UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JUAN FELIPE DE AZEVEDO FALCÃO

A UTILIZAÇÃO DE FONTES HISTÓRICAS EM SALA DE AULA NO ENSINO DOS NÚMEROS REAIS

CAMPINA GRANDE – PB
2021

JUAN FELIPE DE AZEVEDO FALCÃO

A UTILIZAÇÃO DE FONTES HISTÓRICAS EM SALA DE AULA NO ENSINO DOS NÚMEROS REAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática

Orientador: Dr. John Andrew Fossa

CAMPINA GRANDE – PB
2021

F178u Falcão, Juan Felipe de Azevedo.

A utilização de fontes históricas em sala de aula no ensino dos números reais [manuscrito] / Juan Felipe de Azevedo Falcão. - 2021.

183 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.

"Orientação : Prof. Dr. John Andrew Fossa , Departamento de Matemática - CCT."

1. Fonte histórica. 2. Abordagem hermenêutica. 3. Números Reais. 4. Ensino Remoto. 5. Ensino de Matemática. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Camile de A. Gomes - CRB - 15/559 BC/UEPB

JUAN FELIPE DE AZEVEDO FALCÃO

A UTILIZAÇÃO DE FONTES HISTÓRICAS EM SALA DE AULA NO ENSINO DOS NÚMEROS REAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática

Aprovado em 23/12/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. John Andrew Fossa (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Examinador interno)
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá (Examinador externo)
Universidade do Estado do Pará - UEPA

Prof (a). Dr (a). Giselle Costa de Sousa (Suplente externo)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Dedico este trabalho a todos (as) os (as) professores (as) do ensino básico que lutam por uma educação melhor em nosso país.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer imensamente a minha família que não mediu esforços para me proporcionar o melhor, na medida do possível, por toda minha trajetória acadêmica. Em particular minha mãe, **Marta Célia de Melo Azevedo**, minha avó, **Francisca de Melo Azevedo**, meu avô **José de Melo Azevedo** (*in memoriam*), e meu pai, **Giovanni da Costa Falcão**. A vocês, meus eternos agradecimentos. Lembrarei de todos seus conselhos e os replicarei, pois assim estarei melhorando tudo e todos ao meu redor.

A minha esposa, **Tayná Maria Amorim**, que esteve comigo diariamente compartilhando de todos os melhores e piores momentos vividos. Uma mulher incrível que me manteve erguido para enfrentar todas as adversidades com seus conselhos e seu amor incondicional. Muito obrigado.

Aos meus tios, que sempre me acolheram de forma maravilhosa e sempre incentivando aos estudos como forma digna de se viver e sobreviver. Em particular, minha tia, **Janua-Coeli de Melo**, e meu tio, **Clodoaldo Carlos de Melo** (*in memoriam*). Vocês estarão eternizados em minha memória. Obrigado por tudo. Também agradeço a todos meus tios e tias que, mesmo distante, mantinham contato para perguntar sempre como eu estava. Obrigado, vocês são demais.

A família da minha esposa, em particular à **André Monteiro**, **Simone Amorim, Rafaelle Amorim** e **Josué Fernandes.** Pessoas incríveis que o Universo proporcionou o compartilhamento de nosso tempo e momentos juntos. Muito obrigado por tudo.

Aos meus primos/amigos se não dizer, irmãos. Agradeço por todos seus conselhos, brincadeiras e por estarem sempre ao meu lado. A **Joachin de Melo**, **Heitor de Melo**, **Anderson Silva**, **Jefferson Melo e Diego Azevedo**. Às minhas primas que sempre me incentivaram na arte e no hábito da leitura, **Iânua Coeli, Ana Catarina Azevedo, Priscila, Luana e Kaliny**. Obrigado.

Ao Colégio em que atuei durante a intervenção e ainda atuo, cedendo seus alunos para que pudéssemos, juntos, construir um trabalho importante para a educação de nossos alunos. Obrigado por toda força dada durante todo o processo. Agradeço aos companheiros (as) de profissão que, diariamente, discutíamos a respeito do futuro da educação e como estamos lidando com nossas práticas em sala de aula. Obrigado, cada um de vocês possui sua contribuição neste trabalho.

Ao professor **Dr**. **John Andrew Fossa,** um dos maiores matemáticos e educadores da atualidade, que tive a oportunidade de conhecer e de ser seu orientando. Sua sabedoria e sua forma de questionar o mundo, me inspiram a também ser uma pessoa melhor no meu exercício diário. Muito obrigado por todas as suas sugestões, orientações e conselhos.

Ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGECM/UEPB que me oportunizou uma experiência incrível de pensar e discutir a educação de forma ampla, apresentando e buscando soluções para os problemas que nossos alunos enfrentam. Também agradeço, de forma incondicional, aos professores que compõe o programa PPGECM/UEPB que buscam a melhoria da educação e a consciência. Em particular, aos professores **Dr. Joelson Pimentel, Dr. Silvânio de Andrade e Dr. Eduardo Onofre**. Muito obrigado.

A **Universidade Estadual da Paraíba – UEPB** que proporcionou todos os meus momentos acadêmicos, tanto na graduação como na pós-graduação, possibilitando me tornar uma pessoa cada vez melhor, valorizando minhas raízes e as fortalecendo. Obrigado a todos os funcionários que a mantém.

“As nove figuras indianas são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com estas nove figuras, e com o sinal 0, o qual os árabes o chamam de zero, qualquer número pode ser escrito” (PISANO, L. Liber Abaci, p. 17, tradução nossa).

RESUMO

Esta dissertação apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como principal objetivo compreender o impacto que a leitura de Fontes Históricas gerou nos alunos sobre o conceito de número real, em sala de aula remota. Utilizou-se da abordagem histórico-hermenêutica que possui como característica principal a interpretação detalhada sobre a fonte histórica utilizada. A pesquisa foi realizada em uma escola particular da cidade de Campina Grande, Paraíba, com 53 alunos do primeiro ano do ensino médio divididos em dois grupos: Grupo de controle e grupo de experimento. Ao grupo de controle foi ensinado o conteúdo de números reais por uma abordagem convencional e ao grupo experimental foi ensinada o mesmo conteúdo a partir do uso de Fontes Históricas por meio da abordagem hermenêutica. Buscou-se utilizar análises quantitativas e qualitativas por meio da Análise de Conteúdo e testes de hipóteses. Investigamos a reação dos alunos ao utilizar as Fontes Históricas, o conceito de número real desenvolvidos nas duas turmas após a intervenção e o grau de significância no desempenho dos alunos. Concluímos que a utilização de Fontes Históricas no ensino de números reais impactou, em comparação à turma de controle, a concepção dos alunos sobre a matemática e sobre o desenvolvimento do conceito de número real como um corpo de números ordenado e completo. Também, a análise quantitativa demonstrou que a turma de experimento mostrou desempenho significativo em comparação à turma de controle.

Palavras-chave: Fontes Históricas. Abordagem Hermenêutica. Números Reais. Ensino Remoto.

ABSTRACT

This dissertation presents the results of a research that had as main objective to understand the impact that the reading of Historical Sources generated in the students on the concept of real numbers, in a remote classroom. The historical-hermeneutic approach was used, which has as its main characteristic the detailed interpretation of the historical source used. The research was carried out in a private school in the city of Campina Grande, Paraíba, with 53 students from the first year of high school divided into two groups: a control group and the experiment group. The control group was taught the content of real numbers through a conventional approach and the experimental group was taught the same content using Historical Sources through the hermeneutic approach. We sought to use quantitative and qualitative analyzes through Content Analysis and hypothesis tests. We investigated the students' reaction when using the Historical Sources, the concept of real numbers developed in the two classes after the intervention, and the degree of significance in the students' performance. We conclude that the use of Historical Sources in the teaching of real numbers had an impact, compared to the control class, on the students' conception of mathematics and on the development of the concept of the real number as an ordered and complete body of numbers. Also, the quantitative analysis showed that the experimental group showed significant performance compared to the control group.

Keywords: Historical Sources. Hermeneutic Approach. Real Numbers. Remote Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

.

O estudo *History in Mathematics Education*, produzido pela *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), publicado em formato de livro, e editado por John Fauvel e Jan van Maanen (2000), apontou diversos caminhos a serem trilhados por aqueles que buscam a introdução da história da matemática em suas salas de aulas. Esse estudo foi produzido com diversos pesquisadores de variados países que relataram suas experiências com essa metodologia até aquele momento.

Um caráter importante neste estudo é a busca constante em melhorar o ensino da matemática na Educação. Nas últimas décadas, constatamos na academia um crescente número de pesquisas vinculadas ao desenvolvimento, a testes e a divulgação de novos métodos de ensino[1]; basta observar o crescente número de periódicos e eventos dentro da área de ensino em Educação Matemática. Tratando-se do uso da história das ciências, em particular a história da matemática, as pesquisas demonstram que uma metodologia incorporada à história é valiosa para o ensino em consequência de seus diversos atributos perante as necessidades atuais de ensino, como nos afirmam Lopes e Ferreira (2013).

Entretanto à medida que percebemos o crescente número de pesquisas cientificas vinculadas à história da matemática, não encontramos pesquisas empíricas sobre a história da matemática em sala de aula nesta mesma velocidade. O pesquisador Siu (2004, *apud* MOREY, 2013, p.75) nos relembra que a maioria dos estudos discutem "[...] a importância e o papel da história da matemática no processo de ensino", mas são poucos os que se debruçam a estudar a eficácia desta metodologia.

Nesta pesquisa buscamos esta característica empírica. Um caminho sugerido no estudo da ICMI supracitado foi apresentado no capítulo 9 intitulado: *The use of original sources in the mathematics classroom*, ou seja, o uso de fontes originais nas salas de aula de matemática. Este é o caminho que iremos percorrer neste trabalho. Segundo Jahnke *et al* (2000), há três ideias fundamentais nas quais a utilização de fontes históricas em sala de aula potencializa para o aluno, são elas: substituição, reorientação e compreensão cultura. Além destas potencialidades, segundo Fossa (2020), há dois outros argumentos a se considerar: o primeiro refere-se ao fato de que a matemática é resultado de um esforço humano e, portanto, faz parte da herança cultural

[1] Ver Mendes (2012).

do homem; o segundo é sobre a natureza do conhecimento como uma relação entre o indivíduo, o outro e o mundo, o qual é chamado, pelo autor, de relação dialética tripartida.

Quando nos referimos ao termo *fontes originais* estamos entendendo como textos redigidos e publicado pelos próprios matemáticos profissionais, sendo estes em sua língua original ou traduzidos (seja uma tradução *pura* ou com finalidades educacionais).

Contudo utilizar fontes originais em sala de aula não é uma tarefa simples, o professor encontra duas grandes dificuldades iniciais, quais sejam: a linguagem e a capacidade de unir o *síncrono* com a *cultura matemática diacrônica*. Em outros termos, construir uma ponte entre o que se deve fazer com os objetivos almejados e a compreensão das ideias matemáticas em seus devidos contextos (JAHNKE et al, 2000).

Para buscarmos a união entre estes dois campos do conhecimento, devemos apurar nossa compreensão de interpretação sobre a fonte. Não é novidade entre os pesquisadores de História e Antropologia que a interpretação sobre uma fonte histórica é um questionamento crucial. Isso porque muitas vezes o significado histórico da fonte, ou seja, as necessidades, suas finalidades e inspiração para aquele momento histórico, diverge do significado que esta mesma fonte tem para leitores modernos do ponto de vista de seu pré-conceitos.

Normalmente, ao se deparar com uma fonte histórica, o leitor moderno tem algum conhecimento sobre o tema abordado na fonte. Este conhecimento é o resultado de um desenvolvimento de ideias, reflexões e amplamente discutido em seu ambiente durante anos (JAHNKE et al, 2000). Portanto, este leitor deve dispor de cautela ao observar a fonte para não ser influenciado por uma interpretação *modernista* sobre o conhecimento exposto na fonte histórica.

Dentre as várias abordagens que podemos incorporar ao uso de fontes históricas em sala de aula, escolhemos aquela que julgamos ser a ideal na leitura de fontes, pois esse tipo de leitura é, essencialmente, um processo interpretativo: a abordagem *hermenêutica.* Ao pesquisarmos sobre a palavra *hermenêutica* no *Google Dictionary*, observa-se um conhecimento ligado à "ciência da interpretação" ou "a arte da interpretação". De acordo com Dicionário de Filosofia (2007) de Nicola Abbagnano, a palavra hermenêutica é compreendida como "qualquer técnica de interpretação.". De fato, segundo Jahnke (1994, 2000) a abordagem hermenêutica é um estudo interpretativo e sua característica essencial é o estudo detalhado dessa fonte considerando seus variados contextos, natureza científica e religiosa, inspirações e aspirações do escritor, entre outros elementos. De acordo com Glaubitz (2012), a abordagem hermenêutica centraliza na interpretação do texto envolvendo, buscando relações com o contexto da época, explorando ao máximo a fonte histórica. Segundo este mesmo autor, este processo é chamado, na hermenêutica, de mover-se entre os círculos hermenêuticos que são sempre conhecimentos novos.

Um problema encontrado em alunos concluintes do Ensino Médio ao ingressarem no Ensino Superior é o conhecimento superficial apresentado sobre os números reais. Esta constatação pode ser verificada em algumas pesquisas realizadas sobre a concepção do aluno sobre os números reais com alunos no início da graduação, a saber: Soares, Ferreira e Moreira (1999) que, em uma turma de matemática da UFMG e da UFSC, identificou que duas grandezas quaisquer são sempre comensuráveis para os alunos ou a identificação do número 3,1416 como um número irracional; Ou a pesquisa de Igliori e Silva (2001) que desenvolveram um estudo com alunos iniciantes do curso de computação e finalistas do curso de matemática que identificou que tais estudantes não consideram a densidade dos números reais ao representarem números decimais na reta real.

O conhecimento destes números é fundamental para uma formação sólida e profunda em sua futura profissão. Especificamente, estudantes de Licenciatura em matemática, dependem desta formação sólida, afinal, estes alunos serão professores de matemática. Em matemática, os números reais são os principais objetos de estudo da Análise Real que, junto com as Estruturas Algébricas, formam dois pilares centrais para a matemática moderna. Não somente são estudados na disciplina de Análise Real, os números reais também são fundamentais para o entendimento aprofundado sobre conceitos, tais como: limite, continuidade e diferenciabilidade – conceitos conhecidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Portanto, pesquisas empíricas no ensino secundário são necessárias para o entendimento do conceito de número real.

A partir deste problema, buscamos investigá-lo e constatar sua importância por meio de uma entrevista realizada com quatro professores do curso de Licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Dentre os professores escolhidos, dois ministram disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, e dois ministram Análise Real com experiência, em suas respectivas disciplinas de, no mínimo, quatro semestres.

Os professores responderam a uma entrevista estruturada por três questões, quais são: 1) Quais os maiores problemas que seus alunos apresentam no entendimento do conceito de número real?; 2) Quais aspectos mais importantes você destaca dos números reais? e 3) Em sua opinião, qual aspecto do ensino dos números reais na educação básica poderia ser mais enfatizado para que os alunos ingressem com menos dificuldades aquelas apresentadas atualmente?

Os professores relataram que, muitas vezes, o aluno ingressante no curso de matemática não tem o conhecimento necessário para um entendimento completo de conceitos, tais como: limite, diferenciabilidade e integrabilidade de funções reais. Também, mostraram-se preocupados em regras operacionais e a representação geométrica, ou seja, a relação biunívoca que existe entre um número real e seu *lugar* na reta real. Para o autor, estes conceitos referem-se à densidade de um conjunto, e do fato que o conjunto dos números reais é um *corpo completo* e *ordenado.* Outro aspecto destacado pelos professores é a falta de conhecimento, por parte dos alunos, isto é, a formalização matemática que, segundo os professores, o aluno deve possuir em um grau adequado, pois facilita o entendimento de estruturas mais complexas.

Neste sentido, o objetivo principal de nossa pesquisa é: Compreender o impacto que a leitura de Fontes Históricas gerou nos alunos (turma experimental) sobre o conceito de número real, em sala de aula remota, a partir da abordagem histórico-hermenêutico.

Para isso, desenvolvemos quatro objetivos específicos:

- Investigar a reação da turma de experimento quanto ao uso das fontes históricas e a sua compreensão sobre os elementos essenciais das fontes históricas;
- Entender a visão dos alunos sobre a disposição dos números racionais e irracionais na reta numérica;
- Investigar a concepção dos alunos sobre os conceitos de densidade e ordenação;
- Investigar o conceito de número real desenvolvido pelo aluno.

A escolha destes objetivos possuiu como ancoragem a seguinte questão problematizadora: Quais aspectos são melhorados no ensino de números reais a partir da utilização de fontes históricas em sala de aula?

Para buscar possíveis compreensões a respeito desta temática, construímos uma pesquisa empírica com 53 alunos do 1ª serie do ensino médio e dividimos em duas turmas, turma de experimento e turma de controle. Para a primeira turma utilizamos as fontes históricas sob abordagem hermenêutica no ensino de números reais; para a segunda turma, utilizamos a abordagem convencional para o ensino de números reais, detalhado adiante. Neste sentido, busca-se compreender: (1) Qual a reação dos alunos sobre a utilização de fontes históricas em sala de aula remota?; (2) Os alunos conseguem perceber elementos essenciais do texto? e (3) Como se deu a influência da leitura de fontes históricas no ensino de números reais?

Para análise dos dados utilizamos a Análise de Conteúdo Quantitativo organizada por Flick (2012) e a Análise de Conteúdo Qualitativo proposta por Mayring (1983). Estas propostas têm como objetivo o uso de categorias indutivas como resultado da análise dos dados da pesquisa, possuindo caráter *resultante* sobre os dados analisados.

A pesquisa está estruturada em cinco capítulos: O primeiro refere-se à introdução do tema, a problemática, objetivos e descrição da pesquisa. O segundo capítulo, intitulado "Considerações Teóricas", aborda a utilização da história da matemática como ferramenta para o ensino de matemática com foco na utilização de textos históricos e na abordagem hermenêutica.

O terceiro capítulo refere-se à metodologia da pesquisa em que descrevemos o ambiente da pesquisa, sujeitos da pesquisa, atividades desenvolvidas, fontes históricas utilizadas na pesquisa, distribuição de atividades por turma, questionários aplicados antes e depois da intervenção assim como os respectivos testes.

O quarto capítulo destina-se à descrição e análise dos dados em que pudemos classifica-los em (1) Análise dos textos originais sobre reação dos alunos quanto à utilização de fontes históricas e se os alunos são capazes de perceber os elementos essenciais do texto; (2) O valor das fontes secundárias no processo de aprendizagem dos números reais e (3) O entendimento do conceito de número real.

O quinto capítulo destina-se às considerações finais da pesquisa levando em conta a discussão e a análise dos dados decorridos no capítulo anterior. Buscamos realizar um levantamento comparativo entre a discussão, ressaltar os pontos em destaque como conclusão da pesquisa e desdobramentos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A história da matemática como ferramenta metodológica para o ensino de matemática

Uma das perguntas que, talvez, os professores de matemática reflitam frequentemente seja: "como posso melhorar o ensino de matemática?". Esta pergunta permeia a história do ensino há pouco tempo, mas, possíveis preocupações com o ensino de matemática não são recentes. Na verdade, são muito antigas. O *Papiro de Rhind (*ou *Papiro de Ahmes)*[2], escrito por volta de 1850 a.E.C.[3], tinha o objetivo de instruir futuros escribas com problemas e situações já reportados, selecionando e organizando-os para tomadas de decisão futuras (FOSSA, 2010, parte B; FOSSA, 2020). Outro exemplo é a organização da matemática na antiga civilização grega, iniciada por Arquitas de Tarento (séc. IV a.E.C.) e estruturada por Platão ([427 a.E.C.?] – 347 a.E.C.) em *A República*, Livro VI. Platão estruturou a matemática em Astronomia, Geometria, Aritmética e Música, (ANJOS, 2012). Entretanto, é somente no Renascimento (séc. XIV d.E.C.) que estas preocupações se tornaram mais sérias. Em particular, no Brasil, a obra *Verdadeiro método de estudar* (1746), de Luis Antônio Verney, demonstra os primeiros sinais de reflexão acerca do ensino da matemática neste país.

O campo da Educação Matemática – área científica dedicada ao ensino de matemática - vem se consolidando como uma subárea da Educação e da Matemática há pouco mais de cem anos (D'AMBROSIO, 2003) e tem como principal objetivo a produção e a divulgação do conhecimento acerca do ensino de matemática. Dentre estas produções, estão: A verificação de novos métodos de ensino, práticas e reflexões de ensino em sala de sala e a divulgação de trabalhos de professores e pesquisadores. Portanto, segundo Mendes (2009, p. 03), o "objetivo fundamental [da Educação Matemática] é tornar esse ensino o mais eficaz e proveitoso possível". Durante este tempo de consolidação, muitos métodos de ensino, estratégias e ações pedagógicas visando à aprendizagem dos alunos e a formação dos professores foram desenvolvidos.

Um dos métodos estudados e desenvolvidos durante estes anos foi a utilização da história da matemática como ferramenta para o ensino da matemática. Lopes e Ferreira (2013) afirmam que a história da matemática como ferramenta para o seu ensino vem se consolidando

---

[2] *Ahmes*, nome do escriba que copiou o papiro. Ver *Os Primórdios da Teoria dos Números Parte B (2010).*
[3] a.E.C.: Antes da Era Comum.

nos últimos anos e isto é devido a diversos motivos[4]. Ainda segundo Lopes e Ferreira (2013), a história da matemática pode propiciar ao aluno uma aula dinâmica apresentando a matemática como parte integrante da cultura humana. Este aspecto é relevante, pois destaca as relações entre a matemática com outras ciências e desmistifica a visão reducionista da matemática como uma ciência absoluta, acabada e engessada.

Segundo Lopes e Ferreira (2013, p. 77), as pesquisas desenvolvidas indicam que "o saber matemático está intimamente ligado à motivação e interesse dos alunos por essa ciência.". Uma das razões quanto à questão da motivação e interesse dos alunos é, segundo Fossa (2009), a contextualização proporcionada pela história da matemática. Segundo Fossa (2009, p. 11):

> Ao se engajar com problemas reais da história, o aluno se julgará como participante no desenvolvimento da matemática e, visto que os problemas abordados eram interessantes aos matemáticos do passado, muitos alunos perceberão que a matemática é um estudo vibrante. Isto certamente aumentará seu interesse nesse estudo, o que, por sua vez, melhorará seu desempenho. (FOSSA, 2009, p. 11).

Além disso, a história da matemática pode ajudar o aluno em seu aprendizado, visto que sua utilização pode, segundo Pitombeira (2020, p. 01), "Propiciar aos alunos uma melhor compreensão da matemática; Contribuir para a concepção pelos alunos, de que a matemática, com suas práticas e concepções, tem variado ao longo dos séculos; Contribuir para expandir os horizontes culturais dos alunos.". De fato, a utilização da história da matemática proporciona ferramentas aos alunos para uma ampliação de horizontes culturais e a apropriação do raciocínio matemático de maneira dinâmica.

Com o desenvolvimento de pesquisas e constatações dos motivos supracitados no ambiente da Educação Matemática, surgiram alguns modelos de utilização da história da matemática em sala de aula que se adequam aos objetivos do professor em sala de aula com esta metodologia. Fossa (2009) nos mostra que, inicialmente, a história da matemática era utilizada como única forma de introduzir um determinado conteúdo ou objeto em sala de aula e, assim, possuía um papel apenas motivacional. Entretanto, atualmente, há outras formas valiosas de utilização da história da matemática; Em Investigação Histórica no Ensino da Matemática, 2009, de Iran Mendes, o autor apresenta discussões sobre uma abordagem didática, utilizando a história da matemática, numa perspectiva investigatória. Também, em História da Matemática em Atividades Didáticas, 2009, os autores apresentam atividades construtivas para

---

[4] Ver, por exemplo, Tendências da Pesquisa em História da Matemática no Brasil: A propósito das Dissertações e Teses (1990 – 2010) de Iran Abreu Mendes.

o ensino de matemática. Em particular, há duas formas que consideramos frutíferas para o papel do ensino utilizando a história da matemática, a saber, informar atividades construtivistas e o uso de textos históricos em sala de aula. O presente trabalho versa sobre a segunda forma.

2.2 A utilização da história da matemática a partir do uso das fontes históricas

A utilização da história da matemática em sala de aula não é novidade para os professores, menos ainda para os alunos. Os elementos caracterizadores de uma história da matemática em sala de aula se mostram presentes em livros textos há, ao menos, cinco décadas. Geralmente, nestes livros, este era um tópico motivacional, ou seja, era exposto nos livros um fragmento com uma fotografia de um matemático profissional e um quadro-resumo sobre ele ou sobre uma "descoberta" atribuída a ele como motivação para o aluno (FOSSA, 2008).

Talvez, o que exista de novidade é o uso da história como um agente de cognição ou reorganizador cognitivo no ensino e aprendizagem dos alunos. Estes termos são cunhados em Mendes, Fossa e Valdés (2006) e Mendes (2013), ao relatarem que estes dizem respeito à necessidade imposta aos professores de utilizar a história da matemática como uma possibilidade de oportunizar aos alunos um caminho para que eles se desafiem a criar um processo de criatividade matemática em sua aprendizagem (MENDES, 2013, p. 186). Nós utilizamos a palavra *imposta* para denotar a necessidade de o professor encontrar métodos de ensino para melhorar a compreensão das ideias ministradas para seus alunos.

Com o desenvolvimento de pesquisas nesta área, a história da matemática se tornou uma metodologia, dentro do ambiente da Educação Matemática, de bastante eficácia para as necessidades educacionais que problematizamos atualmente. Dentre as diversas alternativas para o uso da história em sala de aula como, por exemplo: anedotas, desenvolvimento histórico sobre um tema e/ou centralização em biografias, escolhemos abordar, nesta dissertação, a utilização de fontes históricas em sala de aula.

As *fontes históricas* são documentos ou artefatos que pertenceram a alguma civilização. São, também, materiais que têm o objetivo de um momento no qual este documento está inserido. Segundo Xavier (2010, p. 1100 apud PEREIRA, 2015) as fontes históricas são:

> todos os tipos de vestígios inscritos no passado como um livro de receita, fotografias, cinema, músicas, enfim uma série de elementos que auxiliariam o historiador na busca de compreender como se estabeleceram os homens do passado, qual significado tais

> objetos adquiram para estas sociedades, para os grupos que o forjaram e no que tange sua relação com o presente. (XAVIER, apud PEREIRA, 2015).

Dentre todas as formas de fontes históricas, devemos tomar o cuidado de conhecer e avaliar o documento para compreender suas possibilidades e limitações. Este cuidado deve perseguir o pesquisador que se debruça sobre as fontes históricas, isto porque a História é uma forma de validar a identidade de grupos sociais, sejam eles familiares, tribos, civilizações, dentre outros (D'AMBROSIO, 2013). Neste sentido, as fontes históricas são um produto dessa tentativa de afirmação - talvez, um dos mais importantes - e, portanto, são sujeitos aos interesses desses grupos sociais.

Existem alguns motivos para utilização de textos originais em sala de aula. Os autores Jahnke, Arcavi *et al* (2000) elencam três ideias gerais para utilização das fontes em sala de aula: Substituição, Reorientação e Compreensão Cultural. No primeiro, as fontes permitem que o aluno enxergue a matemática como uma atividade intelectual; no segundo, é causada uma reorientação de visões, tornando o familiar em desconhecido. No último, é permitido que o aluno se envolva com contextos científicos, tecnológicos e culturais de uma época específica.

Segundo Furinghetti, Jahnke e Maanen (2006), o trabalho com as fontes históricas é, dentre as diversas atividades que podemos realizar com os alunos, "a mais exigente e a mais demorada". Entretanto, é um método gratificante e que aumenta a compreensão sobre a matemática. Estes mesmos autores elencam cinco ideias proporcionadas pelo uso de fontes históricas no ensino de matemática, a saber:

> (1) Estudar uma fonte original substitui o usual por algo diferente: permite que aluno e professor vejam a matemática como uma atividade intelectual, e não apenas como um corpus de conhecimento ou um conjunto de técnicas.
> (2) Integrar fontes em matemática desafia as percepções do aluno ao tornar o familiar desconhecido.
> (3) Integrar o estudo das fontes na educação matemática convida o educando a situar o desenvolvimento da matemática no contexto científico e tecnológico de um determinado tempo e na história das ideias e das sociedades.
> (4) Ler uma fonte é um tipo de atividade que se orienta mais para processos de compreensão do que para resultados finais.
> (5) Ao trabalhar com fontes originais, pelo menos três línguas diferentes, interagem em sala de aula: a linguagem da fonte, a terminologia moderna do tópico matemático em questão e a linguagem cotidiana que evoluiu na sala de aula. (FURINGHETTI, JAHNKE, MAANEN, 2006, tradução nossa)[5]

---

[5] (1)Studying an original source replaces the usual with something different: it allows student and teacher to see mathematics as an intellectual activity, rather than as just a corpus of knowledge or a set of techniques.
(2)Integrating sources in mathematics challenges the learner's perceptions through making the familiar unfamiliar.
(3)Integrating the study of sources in mathematics education invites the learner to place the development of mathematics in the scientific and technological context of a particular time and in the history of ideas and societies.
(4)Reading a source is a type of activity which is oriented more to processes of understanding than to final results.

Portanto, o estudo da fonte histórica realizada pelo aluno causa momentos de estranheza o qual desafia suas percepções ao tornar o familiar em desconhecido. Além disso, a leitura de fontes históricas proporciona uma vivência cultural significativa, convidando o aluno a conhecer o contexto científico e tecnológico de uma determinada época.

Segundo Fossa (2020), há dois outros argumentos a se considerar: O primeiro refere-se ao fato de que a matemática é resultado de um esforço humano e, portanto, faz parte da herança cultural do homem; O segundo é sobre a natureza do conhecimento como uma relação entre o indivíduo, o outro e o mundo, o qual é chamado, pelo autor, de relação dialética tripartida.

As ciências e as artes são esforços da ação humana que participam ativamente de sua história e também sabemos que a apropriação, por parte dos alunos, a estes saberes, é importante na construção do conhecimento e realização das potencialidades humanas. Não obstante, não devemos esquecer que a matemática também é uma ciência e que está submetida à história da humanidade. Segundo Fossa (2020, p. 120),

> A matemática não é uma entidade que pode ser achada no mundo natural, nem um atributo inerente a tais entidades. Muito pelo contrário, é um produto cultural inventado pelo espírito humano. Nesse sentido, não é diferente das ciências ou das artes. Assim, da mesma forma em que é necessário ter, para assegurar uma educação que promove uma vida plena para o educando, certa convivência com as ciências e as artes, é necessário ter certa convivência com a matemática e seu desenvolvimento perante a história. (FOSSA, 2020, p. 120).

Esta apropriação é a habilidade do aluno pensar matematicamente e desenvolver técnicas matemáticas. O uso de textos originais demonstra a possibilidade do contato com culturas diversas que auxiliaram na consolidação do tema em discussão. É, portanto, um fator facilitador para a visão de que a matemática é um produto humano indubitável.

O outro aspecto motivador é a natureza do conhecimento, em específico, ao conhecimento matemático. Abstraindo-se aspectos mais profundos sobre esta natureza, em geral, o conhecimento é composto pelo indivíduo, o outro e o mundo. Segundo Fossa (2020),

> Antigamente se considerava, em geral, o conhecimento como algo que acontecia ao sujeito. Neste sentido, o aluno era suposto análogo a um vaso, que iria ser preenchido com conhecimento pelo professor. Foi talvez a "revolução copernicana" de Immanuel Kant (1724- 1804) que reverteu esse conceito de forma sustentável pela primeira vez.

---

(5)When working with original sources at least three different languages Interact in the classroom: the language of the source, the modern terminology of the mathematical topic in question and the everyday language which has evolved in the classroom.

> Para Kant, a mente tem uma determinada estrutura que ela usa para formar e ordenar o material amorfo que recebe dos sentidos. A ideia foi desenvolvida em termos psicológicos por Jean Piaget (1896-1980). (FOSSA, 2020, p. 125).

As consequências epistemológicas e pedagógicas deste fato levaram ao desenvolvimento do construtivismo, especialmente o radical de Ernst von Glasersfeld (1917-2010), com grande contribuição para Educação, em particular, para a Educação Matemática.

A utilização de fontes originais em sala de aula é uma alternativa para enfrentar este tipo de situação, pois, com textos originais o aluno é posto a participar do processo de aprendizagem, além disso, ele é indagado e se pede-se para que ele explore o texto e o decifre. Portanto, o aluno encontra-se em posição ativa e é responsável pelo seu aprendizado, à medida que ele explora, questiona, interage com o mundo ao seu redor, ele constrói o conhecimento.

O conhecimento construído depende de mais dois aspectos: o mundo externo e a apropriação do objeto matemático. O conhecimento é ativamente construído pelo indivíduo, mas, não podemos esquecer que esta é uma consequência da experiência sensorial que o indivíduo possui com o mundo. Neste sentido, o uso de textos originais é uma alternativa eficaz. Segundo Fossa (2020, p.128), a análise do texto:

> [...] a análise do texto levará o aluno a uma compreensão mais profunda da matemática por enriquecer seu conhecimento de abordagens alternativas, aprofundar seu entendimento de conceitos matemáticos e proporcionar uma apreciação maior das interconexões entre as várias partes da matemática, bem como da matemática com outras partes da nossa cultura. (FOSSA, 2020, p.128).

A leitura que o aluno mantém com o autor do texto utilizado é, portanto, incluída à sua própria análise da comparação do contexto social envolvido pelo autor e o seu contexto fazendo-se relevante na apropriação de conceitos matemáticos, em contextos culturais e no desenvolvimento da matemática.

Além disso, outra preocupação que o professor deve ter ao utilizar textos originais é como introduzi-los em sala de aula. Segundo Jahnke *et al* (2000) há duas formas: direta ou indireta. A primeira refere-se a entregar a fonte aos alunos sem qualquer preparação prévia. A segunda, ao contrário da primeira, é entregar a fonte ao aluno após algumas atividades. De acordo com estes pesquisadores, a primeira forma (direta) tem como objetivo causar um choque de percepções nos alunos. Na segunda forma, o professor apresenta problemas para instigar os alunos, ou seja, despertar a curiosidade do aluno sobre o tema. Depois da discussão sobre os problemas, o professor apresenta o texto original relacionando-o com a discussão feita em sala de aula.

Um ponto crucial na inserção de textos originais é a tríade: Texto-Contexto-Leitor relatado em Jahnke *et al* (2000). Em todo o processo de intervenção, o professor deve estar atento à linguagem do texto, ao contexto em que está inserido, assim como ao público-alvo que vai ter acesso àquele texto. Estes mesmos autores relatam

> Frequentemente, será necessário fazer algumas investigações independentes sobre o contexto e estudar a biografia do autor antes que a fonte possa ser interpretada adequadamente. Além disso, relacionar a informação de contexto com o significado do texto em estudo requer algumas habilidades que pressupõem alguma experiência e devem ser treinadas (JAHNKE, et al. 2000, p. 314, tradução nossa). [6]

Isto é, o professor deve obter um conhecimento geral do assunto, do autor da obra, tentar buscar relações entre o texto e o contexto da época. O texto deve estar adequado às condições concretas dos alunos e disponibilizado na linguagem materna dos alunos.

Há diferentes formas de se utilizar os textos originais. Ainda nesse contexto, Jankvist (2014) apresenta sete maneiras de utilizar as fontes, são elas: abordagem genética, abordagem hermenêutica, abordagem de perspectiva múltipla, leituras comparativas, leituras guiadas por fontes históricas primárias e o uso de tarefas de ensaio relacionadas à leitura de fontes. Além disso, o autor apresenta diferentes trabalhos e cita outros nestas abordagens descritas. Em nosso caso, para a escrita desta dissertação, escolhemos a abordagem conhecida como *hermenêutica* ou *histórico-hermenêutica* proposta por Niels Janhke (1994), e difundida desde então. Esta escolha justifica-se pelo fato de que uma intervenção baseada no uso de textos originais é essencialmente interpretativa e, portanto, hermenêutica.

A incorporação de textos originais requer o estabelecimento de objetivos bem definidos, incluindo uma reflexão sobre o público-alvo e, principalmente, o tipo de fonte histórica que será utilizada. Estruturando os objetivos, público-alvo, tipo de fonte utilizada, o professor deve escolher a fonte original. Uma importante leitura nacional que discute alguns critérios na articulação de fontes originais no ensino de matemática é o trabalho desenvolvido por Silva (2018). Em se tratando de fontes históricas em sala de aula, os autores Tzanakis e Arcavi (2000) fornecem uma categorização das fontes históricas que iremos adotar para a atual dissertação. Estes pesquisadores categorizam as fontes em três tipos: fontes primárias, fontes secundárias e fontes didáticas.

---

[6] treinadasFrequently, it will be necessary to do some independente investigations about the context and study the biography of the author before the source can be interpreted adequately. Also, to relate the context information to the meaning of the text under study requires some skills which presuppose some experience and have to be trained. (JAHNKE, et al. 2000, p. 314).

Por *fontes primárias* entende-se como sendo manuscritos, artefatos, traduções extraídas de um matemático profissional. As *fontes secundárias* são livros-textos com elementos históricos, interpretações, reflexões e/ou apontamentos sobre um determinado tema. Já as *fontes didáticas* são compreendidas com aquelas obtidas a partir de fontes primárias e secundárias com finalidades para o ensino.

O livro *Fontes Históricas,* publicado em 2005, organizado pela historiadora Carla B. Pinsy possui um capítulo intitulado *Uso e mau uso dos arquivos,* escrito por Carlos Bacellar, que nos mostra certos aspectos relevantes para se considerar quando se trabalha com fontes documentais, quais são:

- Conhecer a origem do documento;
- Contextualizar o documento é de fundamental importância para o pesquisador;
- Olhar crítico e discutir os procedimentos escolhidos pelo autor da obra;
- Perceber a qualidade de informações que a obra pode ou não nos fornecer;
- Produzir um trabalho de História.

Quando se utiliza fontes históricas ou originais, espera-se do pesquisador um profundo conhecimento sobre aquilo que se pusera a tratar, pois este deve ser tratada de modo claro pelo professor (PEREIRA, 2015).

Antes de exibirmos as fontes históricas que trabalharemos nesta dissertação, vamos expor alguns critérios e condições de escolha da fonte, baseado em Esteve *et al* (2013). No livro *Understanding Mathematics Using Original Sources. Criteria and Conditions*, publicado em 2013 conjuntamente a três outros pesquisadores, discute "the situation in the Catalan curriculum of secondary school mathematics and analyze an example put into practice in the classroom" (ESTEVE, *et al.* 2013). Além da discussão feita sobre o currículo do ensino secundário catalão, este trabalho também apresenta alguns critérios e condições para utilização de fontes históricas em sala de aula de matemática. A seguir, um quadro feito pelo autor a partir da leitura do trabalho supracitado, acrescentando os principais objetivos para a utilização da fonte histórica.

Quadro 1: Condições e critérios para escolha da fonte histórica

Principais objetivos para o uso de fontes históricas	• Melhorar a compreensão sobre uma fonte histórica; • Reconhecer as relações socioculturais da Matemática como o contexto da época; • Melhorar o pensamento matemático através de reflexões sobre o desenvolvimento da Matemática;

Critérios	• As fontes históricas devem estar adequadas ao conteúdo matemático; • Utilização de diferentes tipos de fontes favorece um esclarecimento maior sobre o desenvolvimento da Matemática; • Esclarecer as relações entre a fonte e o conceito matemático; • Apresentar características do contexto da época (sejam eles matemáticos ou não) de forma direcionada ao conteúdo matemático.
Condições	• As fontes históricas devem estar ancoradas na Matemática; • A fonte histórica pode ser utilizada para introdução de conteúdos, exploração, esclarecimento de um raciocínio, entre outros. • Contextualizar os conhecimentos matemáticos em suas épocas com intenção de uma interpretação holística da Matemática, ou seja, geral.

Fonte: Construído a partir de Esteve (2013)

Partindo do Critério de Esteve *et al* (2013), escolhe-se às fontes por sua adequação ao tema trabalhado, a linguagem acessível por elas apresentadas, a formalização matemática contida e, também, a variação do tempo de publicação de uma para outra podendo impulsionar um ambiente reflexivo com seus respectivos contextos em sala de aula, corroborando assim com o critério da utilização de diferente fontes históricas.

Estes foram os mesmos critérios utilizados para a escolha de todas as fontes históricas para cada etapa desta pesquisa. Debruçamo-nos sobre as fontes para escolher aquelas que mais se adéquam ao nosso tema. Também, utilizamos os aspectos que Bacellar (2005) nos alerta como relevantes ao analisar uma fonte, quais sejam, o conhecimento da origem do documento, seu contexto e o olhar crítico para vislumbrar suas limitações e potencialidades.

Neste trabalho, utilizamos as fontes históricas a partir de uma abordagem, conhecida como histórico-hermenêutica, que pudesse nos guiar no exame e interpretação sobre as fontes estudadas. A seguir, descreveremos algumas características teóricas a respeito desta abordagem.

2.3 A abordagem Hermenêutica

Como dito anteriormente, a utilização de fontes históricas em sala de aula requer do professor/pesquisador certa habilidade em compreender a mesma, devendo-se conhecer a fonte de seus mais diversos direcionamentos. A abordagem que escolhemos para utilizar as fontes em sala de aula chama-se *abordagem histórico-hermenêutica* ou *abordagem hermenêutica,* proposta por Niels Jahnke, em 1994. A palavra hermenêutica tem origem na palavra grega *hermēneutikḗ* que, segundo o *Google Dictionary*, possui um significado como "a arte de interpretar". De acordo com o Dicionário de Filosofia (2007) de Nicola Abbagnano, a palavra hermenêutica é compreendida como "qualquer técnica de interpretação.". De fato, a abordagem hermenêutica é um estudo interpretativo e sua característica essencial é o estudo detalhado da fonte histórica considerando seus variados contextos, natureza científica e religiosa, inspirações e aspirações do escritor/autor da obra.

A abordagem hermenêutica é o estudo detalhado de uma fonte ou recorte histórico que sempre busca exaltar o contexto no qual a fonte se encontra para um entendimento maior sobre o tema (GLAUBITZ, 2012). O detalhamento da fonte desenvolve uma consciência profunda sobre o tema e consequentemente uma ampliação no horizonte de conhecimento do aluno. Neste momento, o aluno pensa e conjectura ideias que, provavelmente, nunca tenha pensado antes.

Este detalhamento é um processo de interpretação que, segundo Janhke et al (2000), é descrito por um círculo duplo: o primeiro, chamado de primário, é descrito como o processo em que o cientista está agindo, ou seja, o processo de ação do autor da obra que envolve os elementos essenciais do texto. O segundo círculo, chamado de secundário, é descrito como a busca do leitor em entender quais as relações que cercam o trabalho do cientista. Segundo Janhke et al (2000),

> Os professores devem estar cientes deste duplo círculo e ser capazes de se mover nele. Só isso criará um clima na sala de aula adequado para encorajar os alunos a gerar suas próprias hipóteses sobre um texto e assim se prepararem para se pensarem em outras pessoas que viveram em outro tempo. (JANHKE, et al, 2000, p. 298, tradução nossa). [7]

Esse círculo duplo em que o professor deve caminhar livremente é formado por criação de hipóteses e comparações feitas com as informações fornecidas pela fonte. Isto implica em dizer que a experiência do professor é fundamental na análise do texto e, portanto, torna-se fundamental a atenção que o professor deve ao significado do texto para não atribuir uma interpretação falsa.

---

[7] Teachers should be aware of this twofold circle and able to move in it. Only this will create a climate in the classroom adequate for encouraging students to generate their own hypotheses about a text and so become ready for thinking themselves into other persons who have lived in another time. (JANHKE, et al, 2000, p. 298).

Assim como os professores, os alunos também devem caminhar neste círculo duplo na interpretação de uma fonte. É necessário que o aluno explore o texto original e crie hipóteses sobre o tema comparando-as com métodos modernos e conhecidos. Segundo Glaubitz (2012), esse estudo detalhado feito pelo aluno é conhecido, em hermenêutica, como “caminhar” entre os círculos de conhecimentos hermenêuticos. Isto é, então, um papel importante da hermenêutica, pois dispõe do aluno como participante ativo de sua aprendizagem. Entretanto, o professor deve propiciar um ambiente para o aluno alcançar este processo e isso implica oferecer ao aluno um texto original com uma linguagem acessível, preferencialmente, em sua língua nativa.

Para Fossa (2020), a base da educação é a apropriação da linguagem e isto tem fundamento, uma vez que a comunicação, ao menos raciocinativa, depende da linguagem. Para este mesmo autor, “[a] apropriação da língua é a habilidade de produzir comunicações eficazes orais e escritas, bem como entender as comunicações de outros.” (FOSSA, 2020, p.120). É de se pensar, então, que o professor deve propiciar ao aluno a leitura de textos originais de forma clara de modo a favorecer o desenvolvimento das comunicações, entre autor-aluno, aluno-aluno, aluno-professor e aluno-mundo. No processo hermenêutico, este é o motivo pelo qual se pede ao aluno para produzir seus textos, suas narrativas e construir seus argumentos a respeito do assunto estudado.

