e análises dos encontros, somados à aplicação do questionário de avaliação, foi possível constatar relevantes alterações na postura dos alunos-participantes, frente à construção e reconstrução de conceitos, teoremas e aplicações das EDO e suas implicações no processo formativo da compreensão dos conceitos matemáticos e da relevância em vivenciar uma nova abordagem no ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Então, ao responder à pergunta norteadora, apresentamos a nossa visão da investigação, para que o leitor possa refletir. Por exemplo, uma das consideráveis contribuições para a Educação Matemática se deu com a adaptação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no ensino remoto, no qual não tivemos a pretensão de elaborar uma classificação/avaliação dos participantes, durante o curso de extensão, mas sim de analisar as contribuições e/ou limitações da referida metodologia nesse processo, num cenário virtual, afinal, pode-se notar que cada participante teve sua maneira de pensar e resolver o problema em relação aos conteúdos propostos.

Acreditamos que este trabalho, proporcione elementos que possam auxiliar os licenciandos em matemática no ensino dessa disciplina, provocando-os a elaborarem suas próprias propostas de ensino, visto que, foi constatado que durante a resolução dos problemas geradores, conexões matemáticas foram construídas. Entendemos que, iniciar o curso de EDO através da Resolução de Problemas, apresentada por Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato

(2011), ou seja, ter como ponto de partida os Problemas Geradores, o estudo de modelos matemáticos clássicos, explorando-os com o auxílio da plataforma Zoom Meetings e os grupo do WhatsApp, pode trazer mais possibilidades para o processo de aprendizagem dos estudantes e professores nesse contexto e, talvez assim, seja possível também, atribuir algumas compreensões para essa disciplina.

O termo “Resolução de Problemas” aparece na Educação Matemática sob várias concepções diferenciadas em aspectos de sua definição, ou seja, a perspectiva do sobre, para e através. Existem pesquisadores que a utilizam como uma estratégia de ensino, para outros é uma metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com o intuito de utilizarem-na para construir um novo conhecimento.

Nessa pesquisa, destaca-se a referida dinâmica metodológica utilizada no curso, da qual os resultados apontam o problema como o ponto de partida para esse processo, sendo ele o gerador de novos conceitos e o pivô para as conexões matemáticas que se estendem aos conteúdos específicos do Ensino Superior, engajando-os a discutir e relacionar conceitos pertinentes também à Educação Básica e a refletir sobre o seu próprio processo de ensino e aprendizagem, considerando o perceptível avanço, com equidade, dos participantes que ainda estavam em formação inicial e dos participantes que já atuavam na profissão, nas atividades propostas, em frente a um espaço de trabalho coletivo.

Com a realização do curso de extensão, o qual propusemos para ser o mais próximo de uma sala de aula presencial, constituído por mim, professor-pesquisador, e 16 participantes, consideramos que os resultados mostram que este trabalho contribuiu com licenciandos em Matemática, bem como com professores de Matemática. Assim, partimos da ideia que favoreceu a aprendizagem, o que pode servir como suporte para o desenvolvimento de uma prática reflexiva, ao trabalharem na perspectiva da Resolução de Problemas, criando um novo caminho no que se refere à Formação Inicial de Professores e as EDO.

Conclui-se, assim, que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas apresenta-se como uma alternativa suscetível para abordar o ensino das EDO e suas possibilidades no contexto do ensino remoto e presencial. Logo, acreditamos que este trabalho, poderá subsidiar ideias para a construção e desenvolvimento de novas pesquisas no campo da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, C. P.; ONUCHIC, L. R. Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 433-466.

ANDRADE, S. **A pesquisa em educação matemática, os pesquisadores e a sala de aula**: um fenômeno complexo, múltiplos olhares, um tecer de fios. 2008. 461 f.(Doutorado)– Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, 2008.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados:** Análise de uma Experiência. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 370f , 2005.

ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91-122, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; BORSSOI, A.H. Modelagem Matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91 – 122, 2004

ALVES, M. B. **Equações diferenciais ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática**: formulação, resolução de problemas e introdução à modelagem matemática. 2008. 83f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <http://www.sistemas.pucminas.br/BDP/SilverStream/Pages/pg_ConsItem.html>. Acesso em: 20/02/2021.

ARAÚJO, A. M. R**. Modelagem matemática nas aulas de cálculo**: uma estratégia que pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de engenharia. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008. Disponível em: <http://ufpa.br/ppgecm/media/Dissertacoes_Alyne%20Maria%20 Rosa%20de%20Araujo.pdf.>. Acesso em: 20/02/2021.

ARAÚJO, J.L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In BORBA, M.C. ARAÚJO, J.L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.

ARSLAN, S. ***L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S:*** Est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences? 2005. Ecole doctorale des Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information et Informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. Disponível em: <http://tel.archivesouvertes.fr/docs/00/04/81/81/ PDF/tel-00009594.pdf.>. Acesso em: 20/02/2021.

ARSLAN, S.; LABORDE, C. Un outil favorisant le jeu de cadres: Cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. ***Actes du Colloque Européen*** ITEM, 2003, Reims France. Disponível em:< http://edutice.archivesouvertes.fr/docs/00/05/41/73/ PDF/co26th1.pdf.>. Acesso em: 20/02/2021.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 3a ed. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2004. p. 99-112.

BITTENCOURT, C. M. F. **Ensino de História**: fundamentos e métodos. São Paulo: Cortez, 2004.

BORSSOI, A. H. **A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino**. 2004. 140f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BORSSOI, A. H.; BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Tradução de Horácio Macedo. 6. ed. rev. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

BOYER, K. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blüicher, 1974.

BRAGA, R. M. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias.** 2009. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2009. Disponível em: <http://ufpa.br/ppgecm/media/dissertacao_roberta_modesto_braga.pdf.>. Acesso em: 21/04/2021.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: SEF, 1998. 148p.

_______. Parecer nº CNE/CP 09/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena Diretrizes. Brasília, 2001.

_______. Parecer no CNE/CP 07/2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília, 2015.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Editora Porto, 1994.

CHERVEL, A. **História das disciplinas escolares**: reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria & Educação, 1990.

D’AMBRÓSIO, U. **Da teoria à prática**. 17a ed. Campinas-SP: Papirus, 1996. 112p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2a ed. São Paulo: Ática, 1991. 176p.

DAVID, M. M.; MOREIRA, M. M. **A formação matemática do professor**: Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2007. 114p.

DULLIUS, M. M. ***Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico.*** 2009, 502f. Programa Internacional de Doctorado Enseñanza de las Ciencias – Universidade de Burgos, Burgos, 2009.

DULLIUS, M. M.; ARAÚJO, I. S.; VEIT, E. A. **Ensino e Aprendizagem de equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica:** uma experiência em cursos de Engenharia. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 17 a 42, Abr, 2011.

DULLIUS, M. M., Veit, E. A.; ARAÚJO, I. S. Dificuldade dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. ALEXANDRIA **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.26, n.2, 207-228, 2013.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FECCHIO, R. **A modelagem matemática e interdisciplinaridade na introdução do conceito de equação diferencial em cursos de engenharia**. 2011. 208f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <http://www.pucsp. br/pos/edmat/do/tese/roberto_fecchio.pdf.>. Acesso em: 20/02/2021.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas "estado da arte". **Educação & Sociedade**, Campinas, ano XXIII, no. 79, p. 257-272, 2002.

FERREIRA, V. D. T. **A modelagem matemática na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de engenharia**. 2010. 111f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em:< http://www.pucsp. br/pos/edmat/mp/dissertacao/vagner_donizeti_ferreira. Pdf>. Acesso em: 17/05/2021.

