UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IZAIAS NÁRIO DA SILVA

O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS ATRAVÉS DE MODELOS MATEMÁTICOS: UMA INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA EM SALA DE AULA

CAMPINA GRANDE
2019

IZAIAS NÁRIO DA SILVA

O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS ATRAVÉS DE MODELOS MATEMÁTICOS: UMA INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE
2019

S586e Silva, Izaias Nário da.

O ensino-aprendizagem das funções de várias variáveis através de modelos matemáticos [manuscrito] : uma investigação qualitativa em sala de aula / Izaias Nário da Silva. - 2019.

228 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Departamento de Matemática - CCT."

1. Funções de Várias Variáveis. 2. Modelagem Matemática. 3. Educação Matemática. I. Título

21. ed. CDD 515.5

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

IZAIAS NÁRIO DA SILVA

O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS ATRAVÉS DE MODELOS MATEMÁTICOS: UMA INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 17/10/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Pammella Queiroz de Souza

Prof. Dra. Pammella Queiroz de Souza (Membro externo)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Resultado: Aprovado com distinção

À minha mãe, Cícera Maria Nário, que sempre me incentivou a avançar nos estudos e acreditar na possibilidade de vencer na vida pelo caminho do bem.

À minha esposa Fabiana, companheira inseparável nos momentos de aflições e dificuldades; meu alicerce.

À minha filha Isabelle, alegria da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS por esse momento e por dispensar continuamente em minha vida as condições necessárias para enfrentar os desafios, acrescentando forças para não desistir dessa longa caminhada de crescimento.

Agradeço imensamente ao Professor Dr. Roger Huanca, um amigo e professor que desde a minha graduação já ouvia falar de sua dedicação e apreço pela Matemática e no mestrado tive a imensa honra de verificar essas qualidades peculiares. Serei grato pela orientação, pelos livros fornecidos, pelos ricos diálogos, por sempre está disponível sem olhar dia nem hora, pela paciência e sabedoria na condução deste trabalho.

À minha Esposa que sempre me deu força e incentivo, e, sobretudo compreendeu as minhas ausências durante este processo.

Aos meus pais, Cícera Maria Nário e Antonio Bezerra da Silva, pelos diálogos e incentivo a avançar nos estudos.

À minha sogra, Maria das Dores Siqueira Braz, pelo carinho e cuidados com a minha pessoa.

Às minhas irmãs, Jayssa e Jasiele, e demais familiares que se alegram a cada conquista que consigo galgar nessa caminhada.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, que durante este período foram fundamentais para a minha formação e contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Agradeço muito aos professores que compuseram a banca avaliadora, Dr. Silvanio e Dra. Pammella, pelas ricas contribuições para esse trabalho.

Também sou grato a UEPB, Campus Monteiro, por ter permitido que a pesquisa de campo fosse realizada.

Agradeço aos diretores da Escola Estadual Joaquim Alves de Freitas e da Escola Estadual Miguel Santa Cruz, por nesse período sempre organizarem o horário de maneira que possibilitasse cursar as disciplinas do mestrado bem como os dias que foram utilizados na coleta de dados.

Agradeço a todos os colegas de mestrado pelos diálogos, críticas e companheirismo durante os encontros nas disciplinas do curso.

Agradeço aos colegas GPRPEM, principalmente a Edson e Diego, pela companhia e incentivo, pela troca de ideias e conhecimentos.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo analisar as possibilidades de ensino-aprendiza gem das Funções de Várias Variáveis a partir de uma investigação qualitativa de modelos matemáticos à luz de aspectos da modelagem matemática. Para alcançar esse objetivo, utilizamos como metodologia científica, os dez passos propostos por Thomas A. Romberg, tornando-os uma espécie de "espinha dorsal" e possibilitando o desenvolvimento deste trabalho. Participaram como sujeitos da pesquisa oito estudantes do quarto período do curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina denominada Cálculo Diferencial e Integral III, no semestre letivo 2018.2. Esses estudantes foram instigados a investigar os modelos propostos em um contexto da Modelagem Matemática. Os dados foram coletados através das anotações no caderno de campo do pesquisador, das resoluções dos alunos oriundas de atividades desenvolvidas, de gravações, filmagens e dos questionários aplicados no decorrer dos encontros/aulas da disciplina. Nossa análise sobre as descrições das atividades desenvolvidas durante a pesquisa e nos depoimentos colhidos nas entrevistas aponta a existência da produção do conhecimento pertinente ao Cálculo Diferencial e Integral, no tocante às Funções de Várias Variáveis, sendo que a Modelagem Matemática teve sua importância e influência em fomentar nos alunos um relacionamento mais íntimo e autônomo com a teoria usada no processo, no sentido de compreensão, significado, aplicação, diálogos entre alunos, aluno-professor e execução de resoluções das atividades desenvolvidas. Nos primeiros modelos matemáticos trabalhados, o anseio dos alunos era aplicar algumas operações da matemática ou substituir valores que não tinham nexo, ou seja, ficou evidente a mecanização sem buscar uma compreensão, além do medo de expressar suas dúvidas. Os resultados indicam que os modelos matemáticos trabalhados de forma adequada no contexto da modelagem poderão trazer contribuições significativas para o ensino-aprendizagem das Funções de Várias Variáveis. Em conclusão do trabalho, constatou-se a necessidade de um espaço para a produção de significados pelos licenciandos e da relevância dessa produção para que eles não sejam simples aplicadores de conhecimentos produzidos por outros.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem das Funções de Várias Variáveis. Modelagem Matemática. Método qualitativo. Educação Matemática.

ABSTRACT

The present research aims to analyze the possibilities of teaching and learning the functions of various variables from a qualitative investigation of mathematical models in light of aspects of mathematical modeling.To achieve this goal, we used as a scientific methodology the ten steps proposed by Thomas A. Romberg, making them a kind of “backbone” and enabling the development of this work. Eight students from the fourth semester of the Mathematics Degree course participated in the research, enrolled in the discipline called Differential and Integral Calculus III, in the academic semester 2018.2. These students were prompted to investigate the proposed models in a context of Mathematical Modeling. Data were collected through notes in the researcher’s field notebook, students’ resolutions from developed activities, recordings, filming and questionnaires applied during the course’s meetings / classes. Our analysis of the descriptions of the developed activities during the research and the testimonies collected in the interviews points to the existence of the production of knowledge pertinent to the Differential and Integral Calculus, regarding the Functions of Various Variables, and the Mathematical Modeling had its importance and influence in encourage students a more intimate and autonomous relationship with the theory used in the process, in the sense of understanding, meaning, application, dialogues between students, student-teacher and execution of resolutions of the activities developed. In the first mathematical models worked, the students’ desire was to apply some mathematical operations or substitute values that had no connection, that is, mechanization was evident without seeking an understanding, besides the fear of expressing their doubts. The results show that properly worked mathematical models in the context of modeling can make significant contributions to the teaching and learning of the functions of various variables. In conclusion, we found the need for a space for the production of meanings by the undergraduates and the relevance of this production so that they are not simple applicators of knowledge produced by others.

Keywords: Teaching-learning of the functions of various variables. Mathematical modeling. Qualitative method. Mathematical education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Interpretação geométrica das derivadas parciais 59
Figura 2 – Comparação de mudanças na notação de derivadas 60
Figura 3 – Interpretação geométrica do conceito de diferencial no Cálculo com Uma Variável 61
Figura 4 – Interpretação geométrica do diferencial dz e do incremento Δz . . . 63
Figura 5 – Interpretação geométrica da definição de derivada direcional 64
Figura 6 – Esquema simplificado de modelagem matemática 75
Figura 7 – Fluxograma das atividades 81
Figura 8 – Esboço de Romberg-Onuchic 82
Figura 9 – Modelo Preliminar 86
Figura 10 – Modelo Modificado 89
Figura 11 – Exemplo de curva de contorno e curva de nível 95
Figura 12 – Interpretação da derivada direcional 105
Figura 13 – Superfície de nível de esferas concêntricas 108
Figura 14 – Interpretação geométrica do vetor gradiente 108
Figura 15 – Ilustração de um ponto de sela em $(0, 0, 0)$ 116
Figura 16 – Planta baixa do terreno 126
Figura 17 – Esboço geométrico da Tarefa (4.4.7) 126
Figura 18 – Esquema das etapas do processo de Modelagem Matemática . . . 142
Figura 19 – Alunos discutindo o modelo matemático 2 149
Figura 20 – Resolução apresentada pelo grupo A_2 e A_6 152
Figura 21 – Resolução das alunas A_6 e A_8. 155
Figura 22 – Alguns momentos expositivos desse encontro/aula 166
Figura 23 – Resolução do item (a) do modelo 4 pelos alunos A_2 e A_6. 171
Figura 24 – Resolução do item (b) do modelo 4 pelos alunos A_2 e A_6 171
Figura 25 – Acompanhando as discussões das duplas sobre o Modelo 5 175
Figura 26 – Estimativas numéricas de um dos grupos 176
Figura 27 – Início do processo de modelagem da função dos alunos A_4 e A_7 . . 177
Figura 28 – Resolução do modelo construído pelas alunas A_1 e A_3 178