O aluno, no processo de apropriação da língua, confronta informações do seu conhecimento prévio com aquelas fornecidas pela fonte; esse embate é benéfico para sua aprendizagem e surgem, com isso, os pontos de estranheza. Portanto, a apropriação da língua na leitura de uma fonte original e importante para o processo de desenvolvimento da aprendizagem.

Segundo Glaubitz (2012), no processo hermenêutico de detalhamento da fonte acontece um processo de “estranheza” para o aluno, pois estará em contato com algo diferente, contudo ancorado em seus conhecimentos. Isso porque a abordagem hermenêutica é uma alternativa aplicada a grupos de alunos que já conhecem o tema proposto pelo professor. Os alunos tem o contato com a fonte histórica sabendo do que se trata a fonte histórica superficialmente.

Este processo de *estranheza* é frequentemente motivo de fracasso em outras abordagens, segundo Glaubitz (2012). Na abordagem hermenêutica ela assume um caráter propulsor da aprendizagem. Ainda segundo o estudioso (idem), em hermenêutica, chama-se este processo de: *His horizon merges with the horizon of the past*.

> *Horizon merger* é um termo que foi cunhado por Hans Georg Gadamer. Na *Horizon merger*, o aluno pode começar a se perguntar e a refletir sobre o que possivelmente nunca havia pensado antes. [...] A abordagem hermenêutica dá grande ênfase a essa possibilidade. E o faz utilizando uma estratégia de dissonância. De acordo com essa estratégia você permite que os alunos tenham experiências de dissonância em quantidade moderada, que – por sua vez – despertam a curiosidade epistêmica dos alunos. (GLAUBITZ, 2012, p. 08, tradução nossa).[8]

A curiosidade epistêmica relatada é despertada quando um aluno é confrontado com informações, ao primeiro contato “estranho”, ou seja, informações inicialmente incompatíveis com seus conhecimentos prévios. Este tipo de informação causa uma maior retenção na memória.

Segundo Jahnke *et al* (2000) e Glaubitz (2012), uma ferramenta para alcançar esta estranheza é a abordagem convencional no início da intervenção:

> Normalmente, a estrutura é a seguinte: Primeiro, os alunos têm uma introdução bastante convencional ao tópico. Nenhuma história está envolvida até a segunda etapa, na qual os alunos lêem uma fonte histórica. Nesta fonte, o mesmo tema é abordado, mas de uma forma historicamente distante, diferente em sua representação, utilizada em contextos estranhos e assim por diante. Este é o passo onde a curiosidade epistêmica dos alunos é – esperançosamente – despertada. Na terceira e última etapa os alunos são solicitados a explorar a fonte ainda mais detalhadamente, [...] (GLAUBITZ, 2012, p. 08, tradução nossa). [9]

Isto é, segundo a abordagem hermenêutica, o aluno tem, inicialmente, uma introdução ao tema estudado de forma convencional. Em seguida, o aluno tem o primeiro contato com a fonte e, por fim, os alunos devem interpretar a fonte. Na abordagem hermenêutica espera-se que os alunos estejam familiarizados com o assunto e, de um modo geral, as abordagens são feitas seguindo o roteiro: introdução ao tema; entrega da fonte história aos alunos; estudo intenso sobre a fonte. Este é um modelo comumente utilizado. Os alunos têm o contato com o assunto de forma convencional, ou seja, habitual e, depois, partem para o conhecimento da fonte histórica. É neste momento que ocorre a curiosidade epistêmica segundo Glaubitz (2012), no impacto do conhecimento e empenho em decifrá-la.

---

[8] *Horizon merger* is a term that was coined by Hans Georg Gadamer. In the horizon merger the student may begin to wonder and to reflect upon what he possibly had never thought about before. [...]The hermeneutic approach puts great emphasis on this possibility. And it does so by utilizing a strategy of dissonance. According to this strategy you let students have experiences of dissonance in a moderate amount, which – in turn – arouse the students' epistemic curiosity. (GLAUBITZ, 2012, p. 08).[8]

[9] Usually the structure is as follows: First, the students have a quite conventional introduction to the topic. No history is involved until the second step, in which the students read a historical source. In this source, the same topic is covered, but in a way, that is historically distant, different in its representation, used in strange contexts and so forth. This is the step where the students' epistemic curiosity is – hopefully – aroused. In the third and final step students are required to explore the source in even greater detail,[...]”. (GLAUBITZ, 2012, p. 08).

Em particular, nesta pesquisa, não utilizamos a abordagem convencional no início da aplicação da fonte histórica. Utilizamos, em substituição à abordagem convencional, a problematização como recurso motivador e que, em nossa visão, gera um aprofundamento diante da curiosidade do aluno. Entendemos a problematização como modo de distanciar o aluno da familiarização do objeto estudado, desconstruindo noções comuns e refletindo sobre suas características. Assim, para Machado, Marques e Silva (2016, p. 26) “ao se problematizar o conceito espontâneo dos estudantes, é possível atingir maiores níveis de generalização.”. Portanto, adiante, investigaremos o papel da problematização na análise e resultados dos dados obtidos.

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

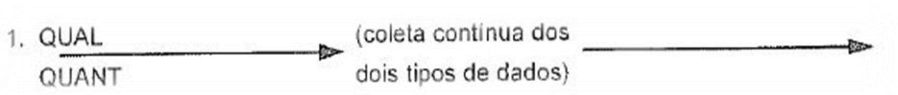
3.1 Caracterização geral da pesquisa

A pesquisa científica caracteriza-se por sua natureza, abordagem, objetivos e procedimentos técnicos sobre o problema a investigar. Neste sentido, a natureza de nossa pesquisa é aplicada (empírica) e nossa abordagem é descrita como qualitativa e quantitativa no qual concordamos com Minayo (2002) quando assevera que o tratamento dado aos dados pode ser complementar. As pesquisas que utilizam da natureza quali-quantitativa[10] estão crescendo no âmbito nacional, embora ainda em um estágio incipiente [11]

Consideramos que a pesquisa em sala de aula é, essencialmente, qualitativa. A dinâmica envolvida entre os sujeitos, o pesquisador e o mundo real assim como os fenômenos sociais e a pluralidade inserida no ambiente, não devem se traduzir na objetivação numérica enfatizando assim o processo e seu significado. Entretanto, como afirmam Minayo (2002) e Flick (2004), a diferença entre qualitativo e quantitativo está em sua natureza e, portanto, a realidade abrangida entre eles interage ativamente, complementando-se entre si.

De acordo com Flick (2004, p. 273), citando Miles e Huberman (1994), há quatro tipos de planos para integrar as duas abordagens, qualitativa e quantitativa. Em nossa pesquisa, buscamos utilizar o primeiro plano de integração, demonstrado na figura 1 adiante, que se caracterizam por uma busca contínua e paralela entre as duas abordagens durante todo o processo de pesquisa. Segundo Flick (2004, p. 274) a observação contínua garante a base para a relação entre as diversas oscilações em um levantamento.

Figura 1: Plano de integração entre as abordagens qualitativa e quantitativa



Fonte 1: (FLICK, 2004, p. 274)

Além disso, nossa pesquisa caracteriza-se cono uma pesquisa ação, ou seja, segundo Thiollent (1945, p. 13), uma pesquisa ação é um tipo de pesquisa empírica realizada com estreita relação entre o pesquisador e os participantes da pesquisa, de modo que estes estejam inseridos no contexto da situação de modo cooperativo ou participativo. Nossa pesquisa se encaixa dentro dos parâmetros da pesquisa ação visto que o pesquisador Juan Felipe de Azevedo Falcão é o

---

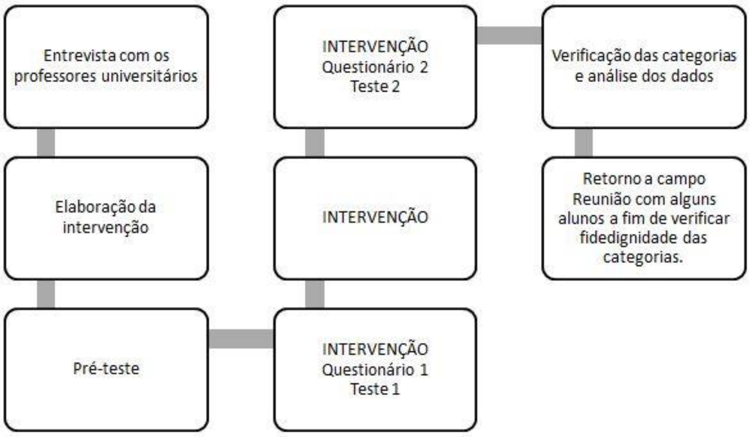
[10] Nomenclatura também conhecida para pesquisas sob a natureza qualitativa e quantitativa.
[11] (Cf. SCHNEIDER; FUJII; CORAZZA; 2017).

professor das turmas de controle e experimento possibilitando, assim, uma interação direta com os sujeitos da pesquisa.

Além disso, segundo Thiollent (1945, p.16), “o objetivo da pesquisa ação consiste em resolver ou, pelo menos, em esclarecer os problemas da situação observada”. Há, neste caso, uma observação constante de toda ação intencional dos sujeitos da pesquisa. Para proporcionar esta observação, utilizamos em nossa pesquisa a observação participante que, segundo Lakatos e Marconi (2003, p. 194), “consiste na participação real do pesquisador com a comunidade ou grupo. [...] Fica tão próximo quanto um membro do grupo que está estudando e participa das atividades normais deste.”. Esta observação caracteriza-se por ser sistêmica e intensa buscando registrar o maior número possível de variações que ocorrem sobre o problema dentro do ambiente pesquisado.

O caminho metodológico percorrido por nossa pesquisa está caraterizado na Figura 2, iniciando com uma entrevista com professores universitários e finalizando (a pesquisa em campo) com o retorno à sala de aula para dialogar com alguns sujeitos da pesquisa.

Figura 2: Diagramação da pesquisa



Fonte: Construída pelos autores

O processo de coleta de dados envolvido na pesquisa resultou de leituras extraídas de Flick (2012), Fiorentini; Lorenzato (2009) e Marconi; Lakatos (2003). Utilizamos questionários, entrevistas, observações, testes, diário de bordo e gravação por vídeo. Segundo Flick (2012, p. 110), os questionários “têm por objetivo receber repostas comparáveis de todos os participantes. [...] As perguntas devem coletar, direta ou indiretamente, as razões de um comportamento ou atitude específica de um entrevistado”. Para Good e Hatt (1996 apud MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 196) a entrevista “consiste no desenvolvimento de precisão, focalização, fidedignidade e validade de certo ato como a conservação". Portanto, a coleta de dados é parte fundamental à pesquisa científica de intervenção.

Pelos motivos supracitados, realizamos uma entrevista semiestruturada[12] com quatro professores universitários a fim de pesquisar sobre algum problema ou dificuldade, identificado por eles, nos alunos egressos do curso de Licenciatura em matemática, da Universidade Estadual da Paraíba – Campus I. Definida a intervenção, realizamos um pré-teste na escola privada (lócus da pesquisa) com uma turma de 25 alunos do 1º ano do ensino médio (adiante, retornaremos ao pré-teste). Em seguida, iniciamos a intervenção: aplicamos um questionário com os sujeitos da pesquisa destacando variáveis como: sexo, idade, crenças sobre a matemática, entre outros. O mesmo questionário com pequenas modificações foi aplicado no fim da intervenção. Após o primeiro questionário, aplicamos um teste de conhecimento sobre os números reais com quatro questões. Este mesmo teste foi repetido no fim da intervenção. O questionário e o teste aplicados no fim da intervenção tiveram o objetivo de avaliar o nível de aprendizagem a respeito dos números reais e observar as implicações da intervenção na percepção que os alunos têm sobre a matemática.

Durante a intervenção, a coleta de dados se deu a partir da observação, testes de conhecimento, diário de bordo e gravação de aulas. A intervenção foi realizada de maneira remota, por meio do serviço disponibilizado pelo Google de chamadas de vídeo: o *Google Meet*. Os alunos e o professor têm acesso a um *link* gerado pela própria plataforma e que possibilita a todos estarem reunidos em uma chamada de vídeo e voz. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009), o diário de bordo é um valioso instrumento de coleta de dados, pois nele o pesquisador pode registrar diversos fenômenos e ações imediatamente aos seus acontecimentos. Portanto, o diário de bordo se tornou um instrumento fundamental em nossa pesquisa.

Por fim, ao realizar a coleta de dados durante a intervenção, o pesquisador realizou as primeiras análises e comparações com as categorias criadas no planejamento da intervenção, durante a intervenção e após esta. Realizada a primeira análise, o professor montou um grupo com cinco (5) alunos participantes da intervenção para discutir suas avaliações a respeito da intervenção e, principalmente, comparar as categorias de análise com a finalidade de imprimir maior fidedignidade às categorias analisadas.

---

[12] Segundo Flick (2021) a entrevista semiestruturada é aquela preparada com perguntas que segue um roteiro, um guia para o entrevistado. Em contraste, o entrevistado não precisa se prender a este roteiro, podendo desviar visto que o objetivo do entrevistador é obter visões individuais de cada entrevistado sobre o tema abordado.

3.2 Caracterização do ambiente de pesquisa

Nossa pesquisa foi realizada em uma escola particular da cidade de Campina Grande, Paraíba. A escolha deste ambiente se justifica em razão do pesquisador fazer parte do corpo docente dela, o que possibilitou a realização de uma pesquisa ação. A escola oferta todos os níveis de ensino da Educação Básica: no turno matutino dedica-se aos alunos do Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio e, no turno vespertino, dedica-se aos alunos da Pré-escola e Ensino Fundamental Anos Iniciais.

A escola possui um programa interno de incentivo a práticas esportivas e artísticas ofertando duas modalidades de danças, o Balé e o Forró, grupos de leitura e modalidades esportivas como Futsal, Karatê, Corrida e, mais recentemente, um pequeno grupo de Xadrez. Além disso, a escola oferta ao Ensino Fundamental Anos Iniciais e Finais e ao Ensino Médio uma disciplina intitulada Educação Digital. Esta disciplina tem como objetivo o incentivo a boas práticas em rede *web*, informações acerca de segurança na internet e programação de softwares e jogos digitais.

A escola possui doze salas de aula, uma sala para os funcionários, duas salas de recepção, uma quadra de esporte, uma sala de informática e o almoxarifado. No que se refere à equipe pedagógica, a escola possui 27 professores e um psicólogo. Ademais, possui dois inspetores, um diretor, um vice-diretor, três auxiliadores de serviços gerais e dois porteiros.

Até meados de março de 2020, a escola adotava o seguinte regime de horário: turmas matutinas (07h00min às 12h45min) e vespertinas (13h00min às 17h30min). Devido à pandemia causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2)[13], a escola adotou o ensino remoto[14] como solução rápida para a continuação das aulas. Com isso, o regime de horário adotado pela escola no ensino remoto foi de 07h00min às 12h20min com duração de 50 minutos cada aula.

Somente no fim de abril e início de junho a escola retornou suas atividades com várias modificações. Uma das diretrizes repassada pela escola dada aos professores foi revisar todo o conteúdo que havia ministrado no início do ano de 2020 e focar nos conteúdos mais

---

[13] Segundo a Organização Pan-Americana da Saúde – OPAS, em janeiro de 2020 foi identificado um novo coronavírus (SARS-CoV-2) causador da Covid-19 uma doença infecciosa respiratória aguda grave. A pandemia foi declarada no Brasil em março de 2020 e impôs mudanças urgentes a fim de salvaguardar a saúde das pessoas. Para manter distanciamento social eficaz (junto com higienização correta era as únicas formas de se proteger da Covid-19) instituições, empresas, e redes de ensino utilizaram a tecnologia para continuar as atividades.

[14] Aulas em um ambiente virtual, com transmissão ao vivo.

importantes, pois a carga horária de todos os professores foi reduzida. Portanto, o retorno às aulas foi com muita cautela, novidades tecnológicas, adaptação a novos métodos, exaustão com diversos trabalhos nos atribuído, entre outros fatores. As aulas remotas aconteceram via Google meet – plataforma de vídeo conferência oferecida pela Microsoft – e a plataforma Classroom – plataforma de compartilhamento de materiais, também oferecida pela Microsoft.

Inicialmente foi avisado aos alunos sobre a execução do curso e solicitado aos pais o consentimento para gravação de vídeo e áudio das aulas. Após isso, foi enviado na plataforma do Classroom, um comunicado sobre a aplicação do questionário e teste, em que este informava o horário, data e o aviso da necessidade da entrada do aluno na sala de aula meet para validar as respostas dadas ao questionário e teste.

As aulas remotas da turma de experimento aconteceram de maneira semelhante durante a intervenção, os alunos não ligaram suas câmeras por diversas razões, por exemplo, a falta de uma câmera, assim como não houve participação de 100% da turma e, consequentemente, não se pode perceber se todos os alunos estiveram com atenção à aula e aos textos utilizados. Alguns, questionados pelo professor durante a aula, não respondiam e, mesmo assim, continuavam *logados* na sala de aula meet. Mesmo nesta situação, a turma de experimento surpreendeu o professor na participação durante as leituras e discussões a respeito da fonte histórica utilizada.

No início da aula, o professor interagia com poucos alunos que o respondiam e, em seguida, realizava a chamada de nomes dos alunos o qual todos, geralmente, estavam presentes neste momento. Em seguida, o professor espelhava sua tela do computador e apresentava o slide para a turma para o início da aula. Os alunos iniciavam tímidos e construíam confiança ao longo da aula.

O momento da entrega da fonte histórica foi realizado pelo Classroom, o professor enviou aos alunos o texto completo em pdf quando a língua empregada na fonte histórica era português brasileiro e, quando escrito em língua estrangeira, a fonte histórica era acompanhada de um documento com recortes traduzidos pelo professor, que seriam estudadas durante a aula. O professor sinalizava quais páginas ou recortes iriam ser utilizados naquele momento desejado. Ao publicar a fonte histórica, o professor avisava a turma e cronometrava alguns minutos para que os alunos pudessem abrir o documento e obter sua primeira percepção a respeito da fonte histórica utilizada. Após este primeiro momento, o professor iniciava com perguntas norteadoras de modo a instigar a turma a pensar e discutir sobre a fonte histórica. O professor surpreendeu-se com a participação da turma nas discussões geradas pela leitura das fontes históricas, o que se intensificou do meio para o fim da intervenção.

As atividades realizadas durante a aula aconteciam da mesma forma: publicava o documento da atividade no *classroom* e os alunos enviavam suas respostas via fotos e(ou) digitavam quando necessário. Como descrito, não foi possível perceber se havia pesquisas ou se os alunos se comunicavam entre si para responder as atividades realizadas. O que foi percebido pelo professor era a semelhança entre as respostas da internet e aquelas dadas pelos alunos que não participavam das discussões propostas durante a leitura das fontes históricas.

A turma de controle demostrou possuir um perfil de alunos apáticos, sem participação e sem ação. Ao iniciar às aulas, assim como na turma de experimento, o professor realizava as chamadas por nomes dos alunos e geralmente todos os presentes neste momento. Após a chamada, qualquer tipo de interação que o professor realizasse com os alunos não era correspondido a menos de três ou quatro alunos.

O método de trabalho utilizado foi sob abordagem convencional e, por isso, julgou-se necessário realizar uma prática que ainda assola as escolas de ensino secundário: ministrar o conteúdo como exposto no livro didático adotado pela escola. Neste sentido, o professor tivera como auxílio um quadro branco que, com o auxílio de uma câmera, apresentava o conteúdo de forma convencional e utilizando das mesmas estratégias utilizadas em sala de aula presencial. Infelizmente, a turma de controle participou pouco durante a intervenção.

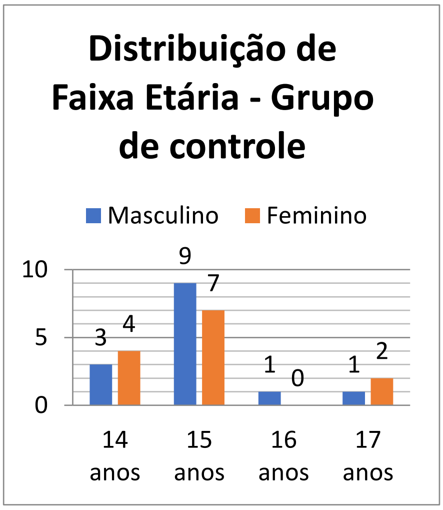
De um modo geral, me preocupou os alunos que digitavam de uma forma no chat do *meet* e nas respostas dos cadernos também escreviam os símbolos semelhantes aqueles do chat. Isso é preocupante pela própria natureza da matemática como uma linguagem simbólica.

3.3 Participantes da pesquisa

A pesquisa foi realizada com 53 alunos da 1ª série do Ensino Médio divididos em dois grupos: um de controle e outro de experimento. O grupo de controle era composto por 30 alunos, dos quais 17 (56,66%) são do sexo masculino e 13 (43,33%) são do sexo feminino. Este grupo estudou os números reais pelo método tradicional de ensino. O grupo de experimento era composto por 23 alunos dos quais 9 (39,13%) são do sexo masculino e 14 (60,86%) são do sexo feminino. Este grupo estudou os números reais a partir da utilização de Textos Originais.

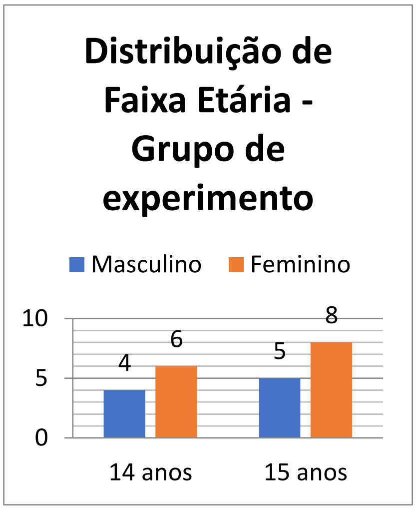
A faixa etária dos participantes da pesquisa varia de 14 a 16 anos, sendo distribuídos de acordo com os gráficos que segue, para cada turma da pesquisa:

Figura 3: Gráfico idade dos alunos do grupo de controle



Fonte: Acervo Pessoal

Figura 4: Gráfico idade dos alunos do grupo de experimento



Fonte: Acervo Pessoal

Um dos critérios escolhido para a especificação de cada turma em seu respectivo método foi de natureza logística, isto é, a turma do grupo de experimento possui duas aulas consecutivas do professor pesquisador enquanto que a turma do grupo de controle possui duas aulas *quebradas* – embora sejam no mesmo dia, a primeira aula inicia às 07:00 e finaliza às 07:50 e a segunda aula inicia às 11:30 e finaliza às 12:20.

3.3.1 Entrevista com os professores

A entrevista como recurso de coleta de dados na pesquisa qualitativa se tornou fundamental entre os pesquisadores das ciências sociais. Segundo Flick (2007), a entrevista de natureza aberta era mais utilizada entre os países de língua alemã e, atualmente, ganha espaço e reconhecimento entre os pesquisadores da área de Educação[15] Em nossa pesquisa utilizamos a entrevista semiestruturada. Segundo Flick (2007) a entrevista semiestruturada possui um planejamento aberto, isto é, as perguntas realizadas se tornam um guia para o entrevistado possibilitando que o sujeito entrevistado possa discorrer livremente sobre o tema debatido.

Um problema encontrado em alunos concluintes do ensino médio ao ingressarem no ensino superior é o conhecimento superficial apresentado sobre os Números Reais, esta constatação é realizada pela prática do professor e autor desta dissertação e entrevista realizada com os professores do ensino superior. O conhecimento destes números é fundamental para uma formação sólida e profunda em sua futura profissão. Especificamente, estudantes de licenciatura em matemática, dependem desta formação sólida, afinal, estes alunos irão ser futuros professores de matemática. A partir deste problema, buscamos investigá-lo e constatar sua importância por meio de uma entrevista realizada com quatro professores do curso de Licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Nossos critérios de escolha aos participantes da entrevista, nesta ordem, foram:

- O (a) professor (a) participante da entrevista tem de ministrar disciplinas obrigatórias para o curso de Licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba;
- O (a) professor (a) participante da entrevista tem que ter, no mínimo, quatro semestres (dois anos) a frente da disciplina em questão;
- Possuir uma parte dos sujeitos entrevistados ministrando disciplinas do início do curso e outra parte dos sujeitos entrevistados ministrando disciplinas oferecidas no fim do curso.

Com todos os critérios estabelecidos e atendidos, entramos em contato com quatro professores, dois professores da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e dois professores da disciplina de Análise Real. Os professores aceitaram participar da entrevista e as marcamos individualmente de acordo com o tempo disponibilizado pelos (as) professores (as). A entrevista foi gravada e transcrita pelos investigadores.

Construímos três perguntas norteadoras com o objetivo de identificar quais os maiores problemas, observados pelos (as) docentes, no entendimento do conceito de número real e sugestões de aspectos conceituais a observar e enfatizar no ensino básico sobre os números

---

[15] Ver Flick (2007).

reais. A partir da transcrição e observação sobre as falas dos (as) professores (as), pudemos destacar as seguintes categorias indutivas.

Quadro 2: Categorias de Dificuldade e Conceitos Importantes apontados pelos professores da entrevista

CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
Dificuldades	A categoria *dificuldades* é caracterizada pelo entendimento dos conceitos relativos aos números reais.
Conceitos importantes	A categoria *conceitos importantes* é descrita como os conceitos fundamentais sobre os números reais.

Fonte: Produzido pelo autor

Para analisar os dados da entrevista nós seguimos os passos: 1) Resumo da análise do conteúdo; 2) Análise Explicativa e 3) Análise Estruturante. No resumo, realizamos duas reduções (a primeira baseada na observação dos conceitos centrais nas falas dos docentes e a segunda redução, que é a união desses termos centrais na construção de um pequeno resumo). Destaca-se o resumo em relação às perguntas.

Em relação à primeira pergunta: A dificuldade do aluno está relacionada a problemas de resolução de equações envolvendo uma incógnita e regras operacionais. Além disso, os alunos demonstram muita dificuldade no entendimento do conceito de densidade dos números racionais e irracionais.

Em relação à segunda pergunta: O conjunto dos números reais é um corpo ordenado e completo e, por isso, é importante que o aluno entenda esses conceitos. Além disso, a associação dos números reais com a reta real é importante para o entendimento desses conceitos.

Em relação à terceira pergunta: Devem ser enfatizadas as regras operacionais com os números reais, o rigor matemático e a densidade sobre estes números. Infelizmente, não é tratada a construção dos números reais no ensino secundário.

A análise explicativa nos diz se houve, em algum momento durante as entrevistas, passagens difusas, tortuosas, estranhas ou confusas. Por nossa entrevista ter obtido poucos dados, os (as) entrevistados (as) responderam diretamente as perguntas com foco no objetivo das perguntas. Portanto, não identificamos nenhuma passagem ou expressão confusa nas falas dos (as) entrevistados (as).

A análise estrutural realizada demonstrou que a estrutura encontrada nas falas dos (as) docentes está relacionada à estrutura de conteúdo e à estrutura interna formal. A estrutura de conteúdo é aquela em que os conceitos estão sempre relacionados a outros conceitos. Por exemplo, a dificuldade em entender o conceito de densidade de números reais está ligada à dificuldade em operar números ou a de lidar com o rigor matemático. A estrutura interna formal destacada é dos números reais. Esta estrutura era de se encontrar visto que os entrevistados são especialistas na área.

Com base nos resumos e nas estruturas identificadas pudemos destacar na categoria "Dificuldades" que a maior dificuldade dos alunos iniciantes no curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba – Campus I está nas regras operacionais com os números reais e nos conceitos de corpo ordenado completo. Sobre a categoria Conceitos Importantes destaca-se o entendimento sobre a densidade do conjunto dos números racionais e irracionais assim como o rigor matemático necessário e sua representação geométrica.

3.4 Intervenção

O grupo de controle estudou os números reais pelo método tradicional de ensino. O grupo de experimento estudou os números reais a partir da utilização de Textos Originais via abordagem hermenêutica. Devido à pandemia causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2), a escola adotou o ensino remoto como solução rápida e eficaz para a continuação das aulas. Neste caso, aos alunos é disponibilizada uma conta de e-mail pelo *Gmail* para ter acesso aos ambientes que o *Google* proporciona. Um desses ambientes proporcionados é o *Google Meet* – plataforma de comunicação por vídeo e áudio desenvolvidos pelo *Google*. Outro ambiente bastante utilizado por nós foi o *Google Sala de Aula* – plataforma desenvolvida pelo *Google* que permite um ambiente integrado com todas as disciplinas e reúnem modos de publicação em *post*, mural de conversas, atividades programadas entre outras funções.

3.4.1 Questionário e Teste

De antemão, a aplicação dos questionários (primeiro e segundo) e testes (primeiro e segundo), modificaram-se em decorrência do modelo remoto de ensino. Com alteração no horário das aulas e no sistema de avaliação remoto, fez-se necessário aplicar estes instrumentos uma semana antes do início da intervenção remotamente. O professor informou um dia e um horário às duas turmas para a aplicação do questionário e o teste fossem aplicados remotamente.

Ao final da intervenção combinou-se um horário e um dia da semana seguinte para aplicar, novamente, o questionário e o teste no mesmo horário. A duração de aplicação foi de 1 hora.

O objetivo dos instrumentos utilizados foi o de tentar identificar nas turmas, experimento e controle, a concepção acerca da matemática assim como o uso da história da matemática e suas fontes no ensino dessa ciência. Assim, tentamos identificar se a intervenção baseada na leitura de textos originais sob a abordagem hermenêutica tem alguma influência sobre a concepção que o aluno tem da matemática. Para isso, no questionário, os alunos foram indagados a respeito de suas crenças sobre a matemática como ciência, sua autoavaliação na disciplina e o que acham sobre a utilização de textos originais em sala de aula de matemática. Com base nos resultados e observações realizadas no Pré-teste, modificamos nosso questionário e inserimos uma pergunta de natureza aberta: “O que você acha da utilização da história da matemática e textos originais em sala de aula de matemática?”. Esta pergunta foi inserida com base no aprimoramento da concepção que os alunos têm sobre a utilização da história da matemática e das fontes originais no ensino de matemática. O teste continha cinco questões envolvendo operações com números racionais, representação decimal, números irracionais, reta numérica, e classificação dos números.

3.4.2 Turma de Experimento

O período de intervenção foi de cinco semanas e, por isso, dividimos a intervenção em cinco partes. A primeira parte descreveu o número como contagem, o número como uma medida e o conceito de incomensurabilidade. A segunda parte tratou da importância do número zero e os números negativos assim como as operações com números inteiros, números racionais e expressões decimais. A terceira parte foi caracterizada pela discussão sobre os Axiomas de Peano e os conceitos de sequência, série e limite. A quarta parte destinou-se em trabalhar os conceitos de corpo ordenado e completo. Por fim, a quinta parte apresentou a construção dos números reais via expansão decimal e sequências de Cauchy.

Igualmente ao que fora realizado no Pré-teste, todas as aulas foram iniciadas com o uso da problematização como modelo eficaz para promover o pensamento crítico do aluno. A seguir, as problematizações utilizadas em todas as aulas:

1ª semana:

O que é um número?

0,9999...=1? Esta igualdade está correta? Por quê?

Considere um segmento $\overline{AB}$ de comprimento um em alguma unidade u. Descreva seu raciocínio para obter um ponto E da semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que o comprimento do segmento $\overline{AE}$ seja $\sqrt{2}$ na unidade u.

2ª semana:

O aparecimento tardio do conceito de número zero seria algo *natural*? O conceito de número negativo é realmente tão simples quanto parece? (três questões problematizadoras envolvendo situações cotidianas em contextos da antiga mesopotâmia e egípcia).

3ª semana:

Imaginemos várias pedras enfileiradas de dominó. Todas em pé e próximas uma das outras. Como faremos para derrubar todas as peças? E o que garante que todas as peças irão cair?

Considere uma linha reta com um atleta posicionado na origem desta reta. O atleta irá saltar, no sentido para direita, seguindo a regra: O primeiro pulo é de um metro, o segundo pulo é a metade de um metro, o terceiro pulo é a metade do pulo anterior e assim por diante. Então, pergunta-se: O atleta irá alcançar a marca de 2 metros? Qual a distância percorrida pelo atleta?

4ª semana:

Ao somar ou multiplicar dois números racionais, o resultado é um valor também racional?

A sequência $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\to\infty}$ é convergente?

Qual o valor de x para a seguinte equação: $x^2 - 2 = 0$.

5ª semana:

Considere a expansão decimal $x_1 = 1{,}4$; $x_2 = 1{,}41$; $x_3 = 1{,}414$; ... Estes termos foram muito utilizados até aqui. Está sequência está convergindo?

Será possível aproximar qualquer número real que desejarmos aproximando dele termos racionais muito próximos?

O que é, afinal, um número real?

Após as discussões realizadas através da problematização, iniciaram-se com as fontes originais. A entrega da fonte, por ser um ambiente virtual, era realizada anexando o arquivo (a fonte original e traduzida, quando necessário) no ambiente *Google Sala de aula*. Sendo assim, todos tinham acesso ao arquivo via plataforma. A seguir, o quadro 3 descreve o desenho da intervenção.

Quadro 3: Delineamento da Intervenção

1ª parte da intervenção (1hr:40 min)	2ª parte da intervenção (1hr:40min)	3ª parte da intervenção (2hr:30min)	4ª parte da intervenção (1hr:40min)	5ª parte da intervenção (1hr:40min)
Problematização; Discussão a respeito do número como contagem e como medida; Entrega da fonte histórica: *Os Elementos (Euclides, 2009. Traduzido)* e *Os primórdios da teoria dos números – Parte A (John A. Fossa, 2010);* Resolução e discussão sobre as questões de direcionamento; Incomensurabilidade;	Problematização; Entrega da fonte: *Liber Abaci (Leonardo Pisano's, 1240. Traduzido);* Resolução e discussão sobre as questões de direcionamento;	Problematização; Entrega das fontes secundárias: *Introdução à Filosofia Matemática (Bertrand Russel, 1974. Traduzido);* e *Introdução às Técnicas de demonstração na matemática (John A. Fossa, 2009);* Resolução e discussão sobre as questões de direcionamento; Entrega da fonte: *Remarques sur la nature dês quantités (Charles Méray, 1869. Traduzido);* Resolução e discussão sobre as questões de direcionamento.	Problematização; Entrega da fonte: *Essays on the theory of numbers (R. Dedekind, 1901. Traduzido);* Resolução e discussão sobre as questões de direcionamento.	Problematização; Entrega da fonte: *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Joseph W. Dauben, 1944. Traduzido).* Resolução e discussão sobre as questões de direcionamento. Construção de R via Expansão decimal; Construção de R via sequência de Cauchy.

Fonte: Produzido pelo autor

Como visualizado no quadro, a 3ª semana teve duração de 2h:30min, pois o pesquisador em campo identificou que seria necessária uma aula extra. A duração total da pesquisa em campo com a turma de experimento foi de nove horas e dez minutos, aproximadamente.

O desenho da pesquisa sempre se baseou na problematização em primeiro lugar com intuito de gerar uma discussão entre todos e, então, o uso da fonte histórica direcionada por perguntas e comentários realizados pelo professor. Como já mencionado, os critérios utilizados para a escolha da fonte original foram dois (1) abordar os temas objetos da intervenção e (2) utilizar uma linguagem que não dificultasse a compreensão da fonte por parte do aluno. Trabalhamos as seguintes fontes originais:

1ª semana: *Os Elementos* de Euclides, traduzido;

2ªsemana: *Liber Abaci* de Leonardo Pisano’s, traduzido;

3ªsemana: *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données* de Charles Méray, traduzido.

4ª semana: *Essays on the theory of numbers* de Richard Dedekind, traduzido.

5ª semana: *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite de* Joseph W. Dauben. Traduzido.

Para nos auxiliar no entendimento dos Axiomas de Peano e sistemas numéricos, utilizamos recortes das seguintes fontes secundárias:

1ª semana: *Os primórdios da teoria dos números – Parte A* de John A. Fossa.

3ª semana: *Introdução à Filosofia Matemática* de Bertrand Russell, traduzido.

Introdução às Técnicas de demonstração na matemática de John A. Fossa.

Para observar todas as atividades, na íntegra, realizadas em sala de aula para cada uma das fontes originais basta pesquisar o Apêndice (B) deste trabalho, intitulado: Descrição literal das atividades realizadas durante a intervenção.

Durante a primeira semana de intervenção, trabalhamos inicialmente a problematização supracitada. Em seguida, contextualizamos o problema sobre a *contagem* buscando exemplificar o processo de contar utilizados por alguns povos assim como sua relação com o surgimento da linguagem e com as palavras numéricas. Ao falar sobre contagem, devemos ilustrar duas ideias essenciais, a de que ao realizar a atividade de contagem o indivíduo faz uma relação biunívoca entre dois conjuntos e a de que um dos conjuntos da comparação contenha elementos em uma sequência ordenada. O passo seguinte foi a contextualização sobre o número como uma medida. Medidas como côvado, jarda, cúbito e palmo são importantes por motivos de curiosidade e construção do conhecimento humano. Também é importante falar sobre a Revolução Neolítica e suas implicações, dentre as quais destacamos a necessidade de se criar novas formas de medir. Por fim, para pesquisas, entregamos a fonte secundária *Os primórdios da teoria dos números – Parte A* de John A. Fossa.

Para falarmos sobre a importância do pensamento grego. Pedimos para os alunos pesquisarem sobre as características das *polis gregas* e discutissem sobre a importância da argumentação. A política, a cultura, a economia, o governo, como esses pilares influenciaram a forma como a matemática (na verdade, a Geometria) era encarada pelos gregos. Após estas discussões, foi entregue a fonte original *Os Elementos* de Euclides. Realizada a leitura sobre a fonte original e respondida as questões de direcionamento sobre esta fonte, iniciamos com a discussão da incomensurabilidade. Em primeiro lugar, pedimos para o aluno observar o que é um número incomensurável segundo Euclides, e pedimos para os alunos dizessem o que eles entendiam por um número incomensurável. Em seguida, mostramos um exemplo com três quadrados de lado 3, 4 e 5, respectivamente, e estudamos as relações de semelhança entre essas três figuras. Após isso, mostramos um quadrado de lado 1 com aplicação do teorema de Pitágoras encontrando a diagonal como $\sqrt{2}$. Após a discussão da importância da incomensurabilidade e suas consequências falamos sobre as hipóteses recentes de descobrimento da incomensurabilidade mostrados em Roque e Pitombeira (2012).

Na segunda semana, depois de realizada a problematização junto com a turma, foi entregue aos alunos a fonte *Liber Abaci* de Leonardo Pisano's. A intenção com esta fonte foi trabalhar o conceito de número zero e as operações com números naturais e inteiros, regras operacionais. Após essa leitura e a discussão sobre esses problemas, buscamos iniciar a problematização sobre os números negativos. Não utilizamos nenhuma fonte, buscamos, nesse momento, utilizar a internet e realizar pesquisas sobre o contexto dos números negativos. A partir da pesquisa, falamos sobre a crise gerada pelo conceito de números negativos, principalmente, sobre a aceitação dos números negativos no século XVIII.

Terminada a segunda semana, iniciamos a terceira com a problematização sobre os Axiomas de Peano. Em seguida, entregamos a fonte secundária: *Introdução à filosofia matemática* de Bertrand Russell. Esta fonte nos ajudou no entendimento dos Axiomas de Peano juntamente com as perguntas que direcionaram a discussão. No último Axioma (axioma da indução) utilizamos outra fonte para nos ajudar a entendê-lo: *Introdução às técnicas de demonstração na matemática* de John A. Fossa. Esta fonte nos ajudou didaticamente a montar exemplos mais suscetíveis aos alunos. Feita a discussão, trabalhamos a sequência (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...) e propomos aos alunos conjecturar sobre a forma geral dessa sequência.

Finalizada a discussão mencionada antes, retornamos a problematização sobre o atleta que dá saltos sempre saltando a metade do que já tinha saltado. Então iniciamos a discussão sobre o cálculo infinitesimal e o movimento da aritmetização da análise. Neste momento, houve espaço para relacionar números decimais, frações decimais e o estudo das séries infinitas. Então, entregamos a fonte *Remarques sur la nature dês quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données* de Charles Méray. A intenção deste texto é auxiliar o aluno ao compreender os conceitos de sequência, série, convergência e limite. Segundo Méray, 1869), a definição de um número irracional é dada por: "Uma quantidade incomensurável corresponde a uma infinidade de variáveis convergentes comensuráveis" (MÉRAY, 1869, p. 282). Esta definição é a primeira definição, na literatura dos números reais, sobre uma quantidade irracional.

A quarta semana iniciou com a problematização a respeito de um corpo ordenado e completo. Afinal, o que significam esses conceitos? Para o conceito de corpo ordenado, não utilizamos nenhuma fonte, apenas mostramos no quadro branco as condições necessárias para um conjunto tornar-se um corpo e o que significa um corpo ordenado. Trabalhamos a proposição da existência de um elemento $z \in K$ (K sendo um corpo) tal que $z = \frac{x+y}{2}$ em que $x, y \in K$ e satisfaz a condição $x \leq z \leq y$. O passo seguinte foi a introdução da fonte original *Essays on the theory of numbers* de Richard Dedekind. Nossa intenção com o uso desta fonte foi o de guiar o aluno no entendimento de um corpo ordenado e completo. Também, um conceito importante definido com esta fonte é o conceito de continuidade da reta real.

Por fim, a quinta e última semana foi destinada à construção dos números reais via dois métodos: Via expansão decimal e via sequências de Cauchy. Para tanto, realizamos a problematização supracitada e em seguida entregamos a fonte *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite* de Joseph W. Dauben. Nosso propósito com esta fonte foi o de mostrar aos alunos a ideia de Cantor sobre uma sequência convergente e o amadurecimento sobre a completude dos números reais. Em seguida, iniciamos com a construção dos números reais via expansão decimal. O método da expansão decimal é mostrar que os números reais podem ser aproximados, com erro muito pequeno, por números racionais do tipo $p \cdot 10^{-m}$, com $p \in \mathbb{Z}\ e\ m \in \mathbb{N}$. Contudo, mostrar todos os detalhes técnicos desta construção é inviável para o Ensino Médio devido tempo limitado pelo calendário acadêmico escolar. Por isso, selecionamos alguns conceitos importantes para serem trabalhos. Nesse sentido, relembramos o que é uma expressão decimal e sua representação como uma soma de frações decimais. Em seguida, demonstramos a proposição: Todo número real pode ser aproximado tão bem quanto se deseja usando números racionais.

Para finalizarmos a aula, construímos o conjunto dos números reais via sequências de Cauchy. Para isso, definimos o conjunto de todas as sequências de números racionais. Em seguida, a relação de equivalência e o conjunto das sequências de Cauchy racionais e então, afirmamos que este conjunto é o conjunto dos números reais. Mostramos que este conjunto é um corpo, ordenado e completo. Para a prova de que este conjunto é um corpo, verificamos algumas proposições necessárias, mas não todas. Para provar que este é ordenado, fazemos exemplos práticos com os números π e $\sqrt{2}$. Por fim, para mostrar que esse conjunto é completo basta observar que neste conjunto, todas as sequências de números racionais são de Cauchy e logo são convergentes para um elemento do conjunto em questão.

3.4.3 Turma de Controle

A turma de controle estudou os números reais por meio da abordagem convencional. Segundo a Proposta Curricular da Paraíba, seguida por todas as escolas municipais, estaduais e privadas em território paraibano, a organização curricular é posta em três categorias (1) Unidade Temática, (2) Objetivo de Aprendizagem e (3) Objeto de Conhecimento; A unidade temática é "Números e Operações" e o objeto de conhecimento é "Conjuntos". Os objetivos de aprendizagem são: "Compreender a noção de conjunto; reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações; Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos; Compreender o conjunto dos números reais com a união entre racionais e irracionais; Utilizar os conceitos de relações e operações entre conjuntos para resolver problemas.".

Na prática, a intervenção realizada com a turma de controle durou quatro semanas e, por isso, dividimos em quatro partes. A primeira parte foi caracterizada pelo estudo do conjunto dos números naturais e conjunto dos números inteiros assim como suas propriedades e operações com esses números. A segunda parte tratou do estudo do conjunto dos números racionais, suas propriedades e operações definidas neste conjunto. A terceira parte abordou a representação decimal finita e representação decimal finita e infinita bem como operações com esta representação. A quarta parte foi caracterizada pelo estudo do conjunto dos números irracionais e por mostrar o conjunto dos números reais como a união entre o conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, também, estudamos o eixo real.

O uso do livro texto é diretriz obrigatória pela escola, os pais também exigem o uso do material, pois, no argumento dos pais, “é um material caro para ser deixado esquecido.”. Por esses e ainda outros motivos não tão relevantes, o livro texto acaba se tornando um “material referencial” e guia, conceitualmente, o trabalho do professor. O livro texto adotado pela escola é *Matemática* de Manoel Paiva, 2015, editora Moderna. Quase todas as atividades foram retiradas deste livro.