FERREIRA, N. C. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática. 2017. 281 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2017

FILHO, A. A. B.; LAUDARES, J. B.; MIRANDA, D. F. A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica. **Educação Matemática Pesquisa**, v.16, n.2, 323-348, 2014.

FINNEY, R. L. **Cálculo de George B. Thomas Jr**. São Paulo, SP: Addison Wesley, 2002.

FIORENTINI, D. A. Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. **Revista em Educação**, n.18, 107-115, 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática** (Formação de professores). Campinas: Autores Associados, 2006. 226p.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra S/A, 1996. 144p.

GALLEGOS, R. R. ***Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée:*** une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S. 2007. 500f. Ecole doctorale des Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information et Informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. Disponível em: <http://tel.archivesouvertes.fr/docs/ 00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf>. Acesso em: 17/05/2021.

GIL, A. C. **Didática do ensino superior**. São Paulo: Atlas, 2008.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar.** 8a ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004. p.110.

GOODSON, I. F. **Historia del curriculum**: La strucción social de las disciplinas escolares. Barcelona: Ediciones Palmares - Corredor, 1998.

HABRE, S. Exploring Student's Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reform Setting. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, p. 455-472, 2000.

_______. Investigating students‟ approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions**. International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology**, London, v. 34, n. 5, p. 651 - 662, 2003.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de problemas e a modelização matemática no processo de ensino-aprendizagem-avaliação**: uma contribuição para a formação continuada do professor de Matemática. 2014. 315 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2014.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica**: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. 2007. 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2007. Disponível e: <http://www.rc.unesp. br/gpimem/downloads/teses/javaroni_tese.pdf>. Acesso em: 25/06/2021.

JAVARONI, S. L.; SOARES, D. S. Modelagem matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. ***Acta Scientiae***, v.14, n.2, 260-275, 2012.

KALLAHER, M. (Ed.). **Revolutions in Differential Equations: exploring ODEs with Modern Technology**. Washington, USA: The Mathematical Association of America, 1999.

KLINE, M. **Mathematical thought from ancient to modern times**. Nova Iorque: Oxford University Press, 1972.

LAJOLO, M. **Livro Didático**: um (quase) manual de usuário. Em Aberto, v 16, n 69, 3- 9, 2008.

LAUDARES, J. B.; MIRANDA, D. F. Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n.1, p. 103-120, 2007.

LEAL JUNIOR, L. C.; MISKULIN, R. G. S. Perspectivas de Resolução de Problemas por meio de Articulações entre Teoria, Prática e Conceitos sobre Comunidade de Prática. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017. cap. 11, p. 305-353.

LEAL JUNIOR, L. C.; LOPES, J. M. P. Concepções sobre Resolução de Problemas na formação e na prática docente: Estado da arte. **Educação Matemática em Revista** - SBEM/RS, Porto Alegre, v. 19, n. 1, p. 105-116, 2018.

LIBÂNEO, J. C. **O essencial da Didática e o trabalho do professor: em busca de novos caminhos.** 2001. Disponível em: www.ucg.br/site_docente/edu/libaneo/pdf/didaticaprof,pdf Acesso em: 17/12/2020.

LUDKE, M; BOING, A. L. Caminhos da Profissão e da Profissionalidade Docente. **Educação e Sociedade**. Campinas, vol. 25, n. 89, p. 1159-1180, Set./Dez. 2004.

LUDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. **A Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas, 11ª reimp. São Paulo: EPU, 2008.

MACHADO, N. J. (1988). **Matemática por assunto:** noções de Cálculo. São Paulo: Scipione.

_______. **Conhecimento e Valor** (Teoria e Tendência). São Paulo: Moderna, 2004. p.165.

MELO, I. R. S. A Educação Matemática no Ensino Superior: perspectivas e desafios no ensino de equações diferenciais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XIII ENEM, 2019, Cuiabá/MT. **Anais**, 2019.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p.17-32.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action**: Recommendations for School Mathematics of the 1980's. Reston: NCTM, 1980.

_______. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989.

_______. **Professional Standards for Teaching Mathematics**. Reston: NCTM, 1991.

_______. **Assessment Standards for School Mathematics.** Reston: NCTM, 1995.

_______. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

_______. **Principles to Action**: Ensuring Mathematical Success for All. Reston: NCTM, 2014.

NOGUTI, F C. **Um Curso de Matemática Básica Através da Resolução de Problemas para Alunos Ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro-SP, 2014. 371f.

OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. A. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Ciências. **Boletim Gente**, n. 61, p. 125-137, 2012.

OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. Ensino e Aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. EM TEIA: **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 2, p. 2-22, 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática, v. 25, n. 41, 2011. p. 73–98.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. 313p.

ONUCHIC, L R.; HUANCA, R. R. H. A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, M. F. T. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: Papirus, 2013. 368p.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F. C. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 53-68.

POINCARÉ, H. **Mathematics and Science**: last essays. New York: Dover, 1913.

PONTE, J. P. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: PONTE, J. P. et al. **Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática**: que formação? Lisboa: SEM-SPCE, 1996. p.193-211.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Araújo, H. L. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. P. 203.

_______. O ensino por meio de problemas. Revista do Professor de Matemática. Tradução Gomide, E.; Hariki, S. Rio de Janeiro: SBM, 1985. p.11-16.

RASMUSSEN, C. New Directions in Differential Equations: a framework for interpreting studentes'understandings and difficulties. **Journal of Mathematical Behavior**, Cidade, v. 20, p. 55-87, 2001.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

REIS, F. S. **A tensão entre Rigor intuição no ensino de cálculo e análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e o Método de Pesquisa. Tradução: Onuchic, L. R.; Boero, M. L. **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: UNESP, n. 27, p. 93–139, 2007. p. 93-139.

SANTOS, A. R. **A Metodologia Científica**: a construção do conhecimento. 7. Ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SANTOS, S. P; MATOS, M. G. O. O ensino de Cálculo 1 no curso de licenciatura em matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista Eventos Pedagógicos**, v. 3, n. 3, p. 458-473, 2012.

SCHROEDER, T. L., LESTER Jr., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R., SHULTE, A. P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

SCHOENFELD. ***Mathematical Problem Solving***. London: Academic Press Inc. LTD, 1985. 409p.

SHULMAN, L.S. Those who understands: knowledge growth in teaching. ***Educational Researcher.*** Washington, v.15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SKOVSMOSE, O. Matemática em Ação. In: BICUDO M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 4a ed. São Paulo: Cortez editora, 2012. 344p.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Documento Base da Sociedade Brasileira de Educação Matemática:** Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática. Seminário Nacional De Licenciaturas Em Matemática. Salvador 2003.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Boletim SBEM**. n. 21, 2013. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>. Acesso em: 22/03/2021.

SOUZA, G. M. **Uma estratégia metodológica para a introdução de um curso de equações diferenciais ordinárias.** 2011. 141f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas, Belo Horizonte, 2011. Disponível em: < http://www.sistemas.pucminas.br/BDP/SilverStream/Pages/pg_ConsItem.html>. Acesso em: 25/04/2021.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. ***The teaching and assessing of mathematical problem.*** Reston-VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989. p.1-22.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TOLEDO, J. C. **Uma história do processo de instucionalização da área da Análise Matemática no Brasil.** 2008. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP: Rio Claro, 2008.

WALLE, J. A. V. ***Elementary and Middle School Mathematics:*** teaching developmentally. 4a ed. New York: Longman, 2001. 555p.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. ***Equações Diferenciais***, volume 1. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

ANEXO 1 – Formulário de Inscrição do Curso de Extensão Universitário

Curso de Extensão: EDO através da Resolução de Problemas: Da Prática aTeoria

Inscrições de 07/10 a 17/10.
Este é um evento on-line que ocorrerá de 27 de Outubro a 01 de Dezembro de 2021 àsquartas-feiras via Zoom Meetings às 14 horas, com certificação digital para os participantes do curso.