Figura 29 – Resolução do modelo 5 dos alunos A_2 e A_6 179
Figura 30 – Interpretação geométrica do conjunto D 182
Figura 31 – Momento pré-apresentação dos seminários 186
Figura 32 – Momentos da apresentação do primeiro grupo 189
Figura 33 – Momentos da apresentação do segundo grupo 191
Figura 34 – Representação geométrica das coordenadas cilíndricas de um ponto no espaço 192
Figura 35 – Interpretação geométrica das coordenadas esféricas 193
Figura 36 – Síntese das fórmulas de mudanças de coordenadas 195
Figura 37 – Momentos da apresentação do terceiro grupo 195
Figura 38 – Utilização do Geogebra para exemplificar equações de superfícies . 197
Figura 39 – Momentos da apresentação do quarto grupo 199
Figura 40 – - Aplicação do questionário final 201

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Síntese entre as pesquisas abordadas 41
Tabela 2 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático 50
Tabela 3 – Obstáculos e resistências em aplicações com Modelagem Matemática 74
Tabela 4 – Perspectivas em Modelagem Matemática e seus objetivos 77
Tabela 5 – Ementa da Componente Curricular Cálculo Diferencial e Integral III 88
Tabela 6 – Roteiro dos encontros/aula 132

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **13**

2 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS NO CONTEXTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA **24**

2.1 Um olhar descritivo de alguns livros sobre Funções de Várias Variáveis **24**

2.2 Um olhar para literatura sobre Funções de Várias Variáveis . . . **30**

2.3 As Funções de Várias Variáveis **42**

2.3.1 ***Algumas considerações sobre o conceito de função*** 42

2.3.2 ***Algumas considerações envolvendo os conceitos das Funções de Várias Variáveis*** 52

2.4 Modelagem Matemática **65**

2.4.1 ***Modelos matemáticos e sua relação com a natureza*** 65

2.4.2 ***Modelagem na perspectiva da Educação Matemática*** 70

3 METODOLOGIA DE PESQUISA **80**

3.1 As atividades de Romberg e as Contribuições de Onuchic para a Pesquisa **80**

3.2 Primeiro Bloco - a nossa Pesquisa apoiada na Metodologia de Romberg-Onuchic **83**

3.3 Segundo Bloco – estratégias e procedimentos de pesquisa . . . **90**

4 CÁLCULO DIFERENCIAL COM FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS **93**

4.1 Derivadas Parciais **93**

4.1.1 ***Diferenciabilidade de Funções de Várias Variáveis*** 97

4.2 Regra da cadeia **99**

4.3 Derivada direcional e Vetor Gradiente **104**

4.4 Máximos e mínimos de Funções de Várias Variáveis **113**

4.4.1 ***Máximos e mínimos condicionados (Multiplicadores de Lagrange)*** 121

5 APLICAÇÃO DO PROJETO - UMA INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA EM SALA DE AULA 128
5.1 Instrumentos de pesquisa 128
5.2 Descrições do desenvolvimento da pesquisa 130
5.3 Caracterizações dos sujeitos 131
5.4 Levantamentos de dados 132
5.5 Descrições dos episódios/aula da pesquisa: análise e discussões 134
5.6 Episódios/aula da observação 135
5.7 Os encontros/aula da pesquisa: descrição e análise 141
5.8 Aplicação do questionário final da pesquisa 200

6 INTERPRETAÇÃO DE EVIDÊNCIAS DA PESQUISA 203
6.1 Momento da observação 204
6.2 Momentos da intervenção: os encontros/aula 206

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 211

REFERÊNCIAS 214

ANEXO A – CARTA PARA COORDENAÇÃO DE CENTRO 219

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO-TCLE 220

ANEXO C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGENS (FOTOS E VÍDEOS) 222

ANEXO D – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ 223

ANEXO E – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO 225

ANEXO F – SEGUNDO QUESTIONÁRIO 226

ANEXO G – QUESTIONÁRIO FINAL DA PESQUISA 227

1 INTRODUÇÃO

As Funções de Várias Variáveis são ferramentas de suma importância não apenas no contexto inerente da própria matemática, mas a sua utilidade perpassa fronteiras e adentra em outras áreas do conhecimento humano, tendo essas funções um papel fundamental para o desenvolvimento e progresso da ciência. Em boa parte dos modelos explicativos que o homem se propõe a construir racionalmente, as funções estão presentes. Quando pretendemos estudar matematicamente alguma relação existente em nossa volta, a ferramenta matemática natural são as funções e não é difícil imaginar que, devido a complexidade dos acontecimentos existentes no dia a dia, esses fenômenos sejam compostos, em sua maioria, de diversas variáveis.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) quando estudado estritamente em um ambiente com funções de uma variável na dimensão real, permite estudar dinâmicas contínuas apenas entre espaços unidimensionais. A partir do momento que essas funções reais expandem seus domínios ou contradomínios para dimensões maiores, o CDI fica mais robusto ampliando a possibilidade de estudar interações ativas entre conjuntos ou espaços de mesma ou de dimensões diferentes, possibilitando o desenvolvimento de modelos matemáticos que se aproximam e explicam com mais detalhes algum fenômeno ou problema real.

Nesse sentido, Huanca e Assis (2019) refletindo sobre a Modelização Matemática afirmam:

> A Matemática é uma ciência de padrão e ordem que pode nos revelar padrões ocultos que nos ajudam a compreender o mundo ao nosso redor. Hoje, a Matemática, muito mais do que aritmética e geometria, é uma disciplina diferente que trabalha com dados, medidas e observações da ciência, com inferência, dedução e prova e com modelos matemáticos de fenômenos naturais, de comportamento humano e de sistemas sociais.

Da importância do que foi relatado nos parágrafos anteriores, temos, nos cursos superiores de matemática e áreas afins, uma disciplina específica para o estudo dessas funções denominada geralmente, por Cálculo Diferencial e Integral III (CDI-III) ou simplesmente Cálculo III. Contudo, em boa parte dos cursos os alunos terminam essa disciplina sem perceber a importância dessas funções, ou as vezes, o modo usual de abordar esses conteúdos cobrem a beleza e o significado dessa importante ferramenta matemática, levando o aluno a absolver informações e a exercitar regras e procedimentos.

A disciplina CDI que aborda as Funções de Várias Variáveis (FVV) é um momento importante na carreira de quem está cursando uma graduação em matemática ou áreas afins, pois é a disciplina que proporciona o primeiro contato com funções de mais de uma variável, ampliando o repertório de estudo desde o ensino básico e início do superior no tocante as funções. É também nesse momento que acontece uma abrangência nos conceitos de Limites, Derivadas e Integrais, pois se os alunos encontram dificuldades nas disciplinas do CDI com uma variável, então não é novidade estes encontrarem dificuldades quando passarem a estudar o cálculo com mais de uma variável e consequentemente ter-se altos índices de reprovações.

Barufi (1999), em sua tese, já chamava atenção para os alarmantes dados de reprovações em algumas das principais instituições públicas de ensino superior da região sudeste do país, nas disciplinas de CDI.

Na verdade, essa realidade não foi só verificada em pesquisas a nível nacional, ela ganha uma dimensão internacional como aponta algumas pesquisas, por exemplo, do Professor da Universidade de Londres, David Tall, que dentro da área de pesquisa "Pensamento matemático avançado" abordou sobre as dificuldades de aprendizagem envolvendo os conceitos básicos do CDI. (REZENDE, 2003) .

Com o objetivo de tentar reverter essa realidade, inúmeras pesquisas têm surgido dentro da Educação matemática com ênfase no ensino superior, seja com o foco no ensino, aprendizagem ou em ambos, apontando possíveis estratégias. Muitas dessas estratégias ou reflexões seguiram pelo ramo da tecnologia computacional através dos softwares ou pelo uso das calculadoras gráficas, que ganharam muito prestígio, segundo Rezende (2003), a partir do movimento "Calculus reform" ou cálculo reformado na década de 80.