O roteiro desenvolvido neste livro é:

(1) Conjunto dos números naturais:
   a. Definição por representação tabular;
   b. Números naturais consecutivos, antecessor e sucessor;
   c. Propriedades dos números naturais.

(2) Conjunto dos números inteiros:
   a. Definição por representação tabular;
   b. Números inteiros consecutivos, antecessor e sucessor;
   c. Números pares e números ímpares.

(3) Conjunto dos números racionais
   a. Definição por propriedade[16];
   b. Propriedade dos números racionais;
   c. Representação decimal finita e infinita.

(4) Conjunto dos números irracionais
   a. Exemplo da diagonal de um quadrado de lado 1;
   b. Exemplos de comparação entre números decimais e aproximações;
   c. Definição por propriedade[17];
   d. Propriedade dos números irracionais.

(5) Conjunto dos números reais
   a. Definição por propriedade[18];
   b. Propriedade dos números reais.

---

[16] $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$

[17] $\mathbb{Q}' = \{ x \mid x$ é $dízima\ não\ periódica\}$

[18] $\mathbb{R} = \{ x \mid x$ é $número\ racional\ ou\ irracional \}$ $\ ou\ $ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$

(6) O eixo real

a. Intervalos reais.

Este roteiro também foi utilizado pelo pesquisador como um caminho para se trabalhar com a turma de controle. Realizamos pequenas mudanças que explicaremos adiante. A metodologia do professor é baseada na exposição do conteúdo por parte do professor, aquilo que podemos chamar de “ensino direto”[19]. Todas as aulas aconteceram pelo modelo de ensino remoto por meio da plataforma *Google Meet.*

A primeira semana foi marcada por definições e tentativas de generalizações. Utilizamos as definições acerca de números naturais e números inteiros e suas propriedades (números consecutivos, antecessor, sucessor, soma e multiplicação entre dois números do mesmo conjunto). Em seguida, estudamos os números pares e números ímpares e mostramos as propriedades sobre os números inteiros.

A segunda semana foi caracterizada pelo estudo dos números racionais. Definimos os números racionais como uma razão entre dois números inteiros com o denominador diferente de zero, necessariamente. Após a definição, classificamos os subconjuntos do conjunto dos números racionais. Então, foram mostradas as propriedades dos números racionais e, portanto, abrimos um espaço para relembrar aos alunos como se operar com frações.

Na terceira semana, dialogamos com os alunos sobre a representação decimal finita e infinita de um número racional, assim como caracterizamos números que não são racionais e as técnicas de operação utilizando a representação decimal. Finalizamos este momento ensinando a técnica para encontrar fração geratriz de uma dízima infinita periódica.

A última semana foi caracterizada pelo entendimento do conjunto dos números irracionais e reais. Para tanto, utilizamos uma problemática: Encontre x, sendo x um número racional, na equação $x^2 - 2 = 0$. Após a discussão, foi demonstrada, pelo método das paridades entre os termos, a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Então, definimos os números irracionais como sendo aqueles números que não podem ser escritos como uma razão entre dois números inteiros, com denominador diferente de 0. Em seguida, mostramos as propriedades sobre o conjunto dos números irracionais e definimos o conjunto dos números reais como a união entre os conjuntos dos números racionais e irracionais. Por fim, finalizamos este momento com o estudo do eixo

[19] Ver (FOSSA, J. 1998, p. 13).

real, para isso, explicamos a representação algébrica e a representação geométrica de um intervalo real e suas notações.

4 RESULTADOS E ANÁLISES

4.1 Descrição da técnica de análise

Esta seção destina-se a apresentar os resultados encontrados na pesquisa proposta e sua análise. Para a análise dos dados, nós utilizamos a Análise de Conteúdo Quantitativo organizada por Flick (2012) e a Análise de Conteúdo Qualitativo, proposta por Mayring (1983), por entendermos que esta abordagem engloba a natureza dos dados da pesquisa que são qualitativas e quantitativas. Historicamente a técnica de Análise de Conteúdo tem origem nas primeiras décadas do século XX nos Estados Unidos da América com a finalidade de analisar meios de comunicação e seu impacto na sociedade (MAYRING, 2002). Inicialmente, esta técnica estava associada tanto a abordagem qualitativa como quantitativa (ROSSI, *et al,* apud BERELSON, 1952), entretanto a ênfase maior era dada a uma abordagem quantitativa (cf. MAYRING, 2002). Com o passar dos anos, a demanda por uma abordagem qualitativa se firmou nas ciências sociais e na psicologia e segundo Mayring (2002, p. 114) "Ritsert (1972) criticou a análise de conteúdo quantitativa por pouco considerar especialmente quatro aspectos: O contexto dos elementos do texto; Estruturas de sentido latentes; Casos individuais marcantes; O que não consta no texto." Neste sentido, há diversas estratégias de como aplicar a técnica de análise de conteúdo: Berelson (1952), Lasswell (1968), Ritsert (1972), Bardin (1977) e Mayring (1983) são alguns dos exemplos que utilizam de diferentes estratégias para com o uso da análise de conteúdo.

Segundo Flick (2012, p.134) o objetivo da análise de conteúdo é "classificar o conteúdo dos textos alocando declarações, sentenças ou palavras a um sistema de categorias". Já Mayring (2002, p. 114) afirma que:

> O forte da análise de conteúdo é que ela analisa o material passo a passo com controle metodológico rígido. Ela divide o material em unidades que são trabalhadas uma depois da outra. No centro existe um sistema de categorias, desenvolvida a partir do material e guiada por teoria. Por meio deste sistema de categorias, determinam-se aqueles aspectos que devem ser filtrados do material. (MAYRING, 2002, p. 114).

Para a análise dos dados quantitativos, buscou utilizar testes paramétricos e não paramétricos para comparar as variáveis estatísticas. Além disso, utilizamos testes de hipótese para verificação de uma hipótese estatística. Também, durante o processo, devemos observar duas estratégias analíticas: análises de frequência e análises de contingência. A análise de frequência busca a incidência de uma palavra, tópico ou expressão que aparecem mais vezes. A análise de contingência é verificar, por exemplo, quantas vezes uma palavra ou expressão aparece conjuntamente com outra palavra ou expressão que se deseje analisar.

Em todos os dados utilizamos o teste de frequência e o teste de plausibilidade. Segundo Flick (2012), estes dois testes devem ser realizados em todos os dados quantitativos e são relativamente simples ou complexos de serem executados dependendo da amostragem. O teste de frequência verifica se todos os valores estão inseridos na organização dos dados e de maneira correta – este teste foi realizado pelos pesquisadores no início da transcrição dos dados. O teste de plausibilidade é verificar se faz sentido os dados inseridos em suas respectivas variáveis.

Para o tratamento dos dados quantitativos utilizamos os passos descritos em Flick (2012) que são:

1. Transcrição e organização dos dados;
2. Textos relevantes para a pesquisa (amostragem dos textos);
3. Definir a(s) unidade(s) de contagem;
4. Categorização;
5. Regras de codificação;
6. Análise.

Em primeiro lugar ressaltamos que o tópico “Categorização” também poderia aparecer como um tópico zero, visto que na produção dos instrumentos de coleta de dados, construímos categorias de análise para os questionários e testes aplicados antes e após a intervenção. Em nossa pesquisa, utilizamos duas formas de categorias que são descritas por Minayo (1994), em que segundo a autora, há pesquisadores que defendem que as categorias devem ser criadas no início do estudo, antes da fase exploratória. Estas categorias, são conceitos mais gerais e mais abstratos e devem estar ancorados no objetivo, problematização, questões de pesquisa e referências teóricas. E há os que defendem a criação de categorias indutivas, ou seja, aquelas que emergem da leitura sobre os dados da pesquisa, pois surgem a partir das respostas dadas pelos alunos. As categorias indutivas foram utilizadas nas observações realizadas pelo pesquisador e autor em campo e atividades realizadas durante a intervenção. Ainda segundo Flick (2012, p. 136), as categorias devem ser “mutuamente exclusivas, exaustivas, precisas, baseada em dimensões sutis e independentes uma da outra”.

O passo de número três - Definir a(s) unidade(s) de contagem - é, segundo Flick (2012), fundamental para criação das categorias indutivas isto porque a unidade de contagem são palavras, frases, expressões, terminações, entre outras que pertencem às categorias construídas. Para aplicar as categorias aos textos, são criadas as regras de codificação (passo de número cinco descrito anteriormente) – regras definidas previamente que garantem a inserção de palavras, frases ou expressões em uma categoria, segundo Flick (2012, p. 136) “os codificadores coletam as unidades analíticas aplicando as categorias que foram definidas previamente.”.

Para análise e tratamento dos dados qualitativos utilizamos o método proposto por Mayring (1983, 2000, 2002). Sobre o tratamento dos dados qualitativos seguimos os passos descritos em Mayring (1983), quais sejam: selecionar o material que vamos analisar; em seguida, pensar e realizar anotações sobre a situação da coleta de dados, ou seja, *como o material foi coletado? Houve alguma influência no momento da transcrição?* Realizada esta organização, define-se a direção da análise, isto é, *o que realmente queremos interpretar em posse destes dados?*

Após a organização e direção tomada em posse dos dados, definem-se então as unidades de codificação, contextual e analítica. Segundo Flick (2012), a unidade de codificação define qual é o menor elemento que pode ser analisado, ou seja, a menor parte de um texto que pode ser incluído em uma categoria de análise. A unidade contextual esclarece o maior elemento do texto que pode ser inserido na categoria. A unidade analítica define que passagens são analisadas no texto. Por fim, faz-se a análise.

Em posse deste tratamento sobre os dados qualitativos, Mayring (2002) propõe três formas básicas de analisar os dados qualitativos, são eles: Sumarização, Explicação e Estruturação. Neste sentido, Mayring (2002, p. 115) define:

> *Sumarização*: O objetivo da análise é o de reduzir o material de tal maneira, que sobram os conteúdos essenciais, de criar, por meio da abstração um corpus, que continua sendo um retrato do material básico.
>
> *Explicação*: O objetivo da análise é acrescentar material adicional a determinados segmentos do texto (conceitos, frases, ...), para aumentar a compreensão, para esclarecer, explicar e interpretar um determinado segmento.
>
> *Estruturação*: O objetivo da análise é filtrar determinados aspectos do material; estabelecer um recorte do material na base de critérios pré-estabelecidos; ou de avaliar o material na base de determinados critérios. (MAYRING, 2002, p. 115).

A técnica de *sumarizaçã*o é semelhante à realização de um resumo reduzindo o texto a conceitos principais como uma amostragem em uma pesquisa, por mais que seja um número inferior ao da população estudada, contém todas as características importantes. É na sumarização que, segundo Mayring (2002), a criação indutiva de categorias (categorias indutivas) torna-se imperiosa. Realizado o resumo, é necessário fixar critérios de seleção para a criação de categorias. Ao se analisar o resumo e encontrar palavras ou expressões que se enquadrem na categoria, constrói-se esta categoria. Após uma análise parcial (10% - 50%, segundo Mayring (2002)) do material, revisa-se todo o sistema de categorias procurando inconsistências ou a necessidade de criação de mais categorias etc. O resultado da técnica de sumarização é um resumo contendo os elementos principais do texto estudado e um conjunto de categorias (a depender dos instrumentos de coleta de dados).

A análise de conteúdo qualitativo pelo método da *explicação* é análise de contexto (MAYRING, 2002), isto porque a análise pela *explicação* esclarece passagens e segmentos do texto. Ela opera de maneira oposta a sumarização, ou seja, aqui é criada uma "paráfrase explicativa do material contextual" com base em segmentos do texto que pareçam confusos e precisam de elementos adicionais para ser mais bem explicitados. Mayring (2002) define dois modos como a paráfrase explicativa deve ser: contexto do material imediato com ligações diretas do texto estudado; contexto do texto ampliado. O primeiro esclarece passagens a serem analisadas e o segundo busca informações além daquelas descritas nas respostas dadas pelos alunos.

A técnica estruturante permite ao pesquisador filtrar uma estrutura do material (MAYRING, 2002). Esta técnica também gerencia um sistema de categorias, mas, diferentemente da técnica de sumarização, as categorias são criadas com base nas estruturas encontradas no texto, Mayring (2002) relata que podemos encontrar estruturas de conteúdo, estruturas internas, estruturas escalonadas ou estruturas tipificadas. Segundo Flick (2012),

> Você pode procurar e encontrar quatro tipos de estruturas. Pode encontrar **tópicos ou domínios específicos que caracterizam os textos** (estruturas de conteúdo) – por exemplo, declarações xenofóbicas em entrevistas estão sempre vinculadas a questões de violência e crime. Ou encontra uma **estrutura interna** em um nível formal que caracteriza o material – por exemplo, todo o texto começa com um exemplo e depois segue-se uma explicação do exemplo. A **estruturação escalonada** significa que você encontra vários graus de uma característica no material – por exemplo, textos que expressam xenofobia de uma maneira mais forte do que outros textos no material. Finalmente, você pode encontrar as **estruturas tipificadas** – por exemplo, aquelas entrevistas com participantes mulheres são sistematicamente diferentes daquelas com participantes homens na forma como as principais perguntas são respondidas. (FLICK, 2012. p. 139)[Grifo nosso].

Neste sentido, Ulich *et al.* (1985 apud Mayring, 2002) mostrou que este é um importante procedimento na criação de categorias e consiste em três passos:

> (1) Definição de categorias: definem-se explicitamente quais segmentos de texto pertencem a uma determinada categoria; (2) Exemplos de âncora: citam-se segmentos de texto específico, que se aplicam a uma determinada categoria e que servem como exemplo para esta categoria. (3) Regras de codificação: No caso de problemas de limitação estabelecem-se regras que permitem uma agregação inequívoca. (Ulich *et al.*, 1985 *apud* Mayring, 2002, p. 118 e 119)

Para nos ajudar no tratamento dos dados, exibição e análises quantitativas utilizamos o *software Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS, atualmente dirigida pela empresa IBM (*IBM SPSS Statistics Subscription*). Este *software* ajuda o pesquisador na tomada de decisões, exibições de dados, cálculo da correlação entre outras funções estatísticas avançadas. Utiliza-se da aplicação estatística, mineração de dados e mineração de textos que transformam dados em informações importantes. A versão utilizada pelos pesquisadores foi: *IBM SPSS Statistics 26*. Este s*oftware* não é gratuito.

4.2 Questionário e Teste

Como supracitado, em decorrência da pandemia causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2), a escola adotou o ensino remoto para dar continuidade às atividades e, por isso, o professor combinou um horário com os alunos das turmas de controle e experimento para aplicar o questionário e o teste. Com isso, tivemos um baixo índice de participação na Turma de Controle com oito participantes antes da intervenção (aprox. 26,66% < 30%) e 14 participantes depois da intervenção (aprox. 46,66%). A Turma de Experimento, contrapondo a Turma de Controle, teve um índice de 69,56% antes da intervenção com 16 participantes e 82,60% depois da intervenção com 19 participantes.

O questionário e teste foram construídos com base em categorias pré-existentes e estas foram criadas na fase de planejamento da intervenção. Visando objetivar uma avaliação sobre o uso de leitura de textos originais com ajuda em leituras realizadas em Glaubitz (2010) temos:

Quadro 4: Categorias para o questionário

CATEGORIA	DESCRIÇÃO
(C1) Concepção sobre a matemática	A concepção sobre a matemática pode ser classificada quanto a: 1) gostar de estudar matemática; 2) dificuldade de estudar matemática; 3) visão da matemática como ciência e se está presente em nosso cotidiano; 4) a matemática como solução para resolver problemas.

(C2) Concepção sobre o uso de história da matemática	A concepção sobre o uso da história da matemática em sala aula pode ser classificada em *assentimento* quando o sujeito da pesquisa assinala os rótulos “Concordo completamente” ou “Concordo em parte”; *negativa* quando o sujeito da pesquisa assinala os rótulos “Discordo completamente” ou “Discordo em parte”; e *ausente* quando o sujeito da pesquisa assinala o rótulo “Nem discordo, nem concordo”.

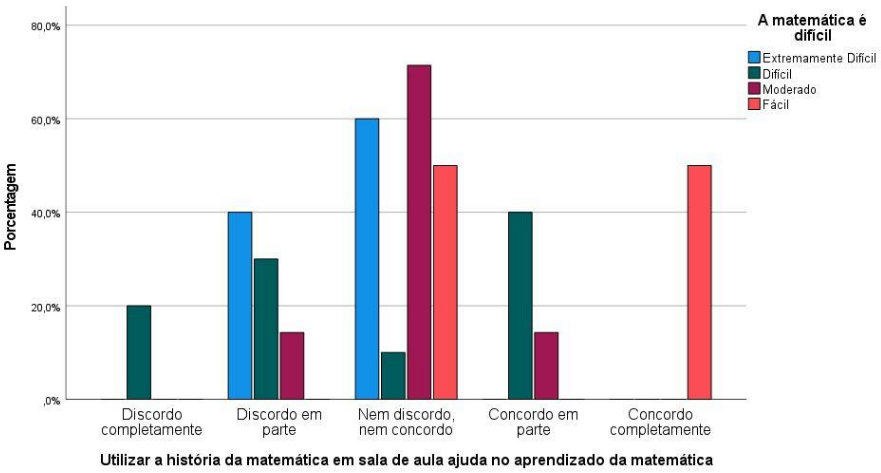
Fonte: Produzido pelo autor

Estas duas categorias culminaram nas seguintes variáveis: 1) Gostar de matemática; 2) Dificuldade em matemática; 3) A matemática está no cotidiano; 4) Só os melhores sabem matemática; 5) A matemática é uma ciência; 6) Saber matemática é saber resolver problemas; 7) Utilização da história da matemática em sala de aula; e 8) Utilizar fontes históricas ajuda no aprendizado em matemática.

O questionário e o teste aplicados antes da intervenção na *turma de controle* mostraram que a concepção dos alunos sobre gostar de matemática é caracterizada como ruim ou péssima (37,5%) e “boa” ou “muito boa” (37,5%) e 25% assinalaram razoável. Além disso, a concepção dos alunos sobre a dificuldade encontrada em matemática é descrita como difícil visto que 62,5% a consideram “extremamente difícil” ou “difícil”. Entretanto, a turma de controle considera que a matemática está presente em nosso cotidiano (95,8%) e que esta é uma ciência (100%). Outro fator importante é que para esses alunos a matemática é, essencialmente, saber resolver problemas (95,8%) e que somente os melhores da sala são bons em matemática (62,5%). Portanto, a concepção da matemática para estes alunos é que esta é uma disciplina muito difícil e não gostam de estudá-la; embora enxerguem a matemática em seu cotidiano, consideram que a matemática é uma forma de resolver problemas e que somente os melhores alunos são bons em matemática, ou seja, são bons em resolver problemas.

Ainda sobre a turma de controle, o que tange sobre a concepção a respeito da utilização da história da matemática em sala de aula de matemática, pode-se caracterizar a turma como *ausente* segundo o sistema de categorias supracitadas, isto porque, 41,7% dos alunos assinalaram a opção “Nem concordo, nem discordo”. Isto implica em dizer que a turma, naquele momento, não tem uma opinião formada sobre a utilização da história da matemática em sala de aula. Talvez um dos motivos para o alto índice seja a ausência da utilização desta metodologia por professores ao longo de vida escolar. Observamos o gráfico da figura 6 que mostra uma relação entre as variáveis “Dificuldade em matemática” e “A utilização da história da matemática em sala de aula”.

Figura 5: Relação entre a variável A utilização da história da matemática e a variável dificuldade em matemática



Fonte: produzido pelo autor no software SPSS

Este gráfico aponta que tanto os alunos que acham a matemática difícil quanto aqueles que a acham fácil, são divididos em opinião acerca da utilização da história da matemática em sala de aula o que reforça a hipótese da ausência desta metodologia em sala de aula de matemática durante a vida escolar do aluno.

O teste realizado com a turma de controle revelou uma média aritmética de 5,875 (em uma escala de 0 a 10) na assertividade das questões propostas. Além disso, os alunos demonstraram saber realizar operações com números inteiros e noção de aproximação. Entretanto, também demonstraram dificuldades em associar um número ao seu conjunto numérico; outro fator, e objeto de nosso estudo, são a respeito dos números reais. Observam-se os gráficos 7 e 8, são referentes a duas perguntas contidas no teste. No gráfico 7, são as respostas da pergunta: “Qual a forma correta de marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?”; no gráfico 8 são as respostas para a pergunta: *“A respeito dos números reais na reta numérica, assinale a opção correta.”.*

Figura 6: Qual a forma correta de marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?

Fonte: produzido pelo autor no Google Formulário.

Figura 7: A respeito dos números reais na reta numérica, assinale a opção correta.

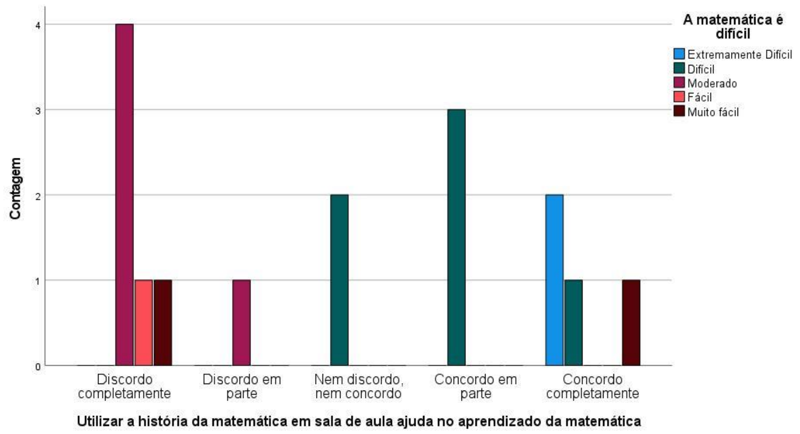
Fonte: produzido pelo autor no Google Formulário

Podemos notar que 50% da turma respondeu corretamente a forma para se marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica, entretanto 50% da turma, na pergunta seguinte, assinalaram a opção *"Os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não existe representação fracionária para eles."*. Daí surge algumas implicações: (1) a primeira delas é que embora os alunos se mostrassem saber como se marca o número $\sqrt{2}$ eles admitem, pela análise da questão seguinte, não saber que o número $\sqrt{2}$ é um número irracional; (2) admitir a alternativa acima como correta e de acordo com a implicação (1), o número $\sqrt{2}$ marcado por eles possui uma representação fracionária visto que é possível marcar este número na reta numérica. Estas duas implicações descrevem um conhecimento supérfluo e diversas lacunas de aprendizagem sobre o conteúdo de números reais.

O questionário inicial aplicado com a *turma de experimento* mostrou que esta turma se assemelha à turma de controle em alguns quesitos. 50% da turma acha a matemática “Difícil” ou “Extremamente Difícil” e apenas 18,8% considera que a matemática é “Fácil” ou “Muito fácil”. Entretanto, no tópico gostar de matemática, o número reduziu aquele apresentado na turma de controle, destacando apenas 37,5% dos alunos consideram que a matemática é péssima ou ruim e 43,8% gostam de matemática. Além disso, a turma de experimento concebe a matemática como uma ciência (100%) e que está presente em nosso cotidiano (100%). Também, de nosso interesse, 100% dos alunos acham que a matemática é, essencialmente, resolver problemas e 56,3% dos alunos concordam completamente que a matemática é para os melhores da sala. Portanto, apesar de aproximadamente metade da turma considerar matemática uma disciplina difícil, a turma de experimento mostrou gostar de estuda-la. Consequentemente, para a turma de experimento, a matemática seria uma ciência focado em resolver problemas (de matemática) e que está presente em nosso cotidiano, entretanto, para estes mesmos alunos, a matemática é entendida pelos melhores alunos da sala. Esta concepção acerca da matemática demonstra ser uma disciplina engessada, voltada para o uso de cálculos para resolver problemas e que possui implicações em nosso cotidiano embora, na visão dos alunos, não precisarem desta para sobreviver.

Embora a turma de experimento ter demonstrado gostar de matemática mais que a turma de controle, sobre a concepção do uso da história da matemática em sala de aula, os alunos caracterizaram como *ausente* (56,3% assinalaram “Nem Concordo. Nem discordo”) o que corrobora com a hipótese de que a turma, naquele momento, não tem uma opinião formada sobre a utilização da história da matemática em sala de aula. Talvez um dos motivos para o alto índice seja a ausência da utilização desta metodologia por professores ao longo de vida escolar dos alunos, assim como foi percebido com a turma de controle. Apenas 25% (quatro alunos) concordam completamente com a história da matemática em sala de aula. Observa-se o gráfico da figura 9 a seguir, que relaciona as variáveis “Dificuldade em matemática” e “Utilização da história da matemática em sala de aula”.

Figura 8: Relação entre as variáveis "Dificuldade em matemática" e "Utilização da história da matemática em sala de aula"



Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

O gráfico anterior aponta que os alunos que consideram que a matemática é extremamente difícil são os mesmos que concordam completamente com a utilização da história da matemática em sala de aula. Além disso, os alunos que consideram que a matemática é fácil discordam completamente sobre o uso da história da matemática em sala de aula. Neste sentido, pode-se concluir que aqueles alunos que não se enquadram em um "ensino direto" (cf. FOSSA, J. 1998) anseiam por diferentes metodologias nas aulas de matemática e, aqueles que não têm problemas conceituais com a matemática, atestam a discordância em utilizar uma metodologia baseada na história da matemática em sala de aula de matemática.

O teste realizado com a turma de experimento revelou uma média aritmética de 6,162 (em uma escala de 0 a 10) na assertividade das questões propostas. Além disso, os alunos se mostraram saber realizar operações com números inteiros e noção de aproximação. Entretanto, demonstraram dificuldades em associar um número ao seu conjunto numérico; Outro fator é o conhecimento acerca dos números irracionais e reais. Observamos o gráfico da figura 10:

Figura 9: Gráfico de pizza sobre a pergunta: Qual a forma correta de se marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?

Fonte: Produzido pelo autor no Google Formulário

Figura 10: Gráfico de pizza sobre a pergunta: "A respeito dos números reais na reta numérica, assinale a opção correta"

Fonte: Produzido pelo autor no Google Formulário

Estes gráficos pizza são referentes a duas perguntas contidas no teste. O primeiro gráfico denota as respostas à pergunta: "Qual a forma correta de marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?"; o segundo gráfico representa as respostas para a pergunta: *"A respeito dos números reais na reta numérica, assinale a opção correta."*. Estas perguntas inferiram diretamente na média aritmética desta turma visto que estas foram às questões com índice de maior erro entre os alunos. Segundo o gráfico anterior, apenas 23,1% dos alunos acertou a forma correta de se marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica e com um alto índice (61,5%) assinalaram a opção de que basta marcar um número aproximado a 1,4 para marcar o número $\sqrt{2}$. Este índice mostra uma lacuna de aprendizagem sobre o entendimento dos números irracionais em visualizar o número $\sqrt{2}$ como um número aproximado sem uma posição correta na reta numérica para este número.

Ainda nesse contexto, 38,5% assinalaram a opção *"Os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não existe representação fracionária para eles."*

E 38,5% também marcaram a opção "*Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele*". Estes dados demonstram que 61,5% da turma errou a resposta esperada optando por respostas equivocadas, tais como: o número racional não pode ser marcado na reta, pois não há espaços para representações fracionárias; os irracionais podem ser marcados, porém ao final dos números decimais; os números reais na reta numérica ficam próximos ao número zero; e os números irracionais não podem ser marcados na reta por não possuírem representações fracionárias para eles. Estas opções são, de um modo geral, antagônicas e todas erradas, o que demonstram uma lacuna de aprendizagem sobre os números reais na sua representação, classificação e construção desses números.

Com base nos dados recolhidos do questionário e teste inicial pudemos construir o quadro 5 a seguir, que resume a concepção das turmas a respeito da matemática e da utilização da história da matemática em sala de aula.

Quadro 5: Síntese das respostas do Questionário e Teste inicial

Turma de Controle	Turma de Experimento
Índice de participação: 26,66%; 37,5% gostam de estudar matemática, 25% acham a matemática moderada e 37,5% não gostam de estudar matemática; Os alunos entendem a matemática como uma disciplina difícil; A matemática está presente em nosso cotidiano e é uma ciência; Saber matemática é, essencialmente, saber resolver problemas e somente os melhores da sala são bons em matemática; Caracteriza-se como uma turma *ausente* na categoria *Concepção sobre o uso de história da matemática*; Média aritmética no teste: 5,875 (escala de 0 a 10); Os alunos sabem resolver problemas que envolvem operações entre os números inteiros e noção de aproximação; Dificuldades em classificar um número quanto ao	Índice de participação: 46,66% 43,8% gostam de estudar matemática, 18,8% acham a matemática moderada e 37,5% não gostam de estudar matemática; Os alunos entendem a matemática como uma disciplina difícil; A matemática está presente em nosso cotidiano e é uma ciência; Saber matemática é, essencialmente, saber resolver problemas e somente os melhores da sala são bons em matemática; Caracteriza-se como uma turma *ausente* na categoria *Concepção sobre o uso de história da matemática*; Média aritmética no teste: 6,162 (escala de 0 a 10); Os alunos sabem resolver problemas que envolvem operações entre os números inteiros; Dificuldades em classificar um número quanto ao conjunto em que pertence e dificuldades no conteúdo de números reais;

conjunto em que pertence e dificuldades no conteúdo de números reais;	

Fonte: Produzido pelo autor

Encerrado a discussão a respeito do questionário e teste realizados antes da intervenção, mostraremos os resultados obtidos durante a intervenção. Dividimos em duas partes, quais sejam: (1) Observações sobre o trabalho hermenêutico; (2) Os números reais. A primeira seção refere-se às observações realizadas pelo professor em sala de aula sobre o processo de leitura de textos originais por parte dos alunos, produções textuais e diálogos em sala de aula. A segunda seção refere-se ao impacto que a intervenção teve sobre o entendimento do conceito de número real.

4.3 Observações Sobre o Trabalho Hermenêutico

O objetivo desta seção é de analisar qual impacto realizado com a turma de experimento na leitura de textos originais no ensino de números reais em comparação à turma de controle. Para isso, definimos algumas questões de direcionamento ancoradas nas leituras e pesquisas realizadas por Jahnke *et al.* (1995), Jahnke, Arcavi, *et al.* (2000), Glaubitz (2010), Jankvist (2014) e Fossa (2020): (1) Como os alunos reagiram à utilização de textos originais em sala de aula?; (2) Os alunos são capazes de perceber elementos essenciais no texto original? e (3) Como os trabalhos realizados pelos alunos da turma de experimento se comparam aos trabalhos realizados com a turma de controle? A seguir, descreveremos as unidades de codificação e contextual:

Quadro 6: Unidades de Codificação e Contextual

UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	Expressões curtas que indiquem um sentimento, uma emoção, um conceito matemático, um entendimento entre outros aspectos.
UNIDADE CONTEXTUAL	Qualquer expressão que indique uma ação sobre um conceito estudado, sobre a fonte ou a sua leitura, sobre o autor, o contexto que a fonte está inserida entre outros aspectos.

Fonte: Produzido pelo autor

A partir dos questionamentos e das unidades de codificação e contextual, analisamos primeiramente a reação dos alunos com o uso de textos originais. Construímos um resumo estendido composto pelas paráfrases das observações realizadas pelo professor durante a intervenção (diário de bordo), após as aulas (gravador de voz), o discurso oral dos alunos (transcrição dos vídeos) e produção textual dos alunos (atividades realizadas). Após o resumo, são expostas as categorias e as análises.

O ensino remoto adotado pela escola, devido à pandemia, nos restringiu de maneira significativa no tópico sobre a reação dos alunos ao utilizar os textos originais. Por exemplo, não foi possível visualizar a expressão corporal dos alunos, nem mesmo sua atitude ao encarar um texto original. Todos os alunos mantiveram as câmeras desligadas. Além disso, alguns alunos possuíam computador para assistir as aulas e outros tinham apenas um celular com uma tela minúscula de apresentação. Portanto, a descrição da reação dos alunos foi feita com base em seus registros escritos e falados.

4.3.1 Reação dos alunos ao utilizar os textos originais

A seguir, o resumo destacado dos dados obtidos:

Durante a primeira semana foram utilizados dois textos, um original e outro secundário. O texto secundário (primeiro texto a ser trabalhado) foi recebido pela turma sem reclamações, nem apontamentos indiferentes. A fonte *Os Elementos*, de Euclides, provocou receio por parte dos discentes e comentários como: “olha só como esse livro é grande? Meu Deus!”; “*Vigi*, professor! Vamos estudar isso tudo não, né?”; “*Ave Maria*, professor! Esse homem escreve difícil demais! *Nam!*”. Frases como estas já eram esperadas pelo pesquisador, tendo em vista que é uma fonte com uma linguagem a qual os alunos não estão acostumados. Ainda nesse cenário, dos onze alunos que responderam à pergunta sobre características do livro, seis buscaram respostas na internet (respostas bem definidas, bem explicadas e que remetiam a um entendimento maior sobre o livro) e cinco responderam as características que, de fato, chamaram-lhe à atenção. A turma gostou das perguntas norteadoras. Na segunda semana, foi trabalhado o texto *Liber Abaci*, de Leonardo Pisano’s. A primeira observação interessante aqui foi o número de alunos participando e discutindo sobre esta fonte que cresceu – se comparada à discussão realizada na semana anterior. Quando perguntados sobre as características do texto que mais lhe chamaram à atenção, as respostas estavam associadas às ilustrações utilizadas no texto e também à linguagem refinada. Além disso, sobre esta pergunta, dos dezenove alunos que participaram da discussão sobre o texto original, apenas dois apresentaram respostas retiradas da internet o que demonstrou uma redução significativa no número de respostas advindas da internet. O terceiro encontro, utilizamos dois textos, um secundário e outro original. A leitura do texto secundário também foi encarada pelo alunado sem espanto. Uma característica interessante percebida nesse momento foi a independência apresentada pelos alunos nas tomadas de decisão sobre a fonte: ao receberem a fonte, os alunos já estavam pesquisando sobre seu autor, o contexto histórico em que o autor está inserido. Os discentes também intensificaram suas falas afirmando que a aula de matemática era, na verdade, uma aula de Filosofia:

"Professor, eu nunca imaginei que em uma aula de matemática eu ia ver isso" (Aluno B); "Isso? Isso o quê" (Professor); "Isso ai, prof.: um monte de perguntas assim, bem pensativa e tal... a gente tudo queimando os neurônios" (Aluno B). Diferente das duas primeiras semanas, em que os alunos se restringiam a responder às questões sem discussão ou questionamentos, na terceira semana pudemos perceber uma característica importante: a pergunta. Os alunos passaram a questionar mais durante a leitura realizada tanto pelo texto original quanto pelo secundário. Inicialmente, no texto original de Charles Méray, os alunos disseram que não estavam entendendo e surgiram, então, diversas perguntas sobre os termos utilizados por Méray. Os alunos se mostraram confusos ao tentarem lembrar termos como "quantidade comensurável e incomensurável", "variável" entre outros. Na quarta semana, ao mencionar aos alunos que continuariam trabalhando com fontes originais, quatro destes demonstraram certa resistência com comentários do tipo: "De novo, professor? *Nam!*" (Aluno G), "Professor eu já *tô* cansado e o senhor vem com aqueles livros difíceis. *Aff*!" (Aluno F). Entretanto, a maioria dos participantes do debate daquele momento demonstrou satisfação ao utilizar as fontes originais: "Não, véi! É bem legal assim." (Aluno B), "É! Porque assim, eu fico pensando mais por causa das perguntas, ai a pessoa aprende mais, né?" (Aluno A), "É verdade! É bem legal assim. A gente fica discutindo e tal. Acho massa! Só não gosto *na* parte da escrita professor. Tira as atividades escritas, por favor!" (Aluno E). Este pequeno debate foi interessante, pois emergiu a partir de um comentário do professor e alguns alunos, então, mostraram suas concepções acerca da utilização de textos originais. Também vale a pena ressaltar que o número de alunos que responderam à produção textual são sempre superiores ao número daqueles que discutem verbalmente o texto original. Ainda durante a quarta semana, foi entregue o texto de Richard Dedekind. Esta leitura foi caracterizada por ter promovido uma intensa discussão a respeito da reta numérica e a ideia de continuidade. O professor observou que dois dos quatro alunos que haviam resistido ao uso da fonte original, participaram desta discussão. Na quinta e última semana, foi trabalhada a fonte do autor Joseph W. Dauben. Com esta fonte discutiu-se a ideia de infinito, sequência e limite segundo Cantor. Esta ideia foi importante, pois os alunos discutiram sobre a distância entre dois termos no infinito, em uma sequência infinita de termos, ser menor que um determinado ε dado.

Compartilhado o resumo, pudemos, por fim, construir as categorias que possuem como base em nosso referencial teórico, o resumo supracitado e a leitura realizada pelos pesquisadores sobre os dados obtidos.

Quadro 7: Categorias e descrição indutivas

CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
O uso de textos originais em sala de aula gera um ambiente dinâmico e questionador.	Esta categoria é descrita como expressões ou comportamentos que indiquem independência em tomadas de decisão, criação de hipóteses e comparações.
Frequentemente o uso de textos originais em sala de aula gera comparações com aulas de Filosofia e História.	Expressões ou comportamentos que indiquem algum comparativo com outras disciplinas.
O que encanta os alunos na primeira visualização é a linguagem, estrutura do texto e imagens.	Esta categoria é criada em resposta aos comentários dos alunos sobre a impressão que tinham do texto ao visualizar ela pela primeira vez.
Alguns alunos mostraram resistência ao uso de textos originais quando este já havia sido trabalhado muitas vezes.	Esta categoria é descrita como expressões comportamentais e expressões faladas sobre o uso de textos originais.

Fonte: Produzido pelo autor

Com as categorias criadas, pudemos realizar a análise. Em primeiro lugar, a observação a ser feita é sobre a primeira categoria. De acordo com Jahnke et al. (2000) e Glaubitz (2010), a utilização de fontes originais gera um ambiente agitado em sala de aula, dinâmico. De fato, em nossa turma de experimento este aspecto foi vislumbrado. Embora não estivéssemos em sala de aula presencial, o ambiente virtual proporcionou uma dinâmica com interação entre professor-aluno e aluno-aluno. Os alunos frequentemente discutiam as questões de direcionamento com o professor e entre eles, mostrando suas ideias e concepções. Por exemplo, as falas dos alunos a seguir mostram como esta dinâmica ocorreu.

Aluno A: Seja *x_0* tal que *x* é qualquer número natural. Então, qualquer um vai *tá* lá, eu acho;
Aluno B: É, professor! Seja *x* qualquer número natural. Então, o sucessor dele vai nos naturais. *Tipo*, se pegar 1000, o 1001 vai tá lá. Se pegar um número bem grandão, então, o sucessor dele também vai *tá* lá.
Aluno H: É, professor! É obvio.
Aluno A: Mas ele quer que a gente pense em uma linguagem mais difícil. *Né*, professor?
Professor: Não é bem uma linguagem difícil; é uma linguagem um pouco mais simbólica.
Aluno A: Então, mais difícil. (Risos.)
Aluno C: Pode colocar *x+1* para representar o sucessor de x, professor? Eu lembro que o senhor falou disso antes.
Aluno A: Eu acho que *tá* errado.
Professor: Alguém mais acha que o aluno C está errado?
Aluno G: Eu também acho que *tá* errado, sei lá...
Professor: Mais alguém?
(Silêncio).
Professor: Ele está correto, gente! *x+1* é o sucessor de x. Então, podemos usar, sim.

Aluno C: *Tá* vendo ai?!
Vários alunos: (Risos.)
Aluno C: Faz assim, professor, coloca: "Seja x nos naturais, então, $x+1$ é natural."
Professor: *Show de bola!* Vamos tentar colocar em uma simbologia melhor.
Aluno A: Troca o nome pelo símbolo do conjunto, professor. Isso!
Aluno D: Poderia colocar uma junção dos dois antes?
Professor: Como assim?
Aluno D: Não, professor, sei não.
Professor: Não. *Vamos lá! D*iga! Pode dizer. Não se preocupe em errar; o erro é importante. Temos que errar para saber onde devemos acertar. *Vamos lá*! Diga!
Aluno D: Assim, tipo... Usar aquelas coisas do símbolo do "ezinho" quando a gente diz que algo *tá* em um conjunto, sabe? Não. *Tô* falando besteira.
Professor: Olha aí! *Tá* saindo coisa daí. Você não está errada. Desenvolva!
Aluno A: Ah, aluno D, entendi. Tipo... professor, ela quer dizer assim: que se um *numerozinho* ai *tá* no conjunto dos naturais, *né*? Então, o sucessor também vai *tá* lá, mas com aqueles símbolos lá, de pertencer parece.
Aluno D: Isso, professor! Eu fiz aqui. Ficou assim; vou colocar aqui no *chat*: "Se $x \in$ N então $x+1 \in$ N".
Aluno A: Isso, isso.
Professor: Boa, gente! *Tá* vendo, aluna D? Vamos discutir; todos vocês sabem de algo, cada um dia uma coisa e vamos construindo o conhecimento. Está totalmente correta. Essa simbologia foi perfeita!

A discussão anterior foi realizada com o contato feito por eles sobre a fonte secundária de Bertrand Russell na terceira semana. A problemática aqui era sobre os axiomas de Peano, o qual os alunos foram indagados a como escrever, simbolicamente, o axioma dois de Peano. Esse diálogo foi feito via discussão oral em sala de aula remota. Este é, portanto, um exemplo de como foi realizada a aula durante as cinco semanas. Como podemos ver, os alunos frequentemente discutem entre si sobre o problema posto pelo professor. Eles (se) questionam para verificar se seu raciocínio está correto bem como questionam conceitos mal entendidos.

Entretanto e geralmente, na discussão realizada pelos alunos, foi possível observar que são os mesmos alunos (Do Aluno A ao aluno H) com participações esporádicas de outros alunos. Entendemos que não podemos atribuir a falta de uma discussão maior entre os alunos apenas pelo uso da fonte original. Como dito, o ensino remoto impôs certas condições aos alunos que, em muitos casos, afastaram os alunos das salas de aula. Consideramos que a participação, mesmo que, com poucos discentes foi positiva e significativa em comparação ao ensino convencional ministrado na sala de controle.

Outro aspecto a se observar é o fato de, frequentemente, os alunos compararem a aula de matemática com o uso de textos originais com as disciplinas de Filosofia e História. Entendemos que há, portanto, dois pontos: um positivo e outro negativo. O ponto positivo diz respeito ao fato de o aluno considerar a matemática como outras ciências de outras áreas. Além disso, a comparação é sempre feita como uma forma de estar pondo o aluno em uma situação questionadora e problemática para ele pensar. O ponto negativo é, necessariamente, antagônico ao primeiro. À medida que o aluno compara a aula de matemática como sendo de Filosofia ou História pelo fato de o professor colocar o aluno em uma situação questionadora implica que, frequentemente, o professor de matemática não proporciona um ambiente questionador para o aluno. O aluno recebe a informação codificada nas palavras do professor sem questionamento, problemática ou dinâmica alguns. Fossa (2020) corrobora que o ambiente proporcionado pelo uso de textos originais em sala de aula é um excelente antídoto para a forma tradicional de ensinar matemática em sala de aula. Em particular, aos números reais.

A terceira categoria é de se esperar em alunos do ensino médio. Isto, inclusive, pode ser caracterizado por uma estrutura interna. Os alunos, em todas as fontes utilizadas, responderam que as primeiras características que mais lhes chamaram à atenção foram a linguagem e as imagens descritas no texto. Embora esta categoria seja óbvia, está posto aqui para enfatizar o uso de textos originais acessíveis aos alunos como colocam Jahnke (1993), Jahnke et al. (2000), Glaubitz (2010), Jankvist (2014) e Fossa (2020). Segundo Glaubitz (2010), o aluno deve caminhar livremente no processo hermenêutico de interpretação e, por isso, sua linguagem deve vir em sua língua nativa.

Também fizemos referência ao uso da história apenas como elemento motivacional. Defendemos a posição de que este pensamento de utilização da história da matemática em sala de aula está ultrapassado, porém, também concordamos que não deve ser esquecido, senão ajustado e complementado com uma historiografia atualizada. Em nossa pesquisa, observamos que ao utilizar imagens em *slides* e pesquisas na *internet* como elementos visuais empolgam os alunos. Contudo, este momento deve ser oportunizado conjuntamente com outra metodologia de história da matemática (a utilização de fontes originais, por exemplo) para evitar possíveis limitações a respeito da história da matemática.

Sobre a última categoria, embora tenha acontecido com poucos alunos, houve uma pequena resistência ao uso das fontes originais no penúltimo encontro. Quatro alunos verbalizaram seu descontentamento com o uso de textos originais. Talvez um de nossos erros tenha sido a utilização de diversas fontes originais em nossa pesquisa, os pesquisadores da

Educação Matemática que se debruçarem sobre o problema podem tentar diminuir a quantidade de textos e verificar sobre a concepção da resistência ao uso por parte dos alunos. Outros fatores também podem gerar este descontentamento com o uso das fontes: as fontes escolhidas possuem uma linguagem difícil de entender e consequentemente afasta os alunos ao invés de aproximá-los; o aluno não gosta desta metodologia e prefere o ensino tradicional entre outros.