Atenção: Após o período de inscrições entraremos em contato com os inscritos via e-mail para tratar da homologação de sua inscrição e demais informações de acesso ao curso.

*Obrigatório

1. Nome Completo: *

---

2. E-mail: *

---

3. Confirmar E-mail: *

---

4. Nacionalidade: *

---

5. CPF: *

---

6. País: *

---

7. Estado: *

---

8. Cidade: *

9. Data de Nascimento: *

10. Número de Telefone para contato (Preferencialmente contato Whatsapp): *

11. Formação: (Especifique se está concluída ou em andamento) *

12. Ano de Conclusão:

13. Instituição da Graduação: *

14. Já cursou a disciplina de Cálculo Diferencial Integral I e II? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Em curso
- Outro: ____________________

15. Já cursou a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Em curso
- Outro: ____________________

16. Se você já cursou a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias em sua graduação, conte-nos em poucas palavras como foi a sua experiência (pontos positivos e negativos) no curso?

17. Possui algum curso de Pós-Graduação? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Especialização em andamento.
- [ ] Especialização concluída.
- [ ] Mestrado em andamento.
- [ ] Mestrado concluído.
- [ ] Doutorado em andamento.
- [ ] Doutorado concluído.
- [ ] Não possuo Pós-Graduação.

Outro: [ ] ______________________

18. Instituição da Pós-Graduação?

____

19. Já atua ou atuou como Professor de Matemática na Educação Básica? *

Marcar apenas uma oval.

( ) Sim

( ) Não

20. Já atua ou atuou como Professor de Matemática no Ensino Superior? *

Marcar apenas uma oval.

( ) Sim

( ) Não

ANEXO 2 – Questionário de Avaliação Utilizado

Seção 1

1. Diante dos encontros que tivemos durante o curso de extensão você acha que foi importante e contribuiu na sua formação docente em Matemática, seja ela inicial (participantes em curso) ou continuada (participantes já atuantes no mercado de trabalho)? Explique.

2. Quais pontos positivos e/ou negativos você aponta nesse curso de extensão como uma proposta de abordar uma nova perspectiva ao ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) na Licenciatura em Matemática?

3. De acordo com as vivências e discussões realizadas no curso de extensão você acredita que é mesmo necessários (re)pensar o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, EDO e/ou outras disciplinas na Licenciatura em Matemática, ao que se refere a sua abordagem pedagógica e objetivos? Explique.

4. Agora, como você vê a Resolução de Problemas?

5. Frente as experiências vivenciadas durante o curso de extensão você vê a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como funcional no ensino de EDO e/ou em outras disciplinas do Ensino Superior? Por quê?

6. Você acredita que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas poderia ser mais funcional no ensino de Matemática da Educação Básica (Anos Finais e Ensino Médio) ou no Ensino Superior ou em ambos? Que possibilidades e desafios você enxerga nessa alternativa?

7. Você usaria ou já usou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em suas aulas? Se sim, como foi a experiência? No que a prática desse curso extensão implicou frente a sua experiência?

8. Você viu alguma relação entre a Matemática Pura e a Educação Matemática durante o curso de extensão realizado? Acha importante essa relação? Por que?

9. Você acredita que a forma como foi abordado o curso de extensão proporcionou alguma contribuição no que diz respeito a construção ou (re)contrução dos conceitos das EDO?

10. Através da dinâmica do curso de extensão no contexto das resoluções dos problemas propostos você conseguiu fazer alguma conexão do problema com diferentes conteúdos matemáticos?

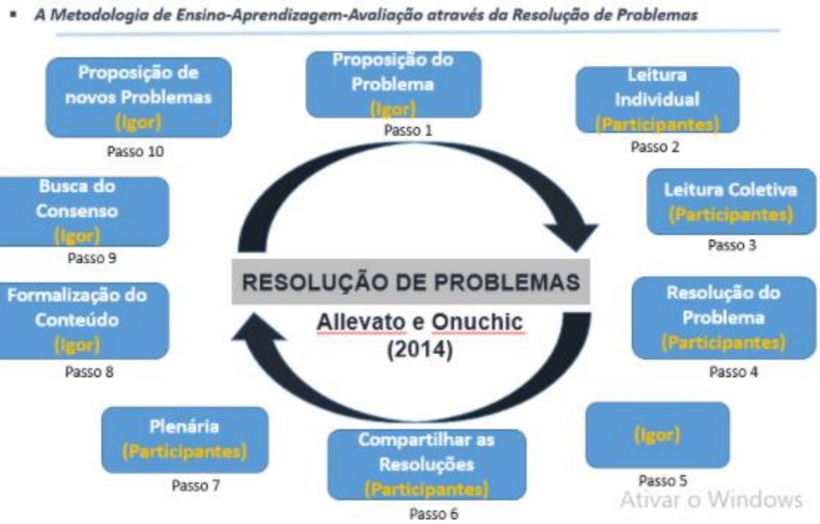
Seção 2

1. Qual a sua opinião sobre ter o Problema como o ponto de partida de todo o processo de ensino e aprendizagem do curso? Explique.

2. Você gostou da proposta de trabalhar em coletivo por meio das salas simultâneas? Foi satisfatório? Justifique.

3. O que você achou do momento Registro na Lousa, instante em que cada grupo apresenta e defende suas resoluções?

4. Qual etapa da dinâmica de trabalho da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas lhe chamou mais atenção? Explique.



ANEXO 3 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 1 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Diante dos encontros que tivemos durante o curso de extensão você acha que foi importante e contribuiu na sua formação docente em Matemática, seja ela inicial (participantes em curso) ou continuada (participantes já atuantes no mercado de trabalho)? Explique.	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Sim e muito, pois podemos ver algo que parecia muito formal em forma de problemas do nosso cotidiano, como também a união da educação matemática com a matemática pura.
A2	Foi muito importante, devido também ter sido minha primeira experiência em um curso de extensão, que proporcionou posteriormente bastante aprendizados.
A3	Foi muito contribuinte já que estou no início e ainda verei algo sobre, e ter este contato inicial foi gratificante.
A4	O estudo de EDOs é muito rico em conteúdos que podem ser explorados. Dessa forma sempre haverá algo novo para aprender. Os encontros fizeram com que eu revisse algo que havia estudado a muito tempo e também me deparei com conceitos (aplicação de EDO) inéditos. Como aluno, os encontros contribuíram para minha formação, já que eu pretendo seguir na área de matemática. E como professor, a parte de resolução de problemas foi maravilhoso, já que eu trabalho com os meus alunos com problemas contextualizados.
A5	Sim, me ajudo olhar a disciplina de EDO e as demais disciplina com uma percepção diferente, haja vista, que o curso de extensão teve o enfoco de usar a resolução de problemas em equações diferenciado algo bastante inovador e interessante, pois tal metodologia apresenta inicialmente o problema e faz com que o estudante utilize apenas os conhecimentos prévios, e com o decorrer do curso foi visto que essa metodologia era bastante eficiente, portanto, eu como futuro professor me instigou bastante usar tal metodologia.