Em sua tese, Rezende (2003), refletindo sobre o contexto pedagógico do ensino do CDI aponta as "soluções normais" geralmente utilizadas nas universidades para enfrentar as dificuldades de aprendizagem. A primeira é apostar nas enormes listas de exercícios para treinamento dos conteúdos; a segunda é sobre o uso dos computadores em trabalhos complementares e até mesmo na sala de aula; a terceira seria apostar em cursos preparatórios para nivelar ou enfrentar a "falta de base" dos alunos com cursos pré-cálculo ou matemática básica. Para esse referido autor, parte significativa dos problemas de aprendizagem do ensino do CDI é de natureza epistemológica, ou seja, está além dos métodos e técnicas de ensino.

Dessa forma, as "soluções normais" utilizadas na maioria das universidades tem convergido, quase sempre, para o fracasso no ensino do CDI. Em relação ao uso dos computadores, Rezende (2003, p.16) faz a seguinte reflexão:

> Não há nada mais insensato do que "modernizar" a ignorância – a ignorância dos reais problemas de aprendizagem do Cálculo. O que precisamos fazer não são projetos para o "uso de computadores" no ensino de Cálculo, e sim, projetos para o ensino de Cálculo. O foco deve ser o Cálculo e o seu ensino, e não o "uso de computadores". Primeiro, será necessário que se defina o que (nós professores) queremos com o ensino de Cálculo, qual o seu papel no ensino superior; isto é, questões pertinentes ao Cálculo e ao seu ensino, para, aí sim, num momento oportuno, definir qual a contribuição que este valioso instrumento da inteligência - o computador – possa vir a dar para este projeto. Do contrário, estaremos, como já havíamos dito, apenas "modernizando" nossa ignorância a respeito das questões essenciais a respeito do ensino de Cálculo.

Para Baldino (1998), a aprendizagem com significado acontece quando o aluno toma a posição de falante e o professor, nesse novo cenário, toma uma função de ouvinte e nessa relação dialógica fomentará um ambiente para o aluno refletir criticamente sobre sua forma de pensar e construir os conceitos. Nesse sentido, o aluno precisa se expor mais e o professor "falar menos e ouvir mais". O que ocorre no ensino tradicional é que o professor ensina mostrando, jogando as ideias e conceitos e o aluno aprende vendo e absorvendo. Torna-se então forçoso a inversão desses papéis. De acordo Cabral e Baldino (2006, p.6): "quando o aluno fala, sua posição subjetiva é evidenciada em persistências; trata-se da preferência do sujeito".

Comungando com esses autores, nossa pesquisa não surgiu com intenção de revolucionar o modo de ensinar ou aprender as FVV na disciplina de CDI – III, mas trazer uma estratégia apoiada no contexto da modelagem matemática que levassem o aluno a se posicionar, refletir e através de suas análises prévias dos modelos matemáticos criarem uma atmosfera de construção de significados sobre os conceitos abordados relativos às FVV, mostrando que é possível, tanto aos professores, quanto aos alunos, fazer algo diferente nas aulas dessa disciplina.

Sabemos que o sucesso no processo da educação, seja na educação básica ou superior, depende de uma boa estratégia no ato de ensinar e no ato de aprender. Em relação ao ensino, uma pergunta que surge de imediato é: o que significa ensinar bem? Obviamente a resposta para essa pergunta é ampla, mas terá como evidência principal o papel do professor e suas ações desenvolvidas cotidianamente.

Dessa forma, refletindo sobre a ação docente, Mizukami (1992) afirma que o processo de ensino é um fenômeno educativo que está envolvido em diferentes dimensões: humana, técnica, cognitiva, emocional, sócio política e cultural. Assim, para essa autora o ato de ensinar vai além do crivo técnico e ganha outros desdobramentos. Ensinar bem é mais do que ter um bom domínio dos conteúdos, embora isso seja fundamental, é saber compartilhar esse conhecimento com o aluno enxergando-o em suas diferentes dimensões.

Sobre os saberes do professor em seu trabalho, Tardif (2002, p.36) afirma que:

> A relação dos docentes com os saberes não se reduz a uma função de transmissão dos conhecimentos já constituídos. Sua prática integra diferentes saberes, com os quais o corpo docente mantém diferentes relações. Pode-se definir o saber docente como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais.

Assim, a prática docente ocorre de forma efetiva, para esse autor supracitado, quando são mobilizados diversos saberes que são chamados pedagógicos. Isso se estende a toda dimensão de ensino (básico ou superior). Logo, tomando esse raciocínio, o sucesso de um bom ensino do CDI supõe a mobilização e integração de múltiplos saberes.

Sobre as estratégias de aprendizagem, Frota (2009, p.63), assegura que elas:

> Incorporam movimentos: são dinâmicas, flexíveis e modificáveis em função dos objetivos propostos. Decorrem, por um lado, de interações com os objetos, entendidos como sendo os conteúdos matemáticos, os materiais didáticos, as tecnologias de informação, as diversas mídias. Por outro lado, decorrem de interações do aluno com outros indivíduos, de modo especial com o professor, os colegas e os diferentes ambientes de aprendizagem.

Ainda segundo essa autora, é importante o professor conhecer as estratégias e os métodos utilizados pelos alunos para aprender Matemática. Assim, ela mostra os resultados de suas pesquisas desenvolvidas acerca das estratégias de estudo e aprendizagem de CDI envolvendo alunos universitários, destacando a influência de atitudes metacognitivas na determinação de um estilo de aprendizagem e suscitando uma reflexão sobre a prática docente.

Sobre as estratégias de ensino da disciplina, Frota (2009) afirma que podem ser apontadas como proeminentes para o desenvolvimento de estilos e da autorregulação do processo de aprendizagem. Sobre o estilo de aprendizagem entre alunos universitários, essa autora afirma que o predominante é o prático em relação ao teórico, e para esse estilo as estratégias mais indicadas são: solicitar aos alunos além da resolução das tarefas, suas justificativas e explicações dos procedimentos adotados; sugerir a classificação e agrupamentos de tarefas por paridades de estratégias de solução; solicitar que possam escolher um conjunto de tarefas cujas justificativas e resoluções possibilitem uma revisão do conteúdo abordado; propor uma revisão de questões erradas, fomentando uma análise dos erros; ler uma tarefa, especulando possíveis estratégias de solução e verificando a viabilidade das mesmas, em função dos pressupostos teóricos estabelecidos; propor questões desafiadoras que incentivem a especulação e a pesquisa.

Comungando com essa autora, acreditamos que o ensino-aprendizagem das FVV através de modelos matemáticos pode criar um ambiente que atenda essas estratégias de aprendizagem dentro do estilo prático em relação ao teórico. Nesse sentido, para adotar essas táticas é necessário uma mudança de postura começando pelo professor e, por conseguinte, afetando os alunos. Frota (2009, p.76) afirma que:

> Para implementar as estratégias acima, o professor precisa repensar as suas próprias estratégias de aprender e ensinar. Incentivar a elaboração de resumos teóricos exige do professor transformar-se e transformar seus alunos em autores do texto didático, aprendendo a distinguir o essencial, hierarquizando conceitos e estabelecendo conexões entre os mesmos. Isso demanda tempo na elaboração de textos, na seleção e/ou elaboração de questões que suscitem a pesquisa, abandonando a famosa lista de exercícios, muitas vezes repetitivos, para ousar discutir questões mais instigadoras, muitas delas presentes nos atuais livros de Cálculo, mas ainda pouco trabalhadas em sala de aula.

Do que foi discutido sobre ensino e aprendizagem de CDI, percebemos a importância de pesquisas envolvendo as FVV. Embora as pesquisas nessa área do ensino superior tenham tido um aumento considerável, é evidente que ainda precisamos avançar para que tenhamos um ensino-aprendizagem mais efetivo e significativo nas universidades em nosso país e no mundo.

A seguir, trazemos a trajetória pessoal e acadêmica do pesquisador que convergiram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Para produzir uma dissertação de mestrado existe um longo caminho a ser percorrido que se inicia pela escola básica. Tendo sempre estudado em escola pública, o pesquisador, estudou boa parte dos anos iniciais do Ensino Fundamental na cidade de Monteiro – PB, na Escola Estadual Miguel Santa Cruz.[1] No ano de 1999, mudou-se para a cidade Iguaracy-PE, vindo a cursar os anos finais do Ensino Fundamental e o primeiro ano do Ensino Médio. O segundo e terceiro ano do Ensino Médio passou a estudar em uma escola estadual na cidade de Afogados da Ingazeira – PE, por já naquela época ter maturidade suficiente para perceber que em algumas áreas eram bastante defasadas o ensino na cidade onde residia (a saber, as disciplinas como Física, Química e Biologia) e nessa escola na qual concluiu o Ensino Médio havia uma estrutura melhor. Desde a educação básica, nunca encontrou problemas com a disciplina matemática, sempre foi considerado um aluno muito dedicado. Isso não significa que era alguém muito inteligente ou algo semelhante a essa rotulação, na verdade se saia bem na matemática procedimental que se trabalha em boa parte das escolas.