Como podemos visualizar, os fatores que podem influenciar nesta resistência apresentada pelos alunos são muitos, incluem-se aqui as influências internas quanto as externas (o método de ensino). Contudo, também houve alunos que defenderam o uso de textos originais por proporcionar um ambiente dinâmico e questionador como foi analisado na primeira categoria. Além disso, o professor observou que, dos quatro alunos que verbalizaram seu descontentamento com o uso de textos originais, dois participaram de discussões outrora com seu uso a partir das questões de direcionamento.

Portanto, podemos elencar as seguintes estruturas como forma de análise a partir das categorias:

(a) Um ambiente dinâmico e questionador é positivo para os alunos. Inclusive, este é um dos motivos para aceitação do uso de textos originais em sala de aula;

(b) Aulas questionadoras sugerem comparações às aulas de Filosofia – por serem aulas com perguntas frequentes e questionamentos reflexivos. Também implica que as aulas de matemática são, frequentemente, aulas não questionadoras, mas aulas “engessadas”;

(c) O primeiro aspecto que chama a atenção dos alunos ao visualizar os textos originais são as imagens e a estrutura da linguagem;

Concluímos que a reação dos alunos foi positiva quanto ao uso de fontes originais em sala aula proporcionando, dessa forma, um ambiente de aprendizagem matemática mesmo com certa resistência (mínima) entre os alunos. A seguir, descreveremos como se deu a interpretação do aluno sobre a fonte destacando seu entendimento sobre os elementos essenciais do texto.

4.3.2 Como se deu o entendimento de elementos essenciais do texto

Antes de iniciarmos nossa análise, é importante saber o que entendemos por essencial em cada texto original e secundário utilizado. Para isso, construímos um quadro que descreve estes elementos.

Quadro 8: Descrição dos Elementos Essenciais do Texto

DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS ESSENCIAIS DO TEXTO	
CARACTERÍSTICA GERAL	
Julgamos por essencial na leitura de um texto original por meio da abordagem hermenêutica dois aspectos principais: (1) Entendimento do conceito matemático; e (2) Compreensão entre a cultura síncrona e diacrônica exposta em Jahnke et al. (2000).	
TEXTOS ORIGINAIS OU SECUNDÁRIOS	ELEMENTOS ESSENCIAIS
Os Elementos, de Euclides. (Texto Secundário)	(1) Compreender os conceitos de número, magnitude, segmento comensurável e incomensurável. (2) Compreender a estrutura formal do texto como uma característica da época de Euclides, entender que este texto reúne parte do conteúdo matemático estudado na época de Euclides, mostrar que os recortes trabalhados são parte de duas teorias distintas sobre razões e proporções, e entender a influência que este texto teve nos séculos sequentes.
Os primórdios da teoria dos números - Parte A, de John Fossa. (Texto Secundário)	(1) Compreender algumas representações de sistemas numéricos de culturas antigas. Entender a influência que a linguagem tem sobre o conceito o conceito de número, e reciprocamente, com as palavras numéricas. (2) Compreender que o texto faz parte de uma coleção “Arquivos para a História da Teoria dos Números e da Lógica”, o qual os alunos têm acesso ao Volume 1 e, por isso, compreende conceitos como número, palavras numéricas, sistemas de numeração e culturas antigas, que são primordiais para o estudo sobre a história da matemática. Entender que o texto foi escrito para professores e simpatizantes da matemática e os motivos do autor para escrever o texto.
Liber Abaci, de Leonardo Pisano. (Texto Original)	(1) Compreender as figuras indianas; Entender sua importância e consequências nos trabalhos de matemática e na vida cotidiana. Compreender as operações definidas nos números inteiros positivos e racionais positivos. (2) Compreender que o texto foi escrito com a finalidade de mostrar recursos aritméticos sem precisar do uso do ábaco e, para isso, introduziu um sistema de numeração mais simples. Compreender que o autor do texto é filho de mercador o que o possibilitou contato com povos árabes e assim obter influências desses.

Introdução à Filosofia Matemática, de Bertrand Russell. (Texto Secundário)	(1) Compreender o surgimento de axiomas para os números naturais, denominados de axiomas de Peano, e suas consequências para a própria matemática. Entender propriedades dos números naturais e como estas se estendem aos números racionais. (2) Compreender que o texto foi escrito com finalidade de oferecer um conhecimento sobre os fundamentos da matemática que, antes, era entendido por poucos que dominavam o simbolismo lógico. Entender também possíveis relações intrínsecas entre Filosofia e Matemática.
Introdução às técnicas de demonstração matemática, de John Fossa. (Texto Secundário)	(1) Melhorar a compreensão, a partir de um contexto situacional envolvido na fonte, sobre o método da indução exposto nos axiomas de Peano. (2) Por trabalharmos com esta fonte como consulta a um contexto situacional (analogia que o autor faz entre as propriedades da indução a ser verificadas e as propriedades para que todas as peças de dominós empilhadas sejam derrubadas em uma situação hipotética) não foi utilizada a partir da leitura hermenêutica.
Remarques sur la nature dês quantités, de Charles Méray. (Texto Original)	(1): Compreender os conceitos de sequência e série. Entender o conceito de incomensurabilidade como um limite de uma sequência de variáveis convergentes. (2): Compreender que este texto publicado em uma revista francesa foi um dos primeiros artigos a tratar sobre a natureza incomensurável como um limite de uma sequência. Tratando assim de um dos primeiros textos sobre os irracionais. Além disso, é essencial entender a situação que a França estava vivendo na época de Méray e suas possíveis relações com seu esquecimento com o movimento científico centrado na Alemanha.
Essays on the theory of numbers, de Richard Dedekind. (Texto Original)	(1): Compreender o conceito de continuidade da reta numérica assim como o princípio da continuidade definido por Dedekind e usado para definir os números reais como a noção de *corte de Dedekind*. (2): Compreender que o texto escrito por Dedekind foi uma resposta dada por a ele ao se deparar com uma falta nas palavras dele, de uma base realmente científica e rigorosa para a aritmética. Além disso, é importante que o aluno entenda que Dedekind, assim como outros matemáticos alemães, estavam no centro da produção científica da época e teve contato com diversos matemáticos profissionais e especialistas.
Georg Cantor: His mathematics and Philosofhy of the Infinite, de Joseph Dauben. (Texto Secundário)	(1): Compreender os números reais como um limite de uma sequência infinita de termos racionais e a simbologia utilizada por G. Cantor. Também, entender o conceito de

	enumerabilidade e o porquê do conjunto dos números reais ser não enumerável. (2): Conhecer a biografia de Georg Cantor, suas inspirações e questionamentos. Identificar Cantor como pessoa ativa no movimento em busca de um conceito rigoroso, principalmente sobre o infinito.

Fonte: Produzido pelo autor

Agora que o leitor pode identificar alguns elementos essenciais e fundamentais sobre a compreensão requisitada ao aluno do grupo experimental, realizaremos a análise. Para isso, elencamos as unidades de codificação, contextual e analítica e em seguida escolhemos a Análise Explicativa por ser tratar de uma análise sobre o contexto (MAYRING, 2002).

Quadro 9: Unidades Contextual e Analíticas

1ª SEMANA		
TEXTO ORIGINAL: Os Elementos, de Euclides.		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“magnitudes”, “comensuráveis”, “incomensuráveis”, “número”, “régua”, “unidades”, “segmento”, “medidas”, “Grécia”, “quantidade”, etc.	Expressões que indiquem conceitos de magnitudes, conceitos de comensurabilidade, expressem valores a respeito da metodologia e/ou da disciplina e/ou da fonte histórica, expressões que carreguem pontos de ancoragem ou estranhamento sobre conceitos.	“saquei”: entendi; “Nam”: não; “todinha”: toda; “Ham?”: expressão que indicada quando não se entende o que o interlocutor verbaliza; “Pera”: esperar; “Oxe”: gíria nordestina que, aqui, significa espanto. “Prof.”: expressão para abreviatura da palavra professor; “buguei”: expressão que faz referência a algo que parou de funcionar, um defeito repentinamente.

Fonte: Produzido pelo autor

Elencadas as unidades, podemos realizar nossa análise explicativa. Em primeiro lugar, vamos destacar o conhecimento matemático requerido com a fonte *Os Elementos*. Entendemos que é importante para o aluno entender a diferença entre segmento comensurável do incomensurável, bem como entender o segmento e o número como naturezas distintas embora relacionadas. Neste sentido, durante a discussão, obtivemos o seguinte diálogo ao ler as definições e debates em relação às estruturas do livro V, VII e X:

Professor: E então, o que é uma magnitude?
Aluno C: A menor parte de um número?
Aluno A: A menor parte de um segmento?
Prof: Hum... interessante.
Aluno C: Não. Pera! Nesse segundo livro que vimos ele não fala de magnitude; só no outro.
Aluno A: Uhum. Tipo... vi que no primeiro tem letras maiúsculas e tal. E a gente vê em geometria que letra maiúscula é segmento. Né, professor?
Professor: Boa observação, Aluno A. Ótima observação, Aluno C. Perfeito!
Aluno A: Ahhh, prof., então o segundo livro fala sobre números e outro sobre geometria e tal, né?
Professor: Perfeito.
Aluno C: Ah, prof., saquei! Magnitude tem a ver com geometria, com segmento, né?
Professor: Boa!
Professor: Vamos agora para o livro VII. O que é um número para Euclides?
Aluno A: Quantidade composta de unidade.
(Silêncio)
Professor: Mais alguém?
(Silêncio)
Professor: E o que é unidade?
Aluno A: Coisas que a gente pode contar?
Professor: E o que é que podemos contar?
Aluno A: Tudo. Tipo, tudo que a gente vê. Sei lá!
Professor: Isso é interessante. Por que, por exemplo, e os números negativos? São números para Euclides?
(Silêncio)
Professor: E ai? E o zero? É um número para os gregos?
(Silêncio)
Aluno D: Eu acho que não, prof. Tipo, número é uma quantidade de unidades e, tipo, os números negativos iam ser formados de... unidades? Nam, sei não. Me embaralhei todinha.
Aluno A: Composta, então, de unidades negativas?
(Silêncio)
Professor: E o que são unidades negativas?
Aluno A: Tipo -1, -2, -3, -4 ... eles são compostos da unidade negativa -1, não?
Professor: Mas olha, você não disse que unidade é aquilo que podemos contar? Então, como podemos contar a unidade -1?
(Silêncio)
Professor: Oi? Estão ai ainda? (Risos.)
Aluno A, C e D: Sim, sim, prof.
Professor: E ai, gente? E os demais? Aluno H? Aluno J? Cadê vocês?
Aluno J: Oi, prof.! Tô aqui.
Professor: E ai, o que você acha dessa nossa discussão?

(Silêncio)
Professor: Vamos lá, gente!
Aluno D: Prof., era isso mesmo que eu queria dizer.
Professor: Ham? Oi, aluno D, diz.
Aluno D: Nisso ai dos números negativos, tipo, eu acho que ai é a mesma questão lá do que a gente tava falando sobre o Egito e a Mesopotâmia: eles não sabiam o que era número negativo e nem o zero eu acho.
Aluno A e C: Entendi.

Como se pode observar, a discussão foi realizada entre três alunos (Alunos A, C e D) representando pouca participação neste momento da discussão. Entretanto, a produção textual foi respondida por onze alunos sobre este tema. Na produção textual, ao perguntar sobre "O que é magnitude, segundo Euclides? Responda com seu vocabulário" e quando perguntados sobre "o que é uma magnitude múltipla de outra" oito alunos responderam a mesma definição que se encontra no Livro V redigido por Euclides e três alunos (alunos A, C e D – os mesmos que participaram da discussão em sala de aula) responderam, respectivamente, que era um e que era um segmento maior quando esse é medido exatamente por um menor que ele. Na produção textual, quando perguntados a respeito da diferença entre magnitudes comensuráveis e incomensuráveis, sete alunos responderam exatamente a definição I encontrada no livro X; um aluno respondeu não saber e três responderam que magnitudes comensuráveis eram duas medidas que ao encontrar uma terceira medida que mede as duas primeiras, então, estes serão comensuráveis. Medidas incomensuráveis são medidas que não pode encontrar essa terceira medida que mede os outros dois (Alunos A, C e D).

Os únicos alunos que responderam a partir do seu vocabulário foram os mesmos alunos que participaram da discussão e isso, provavelmente, não seja coincidência. Isso demonstra inclusive que os alunos que não participaram da discussão não estavam confiantes em responder com seu vocabulário e, por isso, recorreram à definição própria do livro. Essa falta de segurança talvez seja um de que a turma não assimilou o conceito de magnitude (consequentemente o conceito de magnitudes comensuráveis) e isto pode ter decorrido de vários fatores: Estavam realizando outras tarefas no momento da discussão; Conectividade oscilatória, o que gera má transmissão de dados de internet; Falta de interesse na disciplina e/ou no método; Ambiente desfavorável para estudar; O professor não proporcionou perguntas que guiassem a interpretação do aluno sobre a fonte; entre vários outros fatores.

Especificamente falando sobre o entendimento dos conceitos essenciais, percebemos que a assimilação por parte dos alunos melhora quando há levantamento de hipóteses, comparações e confronto entre ideias, como afirma Jahnke *et al* (2000). Segundo estes autores, a interpretação sobre um texto original é um processo circular em que os sujeitos (os alunos) levantam hipóteses e comparam com o texto original. Outro fator favorável à interpretação é o debate gerado pela leitura da fonte. O debate surge na eminência do aluno expressar uma ideia, um conceito que verifique sua validade, falhas e relevância para o grupo ou para a própria construção do conceito.

Como vimos na discussão anterior (apenas um recorte de uma discussão maior), o diálogo ocorrido sobre as magnitudes foi essencial para seu entendimento. Como relata o aluno C: "*Ah, prof,. Saquei! Magnitude tem a ver com geometria, com segmento, né?"* depois de uma discussão que ele interagiu com o Aluno A. A frase supracitada dita pelo aluno C, significa: "Professor, eu entendi. O conceito de magnitude tem a ver com segmentos, medidas, ou seja, geometria". Portanto, o diálogo foi fundamental para se entender os elementos essenciais, em particular, desta fonte.

A partir do diálogo anterior, o professor continuou e explicou com maior clareza a distinção sobre as magnitudes e os números conceituados por Euclides. O professor questionou a turma sobre como devemos medir as magnitudes. O diálogo que segue é uma continuação do diálogo anterior com uma diferença de apenas uma explicação do professor sobre as magnitudes.

.

Professor: Vamos supor que temos essa magnitude AB desenhada de preto na tela do computador. Com faremos para medir essa magnitude?
(Silêncio)
Professor: E aí? Como faremos?
Aluno A: Professor... como assim?
Professor: Olha, suponha que você tem uma magnitude e você quer sabe qual sua medida, ou seja, quanto à magnitude mede.
Aluno C: Eu pegaria uma régua. (Risos.)
Alunos A e D: (Risos.)
Professor: Boa iniciativa, aluno C.
Aluno A: Oxe, professor, eu pensava que era algo bem complexo (risos).
Aluno D: Né?! (Risos).
Professor: Não, calma. (Risos.) Quero saber o tamanho mesm; foi uma boa iniciativa. O que o aluno C fez, embora brincando, mas fez corretamente, foi pegar outra magnitude, digamos CD, e comparar com a magnitude AB e observar quantas vezes a régua cabe em AB.
Aluno A: Ah, prof. mas isso é óbvio.
Professor: Que bom que você acha, Aluno A. Então, vamos começar a pensar mais um pouquinho...
Aluno D: Ih, lá vem.

Professor: Olha, e se essa régua não cabe em AB? ou seja, e se a magnitude CD não cabe em um número exatos de vezes em AB?
Aluno C: Eu jogava a régua fora e pegava outra que coubesse.
Aluno A: É verdade, eu também faria isso. (Risos.)
Professor: (Risos.) E se você tivesse somente esta régua à sua disposição? O que faria?
(Silêncio)
Professor: E ai?
Aluno A: Iguala? Tipo, faz a equação de primeiro grau?
Professor: Como assim?
Aluno A: Tipo, coloca x no que tá faltando... ai pega a medida total de AB e igual, não?
Aluno D: Mas se o prof. já tá perguntando como medir o segmento ai AB então a gente não sabe a medida toda, né?!
Professor: Exatamente! Eu entendi o que você falou, Aluno A. Vale salientar que esse pensamento é bem moderno, um pensamento bem algébrico. Show de bola! Mas é isso, nós não temos a medida completa e é isso que queremos encontrar.
Aluno D: Prof., eu teria dividido, então, a régua em duas partes e ver se essa metade cabe no resto.
Professor: Boa aluna D. Show de bola! Ou seja, vamos supor que temos duas partes inteiras de CD mais a metade de CD. Ou seja, isto que o aluno D falou significa que nós estamos pegando uma terceira magnitude e primeiro, a gente ver que essa terceira cabe em um número de vezes exatas em CD, né isso? Concordam?
Aluno D: Isso, isso, porque se a gente tá dividindo em dois é porque essas duas partes são iguais né?
Aluno A: Isso, isso.
Professor: Exatamente, boa. Ou seja, essa terceira parte que mede CD ela também vai medir a parte que sobra e consequentemente mede a parte AB todinha.
Aluno C: Como assim? A partezinha não mede somente o resto não? Porque mede todo?
Professor: Porque já que ele mede a partezinha sobrando e nós sabemos que ela também mede CD. Então, significa dizer que essa metade cabe em AB, olha. No caso aqui, nós temos 5 metades, porque são duas...
Aluno C: Ah! Entendi professor. Entendi.
Professor: Show de bola galerinha. Uma outra pergunta que é interessante refletir é:
Aluno D: Lá vem de novo.
Professor: (Risos.) Calma. Olha, uma outra pergunta interessante é: Será que existe uma terceira medida dessa que caiba certinho em CD e que mede AB sempre?
Aluno D: Se o senhor tá perguntando é porque não tem. (Risos.)
Aluno A e C: (Risos.) É verdade.
Professor: Vamos ler a primeira definição do livro X dos Elementos de Euclides. Vamos lá.
Professor: E ai, o que acharam?
(Silêncio)
Professor: Será que esta definição tem alguma coisa a ver com o que nós estávamos conversando?
Aluno A: Professor, entendi não. Tipo... ele fala aqui de magnitudes ditas comensurável que são medidas pela mesma medida. Ham? Tipo, medidas que podem ser medidas por elas mesmo? Entendi foi nada.
Aluno D: Eu mesmo não entendi nada. Só sei que existe magnitudes que são chamadas de comensurável.
Aluno J: E tem outras magnitudes que são chamadas de incomensuráveis pelo que entendi.

Professor: Boa, aluno J. Apareceu! Show!!! Façam o seguinte. Vão no Google e pergunte o que é a palavra comensurável.
Aluno A: Diz aqui que tem ou admite medida comum. Diz tipo, Aritmética cuja medida, em relação a uma unidade previamente fixada, é um número racional.
Aluno C: Tem também possível de ser medido, comensurado, o que pode ser medido.
Professor: Boa galera, isso mesmo. Aquilo que pode ser medido. Ou seja, magnitudes comensuráveis são o que?
Aluno A: São coisas que podem ser medidas, né?
Professor: Isso, boa. Agora repare que ele diz magnitudes no plural, ou seja, com duas ou mais magnitudes, né isso? Então quando ele diz assim: são medidas pela mesma medida. O que significa?
(Silêncio)
Professor: E ai, alguém?
Aluno A: Tipo, eu entendi que são no caso várias medidas né? Que elas são medidas pela mesma medida. Oh, magnitudes. Tipo, tem um pedaço que mede as magnitudes.
Aluno D: Ah prof., então é aquele negócio lá do desenho que tem uma medida, tipo, a terceira. Como era? Uma medida lá que era bem pequena e eu lembro que media os dois, AB e CD.
Professor: Isso mesmo, Aluno D. Show!
Aluno C: Ah! Aquilo que o senhor me explicou de ser a metade e tal ai divide tanto um médio lá quanto o grande.
Aluno A: CD e AB.
Aluno C: Isso, isso.
Professor: Isso mesmo galera, fazendo referência aquele mesmo problema que tínhamos, as magnitudes AB e CD são ditas comensuráveis por este motivo. E o que são, então, as magnitudes incomensuráveis?
Aluno A: São aquelas que não podem ser medidas?
Professor: Boa, isso mesmo. Alguma dúvida?
(Silêncio)
Professor: E ai? Alguma dúvida? Nenhuma?
(Silêncio)
Professor: Eu tenho uma então. (Risos.)
Aluno C: (Risos)
Professor: E como sabemos que EXISTE magnitudes incomensuráveis? Ou seja, como sabemos que existem magnitudes que não podem ser medidas?
(Silêncio)
Aluno D: Ei prof., buguei. Sério.
Aluno A: Oxe. Que onda professor. (Risos)
Aluno C: Ué que estranho. (Risos.)
Aluno D: Né?!
Professor: Pois é, gente! Vamos estudar um pouco mais sobre isso. Mas deixa eu dá um *spoiler*, o número $\sqrt{2}$, por exemplo, representa a medida de um segmento incomensurável, isto é, não pode ser medido

As duas discussões supracitadas, embora longas, não poderiam ser retiradas de seus contextos e por isso foram compartilhadas na íntegra. Esta última discussão nos revela alguns aspectos importantes. Em primeiro lugar, os alunos não dialogam com as palavras encontradas no texto (magnitudes, por exemplo) e preferem dialogar com um vocabulário que o aluno é mais adaptado. A palavra “régua” foi utilizada várias vezes no sentido de magnitudes. Segundo Glaubitz (2012) a estranheza com palavras, conceitos ou contextos são importantes visto que elementos estranhos possuem pontos de ancoragem. Isso demonstra que o aluno assimilou ao ponto de ancoragem (relaciona o que sabe de antemão com o elemento desconhecido, criando um laço entre eles). Entretanto, no uso da primeira fonte, os alunos se distanciaram de elementos estranhos como “magnitudes”, “comensuráveis” e buscaram elementos comuns a eles para expressar estes conceitos. Esta observação também ganha destaque porque adiante, como veremos, os alunos esqueceram o que significa os conceitos de magnitudes comensuráveis e incomensuráveis.

Outro aspecto é o destaque sobre a leitura do recorte do Livro X, em particular a primeira definição. Observamos que a primeira leitura sobre o recorte do Livro X não foi entendida pelos alunos. Esta dificuldade era esperada pelos pesquisadores por ser uma linguagem refinada. Consequentemente, o conceito apenas foi entendido a partir das perguntas e indagações que o professor inferiu à turma. Isto demonstra a importância de o professor pesquisar sobre a fonte, tentar se colocar no lugar do aluno e pensar em possíveis questionamentos que eles tenham para ajudá-los a compreender os conceitos, como também afirmam Jahnke *et al* (2000), Maanen, Jahnke, Furinghetti (2006) e Glaubitz (2010; 2012).

O conceito de incomensurabilidade foi iniciado a partir da fonte *Os Elementos* e se estendeu com as possíveis hipóteses de “surgimento” da incomensurabilidade e a prova, por absurdo, que $\sqrt{2}$ não pode ser representado por uma fração. Como pudemos perceber, ao iniciar sua contextualização por meio da fonte, novamente o elemento de estranheza que surgiu ao mencionar em uma magnitude incomensurável, exposta em Jahnke *et al* (2000) e Glaubitz (2010, 2012). Este elemento, como mostrado, é estendido positivamente ao aluno. Nestes momentos, surgem, então, relações com as aulas de Filosofia redefinindo sua própria concepção acerca da matemática e assim possibilitando aproximações entre o aluno e a matemática.

Agora, vamos tentar analisar o processo hermenêutico de leitura e interpretação sobre uma fonte. Na produção textual, ao serem questionados sobre o autor da obra, onde viveu e época em que viveu. Responderam a esta produção textual onze alunos. A resposta de todos, em síntese, diz que “Euclides foi um matemático que viveu entre 223 e 283 a.E.C., que ficou conhecido como pai da Geometria grega e viveu grande parte de sua vida no Egito.”. Quando perguntados sobre a estrutura do livro e suas características, três alunos responderam com escritos retirados da internet; quatro alunos responderam que era um livro composto por 13 outros livros, e a capa era roxa e quatro outros alunos citaram o formato de escrita do livro, com definições e teoremas.

Foram explicados aos alunos sobre a forma argumentativa de escrita no texto *Os Elementos*, e que esta escrita fomentou em pleno desenvolvimento do Egito, da Grécia e da Mesopotâmia. Argumentar dedutivamente sobre um conceito foi uma característica que se desenvolveu na época de Euclides e explicitada no texto trabalhado em sala de aula. Sobre esta discussão, o aluno A ponderou: “prof., será que tipo, a gente estuda em história que na Grécia surge a política e tal, a Filosofia, e a professora de história falava dessas questões da argumentação. Será que isso tem haver?”. Embora o aluno pondere o surgimento da política e da filosofia aos gregos, ele não está errado em criar um laço entre o florescimento da argumentação dedutiva na Grécia e a política e/ou filosofia. Concluímos, portanto, que o uso da fonte original possibilitou o entendimento de um movimento, advinda de uma época, que privilegia o argumento de ideias para verificar suas verdades.

Além disso, observando os dois discursos anteriores, podemos perceber a discussão em sala de aula, o trabalho em sala de aula, as relações com outras culturas e, frequentemente, comparações com a matemática encontrada no texto proposto e estes mesmos conceitos modernos. Segundo Jahnke (1994), ler uma fonte é relacionar a cultura síncrona da matemática e diacrônica. Podemos dizer, pelos elementos supracitados, que alguns alunos (aqueles que verbalizaram e escreveram suas ideias) caminharam entre os círculos primários e secundários no processo de interpretação da fonte e assim ampliaram seus conhecimentos acerca do conceito. Os demais alunos não verbalizaram suas ideias e suas produções textuais cunhadas a passagens retiradas da internet.

O próximo texto que discutiremos é o texto de Leonardo Pisano, Liber Abaci. Para isso, como fizemos na análise da primeira semana, apresentamos as unidades de codificação, contextual e analítica. Em seguida, faremos a análise explicativa.

Quadro 10:Unidades Contextual e Analíticas

2ª SEMANA		
TEXTO ORIGINAL: Liber Abaci, Leonardo Pisano.		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“número”, “zero”, “quantidade”, “sequência”, “operação”, “Fibonacci”, “unidades”, “dezenas”, “centenas”, “calculadora”, “fácil”, “difícil”.	Expressões que indiquem valores a respeito da fonte utilizada e/ou do método empregado, expressões a respeito da valorização do conhecimento atual em	Não há.

	detrimento ao conhecimento do passado,	

Fonte: Produzido pelo autor

Durante a segunda semana, trabalhamos com a fonte original *Liber Abaci*, de Leonardo Pisano. O primeiro ponto que mereceu destaque - e peça principal nas observações do professor em sala de aula - foi o aumento do número de alunos participando das discussões e respondendo às produções textuais totalizando 16 alunos.

A compreensão das figuras indianas, ditas por Pisano, começou na semana anterior, quando os alunos tiveram contato com os números triangulares, números quadrados, sistemas de base sexagesimal entre outros. Os alunos trabalharam com as proposições: "a soma de dois números triangulares é sempre outro número triangular?" e "A soma de dois números quadrados é sempre outro número quadrado?" bem como operações com frações no sistema hieróglifo. A partir da fonte *Liber Abaci*, os alunos tiveram contato com operações no sistema de numeração romano[20]. De fato, os alunos também se convenceram da utilização do sistema de numeração hindu-arábico.

Ao perguntar sobre o que indicam as figuras indianas referidas por Pisano, doze alunos responderam que eram "*0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9*" e servem para "*chegar a qualquer representação numérica de qualquer número que nos venha na cabeça (sic.)*.". Dois alunos não responderam à pergunta e outros dois responderam: "*Os números da sequência de Fibonacci formam o que conhecemos por proporção áurea que é a sequência: 1. 1. 2. 3. 5. 8. 13. 21. 34. 55. 89, 144. ...".* A maioria dos alunos (12 alunos) respondeu corretamente à pergunta realizada, o que demonstra o entendimento de um elemento essencial ao texto abordado. Dois alunos não responderam à pergunta e outros dois entenderam a pergunta com outro sentido e, por isso, erraram. Durante a discussão deste texto em específico, quatro alunos participavam da discussão, Alunos A, C, D e J, e destacamos:

Professor: Fibonacci relata os passos para formação de um número. Deem uma olhada na página 1 da tradução. Este processo é o mesmo utilizamos nos dias de hoje? (Silêncio) Aluno A: Eu não acho não. Professor: Por quê? Aluno A: Porque aqui *tá* ao contrário: não começa na direita; a gente começa a escrever pela esquerda.

[20] Pisano os expõe na tentativa de comparar dois sistemas de representação, com operações aritméticas, e tentar convencer o leitor da utilização do segundo.

Aluno J: É. Também acho.
Aluno D: Não. Olha só! Ele diz isso mesmo da escrita, mas depois ele fala que fica nos lugares da dezena, da unidade já no canto.
Aluno A: Ham?
Aluno D: Ele dá até o exemplo com o número 37. É, tipo, Aluno A, veja o exemplo ai com o 37, tipo, ele diz que começa pela direita, beleza, mas ele diz depois que isso ai ocupa a casa da unidade. Sempre ocupa. Tu *tá se* confundindo só na escrita, menino. Pensa em um número e veja que a unidade é coisa (risos). Tá sempre no último lugar.
Professor: E ai? Conseguiram entender o que o aluno D disse?
(Silêncio)
Professor: Olha, o que o aluno D foi o seguinte: por mais que Pisano esteja dizendo que começa a escrita pela direita, ele avisa depois que sempre esse primeiro da direita vai ser a unidade o segundo, a dezena e assim por diante. Que é exatamente como se estuda hoje. Olha, pense em um número.
Aluno J: 23
Professor: Pronto, começando ele pela direita que dígito é?
Aluno J: 3
Professor: Isso, Agora veja que esse número é composto por duas dezenas, ou seja, 2x10 e 3 unidades. Se você pegar 28, é composto por duas dezenas e 8 unidades, ou seja, tanto em um como em outro, na verdade em qualquer número, a unidade sempre vai estar na primeira posição da direita. Entenderam?
Aluno D: É isso mesmo, prof.
Aluno A: Ah, professor, entendi.
Professor: Entendeu mesmo? Certeza?
Aluno A: Entendi sim. Obrigado.

Notamos novamente que a discussão gerada pela leitura da fonte foi necessária para um entendimento mais aprofundado. Vale ressaltar também que o professor deve observar atentamente a discussão e, caso necessário, intervenha e tente usar outra explicação mais clara na intenção de ajudar o aluno a construir melhor seu aprendizado. Segundo a teoria intuicionista da Educação Matemática, Fossa (1998), com raízes no construtivismo radical, a linguagem utilizada pelo professor em sala deve ser um meio de recuperação de conceitos que foram construídos sendo, assim, a linguagem é importante porque nos ajuda a construir conceitos semelhantes. Além disso, Fossa (2020) nos lembra de que o conhecimento matemático é construído a partir de uma relação dialética tripartida, elencadas por ele, como o indivíduo, o outro e o mundo. Portanto, a participação do outro na construção do conhecimento matemático é fundamental.

Referente às operações matemáticas com números inteiros positivos, ao serem questionados do que se tratava o recorte trabalhado na página 52, seis alunos não responderam, cinco responderam que se tratava de uma regra universal para a divisão de um número inteiro positivo por outro número inteiro positivo. Cinco alunos responderam que se tratam de divisões de números e ressaltaram alguns exemplos. Observa-se uma alta participação em questões em branco sobre esta pergunta e isso nos preocupa porque é uma observação que deve ser realizada após a leitura traduzida do texto. Infelizmente, o ensino remoto nos impossibilita observar se, de fato, houve uma leitura por parte dos alunos, uma reação, valores e expressões que possibilitassem ao professor o entendimento mais profundo e detalhado da reação do aluno. Onze alunos responderam que o recorte se tratava da divisão entre dois valores inteiros positivos. Perguntados se o método envolvido era o mesmo utilizado nos dias de hoje, obtivemos resultados interessantes: três alunos não responderam à pergunta, nove responderam que era outro método e quatro responderam que era o mesmo método só que escrito de forma diferente.

De fato, o método exposto por Leonardo Pisano para a divisão de 365 por 2 é o mesmo aprendido nas escolas atuais. Primeiro se divide a centena, depois a dezena e por fim a unidade. Contudo, o resultado era posto de maneira diferente, pois não havia o entendimento sobre as representações decimais para números com resto diferente de zero De nove alunos que responderam não ser o mesmo método, três deles expuseram que “Não, os métodos de hoje em dia são mais evoluídos que os de antigamente”. Um quarto aluno ainda respondeu: “Não entendi, mas acho que não. Hoje em dia é mais fácil de entender”. Jahnke (1994), Jahnke *et al* (2000) e Jankvist (2014) nos alertam para este tipo de interpretação no trabalho da leitura e interpretação da fonte. Segundo suas pesquisas em sala de aula frequentemente os alunos depreciam o conhecimento antigo em uma valorização excessiva do conhecimento aprendido atualmente nas escolas. Os alunos, na atividade da leitura sobre a fonte, carregam consigo alguns pré-conceitos sobre o conhecimento antigo e isto deve ser confrontado pelo professor no sentido de distanciar esses pré-conceitos. Contudo, sabemos que esta é uma tarefa[21] difícil.

Uma das soluções percebidas é a discussão e o confronto de ideias. O objetivo e o planejamento do professor devem ser cruciais para possibilitar o aluno a intercalar produções textuais e discussões nos momentos certos sem deixar para tratá-los em momentos posteriores. Após as produções textuais, pudemos caminhar para a discussão. O professor confrontou os alunos com método dito no *Liber Abaci* e o método atual perguntando sobre suas diferenças e semelhanças. Este momento foi importante para o esclarecimento e para tratar outros fatores como, por exemplo, *questões internas* ou *meta-questões*, Jankvist (2014). Com a discussão

[21] Na verdade como foi dito no capítulo II desta pesquisa, Jahnke et al (2000) encara este como um dos maiores problemas eminentes na interpretação de uma fonte: a intenção do autor moderno na prática da leitura do texto original.

sobre as diferenças entre os métodos de escrita, pudemos debater sobre as representações decimais que facilitam no entendimento para visualizar o resultado de uma operação. A evolução das ideias foi colocada em xeque pelos alunos e a valorização da matemática como produto do ser humano obteve cada vez mais força.

Adiante, analisaremos o texto original *Remarques sur la nature des quantités*, de Charles Méray. Para isso, descreveremos as unidades de codificação, contextual e analíticas e em seguida utilizaremos a técnica de análise explicativa por entendermos que se trata de uma avaliação de diferentes contextos.

Quadro 11: Unidades Contextual e Analíticas

3ª SEMANA		
TEXTO ORIGINAL: Remarques sur la nature des quantités, de Charles Méray.		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“convergência”, “limite”, “sequência”, “aproximação”, “variável”, “comensurável”, etc.	Expressões sobre o entendimento do conceito de limite de sequências infinitas de termos; Frases que expressam valores sobre a fonte utilizada ou sua visão da matemática.	Não há.

Fonte: Produzido pelo autor

Durante a terceira semana, os alunos trabalharam o recorte do texto “Observações sobre a natureza das quantidades definidas pela condição de servir como limites para determinadas variáveis”, de Charles Méray. Perguntados sobre o título do recorte, os alunos responderam que o texto fala sobre “observar até onde é possível um número chegar” ou “observar até onde é possível uma sequência chegar”. Quando questionados a respeito dos princípios das quantidades incomensuráveis ditas por Charles Méray, destaca-se o seguinte diálogo. Longo, porém necessário.

Professor: Méray fala sobre tal de princípios. O que é isso?
Aluno A: É verdade eu li aqui uma coisa assim.
Aluno B: Ele diz que todas as partes da matemática seguem que meio esse princípio.
Professor: Todas as partes da matemática?
Aluno B: Uhum.
Aluno D: Não. Acho , tipo, são as partes da matemática que necessitam... deixa eu ver, pera.
Aluno D: Necessitam considerar limites das quantidades variáveis.

Professor: Boa. Isso mesmo, Aluno D, Méray elenca dois princípios onde é necessário o entendimento de limites de quantidades variáveis. Agora, o que é isso? Limite de uma quantidade variável? Sabem dizer?
(Silêncio)
Professor: E ai?
Aluno A: Eu entendi pelo que a gente falou agorinha do exemplo do atleta. Tipo, se é limite é porque algo não pode passar dali, né?
Professor: Continue.
Aluno A: Então, eu *tô* pensando assim: que são números que *tão* variando, mas que não *pode* passar de um limite.
Aluno D: Uhum, também pensei assim.
Professor: Boa! Estão no caminho certo. Alguém mais?
(Silêncio)
Professor: Vamos pensar na sequência que trabalhamos agora há pouco. Cada elemento da sequência variava, concordam? Tipo, o primeiro termo era 1, depois ½ depois ¼ depois 1/8 e por ai vai. Concordam?
Professor: Concordam?
Aluno D: Uhum, concordamos, prof.
Professor: Boa! Ou seja, essa sequência está variando. Correto? Agora, vimos que esta sequência tende para quanto?
Aluno A: Tende para 0, prof.
Aluno D: Mas nunca chega em 0.
Professor: Isso mesmo, ou seja, a medida que o denominador cresce a sequência é limitada por zero, isto é, não passa de zero, mas você pode chegar muito próximo de zero o quanto desejarmos.
Aluno A: Ei, isso é massa demais.
Professor: É massa mesmo. Vamos melhorar isso; vamos voltar para os princípios. Vimos, então, que estes princípios servem para as partes da matemática que lidam com limites de quantidades que estão variando. O que entendem pelo primeiro princípio?
Aluno D: No primeiro princípio, um número sempre vai ter seu sucessor, tipo, que ele varia e sempre vai vir um sucessor.
Aluno A: Tipo um número tende cada vez mais ficar maior que os anteriores
Professor: Como assim?
Aluno A: Sei lá. (Risos)
Aluno A: Não, tipo, eles vão cada vez mais vai ficando a quantidade de elementos da sequência, entende? Indo para o infinito.
Aluno E: Um número sempre vai ter uma variável tendendo a ele
Professor: Ele fala em algo que aumenta, mas que também pode diminuir, né?
Aluno B: Isso, isso. Ele pode ir aumentando ou diminuindo. Ele diz aqui.
Professor: E sobre o segundo princípio?
Aluno C: v é sempre diferente de 0 quando m vai aumentando
Aluno A: Só entendi que essa diferença aí que ele fala tende a zero à medida que aumenta, mas não entendi isso, não.
Professor: E aí. Alguém entendeu?
(Silêncio)
Aluno D: Sei lá. Entendi e não entendi. Mais ou menos. (Risos.)

Professor: Então. Pode dizer, fica tranquila, estamos aqui para discutir.
Aluno D: Nam, prof., vai fala, entendi não.
Professor: Mais alguém quer dizer o que entendeu desse segundo princípio? Pode dizer, se acanhe não.
(Silêncio)
Professor: Tudo bem! Vou explicar. Méray falou que se essa sequência que a gente tá falando sobre ela ficar com uma distância tendendo a 0 entre um termo e outro a medida que cresce ou decresce então significa que a sequência tem um limite para ela.
Aluno A: Isso, prof., da distância mesmo. Bem interessante, né?
Professor: Agora, só umas aspas. Alguém agora há pouco falou em sucessor. Repare que não é questão de ser sucessor. Eu sei que disseram na ideia de um elemento seguido do outro, mas, lembre-se que esses elementos não têm sucessores uns dos outros.
Aluno C: Tem sequência que não tende a nada? Tipo, sei lá, não vai para um número ou algo assim?
Professor: Show, Aluno C! Tem sim e essas sequências a gente diz que é divergente. Vamos já comentar sobre elas. Pegando o gancho do Aluno C. Explique a frase: "uma sequência converge para um limite".
Aluno A: De que tende a um limite, ou seja, todo número vai ter um limite e que vai tender a chegar nesse limite.
Aluno J: Sempre chega a um limite e no infinito os temos se aproximam uns dos outros, mas são determinadas sequências e não todas.
Professor: Isso. Toda sequência que possuir um limite é convergente. Caso contrário, ela é divergente. Agora, é interessante porque Méray fala alguma coisa sobre incomensurabilidade. O que é isso?
Aluno B: O que é isso mesmo?
Aluno A: Ih... sei não, aliás, lembro não.
Aluno B: Aquilo que não pode ser medido
Aluno A: Ah... os irracionais.
Aluno C: Ah, então esse Charles ai vai falar dos irracionais e dos limites né, prof.?
Professor: Isso. Vamos ver essa parte sobre a definição dos números irracionais dada por Méray, então.
Aluno D: Ah, prof., eu acho que entendi. Ele quis dizer que todos os irracionais vão ter sequências que tendem a esses números, né?
Professor. Isso, aluno D, boa. Isso ai.
Aluno A: Ahh, tipo, com o raiz de 2 que é 1,41421 ai vai ser tipo uma sequência desses números que são, porque, tipo, o 4 e o 1 e o outro 4 *é*, mas isso *tá* tendendo para o raiz de 2, né?
Aluno D: É isso mesmo. Foi o que eu pensei
Professor: Boa, galeraaa. Isso ai. O entendimento é por ai mesmo. Agora veja que é a sequência 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...
Aluno A: Ahhh...
Professor: Agora vamos pensar isso na reta numérica. Olha. Vamos colocar os números aqui. Será que a gente consegue preencher completamente?
Aluno A: Prof., eu tô vendo que a reta é preenchida.
Professor: Explique melhor.

Aluno A: Tipo, porque na minha cabeça faz sentido ser *preenchido* porque, tipo, esses números e tal são muito pertinhos uns dos outros. Tipo, lembrei agora daquele negócio que o senhor fez com os pontos na metade e tal. (Risos).
Aluno J: É verdade. O número raiz de 2, tem um lugarzinho dele e a gente até viu com o senhor como marcar o raiz de 2 naquele programa.

O diálogo anterior foi longo, porém necessário, pois constitui mais uma forma de fidedignidade à pesquisa e aos dados por ela publicados. Em primeiro lugar, este diálogo demonstra uma boa desenvoltura dos alunos em entender o conceito de limite de uma sequência, embora com algumas nuances, a essência do conceito demonstra ser entendida. Além disso, o aprendizado do conceito também teve outro fator: a problemática envolvida com sequências de números racionais vista anteriormente. Os alunos interligaram o que estavam lendo na fonte com o exemplo que realizamos anteriormente. Isto é, as problematizações trabalhadas são de fundamental importância no âmbito da leitura original.

Outro fator importante é a linguagem utilizada. Méray utiliza uma linguagem simples e isso ajuda o entendimento. Contudo, no segundo princípio, ao envolver a distância entre dois termos de uma sequência no infinito tornou difícil o entendimento, em particular, o entendimento da diferença $v_{n+p} - v_n$ demonstrou um obstáculo de aprendizagem. Algumas passagens em especial merecem ainda mais destaque.

Quando a discussão alcançou o conceito de incomensurabilidade e o professor questionou sobre este tema, um aluno verbalizou que não se lembrava deste conceito, um segundo aluno comentou que era “aquilo que não pode ser medido” e, em seguida, o primeiro aluno voltou a comentar “Ah... Os irracionais”. Isto é, o primeiro aluno demonstrou não lembrar do conceito de incomensurabilidade e a partir da fala do seu colega: “aquilo que não pode ser medido”, relacionou-o ao número irracional, pondo o número irracional como aquilo que não pode ser medido e, consequentemente, a medida incomensurável. Os autores Robinet (1993) e Fischbein, Jehinam e Cohen (1995) mencionam como resultados de suas pesquisas, esta característica encontrada nos alunos: A associação do número irracional ao número não exato.

Esta menção, embora não esteja errada em certo sentido, não é suficiente. Para nosso entusiasmo, como o diálogo demonstrou, o conceito de número irracional, a partir da discussão e da leitura realizada em sala de aula, ampliou o entendimento daqueles que estavam discutindo o tema. Outro recorte que fortalece esse pensamento é o fato do aluno que demonstrou a dificuldade inicial, verbalizar um exemplo concreto com o número $\sqrt{2}$ como uma sequência de termos infinitos.

Outro destaque importante é a fala dos alunos em relação à reta numérica. Ao serem questionados a respeito da reta numérica, os alunos percebem que a reta é preenchida porque os números são muito próximos uns dos outros. Em seguida, lembram-se de um procedimento no programa GeoGebra[22] que realizamos rapidamente em sala sobre a construção da metade de um segmento dado. Esta ideia é importante, pois fornece um entendimento melhor sobre a densidade da reta real, ou seja, dos números reais. Portanto, o aluno considera alguns números (não podemos dizer todos, ainda) como sequências convergentes de outros números.

Por fim, trataremos do último texto original utilizado durante toda a pesquisa: *Essays on the theory of numbers*, de Richard Dedekind, trabalhado na quarta semana. Após ter entregado a fonte aos alunos, foi pedido para a observarem. Em seguida, foi entregue o recorte traduzido. Este recorte está contido no capítulo 1, seções I (Continuidade e números irracionais) e seção III (Continuidade da linha reta). Após isso, as unidades de codificação, contextual e analíticas juntamente com a técnica de análise explicativa dentro da análise de conteúdo, Mayring (2002).