A6	Os encontros que tivemos no curso de extensão foram muito proveitosos e de fundamental importância para a nossa formação docente, principalmente em relação a metodologia referente a resolução de problemas adotada pelo professor, onde por meio dos debates realizados em grupos pudemos adquirir e compartilhar muitos aprendizados, todos os momentos, explicações do professor e debates foram essenciais e contribuíram muito, principalmente para quem ainda vai pagar EDO, nos causando um certo interesse e estímulo pela disciplina.
A7	De início, minha intenção com o curso era em tese ganhar umas horas (kkkkk), contudo, no decorrer dos encontros, fui percebendo a importância do curso, com isso pude revisar um pouco sobre equações diferenciais ordinárias e rever um pouco sobre resolução de problemas, então além de importante, contribuiu bastante na minha formação.
A8	Com certeza! Esse curso contribuiu de diversas maneiras, tanto na parte do saber matemática como no aprendizado de uma nova metodologia de ensino.
A9	Acho que contribuiu com minha formação docente, pois me deu uma nova ideia de como a Matemática pode ser ensinada.
A10	Com toda certeza!!! Foram debates enriquecedores para o desenvolvimento e o pensamento crítico nesse leque de problemas que envolvem variação.
A11	Foi muito importante e contribui bastante na minha formação, foi um complemento e uma revisada, tanto para as disciplinas já cursadas como Equações Diferenciais Ordinárias e Ensino da matemática através da resolução de problemas.
A12	claro que sim, com o curso e as discursões durante ele foi possível entender diferentes formas de solucionar o mesmo problema.
A13	Com certeza sim
A14	A participação do curso foi importante pra a compreensão da EDO para resolver problema.
A15	Sim. Já tinha ouvido sobre a Metodologia de Resolução de

	Problemas, porém a primeira vez que verifiquei a aplicação da mesma.
A16	Nossos encontros contribuíram sim na minha formação docente. Foi uma experiência diferente e prazerosa.

ANEXO 4 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 2 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Quais pontos positivos e/ou negativos você aponta nesse curso de extensão como uma proposta de abordar uma nova perspectiva ao ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) na Licenciatura em Matemática?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	A utilização da resolução de problemas foi um ponto muito positivo, pois nos leva a pensar bastante e buscar modelos que descrevam o problema, já a questão do tempo creio que foi pouco, se o curso fosse mais extenso teria sido muito melhor
A2	Do curso não encontrei pontos negativos, gostei bastante, também devido a metodologia resolução de problemas que foi utilizada.
A3	Muito inovadora, já que sai do método tradicional de teoria e utiliza-se de uma metodologia que ao meu ver contribui bastante no compartilhamento deste conteúdo (metodologia resolução de problemas).
A4	Positivos: Tanto se pode usar ED para a disciplina de resolução de problema como também dar para usar os métodos de resolução de problema para passar os conteúdos de EDOs. Para o ensino de EDO os problemas propostos, muitos deles foram problemas sem solução, dessa forma a metodologia da RP leva o aluno à liberdade de construir sua resposta e uma vez feito isso há um ganho maior de aprendizagem. Negativo: O curso de EDO é corrido e muitas vezes é bem visto que é mais importante que o aluno aprenda a resolver as EDOs mesmo sem saber pra que. Os alunos, muitas vezes, precisa fazer muitas vezes, mesmo de uma forma mecânica, para fixar conteúdos. E para um estudo de EDO por meio da RP, seria necessário retirar essa parte cansativa e trabalhosa dos alunos, de ficar resolvendo exercícios repetitivos e cansativos.
A5	Não consigo pensar nos pontos negativos... já os positivos, é que me deu uma nova perspectiva de como abordar os assuntos com uma abordagem não tradicional e acredito que a resolução de

	problemas é bastante efetiva no ensino-aprendizagem.
A6	Os pontos positivos foram principalmente os debates entre os alunos e o professor, de modo que, nos possibilitou muitas experiências riquíssimas e aprendizagens em relação a alguns conteúdos que ainda não tínhamos contato. Um ponto negativo é que o curso deveria durar um semestre todo para aproveitarmos melhor
A7	Na universidade é apresentado EDO de uma maneira um pouco mais formulista, ou seja, o professor nós mostra determinado método e após isso aplicamos em determinados problemas, o curso nos mostra que mesmo sem ter cursado a disciplina de EDO, é possível resolver problemas e ter aquele conhecimento que é necessário na disciplina, então a abordagem do curso de extensão tendo na resolução de problemas como temática foi um sucesso e muito instigante.
A8	Acredito que o principal ponto positivo é o de ter a experiência em tentar solucionar problemas de uma forma não convencional/tradicional.
A9	O ponto positivo é que foram aulas bem dinâmicas com trabalhos em grupos, mas creio que o minicurso serviu mais a quem já pagou alguma cadeira envolvendo EDO.
A10	Em primeiro, com certeza, a vontade de conhecer mais o tema... em segundo, a percepção de como, de fato, podemos enxergar a variação naquele problema, usando inicialmente, apenas conhecimento básico e recorrente da explicação. Na minha opinião não houve um ponto negativo sequer, porém, poderia ser planejado com mais cuidado a data de execução do curso.. como teria muitos alunos do ces, seria bom fazer nas férias do campus; mas foi muito proveitoso, em tudo mesmo!
A11	Um dos pontos negativos foi o pouco tempo de curso e o modo remoto, em que alguns pontos não são abordados diretamente. Um dos pontos positivos foi a abordagem da apresentação de Equações Diferenciais Ordinárias através da resolução de problemas, foi

	algo novo para o meu conhecimento.
A12	Pontos positivos: os debates sobre as soluções pontos negativos: nem sempre todos alunos interagem
A13	O único ponto negativo foi que o tempo foi curto
A14	O uso da Resolução de problema é bom para ativar os conhecimentos prévios e fazer conexões com vários assuntos. Acredito q a RP é uma boa metodologia a ser aplicada no ensino.
A15	O lado positivo do curso é a ênfase em trazer problemas que aparentemente podem ser solucionados por matemática básica, mas depois de uma análise cuidadosa precisavam de EDO para suas soluções. Numa próxima edição recomendo que as aulas gravadas sejam disponibilizadas para que os participantes possam assistir quando não puderem participar dos encontros síncronos.
A16	Acredito que só tiveram pontos positivos, porque é uma proposta de ensino que foge do padrão teoria e prática, faz o aluno pensar antes de conhecer o conteúdo, o deixando curioso e interessado.

ANEXO 5 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 3 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

De acordo com as vivências e discussões realizadas no curso de extensão você acredita que é mesmo necessários (re)pensar o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, EDO e/ou outras disciplinas na Licenciatura em Matemática, ao que se refere a sua abordagem pedagógica e objetivos? Explique.	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Com certeza, essas disciplinas são lecionadas de forma muito formal e não trás muitas aplicações em forma de problemas de uma forma que o discente não vê sentido ao estudar o conteúdo.
A2	Sim, pois como foi mostrado nesse curso de extensão a metodologia resolução de problemas é riquíssima pois através dela o aluno pode aprender de forma mais dinâmica.
A3	Sim. Repensar o ensino, trazer o ensino destas disciplinas de modo que você se concte tanto com teoria quanto o cotidiano, fica até mais instigante para o aluno e tem um melhoramento no ensino.
A4	Não: Penso eu que o estudo de cálculo (cálculo de uma forma em geral) deve ser abordado de forma tradicional: Conteúdo, exercícios, construções que não saem das estruturas matemáticas, resolução de exercícios que se forem questionadas não faz muito sentido resolver. Por que, existe assuntos em matemática (e são muitos) que não pode-se facilmente abordar como problemas, e nesses momentos os alunos não estarão preparados. Um exemplo é a disciplina de análise real. Penso eu que o cálculo passado de uma forma tradicional ajuda na compreensão de análise real.
A5	Sim, muitas vezes os cursos de cálculos são vistos da teoria e em seguida o professor faz alguns exemplos e os alunos tentam resolver exercícios de forma bastante mecânica.
A6	Sim com certeza, pois na graduação precisamos o quanto antes perceber o quão essas disciplinas são importantes e amplas, visto que, infelizmente no início muitas vezes não é dado a real importância a essas disciplinas em termos de realmente aprendê-