Quando concluiu o Ensino Médio no ano de 2006 tinha muito desejo de fazer um curso superior, especialmente Engenharia Civil. Ao completar dezoito anos viajou para a cidade de São Paulo no intuito de tentar realizar esse sonho, o que não foi possível e depois de um ano e alguns meses retornou para a cidade de Iguaracy-PE, no ano de 2008 e nesse mesmo ano prestou vestibular para o curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual da Paraíba, campus Monteiro, onde alcançou êxito e no mês de fevereiro de 2009 iniciou o curso.

O intuito inicial era aumentar os conhecimentos em matemática para adiante buscar o curso de engenharia civil. Com o avançar da graduação foi se criando uma identidade muito forte com o curso de Matemática de maneira tal que não houve mais o desejo em fazer engenharia. Esse curso foi um marco na vida do pesquisador, pois tanto houve um crescimento em conhecimento matemático como as demais disciplinas do curso potencializaram e ampliaram a visão de mundo e de pessoa. Durante o curso sempre foi apaixonado pela área da Matemática Pura e ao mesmo tempo ti-

[1] Na qual hoje é professor efetivo

nha muito apreço com a Educação Matemática e sua preocupação na compreensão dos conteúdos matemáticos, nunca fazendo divisão ou partido para nenhum dos lados dessa dicotomia existentes nessas áreas.

Refletindo sobre essa dicotomia existente entre matemáticos e educadores matemáticos, Onuchic e Huanca (2013, p.309 - 310) afirmam:

> Como cientistas matemáticos, como pesquisadores de educação matemática, como professores nas universidades e escolas, precisamos começar a ver nossas preocupações para pós-graduados, graduados e a educação k-12 como partes de um empreendimento educacional integrado. Nesse empreendimento, temos que aprender a nos comunicar e a colaborar por meio de fronteiras culturais, disciplinares e institucionais, assim como estamos sendo chamados para trabalhar na pesquisa em ciências matemáticas.

No decorrer da graduação, as monitorias, os cursos de extensão ministrados, as práticas e os estágios despertaram as primeiras reflexões e preocupações sobre o ato de ensinar. Com muito esforço e perseverança conseguiu concluir a Licenciatura em Matemática no segundo semestre do ano de 2012.

No mês de outubro do ano de 2013, prestou concurso para professor substituto na UEPB, campus Monteiro, na área de Matemática sendo aprovado e na oportunidade, foi chamado para assumir a vaga deixada por um professor que estava se afastando para doutorado. Iniciava-se assim, sua primeira experiência como professor, no inicio teve um pouco de receio e um pensamento de não assumir, temendo a responsabilidade em ensinar conteúdos para futuros professores. Foi um período de crescimento, buscando sempre a melhor maneira possível em abordar os conteúdos exigidos nas ementas de cada disciplina ministrada.

Esse convívio com o ensino no curso superior fomentou ainda mais o desejo e a necessidade de buscar uma pós-graduação. Foi ainda neste período que teve a oportunidade de conhecer e ter uma aproximação com um dos professores efetivos[2] do corpo docente do campus Monteiro, que em suas conversas sempre demonstrava preocupação com o ensino da Matemática no país e sempre colocava alternativas para tornar a matemática uma disciplina atrativa e com significados. Após quatro etapas (prova objetiva, entrevista, prova de língua estrangeira e análise de currículo) foi obtido sucesso conseguindo ficar entre as vagas ofertadas.

[2] Professor Dr. Roger Huanca, orientador desta pesquisa.

O projeto de pesquisa inicialmente trazia uma proposta para investigar o ensino-aprendizagem das Funções de Várias Variáveis no contexto da Modelagem Matemática e Resolução de Problemas. Após cursar a disciplina Metodologia da Pesquisa e tendo algumas conversa com o orientador decidiram retirar a Resolução de Problemas como proposta da pesquisa e trabalhar somente no contexto da Modelagem Matemática.

O ano de 2016 foi um ano marcante na vida do pesquisador, pois ocorreram duas grandes vitórias no campo profissional e uma no campo pessoal. No campo profissional consegui a classificação na seleção do mestrado e a aprovação, em primeiro lugar, no concurso público para professor do Estado de Pernambuco. Já na vida pessoal, no dia 07 de junho do decorrente ano nascia a primeira filha desse pesquisador[3].

Em 2017 foi a posse do vínculo como professor da rede Estadual de Pernambuco ocorrida no mês de fevereiro. Em março do ano citado iniciou as disciplinas do mestrado e foi um período de muita dificuldade, pois trabalhar, cursar um mestrado e conciliar com a família não foi tarefa fácil, além das cobranças do orientador. O pesquisador tinha que se deslocar de Monteiro para Campina Grande (cidade onde acontece o PPGECEM distante cerca de 180 km), todas as segundas e terças-feiras. Nas quartas-feiras se deslocava para ensinar em Jabitacá (distrito de Iguaracy – PE onde foi locado, distante cerca de 80 km de Monteiro) e lecionava tarde e noite da quarta-feira até a sexta-feira. Nas madrugadas ou em algum horário livre nesses dias de trabalho fazia algumas leituras do levantamento bibliográfico ou de disciplinas do mestrado. Retornava de lá apenas no sábado pela manhã, conversava rapidamente com a família e o restante do sábado e o domingo focava novamente nas leituras e atividades oriundas das disciplinas do mestrado.

Ainda no ano de 2017 foi aprovado em outro concurso, dessa vez, para professor do Estado da Paraíba, tomando posse no mês de fevereiro de 2018 e fui locado para ensinar na cidade de Monteiro-PB. Esse acontecimento melhorou bastante, pois o pesquisador não precisava se deslocar para o estado vizinho a trabalho e ganhava tempo para terminar e completar os créditos exigidos pelo PPGECEM e avançar na pesquisa, principalmente na coleta de dados.

Após realizar a coleta e a análise dos dados se aproximava o evento da IX

[3] Isabelle de Siqueira Nário.

Bienal em Matemática, realizada na cidade de Juazeiro do Norte – CE. Dessa forma, juntamente com o orientador decidiram submeter um relato de um dos episódios da aplicação da pesquisa sobre derivadas direcionais, o qual enviaram e apresentaram na forma de pôster.

Após apresentar o percurso da trajetória pessoal e acadêmica, voltamos ao nosso fenômeno de interesse da pesquisa: as FVV. Periféricos a esse objeto existem alguns elementos cruciais nessa pesquisa que se interligam através de Modelos Matemáticos e aspectos da Modelagem.

Problemática e objetivos

Partindo do interesse sobre FVV no contexto do CDI e acreditando na premissa que trabalhar alguns aspectos da Modelagem Matemática em sala de aula é uma rica oportunidade para se desenvolver estratégias de ensino-aprendizagem que conduza o aluno a um relacionamento mais íntimo e autônomo com a teoria usada no processo, no sentido de compreensão, significado e aplicação, formulamos a seguinte questão de investigação:

Quais as principais contribuições a serem produzidas nos alunos de Licenciatura em Matemática diante do ensino-aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral - III relativo às Funções de Várias Variáveis através de Modelos Matemáticos?

Dessa forma, o principal objetivo da pesquisa é analisar as possibilidades de ensino-aprendizagem das FVV a partir de uma investigação qualitativa de modelos matemáticos, à luz de aspectos da modelagem matemática.

Além disso, para compreender melhor o objetivo geral, buscamos atingir os seguintes objetivos específicos:

- Analisar como os alunos interagem diante de um ambiente com aspecto da Modelagem Matemática;
- Abordar alguns conceitos de FVV através de Modelos Matemáticos;
- Observar como os alunos construirão seus conhecimentos sobre FVV no contexto da Modelagem Matemática;

- Discutir e refletir com os alunos a importância das Derivadas Parciais para a compreensão da matemática, especificamente os conceitos de Máximos e Mínimos de FVV.

Ao propor esses objetivos, vislumbra-se e estimula-se uma reflexão no campo do ensino-aprendizagem de matemática, especificamente na área do CDI.