Quadro 12: Unidades Contextual e Analíticas

4ª SEMANA		
TEXTO ORIGINAL: Essays on the theory of numbers, de Richard Dedekind.		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“continuidade”, “Reta”, “falha”, “aritmética”, “ponto”, “divisão”, “esquerda e/ou direita”,	Expressões que reflitam valores a respeito da reta numérica, como é a disposição dos números sobre esta reta. Expressões que reagem ao conteúdo de continuidade.	“massa visse” : expressão quando se acha algo legal;

Fonte: Produzido pelo autor

Ao perguntar sobre a motivação de R. Dedekind em escrever aqueles recortes, os alunos responderam que Dedekind havia encontrado uma determinada falha. Ao perguntar sobre esta falha, os alunos explicaram que ele estaria em busca de algo puramente aritmético. Neste

[22] Foi utilizado o programa Geogebra na demonstração de construção de números a partir da ferramenta de régua e compasso.

momento, o professor esperava que o aluno recorresse a memórias do movimento da aritmetização que haviam discutido no fim do último encontro. Entretanto, isto não aconteceu. O professor retornou a este tópico e explicou-o novamente.

A nova discussão a respeito da aritmetização da análise abriu espaço para comparar os escritos de Euclides com os de Dedekind resultando falas importantes como as destacadas a seguir:

Após concluir a fala a respeito da continuidade

> Aluno A: Ei, prof., muito massa, visse?! A gente esses dias tava vendo aquilo da revolução neo alguma coisa (risos) [o professor interrompe: Revolução neolítica] Isso, isso. Ai tipo, a gente vendo isso ai das culturas, falamos de Euclides com aquelas coisas de magnitudes e tal e agora isso, que louco, véi, muito massa.

Após concluir a fala sobre a motivação e receio em publicar seu artigo

> Aluno D: Ele *tava* com receio de publicar porque *tava* achando que o pensamento dele muito simples e mesmo assim bem potente, ai ele falou com uns amigos, alunos dele.
> Professor: Verdade. Aconteceu isso mesmo segundo o próprio Dedekind. Mesmo assim, ele publicou, o que o motivou nesse estágio a publicar o artigo?
> Aluno D: Acho que ele falou alguma coisa aqui de ter lido outros artigos e tal, né?

Estas falas demonstram uma articulação entre os conteúdos abordados ao longo da intervenção e consequentemente o entendimento sobre meta-questões da matemática, ver Jankvist (2009a). Neste caso, estas questões entraram como elemento motivador para o aluno A (como pudemos observar o fim da sua fala), o qual Jankvist relata que, este elemento envolvido nesta natureza (meta-questões), não é ruim, pelo contrário, é um elemento valioso no processo de ensino-aprendizagem além de ser, no mínimo, uma reflexão importante. O segundo diálogo chama à atenção ao momento particular que Dedekind se encontrava em hesitar na publicação de seu artigo. Estes recortes são ímpares, pois edificam e incentivam o aluno a observar o profissional que produz matemática como um ser humano como os demais, com aflições, traumas, impulsões e, principalmente, amigos. Estes elementos identificam os profissionais da matemática como pessoas e potencializam uma mudança de visão e pensamento que o aluno carrega sobre esta ciência e seus colaboradores.

O professor Fossa (2020) defende que a matemática seja entendida como um produto do ser humano e, portanto, deve ter contato intenso com os produtos da cultura matemática, os textos históricos. Estes produtos não carregam consigo apenas o conteúdo organizado, também carrega as emoções, os entraves do autor em sua época, entraves institucionais, rixas pessoais, ou seja, carregam um contexto atrelado e o entendimento deste contexto é de fundamental importância para uma interpretação ampliada a respeito da fonte, do autor, da própria matemática.

Na segunda parte da atividade (Parte III – Continuidade da Reta), os alunos responderam em suas residências e tiveram o tempo de uma semana para realizar suas produções textuais. Dezesseis alunos responderam a esta atividade. Perguntados sobre o que significava a frase “na linha reta L existem infinitos pontos que não correspondem a nenhum número racional” (DEDEKIND, 1963, tradução nossa), onze alunos responderam que existem infinitos números irracionais na reta; quatro alunos não responderam e um aluno respondeu: “é como imaginar infinitos números do tipo $\sqrt{2}$ e π”. Perguntados a respeito do que se tratava este recorte e o conteúdo central abordado: nove alunos responderam ser sobre a continuidade da linha reta e seu conteúdo era sobre a continuidade da reta; dois alunos não responderam; três responderam que tem a ver com a continuidade da linha e se tratava de mostrar que a ideia de Dedekind estava correta sobre a continuidade; dois responderam que entenderam algo sobre continuidade e que isso tinha a ver com dividir um ponto em direita e esquerda.

Como demonstrado pelos dados da produção textual, os alunos não foram capazes de identificar o conteúdo central do recorte apontando sugestões que tangem endosso central do recorte. Dois alunos demonstraram maior sagacidade e sugeriram que a continuidade tem a ver com um ponto que dividia números para a esquerda e para a direita deste ponto. Entretanto, não deixa claro o que é essa continuidade definida por Dedekind. Os alunos estão corretos ao imaginar um único ponto na reta que dívida todos os outros pontos à esquerda e de todos à direita e relacionar isso ao entendimento da continuidade.

Realizada a breve discussão a respeito dos dados obtidos de cada texto original, pudemos realizar a categorização e suas relações. Sendo assim, temos:

Quadro 13: Categorias indutivas sobre a percepção dos elementos essenciais

CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
CH1 - A utilização de fontes originais gera um ambiente dinâmico e reflexivo.	Esta categoria é descrita como elementos que mostram o entendimento dos alunos a partir da discussão realizada.

CH2 - Problematizações e perguntas norteadoras são importantes no processo de interpretação da fonte.	Esta categoria é descrita como elementos que mostram o entendimento dos alunos a partir da leitura e da reflexão a partir da problematização.
CH3 - A linguagem é parte importante e fundamental no processo de interpretação sobre a fonte.	Esta categoria é descrita como o entendimento (e, às vezes, não) de conceitos de acordo com a linguagem do texto proposto.
CH4 - O aluno considera textos originais antigos com determinado preconceito.	Esta categoria é descrita como concepções verbalizadas ou escritas de narrativas pejorativas em relação aos textos originais.
CH5 - Elementos de estranheza são importantes no processo hermenêutico.	Esta categoria é descrita como narrativas expressadas pelos alunos que demonstram algum elemento de estranheza.

Fonte: Produzido pelo autor

A partir da discussão mencionada antes, conseguimos apresentar cinco categorias. Sobre a primeira, CH1, de fato, a utilização de textos originais como pudemos observar nas discussões anteriores, gera um ambiente dinâmico e desafiador para o aluno. Segundo Jahnke et al (2000) o uso de textos originais causa, no leitor, três aspectos essenciais: substituição, reorientação e compreensão cultural. Estes aspectos envolvem determinadas condições para sua eficácia: determinação de hipóteses, o que implica entendimento, ao menos superficial, da leitura realizada, sobre os conceitos entendidos; comparação entre o seu conhecimento e o conhecimento exibido na fonte; e comparação com as ideias e expressões de outros alunos.

Estas condições fomentam um ambiente reflexivo e discursivo de modo a sugerir que, o professor que não opta por debates e discussões, não trabalhe com as fontes originais. O aluno, ao ler e interpretar uma fonte, sente-se desconfortável com diferentes perspectivas e isto não é, necessariamente, ruim. Este desconforto pode, a nosso ver, obter duas consequências. Na primeira, o aluno constrói algum bloqueio ao ponto de ignorar a fonte original ou o que está sendo discutido sobre ela. O desconforto então cria um bloqueio de aprendizagem. Na segunda, e otimista consequência, o aluno sente-se desconfortável e busca comparar suas hipóteses e seus entendimentos com outros alunos e com o professor a fim de verificar a veracidade do que estava entendendo. Neste momento, o debate surge com maior intensidade. Para ocorrer à verbalização do aluno, tem que haver um ambiente propício para esta tarefa.

Esta tarefa não é simples, porém, a nosso ver, necessária. Alguns alunos realizam a leitura, a interpretação e não verbalizam suas ideias à espera de falas de outros colegas e/ou professores. A verbalização é importante, e consideramos que um dos motivos para não a haver por parte de alguns alunos está no conceito de erro. O ambiente adequado proporcionado pelo professor a esses alunos é focando menos no erro e mais na construção do conceito dito pelo aluno tentando buscar elementos que possam melhorar o argumento do aluno levando-o a pensar em diferentes caminhos. O aluno ao perceber um ambiente proveitoso, entende que pode receber suas ideias sem afrontá-los e dizer que estão errados, sente-se mais confortável para lançar suas ideias e melhorá-la a partir de outras concepções, o que enriquece as suas concepções acerca da matemática.

A categoria CH1 se relaciona diretamente a categoria CH2. Isto é, uma metodologia adotada em sala de aula com foco na utilização de textos e norteada por perguntas e problemas concebe o ambiente dinâmico e reflexivo descrito antes. A problematização talvez direcione melhor o aluno em face ao o ensino convencional exposto em Glaubitz (2010). Segundo este mesmo autor, a abordagem hermenêutica possui uma estrutura simples de trabalho com a fonte: introdução convencional de um tema, entrega de textos originais para sua leitura para confrontar as ideias do texto com a introdução convencional e, por fim, aprofundamento da fonte original para ampliação de seus horizontes hermenêuticos.

Consideramos que conseguimos provocar a mesma concepção de estranheza dita por Glaubitz (2010) com problematizações ao invés da introdução convencional. De fato, a introdução convencional possui uma característica forte: mostrar o conteúdo como sua forma atual, dentro do currículo trabalhado, para que a estranheza causada seja, talvez, com maior intensidade. Concordamos com esta perspectiva. Entretanto, a problematização também pode trabalhar com a mesma intensidade trabalhada com a introdução convencional. A problematização é uma atividade que põe o aluno em uma situação de investigação – a busca por elementos concretos e inexistências do objeto trabalhado com base em seus conceitos previamente desenvolvidos. Esta atividade é, necessariamente, uma atividade de desmistificação do senso comum. A problematização colocou o aluno sob uma perspectiva crítica e reflexiva, confrontando o conhecimento familiarizado com o conhecimento incomum. Portanto, a problematização em nossa pesquisa demonstra ser eficaz para seus propósitos.

A categoria CH3 é de fundamental importância para o processo de interpretação sobre a fonte e foi percebida nos primeiros encontros. No primeiro encontro utilizamos duas fontes, uma original com linguagem refinada e outra secundária com linguagem didática. Os alunos apresentaram muitas dúvidas conceituais e expressaram seu descontentamento com a linguagem refinada da fonte com o segundo texto (fonte original). Esta, por sua vez, possui implicações: houve maior intervenção por parte do professor nas explicações de conceitos, baixa discussão a respeito das ideias e pensamentos além de reclamações por parte dos alunos sobre a fonte. Em contrapartida, a fonte secundária produziu menos dúvidas e menor intervenção do professor às explicações conceituais, gerando um debate mais dinâmico com maior participação dos alunos.

O professor Jahnke (1995) nos alerta sobre este cenário: a linguagem deve ser acessível aos alunos para proporcionar uma caminhada livre sobre o círculo duplo de interpretação. Estes círculos formam a essência da interpretação hermenêutica – um círculo primário no qual o autor da obra está envolvido em seu contexto e perspectivas, e um círculo secundário que é o leitor moderno tentando entender o que está havendo no círculo primário. Segundo o professor citado, aqueles envolvidos nesse processo hermenêutico de interpretação criam laços com suas próprias interpretações e a interpretação do autor. A linguagem é um meio que possibilita a transição entre os círculos e o professor deve entender e observar atentamente as fontes que utilizará.

A categoria CH4 é merece ser destacada por permear um problema, na essência, hermenêutico. Jahnke et al (2000) caracterizam a relação entre a intenção do autor na escrita do texto original e a intenção do leitor moderno em ler determinada fonte como o problema essencial da interpretação. Quebrada essa barreira, o aluno tem maior possibilidade de caminhar no círculo duplo de interpretação, descrito anteriormente. Esta observação revelou-se acentuada em nossa intervenção - principalmente na fonte original *Liber Abaci*, oportunidade na qual os alunos obtiveram contato com uma estrutura de escrita de cálculos diferentes daquelas utilizadas hodiernamente.

Em nossa pesquisa, enfatizamos três pontos que merecem destaque. O primeiro se refere à falha na interpretação: o aluno que realiza a leitura de uma fonte com a intenção de compreender um conteúdo a partir do pressuposto que este é ultrapassado e (ou) estático, não obtém um entendimento diacrônico e síncrono, como exposto em Jahnke *et al* (2000). Portanto, é preciso buscar elementos que combatam esta forma de raciocínio sobre uma fonte original. O segundo ponto se refere à falta de entusiasmo para uma leitura mais aprofundada. O aluno em nossa pesquisa que demonstrou este tipo de comportamento diante da fonte proposta também não buscou se aprofundar na leitura da fonte ou buscar participar de debates. O terceiro e último ponto enfatiza que, talvez, este tipo de interpretação necessite ceder espaço para uma visão mais profunda e holística com a prática. Não devemos esperar de um aluno que tem pouco ou quase nenhum contato com textos históricos, interprete uma fonte no seu mais alto nível de abstração. O processo é gradual e o aluno deve participar desse movimento testando e comparando hipóteses no diálogo consigo mesmo e no diálogo com seus colegas e professores.

Por fim, a categoria CH5. Esta categoria se revela em diversos trabalhos teóricos e empíricos como as pesquisas de Jahnke, 1991; Jahnke et al, 2000; Schubring, 2005; Glaubitz, 2012 e, como esperado, também ocorreu em nossa pesquisa. Os elementos estranhos demonstraram serem elementos benéficos para aprendizagem assim como afirma Glaubitz (2011) em sua pesquisa. Esta característica foi percebida pelo professor em sala de aula ao comparar as fontes: *Os elementos* e *Liber Abaci*, de Euclides e Leonardo Pisano, respectivamente. Os alunos compararam os cálculos realizados com os algarismos hindu-arábicos e algarismos romanos bem como o sistema egípcio hieróglifo, a conclusão é o espanto da facilidade de calcular com tais algarismos. Notamos que ao trabalhar com os algarismos romanos e hieróglifo, os alunos, embora utilizem outros sistemas de numeração para resolver alguns problemas, não possuem uma compreensão abrangente, visto que o elemento de estranheza foi intenso ao comparar os mesmos cálculos feitos com os algarismos hindu-arábicos e outros sistemas de numeração. Outro exemplo que podemos citar é o conceito de limite - Méray fala sobre a distância de elementos tendendo a zero no infinito em sequências infinitas. A estranheza causada pela simbologia utilizada por Méray gerou inquietude nos alunos que estavam discutindo o texto proposto, buscando entender a expressão e supondo hipóteses que estavam ancoradas em seus conhecimentos. Podemos citar também o exemplo, no momento da problematização, da expressão: 0,999... = 1.

O momento da estranheza é importante no processo de interpretação. Segundo Glaubitz (2011), é neste momento que ocorre a ampliação do horizonte hermenêutico, isto é, a fusão de horizontes é entendido como "desenvolvimento de uma consciência mais profunda por parte do aluno perguntando-se e refletindo sobre o que ela/ele nunca pensou antes" (GADAMER, 1990). Ainda segundo Glaubitz (2011), quando o aluno tem uma experiência de dissonância cognitiva em vários momentos da atividade, espera-se que isto desenvolva a curiosidade epistêmica.

Por último, retornamos às perguntas de pesquisa: (1) Como os alunos reagiram à utilização de textos originais em sala de aula? e (2) Os alunos são capazes de identificar elementos essenciais no texto original? Como vimos, os alunos reagem bem à fonte original dependendo da linguagem utilizada e as perguntas direcionadas. Quando o aluno estava em um ambiente interpretativo sobre uma fonte com linguagem refinada, ele enfrenta problemas conceituais, de interpretação, de sentido, que podem gerar, em alguns casos, a desistência para entender melhor o conceito. Com fontes originais em que a linguagem é entendida sem grandes problemas linguísticos, é mais fácil reter a atenção do aluno e deixá-lo cada vez mais independente. As perguntas norteadoras formam um arcabouço metodológico interessante. Na verdade, a interpretação sobre o que está lendo é um problema encontrado atualmente nas salas de aula, seja ensino secundário ou universitário. Portanto, esperar que o aluno do ensino secundário leia uma fonte e busque todos os elementos essenciais àquele recorte é supor, demasiadamente, que todos os alunos da turma possuem o mesmo nível de leitura, o que não é verdade. A sala de aula é um ambiente plural com diferentes tipos de pensamentos e ritmos de aprendizagem.

4.4 Análise das fontes secundárias utilizadas na intervenção

A utilização das fontes secundárias nesta pesquisa tem como objetivo ajudar o aluno a compreender os conceitos estudados. As fontes escolhidas foram: (1) Os Primórdios da Teoria dos Números – parte A, 2001, de John A. Fossa; (2) Introdução às Técnicas de Demonstração Matemáticas, 2010, de John A. Fossa; (3) Introdução à Filosofia Matemática, 1974, de Bertrand Russell; (4) *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, 1944, de Joseph W. Dauben.

Todas as fontes secundárias obedeceram a dois critérios: Abordar os temas objetos da intervenção e utilizar uma linguagem que não dificultasse a compreensão do aluno. As fontes foram escolhidas para quatro semanas diferentes, o que se traduz em quatro momentos diferentes. A primeira fonte foi utilizada na primeira semana de intervenção e se destinou a ajudar os alunos na compreensão de sistemas numéricos utilizados em alguns povos. A segunda foi utilizada para a compreensão do quinto axioma de Peano, também conhecido como Axioma da Indução. A terceira foi utilizada para a compreensão dos Axiomas de Peano e propriedades dos números Racionais. A quarta fonte foi proposta para ajudar na compreensão do conceito de continuidade. Vamos abordar cada fonte separadamente.

4.4.1 Fonte secundária: Os Primórdios da Teoria dos Números – Parte A.

Utilizamos esta fonte no primeiro momento em que estávamos dialogando sobre as culturas antigas e seus costumes, formas de contar e formas de medir. Foi um dos momentos com mais elementos culturais dialogando na sala de aula. O foco do livro foi nas palavras numéricas, em particular, as palavras numéricas primitivas com na cultura dos botocudos e pueris, tribos indígenas brasileiras, e os encabelados, da bacia do rio Napo.

Após a discussão a respeito da problematização, a fonte foi entregue aos alunos, via Google *Classroom*. Inicialmente, deixamos o aluno livre para folhear a fonte e suas características (a fonte inteira foi entregue de forma digitalizada em .pdf). Após isso, iniciamos as perguntas norteadoras e as discussões. A seguir, apresentaremos algumas partes de diálogos no momento da utilização da fonte secundária explorada. As unidades de codificação, contextual e analítica foram geradas por discussões em sala de aula e observações do caderno de bordo do professor.

Quadro 14: Unidades Contextual e Analíticas

1º semana		
TEXTO SECUNDÁRIO: Os Primórdios da Teoria dos Números – Parte A		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“número”, “tribos”, “contagem”, “contar”,	Expressões que indiquem valores a respeito da fonte utilizada e/ou do método empregado, express	“Véi”: gíria utilizada com outras pessoas que tem alguma afinidade; “Caramba”: gíria utilizada quando se é surpreendido com alguma situação.

Fonte: Produzido pelo autor

Perguntados a respeito das características da fonte, os alunos informaram que a fonte versava sobre “história antiga da matemática”. Além disso, um aluno observou: “*Ei, olha isso, véi: tem uma parte aqui do livro que fala sobre ‘o que é um número?*’. *Caramba! Que massa!*

Nunca tinha visto isso" (Aluno A). O aluno observou atentamente o sumário do livro e este produziu um elemento de estranheza no aluno ao verbalizar que nunca havia pensando sobre este aspecto. Novamente, encontramos na fonte secundária, os elementos de estranheza o qual Jahnke *et al* (2000), Glaubitz (2012), Jankvist (2014) e Fossa (2021) relatam. O estranho, de fato, ocupa um lugar, no mínimo, central em seus respectivos modelos de ajuda na escolha e interpretação sobre uma fonte histórica.

Também perguntamos sobre o que os alunos entenderam por palavras numéricas e o que isso implicava no conceito de contagem? A resposta do Aluno D foi*: "Olha, prof., tipo, eu entendi que são palavras que tem sentido de número"* o Aluno A complementou: "*Isso, isso. Tipo, não tem um símbolo de número, são palavras*". O professor insistiu sobre alguma relação entre as palavras numéricas e o conceito de contagem, o Aluno A falou: "*É aqui, a gente viu das tribos e tal, acho que tipo começou assim, sabe? Começou assim e depois um, dois, três, quatro como a gente conhece.*" o Aluno H complementou: "*É, tem a questão de 'um', 'dois' e 'muitos' que fala aqui no livro; primeiro era assim e depois vai surgindo os outros números. Tem até uma tribo ai que vai mais, mais um, mais um.*". Estas falas demonstram que o aluno entende o assunto abordado gradativamente, ler pequenos trechos, mas não identifica muito bem o roteiro do texto, seus objetivos e argumentos. Nestes casos é fundamental o direcionamento do professor com perguntas norteadoras.

4.4.2 Fonte secundária: Introdução às Técnicas de Demonstrações Matemáticas.

A fonte secundária "Introdução às Técnicas de Demonstrações Matemáticas" foi utilizada como reforço a um conceito que estava sendo discutido em sala de aula: os axiomas de Peano, em particular, o quinto postulado, mais conhecido como Axioma da Indução. Não entregamos a fonte por completa, utilizando, então, apenas capa, contracapa, apresentação, sumário e recorte da página 100 e 101. O autor da fonte apresenta, de maneira didática, uma analogia com fileiras de dominós e a condição para que uma propriedade pertença a todos os elementos do conjunto. Sendo assim, buscamos apenas este trecho da fonte a fim de facilitar o conceito estudado.

Quando perguntados a respeito da escrita de uma representação para os axiomas de Peano, os alunos entenderam, embora tenham tido dificuldades com a linguagem simbólica matemática, dos axiomas de Peano até o quarto axioma. Para explicar o quinto axioma, utilizamos a seguinte estratégia: (1) Colocamos o conjunto {0,2,4,6,8,10} e o conjunto {0,2,4, ..., 20} e pedimos aos alunos para identificarem alguma propriedade válida para estes elementos e conferir a propriedade. (2) Após a discussão, perguntamos como os alunos vão verificar a mesma propriedade para o conjunto {0,2,4, ...}, isto é, um conjunto infinito de elementos. A resposta dos alunos foi que a propriedade dos conjuntos é que os elementos são pares e para verificar, tem-se que verificar um por um. Entretanto, ao perguntar como devemos verificar um conjunto com esta propriedade, sendo este, infinito, os alunos não souberam dizer. Para isso, entregamos a fonte secundária e pedimos para que o aluno observasse o recorte.

Após perguntar o que entenderam pelo recorte, os alunos responderam que tem alguma coisa haver com “dominós e condições de derrubar os dominós”. Além disso, os discentes verbalizaram que a situação possuía alguma semelhança com a indução matemática embora não souberam identificar esta semelhança. O professor, então, resolveu focar na discussão dos dominós para então ir para a discussão da indução.

A respeito da discussão sobre os dominós, o professor perguntou quais eram as condições para que 10 dominós caissem, visto que as peças estavam em enfileiradas. Os alunos imediatamente responderam que deviamos empurrar a primeira e que todas as outras peças estivessem próximas umas das outras. Perguntados a respeito de uma fileira infinita de dominós como na situação, a resposta também foi a mesma. O professor fez a analogia das propriedades: primeira propriedade, derrubar a primeira peça, e as demais peças devem ter a propriedade de que a distância entre as peças tem que, necessariamente, ser menor que o tamanho de uma única peça. Os alunos entenderam sem problema.

Relacionando a indução matemática, o professor, então, relembrou sobre a pergunta motivadora da discussão: “como garantir que em um número infinito de termos, todos possuem a mesma propriedade?” Depois desta pergunta, o professor notou um *insight* na turma e alguns alunos responderam que a indução é “alguma coisa” para garantir esta propriedade. Ao serem perguntados sobre como a indução garante isso, a turma começou a dialogar e, a partir do diálogo, chegaram à conclusão que: “precisa garantir que o primeiro elemento dê certo e que os demais elementos possuam a mesma propriedade, todos”. Evidenciamos, então, que o elemento essencial do texto foi identificado, porém, com perguntas norteadoras - sem as perguntas, talvez os alunos não soubessem como identificar tais elementos.

Portanto, o uso do texto secundário se tornou, novamente, benéfico para a explicação de uma situação que, talvez, demonstrasse problemas de aprendizagem para seu entendimento.

4.4.3 Fonte secundária: Introdução às Técnicas de Demonstrações Matemáticas.

A utilização desta fonte secundária foi escolhida pelos critérios citados anteriormente. Ademais, avaliamos que o conhecimento dos Axiomas de Peano poderia proporcionar uma melhor compreensão a partir de uma linguagem dinâmica, mais pedagógica. Bertrand Russell constrói os Axiomas de Peano de uma linguagem materna à linguagem simbólica de forma simples e clara.

Os pesquisadores construíram perguntas para poder guiar o aluno. Após a leitura do recorte os alunos foram motivados com as perguntas (páginas 12 e 13 da fonte secundária): (1) O conjunto dos números naturais possui um menor elemento? Qual é este elemento?; (2) Se pegarmos o sucessor de um número, este sucessor é também um elemento do conjunto dos números naturais?; (3) Encontre um exemplo de um número com dois sucessores distintos; (4) Dois números com o mesmo sucessor e (5) O número 1 é sucessor de algum outro número?. Estas perguntas se referem à compreensão dos 4 primeiros axiomas. Para a compreensão do quinto axioma, utilizamos a seguinte estrutura:

(1) Considere um conjunto finito $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Este conjunto é ordenado, ou seja x_1 é o menor elemento. Se um professor seu tivesse dito que este conjunto A contém apenas números pares, como você faria para constatar que TODOS os elementos deste conjunto realmente são pares?
(2) E se o conjunto contiver dez elementos, a forma de proceder será a mesma?
(3) E se o conjunto contiver infinitos elementos, como você procederá?

Neste momento, utilizamos a fonte secundária discutida outrora[23] para ajudar os alunos a compreenderem melhor. Em seguida, demos os seguintes comandos: (7) Abra na página 13 deste texto. Leia sobre os cinco axiomas de Peano. Compare os escritos com a nossa discussão; (8) Como você transcreveria os mesmos axiomas de Peano acima em uma linguagem simbólica

[23] Fonte secundária: Introdução às Técnicas de Demonstrações Matemáticas

matemática? e (9) Abra na página 15. Verifique a simbologia utilizada por Russell e compare-a com a sua. Quais as semelhanças e as diferenças?

A turma se mostrou segura nas primeiras perguntas sem objeções. Entretanto, as dúvidas surgiram no quinto axioma com a pergunta (6) destacada anteriormente. Os alunos mantiveram-se pensativos e não surgiu “ideia” alguma de como testar se todos os elementos possuíam a propriedade de serem par. A discussão a respeito da estratégia matemática para realizar esta tarefa, a indução matemática, foi interessante. Os alunos confrontaram seus conhecimentos e a todo o momento o tema “infinito” foi desconcertante para os alunos, porquanto não se sentiram confortáveis e, por isso, a compreensão das propriedades que o conjunto de elementos tem de seguir para realizarmos a indução matemática foi deveras surpreendente.

Outro ponto motivador foram as últimas três perguntas (7, 8 e 9) que pediam para que os alunos comparassem o que eles tinham escrito com os escritos de Bertrand Russell. Ao realizar a observação, o Aluno D falou: “*Oxe, olha ai, prof., foi mais ou menos o que a gente disse mesmo*”. O que demonstra uma possível relação entre o pensamento do autor e o pensamento do aluno diminuindo a distância entre a matemática e o ser humano, como afirmado por Fossa (2020). A fonte secundária demonstrou uma fonte útil no processo de compreensão a respeito dos axiomas de Peano.

4.4.4 Fonte Secundária: Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, 1944, de Joseph W. Dauben

A fonte secundária citada é escrita por Joseph W. Dauben e o objetivo do livro é desenvolver algumas ideias matemáticas e filosóficas de Georg Cantor. Em especial conceitos da Teoria dos Conjuntos Transfinitos, proposta por Georg Cantor. Em particular, escolhemos recortes pequenos que indicassem alguma comparação com os escritos de Dedekind trabalhados na semana anterior. Por isso, escolhemos um trecho que Joseph Dauben descreve a ideia de um limite de uma sequência infinita de termos para Cantor e uma breve relação entre Cantor e Dedekind.

O trabalho realizado gerou comparações de imediato com o recorte utilizado de Dedekind. Os alunos dialogaram e verbalizaram que Cantor e Dedekind continham ideias parecidas, entretanto, estas afirmações não derivam do entendimento por completo dos métodos expostos pelos autores a respeito da continuidade e dos números reais, foi dito na fonte secundária, por J. Dauben, que Cantor e Dedekind concordam em algumas ideias. Perguntados sobre esta ideia, os alunos responderam que tem a ver com "sequências e aproximações, pois nas duas vezes discutimos sobre isso". Embora Dedekind define o *corte* na reta numérica em termos de subconjuntos, há uma ideia de aproximação de termos racionais aos cortes de Dedekind.

Perguntados sobre a diferença entre as ideias de Dedekind e de Cantor, os alunos não souberam identificar, o aluno H respondeu: "*é porque os de um as sequências tem o limite, converge, algo assim. E o outro não, diverge então.*" O que foge totalmente do contexto e demonstra que os alunos relacionam um tópico do conteúdo com outro, sem dá a devida atenção e paciência para tal.

Um fator importante e gerado especificamente por esta fonte, foi o conceito de distância entre os termos, escrita em módulo, definida por Cantor sobre as sequências, chamadas por eles, de fundamentais. Embora os alunos possuam pouca habilidade na simbologia matemática, ao visualizarem a distância entre dois termos da forma $|a_{n+m} - a_n|$, remeteram a melhor compreensão no entendimento da distância entre termos no infinito. Esta hipótese foi confrontada algumas semanas depois na validação dos dados, em que o professor se encontrou presencialmente com alguns alunos que participaram da intervenção para discutirem sobre os resultados encontrados. Uma pergunta aos alunos no momento da validação dos dados foi: O que vocês entendem por esse módulo? A resposta foi que não é o módulo o fator, mas sim a diferença, pois a subtração na reta sempre dá uma distância entre os pontos, quanto ao módulo, entendem que é positivo.

Portanto, a partir do relato sobre as fontes secundárias, podemos enunciar as seguintes categorias:

Quadro 15: Categorias indutivas sobre os elementos das fontes secundárias

CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
As fontes secundárias ajudam no entendimento de conhecimentos confusos e estranhos.	Esta categoria é descrita como expressões acerca conteúdos estranhos aos alunos, diferentes, que causem algum impacto no aluno.

O conceito de estranheza pode ser complementado e melhorado pelo uso de fontes secundárias.	Esta categoria é descrita por expressões que envolvam o conceito de estranheza e sua compreensão por meio do diálogo na fonte histórica.
As fontes secundárias também produzem resultados significativos na compreensão da visão sobre a matemática, suas relações e seus objetivos.	Esta categoria é descrita por expressões que caracterizem relações entre a fonte secundária e outras fontes construindo conceitos que os abordam.

Fonte: Produzido pelo autor

4.5 Análise sobre o entendimento dos números reais

A pesquisa proposta consta com uma análise dividida em duas partes, a primeira foi descrita a concepção dos estudantes no uso e sobre o uso de textos originais em sala de aula sob a abordagem histórico-hermenêutica; a segunda parte está relacionada ao entendimento, desenvolvido pelos alunos, sobre os números reais. Para esta segunda etapa, iremos compartilhar de uma abordagem qualitativa e quantitativa para as duas turmas, experimento e controle, relacionando-as entre si.

Para que pudéssemos manter uma relação entre a turma de controle e de experimento, analisaremos as atividades comuns às duas turmas. Consideramos que o trabalho comparativo entre as duas turmas realizadas de maneira simplória, sem observar as variáveis que os cercam, carece de maiores observações. O contexto envolvido nesta pesquisa foge de parâmetros que possibilitem comparações mais fidedignas. O primeiro ponto é referente ao ensino remoto que impossibilitou diversos aspectos que pudessem ser comparados, não sabemos, por exemplo, se houve alguma conversação entre alunos da turma de controle e turma de experimento a respeito dos métodos utilizados; Não sabemos também como controlar as variáveis de números de aulas, números diferentes de alunos entre as turmas, horários diferentes entre as turmas, e entre outros pontos. Portanto, trabalhamos com as atividades comuns às duas turmas de modo a realizar uma análise qualitativa e quantitativa sobre as atividades e relacionando-as entre si.

Para isso realizamos três atividades com cinco, oito e dez questões, respectivamente. A primeira atividade, atividade 01, foi realizada após a segunda semana de intervenção; a segunda atividade, atividade 02, foi realizada após a quarta semana de intervenção e por fim, a terceira e última atividade, atividade 03, foi realizada após a quinta semana de intervenção. Para análise qualitativa, definem-se os objetivos, as unidades de codificação e então a análise explicativa expondo as categorias. Para análise quantitativa, utilizamos as categorias indutivas realizadas na análise qualitativa e realizamos a análise de frequência, correlação e gráficos de agrupamento.

4.5.1 Turma de experimento

ATIVIDADE 01

Esta atividade foi realizada após a segunda semana de intervenção, conteve cinco questões e abordou os conceitos de: surgimento de números naturais, sucessor e antecessor, múltiplos, números pares e números ímpares.

Quadro 16: Unidades Contextual e Analíticas

TURMA DE EXPERIMENTO		
ATIVIDADE 01		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“inteiro”, “divisão”, “resto”, “par”, “ímpar”, etc.	Expressões que informem algum valor a respeito das propriedades sobre os números pares e ímpares e sobre os números naturais.	Não há.

Fonte: Produzido pelo autor

Sobre o surgimento dos números naturais, a turma de experimento entende que o surgimento dos números naturais advém de uma necessidade do ser humano de contar elementos mostrando assim a concepção de que a matemática é um produto do ser humano e, por isso, estão relacionados. Além disso, a turma demonstrou entender os conceitos de sucessor e antecessor no conjunto dos números naturais. Referente ao trabalho com os números pares e ímpares, verificamos que ao pedir ao aluno para representar o conjunto dos números pares e ímpares em termos de propriedades gerais, parte significativa da turma descreveu a propriedade, sem nenhum simbolismo matemático, que todo número par ao dividi-lo por 2 sempre deixa resto igual a zero e para os números ímpares, isto não acontece. Uma pequena parcela da turma utilizou a linguagem simbólica compartilhando às propriedades $P = \{x, n \in \mathbb{N} |\ x = 2n\}\ e\ I = \{y, n\ \in \mathbb{N} |\ y = 2n + 1\}$.

O uso das fontes originais possui consequências sobre estas visões. Num debate ocorrido na primeira semana, ao serem questionados a respeito do surgimento do número negativo e do número zero, uma pequena parte dos alunos que estavam discutindo, responderam que surgiram juntos; outra aluna então rebateu questionando-os se estes alunos leram os livros ou estavam sem atenção à aula visto que os números questionados não surgem juntos, depende da necessidade do local. Este debate demonstra, em uma parte dos alunos, que o uso de fontes originais e secundárias tem efeito sobre a visão da matemática desenvolvida no aluno. Além disso, este debate causou mudanças conceituais nos alunos e, por isso, é de se esperar que este reconhecimento cultural da matemática produza uma valorização da diversidade cultural e a equidade entre as pessoas, como afirma Fossa (2020). Vamos obter relatos adiante que realçam este resultado.

A partir da primeira atividade, podemos caracterizar as seguintes categorias:

Quadro 17: Categorias indutivas sobre a Atividade 1

ATIVIDADE 01	
CATEGORIA	DESCRIÇÃO
(CE1) O surgimento dos números naturais relacionados à concepção de contagem.	Esta categoria é descrita como expressões relacionadas aos números naturais e seu surgimento.
(CE2) Conceitos de sucessor e antecessor são bem aceitos.	Esta categoria é descrita como expressões que relacionem os conceitos de sucessor e antecessor entre os números naturais.
(CE3) A simbologia matemática é utilizada por poucos.	Esta categoria é descrita como expressões que descrevam as propriedades sobre os números pares e ímpares.

Fonte: Produzido pelo autor

De fato, sobre a pergunta: "A respeito do surgimento dos números naturais, responda a alternativa correta:", 60,9% dos alunos responderam que o surgimento dos números naturais estava atrelado ao conceito de contagem; 17,4% não responderam; 4,3% consideram que o surgimento dos números naturais está associado à necessidade de medições de terras, áreas, entre outros; Já, 17,4% responderam que o conjunto dos números naturais era um conjunto infinito possuindo os conceitos de pares e ímpares com o número zero sendo o elemento neutro deste conjunto.

Também, a respeito do conceito de sucessor e antecessor no conjunto dos números naturais, 82,6% concordam que todo número natural possui um sucessor, suas divergências estão, novamente, nas simbologias utilizadas. Desse, 65,2% assinalou que n é antecessor de $n+1$ embora 17,4% dizer exatamente o contrário. Além disso, sobre a pergunta: "Escreva uma propriedade que define o conjunto P = {0, 2, 4, ...} e I = {1, 3, 5, ...}", 63,2% dos alunos responderam a propriedade por escrito sem a utilização de nenhum simbolismo matemático. Apenas 15,8% dos alunos que descreveram os conjuntos em termos de propriedades utilizando somente a linguagem matemática formal. Vale a pena ressaltar que tanto os textos quanto as respostas que utilizam de linguagem formal, estão corretos. Portanto, os alunos preferem se comunicar por meio de seu vocabulário.

ATIVIDADE 02

Esta atividade foi realizada após a quarta semana de intervenção, conteve oito questões e abordou os conteúdos: operações com frações, dízimas periódicas, números racionais na reta numérica e sequências.

Quadro 18: Unidades Contextual e Analíticas

TURMA DE EXPERIMENTO		
ATIVIDADE 02		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
"inteiro", "divisão", "resto", "racional", "irracional", "sucessores", "conjunto dos números racionais", "antecessores", "aproximação", "infinito", etc.	Expressões que realçam a existência ou não do conceito de sucessor no conjunto dos números racionais, assim como as expressões que envolvam conceitos de aproximações e infinitos.	Não há.

Fonte: Produzido pelo autor

A segunda atividade, aplicada na turma de experimento, demonstrou que os alunos dominaram as operações aritméticas com números fracionários, embora mostrassem dúvidas em somas e subtrações de frações. Perguntados sobre "qual número é identificado na diagonal de um retângulo em que a largura é o dobro da altura?", nenhum aluno respondeu corretamente e grande parte optou por identificá-lo como um número racional não inteiro.

A solução mais geral identificada para este problema requer pensar na altura como uma quantidade variável e a largura como seu dobro. Realizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, produzimos uma diagonal igual à $x\sqrt{5}$, em que x é um número natural. Pensa-se, então, na multiplicação de um número natural por um número irracional, que nos retorna um valor irracional. O professor observou também que diversos *sites* da *internet* abordam este problema de maneira errada assinalando sempre a posição de que a diagonal é um número racional não inteiro. Há exemplos práticos com $x = 1$, produzindo uma diagonal igual à $\sqrt{5}$ e, portanto, um racional não inteiro, o que não é verdade. Talvez, em nossa turma, os alunos sentiram-se inseguros em responder o problema e optaram por buscar respostas *confiáveis* em *sites* da *internet*.

Quando abordados os conhecimentos acerca dos números racionais, foi perguntado ao aluno sobre uma possível concepção de números sucessores sobre os números racionais. Realizamos quatro afirmações: (1) $n+1$ é o sucessor de n; (2) n e $n+1$ são sucessores; (3) Todo número racional possui sucessor; e (4) Não existe a noção de sucessor e antecessor sobre os números racionais. A grande maioria optou pela afirmação (4).

Estas respostas são importantes, pois demonstram uma aproximação entre as pesquisas de Soares, Ferreira e Moreira (1999) e Igliori e Silva (2001) em que a maioria dos alunos identifica infinitos racionais entre dois racionais. Isto implica dizer que este entendimento, não necessariamente, é uma possibilidade das fontes originais visto que outras pesquisas, sem a utilização desta metodologia, chegaram a resultados semelhantes. Entretanto, a respeito dos números irracionais na reta numérica, ao serem perguntados como os números irracionais estavam dispostos na reta numérica, os alunos responderam que: "Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele". Este entendimento dos números irracionais na reta numérica levando em conta a densidade dos mesmos é diferente das pesquisas anteriores visto que identificam nos alunos a não concepção de irracionais entre dois racionais.

Por fim, investigamos os conceitos de dízimas periódicas e não-periódicas. Para isso, expomos seis afirmações e pedimos para os alunos classifica-las em verdadeiro ou falso. As afirmações foram: (1) Todo número inteiro é natural; (2) Toda dízima não periódica é um número irracional; (3) Toda dízima é um número irracional; (4) Toda dízima periódica é um número racional; (5) Todo número que pode ser representado na forma decimal é real; (6) Números reais são aqueles que só podem ser representados pela razão entre dois números inteiros. Os alunos responderam todas as afirmações corretas, e 4 alunos não responderam corretamente. Isto é, o aluno entende que toda dízima não periódica se trata de um número irracional assim como toda dízima periódica é um número racional; assim como identificar um número real não sendo apenas números definidos por duas razões entre dois números inteiros, confiando este aspecto aos números racionais.

Não sabemos, como já foi dito antes, como controlar determinadas variáveis. Por exemplo, não sabemos se houve alguma interferência entre os próprios alunos no momento da realização da atividade. Não sabemos também se houve troca de informações entre alunos da turma de experimento e de controle, o que pode influenciar no processo dos dados e, consequentemente, nos resultados. Entretanto, como não tínhamos no momento ferramentas que pudéssemos controlar este tipo de situação, abstraímos destes aspectos reconhecendo nossas limitações.

Estes resultados nos parecem animadores visto que inúmeras pesquisas, nacionalmente e internacionalmente, demonstrem, geralmente, uma má formação no conceito de número irracional associado às dízimas, *i.e.* Robinet (1993) e Tirosh (1995), Igliori e Silva (2001). A partir desta análise, podemos construir nossas categorias indutivas.

Quadro 19:Categorias indutivas da atividade 2

CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
(CE4) Os alunos possuem a noção de infinitos racionais entre dois racionais e, infinitos irracionais entre dois racionais.	Esta categoria é descrita como expressões a respeito do conceito de sucessores e a visão do aluno sobre os números irracionais na reta numérica.
(CE5) Os alunos possuem uma compreensão básica a respeito da densidade dos números reais.	Esta categoria é descrita como expressões que caracterizam os números irracionais como *próximos* dos números racionais que o aproximam.

(CE6) Os alunos identificam as dízimas corretamente.	Esta categoria é descrita como expressões que classificam as dízimas.

Fonte: Produzido pelo autor

As duas primeiras categorias se relacionam como foi mostrado antes. Adiante vamos compartilhar uma Tabulação cruzada entre os conceitos de sucessor, números racionais e irracionais, e como estes estão dispostos na reta numérica. Como demonstra a tabulação a seguir, de 12 alunos que responderam não existir o conceito de sucessor e antecessor, pois havia infinitos racionais entre dois racionais, 9 assinalaram que os números irracionais podem ser marcados na reta numérica próximo aos racionais que o aproximam dele. Isto é, a maior parte dos alunos entende uma concepção básica a respeito da densidade dos números na reta numérica.