	las.
A7	Seria repensar um pouco, pois é sabido que o cálculo diferencial além importante é uma disciplina bastante complicada, principalmente para pessoas que não tiveram um boa base no ensino básico, vejo importante a utilização de novas formas de abordagem dessas disciplinas.
A8	Sim. Seria interessante trazer mais a metodologia da resolução de problemas nessas disciplinas.
A9	Com certeza deve ser repensado o ensino, não só de Cálculo Diferencial e EDO, mas toda a estrutura de ensino superior. Poderia repassar uma Matemática mais contextualizada.
A10	Com certeza! Vemos muito a parte "técnica" do assunto, mas suas aplicações geralmente são bem abstratas. Sem ter a possibilidade de lutas interpretações para abrir discussões.
A11	Sempre é bom pensar e repensar no ensino, pois é algo que está sempre em processo de evolução. E sempre será bem vinda novas metodologias com a intenção de melhorar o ensino.
A12	sim, o ensino destas disciplinas maioria dos professores se dentem apenas a abordagem teórica e esquecem da parte mais interessante e motivadora para o aluno que é a aplicação dos conteúdo na prática/ cotidiano.
A13	Sem sombra de dúvidas.
A14	Sim, Devido essas disciplinas ser passadas como matemática pela matemática, tendo em vista que precisamos da aplicação de problemas no cotidiano para assim assimilar e fazer sentido oq estamos aprendendo, caso contrário será apenas um decoreba o aprendizado.
A15	Atualmente a maioria das disciplinas de matemática são trabalhadas primeiramente a parte de operacionalização do conteúdo para depois se trabalhar com resolução de problemas. A inversão da ordem é interessante, pois faz o aluno perceber a importância do estudo de determinados temas.
A16	Certeza que deve sim ser repensado a forma de ensino de todas as

	disciplinas, quanto mais atrativo for o método mais o aluno vai se interessar e desenvolver o aprendizado de forma rápida.

ANEXO 6 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 4 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Agora, como você vê a Resolução de Problemas?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Já via com bons olhos e agora muito mais, é uma forma muito boa de ensinar matemática e podemos perceber que podemos ensinar qualquer conteúdo fazendo a utilização dessa metodologia.
A2	Vejo como uma metodologia eficiente que proporciona o aprendizado através dos conhecimentos prévios dos alunos.
A3	Uma metodologia que busca através da resolução ensinar aos alunos um certo conteúdo.
A4	Como uma metodologia de ensino. Inclusive, estou usando mais em sala de aula.
A5	Como uma ferramenta de ensino bastante inovadora, e distante do tradicional.
A6	Como uma metodologia que ajuda bastante para a compreensão do aluno de forma muito significativa
A7	A resolução de problemas é uma metodologia incrível, com certeza deverá ser mais utilizada no ensino
A8	Uma ferramenta poderosíssima de ensino/aprendizagem que propõe uma construção de conhecimento significativa para a vida dos envolvidos.
A9	Vejo que é bem mais complexo do que eu imaginava.
A10	Uma metodologia fascinante, entretanto, pouco trabalhada no mundo escolar. Talvez por medo ou algo do tipo.
A11	Vejo a Resolução de Problemas como uma boa metodologia, pois instiga aos alunos a pensar e resolver a solução com o conhecimento que eles já tem.
A12	vejo a resolução de problemas como algo que anda de mãos dadas com a modelagem matemática.
A13	Vejo como um caminho que abre espaço para a aprendizagem de

	qualquer problema/ conteúdo
A14	Como uma ótima metodologia de ensino
A15	Vejo como uma excelente metodologia de ensino.
A16	Uma ótima opção para as práticas pedagógicas.

ANEXO 7 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 5 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Frente as experiências vivenciadas durante o curso de extensão você vê a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como funcional no ensino de EDO e/ou em outras disciplinas do Ensino Superior? Por quê?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Sim, pois essa metodologia permite avaliar melhor o aluno, como também desenvolver ainda mais seus conhecimentos, pois quando o aluno se depara com um problema desafiador ele buscara diversas formas de solucioná-lo.
A2	Claro essa metodologia instiga o aluno, ela proporciona trazer um conteúdo através de um problema.
A3	Sim. Pois o aproveitamento que se tem com este ensino é muito construtivo.
A4	Sim, como mencionei em 2, a Resolução de problema contribui mais à aprendizagem. A grande questão é que leva tempo, mas filosofar antes, durante e depois dar questão resulta em ganho bem considerável de aprendizagem.
A5	Sim, como foi dito anteriormente a resolução de problemas faz com que o aluno seja pensante e inovador na solução dos problemas, uma vez que a resolução de problemas coloca o estudante como protagonista do ensino, ou seja, a resolução de problemas é eficiente em qualquer momento de ensino.
A6	Sim essa metodologia é muito útil para essa disciplina e também para o Cálculo Diferencial e Integral pois possibilita um olhar diferente para essas áreas do conhecimento de modo que, vemos a possibilidade de fazer várias conexões com outros assuntos da matemática.
A7	Acho que a sua utilização é um passo importante para a aprendizagem do Aluno

A8	Sim.
A9	Sim, pois essa técnica dá mais sentido ao que é ensinado em sala.
A10	Eu acredito que sim, mas, somente se for o curso completo. Por que é evidente que durante todo o curso não se usará apenas essa metodologia (caso faça isso seria exagerado demais). Eu acho que deve sempre estar alternando as metodologias, no entanto, explorar mais a resolução de problemas.
A11	Sim, pois assim não fica algo automático, com essa metodologia deixa os alunos pensarem mais formas de resolverem o problema.
A12	sim, pois desta maneira da para os alunos ver o conteúdo na prática e se motivar a estudar. Sim.
A13	Sim , pois a resolução de problemas abre portas para o aprendizado
A14	Não
A15	Sim, porque leva o aluno a refletir sobre a necessidade de aprender o conteúdo a fim de aumentar ainda mais seu potencial na resolução de problemas. A metodologia pode muito bem ser utilizada em outras disciplinas do superior, porque assim o aluno sentiria um porquê a mais em estudá-las.
A16	Acredito que sim, toda e qualquer forma de ensino que prenda a atenção do aluno é valida. Deve sim ser levada em consideração no ensino superior como também no ensino médio.

ANEXO 8 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 6 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Você acredita que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas poderia ser mais funcional no ensino de Matemática da Educação Básica (Anos Finais e Ensino Médio) ou no Ensino Superior ou em ambos? Que possibilidades e desafios você enxerga nessa alternativa?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Sim, creio que terá desafios sim, pois o sistema ainda se prende muito ao ensino tradicional, onde o professor expõe o conteúdo e depois faz uma prova para avaliar o conhecimento e quando se tenta algo novo muitos não veem com bons olhos.
A2	Particularmente, essa metodologia se aplica a qualquer facetaria de ensino, ela instiga o aluno através da resolução do problema, e proporciona até uma discussão melhor sobre determinado conteúdo.
A3	Em ambos. Pois muitos alunos já estão com um conteúdo mais avançado por tratar de anos finais, com isso teria possibilidade de aplicar esta metodologia. Sobre desafios, como a Dr. Lourdes lá rosa fala que para o uso da metodologia, não basta apenas aplicar, mas o professor deve estar preparado para executar esta metodologia, este pode ser o desafio que pode encontrar na aplicação pelos professores.
A4	Educação Básica: Exercícios para casa com o auxílio da seguinte maneira: o professor passar o exercício e ficava a disposição para tirar dúvidas via meio eletrônico mesmo, com isso ganhariam tempo, para que em sala de aula terem mais rendimento. Ensino superior: Acrescentando disciplinas extras. Por exemplo, para disciplina de EDO tem a disciplina de modelagem matemática, que trabalha com problemas os quais os alunos já tem ferramentas para resolve-los.
A5	Sim, como foi dito anteriormente a resolução de problemas é eficiente em qualquer parâmetro de ensino, é bem possível que