Esta dissertação está dividida em sete capítulos, além das referências bibliográficas e demais elementos.

No presente capítulo, foi realizada uma introdução trazendo uma justificativa acadêmica do tema, a trajetória pessoal e acadêmica do pesquisador, além de abordar alguns elementos cruciais que constituem esse trabalho: a problemática e os objetivos da pesquisa.

No segundo capítulo – O Ensino-aprendizagem de FVV no contexto da Modelagem Matemática - será realizada uma descrição panorâmica em alguns livros que abordam as FVV, começando por Pinto e Morgado (2015), além de complementar com outros autores, tais como: Thomas (2009), Guidorizzi (2001), Gonçalves e Flemming (2007) e outros. Sobre o ensino de Cálculo de uma ou mais variáveis, foram abordados os trabalhos de Barufi (1999) e Rezende (2003). Dedicar-se-á atenção especial aos estudos que abordavam diretamente a temática do Cálculo de Várias Variáveis como: Imafuku (2008), Alves (2011), Oliveira (2014) e outros. No tocante aos modelos no contexto da Modelagem Matemática nos apoiaremos fortemente em Bassanezi (2014), além de outros teóricos como: Burack (2010), Biembengut e Hein (2011), Beltrão (2019) Domingos (2015), Huanca e Assis (2019), Littig et al (2019), Klüber (2010), Soares e Souto (2014), e outros.

No terceiro capítulo – A Metodologia da pesquisa – apresentaremos os procedimentos metodológicos adotados na construção desta pesquisa, mostrando o contexto da pesquisa, pautando as devidas justificativas para as opções metodológicas, a concepção das atividades e o seu desenvolvimento.

No quarto capítulo - Cálculo Diferencial com Funções de Várias Variáveis - traremos a teoria matemática utilizada para embasar nossa pesquisa.

No quinto capítulo – Aplicação do projeto: uma investigação qualitativa em sala de aula - apresentaremos a descrição sobre os episódios ou encontros/aula realizado durante a etapa da pesquisa de campo. Nesta parte do trabalho será feita uma apresentação e uma análise inicial nos dados coletados.

No sexto capítulo – Interpretação de evidências da pesquisa - realizaremos uma investigação dos episódios de forma mais aprofundada e uma análise definitiva e ampla, procurando obter as respostas para a questão norteadora da pesquisa.

No sétimo capítulo – Considerações finais - retomaremos e ressaltaremos os principais resultados obtidos, nossa percepção sobre a pesquisa realizada e suas principais implicações no campo da educação.

2 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS NO CONTEXTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Esse capítulo está dividido em três seções, cada uma destacando elementos importantes que envolvem as FVV. A primeira será dedicada a uma análise panorâmica de alguns livros didáticos que abrangem o tema da pesquisa. O critério para escolha de dois livros, em um total de quatro, foi norteado com base em dados que apontam ser os mais procurados por alunos da instituição onde foi realizada a pesquisa de campo.

Na segunda seção fizemos um levantamento sobre alguns trabalhos já realizados envolvendo as FVV, tais como publicados em revistas, eventos, dissertações e teses. Ao todo, conseguimos mapear sete trabalhos que tiveram como tema ou subtema as FVV.

A terceira e última seção foi dedicada à discussão sobre alguns elementos importantes sobre as FVV, onde trataremos, além do conteúdo, pontos importantes na transição dessas funções quando expande de uma para duas ou mais variáveis, destacando suas implicações no ensino-aprendizagem.

2.1 Um olhar descritivo de alguns livros sobre Funções de Várias Variáveis

Nessa seção traremos uma breve descrição de alguns livros didáticos que trabalham os conteúdos envolvendo as FVV. Através de uma leitura panorâmica, destacamos alguns pontos principais de cada livro, bem como sua estruturação. Vale salientar que não é objetivo nosso aqui fazer uma análise profunda de cada livro, o que foge do nosso objeto de estudo, mas apontar o que cada um aborda sobre o conteúdo mencionado.

O primeiro livro a descrever foi uma escolha conjunta entre o pesquisador e orientador. Foi muito proveitoso trabalhar com esse livro que até então o pesquisador não conhecia e surpreendeu-se com a qualidade e pontualidade teórica. Serviu como base na preparação dos modelos matemáticos trabalhados nessa pesquisa.

Livro 1 - Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis

O livro intitulado “Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis” de autoria das professoras Diomara Pinto e Maria Cândida Ferreira Morgado é o produto das experiências em lecionar disciplinas ligadas ao Cálculo para alunos do Instituto de Matemática e da Escola de Engenharia da UFRJ que se iniciou a partir do ano 1974. Esse livro que descrevemos é a terceira edição e sexta reimpressão.

O primeiro capítulo faz uma abordagem nas funções com valores vetoriais de uma variável real, trazendo algumas aplicações ao movimento em duas ou três dimensões. Inicia definindo o que é uma função vetorial e em seguida traz uma abordagem geométrica do vetor imagem. Prosseguindo, define nessa ordem limite, continuidade, parametrização e derivada de uma função vetorial. Surgem algumas discussões que convergirão nos conceitos de diferenciabilidade e classe C^1. As autoras trazem uma seção que aborda aplicações ao movimento, no contexto do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Na sequência trata sobre comprimento de arco e curvaturas.

No segundo capítulo, as autoras exploram algumas superfícies que aparecerão com frequência no estudo das FVV. Além de suas formas são trabalhados também suas equações. O capítulo 3 inicia-se o cálculo diferencial com as FVV. As autoras seguem a sequência usual (funções, limites e derivadas) que a maioria dos livros de cálculo utilizam, sempre enfatizando as funções com duas ou três variáveis, pois tanto é possível explorar o aspecto geométrico como os resultados que serve para as duas ou três variáveis são generalizados para n variáveis. O estudo de Máximos e Mínimos, bem como os critérios para determiná-los é explorado no quarto capítulo.

No quinto capítulo, inicia-se o estudo das integrais múltiplas pela interpretação geométrica da integral dupla. As autoras desenvolvem a teoria trazendo as integrais triplas. O sexto capítulo aborda as integrais de linhas e o fechamento dos capítulos ocorre no sétimo, apresentando as integrais de superfície.

Como apêndice, as autoras trazem as funções definidas implicitamente, dando ênfase em curvas, superfícies e o Teorema da função implícita. As repostas dos exercícios são destacadas ao final, e diferente de boa parte dos livros de cálculo que só trazem as repostas das questões ímpares, nesse livro são dadas as respostas de boa parte dos exercícios.

A estrutura do livro segue com uma teoria clara e sucinta, isto é, sem muitas delongas e discussões teóricas que alguns autores de livros didáticos utilizam antes ou depois de trazer as informações principais. É um livro indicado para alunos que gostam de autores que abordam diretamente os tópicos de uma teoria. Também vale destacar que as autoras trazem as aplicações, que nós chamamos de modelos matemáticos.

Os exercícios trazem questões de fixação do conteúdo, geralmente com um grau de dificuldade menor e vai aumentando esse grau conforme o exercício vai progredindo, surgindo assim, questões com problemas aplicados e o fechamento desses exercícios geralmente traz aquelas questões mais trabalhosas e repletas com o verbo no imperativo: mostre, prove, etc.

Livro 2 - Cálculo

Esse livro de autoria de George B. Thomas é o segundo volume da coleção e sua décima primeira edição. Foi traduzido pelas professoras do Instituto de Matemática da Universidade de São Paulo Luciana do Amaral Teixeira e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo.

O autor objetivou recuperar os pontos fortes das edições anteriores e inovar outros elementos a partir de algumas sugestões levantadas. Além disso, é nesse volume onde são tratados os conteúdos abordados na disciplina de CDI-III.

De início, temos acesso à definição de Função com n variáveis, mostrando que os alunos já utilizavam implicitamente relações e fórmulas com mais de uma variável, como por exemplo, a fórmula do volume do cilindro. É discutido de forma ampla sobre domínio e imagem, onde o autor traz alguns conceitos de topologia no $\mathbb{R}^2$ (ponto de interior, ponto de fronteira, abertos, fechados, regiões limitadas e não limitadas). Em seguida, há uma discussão a respeito de gráficos e curvas de nível de função de duas variáveis.

Prosseguindo, o autor aborda Limite e Continuidade para funções de duas variáveis, sempre ao final estendendo o conceito para n variáveis. Desenvolve a noção de derivadas parciais e direcionais e demais tópicos relacionados. Além disso, o autor trabalha as Integrais Múltiplas e Integração em campos vetoriais. Um ponto bastante pertinente do livro 1 é que a teoria é desenvolvida fazendo uma mistura de abordagens algébricas e geométricas nas definições e propriedades, utilizando imagens gráficas para ajudar no entendimento dos conceitos. Em comparação a outros livros, as imagens gráficas são de excelente qualidade visual e a maioria seguida de comentários explicativos, o que facilita o entendimento dos estudantes.