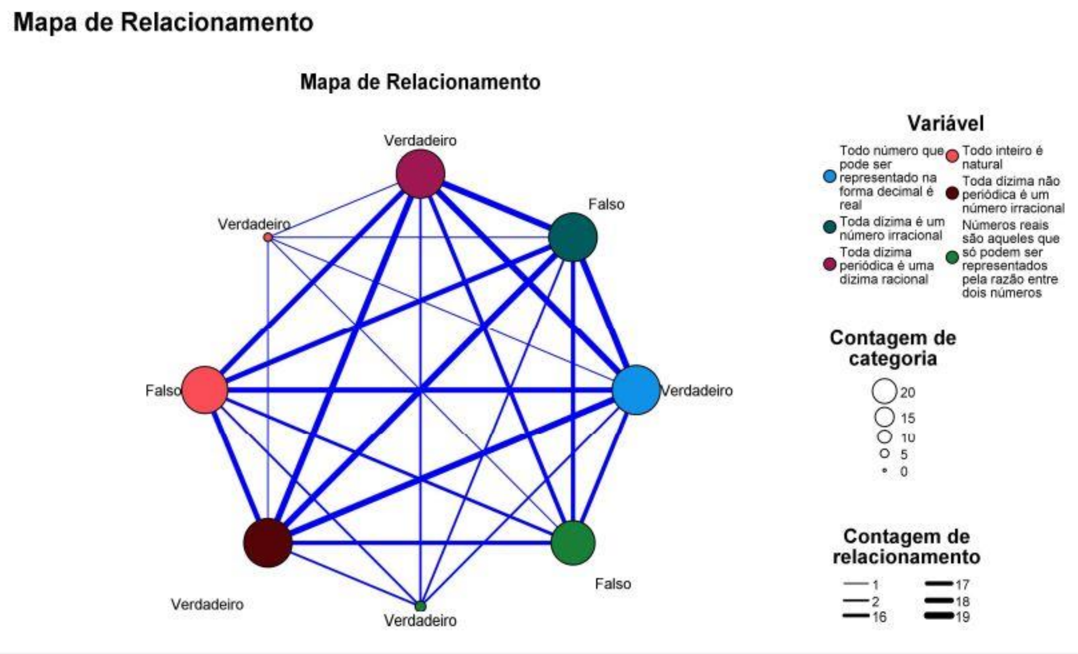
Figura 11: Tabulação cruzada Conceito de sucessor para os números racionais * Como os números racionais e irracionais estão dispostos na reta numérica

		Como os números racionais e irracionais estão dispostos na reta numérica				
		Os números racionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não há espaço para estes números visto que são representações de frações, logo não são números.	Os números reais podem ser marcados na reta numérica, mas devem estar próximos ao zero.	Os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não existe representação fracionária para eles.	Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele.	Total
Conceito de sucessor para os números racionais	FVFV	0	0	0	1	1
	VVFV	0	0	0	2	2
	VVFF	0	0	0	3	3
	VFVF	1	0	0	0	1
	FFFV	1	1	1	9	12
Total		2	1	1	15	19

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Para compartilhar os dados a respeito da última categoria, escolhemos o Mapa de Relacionamento Estatístico que mostra a intensidade das respostas dadas pelos alunos sobre suas concepções acerca da relação entre as dízimas e os números racionais e irracionais.

Figura 12: Mapa de relacionamento sobre os números reais



Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Este mapa, figura 12, demonstra a intensidade das respostas, sob classes verdadeira ou falsa, de acordo com cada variável independente estudada. A espessura que liga um ponto a outro representa a contagem de relacionamento. No mapa, por exemplo, na variável: “Toda dízima é um número irracional”, representada pela cor verde escura, mostra a intensidade de respostas no valor “Falso”, o que significa que a maior parte dos alunos assinalou “Falsa” para esta afirmação. Além disso, podemos observar que esta mesma variável possui ligações com todas as outras variáveis além de se relacionar maior com as variáveis “Toda dízima não periódica é um número irracional” e “Toda dízima periódica é uma dízima racional”. A seguir, analisaremos a última atividade (Atividade 03) realizada pelas turmas de experimento e controle, em comum.

ATIVIDADE 03

Esta atividade foi realizada após a quinta e última semana de intervenção, conteve dez questões e abordou os conteúdos: Classificação dos números, sequências e séries, convergência, limite, continuidade e números reais. Esta atividade conteve seis questões abertas e quatro questões fechadas.

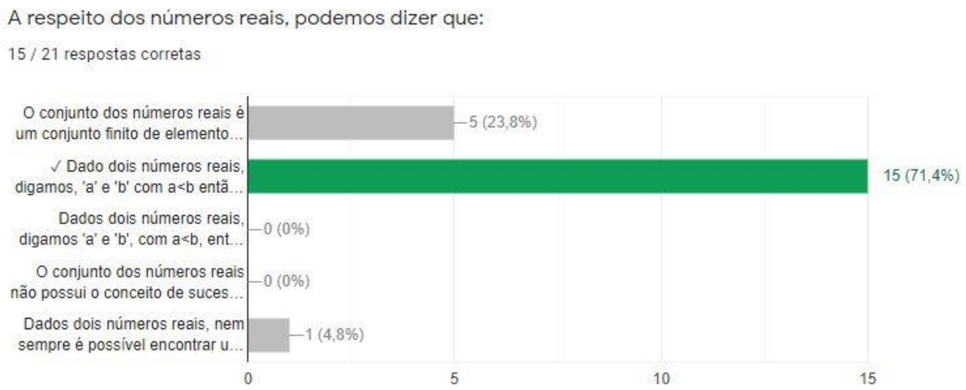
Quadro 20: Unidades Contextual e Analíticas

TURMA DE EXPERIMENTO		
ATIVIDADE 03		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
"converge", "diverge", "continuidade", "número real", "número irracional",	Expressões que envolvam o conhecimento acerca de sequências, aproximações e números irracionais.	Não há.

Fonte: Produzido pelo autor

Em primeiro lugar, com respeito aos números reais, ao perguntar sobre a disposição dos números reais na reta numérica, os alunos responderam que: Dado dois números reais, digamos, 'a' e 'b' com $a<b$ então, existe sempre um elemento 'c' pertencente aos números reais, tal que $a < c < b$. Além desta alternativa, existem alternativas referentes aos elementos a e b como sucessores, ou que, nem sempre é possível encontrar $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$. O gráfico da figura 14, gerado pela plataforma do Google Sala de Aula, mostra as frequências com relação a esta pergunta:

Figura 13: Pergunta: A respeito dos números reais podemos afirmar que



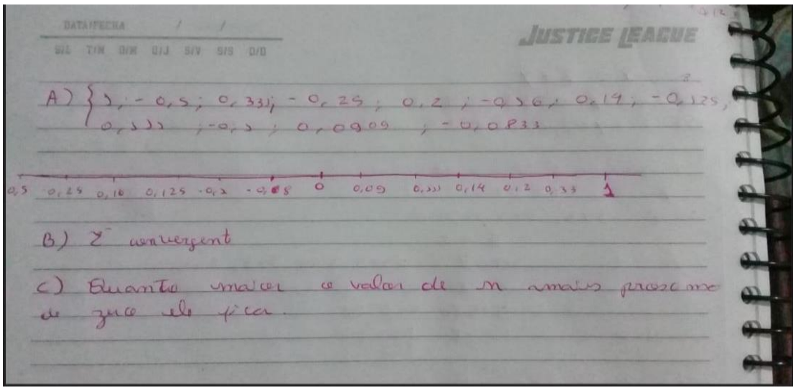
Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Pode-se perceber que mais de 70% da turma assinalou a existência de um determinado $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$ para a e b números reais. Esta resposta nos indica que o aluno entende a concepção de infinitos números reais em um intervalo específico, ou seja, entre dois números reais dados. Este resultado converge com as categorias e resultados encontrados na atividade anterior, (C4) e (C5). Novamente, estes resultados são esperançosos vistos resultados encontrados por outras pesquisas em que classificam os alunos sem entender o conceito de infinitos números irracionais entre dois racionais, ou infinitos números reais entre dois números reais dados. Além disso, podemos identificar no gráfico anterior que nenhum aluno optou por dizer que "nem sempre é possível encontrar $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$ para a e b números reais" e "O conjunto dos números reais é finito e por isso não contém a concepção de sucessor e antecessor neste conjunto".

Com respeito à disposição dos números irracionais sobre a reta numérica, aplicamos a mesma questão que havia sido aplicada na atividade anterior. Os alunos assinalaram que: Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele. Na primeira aplicação (atividade 02) 78,9% assinalaram esta mesma alternativa e, na segunda aplicação (atividade 03), 90,5% assinalaram-na como alternativa correta. Esta repetição foi causada de propósito em busca de observar alguma mudança significativa. Para nossa surpresa, o número aumentou significativamente entre as duas atividades (intervalo de duas semanas de diferença). Novamente, corrobora com a categoria (C2) encontrada na atividade 02 anterior.

A respeito da questão sobre sequências de números racionais, foi perguntado ao aluno: Observe a sequência $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e responda: a) Desenhe uma reta e marque sobre ela os termos dessa sequência até o 12º termo; b) Esta sequência converge? Explique. De 21 alunos que responderam a esta pergunta, 10 deles deixaram em branco, 1 aluno disse que a sequência converge para -1, 5 alunos dizem que a sequência converge para 0, 3 alunos entendem que a sequência não converge e 2 alunos falaram que converge para o número 2. Quase a metade de todos os alunos deixou esta pergunta sem resposta assinalando que não entenderam ou se sentiram inseguros em respondê-las. A seguir, duas respostas, uma da classe dos alunos que entendem que converge para 0 e outra da classe de alunos que entendem que converge para 2, para a pergunta: Observe a sequência de termos $\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$ e responda o que se pede: (a) Desenhe a reta real e marque os termos dessa sequência na reta até o 12º termo; B) Esta sequência de termos é convergente? C) Explique a convergência ou a divergência desta sequência.

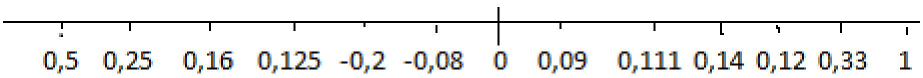
Figura 14: Resposta do aluno C**.**



Fonte: Acervo pessoal.

Transcrição.

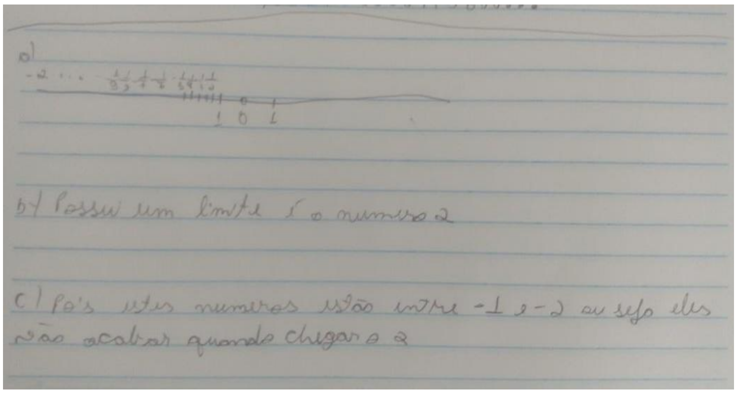
a) {1, -0,5; 0,33; -0,25; 0,2; -0,16; 0,14, -0,125; 0,111; -0,1; 0,0009; -0,0833



b) É convergente.

c) Quanto maior o valor de n mais próximo de zero ele fica.

Figura 15: Resposta do aluno E



Fonte: Acervo pessoal.

Transcrição

-2 . . . 1/9 1/3 1/4 1/6 -1/5 1/4 1/3 1/2

1 0 1

a)

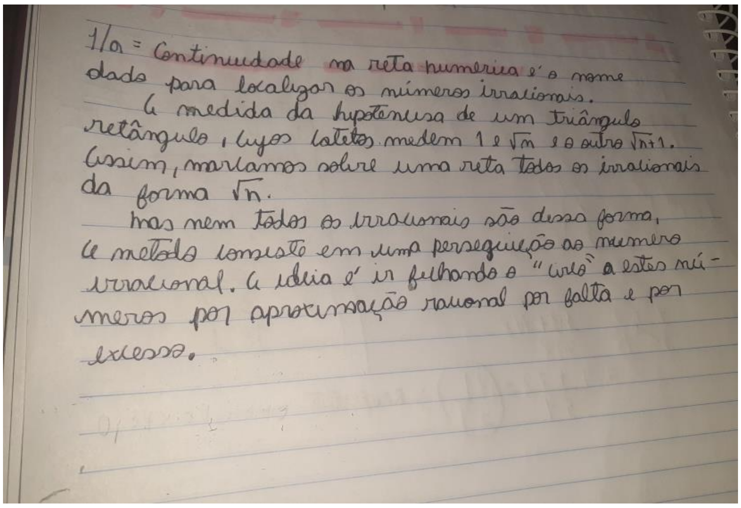
b) Possui um limite é o número 2.

c) Pois estes números estão entre -1 e -2 ou seja eles vão acabar quando chegar o 2.

Podemos identificar quanto à primeira resposta, representante da classe dos alunos que consideram que a sequência converge para 0, que os alunos identificaram que a sequência era convergente a partir da observação. À medida que iriam marcando os pontos da sequência, em ordem, observam que a os pontos se aproximam de zero. Entretanto, não foi utilizada nenhuma resposta usando alguma ferramenta matemática para, de fato, verificar que a sequência converge para 0. A segunda resposta é intrigante. Esta representa a classe dos alunos que avaliam que esta sequência converge para o número 2. Podemos observar que o aluno assinalou apenas os termos negativos na reta numérica concluindo então que os termos ficam entre -1 e -2, entretanto, assinala que a sequência converge para 2. Em primeiro lugar, o aluno marcou os pontos de maneira errada visto que a sequência possui pontos positivos e pontos negativos; em segundo lugar, o aluno afirma que os termos de sua sequência estão entre -1 e -2, entretanto, afirma que a sequência converge para 2. Essa convergência para 2, talvez, o aluno associou ao problema realizado e discutido em sala de aula que, de fato, a série convergia para 2. Portanto, tivemos muitos alunos que não entenderam a questão, poucos que conseguiram acertar a convergência, porém apenas com o auxílio da observação, e outros com respostas contraditórias a respeito da convergência.

Por fim, investigamos o conceito de continuidade concebida pelos alunos. Buscamos ser pragmáticos e perguntamos o que o aluno entendia sobre “continuidade da reta numérica”, o aluno podia escolher responder com vídeos, imagens, escritos ou gravações. Todos os alunos escolheram a forma escrita. Detalhamos as seguintes subcategorias nas respostas ditas pelos alunos a respeito da continuidade da reta numérica: (1) Descrição da reta numérica; (2) Definições de funções contínuas; (3) Continuidade associado ao limite de pontos em um intervalo na reta e (4) continuidade como preenchimento dos números irracionais na reta numérica. Em geral, os alunos se aproximam do pensamento: “*Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros”* (CAUCHY, 1899, p.13). Os alunos também associam a continuidade com a relação que a reta tem com os números irracionais mostrando, inclusive, como marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica, o que demonstra um suposto relacionamento entre a continuidade como uma reta preenchida por pontos irracionais. Demais alunos optaram por deixar em branco ou associaram à continuidade de funções reais. Entretanto, estas respostas foram pesquisadas em respostas de livros de cálculo o que caracteriza com respostas bem definidas e bem elaboradas. As imagens a seguir nos causam alguma precisão sobre as respostas dadas pelos alunos.

Figura16: Resposta do aluno B à pergunta sobre continuidade na reta numérica**.**


1/a = Continuidade na reta numérica é o nome dado para localizar os números irracionais.
A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 1 e $\sqrt{n}$ e o outro $\sqrt{n+1}$.
Assim, marcamos sobre uma reta todos os irracionais da forma $\sqrt{n}$.
Mas nem todos os irracionais são dessa forma, o método consiste em uma perseguição ao número irracional. A ideia é ir fechando o "cerco" a estes números por aproximação racional por falta e por excesso.

Fonte: Acervo Pessoal

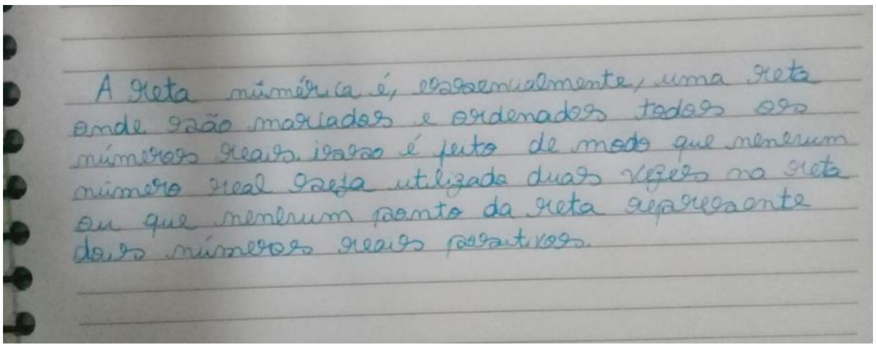
Transcrição

Continuidade na reta numérica é o nome dado para localizar os números irracionais.

A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 1 e raiz de n e o outro raiz de n+1. Assim, marcamos sobre uma reta todos os irracionais da forma raiz de n.

Mas nem todos os irracionais são dessa forma, o método consiste em uma perseguição ao número irracional A ideia é ir (ILEGÍVEL) a estes números por aproximação racional por falta e por excesso.

Figura 17: Resposta do aluno D.


A reta numérica é, essencialmente, uma reta onde são marcados e ordenados todos os números reais. Isso é feito de modo que nenhum número real seja utilizado duas vezes na reta ou que nenhum ponto da reta represente dois números reais positivos.

Fonte: Acervo pessoal.

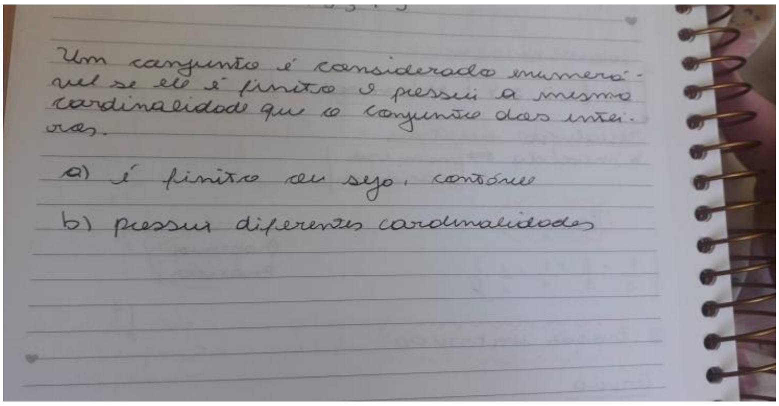
Transcrição A reta numérica é, essencialmente, uma reta onde são (ILEGÍVEL) e ordenados todos os números reais. Isso é feito de modo que nenhum número real seja utilizado duas vezes na reta ou que nenhum ponto da reta represente dois números reais positivos.

A segunda imagem ainda nos dá alguma impressão sobre o conhecimento a respeito dos números reais, exposto pelo aluno, como um conjunto ordenado e completo e visto que nenhum número pode ser posto duas vezes na mesma reta numérica e, como foi dito na resposta supracitada, todos os números reais possuem um ponto a ele associado.

Também, trabalhamos na última semana o conceito de enumerabilidade de um conjunto a fim de explicitar melhor a continuidade dos números reais na reta numérica. Os alunos, ao ser questionado a respeito do conceito de enumerabilidade de um conjunto e suas consequências sobre o conjunto dos números racionais e números reais, relacionam o conceito de enumerabilidade ao conceito de contagem e afirmam que um conjunto enumerável é um conjunto finito ou que possamos criar uma lista com todos os seus elementos, justificam assim o conjunto dos números reais possuindo diferentes listas, ou seja, cardinalidades e o conjunto dos números racionais possuindo apenas uma lista que associa a todos os números racionais. Poucos alunos deixaram esta pergunta em branco.

Embora tivessem um resultado proveitoso em relação à definição do conceito de enumerabilidade (conceito este trabalhado nas duas turmas no fim da intervenção), é importante destacar que alguns alunos demonstraram dificuldades no seu entendimento em relação à parte da cardinalidade. De fato, define-se o conjunto enumerável como finito ou que possui cardinalidade igual à cardinalidade do conjunto dos números naturais, entretanto, os alunos justificam a enumerabilidade do conjunto dos números racionais por este conjunto cumprir a primeira condição da definição, ser finito. Conclui então que o conjunto dos números racionais é finito. Esta conclusão é totalmente equivocada e perigosa. Deve-se associar sua enumerabilidade pela segunda condição de sua definição, possuir mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Vejamos as imagens a seguir das respostas do aluno M e aluno A, respectivamente:

Figura 18: Resposta do aluno H



Um conjunto é considerado enumerável se ele é finito e possui a mesma cardinalidade que o conjunto dos inteiros.

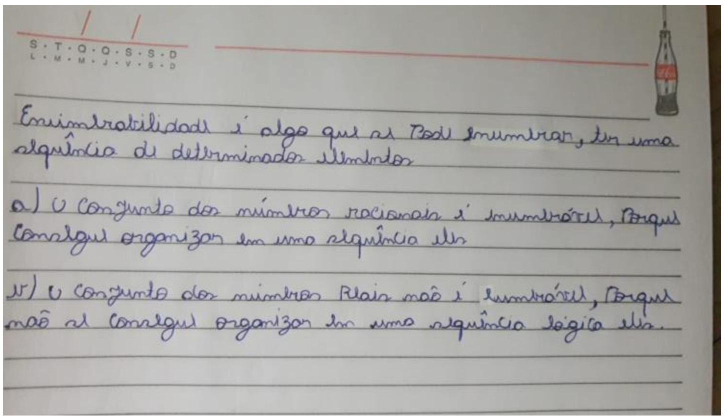
a) é finito ou seja, contável

b) possui diferentes cardinalidades

Fonte: Acervo pessoal.

Transcrição
Um conjunto é considerado enumerável se ele é finito e possui a mesma cardinalidade que o conjunto dos inteiros a) É finito ou seja, contável b) possui diferentes cardinalidades

Figura 19: Resposta do aluno A à pergunta sobre enumerabilidade.



Enumerabilidade é algo que se pode enumerar, ter uma sequência de determinados elementos

a) o conjunto dos números racionais é enumerável, porque consegue organizar em uma sequência eles

b) o conjunto dos números reais não é enumerável, porque não se consegue organizar em uma sequência lógica eles.

Fonte: Acervo pessoal.

Transcrição Enumerabilidade é algo que se pode enumerar, ter uma sequência de determinados elementos a) O conjunto dos números racionais é enumerável, porque consegue organizar em uma sequência eles. b) O conjunto dos números reais não é enumerável, porque não se consegue organizar em uma sequência lógica eles.

Por fim, vamos compartilhar as categorias que conseguimos induzir a partir da leitura sobre a atividade 03.

Quadro 21:Categorias Indutivas da atividade 3.

ATIVIDADE 03	
CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
(C7) Concepção da existência de $c \in \mathbb{R}$, tal que $a < c < b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a<b$.	Esta categoria é descrita por associar sempre um número real entre dois números reais fixados.
(C8) A convergência de uma sequência é identificada observando os primeiros valores da sequência e percebendo para qual número a sequência esteja tendendo.	Esta categoria é descrita pelas respostas dadas pelos alunos o qual conclui a convergência a partir da observação ao comportamento de termos da sequência.
(C9) O conceito de continuidade é associado a valores sucessivos que esteja tendendo a algum valor ou à relação entre a reta numérica e os números irracionais.	Esta categoria é descrita por respostas que assumem uma postura de determinados valores tendendo a um ponto de convergência, assim como respostas que indiquem alguma relação entre os números irracionais e a reta numérica.
(C10) O conceito de enumerabilidade é associado ao conceito de contagem, entretanto possui déficit no entendimento do conceito de cardinalidade.	Esta categoria é descrita por respostas que relacionem o conceito de enumerabilidade ao conceito de contagem explicando suas partes em termos dos conjuntos dos números racionais e números reais.

Fonte: Produzido pelo autor

Sobre a primeira categoria, C7, as análises anteriores demonstram que os alunos conhecem supor números reais ocupando uma posição na reta numérica, isto é, cada ponto da reta numérica está associado a um número real. Além disso, observando as categorias C8 e C9 em conjunto, os alunos aparentam identificar a reta numérica como o “lugar” dos números reais e que, diante desta reta, os números irracionais possuem uma infinidade maior que a infinidade dos números racionais. Estas conclusões também são realçadas pela tabulação cruzada entre a variável sobre os aspectos do número real na reta numérica e os aspectos relacionados aos números racionais na reta numérica, dita pelos alunos.

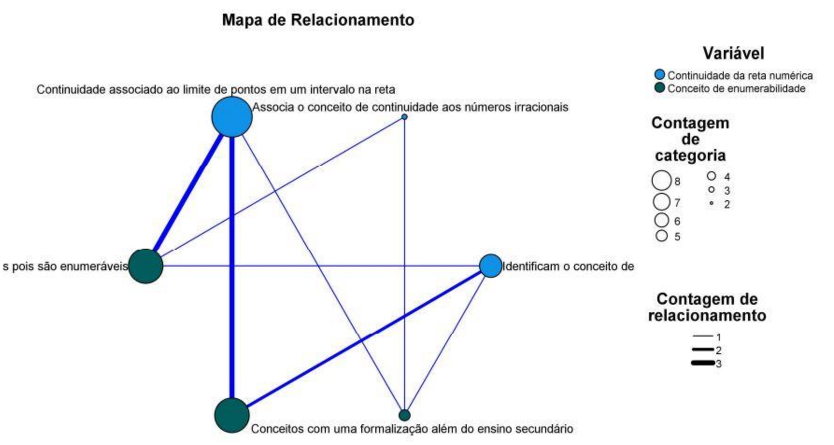
Figura 20: Tabulação cruzada entre a variável sobre os aspectos do número real na reta numérica e os aspectos relacionados aos números racionais na reta numérica

		'Números racionais na reta ...		'Números ...	
		Os números irracionais podem ser marcados na reta numérica ao final de cada intervalo e após os números decimais.	Os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não existe representação fracionária para eles.	Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele.	Total
Números Reais na reta	O conjunto dos números reais é um conjunto finito de elementos contendo os números irracionais.	1	0	3	4
	Dado dois números reais, digamos, 'a' e 'b' com a<b então, existe sempre um elemento 'c' pertencente aos números reais tal que a < c < b.	0	0	15	15
	Dados dois números reais, nem sempre é possível encontrar um terceiro tal que seja a média aritmética de 'a' e 'b'. Por exemplo, números próximos do zero.	0	1	1	2

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como podemos observar, todos os alunos que assinalaram a existência de um elemento $c \in \mathbb{R}$, tal que $a < c < b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a<b$ também optaram por assinalar que os números irracionais são marcados na reta numérica e ficam próximos aos números racionais que o aproximam dele. A concepção da existência da primeira condição implica dizer que existem infinitos números reais entre outros dois fixos desejados e que vimos esta mesma concepção aflorar em outras perguntas. A seguir, um mapa de relacionamento com as variáveis de continuidade, enumerabilidade e a concepção dos alunos sobre a disposição dos números reais na reta numérica.

Figura 21: Mapa de relacionamento com as variáveis de continuidade, enumerabilidade e a concepção dos alunos sobre a disposição dos números reais na reta numérica.



Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Este mapa de relacionamento nos mostra que os alunos que associam o conceito de continuidade ao limite de pontos em um intervalo, também associam o conjunto dos números racionais à um conjunto finito por ser enumerável e, alguns alunos que associam o conjunto dos números racionais à um conjunto finito por ser enumerável também associam o conceito de continuidade a uma descrição da reta numérica. Portanto, temos dois tipos de continuidade exposta pelo aluno: aquele ligado ao conceito de pontos em um intervalo da reta e aquele que continuidade é a descrição da reta numérica. Para estes dois públicos, o conceito de enumerabilidade dos números racionais é o mesmo, a saber, é um conjunto enumerável e por isso é finito.

4.5.2 Turma de controle

ATIVIDADE 01

Esta atividade foi realizada após a segunda semana de intervenção, conteve cinco questões e abordou os conceitos de: surgimento de números naturais, sucessor e antecessor, múltiplos, números pares e números ímpares.

Quadro 22: Unidades Contextual e Analíticas

TURMA DE CONTROLE
ATIVIDADE 01

UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“inteiro”, “divisão”, “resto”, “par”, “ímpar”, etc.	Expressões que informem algum valor a respeito das propriedades sobre os números pares e ímpares e sobre os números naturais.	Não há.

Fonte: Produzido pelo autor

Sobre o surgimento dos números naturais, a turma de controle se mostrou dividida. Alguns alunos entendem o surgimento dos números naturais associado à criação humana e a necessidade de contagem, outros preferem descrever alguns elementos ou propriedades do conjunto dos números naturais mesmo que ainda alguns desses elementos estejam errados. Ao assinalar a segunda opção, o aluno entende que as demais alternativas estejam erradas ou que a alternativa escolhida seja, talvez, a mais próxima da “verdade”. Ler uma pergunta sobre o “surgimento dos números naturais” e responder com uma descrição de alguns elementos demonstra insegurança na visão de que a matemática seja uma criação humana e/ou esteja relacionada ao conceito de contagem.

A turma de controle demonstrou entender os conceitos de sucessores e antecessores no conjunto dos números naturais. Sobre o entendimento a respeito de propriedades a respeito dos números pares e números ímpares, define-se duas subcategorias de respostas: (1) Descrição da propriedade utilizando símbolos matemáticos; (2) Descrição da propriedade utilizando a linguagem materna. Neste ponto, a turma de controle também se mostrou dívida entre as duas primeiras categorias. A partir da primeira atividade, podemos caracterizar as seguintes categorias:

Quadro 23: Categorias indutivas da atividade 1 da turma de controle

ATIVIDADE 01	
CATEGORIA	DESCRIÇÃO
(CC1) Os números naturais possuem concepções distintas a respeito de seu surgimento.	Esta categoria é descrita como expressões relacionadas aos números naturais e seu surgimento.
(CC2) Conceitos de sucessor e antecessor são bem aceitos.	Esta categoria é descrita como expressões que relacionem os conceitos de sucessor e antecessor entre os números naturais.

(CC3) As propriedades utilizadas na descrição dos números pares e ímpares são divididas entre a utilização de símbolos matemáticos e a linguagem materna.	Esta categoria é descrita como expressões que descrevam as propriedades sobre os números pares e ímpares.

Fonte: Produzido pelo autor

A seguir, podemos observar a tabela de frequências sobre a concepção do surgimento dos números naturais entendido pela turma de controle. A categoria CC1 identifica uma divisão entre esta concepção, o que é realçado por alguns dados estatísticos, 39,4% dos alunos considera o surgimento dos números naturais como criação humana e relacionada ao conceito de contagem enquanto 45,5% (50% das respostas válidas) dos alunos não identifica o surgimento dos números naturais como criação humana e/ou relacionada ao conceito de contagem, assinalando a descrição de alguns elementos ou propriedades, mesmo que nem todas estejam corretas, dos números naturais. A tabela a seguir representa da melhor maneira.

Além disso, a categoria CC3 possui três subcategorias que, de um modo geral são: (1) Descrição da propriedade utilizando símbolos matemáticos; (2) Descrição da propriedade utilizando a linguagem materna. De fato, 36,7% dos alunos se enquadram na primeira subcategoria e 40,0% descreveram a definição dos números pares e impares com linguagem

Figura 22: Tabela de frequência sobre a concepção do surgimento dos números naturais

Tabela de Frequências

Surgimento dos números naturais

		Frequência	Porcentagem	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	O conjunto dos números naturais foi uma criação humana, os primeiros números existentes e sua criação está relacionada ao conceito de contagem.	13	39,4	43,3	43,3
	O conjunto dos números naturais, historicamente, foram números que foram criados quando a necessidade do ser humano passou a ser medir comprimentos de terras.	1	3,0	3,3	46,7
	O conjunto dos números naturais, assim como o conjunto dos números inteiros, é um conjunto finito e possui uma parte positiva, o neutro e uma parte negativa.	1	3,0	3,3	50,0
	O conjunto dos números naturais é um conjunto infinito de números, o qual possui números pares, números ímpares e o zero sendo elemento neutro sendo nem Par nem Ímpar.	15	45,5	50,0	100,0
	Total	30	90,9	100,0	
Omisso	Sistema	3	9,1		
Total		33	100,0		

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

materna, sem a utilização de símbolos matemáticos. As respostas a seguir, dos alunos D e F da turma de controle, representam as subcategorias supracitadas.

Figura 23: Resposta do aluno A

Propriedade para os pares--> Todo número divido por dois resta 0; propriedade para os ímpares--> todo número dividido por dois resta um número que difere de 0

Fonte: Acervo pessoal

Figura 24: Resposta do aluno B

~Números pares e impares

P={x|x = 2n,em que n E|N} P=0,2,4,6,8......

I={y|y=2n+l,em que n E|N} i=1,2,3,5,7,9...

Fonte: Acervo pessoal

Isso demonstra que a turma de controle possui uma maior disposição à linguagem simbólica da matemática, isto é, sentem-se confortáveis ao entender e utilizar à linguagem simbólica.

ATIVIDADE 02

Esta atividade foi realizada após a quarta semana de intervenção, conteve oito questões e abordou os conteúdos: Operações com frações, dízimas periódicas, números racionais na reta numérica e sequências.

Quadro 24: Unidades Contextual e Analíticas

TURMA DE CONTROLE
ATIVIDADE 02

UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“inteiro”, “divisão”, “resto”, “racional”, “irracional”, “sucessores”, “conjunto dos números racionais”, “antecessores”, “aproximação”, “infinito”, etc.	Expressões que realçam a existência ou não do conceito de sucessor no conjunto dos números racionais, assim como as expressões que envolvam conceitos de aproximações e infinitos.	Não há.

Fonte: Produzido pelo autor

A segunda atividade aplicada na turma de controle demonstrou que alguns alunos dominam as operações aritméticas com as frações, utilizando as ferramentas e propriedades, outra parte da turma demonstrou falhas de interpretação sobre a questão, pois não montaram as expressões corretamente. Perguntados sobre “qual número é identificado na diagonal de um retângulo em que largura é o dobro da altura?”, todos os alunos responderam que a diagonal era um valor “Racional não inteiro”. Infelizmente, não temos as respostas por escrito desta pergunta, foi caracterizada por uma pergunta objetiva. Entretanto, entender a diagonal como racional não inteiro, implica dizer que para todos os exemplos práticos testados pelos alunos, o valor que surge é irracional e mesmo assim eles optam por entender que é racional. Mas então, como eles identificam um número racional ou irracional? As respostas adiante explicarão melhor este tópico.

Com relação à concepção da não existência de sucessores e antecessores no conjunto dos números racionais, realizamos quatro afirmações: (1) $n+1$ é o sucessor de n; (2) n e $n+1$ são sucessores; (3) Todo número racional possui sucessor; e (4) Não existe a noção de sucessor e antecessor sobre os números racionais. Em seguida, pedimos para o aluno assinalar com ‘V’ para verdadeiro e ‘F’ para falso. A turma de controle demonstrou entender que há o conceito de sucessor e antecessor no conjunto dos números racionais, isto é, entendem que entre dois números racionais há somente um único terceiro, tal que este terceiro é sucessor do primeiro e antecessor do segundo número fixado. Esta concepção se assemelha aquelas encontradas por Igliori e Silva (2001) em seus trabalhos.

Entretanto, devemos observar com atenção as respostas relacionadas entre as afirmações (4) e (3) que, em todos os casos que estas estavam relacionas entre si (F para afirmação 3 e V para afirmação 4) as primeiras afirmações (1) e (2) estavam como verdadeiras. Isto talvez possa implicar que esses alunos, cerca de 1/3, não associaram ‘*n*’ a um número racional, mas a um número natural, ou talvez não compreendam a ideia de um número n pertencer a um determinado conjunto e considera-lo sempre com as propriedades que os cercam determinadas pelo conjunto.

Com respeito aos números racionais e irracionais dispostos na reta numérica, infelizmente, os alunos carregam a concepção de que os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não possuem representação fracionária para estes números. Esta concepção tem implicações graves no conceito de número real. Os alunos entendem que os números irracionais não possuem representação fracionária para eles, o que é um ponto positivo, entretanto também dizem que somente os números racionais podem ser marcados na reta numérica. Esta implicação possui conceitos atrelados a ela como o de que toda medida é expressa por um número racional, isto é, um número racional é exato enquanto que o número irracional é inexato. Esta concepção foi demonstrada encontrada nos alunos em diversas pesquisas como Fischbein, Jehian e Cohen (1995), Igliori e Silva (2001) e Soares, Ferreira e Moreira (1999).

Sobre a representação das dízimas periódicas com relação aos números racionais e irracionais os alunos acertaram todas as questões identificando números racionais como aqueles que são representados por frações ou que possuem representação decimal periódica infinita ou finita e números irracionais como possuindo representação decimal infinita e não periódica. Portanto, a partir do resultado anterior em comparação a este, os alunos entendem as representações dos números racionais e irracionais embora não compreendem como estes se correlacionam com a reta numérica. A seguir, compartilhamos as categorias indutivas.

Quadro 25: Categorias indutivas da atividade 2 da turma de controle

ATIVIDADE 02	
CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
(CC4) Os alunos assinalam a existência da noção de sucessores e antecessores no conjunto dos números racionais.	Esta categoria é descrita como expressões a respeito do conceito de sucessores e a visão do aluno sobre os números irracionais na reta numérica.
(CC5) Os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não possuem representação fracionária.	Esta categoria é descrita como expressões que caracterizam os números irracionais na reta numérica.

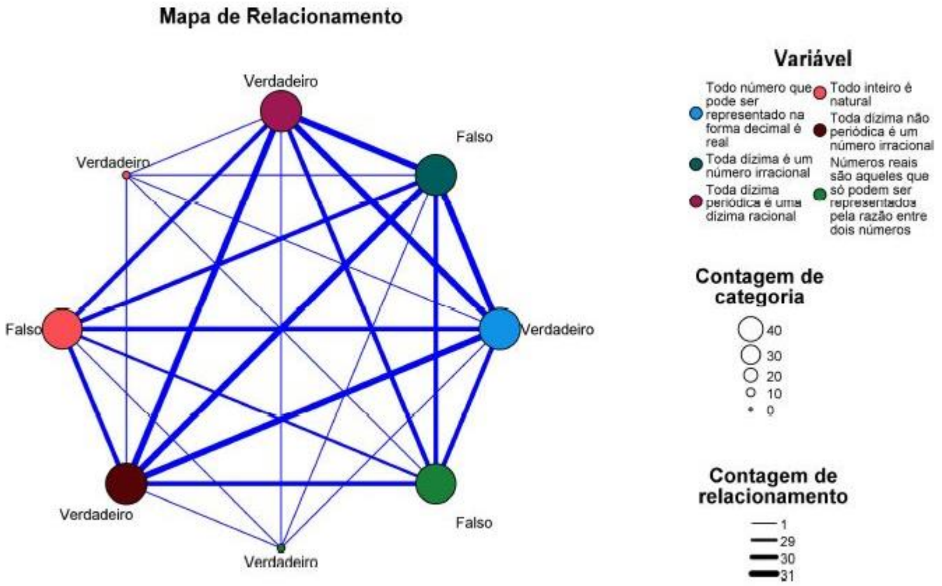
(CC6) Os alunos identificam as representações decimais dos números racionais e irracionais.	Esta categoria é descrita como expressões que classificam os números.

Fonte: Produzido pelo autor

A primeira categoria representa 77,4% dos alunos da turma, como podemos verificar pela tabela de frequências acima, além disso, esta posição assinala graves erros conceituais a respeito dos números reais, sua densidade e completude, o que coloca em cheque se, de fato, o ensino convencional é ideal para o aluno aprender o conceito de número real. Apenas 22,6% assinalaram que qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica ficando próximos de números racionais que o aproximam dele.

Além disso, a categoria CC6 foi caracterizada com maestria pelos alunos visto que 100% dos alunos acertaram todas as afirmações, apenas 3,2% (1 aluno) que assinalou que os números reais só podem ser escritos de maneira fracionária e este mesmo aluno respondeu que todo número inteiro é um número natural. A seguir, o mapa de relacionamento para que possamos perceber com maior nitidez.

Figura 25: mapa de relacionamento para que possamos perceber com maior nitidez.



Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como podemos observar lendo, na legenda do mapa, a variável e associando sua cor, podemos identificar no mapa o valor que o aluno respondeu. Por exemplo, para a variável "Todo número que pode ser representado na forma decimal é real", sua cor é azul e identificando no mapa, o círculo azul com a legenda verdadeiro. Ou seja, os alunos identificam esta variável como verdadeira. Observamos também que o tamanho do círculo é influenciado pelas frequências dos dados, como temos seis círculos com tamanhos iguais, possuem mesma frequência. As linhas que os ligam revelam suas relações, os quais estão todas relacionadas.

ATIVIDADE 03

Esta atividade foi realizada após a quinta e última semana de intervenção, conteve dez questões e abordou os conteúdos: Classificação dos números, sequências e séries, convergência, limite, continuidade e números reais. Esta atividade conteve seis questões abertas e quatro questões fechadas.

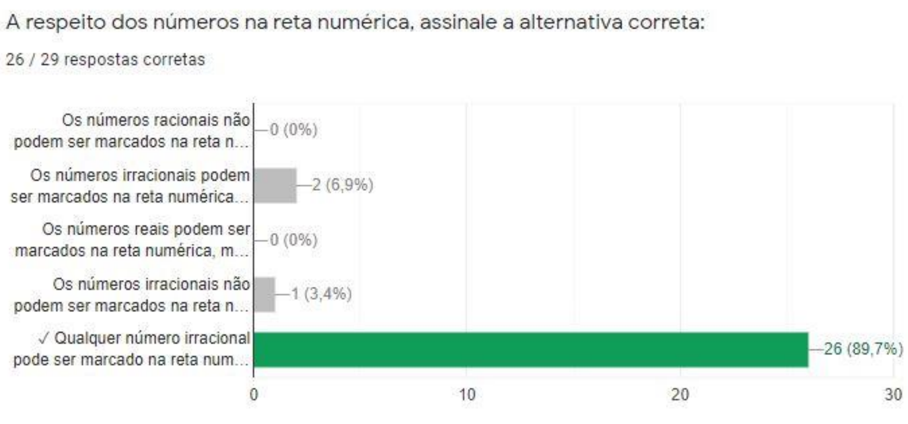
Quadro 26: Unidades Contextual e Analíticas

TURMA DE CONTROLE		
ATIVIDADE 03		
UNIDADE DE CODIFICAÇÃO	UNIDADE CONTEXTUAL	UNIDADES ANALÍTICAS
“converge”, “diverge”, “continuidade”, “número real”, “número irracional”,	Expressões que envolvam o conhecimento acerca de sequências, aproximações e números irracionais.	Não há.

Fonte: Produzido pelo autor

A respeito da disposição dos números reais na reta numérica, a turma de controle entende que “Dados dois números reais, digamos ‘a’ e ‘b’, com $a<b$, então existe sempre existe um elemento $c \in \mathbb{R}$ tal que $a<c<b$.”. De fato, grande parte da turma assinalou esta perspectiva em detrimento, por exemplo, a ideia de sucessores no conjunto dos números reais. O gráfico gerado pela plataforma *Google Forms*, nos dá uma visão sobre esta concepção da turma de controle.

Figura 26: disposição dos números reais na reta numérica, concepção da turma de controle



Fonte: Produzido pelo autor no Google Forms

Com relação à disposição dos números racionais e irracionais na reta numérica, diferentemente da atividade 02, assinalaram que “qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele.”. Esta concepção é recente, visto que os da atividade 02 implicam na visão de que os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não possuem representação fracionária. A disparidade foi tanta que resolvemos expor primeiro um gráfico produzido pelo *Google Forms* que nos ajuda a entender.

A mudança ocorreu significativamente e demasiadamente rápido, então, investigamos o motivo desta aparente visão modificada e significativa. O autor entende que esta mudança foi devida a uma aula de revisão que foi dada para estes alunos com foco no simulado elaborado

Figura 27: Disposição dos números racionais e irracionais na reta numérica

Fonte: Produzido pelo autor no Google Forms

pela escola e, em algum momento, foi-se trabalhado o conceito de irracional, racional e real na reta numérica. Nesta aula, embora não tenha sido com foco nos números reais, também foram trabalhados ao final da aula, alguns conceitos referentes aos números reais.

O conceito de convergência de sequências também foi trabalho nesta turma, identificamos para esta turma quando sequências tendem para um determinado valor e que existem sequências que divergem. Quando perguntados a respeito da sequência $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ os alunos identificam a convergência a partir dos pontos desenhados na reta numérica, entretanto, apenas um aluno acertou o limite de sua convergência e os demais alunos optaram por dizer que a sequência era divergente ou convergiam para -2 ou -1. Infelizmente, nenhum aluno utilizou alguma justificativa para suas respostas e argumentos.

Buscamos investigar também o conceito de continuidade para os alunos da turma de controle, a partir dos dados, podemos descrever três tópicos a respeito da continuidade: (1) Identificam o conceito de continuidade associado à descrição da reta numérica; (2) Definição de função contínua; (3) Associa o conceito de continuidade ao conceito de sequências de número sucessores. A maior parte dos alunos buscou a definição formal de continuidade associada à função real de uma variável real. Outra pequena parte associa o conceito de continuidade ao conceito de sequência sucessivo, sem maiores informações.

Outro conceito que também foi dialogado com os alunos da turma de controle foi o conceito de enumerabilidade. Este conceito foi trabalhado rapidamente e foi discutido a partir das falas sobre o infinito dado pelo professor em sala de aula. Além disso, foi pedido o que o aluno entende pelo conceito de enumerabilidade. Os alunos então responderam a definição "Um conjunto é chamado enumerável ou contável se ele é finito ou se ele possui a mesma cardinalidade que o conjunto dos inteiros positivos Z+. Caso contrário o conjunto é chamado não-enumerável ou não-contável". Talvez, a maioria dos alunos buscou este tipo de resposta por certa insegurança sobre o assunto, foi uma fala rápida de, no máximo, 25 minutos sobre o conceito de enumerabilidade abordado pelo professor em sala de aula.

A partir então dos dados relacionados antes, podemos categorizar nossos dados como resultado.