	diversos professores se adaptem a essa metodologia, os desafios talvez seja que os professores busquem inovar suas metodologias e saíam das tradicionais e busquem entender o que de fato significa a resolução de problemas e como aplicar na sala de aula, também é necessário investigar a turma a qual o professor está inserido.
A6	Apesar de ser muito proveitosa no ensino dessas disciplinas no nível superior, considero que sua aplicação deveria ocorrer com mais frequência no ensino da matemática da Educação Básica, vale ressaltar que, essa metodologia também contribuirá muito para o nível superior e deve sim ser aplicado neste, no entanto, como mencionei deveria ser trabalhado mais frequente no ensino de Matemática da educação básica.
A7	Acredito que seria uma boa sua utilização na base do ensino, mas vejo como Dificuldade ainda a utilização dessa metodologia por uma pessoa que não seja capacitada.
A8	Com certeza! Entretanto, seriam muitos desafios à serem enfrentados. O corpo docente não está tão acostumado com a prática desta metodologia, e consequentemente, os alunos também não. Mas, eu acredito que ao ser "acrescentada" em sala de aula gradativamente, a metodologia de resolução de problemas pode trazer muitos benefícios para educação básica e educação superior.
A9	Acho que o ensino seria bem mais eficaz caso o método fosse colocado em prática em toda estrutura educacional, mas enfrentariam algumas barreiras para colocarem isso em prática, já que temos uma grande resistência ao novo principalmente da área de educação, e também a estrutura física e burocrática das escolas não facilitam o acesso a novos métodos de ensino.
A10	Creio que em ambos. Os desafios seria encaixar em que momento usar tal metodologia, saber planejar detalhadamente, entender que alguns alunos não conseguirão chegar o nível que deseja (por não ter uma boa "bagagem" de conteúdo) e assim ter iniciativas e eventuais precauções.

A11	Acredito que em ambos. Alguns desafios podem ser enfrentados pois os alunos estão muito acomodados com o ensino tradicional e a apresentação de uma nova metodologia por trazer um certo desconforto para os alunos.
A12	sim. possibilidades de que os alunos desmistifique essa ideia que matemática é difícil e se torne cada vez mais prazerosa estudar matemática uma vez que você está vendo seu uso dentro do cotidiano. os desafios é a resistência de alguns professores a querer continuar com o ensino tradicional de matemática.
A13	Na prática acaba sendo difícil introduzir essa nova metodologia, mas que com um bom planejamento da certo
A14	Sim, acredito que ao aplicar RP o professor vai está estimulando o raciocínio do aluno, fazendo com quem ele seja o protagonista da sua própria aprendizagem.
A15	Vejo que a metodologia pode ser aplicada na educação básica e superior sim e que será funcional quando as propostas dos problemas a serem resolvidos servirem bem como introdução a conteúdos a serem trabalhados.
A16	Acredito que em ambos. É uma metodologia dinâmica, que prende a a tenção do aluno ao mesmo tempo que desperta o interesse da solução. Fazendo com que o aluno abra um leque de possibilidades para sua resposta.

ANEXO 9 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 7 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Você usaria ou já usou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em suas aulas? Se sim, como foi a experiência? No que a prática desse curso extensão implicou frente a sua experiência?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Com certeza, já tive a experiência no estágio e foi muito proveitoso, percebi que os alunos se interessam mais e buscam no que já viu e no que ainda vai ver formas de resolver, como também usam coisas do senso comum deles.
A2	Sou graduando ainda mais apresentei uma aula usando tal metodologia foi muito rica a experiência os alunos gostaram muito, e nesse curso de extensão a gente pode perceber que essa metodologia é muito dinâmica e eficaz.
A3	Já utilizei, mas foi para dar uma aula coordenada por uma professora, gostei do método de ensino, uma só coisa que não me agradou, acredito que seja pelo momento que estamos, foi a interação dos alunos, mas tirando isso foi possível notar com os problemas propostos diferentes resoluções dos alunos.
A4	Sim, usei a metodologia (adaptada é claro) e deu-se para perceber que os alunos se interessam mais pela compreensão do problema.
A5	Já usei a resolução de problemas, não foi tão efetivo, pois não tinha entendido como realmente utilizá-la, usei um problema distante do cotidiano e não instigava o estudante, no curso me deu uma base melhor de como utilizar a resolução de problemas, e pretendo buscar mais informações pra aplicar de forma coerente a metodologia de resolução de problemas.
A6	Já utilizei sim a resolução de problemas em uma aula que ministrei com meus colegas, porém foi um pouco difícil a participação dos alunos e a questão da compreensão por parte deles do que realmente o problema queria, também tivemos um pouco de dificuldade em explicar o problema deixando o claro o que ele pedia. A prática desse curso implicou principalmente a questão de

	ler o problema e compreender o que realmente ele está querendo e compreender cada palavra e o todo em si.
A7	Quando cursei a disciplina tínhamos como atividade ministrar uma aula com base nessa metodologia e foi incrível, você apresentar definições que talvez fossem consideradas complicas, com base em problemas foi bastante interessante.
A8	Nunca usei pois nunca dei aula. Mas, quando for professora, pretendo utilizá-la.
A9	Ainda não.
A10	Eu usaria sim. Como já dito, é uma metodologia que precisa ser mais explorada. Em toda minha vida escolar e acadêmica eu só presenciei uma palestra sobre a resolução de problemas e o presente mini curso, ambos só no âmbito universitário, não vi em nenhum momento ou com outras disciplinas a resolução de problemas.
A11	Ainda não tive oportunidade de usa-la, mas já estudei na disciplina de "Ensino da matemática através da resolução de problemas".
A12	não.
A13	Ja usei só na disciplina de metodologia III. Me abriu um novo olhar sobre essa metodologia.
A14	Sim, em uma aula experimental na disciplina de Resolução de Problema. Foi muito proveitoso pq tivemos a oportunidade de fazer eles pensarem e chegar na solução. Um ponto negativo foi em relação a falta de interação dos alunos já que a aula foi no estilo remoto.
A15	Participando do curso observei que por muitas vezes usei ou cheguei bem perto dos passos da metodologia de resolução de problemas na minha prática de ensino.
A16	Ainda não tive a oportunidade. Mas, farei uso dessa metodologia quando possível.

ANEXO 10 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 8 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Você viu alguma relação entre a Matemática Pura e a Educação Matemática durante o curso de extensão realizado? Acha importante essa relação? Por que?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Vi sim, e acho muito importante pois ainda há essa divisão entre matemática pura e educação matemática e creio que ambas tem que caminhar juntas no objetivo de levar o conhecimento ao aluno da melhor forma possível.
A2	Sim, acho muito importante essa perspectiva com essa relação a matemática fica mais ainda interessante.
A3	Sim. É importante porque o aluno pode até se identificar com o que quer no futuro e assim o que ele estar vendo será sem dúvidas de grande proveito, fazendo esta ponte.
A4	A relação é a construção das ideias antes da generalização. Acredito eu, que a generalização de um resultado matemático é mais fixado quando se faz antes por ideias intuitivas.
A5	Sim, a proposta do curso em si é apresentar uma disciplina da matemática pura em conjunto com a matemática educacional, e essa parceria foi bastante interessante, eu nao imaginava que seria possível reunir essas duas áreas que na minha cabeça eram bastantes distintas.
A6	Sim com certeza. Essa relação é de fundamental importância, já que a educação matemática está sim relacionada com a matemática pura, e vale destacar que a matemática pura vai contribuir bastante para a área da educação matemática da mesma forma a área da educação vai ser essencial para a matemática pura.
A7	É visto por parte de muitos alunos da matemática pura que a educação matemática é passa tempo, no curso foi possível ver que sim, a matemática pura pode ser trabalhada com base na educação matemática e acho que além que importante agrega pontos positivos pra quem é da graduação