Os exercícios trazem questões que variam desde aquelas que são de natureza voltada à fixação de conteúdo,à aquelas que abordam problemas de aplicação a Física. Por exemplo, no capítulo sobre as derivadas parciais, o autor traz na parte de teoria e exemplo uma aplicação de regra da cadeia muito utilizada na física: variações dentro de um circuito elétrico. Vejamos o enunciado da questão.

> A voltagem V em um circuito que satisfaz a lei $V = IR$ vai caindo lentamente à medida que a bateria descarrega. Ao mesmo tempo, a resistência R vai aumentando conforme o resistor esquenta. Use a equação
>
> $$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial I} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \frac{dR}{dt}$$
>
> para descobrir como a corrente está variando no instante em que $R = 600\ ohms,\ I = 0,06\ amp,\ dR/dt = 0,5\ ohms/s$ e $dV/dt = -0,01\ volt/s$.
> (THOMAS, 2009, p.327).

Outra aplicação na área da física é tratada no mapeamento do caminho de uma partícula atraída pelo calor. Mais uma vez as FVV estarão presentes sendo a linguagem fundamental para dar precisão aos conceitos físicos. Vejamos o enunciado da questão.

> Uma partícula atraída pelo calor tem a propriedade de, em qualquer ponto (x, y) do plano, mover-se no sentido de maior aumento de temperatura. Se a temperatura em (x, y) for $T(x, y) = -e^{-2y} \cdot \cos x$, encontre uma equação $y = f(x)$ para o caminho de uma partícula atraída $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.(THOMAS, 2009, 349).

Se continuássemos a mostrar aplicações na área da física, química, biologia estenderia bastante essa discussão, o que não é o intuito desse trabalho. Nossa pretensão aqui foi apenas mostrar algumas, dentre as muitas, aplicações no campo da física trabalhada nesse livro. Os demais problemas tratados nos exercícios desse livro são de cunho exclusivo à Matemática. Algumas questões incentivam ao uso de tecnologias, geralmente programas de computadores voltados á matemática.

Outro aspecto interessante nesse livro são as questões dos exercícios serem separados por tópicos de conteúdo, algumas trazem a letra T indicando o uso de tecnologias, além de no final trazer um exercício de aplicação e exercício avançado.

Livro 3 - Cálculo B

As autoras Mirian Buss Gonçalves e Marília Fleming descrevem no prefácio deste livro que após lograrem sucesso com o lançamento do livro Cálculo A, resolveram ampliar sua abordagem em conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral. Com essa motivação publicou no ano de 1992 o livro intitulado Cálculo C, abordando as funções vetoriais, integrais curvilíneas e de superfície. Em 1999 publicam a primeira edição desse livro Cálculo B, contendo inicialmente os conteúdos sobre funções de várias variáveis, integrais duplas e triplas. Com as revisões e reestruturações que ocorreram posteriormente convergiram para a junção dos dois livros, Cálculo B e Cálculo C, em um único volume prevalecendo o então título de Cálculo B que conhecemos atualmente.

O livro 2, basicamente tem as mesmas características do livro anteriormente descrito, diferenciando apenas na questão sequencial dos conteúdos. Seguindo a mesma tendência do livro 1, inicia trazendo situações práticas que as FVV estão presentes. Trabalham os conceitos de domínio e imagem, gráficos de funções com duas variáveis, superfícies e curvas de nível. Na sequência, são abordados as funções vetoriais e o estudo sobre curvas.

Além disso, as autoras retomam o estudo das FVV, na qual denomina também como funções escalares, trazendo os conceitos de limite e continuidade, expandindo-os para funções vetoriais.

Já o quarto capítulo trata das derivadas parciais e funções diferenciáveis. O quinto capítulo elas trazem os conceitos de extremos (máximo e mínimo), bem como os critérios para encontrar esses extremos. O sexto capítulo é dedicado as Derivadas Direcionais e campos gradientes. É dada uma ênfase algébrica e geométrica nos campos escalares e vetoriais, uma característica que diferencia do livro 1.

A partir do sétimo capítulo do livro 2, apresentam o estudo das Integrais duplas, ampliando para as Integrais triplas, Integrais curvilíneas e de superfície.

Os exercícios desse livro são mesclados com questões de fixação e aplicação imediata das fórmulas, basicamente é um livro que facilita a mecanização imediata do conteúdo, podendo levar o aluno a discorrer em uma não compreensão dos conceitos.

Livro 4 - Um curso de Cálculo

O professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São

Paulo, Hamilton Luiz Guidorizzi, autor dos livros intitulados “Um curso de Cálculo” separado em quatro volumes, afirma no prefácio do volume 1 que esses livros tiveram como base para seu desenvolvimento as aulas ministradas nos cursos de Cálculo na Escola politécnicas e Instituto de Matemática e Estatística da USP, assim como no Instituto de Ensino de Engenharia Paulista.

Sendo assim, iremos nos deter a fazer uma descrição panorâmica de alguns capítulos dos volumes 2 e 3, cujo conteúdos fazem parte do objeto de nossa pesquisa. A edição que estamos descrevendo é a quinta, tanto o volume 2 quanto o volume 3.

Podemos começar destacando que a organização dos conteúdos nesse livro 3 é bem distintas dos livros descritos anteriormente. O volume dois começa retomando alguns conteúdos do Cálculo Integral, a saber as Funções Integráveis; Função dada por Integral; Extensão do conceito de Integral e finaliza trazendo um capítulo sobre Aplicações à Estatística. Esses conteúdos mencionados estão distribuídos em quatro capítulos.

O quinto, sexto e sétimo capítulos abordam, respectivamente, os conteúdos: Equações diferenciais lineares de 1º e 2º ordem com coeficientes constantes; Os espaços $\mathbb{R}^n$ e Funções de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$. Em suma, o capítulo seis (Os espaços $\mathbb{R}^n$) faz uma discussão em conceitos topológicos do $\mathbb{R}^2$, particularmente sobre norma e conjuntos abertos. Esses conceitos são fundamentais e serão muito utilizados nos capítulos seguintes, principalmente com as funções que utilizarão em seus domínios ou contra-domínios esses espaços. As discussões começam no plano e ao final são generalizados para espaços de dimensões maiores $(n \geq 3)$.

O oitavo capítulo é voltado para as FVV, conteúdo objeto de nossa pesquisa, e neste o autor segue a mesma sequência dos livros anteriores em relação aos conteúdos (domínio, imagem, curvas e superfícies de nível). Assim como outros livros, o autor dá ênfase as funções com duas variáveis e afirma que as generalizações não serão problemas, pois, quase não há diferença. A partir desse capítulo, até o décimo sétimo, o autor vai desenvolver todos os conteúdos do Cálculo Diferencial, utilizando as FVV.

Ademais, o autor finaliza com um capítulo sobre Mínimos quadrados e traz dois apêndices, o primeiro tratando sobre as Funções de uma variável real a valores complexos e o segundo sobre o uso da calculadora gráfica HP-48G e de programas computacionais como o Excel e Mathcard. Mostra em seguida para finalizar o livro as repostas, sugestões ou soluções.

Como afirmamos logo no início dessa subseção, esse livro 3 tem uma ordem de conteúdo diferenciada, e uma dessas diferenciação é percebida quanto se trata das Integrais utilizando FVV. Guidorizzi deixa para abordar tais integrais apenas no terceiro volume. Esse terceiro volume inicia-se com as funções vetoriais e em seguida traz todos os conteúdos envolvendo integrais duplas, triplas, de linha, de superfície, além de aplicações e outros temas.

Notamos também que os capítulos, do segundo e terceiro volume, são curtos e diretivos, sem muitas delongas teóricas. Os exercícios são menores e o grau de dificuldade, como o autor afirma no prefácio, segue uma linhagem crescente, isto é, começando com questões basilar e aumentando o nível ao avançar das questões. O próprio autor alerta aos leitores que existem questões carregadas de sutilezas que ocasionarão dificuldades e estimula aos leitores não desanimarem caso não consigam de imediato resolver, podendo explorá-las quando ganharem mais familiaridade teórica.