Quadro 27: Categorias indutivas da atividade 3 da turma de controle

ATIVIDADE 03	
CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
(CC7) Concepção da existência de $c \in \mathbb{R}$, tal que $a < c < b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.	Esta categoria é descrita por associar sempre um número real entre dois números reais fixados.
(CC8) A convergência de uma sequência é identificada observando os primeiros valores da sequência e identificando para qual número a sequência esteja tendendo. Entretanto, afirmam convergências distintas.	Esta categoria é descrita pelas respostas dadas pelos alunos o qual conclui a convergência a partir da observação dos pontos dispostos na reta numérica.
(CC9) O conceito de continuidade não foi bem entendido pelos alunos.	Esta categoria é descrita por respostas que identifiquem visões acerca do conceito de continuidade.
(CC10) O conceito de enumerabilidade não foi bem entendido pelos alunos.	Esta categoria é descrita por respostas que identifiquem visões acerca do conceito de enumerabilidade.

Fonte: Produzido pelo autor

4.5.3 Resultados do questionário final e do teste final

Realizada a intervenção, na semana seguinte a última aula trabalhada com à turma de experimento, foi combinado com os alunos da turma de controle e turma de experimento um horário extra que as duas turmas pudessem realizar o questionário final e o teste final. Como foi dito, tivemos um baixo índice de participação na turma de controle com oito participantes antes da intervenção (aprox. 26,66% < 30%) e 14 participantes depois da intervenção (aprox. 46,66%). A turma de experimento, contrapondo a turma de controle, teve um índice de 69,56% antes da intervenção com 16 participantes e 82,60% depois da intervenção com 19 participantes.

O questionário e teste foram construídos com base em categorias pré-existentes e estas foram criadas na fase de planejamento da intervenção.

Quadro 28: Categorias indutivas do questionário e teste final

CATEGORIA	DESCRIÇÃO
(C1) Concepção sobre a matemática	A concepção sobre a matemática pode ser classificada quanto a: 1) gostar de estudar matemática; 2) dificuldade de estudar matemática; 3) visão da matemática como ciência e se está presente em nosso cotidiano; 4) a matemática como solução para resolver problemas.
(C2) Concepção sobre o uso de história da matemática	A concepção sobre o uso da história da matemática em sala aula pode ser classificada em *assentimento* quando o sujeito da pesquisa assinala os rótulos "Concordo completamente" ou "Concordo em parte"; *negativa* quando o sujeito da pesquisa assinala os rótulos "Discordo completamente" ou "Discordo em parte"; e *ausente* quando o sujeito da pesquisa assinala o rótulo "Nem discordo, nem concordo".

Fonte: Produzido pelo autor

Estas duas categorias culminaram nas seguintes variáveis: 1) Gostar de matemática; 2) Dificuldade em matemática; 3) A matemática está no cotidiano; 4) Só os melhores sabem matemática; 5) A matemática é uma ciência; 6) Saber matemática é saber resolver problemas; 7) Utilização da história da matemática em sala; e 8) Utilizar fontes históricas ajuda no aprendizado em matemática.

4.5.3.1 Turma de controle

O questionário aplicado com a turma de controle após a intervenção mostrou que no aspecto de "gostar de matemática" não houve diferença significativa para o questionário inicial.

A turma de controle caracterizou a matemática como “péssimo ou ruim” (28,5%) e “boa ou muito boa” (28,6%). Em comparação ao questionário inicial da turma de controle, alguns alunos se deslocaram destas duas variáveis e consideram que a matemática é “razoável” (42,9%). Este índice subiu 17,9% com relação ao questionário aplicado inicialmente. Sobre a concepção a respeito da dificuldade com matemática encontrada pelos alunos, exatamente 50% relataram que a matemática é “extremamente difícil ou difícil” enquanto 21,4% da turma avalia que a matemática é “Fácil ou Muito fácil”. Além disso, 100% dos alunos continuam ponderando que a matemática está presente em nosso cotidiano e 12 alunos (85,7%) dizem que a matemática é uma ciência e 2 alunos (14,3%) consideram que, em parte, a matemática é uma ciência.

Outro fator importante é que para esses alunos a matemática é, essencialmente, saber resolver problemas (92,9%) e que somente os melhores da sala são bons em matemática (71,5%). Este último resultado obteve um aumento com relação ao questionário inicial, embora não significativo, em que 62,5% dos alunos assinalaram que a matemática era entendida somente pelos melhores em sala de aula, não houve um aumento. Portanto, embora algumas variações, a turma de controle demonstrou avaliar que a matemática é “razoável”, isto é, a turma é dividida e alguns alunos gostam de estuda-la e outros nem tanto.

Também, mantendo os mesmos índices sem aumento ou diminuição significativa em relação ao questionário inicial, a turma de controle ainda considera que a matemática é, essencialmente, resolução de problemas e somente os melhores conseguem aprendê-la. Além disso, a turma de controle demonstra ponderar que a matemática é uma ciência e que está presente em nosso cotidiano.

Ainda sobre a turma de controle, no que tange, novamente, sobre a concepção a respeito da utilização da história da matemática em sala de aula de matemática, a turma se mostrou bastante dividida com 4 alunos que “discordam completamente” do seu uso, 4 alunos que “nem

Figura 28: Frequência sobre a variável história da matemática em sala de aula no aprendizado da matemática

Utilizar a história da matemática em sala de aula ajuda no aprendizado da matemática

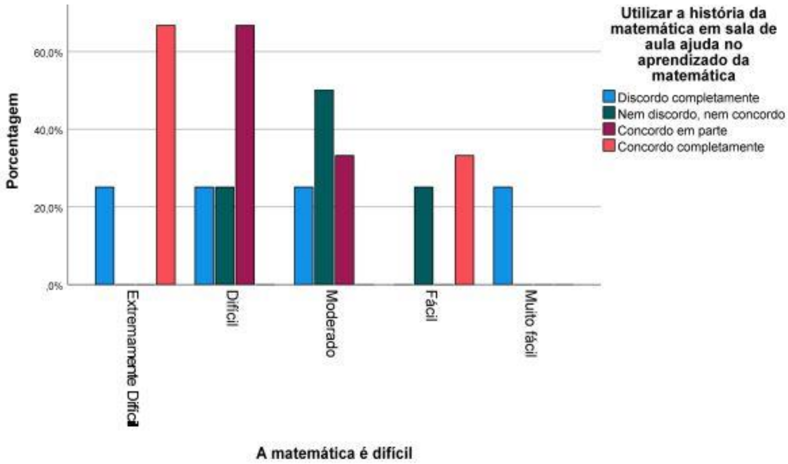
		Frequência	Porcentagem	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	Discordo completamente	4	28,6	28,6	28,6
	Nem discordo, nem concordo	4	28,6	28,6	57,1
	Concordo em parte	3	21,4	21,4	78,6
	Concordo completamente	3	21,4	21,4	100,0
	Total	14	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

discorda" e "nem concorda" e 6 alunos que concordam completamente ou concordam em parte. Entretanto, pela categoria C2 anterior, podemos classifica-los como *assentimento*, isto é, houve um maior número de frequências que assinalaram esta alternativa. Diferentemente da última análise, a turma de controle se mostrou *ausente*, pois não havia uma posição consolidada a respeito do assunto. Talvez, o número de alunos que aumentou de um questionário para outro, modificou este cenário. A seguir, podemos visualizar uma tabela de frequências que nos dá uma visualização melhor deste aspecto.

Observamos o gráfico adiante que mostra uma relação entre as variáveis "Dificuldade em matemática" e "A utilização da história da matemática em sala de aula".

Figura 29: Relação entre as variáveis "Dificuldade em matemática" e "A utilização da história da matemática em sala de aula".



Este gráfico aponta que mais de 60% dos alunos que assinalam que concordam

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

completamente com a utilização da história da matemática também assinalam que a matemática é extremamente difícil, além disso, mais de 60% dos alunos que concorda em parte sobre a utilização da história em sala de aula, também assinalam que a matemática é difícil. Este dado conclui que, geralmente os alunos que entendem a matemática como umas disciplinas muito difíceis concordam com a utilização de diferentes metodologias, em particular, a história da matemática. Portanto, alunos que acham a matemática difícil ou complicada suplicam por diferentes metodologias nas aulas de matemática, em particular, a história da matemática.

O teste aplicado posteriormente com a turma de controle revelou uma média aritmética de 6,21(em uma escala de 0 a 10) em notas dos alunos. Um aumento em relação ao teste aplicado inicialmente. De um modo geral, os alunos sabem manusear as operações com frações, com algumas dificuldades em somas e subtrações de frações, e noções de aproximações com números racionais. Em particular, sobre alguns aspectos dos números reais, perguntamos aos alunos: (1) Qual a forma correta de marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?; (2) A respeito dos números reais na reta numérica, assinale a opção correta. Segundo as informações contidas no questionário, 37% dos alunos acertaram ao afirmar o método de construção a partir da diagonal de um quadrado de lado 1. Além disso, 47% dos alunos optaram por dizer que para marcar o ponto $\sqrt{2}$ basta realizar a raiz quadrada de 2 e observar o número decimal associado e marcar um ponto próximo à 1,4. Sobre a segunda pergunta a respeito dos números reais, tivemos uma alta significativa nas respostas do teste anterior, 85,71% dos alunos assinalaram "Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele".

Estas respostas não produzem resultados significativos a menor de uma questão, discutida antes, que obteve um avanço de 28% em relação ao teste anterior. Talvez, um dos vetores para este aumento tenha sido a aula de dúvidas que discutimos anteriormente. Entretanto, não podemos afirmar. Pelos dados, houve uma mudança significativa na interpretação do número real sobre a reta numérica, mostrando uma concepção de infinitos pontos que se aproximam entre si e de outros.

4.5.3.2 Turma de experimento

O questionário final aplicado com a turma de experimento demonstrou resultados interessantes. Em primeiro lugar, 26,3% dos alunos continuam entendendo a matemática como "extremamente difícil" ou "difícil" e 36,9% entendem a matemática como "fácil" ou "muito fácil" e 36,8% a entende como "razoável". Estes resultados indicam uma possível reorientação de visão sobre a matemática, visto que no questionário inicial, 50% da turma consideram matemática como difícil. Também, o número de alunos que consideram a matemática "razoável". Também, apenas 15,8% dos alunos não gostam de estudar matemática, 47,4%

tendem a considerar a matemática “razoável” e 36,8% gostam de estudar matemática. Este retrato estatístico da turma de controle demonstra que houve uma diminuição do número de alunos que entendem matemática como difícil e o número de alunos indecisos subiu nas duas perguntas. Embora o número de alunos que gostem de matemática diminuiu da aplicação do primeiro questionário, talvez um motivo esteja na quantidade de participantes por representar uma diminuição baixa.

A turma de experimento concede a matemática como uma ciência (100%) e que está presente em nosso cotidiano (100%). Também 100% dos alunos acham que a matemática é resolver problemas. Outro fator digno de comparação é sobre a variável “só os melhores sabem matemática”. Em contraponto ao primeiro questionário da turma de experimento em que 56,3% dos alunos “concordam completamente” que matemática é para os melhores alunos em sala de aula, apenas 15,8% da turma assinou esta alternativa. Contudo, 31,6% “concorda em parte” sobre esta variável o que dá 47,4% de alunos que “concordam em parte” ou “concordam completamente” sobre esta variável.

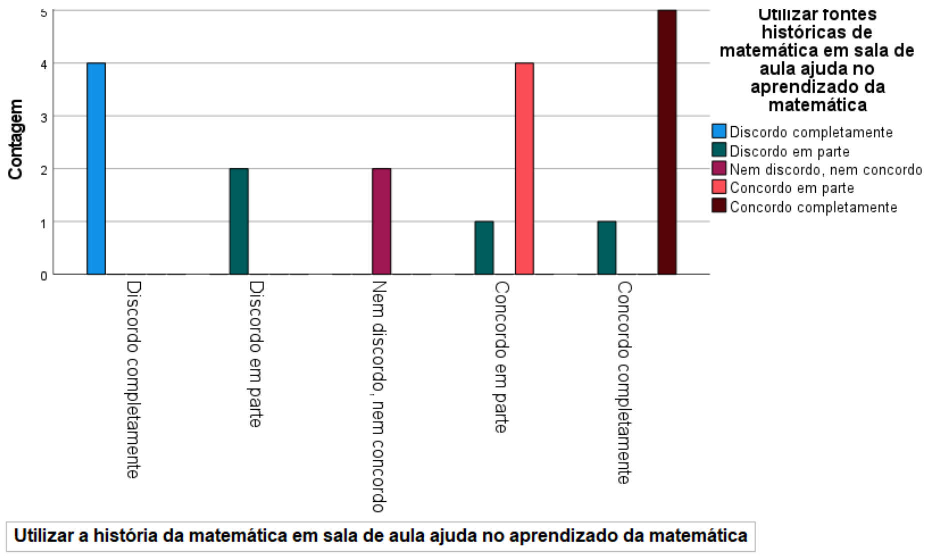
Ainda sobre esta variável, houve uma mudança de alunos que consideravam a matemática como absolutamente para alunos considerados bons em sala aula e recaíram à alterativa que concorda em parte com este pensamento, ou seja, há dúvidas a respeito deste aspecto. Também, o índice que “discorda completamente” ou “discorda em parte” subiu para 36,8% o que demonstra uma pequena acentuação deste resultado.

Portanto, a turma de experimento, após a intervenção, demonstrou encarar a matemática como menos difícil e possuem dúvidas em relação a gostar de matemática, a turma é dividida embora continuasse com índice alto da valorização de gostar de matemática. O que demonstra que aqueles alunos que gostavam de matemática, continuam gostando de matemática. A concepção da turma a respeito da matemática como ciência e como presente em nosso cotidiano, 100% dos alunos concordaram com isso. Além disso, houve uma mudança de pensamento quanto a variável “só os melhores sabem matemática” prevalecendo, novamente, uma turma dividida o que contraria os dados do questionário inicial.

Outro importante foi sobre a variável: “saber matemática é saber fazer contas”. No primeiro questionário, 100% dos alunos concordam completamente ou concordam em parte sobre esta afirmação. Entretanto, no questionário final, 26,3% discordam completamente ou em parte com esta afirmação e 42,1% nem concorda e nem discorda. Este foi uma das variáveis mais significativas na visão de mundo do aluno sobre a matemática. Mostrou uma descentralização nas respostas vinculadas à uma associação entre matemática e realizar contar.

Sobre a concepção do uso da história da matemática em sala de aula, após a intervenção, 57,9% consideram válido o uso da história da matemática em sala de aula e 31,6% discorda do uso da história da matemática. Estes resultados são animadores e confirmam nossa hipótese sobre a não utilização de metodologias diferenciadas no ensino de matemática. Diferentemente do primeiro questionário em que 56,3% não havia uma opinião formada para esta variável, no segundo questionário aplicado, este número diminui para 10,5% deslocando os alunos desta categoria para as duas outras (concordam ou não concordam com a utilização) e, consequentemente, assumem uma posição depois de experienciar a intervenção. Portanto, a turma de experimento acha válida a utilização de história da matemática em sala de aula. Outro aspecto importante foi a pergunta a respeito da utilização de fontes originais em sala de aula, que obtivemos 47,4% dos alunos que aprovam sua utilização. A seguir, apresentamos um gráfico de correlação entre as duas variáveis.

Figura 30: Utilizar a história da matemática em sala de aula ajuda no aprendizado de matemática



Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como podemos observar, os alunos que discordam da utilização da história da matemática, também discordam da utilização de fontes históricas. Entretanto, alguns alunos que concordam com a utilização da história da matemática discordam em parte da utilização de fontes originais, 2 alunos.

O teste realizado com a turma de experimento revelou uma média aritmética de 7,325 (em uma escala de 0 a 10) na assertividade das questões propostas, sem contabilizar a nota referente à questão proposta do ENEM. Os alunos continuaram mostrando dificuldades em somas e subtrações de frações, a noção de aproximação também foi identificada no segundo teste. O conhecimento acerca dos números irracionais e reais. Observa-se que sobre os números irracionais e a reta numérica, 74% dos alunos marcaram que os números irracionais podem ser marcados na reta próximos aos números racionais que o aproximam dele.

Sobre a forma correta de se marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica, 74% assinalou que, a forma correta se marcar é desenhando um quadrado de lado medindo uma unidade com um de seus vértices sobre a origem e desenhando um círculo de raio igual a diagonal do quadrado, o ponto de interseção entre a circunferência e a reta é exatamente o ponto $\sqrt{2}$. Esta porcentagem é alta em referência ao questionário aplicado inicialmente em que 23,1% tinham assinado essa opção e 61,5% considerava que bastava marcar um ponto próximo ao número racional 1,4. Esta alta representa uma visão da matemática aperfeiçoada e abrangente sobre o número $\sqrt{2}$. A partir da discussão anterior, podemos elencar o quadro comparativo a seguir.

Quadro 29: Síntese dos resultados apresentados no questionário e teste final

Turma de Controle	Turma de Experimento
Índice de participação: 46,66% (14 alunos); 28,6% gostam de estudar matemática, 42,9% acham a matemática moderada e 28,5% não gostam de estudar matemática. Os alunos entendem a matemática como uma disciplina difícil; A matemática está presente em nosso cotidiano e é uma ciência; Saber matemática é, essencialmente, saber resolver problemas (92,9%) e somente os melhores da sala são bons em matemática (71,5%). Média aritmética no teste: 6,21 (escala de 0 a 10); Os alunos sabem resolver problemas que envolvam aritmética entre os números racionais, apresentado dúvidas em somas e subtração de fração.	Índice de participação: 82,60% (19 alunos); 36,8% gostam de estudar matemática, 47,4% acham a matemática moderada e 15,8% não gostam de estudar matemática. 26,3% entendem a matemática como difícil, 36,9% entendem a matemática como fácil e 36,8% a entende como razoável. A matemática está presente em nosso cotidiano e é entendida como ciência. Saber matemática é, essencialmente, saber resolver problemas. Sobre a concepção de que a matemática é “para os melhores alunos em sala”, 15,8% dos alunos “concordam completamente”, 31,6% “concorda em parte” sobre esta variável . Sobre a concepção de que “saber matemática é saber fazer contas”: 26,3% discordam completamente ou em parte com

	esta afirmação e 42,1% nem concorda e nem discorda. Média aritmética no teste: 7,325 (escala de 0 a 10) Os alunos sabem resolver problemas que envolvam aritmética entre os números racionais, apresentado dúvidas em somas e subtração de fração.

Fonte: Produzido pelo autor

4.6 Análise Quantitativa

4.6.1 Descrição e Análise dos Testes Estatísticos

A coleta de dados foi obtida com 53 alunos cursando o 1º ano do Ensino Médio divididos em dois grupos, denominados de turma de Experimento (GE) com 23 alunos e de Controle (GC) com 30 alunos. Foi-se aplicado um teste (no início da intervenção e outro no fim da intervenção), um questionário (no início da intervenção e outro no fim da intervenção) e três atividades (Apêndice C, D e E, respectivamente) comuns às duas turmas (grupos) da amostra.

Inicialmente analisamos o desempenho dos alunos nas atividades 1, 2 e 3 desenvolvidas (Apêndice C, D e E, respectivamente) em sala de aula remota. O desempenho decorre das notas obtidas pelos alunos nas respectivas atividades (escala utilizada: 0,0 (mín) – 10,0 (máx) e é caracterizado pela média $\overline{\mu_D}$ [24] calculada pela soma das três notas dividas por três.

Os dados obtidos foram obtidos a partir das notas atribuídas às atividades realizadas pelos alunos durante a intervenção. Os quadros (30,31 e 32) demonstram as frequências para cada atividade, à classe de notas obtidas da turma de experimento (GE).

Quadro 30: Quadro de frequências da atividade 1 (turma de experimento)

ATIVIDADE_1 (Armazenado)					
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	6,00 - 7,99	20	87,0	87,0	87,0
	8,00 - 9,99	3	13,0	13,0	100,0

[24] $\overline{\mu_D} = média\ do\ desempenho.$

	Total	23	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Quadro 31: Quadro de frequências da atividade 2 (turma de experimento)

ATIVIDADE_2 (Armazenado)					
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	2,00 - 3,99	1	4,3	4,3	4,3
	6,00 - 7,99	10	43,5	43,5	47,8
	8,00 - 9,99	12	52,2	52,2	100,0
	Total	23	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Quadro 32: Quadro de frequências da atividade 3 (turma de experimento)

ATIVIDADE_3 (Armazenado)					
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	2,00 - 3,99	1	4,3	4,3	4,3
	4,00 - 5,99	2	8,7	8,7	13,0
	6,00 - 7,99	14	60,9	60,9	73,9
	8,00 - 9,99	5	21,7	21,7	95,7
	10,00+	1	4,3	4,3	100,0
	Total	23	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Também, os quadros (33,34 e 35) demonstram as frequências para cada atividade, à classe de notas obtidas da turma de controle (GC).

Quadro 33: Quadro de frequências da atividade 1 (turma de controle)

ATIVIDADE1 (Armazenado)					
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	2,00 - 3,99	6	20,0	20,0	20,0
	6,00 - 7,99	10	33,3	33,3	53,3
	8,00 - 9,99	14	46,7	46,7	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Quadro 34: Quadro de frequências da atividade 2 (turma de controle)

ATIVIDADE2 (Armazenado)						
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	2,00 - 3,99	4	13,3	13,3	13,3
	4,00 - 5,99	14	46,7	46,7	60,0
	6,00 - 7,99	12	40,0	40,0	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Quadro 35: Quadro de frequências da atividade 3 (turma de controle)

ATIVIDADE3 (Armazenado)					
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	2,00 - 3,99	2	6,7	6,7	6,7
	4,00 - 5,99	14	46,7	46,7	53,3
	6,00 - 7,99	8	26,7	26,7	80,0
	8,00 - 9,99	6	20,0	20,0	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

A pergunta a se fazer é: em média, os alunos da turma de experimento obtêm notas superiores aos alunos da turma de controle? Esta diferença entre as notas, é significativa estatisticamente?

Para visualizar com mais detalhes e buscar soluções a estas perguntas, apresentamos o quadro 36 com as medidas de tendência central (média) e medidas de variabilidade (desvio padrão e variância) das turmas GE e GC, respectivamente.

Quadro36: Medidas de tendência central e medidas de variabilidade da turma GE

Estatísticas descritivas

	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão	Variação
DESEMPENHO	23	14,20	26,50	23,8043	2,60707	6,797
N válido (de lista)	23					

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Quadro 37: Medidas de tendência central e medidas de variabilidade da turma GC

Estatísticas descritivas

	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão	Variação
DESEMPENHO	30	8,50	26,40	18,5167	4,13138	17,068
N válido (de lista)	30					

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como os quadros demonstram, em média, a turma de experimento (GE) possui notas superiores aos alunos da turma de controle (GC), além disso, como nos mostra o desvio padrão das notas (2,60707 < 4,13138), a turma de experimento demonstrou possuir mais homogeneidade que a turma de controle o que é confirmada pela variação da turma GE (6,797) e da turma GC (17,068). Estes dados indicam que, em média, há uma variação de 6,79 pontos para a média de notas encontradas na turma GE e 17,06 para a turma de controle, portanto, a turma GE possui menos variabilidade de dados que a turma GC. Mesmo em posse dos dados descritivos, ainda temos que verificar as soluções para a pergunta: Esta diferença entre as notas, é significativa estatisticamente?

Para isso, realizamos um Teste de Hipótese, Teste – t independente, que nos permite verificar se nossos dados trazem evidências estatísticas para apoiar ou desconsiderar uma hipótese estatística formulada.

Caracterizamos o desempenho da turma com as seguintes categorias indutivas exemplificadas no quadro 38 a seguir.

Quadro 38: Categorização do desempenho apresentado pelas turmas

Desempenho $\overline{\mu_D}$				
Excelente	Muito Bom	Bom	Razoável	Ruim
$9,0 \leq \overline{x_D} \leq 10,0$	$7,0 < \overline{x_D} < 9,0$	$\overline{x_D} = 7,0$	$5,0 \leq \overline{x_D} < 7,0$	$0,0 \leq \overline{x_D} < 5,0$

Fonte: Produzido pelo autor

A partir do quadro, podemos caracterizar as turmas quanto ao entendimento dos números reais de acordo com o desempenho alcançado. Utilizaremos o software SPSS, da IBM Corporation.

Em primeiro lugar buscamos identificar nossa hipótese, com base em nossas análises qualitativas, sobre o desempenho das turmas de controle (GC) e de experimento (GE). Nossa hipótese estatística é de que a turma de experimento possui desempenho superior a turma de controle. Formalmente, explicamos da seguinte forma:

$$H_0\text{: } não\ existe\ diferença\ entre\ o\ desempenho\ do\ grupo\ (GC)\ ou\ (GE).$$
$$H_1\text{: } existe\ diferença\ entre\ o\ desempenho\ do\ grupo\ (GC)\ e\ (GE).$$

Onde H_0 é chamada de hipóteses nula e H_1 a hipótese alternativa. Em termos de parâmetros para o teste – t, traduzimos da seguinte forma:

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

Em que μ_A é o desempenho médio do grupo de controle (GC) e μ_B é o desempenho médio do grupo de experimento (GE). Posto as hipóteses a serem testadas, escolhe-se o *nível descritivo* ou *probabilidade de significância*, chamado de p-valor, que será descrito nesta pesquisa por 5% (ou 0,05). Isto é, pode-se rejeitar a hipótese nula a 5% caso o valor-p seja menor que 5%. Descrito as condições de hipótese, aplicamos o teste – t aos dados obtidos.

Nossa proposta é investigar o desempenho de 53 alunos, divididos em dois grupos, por meio do teste – T independente. Por esse teste ser considerado “robusto” em estatística não é necessário o teste de normalidade para amostras maiores que 30. Realizando o teste – t no software SPSS, obtemos o quadro.

Quadro 39: Teste -t para amostras independentes

Teste de amostras independentes

		Teste de Levene para igualdade de variações		teste t para Igualdade de Médias						
									95% Intervalo de confiança da diferença	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2 extremidades)	Diferença média	Erro padrão de diferença	Inferior	Superior
DESEMPENHO	Variações iguais assumidas	4,756	,034	-5,367	51	,000	-5,28768	,98524	-7,26564	-3,30972
	Variações iguais não assumidas			-5,687	49,386	,000	-5,28768	,92976	-7,15574	-3,41962

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

A partir do quadro 39, podemos visualizar o teste de Levene que caracteriza as turmas de controle e de experimento como não homogêneas (Sig = 0,034)[25]. O SPSS calcula o valor-p de acordo com a homogeneidade ou não da amostra, além disso, no SPSS, a sigla que devemos observar é *Sig* que significa *significância estatística*. Aplicando o teste – t, deve-se observar que se a hipótese nula estiver correta (não há alteração média entre o desempenho das turmas), então $p>0{,}05$, e se a hipótese alternativa estiver correta, com $p<0{,}05$, então há diferença entre os desempenhos apresentados pelas turmas.

Pode-se perceber que o Sig do teste – t é 0,00 ($p<0{,}05$), o que significa, que podemos anular a hipótese nula e aceitar a hipótese alternativa. De fato, houve mudança no desempenho significativo entre as turmas após as intervenções realizadas. Entretanto, é de se esperar que o Teste – T também indique qual turma possui maior desempenho. Para isso, vamos apresentar o quadro a seguir que descreve o maior desempenho entre as turmas por meio da coluna 'Média'.

Quadro 40: Medidas de tendência central e de variabilidade

Estatísticas de grupo

	GRUPO	N	Média	Desvio padrão	Erro padrão da média
DESEMPENHO	CONTROLE	30	18,5167	4,13138	,75428
	EXPERIMENTO	23	23,8043	2,60707	,54361

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Neste caso o desempenho maior foi apresentado pela turma de experimento (23,8043), o que significa que a intervenção realizada no grupo de experimento é mais significativa e eficaz que a intervenção convencional realizada na turma de controle. Portanto, o teste – t independente mostrou que, em média, os alunos do grupo de experimento apresentam desempenho superior à dos alunos do grupo de controle ($t(51) = -5{,}367$; $p < 0{,}05$).

Por fim, compartilhamos os quadros da estatística descritiva das turmas de controle e de experimento a fim de categorizar as turmas de acordo com o quadro de desempenho anterior.

Quadros 41 e 42: Medidas de tendência central e de variabilidade

[25] Hipótese de Levene: $H_0: são\ homogêneos\ (p > 0{,}05)\ e\ H_1: são\ heterogêneos\ (p < 0{,}05)$.

Estatísticas

MÉDIA

N	Válido	30
	Ausente	0
Média		6,1722
Mediana		6,3667
Modo		6,20[a]
Erro padrão		1,37713
Variação		1,896
Mínimo		2,83
Máximo		8,80
Soma		185,17

a. Ha vários modos. O menor valor é mostrado

Estatísticas

MÉDIAS

N	Válido	23
	Ausente	3
Média		7,4130
Mediana		7,6333
Modo		7,80[a]
Erro padrão		,63642
Variação		,405
Mínimo		5,40
Máximo		8,33
Soma		170,50

a. Ha vários modos. O menor valor é mostrado

Fonte: Produzido pelo autor

O quadro a esquerda refere-se a turma de controle e quadro a direita refere-se a turma de experimento. Lembrando que estas médias são obtidas a partir das atividades desenvolvidas pelos alunos. Neste caso, a média da turma de controle (6,1722) configura a turma como "Razoável" visto que 5,0 < 6,17 < 7,0 e a média obtida pela turma de experimento (7,4130) configura a turma como "Muito Bom", pois 7,0 < 7,41 < 9,0. Também, é importante observar a variação dos dados que demonstram a variação das notas obtidas da turma de experimento menor que a encontrada na turma de controle (0,405 < 1,896).

Para melhor fundamentar este desempenho, vamos realizar três testes estatísticos referente aos testes iniciais e finais aplicados com as turmas. Para isso, todos os alunos receberam uma nota (N_1) para o teste inicial e uma nota (N_2) para o teste final. Vamos verificar a relação entre as notas (N_1) da turma de controle e experimento buscando compreender alguma significância, ou não, dos resultados antes da intervenção. Vamos verificar a relação entre as notas (N_2) das turmas buscando a mesma significância, ou não, para tentar compreender se houve alguma interferência significativa da intervenção no desempenho alcançado pelos alunos nos testes. Por fim, verificamos se houve desempenho significativo entre (N_1) e (N_2) comparando o mesmo grupo de alunos antes, e depois da intervenção.

Antes de iniciar os testes, enfatizamos que utilizamos apenas os resultados obtidos pelos alunos que realizaram o teste inicial e final, retirando assim os alunos que realizaram apenas um dos destes (inicial ou final). Além disso, iremos mostrar os dados descritivos afim do leitor obter uma visão completa sobre os dados obtidos e para possíveis comparações em futuras pesquisas. A seguir, os quadros 43 e 44 mostram as frequências referentes às notas obtidas no primeiro teste N1 (quadro 43) e N2 (quadro 44) da turma de experimento.

Quadro 43: Quadro de frequências da turma de experimento em N1

TESTE_1 (Armazenado)						
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	2,00 - 3,99	2	12,5	12,5	12,5
	4,00 - 5,99	4	25,0	25,0	37,5
	6,00 - 7,99	9	56,3	56,3	93,8
	8,00 - 9,99	1	6,3	6,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Quadro 44: Quadro de frequências da turma de experimento em N2

TESTE_2 (Armazenado)					
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	4,00 - 5,99	2	12,5	12,5	12,5
	6,00 - 7,99	9	56,3	56,3	68,8
	8,00 - 9,99	5	31,3	31,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

A seguir, os quadros 45 e 46 mostram as frequências referentes às notas obtidas no primeiro teste N1 (quadro 45) e N2 (quadro 46) da turma de controle.

Quadro 45: Quadro de frequências da turma de controle em N1

TESTE_1 (Armazenado)					
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	4,00 - 5,99	5	31,3	62,5	62,5
	6,00 - 7,99	2	12,5	25,0	87,5
	8,00 - 9,99	1	6,3	12,5	100,0

	Total	8	50,0	100,0	
Ausente	Sistema	8	50,0		
Total		16	100,0		

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Quadro 46: Quadro de frequências da turma de controle em N2

TESTE_2 (Armazenado)					
		Frequência	Porcentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulativa
Válido	4,00 - 5,99	3	18,8	37,5	37,5
	6,00 - 7,99	4	25,0	50,0	87,5
	8,00 - 9,99	1	6,3	12,5	100,0
	Total	8	50,0	100,0	
Ausente	Sistema	8	50,0		
Total		16	100,0		

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Em posse dos dados descritivos referentes às tabelas de distribuição de frequências com relação as notas N1 e N2 retiradas pela turma de controle nos testes aplicados, pode-se perguntar: (1) Em média, as notas do teste N1 de GE e as notas do teste N1 de GC possuem diferenças significativas? (2) As notas do teste N2 de GE e as notas do teste N2 de GC possuem diferenças significativas, estatisticamente? (3) As notas N1 e N2 da turma de experimento possuem diferenças? E as notas N1 e N2 da turma de controle, possuem diferença significativa? Para começar a solucionar esses questionamentos, apresentamos a estatística descrita das turmas de experimento e de controle, respectivamente.

Quadro 47: Descrição estatística da turma de experimento.

Estatísticas descritivas						
	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão	Variação
TESTE_1	16	2,50	8,00	6,1625	1,47958	2,189
TESTE_2	16	5,50	8,50	7,3250	,94410	,891
N válido (de lista)	16					

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Quadro 48: Descrição estatística da turma de controle.

Estatísticas descritivas						
	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão	Variação
TESTE_1	8	4,30	8,60	5,8750	1,36983	1,876
TESTE_2	8	4,90	8,90	6,2125	1,26315	1,596
N válido (de lista)	8					

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Os dados indicam que a média obtida pela turma GE no teste inicial foi de 6,162 muito próximo da média 5,875 da turma de controle o que, a primeira observação, não possuem uma diferença alta. Também, o desvio padrão dessas notas indicam que a variabilidade das notas fora semelhante no primeiro teste entre as turmas, com a turma de controle possuindo menos variação que a turma de experimento.

Portanto, para analisar a relação entre as notas (N_1) e (N_2) das turmas de controle e de experimento, precisaremos utilizar o Teste – t independente. Como nossa amostra possui n<30 (8 participantes da turma de controle e 16 participantes da turma de experimento) é necessário realizar o teste de normalidade (em particular, o teste de Shapiro-Wilk) para verificar a normalidade, ou não, dos dados obtidos. Para isso, deve-se lembrar a hipótese de Shapiro-Wilk para o teste de normalidade.

$$H_0: a\ distribuição\ dos\ dados\ é\ normal.$$
$$H_1: a\ distribuição\ dos\ dados\ não\ é\ normal.$$

Em parâmetros, temos.

$$H_0: p > 0{,}05$$

$$H_1: p < 0{,}05$$

Isto é, a hipótese nula afirma que os dados são normais se o p-valor (Sig no teste de Shapiro-Wilk) é maior que 0,05. Caso a hipótese nula seja verdade, podemos prosseguir com o teste – t independente. A seguir, o resultado.

Quadro 49: Teste de normalidade de Shapiro-Wilk.

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estatística	df	Sig.	Estatística	df	Sig.
TESTE_1	,134	24	,200*	,968	24	,626

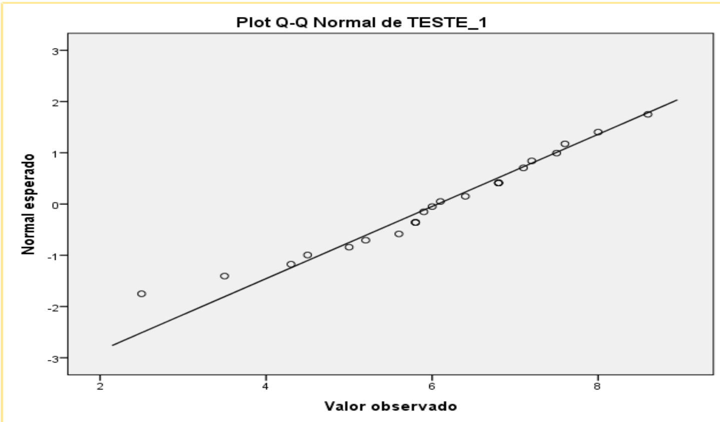
*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

a. Lilliefors Significance Correction

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como podemos observar, a distribuição dos dados é normal (0,626 > 0,05) ao observar a coluna Sig do teste de Shapiro-Wilk. Para visualizar a distribuição em um gráfico Plot Q-Q Normal do teste_1, obtemos o gráfico a seguir.

Figura 32: Gráfico Plot Q-Q Normal do teste_1(Teste inicial)



Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Em que a linha preta indica o a normalidade suposta e os pontos indicam o grau de normalidade dos dados, quanto mais próximos os dados estão da linha, julga-se mais normal é a distribuição dos dados. Realizado a distribuição normal dos dados, podemos realizar o teste – t independente. Neste caso, obtemos as seguintes hipóteses nula e alternativa respectivamente.

H_0: *Não existe diferença entre as médias encontradas nos grupos no teste inicial.*

H_1: *Existe diferença entre as médias encontradas nos grupos no teste inicial.*

Em termos de parâmetros para o teste – t, traduzimos da seguinte forma:

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

Isto é, se p-valor for superior a 0,05 indica que não há diferença entre as médias encontradas no teste inicial das respectivas turmas. Caso contrário, há diferença entre os testes iniciais aplicados às turmas. Neste caso, obtemos o quadro de teste – t a seguir.

Quadro 50: Teste – t para amostras independentes

Teste de amostras independentes

		Teste de Levene para igualdade de variações		teste t para Igualdade de Médias						
									95% Intervalo de confiança da diferença	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2 extremidades)	Diferença média	Erro padrão de diferença	Inferior	Superior
TESTE_1	Variações iguais assumidas	,131	,721	-,459	22	,651	-,28750	,62595	-1,58564	1,01064
	Variações iguais não assumidas			-,472	15,144	,644	-,28750	,60941	-1,58535	1,01035

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como podemos visualizar pelo teste de Levene, os dados da amostragem são homogêneos e o p-valor do teste – t, Sig no SPSS, foi superior a 0,05 (0,651 > 0,05). Portanto, a hipótese nula está correta e não existe diferença significativa entre as médias do teste inicial aplicados as turmas de controle e de experimento. Portanto, o teste – t independente mostrou que, em média, os alunos do grupo controle não apresentam notas superiores ou inferiores ao grupo de experimento (t(22) = -0,459; p > 0,05), no teste inicial. Vamos realizar o mesmo teste para as notas obtidas no teste final e verificar se houve um desempenho significativo.

Novamente, aplicaremos o teste de normalidade de Shapiro-Wilk sob a condição das mesmas hipóteses

$$H_0: a\ distribuição\ dos\ dados\ \text{é}\ normal.$$
$$H_1: a\ distribuição\ dos\ dados\ não\ \text{é}\ normal.$$

Em parâmetros, temos.

$$H_0: p > 0{,}05$$

$$H_1: p < 0{,}05$$

Aplicando o teste, obtemos o seguinte quadro a seguir.

Quadro 51: Teste de normalidade de Shapiro-Wilk

Tests of Normality

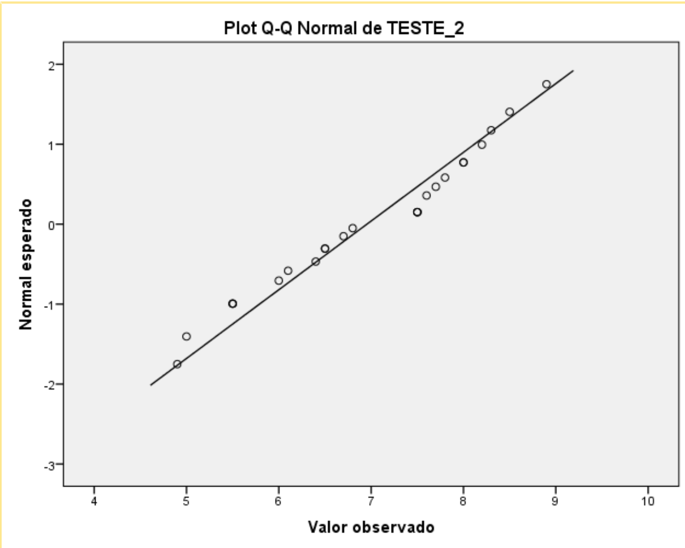
	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estatística	df	Sig.	Estatística	df	Sig.
TESTE_2	,181	24	,042	,952	24	,298

a. Lilliefors Significance Correction

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Com base no quadro e no índice da coluna Sig (0,298 > 0,05) para o teste de Shapiro-Wilk, verifica-se a condição da hipótese nula e, portanto, a distribuição dos dados é considerada normal. Para visualização dos dados, mostra-se o gráfico Plot Q-Q normal para o teste final.

Figura 33: Gráfico de Plot Q-Q Normal do teste_2 (teste final)



Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Em que a linha preta indica o a normalidade suposta e os pontos indicam o grau de normalidade dos dados, quanto mais próximos os dados estão da linha, julga-se mais normal é a distribuição dos dados. Posto a normalidade dos dados, aplicamos o teste – t independente. Neste caso, obtemos as seguintes hipóteses nula e alternativa respectivamente.

H_0: $Não\ existe\ diferença\ entre\ as\ médias\ encontradas\ nos\ grupos\ do\ teste\ final.$

H_1: $Existe\ diferença\ entre\ as\ médias\ encontradas\ nos\ grupos\ no\ teste\ final.$

Em termos de parâmetros para o teste – t, traduzimos da seguinte forma:

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

Aplicando o teste – t independente, obtemos o quadro que segue:

Quadro 52: Teste – t para amostras independentes

		Teste de Levene para igualdade de variações		teste t para Igualdade de Médias						
									95% Intervalo de confiança da diferença	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2 extremidades)	Diferença média	Erro padrão de diferença	Inferior	Superior
TESTE_2	Variações iguais assumidas	,148	,705	-2,433	22	,024	-1,11250	,45732	-2,06091	-,16409
	Variações iguais não assumidas			-2,202	11,054	,050	-1,11250	,50512	-2,22361	-,00139

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como nos mostra o quadro do teste – t independente, o valor de Sig é inferior a 0,05 (0,024<0,05), o que indica que H_0 é rejeitado e H_1 é verificado, isto é, de fato, há uma diferença significativa entre as turmas de controle e de experimento no teste final. Contudo, é de se esperar que o teste – t independente também informe qual turma possui maior média significativa. Uma forma de visualizar é observar a coluna *Diferença média*. Caso o valor apresentado seja negativo (< 0) então a segunda turma comparada (a turma de experimento) possuiu maior significância, caso contrário (> 0) indica que a primeira turma (a turma de controle) possuiu maior significância. Portanto, o teste – t independente mostrou que, em média, os alunos do grupo de experimento apresentam nota superior a dos alunos do grupo de controle ($t(22) = -2{,}433$; $p < 0{,}05$).

Por fim, vamos analisar as notas (N_1) e (N_2) por um teste – t pareado, pois estaremos interessados em observar se houve diferença entre o desempenho significativo de uma nota para outra, do mesmo grupo. Isto é, aplicaremos o teste – t pareado para a turma de controle e de experimento nas notas (N_1) e (N_2), respectivamente.

Por ser um teste de hipótese, necessitamos verificar a distribuição de normalidade dos dados da amostra (n=8) e devemos lembrar que vamos comparar as notas (N_1) e (N_2). Para isso, o SPSS realiza o teste de Shapiro-Wilk para normalidade das duas variáveis (notas) no mesmo teste. Neste sentido, obtemos o quadro do teste de Shapiro-Wilk a seguir para a turma de controle.

Quadro 53: Teste de normalidade de Shapiro-Wilk**.**

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estatística	df	Sig.	Estatística	df	Sig.
TESTE_1	,214	8	,200*	,916	8	,401
TESTE_2	,285	8	,055	,856	8	,110

Tests of Normality

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

a. Lilliefors Significance Correction

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como podemos observar no quadro, o valor Sig foi superior à 0,05 para os dois testes inicial (Teste_1) e final (Teste_2) e, portanto, a distribuição dos dados é normal segundo o teste (Teste_1 = 0,40 > 0,05 e Teste_2 = 0,110 > 0,05). Realizado o teste de normalidade construímos nossas hipóteses para comparação e realização do teste – t pareado. Neste sentido, a hipótese nula é de que não houve diferença entre os testes iniciais e finais aplicados a turma de controle; a hipótese alternativa é a rejeição da hipótese nula, isto é, há diferença significativa no desempenho apresentado nos testes iniciais e finais da turma de controle.

H_0: *Não existe diferença, em média, entre os testes iniciais e finais.*
H_1: *Existe diferença, em média, do desempenho dos testes iniciais e finais.*

Em termos de parâmetros para o teste – t, traduzimos da seguinte forma:

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

Aplicando o teste – t pareado para a turma de controle, obtemos o quadro a seguir.

Quadro 54: Teste – t para amostras pareadas

Teste de amostras emparelhadas

		Diferenças emparelhadas					t	df	Sig. (2 extremidades)
					95% Intervalo de confiança da diferença				
		Média	Desvio padrão	Erro padrão da média	Inferior	Superior			
Par 1	TESTE_1 - TESTE_2	-,33750	,43074	,15229	-,69761	,02261	-2,216	7	,062

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Neste sentido, como a coluna do Sig demonstrou p-valor superior a 0,05 (0,062 > 0,05), implica dizer que devemos rejeitar a hipótese alternativa, isto é, não houve desempenho significativo, na turma de controle, entre os testes iniciais e finais o que demonstra que a intervenção a partir do tópico abordado convencionalmente não possui ganhos significativos de aprendizagem em relação aos números reais. Portanto, o teste – t pareado demonstrou que, em média, não houve diferença entre os testes iniciais e finais da turma de controle ($t(7) = -2{,}216$, $p < 0{,}05$).