A8	Sim, e achei muito importante. Pois nos mostra que o que estudamos na matemática pura não é nada mais nada menos do que a matemática utilizada como ferramenta para auxiliar à resolver problemas do nosso cotidiano.
A9	Percebi uma relação entre Matemática Pura e Educação Matemática, e isso se faz importante para expandir o acesso a assuntos mais complexo da Matemática.
A10	Muito importante pelos mesmos motivos ditas no quesito 1 do presente questionário.
A11	Foi visto uma relação entre a Matemática Pura e a Educação, foi algo que me chamou a atenção pois de antemão ainda não tinha visto. Acho muito importante essa relação entre elas.
A12	sim. é de extrema importância as duas, é importante saber a matemática assim como o rigor matemático mas também é importante sabe o ensino de matemática, caso você não saiba como ensinar matemática é inútil apender a mesma apenas para acumular conteúdo para si.
A13	Vi sim, a resolução de problemas com a disciplina da matemática pura.
A14	Sim, Devido o nosso curso oferecer uma nova metodologia para o ensino-aprendizagem tanto de alunos que estavam cursando licenciatura ou já tinham se formados, já que na área da docência o docente deve sempre está buscando novas maneiras de passar e aprender.
A15	Sim conseguir verificar uma relação entre Matemática Pura e Educação Matemática durante o curso. Essa relação é importante, porque no processo de ensino é muitas vezes necessário compreender a necessidade de estudar determinado assunto antes de abordá-lo.
A16	Essa metodologia vai além do assunto abordado, sempre flutua sobre os conteúdos/disciplinas é super importante e valida em todas as áreas.

ANEXO 11 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 9 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Você acredita que a forma como foi abordado o curso de extensão proporcionou alguma contribuição no que diz respeito a construção ou (re)construção dos conceitos das EDO?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Sim
A2	Sim, muitas coisas nem lembrava mais e foi bom ter recordado esses conceitos.
A3	Ainda não paguei a disciplina de EDO mais esse curso proporcionou ter esse contato inicial, muito interessante, por exemplo o meto de resfriamento de Nilton que eu nunca tinha ouvido falar, pude compreender mais um pouco e isso vai ser muito importante quando eu for pagar a disciplina de EDO..
A4	Sim, foi possível ver as características específicas das EDO quando se compara com situações problemas em que não necessita a aplicação de ED.
A5	Sim, quando eu vi o curso de EDO muitas das vezes vinha teoremas e problemas que eram distantes da realidade, simplesmente era preciso aplicar o que foi visto na teoria e não precisava de muito esforço pra modelar ou até mesmo entender o problema para que ele fosse solucionado, já o curso mostra uma dinâmica bem contrária disso e no curso de extensão consegui ver alguns tópicos e como aquilo acontecia na prática , então eu creio que o curso de EDO ou algumas didáticas precisam ser reconstruídas
A6	Sim e muito pois diversas informações e aprendizagens vão nos ajudar bastante para quando formos pagar a disciplina de EDO..
A7	No curso foi possível revisar algumas definições importantes, então contribuiu bastante na reconstrução dos conceitos
A8	Sim, pois agora tenho alguma ideia de como funciona EDO.
A9	A pesar de estar apenas começando no curso de Edo, já tenho uma

	ideia do quê irei presenciar durante o curso. Isso diminui a ansiedade, medo, insegurança...
A10	Sim, foi muito proveitoso.
A11	sim, pois vai básico sem o uso de equações diferenciais e sabendo da importância da equações diferenciais.
A12	Sim, estou começando EDO, e já identificando alguns dos pontos vistos no minicurso
A13	Sim, pq a gente ao longo do curso tivemos alguns problemas que através deles fomos construindo a noção de EDO.
A14	Sim.
A15	Sim, sempre aprendemos algo a mais, mesmo depois de ter visto o conteúdo e a disciplina.
A16	Sem resposta.

ANEXO 12 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 10 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Através da dinâmica do curso de extensão no contexto das resoluções dos problemas propostos você conseguiu fazer alguma conexão do problema com diferentes conteúdos matemáticos?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Sim, quando se trabalha com a resolução de problemas abre muito sua mente e você "viaja" em outros conceitos que mesmo sendo diferentes envolvem também os conceitos do problema estudado.
A2	Sim, essa metodologia tem justamente esse diferencial pois a gente pode usar outros conceitos pra chegar a resolução de um mesmo problema.
A3	Sim. Foi bastante visível outros conteúdos que continha por traz dos problemas.
A4	Sim, foi visto que problemas de situações não muito realistas podemos usar conteúdos "tradicionais" do ensino básico para resolver e o uso das EDO nos permite nos aproximar mais da realidade.
A5	Sim, eu creio que todas as disciplinas do curso de matemática pode-se analisar de forma diferente, sempre tentando entender tais conteúdos.
A6	Sim com diversos conteúdos matemáticos, alguns básicos outros mais voltados para o Cálculo Diferencial e Integral, questão também da Física e muitas outras áreas do conhecimento.
A7	O problema nos dado poderia ser resolvido por diferentes conteúdos, por isso a resolução de problemas é uma ferramenta importante no aprendizado, nos faz pensar em diferentes formas de resolver.
A8	Sim.
A9	Sim. Principalmente sobre proporção.
A10	Apenas na última questão (população de bactéria) e na questão do

	cafezinho (onde usamos apenas a lógica mas percebemos que por estar variando, o resultado não seria aquele).
A11	Sim, Pudemos ver que nas resoluções dos nossos colegas do curso pudemos ver vários pensamentos distintos, uns usaram regra de três, outros utilizaram EDO, cada um tentava resolver de acordo com os seus conhecimentos.
A12	sim, alguns problemas dava se utilizar de porcentagem para se aproximar do valor
A13	Muita conexão, vi em um livro que a EDO é a linguagem da natureza, e to começando a ver que é isso mesmo
A14	Sim
A15	Sim.
A16	Podemos fazer conexão com outros conteúdos como probabilidade.

ANEXO 13 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 1 do Questionário de Avaliação (Seção 2)

Qual a sua opinião sobre ter o Problema como o ponto de partida de todo o processo de ensino e aprendizagem do curso? Explique.	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	É bacana, pois quando se trás o problema primeiro instiga mais o aluno a buscar e pensar mais sobre o que vai se estudar.
A2	É muito interessante pois através de um problema a pessoa pode utilizar vários conceitos matemáticos para resolve-lo e também aprender determinado conteúdo.
A3	Se o aluno já tiver um conhecimento prévio, bom, mas muitos terão dificuldades em como resolver e quais caminhos terão para chegar ao resultado.
A4	Acho que contribui muito para a aprendizagem.
A5	Achei interessante, pois aquilo faz os estudantes buscarem ferramentas para solucionar o problema mesmo sem que o professor de a ferramenta que ele utilizou, e isso torna-se uma metodologia que o aluno não resolve os problemas de forma mecânica.
A6	Nos possibilita relacionar diversas áreas do conhecimento para sua resolução
A7	Acho que foi fiel ao título do curso, e com certeza foi mais interessante dessa forma pois nos possibilitou procurar formas diferentes de resolver sem se ater somente as EDOs
A8	Como aluna, achei bastante desafiador rsrsrs Mas que me proporcionou muitos momentos de reflexão e debate com os colegas.
A9	Achei uma boa ideia, pois partindo do debate de uma questão, já se cria um ambiente de curiosidade que vai colaborar com a fixação do conhecimento depois que o problema for sendo explicado e solucionado.