Dos livros que foram descritos até aqui podemos concluir que quase todos possuem a mesma estruturação. O que vai diferenciar de um livro para outro são apenas características, alguns autores preferem detalhar ao máximo o desenvolvimento da teoria, minuciando as explicações em exemplos resolvidos ou comentários pré ou pós conceitualização. Outros autores são mais pontuais e diretivos nos objetos principais da teoria, já definem, exemplificam, trazem as propriedades e Teoremas, sem alongar-se muito nas discussões. Os exercícios são em sua maioria similares, com questões de fixação e aplicação dos conceitos. Alguns incluem em seus exercícios o uso de tecnologias (calculadoras gráficas ou software computacional).

2.2 Um olhar para literatura sobre Funções de Várias Variáveis

Nesta seção apresentaremos alguns trabalhos que já foram desenvolvidos, sendo três artigos, duas dissertações e duas teses sobre as FVV. Os trabalhos que a seguir descrevemos foram pesquisados em revistas e sites da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da Capes.

Começaremos pelos artigos, em seguida abordaremos as dissertações e por fim as teses. Seguiremos a ordem cronológica das publicações desses trabalhos.

Artigo 1 – Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas

Nesse artigo os autores trazem como objetivo nesse artigo apresentar uma análise institucional em torno dos projetos acadêmicos curriculares, os livros didáticos e os alunos enquanto elementos de uma instituição de ensino superior. O conteúdo objeto nessa pesquisa foram as integrais múltiplas.

Os autores para discorrerem sobre as relações institucionais apoiaram-se fortemente na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard, compartilhando algumas reflexões sobre o saber matemático e a noção de praxeologia. Assim, "o saber matemático, enquanto forma particular do conhecimento, é fruto da ação humana institucional, é algo que se: produz, utiliza, ensina ou de uma forma geral, que transita nas instituições". (HENRIQUES; NAGAMINE A. END NAGAMINE, 2012, p.1265).

No tocante a abordagem de praxeologia, esses autores definiram como sendo um modelo para análise da atividade humana institucional, descrita em termos de quatro noções: Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria. Desse modo, essas noções tornam possível a construção das práticas sociais em geral e particularmente as atividades matemáticas.

Com essas noções citadas no parágrafo anterior, os autores conduziram a pesquisa realizando uma análise institucional em cima do saber matemático denominado pelas integrais múltiplas. Tomaram como referência os cursos de matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz e escolheram alguns livros didáticos que abordam o conteúdo objeto dessa pesquisa, focando no livro de Swokowisk por ser o mais adotado pelos alunos dessa instituição. Eles analisaram esse livro baseado em três estruturas organizacionais: global, regional e local.

As discussões teóricas e a análise dos dados propostos no artigo 1 convergiram para alguns resultados que os autores descreveram como:

> Para finalizar este artigo, afirmamos que a análise institucional permite identificar as condições e exigências que determinam, numa instituição, a organização praxeologia de objetos de estudos; fornece indícios de tipo de tarefas que podem ser consideradas numa sequência didática útil para o estudo de práticas institucionais em torno desses objetos na instituição de referência, favorecendo, assim, o desenvolvimento da praxeologia modelada, cujas análises, tanto a priori quanto a posteriori, podem ser realizadas com base na abordagem praxeológica de Chevallard. (HENRIQUES; NAGAMINE A. END NAGAMINE, 2012, 1288).

O que chamou atenção nesse artigo 1 foi a análise refinada do livro didático que é bem utilizado nas disciplinas do CDI, o livro do Swokowisk que aborda as FVV, conteúdo objeto de nossa pesquisa. Essa análise foi toda ancorada na perspectiva da TAD proposta por Chevallard. Então, esses autores conseguiram mapear o que chamaram de "praxeologia usual" nesse livro, isto é, uma abordagem que parte da teoria para as tarefas, do externo para o interno. Evidentemente que essa praxeologia usual é utilizada em quase todos os livros de Cálculo. Ademais, propôs uma "praxeologia modelada", que seria construir uma sequência didática onde o combustível para a evolução dos estudos parte de uma situação-problema ou objeto institucional que pretenda se ensinar. Ou seja, nessa praxeologia modelada parte do interno (problema) para o externo (teoria).

Artigo 2 – Modelagem Matemática no Ensino e Aprendizagem de Funções de Várias Variáveis

O artigo 2 foi apresentado no XII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) ocorrido em São Paulo no ano de 2016. As autoras foram Karla Jaqueline Souza Tatsch, Janice Rachelli e Vanilde Bisognin.

Nesse trabalho, as referidas usaram a Modelagem Matemática (MM) sugeridos por Rodney Bassanezi. Podemos perceber neste artigo, que as estratégias de ensino-aprendizagem no contexto da modelagem teve contribuições para melhoria na compreensão de FVV, usando a temática telefonia móvel. A proposta foi aplicada com um grupo de alunos do curso de matemática de uma instituição privada do Rio Grande do Sul.

Essa pesquisa, segundo as autoras, denomina-se do tipo estudo de caso e foi aplicada a catorze alunos bolsistas do PIBID[1]. Esses alunos já haviam passados pela experiência de trabalhar com a MM na educação básica no papel de professores, em outras ocasiões como educadores de apoio ou monitores. As atividades focaram trabalhar sobre dois planos de telefonia móvel e os alunos teriam que analisar os custos considerando as diferentes variáveis e situações para obter um modelo referente a cada situação.

Depois de concretizada a análise dos dados as autoras trouxeram alguns resultados que se resume na seguinte citação:

[1] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

> A sequência de atividades de análise dos planos de telefonia gerou interesse e participação na totalidade dos alunos, com riqueza de discussões, trazendo para a aula, além do estudo do conhecimento matemático previsto, comentários sobre seus próprios planos de telefonia e sobre os planos que estavam analisando. Os modelos construídos pelos alunos se mostraram válidos para o cálculo do custo e as análises possibilitaram a comparação entre as ofertas estudadas. Alguns modelos constituíram-se funções dependentes de uma variável e outros dependentes de várias variáveis. As atividades levaram os alunos a concluir que o estudo de funções de várias variáveis se apresentou de forma extremamente interessante por meio do estudo de situações reais. (TATSCH; RACHELLI; BISOGNIN, 2016, p.11).

Desta forma, esse artigo 2 mostrou a beleza e a riqueza que repousa na estratégia de ensino-aprendizagem mediada pela MM. O real quando adentra para sala de aula traz consigo uma significação e torna tangível na mente do aluno o entendimento do conteúdo. Outro destaque que ressaltamos a esse trabalho é o fato da proximidade de nossa proposta de pesquisa, já que foi abordado no contexto da MM. Ainda pretendemos deixar claro que esse artigo 2 teve uma contribuição pelo fato de mesclar a MM e as FVV.

Artigo 3 – Sólidos de Revolução e o Teorema de Pappus-Guldin: uma experiência em uma turma de Cálculo de Várias Variáveis

O artigo 3, de autoria do Eberson Paulo Trevisan, professor na Universidade Federal de Mato Grosso campus de Sinop, foi publicado na revista Educação Matemática em Revista no segundo trimestre do ano de 2017.

Trata-se de um relato de experiência que aconteceu em uma turma do curso de Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática envolvendo a disciplina de Cálculo de Várias Variáveis (CVV). Nessa experiência, buscou-se uma aproximação com o cotidiano de alguns conteúdos da matemática e da física através de um trabalho experimental envolvendo o Teorema de Pappus-Guldin[2] e um trabalho computacional com modelagem de áreas e volume de sólidos de revolução.

Esse teorema é a junção de dois teoremas úteis para calcular área e volumes de sólidos de revolução quando a curva geratriz não corta o eixo de rotação. Segundo Trevisan (2017, p.109): "os teoremas preocupam-se com a obtenção do volume e da área da superfície de sólidos de revolução, porém estes elementos são também

[2] O nome desse Teorema faz referência ao geômetra grego Pappus de Alexandria que viveu em torno do ano 300 d.C. e o matemático suíço Paul Guldin (1577-1642).

passíveis de determinação via aplicação de integrais, objeto de estudo dos cursos de Cálculo".

Para aplicação das atividades propostas, o referido autor dividiu seu trabalho em dois momentos: experimental e computacional. Em duplas, os alunos iniciaram pela parte experimental, onde escolheriam qualquer objeto que fosse um sólido de revolução que satisfizessem as hipóteses do teorema anteriormente citado. Com um arame eles moldavam a lateral desse sólido formando uma curva C. Localizavam, experimentalmente, o centro de massa da região e da curva C. Em seguida, aplicavam o Teorema de Pappus-Guldin para encontrar a área da superfície do sólido e o seu volume. Por fim descreviam todos os dados em uma tabela.