Vamos analisar as mesmas condições para a turma de experimento (n=16) e observar alguma diferença, ou não, da aplicação do teste inicial para o teste final. Em primeiro lugar, faremos o teste de normalidade de Shapiro-Wilk para distribuição dos dados.

Quadro 55: Teste de normalidade de Shapiro-Wilk.

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estatística	df	Sig.	Estatística	df	Sig.
TESTE_1	,167	16	,200*	,888	16	,051
TESTE_2	,261	16	,005	,884	16	,044

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

a. Lilliefors Significance Correction

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

Como podemos observar no quadro da normalidade, o teste_1 (inicial) para a turma de experimento demonstra Sig superior a 0,05 ($0{,}051 > 0{,}050$) o que implica normalidade nos dados apresentados. Entretanto, o teste_2 (final) para a turma de experimento demonstra Sig inferior a 0,05 ($0{,}044 < 0{,}05$) o que implica que não há distribuição de normalidade nesses dados. Como uma de nossas amostras não obteve distribuição normal, precisamos utilizar um teste não paramétrico (Teste de Wilcoxon) para análise dos dados de forma fidedigna. O teste de Wilcoxon substitui o teste – t pareado para amostras não normais. Assim como o teste – t pareado, a interpretação a ser realizada é a mesma. Para isso, nossa hipótese nula e alternativa é dada como segue.

H_0: *Não existe diferença, em média, entre o desempenho dos testes iniciais e finais.*
H_1: *Existe diferença, em média, do desempenho dos testes iniciais e finais.*

Em termos de parâmetros, traduzimos da seguinte forma:

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

Aplicando o teste de Wilcoxon para amostras relacionadas, obtemos o quadro a seguir.

Quadro 56: Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas

Test Statistics[a]

	TESTE_2 - TESTE_1
Z	-3,185[b]
Sig. Assint. (2 caudas)	,001

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Com base em classificações negativas.

Fonte: Produzido pelo autor no software SPSS

A partir do quadro, obtemos o valor de Sig para o teste de Wilcoxon inferior a 0,05 (0,001 < 0,05) o que implica dizer que se deve rejeitar a hipótese nula, isto é, existe diferença significante entre os testes (iniciais e finais) aplicados a turma de experimento. Portanto, o teste de Wilcoxon mostrou que as notas obtidas pelos alunos no teste final são superioras as notas obtidas no teste inicial (Z = -3,185; p < 0,05).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento da Educação Matemática, a História da Matemática se mostrou ser uma importante tendência metodológica para o ensino de matemática. Esta tendência carrega consigo diversas formas de utilização em sala de aula que se adequam aos objetivos pretendidos. Em particular, ressaltamos duas formas que, a nosso ver, são formas eficazes de ensino, a saber, a utilização da história da matemática para informar atividades construtivas, veja Fossa (2006), e a utilização de fontes históricas no ensino de matemática.

A utilização de fontes históricas no ensino de matemática é trabalhosa e difícil, pois exigem do professor que investigue diversos fatores sobre a fonte: seu contexto, sua linguagem, seu conteúdo, suas implicações para o desenvolvimento da matemática, são alguns exemplos. Para isso, requer tempo, dedicação e, principalmente, conhecimento acerca das fontes utilizadas e do assunto abordado. Superadas algumas dessas dificuldades, podemos identificar na leitura de fontes históricas uma metodologia significativa, rica em compreensão cultural promovendo uma visão holística da matemática construindo relações significativas com seu passado, promovendo uma percepção consciente a respeito de seu desenvolvimento.

Neste contexto, o objetivo geral da pesquisa é: Compreender o impacto que a leitura de Fontes Históricas gerou nos alunos sobre o conceito de número real, em sala de aula remota, a partir da abordagem histórico-hermenêutico Para isso dividimos duas turmas, e construímos os seguintes objetivos específicos: (1) Investigar a reação da turma de experimento quanto ao uso das fontes históricas e a sua compreensão sobre os elementos essenciais das fontes históricas; (2) Investigar o conceito de incomensurabilidade na concepção dos alunos; (3) Entender a visão dos alunos sobre a disposição dos números racionais e irracionais na reta numérica; (4) Investigar a concepção dos alunos sobre os conceitos de densidade e ordenação; (5) Investigar o conceito de número real desenvolvido pelo aluno.

Sobre o impacto que a leitura de fontes históricas gerou na turma de experimento, concluímos que os alunos reagem de forma positiva à utilização de fontes históricas gerando um ambiente questionador para os alunos possibilitando o surgimento de hipóteses e comparando-as com as concepções de seus colegas. Embora este ambiente dinâmico advenha da leitura realizada das fontes históricas, observamos a necessidade da figura do professor como mediador do conhecimento neste ambiente, possibilitando pequenos estímulos aos alunos que são traduzidos em perguntas, que o professor deve realizar, a respeito do assunto trabalhado. Além disso, a turma de experimento, inicialmente, demonstrou tímida em relação ao debate, com poucas participações, e no decorrer do curso demonstrou mais participação gradativamente.

É de se esperar a participação gradativa, como relata Fossa (2020), Glaubitz (2012) e Jahnke *et al (*2000). Segundo estes autores, para haver compreensão profunda da fonte histórica é necessário que o leitor possua algumas habilidades de interpretação nos quais os alunos do ensino secundário não estão adaptados. Observou-se também que o modo como o ‘erro’ é tratado no ambiente de discussões, inclui ou exclui os alunos. À medida que o professor proporciona um ambiente centrado na construção do conhecimento por ele realizado e passa a encarar o erro como parte deste processo, o aluno torna-se incluído e verbaliza com mais frequência seus pensamentos.

Frequentemente, as aulas geravam comparações com as aulas de Filosofia e História. É de esperar que haja alguma comparação neste sentido por natureza da própria metodologia, entretanto, afirmações como: “nunca imaginei que em uma aula de matemática eu ia ver isso. [...] Isso ai *prof.*, um monte de perguntas assim bem pensativas e tal, a gente tudo queimando os neurônios”, resposta do aluno B, indicam que a comparação está na metodologia – a condição de perguntar, instigar o aluno. Isto implica que há dois pontos a se considerar, um positivo e outro negativo. O primeiro ponto é a comparação a outras áreas que nos mostra algumas relações criadas pelos alunos, entendendo em igualdade às outras disciplinas e aumentando seu horizonte cultural, o que representa um ponto positivo. O segundo ponto refere-se ao pressuposto que o aluno não imaginava uma aula de matemática com perguntas frequentes, o que indica que frequentemente os professores de matemática não assumem o papel de questionadores para seus alunos não assumindo, portanto, esta postura. Novamente, este ponto se correlaciona com aquele. É importante o uso frequente de perguntas que ponham os alunos em ambientes reflexivos gerando assim um ambiente dinâmico.

Em contraponto, percebemos que diante da metodologia utilizada em que se explora uma linguagem diferente da convencional para abordar o assunto matemático, pois além da utilização de números, também é incentivado o raciocínio argumentativo do aluno, percebemos que houve um pouco de resistência dos pais dos alunos da turma de experimento. Uma vez que na condição de aula remota, possivelmente há uma fiscalização maior sobre o quê e como, é ensinado os conteúdos a seus filhos. A resistência foi percebida quando o professor foi questionado se o conteúdo estava conseguindo ser transmitido corretamente, pois a coordenação teria sido alertada por alguns pais de que a aula não estava sendo de matemática e sim de história

Por fim, alguns alunos mostraram-se resistentes ao uso de fontes históricas no fim da intervenção alegando estarem cansados da utilização. Talvez, em pesquisas futuras, pode-se reduzir a quantidade de textos utilizados a fim de uma verificação de eficácia ou não da metodologia estudada.

Para completar, faz-se a pergunta: os alunos da turma de experimento foram capazes de perceber elementos essenciais do texto? A resposta é não. A compreensão dos elementos essenciais de fato, nem sempre é possível. A leitura de uma fonte é difícil até mesmo para leitores experientes. Mas, e então, por que pedir para alunos do ensino secundário realizar uma leitura assim? Porque o aluno deve possuir contato com a fonte histórica possibilitando pequenas mudanças de pensamento que podem ser potentes para a motivação do aluno no estudo sobre o objeto. Embora o aluno não consiga interpretar o pensamento de Euclides, no livro *Os Elementos*, de forma completa e profunda, ele pode enxergar o formato de argumentação do texto, correlacionando à época escrita, entendendo a influência que o livro perpetuou na Europa por seus sucessores, assim como a discussão sobre a comensurabilidade e incomensurabilidade.

A partir da investigação sobre a percepção dos alunos a respeito dos elementos essenciais do texto, observamos alguns elementos que ajudam e atrapalham nesse processo de entendimento de elementos essenciais. Os dois fatores que atrapalham é a linguagem utilizada pela fonte e o pré-conceito carregado pelo aluno sobre o desenvolvimento científico, concebendo a ciência desenvolvida atualmente como o conhecimento da verdade absoluta. O fator positivo é o elemento 'estranho' que na abordagem hermenêutica possui papel fundamental. Como afirmam Jahnke *et al* (2000), a leitura realizada de fontes históricas a partir do pensamento moderno é, na hermenêutica, um dos principais problemas – conhecido como o problema da interpretação. Neste sentido, é importante que o professor identifique e encontre meios de reformular o pensamento do aluno. Uma forma importante é a comparação com elementos do texto e elementos atualmente.

A linguagem é, segundo Fossa (2020) a base de toda educação e isto se justifica pelo fato de que a comunicação, ao menos raciocinativa, depende da linguagem. Portanto, a linguagem adequada facilita o processo de interpretação sobre a fonte. Faz-se necessária a pesquisa e o entendimento, por parte do professor, ao máximo da fonte estudada propiciando maior eficácia possível. A linguagem implica autonomia ao utilizar a fonte histórica, e o professor deve buscar a validação da autonomia do aluno despertando motivações e, assim, favorecendo o entendimento dos conceitos estudados.

Por fim, os elementos estranhos no processo hermenêutico parecem ser benéficos para os alunos. Embora Glaubitz (2012) coloca ênfase na abordagem convencional durante a abordagem hermenêutica como pressuposto para o *insigh* da curiosidade epistêmica, resolveu-se testar em nossa pesquisa outra forma de promover dissonâncias cognitivas: o uso da problematização. Como forma de direcionar o aluno ao ambiente epistêmico, um estágio questionador daquilo que parece familiar, a problematização demonstrou ser eficaz, principalmente, na geração do ambiente dinâmico, reflexivo e vibrante.

Agora, vamos investigar o conceito de número real sob a visão dos alunos da turma de experimento e de controle. Para isso, realizamos três atividades e dois testes (inicial e final) com as turmas. Em primeiro lugar, os questionários iniciais demonstram que as turmas possuem características bem semelhantes, desenvolvem problemas com números inteiros e possuem dificuldades na classificação de alguns números com seus conjuntos. Além disso, as turmas demonstraram dificuldades com o conceito de número irracional aproximações com pontos na reta numérica.

Pode-se visualizar mais claramente as categorias que resultaram da análise dos dados obtidos. Para a maior parte dos alunos da turma de experimento, não existe a ideia de números sucessores e antecessores no conjunto dos números racionais, possuindo a concepção de que existem infinitos números racionais entre dois racionais fixos. Para a turma de controle, grande parte da turma assinala a existência de sucessores e antecessores no conjunto dos números racionais. Para esta mesma turma de controle, os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não possuem representação fracionária. Esta concepção entende que apenas os números racionais podem ser marcados na reta numérica, isto é, a reta real é composta por grandezas apenas comensuráveis.

Os dados também demonstram que, embora o conceito de continuidade e enumerabilidade tenham foco nas duas intervenções, apenas a turma de experimento desenvolveu concepções de continuidade como valores sucessivos que se aproxima, mas sem chegar, a um número. A turma de experimento não desenvolveu bem este conceito e quando perguntados, respondem, na maioria das respostas, a características do plano cartesiano.

Entretanto, a turma de controle se mostrou mais eficaz na utilização e no trabalho com símbolos matemáticos. Como podemos observar, os alunos da turma de experimento, quando questionados a respeitos de representação por propriedades, utilizam, em massa, a linguagem materna (e não estão errados!) para responder o questionamento. A turma de controle, em oposição, utilizou com mais frequência e mais adequadamente os símbolos matemáticos. Talvez, um motivo que explique a disparidade esteja na metodologia do professor em sala de aula. A turma de controle recebe uma carga maior de símbolos matemáticos durante o curso enquanto que a turma de experimento recebe uma carga menor e produz mais discussões e diálogos a respeito do conteúdo.

Ao final da intervenção, realizamos o mesmo questionário e teste realizados no inicio da intervenção. As duas turmas demonstram aumento na média aritmética desenvolvia nos testes finais. Além disso, as duas turmas continuaram mostrando facilidades na operação aritmética com números racionais com algumas dificuldades na soma e subtração de números racionais. A respeito da concepção acerca dos números reais, os alunos da turma de controle continuam mostrando dificuldade na marcação do número $\sqrt{2}$ na reta numérica optando por responder que para se marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica é preciso calcular a raiz quadrada aproximada de 2 e então marcar sobre a reta um número entre 1,4 e 1,5. Isso demonstra que não obtivemos avanço na marcação de números irracionais na reta numérica, obtendo assim uma concepção maior sobre os números irracionais.

A turma de experimento, sobre esta mesma pergunta, demonstrou que mais de 70% da turma assinalou que a forma correta de se marcar o número $\sqrt{2}$ é construindo um quadrado de lado uma unidade com algum dos vértices na origem do sistema, o que demonstra o entendimento da construção dos números irracionais na reta numérica o que implica a concepção de que os números irracionais podem ser marcados na reta numérica assim como os números racionais.

Sobre a segunda pergunta, na turma de controle, tivemos uma alta significativa nas respostas do teste anterior, 85,71% dos alunos assinalaram “Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele”. Este resultado merece destaque. Como podemos observar durante todo o processo de intervenção os alunos não obtiveram a concepção exposta antes, os momentos em que os alunos foram exigidos a pensarem na natureza infinita dos números irracionais, os alunos não entendem o conceito de forma definida e, mesmo assim, obtiveram mais de 80% de assertividade. Segundo Skemp (1976) há duas formas de compreensão: relacional e instrumental. A compreensão relacional oferece uma compreensão profunda sobre o objeto estudado favorecendo o uso de informações consolidadas. A compreensão instrumental é uma forma automática de compreensão, com repetições e consequentemente menos profunda. Porém, para Skemp (1976) as duas formas de compreensão são necessárias para o aprendizado mais eficaz. Portanto, talvez esta concepção reflita na turma de controle.

Para a turma de experimento, obtivemos um avanço na resposta do segundo questionamento: os alunos interpretam que os números irracionais podem ser marcados próximos aos números racionais que o aproximam dele. Além de o teste final comprovar isto, durante as atividades e diálogos realizados com a turma durante a intervenção podemos perceber uma mudança de concepção a respeito dos números irracionais e sua disposição na reta numérica. Portanto, obtivemos avanço significativo no entendimento do número irracional.

Por fim, investigamos o impacto que a leitura de textos originais gerou na turma de experimento em comparação à turma de controle. Inicialmente, relembramos que no questionário inicial, as turmas de controle e experimento se mostraram, em vários aspectos, semelhante. O questionário final nos mostra determinada mudanças significativas.

Em primeiro lugar, a turma de controle não obteve resultados significativos sobre sua concepção a respeito da matemática. Os dados mostraram que, a turma de controle possuiu uma visão da matemática igual à visão apresentada antes da intervenção. A matemática é apresentada como disciplina difícil, embora esteja presente em nosso cotidiano e seja encarada pelo aluno como uma ciência. Além disso, para a turma de controle, a matemática é essencialmente resolver problemas e seu trabalho é associado a realização de fazer contas. Também, sua concepção é que a matemática é entendida somente pelos “melhores” da sala de aula.

Sobre a história da matemática em sala de aula, a turma de controle se mostrou dividida entre aqueles que concordam com sua utilização e quem não concorda. Entretanto, a maior parte dos alunos demonstrou um perfil de *assentimento* segundo nossa categoria, ou seja, possui uma inclinação maior ao da história da matemática em sala de aula promovendo uma visão diferente daquela encontrada no primeiro questionário.

Sobre a turma de experimento, podemos elencar algumas mudanças. Em primeiro lugar, o questionário final demonstrou que os alunos passaram a entender a matemática como moderada, o que desclassifica a matemática como “não gosto de estuda-la” (assinalada no primeiro questionário). Também, a turma de experimento entende que a matemática é razoável, nem sendo muito difícil nem muito fácil. Sua concepção acerca do cotidiano ainda demonstra que a matemática está presente e que esta é uma ciência.

Uma das variáveis mais significativas é a respeito da concepção do aluno sobre a matemática como “a ciência que realiza contas”. Diferentemente do primeiro questionário, 26,3% discordou desta afirmação e 42,1% afirmaram que nem concorda e nem discorda desta afirmação. Este ponto é digno de nota. Como podemos perceber o aluno da turma de experimento, entende a matemática não somente como uma ciência para se resolver contas, mas talvez a entendam em sua completude como uma ciência em construção e, portanto se distancia da visão da matemática como ciência das contas, dos problemas aritméticos. Outro aspecto motivador é a concepção de que a matemática, no questionário final, não é somente para os “melhores” em sala de aula. Na turma de experimento, apenas 15,8% dos alunos concorda completamente com esta afirmação. Portanto, o aluno da turma de experimento se distanciou da visão de que a matemática é somente para os melhores, e que está se resume a fazer contas.

Sobre a concepção acerca da história da matemática em sala de aula podemos destacar que 57,9% consideram válido o uso da história da matemática em sala de aula e 47,4% consideram válido o uso de fontes históricas em sala de aula o que configura excelentes índices de aceitação da turma com a metodologia utilizada. Entretanto, uma concepção interessante exposta por esta turma é que, ao perguntar sobre a ajuda que a metodologia utilizada possuía sobre os estudos para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), a turma de experimento demonstrou que discorda completamente da metodologia, embora obtivesse um índice de 72,3% de aproveitamento sobre a questão do ENEM trabalhada. Portanto, os alunos embora assinalem que é válida para sua aprendizagem a metodologia utilizada, observam que esta não é eficaz nos estudos para o ENEM.

Podemos concluir que a utilização de fontes históricas no ensino de números reais, sob abordagem hermenêutica, destacou melhores resultados aos encontrados na turma de controle, em concepções acerca da matemática como ciência em evolução e no conceito de número real.

O primeiro ponto que ganha destaque é o diálogo ocorrido intensamente na turma de experimento. Observa-se que um motivo que orientou o aluno a uma concepção de que a matemática é uma ciência dinâmica, em construção, foram os diálogos frequentes ocorridos entre aluno-aluno e aluno-professor. A turma de controle possui uma carga menor de questionamentos que a turma de experimento, ao ponto de várias partes da transcrição ocorrer apenas a fala do professor. Destacamos a importância de o professor realizar um planejamento adequado ao seu público alvo como afirmam Jahnke *et al* (2000) e Glaubitz (2012).

O segundo ponto que destacamos é a problematização como forma de tornar o familiar em desconhecido pelo aluno e, assim, impulsionar sua motivação para aprender mais. De fato, a problematização não ocorreu na turma de controle. A problematização inserida na turma de experimento sempre possuiu uma conotação de introdução ao tema, uma introdução questionadora, reflexiva, aproximando o aluno em um estágio epistêmico. Esta problematização recebeu respostas positivas com inquietações e a busca por entender melhor o conceito estudado na problematização. Isto é, uma motivação a mais. Em contraste, a turma de controle não possuiu este tipo de abordagem com a problematização. Foi trabalhada algumas vezes a problematização, mas sem frutos impactantes visto que não foram planejadas pelo professor porque surgem no momento da aula.

O terceiro ponto destacado é sobre a interpretação da fonte histórica. De fato, a interpretação fornecida pela hermenêutica em que põe o aluno (espera-se) em círculos hermenêuticos, amplia os horizontes de conhecimento do aluno. Observamos que esta ampliação é devida ao formato como é proposta à abordagem hermenêutica em um estudo guiado ao aluno buscando sempre elencar pontos do contexto do autor, da obra, produzindo relações com a matemática e seu contexto da época. O foco na interpretação da fonte em seus aspectos internos e externos, ou como o estudo diacrônico e síncrono em Jahnke *et al* (2000) ou as unidades internas e externas defendidas por Fossa (2021), é essencial para uma compreensão de maior qualidade a respeito dos números reais.

O quarto ponto que merece destaque faz referência ao conhecimento dos números racionais e irracionais. A turma de experimento demonstrou melhor entendimento a respeito da infinidade dos números irracionais na reta numérica aos alunos da turma de controle. De fato, os textos originais propostos guiaram os alunos em compreensões que geralmente não são atendidas pelo ensino convencional principalmente no que se refere à densidade dos números reais. Segundo as pesquisas demonstradas por Soares, Ferreira e Moreira (1999), os alunos do início da graduação no curso de matemática possuem concepções equivocadas a respeito dos números reais em particular a infinidade dos números irracionais. Portanto, a pesquisa demonstra uma alternativa a estas lacunas de aprendizagem.

O quinto ponto destacado refere-se ao conceito de continuidade na reta numérica e o número real. Como foi destacado pela entrevista realizada com os professores universitários, é importante o aluno visualizar o conjunto dos números reais como um conjunto ordenado, possuindo algumas operações e que seja completo. De fato, os alunos da turma de experimento mostraram desenvolturas em relação à não existência de sucessores entre números racionais e reais, demonstraram a existência de infinitos números reais entre dois outros fixos. A turma de controle, entretanto, corresponde sempre à ideia de existência de sucessor e antecessor no conjunto dos números racionais e reais. Os debates ocorridos com a utilização das fontes históricas englobavam estes conteúdos e os alunos da turma de experimento construíam seus conhecimentos, a turma de controle não obteve esse diálogo se movendo na inércia da aula. Além disso, a associação dos números reais com a reta numérica deve ser destacada para os alunos. Embora a turma de controle tenha explicações a respeito de intervalos reais, não demonstrou entender o conceito de continuidade, em comparação à turma de experimento que demonstrou associar o conceito de continuidade da reta numérica aos valores sucessivos que tendem a um valor real sem nunca chegar neste ponto.

Os testes estatísticos demonstram que a turma de experimento possuiu maior aproveitamento nas atividades realizadas e também no teste aplicado no início e no fim da intervenção. Além disso, caracterizamos o desempenho da turma de experimento como “Muito Bom” e o desempenho da turma de controle como “Razoável” o que indica que a intervenção baseada na leitura de fontes históricas implicou em aprendizagem sobre os números reais.

Também, o Wilconx demostrou que a turma de experimento possuiu significância estatística (a um erro de 5%) nos testes realizados enquanto que a turma de controle não obteve significância alguma entre o primeiro e o último teste. Com estes resultados, necessitamos de aplicar uma intervenção junto a turma de Controle para tentar suprir o déficit apresentado.

Para finalizar, esperamos que este trabalho sirva de exemplo para replicação da metodologia aqui apresentada em outros ambientes de sala de aula, remota ou presencial, contrapondo ou afirmando, os resultados aqui apresentados. Sugerimos a replicação deste trabalho em sala de aula presencial buscando driblar as limitações que foram impostas neste trabalho pela condição de aula remota. Por exemplo, a intervenção presencial caracterizaria melhor a reação dos alunos ao ler e interpretar as fontes históricas, suas expressões faciais e gestos utilizados. Também, pode-se realizar trabalhos em grupos e perceber se a interação entre eles gera resultados e discussões ainda mais significativas.

Outro ponto é a quantidade de fontes históricas utilizadas durante o curso que, ao nosso ver, pode-se diminuir e verificar sua aceitação ou não pelos alunos. Também, pode-se testar o fator da problematização, um dos focos deste trabalho. Utilizou-se a problematização como forma de introdução ao conteúdo apresentado embora outros autores defendam uma abordagem convencional.

.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ANJOS, M. **Um estudo histórico-epistemológico do conceito de número negativo**. Natal, RN : EDUFRN, 2012.

BACELLAR, C. **Uso e mau uso dos arquivos.** In: PINSKY, Carla. **Fontes Históricas.** São Paulo: CONTEXTO, p. 23 – 80, 2008.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BERELSON, B. **Content Analysis in Communications Research**. New York, NY: Free Press, 1952.

BERELSON, B. **Content analysis in communication research**. New York: Hafner; 1984.

CARVALHO, J. História da Matemática no Ensino. **Cadernos do IME – série matemática**, Rio de Janeiro (UERJ), n. 13 (online), 2019. DOI: https://doi.org//10.12957/cadmat.2019.47245

D´AMBROSIO, U. Por que e como Ensinar História da Matemática. REMATEC. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura** (UFRN), v. 8, p. 7-21, 2013.

DE MORGAN, A. **Study and Difficulties of Mathematics**. Editora The Open Court Publishing Company. Chicago, 1910.

ESTEVE, M. et al**. Understanding Mathematics using original sources. Criteria and Conditions**. In: BARBIN, Evelyne; KRONFELLNER, Manfred, TZANAKIS, Constantinos. (Eds.). History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Sixth European Summer University. Vienna: Verlag Holzhausem GmbH, 2011, p. 415 – 428.

EUCLIDES, **Os Elementos**. (trad.) Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EULER, L. **Tratado sobre a teoria dos números em XVI capítulos** (trad.) John Andrew Fossa. Natal, RN: EDUUFRN, 2015.

EVEN, R. TIROSH, D. **Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter**. Educational Studies in Mathematics, 29 (1), 1-20, 1995.

FAUVEL, J.VAN MAANEN, J. (Eds.). **History in mathematics education**. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FISHBEIN, E.; JEHIAM, R. ; COHEN, D. - **The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. Educational Studies in Mathematics**, vol. 29,pp. 29-44,1995.

FLICK, U. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

FLICK, U. **Desenho da pesquisa Qualitativa**. 3 ed. Porto Alegre, Artmed. Capítulo 9. 2011.

FLICK, U. **Introdução à Pesquisa Qualitativa**. 3 ed. Porto Alegre, Artmed. Capítulo 9. 2009.

FLICK, U. **Introdução à Metodologia da Pesquisa**. Tradução: Magda Lopes; Porto Alegre : Penso, 2012.

FOSSA, J. **Sobre a Hermenêutica da Leitura de Textos Históricos na sala de aula de Matemática.** REMATEC, Belém (PA), v. 16, Fluxo Contínuo, p. 232-244, 2021.

FOSSA, J. **Teoria Intuicionista da Educação Matemática**. Trad. Alberta M. R. B. Natal: Editora da UFRN, 1998.

FOSSA, J. Lectura de Textos Históricos en el Aula. **Paradigma**, V. XLI, Extra 2, p. 116-132, 2020. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p116-132.id834

FOSSA, J. **Cabelos Negros, olhos azuis e outras feições das matemáticas puras e aplicadas**. Natal: EDUFRN, 2008.

FOSSA, J. **Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática** / John A. Fossa. – 2 ed. Ampl. e rev. – São Paulo:Editora da Física, 2009.

FOSSA, J. **Os Primórdios da teoria dos números: Parte A e B**. Natal: EDUFRN, vol 1 e 2. 2010.

FOSSA, J. Matemática, História e Compreensão. **Revista cocar** (UEPA), v. 2, p. 7 – 15 , 2008.

FURINGHETTI, F.; JAHNKE, H.; MAANEN, J. **Mini-workshop on studying original sources in mathematics education.** Oberwolfach Reports 3(2), 2006. p. 1285–1318.

GLAUBITZ, M. **The use of Original Sources in the classroom** : Empirical Research Findings. In: History and Epistemology in Mathematics Education – Proceedings of the Sixth European Summer University – ESU 6. Evelyne Bardin, Manfred Kronfellner, Constatinos Tzanakis (Eds.). Hameln, Germany, 2012.

HANNA G., JAHNKE H. Proof and Proving. In: Bishop A., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J., Laborde C. (eds) **International Handbook of Mathematics Education. Kluwer International Handbooks of Education**, vol 4. Springer, Dordrecht, 1996 https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_24

JAHNKE, H. ‘The historical dimension of mathematical understanding: objectifying the subjective’, in: **Proceedings of the eighteenth international conference for the psychology of mathematics education**, vol. I, Lisbon: University of Lisbon, 1994, p. 139 – 156

JAHNKE, H.: Historische Reflexion im Unterricht. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung (Bernoulli 1692) in **einer elften Klasse**. mathematica didactica 1995, 18(2), 30-58

JAHNKE., H. et al.**The use of original sources in the mathematics classroom**, in J. Fauvel & J. v. Maanen (eds.), History in Mathematics Education, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 291-328. 2000.

JANKVIST, U. On the use of primary sources in the teaching and learning of Mathematics. In: MATTHEWS, Michael R. (Ed**.). International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching**. Dordrecht: Springer, Cap. 27. 2014. p. 873-907

JANKVIST, Uffe Thomas. A Categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, p. 235-261, 2009.

LAKATOS, E.; MARCONI, M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003

LASSWELL, H. "Toward World Community Now" in: NG., Larry. **Alternatives to Violence: A Stimulus to Dialogue.** Nova Iorque:Time-Life Books, 1968.

LOPES, L.; FERREIRA, A. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

MACHADO, A.; MARQUES, C.; SILVA, R. Sentidos e significados de problema e problematização em um processo de (re)planejamento coletivo de uma situação de estudo. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 23-42, 2016. DOI: https://doi. org/10.1590/1516-731320160010003.

MASSA ESTEVE, M. et al. Understanding mathematics using original sources: Criteria and conditions. In: BARBIN, E.; KRONFELLNER, M.; TZANAKIS, C. (Ed.). **History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 6th European Summer University**. Viena: Verlag Holzhausen Gmbh, 2011. p. 415-428

MAYRING, P. **Introdução à Pesquisa Social Qualitativa**: Uma orientação ao pensamento qualitativo. Tradução de Hartmunt Gunther. Brasília: BELTZ Studium, 2002.

MAYRING, P. Qualitative content analysis. **Forum: Qualitative Social Research.** Budapest, v.1, n.2, p.1-10, 2000.

MAYRING, P. **Qualitative Inhaltsanalyse**: Grundlagen und Techniken. Weinheim: Deutscher Studien Verlag. 1983.

MENDES, I. **Investigação histórica no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, I., FOSSA, J. e VALDÉS, J. **A História como um Agente de Cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MENDES, I. Cognição e Criatividade na Investigação em História da Matemática: contribuições para a Educação Matemática. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciências e Tecnologia,** v.6, n.1, p. 185-204, abril de 2013.

MÉRAY, C. Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données. In **Revue des Sociétés Savantes**. N.2, v. 4., 1869.

MIGUEL, I. BRITO, A. e LUCCHESI, D. **História da Matemática em atividades didáticas**. 2 Ed. Editora Livraria da Física, São Paulo – SP, 2009.

MINAYO, M. (Org.). **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 1994.

MINAYO, M. (Org.). **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2002.

MOREY, B. Fontes Históricas nas salas de aula de Matemática: o que dizem os Estudos Internacionais. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, Vol. 13, n 26, p.73-83, 2013.

PEREIRA, A.; PEREIRA, D. Ensaio sobre o uso de fontes históricas no ensino de Matemática. REMATEC: **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Natal, v. 10, 2015, p. 65-78.

PEREIRA, A. SILVA, I., NOGUEIRA, R., ALVES, F., Sobre o uso de fontes na disciplina de História da Matemática: Problema 56 do Papiro de Rhind. **Revista eletrônica de Educação Matemática,** Florianópolis, v. 10, n. 2, p. 243 – 257, 2015. ROQUE, Tatiana M. e PITOMBEIRA, João B. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBEM, 2011.

PINSKY, C. (org.). **Fontes históricas**. São Paulo: Contexto, 2005, 302p.

PITOMBEIRA, J., ROQUE, T. **Tópicos de história da Matemática coleção PROFMAT**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROBINET J. **Les réels: quels modèles ont les élèves?. Cahier de didactique des mathématiques** nº 21, I.R.E.M. Université Paris 7, 1993.

RUSSEL, B. **Introdução à Filosofia Matemática**. Trad. Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1974.

SCHNEIDER, E. FUJII, R. CORAZZA, M. Pesquisas quali-quantitativas: contribuições para pesquisa em ensino de ciências. **Revista Pesquisa Qualitativa**. São Paulo – SP, v. 5, n. 9, p. 569-584, dez, 2017.

SCHUBRING, G. **Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis** in 17th-19th Century France and Germany. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer, 2005.

SIGLER L. (ed.) **Fibonacci’s Liber Abaci**. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano’s Book on Calculation, Springer, 2002.

SILVA, B.; IGLIORI, S. **Concepções dos alunos sobre números reais**. In: LAUDARES, João Bosco, LACHINI, Jonas. Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte, FUMARC, 2001, pp. 39-67.

SILVA, I. **Um estudo da incorporação de textos originais para a educação matemática: buscando critérios na articulação entre história e ensino**. 2018. 92 f. Dissertação

(Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

SILVA, I.; PEREIRA, A. **Definições e critérios para uso de textos originais na articulação entre história e ensino de matemática**. Boletim de Educação Matemática – Bolema [online]. 2021, vol.35, n.69, pp. 223- 241. Epub Apr 16, 2021. ISSN 1980-4415. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a11.

SOARES, E.; FERREIRA, M.; MOREIRA, P. Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura**. Zetetiké,** Campinas, v. 7, n.12, 1999. pp. 95–117, jul/dez.

SPIEGEL, M. R**. Estatística**. (trad.) Carlos Augusto. São Paulo : McGraw-Hill do Brasil. 2 ed. 1985.

TZANAKIS, C., ARCAVI, A. ET AL. Integrating history of mathematics in the classroom an analytic survey. In: J. Fauvel & J. v. Maanen (eds.), **History in Mathematics Education**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 201-240. 2000.

APÊNDICE A - Perguntas da entrevista semiestruturada realizada com os professores universitários

1. Quais os maiores problemas que seus alunos apresentam no entendimento do conceito de número real?
2. Quais aspectos mais importantes você destaca dos números reais?
3. Em sua opinião, qual aspecto do ensino dos números reais na educação básica poderia ser mais enfatizado para que os alunos ingressem com menos dificuldades aquelas apresentadas hoje em dia?

APÊNDICE B - Questionário Inicial e Final – Para identificação do olhar do aluno sobre a matemática e suas concepções acerca da metodologia utilizada.

1. Como você descreveria sua visão e sua relação com e sobre a matemática, quanto á:

   - Gostar de Matemática

   (A) Péssimo

   (B) Ruim

   (C) Razoável

   (D) Boa

   (E) Muito Boa

   - Dificuldade em Matemática

   (A) Extremamente difícil

   (B) Difícil

   (C) Moderado

   (D) Fácil

   (E) Muito fácil

2. Em uma escala de satisfação, responda com x cada opção que desejar:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A Matemática é uma forma de comunicação					
A matemática faz parte de nosso cotidiano.					
A matemática é uma ciência					
Só os melhores alunos sabem matemática.					
Saber matemática é saber resolver problemas.					
Saber matemática é saber fazer contas.					

Utilizar a história da matemática nas aulas de matemática ajuda no aprendizado.					
Utilizar fontes históricas nas aulas de matemática ajuda no aprendizado de matemática					
Matemática é uma forma de raciocinar					
A utilização de textos originais auxilia no aprendizado para o ENEM					

Legenda da tabela: (1) discordo completamente. (2) discordo em parte. (3) Nem discordo, nem concordo. (4) concordo em parte. (5) concordo completamente.

APÊNDICE C - Teste Inicial e Final – Para identificação da concepção desenvolvida pelos alunos a respeito dos números reais.

1. Deseja-se comprar lentes ara óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021mm; 2,96 mm; 2,099 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será:

2. A tela do monitor de um computador, de um modo geral, é um retângulo com o comprimento igual ao dobro da altura. Dado que a altura, em centímetros, é representada por um número natural, pode-se concluir que a medida, em centímetro, da diagonal desse monitor é representada por um número:
   (A) Natural impar
   (B) Natural par
   (C) Racional não inteiro
   (D) Irracional
   (E) Maior que a soma do comprimento e da altura.

3. A respeito dos números na reta numérica, assinale a alternativa correta:
   (A) Os números racionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não há espaço para estes números visto que são representações de frações, logo não são números.
   (B) Os números irracionais podem ser marcados na reta numérica ao final de cada intervalo e após os números decimais.
   (C) Os números reais podem ser marcados na reta numérica, mas devem estar próximos ao zero.
   (D) Os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não existe representação fracionária para eles.
   (E) Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele.

4. Qual é a forma correta de marcar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?

(A) Basta marcar um ponto sobre o número inteiro 2.

(B) Basta calcular a raiz aproximada de 2, que é 1,41, e marcar um ponto próximo a 1,4.

(C) Não existe possibilidade de marcar esse tipo de número, pois 1,41 é apenas uma aproximação. Nunca será possível encontrar um valor aproximado.

(D) Basta desenhar um quadrado de lado 1 com vértice na origem e desenhar um círculo com raio igual a diagonal do quadrado. A interseção entre o círculo com o eixo X é exatamente o ponto procurado.

APÊNDICE D - Atividade 01 – Primeira atividade desenvolvida com as turmas de controle e experimento em comum.

1. Considere o conjunto dos números pares e números ímpares dado por P = {0, 2, 4, 6, ...} e I = {1, 3, 5, 7, ...}. Escreva uma propriedade para o conjunto P e outra para o conjunto I de modo que essa propriedade descreva todos os elementos desses conjuntos.
2. Teorema: Dado dois números pares, então, a soma desses números continua sendo um número par. Mostre que esse teorema é verdade.
3. Sobre o conjunto dos números naturais (N) responda a alternativa correta.
   (A) O conjunto dos números naturais foi uma criação humana, os primeiros números existentes e sua criação está relacionada ao conceito de contagem.
   (B) O conjunto dos números naturais, historicamente, foram números que foram criados quando a necessidade do ser humano passou a ser medir comprimentos de terras
   (C) O conjunto dos números naturais, assim como o conjunto dos números inteiros, é um conjunto finito e possui uma parte positiva, o neutro e uma parte negativa.
   (D) O conjunto dos números naturais é um conjunto infinito de números, o qual possui números pares, números ímpares e o zero sendo elemento neutro sendo nem Par nem Ímpar.
4. Faça uma leitura sobre as proposições da imagem abaixo e marque a alternativa correta:
   1. O número natural n é antecessor de n+1
   2. Todo número natural possui um sucessor.
   3. A soma de quaisquer dois números naturais é sempre um número par.
   4. O número natural n+1 é antecessor de n.

   (A) VFVF
   (B) VVFF
   (C) VFVV
   (D) FVFF
   (E) FVVF

5. Retirando o número 1, sabe-se que o menor divisor positivo de cada um de três números naturais diferentes são, respectivamente, 7; 3 e 11. Ainda sobre os próprios números, sabe-se que o maior divisor de cada um dos três números naturais já citados são, respectivamente, 11; 17 e 13. Sendo assim, a soma desses três números naturais é igual a:

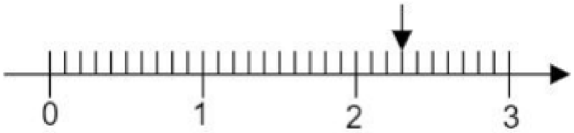
APÊNDICE E - Atividade 02: Atividade desenvolvida com as turmas de experimento e controle, em comum.

1. Observe a imagem abaixo e escreva cada item como Verdadeiro (V) ou Falso (F) e sua justificativa para as alternativa falsas.

   Considere $n \in \mathbb{Q}$, então:

   1. ( ) n+1 é o sucessor de n;
   2. ( ) n e n+1 são números consecutivos;
   3. ( ) Todo número racional possui sucessor.
   4. ( )Não existe a noção de sucessor e antecessor no conjunto dos números Racionais.

2. O número decimal correspondente ao ponto assinalado na reta numérica é

   (A) 0,3
   (B) 0,23
   (C) 2,3
   (D) 2,03

3. Desenvolva a seguinte expressão dada na imagem abaixo:

$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}$$

4. Considerando um número n inteiro qualquer, então, sabe-se que existe o conjunto dos divisores de n e o conjunto dos múltiplos de n. Qual desses conjuntos são finito e infinito?

   (A) O conjunto dos múltiplos de um número n qualquer é infinito e o conjunto dos divisores é finito.

(B) O conjunto dos múltiplos é finito e o conjunto dos divisores também é finito.

(C) O conjunto dos múltiplos de um número é infinito assim como o conjunto dos divisores.

(D) O conjunto dos Múltiplos é finito e o conjunto dos divisores de um número é infinito.

5. A soma 1,3333... + 0,1666666... é igual a:
6. Encontre a fração geratriz da dízima 0,357357...
7. Para a = 2,01, b = 4,2 e c = 7/3 temos:

(A) a < b < c

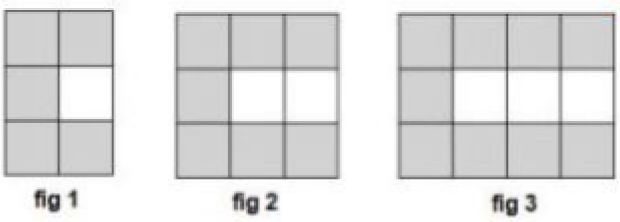
(B) b< c < a

(C) c < b < a

(D) c < a < b

(E) b < a < c

8. Observe a sequência de figuras a seguir. O número de quadrados cinzas da figura n é dado por



:

(A) n+4

(B) $n^2 - 2$

(C) $n^2 + 1$

(D) 2n + 3

(E) 3n - 2

APÊNDICE F - Atividade 03: Atividade desenvolvida com as turmas de experimento e controle, em comum.

1. A respeito dos números na reta numérica, assinale a alternativa correta:
   (A) Os números racionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não há espaço para estes números visto que são representações de frações, logo não são números.
   (B) Os números irracionais podem ser marcados na reta numérica ao final de cada intervalo e após os números decimais.
   (C) Os números reais podem ser marcados na reta numérica, mas devem estar próximos ao zero.
   (D) Os números irracionais não podem ser marcados na reta numérica, pois não existe representação fracionária para eles.
   (E) Qualquer número irracional pode ser marcado na reta numérica e fica próximo dos números racionais que o aproximam dele.
2. Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), "Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem." Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:
   (A) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional
   (B) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
   (C) Entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional
   (D) Entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.
   (E) A diferença entre dois números inteiros negativos sempre é inteiro negativo.
3. A respeito dos números reais, podemos dizer que:
   (A) O conjunto dos números reais é um conjunto finito de elementos contendo os números irracionais.
   (B) Dado dois números reais, digamos, 'a' e 'b' com a<b então, existe sempre um elemento 'c' pertencente aos números reais tal que a < c < b.
   (C) Dados dois números reais digamos 'a' e 'b', com a<b, então b é sucessor de a.
   (D) O conjunto dos números reais não possui o conceito de sucessor de um número visto que este conjunto é finito.
   (E) Dados dois números reais, nem sempre é possível encontrar um terceiro tal que seja a média aritmética de 'a' e 'b'. Por exemplo, números próximos do zero.

4. Explique o que é o conceito de ENUMERABILIDADE de um conjunto. Em seguida, explique as duas frases abaixo.

   A) O conjunto dos números Racionais é enumerável;

   B) O conjunto dos números Reais não é enumerável.

5. Observe a sequência de termos abaixo e responda o que se pede: A) Desenhe a reta real e marque os termos dessa sequência na reta até o 12º termo; B) Esta sequência de termos é convergente ou divergente? C) Explique sua resposta da alternativa anterior.
6. Complete a tabela abaixo assinalando com (X) a que conjunto (ou conjuntos) pertence cada número dado.

Número	Nº Naturais	Nº Inteiros	Nº Racionais	Nº Irracionais	Nº Reais
$\frac{81}{80}$					
- 25					
$\frac{1}{10}$					
0,20202020...					
0,202002000...					
2,44					
- 3,727227222...					
269					
0					
- 927					

7. Calculando-se √30, obtém-se 5,4772255... número que tem representação decimal infinita, mas não é periódica. Conclui-se então que √30 é um número:

   (A) Natural

   (B) Inteiro

   (C) Racional

   (D) Irracional

8. Para cada número real da imagem a seguir, responda o seguinte: a) Diga entre quais números inteiros consecutivos ele se encontra; b) Diga se ele é um número real racional ou um número real irracional.

$$\sqrt{3}$$
$$\sqrt{10}$$
$$\sqrt{2}$$
$$\sqrt{9}$$
$$\sqrt{\frac{9}{10}}$$
$$\sqrt{100}$$

9. Qual dos conjuntos é constituído somente de números irracionais?

   (A) { √3, √6, √9, √12 }

   (B) { √6, √8, √10, √12}

   (C) { √4, √8, √10, √12}

   (D) { √12, √16, √18, √20}