A10	Isso proporciona debates e troca de conhecimentos, o que retornará uma abrangência para o entendimento do que se quer abordar.
A11	Ter o problema como ponto de partida, ajuda a pensar mais nas soluções possíveis .
A12	interessante. porque aí você instiga o aluno a encontrar meios para resolver o problema, e nisso as vezes ele utiliza conteúdos totalmente diferente do que o professor imaginava.
A13	Para mim, ainda é um pouco diferente, mas que acho bastante pertinente, de bom grado
A14	Gostei, porque ativou nosso raciocínio até chegar em uma solução seja ela certa ou errada, já que o erro é visto como forma de aprendizagem
A15	Achei ótimo, pois assim podemos ter experiência de como usar a metodologia na prática.
A16	Não sei se de todo o curso, mas de boa parte dele sim. Porque é uma forma de inventar o aluno a pensar.

ANEXO 14 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 2 do Questionário de Avaliação (Seção 2)

Você gostou da proposta de trabalhar em coletivo por meio das salas simultâneas? Foi satisfatório? Justifique.	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Sim, é muito prazeroso trabalhar em grupo, pois podemos socializar nossas dúvidas e soluções e assim podendo chegar ao resultado.
A2	Sim, pois com ajuda dos colegas a gente aprende também.
A3	Foi sim. Ter uma discussão ali, entre os colegas para se chegar a um certo resultado, por meio destas salas foi boa.
A4	Sim, aprendi com a turma por terem alunos de tempos diferentes, de cursos diferentes e lugares diferentes.
A5	Sim, podemos discutir diversos pensamentos e assim construímos a resposta mais próxima possível da realidade do problema.
A6	Sim gostei muito, pois um ajudava o outro o que nos proporcionou um aprendizado simultâneo e colaborativo.
A7	Sempre acho interessante trabalhar no coletivo, pois são pensamentos diferentes, acho que assim agrega mais conhecimento
A8	Sim, muito satisfatório. Debater com os colegas foi uma etapa importantíssima para a troca de conhecimentos.
A9	Sim, pois gerou mais debates de ideias e alguns alunos que já tiveram contato com EDO ajudaram os que não tiveram.
A10	Sim! Muito proveitoso. Trocar experiências foi gratificante.
A11	Foi muito bom, só não foi mais proveitoso pelo fato de ser online, mas mesmo assim não perdeu a sua essência.
A12	gostei sim, inclusive eu não sabia que estia essa for bem simples de dividir a turma virtualmente
A13	Gostei sim, só que ficava perdida pq uns resolviam já com a EDO e eu não tinha conhecimento nenhum a respeito
A14	Sim, muito bom discutir e compartilhar ideias. Só que acredito que

	deva ter momentos individuais para saber se todos os alunos estão entendendo.
A15	Gostei e achei muito satisfatório. O diálogo em pequenos grupos permite-nos trocar ideias e otimiza a participação de cada pessoa.
A16	Ótima proposta, fez a turma se aproximar e os colegas super solícitos, compartilhando seus conhecimentos.

ANEXO 15 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 3 do Questionário de Avaliação (Seção 2)

O que você achou do momento Registro na Lousa, instante em que cada grupo apresenta e defende suas resoluções?	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	É muito bom pois cada grupo expõe sua resolução mesmo que não esteja correta mas poderá assim mesmo considerar as idéias e caminhos tomados.
A2	muito bom.
A3	Muito bom, mesmo que a resposta não estivesse correta, mas a exposição, o método que cada um usou, mostrando aos outros foi ótimo.
A4	Construtivo para à aprendizagem, uma vez que somos pessoas diferentes comédias diferentes e também por que toda resposta tem uma explicação, mesmo que não seja a resposta certa, vale a pena acrescentar esse pensamento na aprendizagem.
A5	Muito interessante... Algumas vezes não conseguíamos chegar na solução exata, então analisando as outras respostas íamos mudando a nossa concepção e com isso era formulado a solução de forma eficiente.
A6	Muito proveitoso, pois cada grupo utilizava uma forma diferente para chegar em tais resoluções
A7	Assim a discussão no coletivo, achei super legal
A8	Muito interessante...nesse momento vemos como a matemática disponibiliza diferentes ferramentas para resolvermos determinado problema.
A9	Achei legal, pois como cada um foi apresentando suas ideias o leque de opções é ampliado tornando os debates mais ricos através do confronto de ideias.
A10	Aqui está o que eu considero um dos mais importantes momentos, aqui poderíamos enxergar a troca de conhecimento e perceber as ideias que poderia ser usada para tal. Também de extrema

	importância para o professor, pois se pode perceber onde os alunos estão com dificuldade e trabalhar em cima daquilo.
A11	Foi um momento de ver as outras soluções que em muitos casos a gente não enxergava que poderia ser usado aquela forma, um momento de debate e dúvidas.
A12	achei bem legal e dinâmico, a possibilidade de mais ainda a interação dos alunos.
A13	Gostei
A14	Bom, já que esse momento de aprendizagem ajuda vc compreender outros raciocínios e outras possíveis caminhos para uma mesma solução.
A15	Achei bem interessante. Esse momento nos concedeu ter uma visão de novas opiniões sobre a resolução dos problemas propostos.
A16	Foi interessando, podemos expor cada pensamento e ver que nem todas as respostas foram iguais. Esse momento podemos ver outros pontos de vista de um mesmo conteúdo .

ANEXO 16 – Respostas dos alunos-participantes a Questão 4 do Questionário de Avaliação (Seção 1)

Qual etapa da dinâmica de trabalho da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas lhe chamou mais atenção? Explique.	
Alunos-participantes	**Respostas**
A1	Não é nem uma etapa em si, mas sim a dinâmica no geral, é interessante ver como cada parte se completa e no final chegamos a resultados muito bons.
A2	passo 6 e passo 7, no compartilhamento das resoluções dos problemas é muito bom pra gente expor as nossas opiniões como resolvemos tal problema, e a plenária é show principalmente pelas discussões e questionamentos.
A3	Compartilhar as resoluções. Porque ali os outros alunos iriam ver outros caminhos que se tinha para resolver o problema.
A4	Compartilhar as Resoluções: Por causa da troca de ideias que há no momento. se caso fosse apresentado só a resposta "certa", não haveria passagem de algumas aprendizagens.
A5	Proposição do problema, já que o professor ele procurou um problema que instigasse os estudantes e os problemas eram todos do cotidiano, assim era possível que as respostas eram bastante inovadoras, o que é difícil no curso de matemática já que as soluções muita das vezes são padronizadas .
A6	Compartilhar as resoluções, pois por meio das diferentes explicações dos alunos apreendíamos algo novo.
A7	Resolução do problema, nessa parte contou bastante com o trabalho coletivo que acho bastante interessante no caminho da aprendizagem
A8	O compartilhamento das resoluções
A9	A etapa 6, porque os alunos nessa etapa têm voz ativa, fato que difere muito dos métodos tradicionais.
A10	Passo 6 e passo 9.

	Do passo 6 seria a importância dessa interação dos colegas e perceber novos olhares (até porque não existe apenas um modo de se chegar ao mesmo resultado). Do 9° passo, o fechamento daquelas resoluções compartilhadas, não deixando em aberto.
A11	Compartilhar as resoluções, pois foi onde todos traziam as suas ideias.
A12	passo 6, porque neste momento podemos entender e perceber diferente visões/formas de resolução
A13	Budget do consenso
A14	Compartilhar as resoluções
A15	Passo 4. Esse passo é um momento muito útil, pois proporciona troca de ideias muito valiosas.
A16	Passo 6, onde podemos compartilhar as ideias com os colegas.