A segunda etapa da proposta foi constituída pela parte computacional, que seria para verificar com mais precisão a parte experimental realizada e ao mesmo tempo validar ou refutar os dados obtidos. Foi sugerido para os alunos o *software Maxima* para descrever a curva C através de funções e em seguida calcular o centro de massa por integração. Em seguida, os alunos tiveram que representar o sólido de revolução a partir das funções através de plotagem, onde o pesquisador indicou o software Winplot. Por fim, os alunos calcularam o volume do sólido e comparavam com os dados obtidos na parte experimental e apresentaram seus resultados para o coletivo.

Após colher os dados e realizar sua análise, o autor realizou algumas discussões pontuando a importância da interação entre a parte experimental e a computacional. Os alunos aplicaram o Teorema - objeto desse trabalho - e usando os softwares puderam validar esse teorema ao confrontar os dados computacionais com os dados levantados no experimento.

O autor, após refletir sobre a análise dos dados e de suas observações levantadas, chegou a seguinte conclusão:

> Esta atividade proporcionou aos alunos um momento para discussão de vários conceitos de outras áreas e da própria matemática, como centro de massa, área, volume e comprimento, função, matriz de rotação, parametrização, entre outros. Pensando que o curso se trata do ensino de ciências e matemática, e que a disciplina é comum às habilitações em Física e Matemática, cremos que a atividade realizada contribuiu para a formação dos acadêmicos, possibilitando realmente aproximar os elementos teóricos discutidos com os elementos cotidianos .(TREVISAN, 2017, p.114).

O relato de experiência descrito nesse trabalho mostra que o processo de aprendizagem significativa é tangível e possível do professor aplicar em suas aulas.

Portanto, que nos chamou atenção nesse trabalho, foi a parte experimental, o dito “mão na massa” que fazem os alunos perceberem os detalhe que estão embutidos dentro da teoria. A parte computacional traz uma segurança e ajuda no visual e no rigor dos cálculos.

Dissertação 1 - Sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis

Essa dissertação de mestrado é de autoria do Roberto Seidi Imafuku, foi defendida no ano de 2008 na Pontifica Universidade Católica de São Pula (PUC – SP). O objetivo dessa pesquisa foi identificar quais as dificuldades e saberes manifestados pelos alunos relativos à transição do estudo de função de uma variável para o de duas variáveis no que diz respeito ao conceito de variáveis dependentes e independentes, ao domínio de função, os gráficos de função e a relação entre esse e o gráfico de seu domínio. O autor, também propôs como objetivo saber quais manifestações dessas dificuldades aparece revelado no estudo das derivadas parciais de primeira ordem.

Imafuku (2008) apoiou-se fortemente na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval principalmente na elaboração dos dois questionários. O primeiro, denominado pelo autor “questionário exploratório” foi aplicado a quinze duplas de alunos do 4º semestre noturno do curso Licenciatura em Matemática de uma Universidade privada da grande São Paulo. Esses alunos já haviam estudado funções com uma e duas variáveis. O segundo, denominado pelo autor “questionário definitivo” foi construído realizando algumas alterações e incrementos no primeiro e foi aplicado para sete duplas de alunos voluntários, sendo esses do quinto período da mesma instituição e curso que foi aplicado o primeiro questionário.

O autor descreve nessa pesquisa algumas possíveis causas para as dificuldades dos alunos frente aos conceitos e definições abordadas nos livros sobre FVV, uma delas repousa nos seguintes fatos:

> Em nossa prática, pudemos perceber que os estudantes, na maioria dos casos, acham que a relação entre as variáveis nas funções de uma variável, ou seja, em que a variável y sempre depende da variável x, se estende para as funções de duas variáveis em que z depende de x e y, e continuam considerando que, nesse caso, y continua dependendo de x e, uma vez que esclarecemos esse fato, a compreensão do conceito de função passa a ser maior. Por outro lado, os estudantes fazem confusão entre os elementos do domínio das funções de uma e os de duas variáveis. (IMAFUKU, 2008, p.25).

Ainda refletindo sobre os elementos do conjunto domínio, esse autor menciona que em uma função com uma variável o domínio é uma reta e, por conseguinte temos números que simbolizam pontos dessa reta. Já em uma função com duas variáveis temos o domínio constituído pelo o plano ou uma região desse plano, onde um ponto remete a um par ordenado. Enxergar essa diferença, segundo esse autor, é crucial para desenvolver o restante da teoria sobre as FVV. Salienta também, que as representações gráficas, embora tenham uma semelhança na linguagem natural, os gráficos de duas varáveis são mais complexos.

Quando a discussão entra nos conceitos de limites, Imafuku levanta algumas causas de entraves na aprendizagem, entre elas, aponta que o conceito de limite vai depender muito da compreensão que o aluno tem sobre domínio da função. O que antes para garantir a existência do limite bastava verificar se os limites laterais existiam e eram iguais, agora temos um domínio maior e o limite pode se aproximar por infinitas direções.

Nessa dissertação, quando o autor aborda sobre derivadas, são apontadas algumas causas, dentre elas, destaca que numa função com uma variável existe apenas uma derivada, nas derivadas com funções de duas variáveis são duas derivadas parciais, além da compreensão cuidadosa em saber quando x ou y é variável, quando é constante e isso de início é complicado para o aluno entender essa relação.

Um resultado interessante foi pontuado por Imafuku (2008, p.157) ao relatar sobre a dificuldade na conversão dos registros:

> Os estudantes apresentaram grandes dificuldades na conversão da língua natural para o algébrico, principalmente, em situações que o contexto não lhes era familiar, pois muitos deles não conseguiram escrever, no registro algébrico, uma fórmula que conseguisse representar a relação das variáveis envolvidas em cada situação, apesar de mostrarem conhecimentos sobre quais variáveis eram dependentes e quais eram independentes.

Essa dissertação do Roberto Imafuku é um belo trabalho que pode auxiliar e nortear o professor que porventura lecione ou venha lecionar a disciplina que envolva as FVV, apontando os detalhes, as minúcias e as cautelas que o professor deve tomar para que a transição de uma para duas variáveis ocorra sem criar, acumular ou até mesmo aumentar os obstáculos na aprendizagem dessas funções e consequentemente todos os conceitos dentro do Cálculo que explorará essas funções.

Dissertação 2 - A produção de conhecimento matemático acerca de Funções de duas variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias

A dissertação 2 de autoria do Fabio Luiz de Oliveira foi concluído no ano de 2014 na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). A temática dessa pesquisa repousa no ensino de cálculo, pontuando as funções de duas variáveis e as tecnologias digitais. Esse autor propôs saber que ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis são produzidas em um coletivo de seres humanos com mídia, destacando como atores o software Maxima, os computadores, os alunos em grupo interagindo com o professor. Para isso, investigou as contribuições da visualização e a importância do software Maxima em conjunto com outras mídias (oralidade e escrita) na sua relação com aspecto algébrico para produção de ideias matemáticas acerca das FVV.

Nesse cenário o pressuposto de sua pesquisa era que a utilização do software Maxima poderia contribuir grandemente para o desenvolvimento de atividades sobre as FVV. O apoio central dessa pesquisa é no construto teórico seres-humanos-com-mídias proposto por Borba e Villarreal.

A pesquisa de campo aconteceu no primeiro semestre do ano de 2013 em uma turma de CDI - III, em um curso de Engenharia de uma Instituição privada de ensino superior, localizada no interior de Minas Gerais. Participaram dessa pesquisa quarenta e três alunos dessa disciplina, desses alunos, quarenta e um cursavam pela primeira vez e dois eram repetentes. A coleta de dados ocorreu através dos registros das resoluções e comentários das atividades realizadas, as avaliações que aconteceram, os questionários aplicados e as anotações no caderno de bordo.

Para análise dos dados o autor levantou três eixos, a saber: visualização, transição do cálculo de uma para duas variáveis e papel desempenhado pelas mídias no coletivo de seres-humanos-com-mídias. Com esses eixos citados anteriormente, o autor examinou quatro grupos de atividades. O primeiro grupo foi gráfico e domínio de uma função de duas variáveis; o segundo grupo foi curvas de nível de uma função de duas variáveis; o terceiro grupo foi acerca de conceitos e interpretação geométrica das derivadas parciais; o quarto e último grupo foram acerca dos extremos de uma função de duas variáveis.

Os principais resultados dessa pesquisa o autor separou de acordo os eixos propostos para análise dos dados. Sobre a visualização, Oliveira (2014, p.118) “podemos dizer que é uma das principais potencialidades proporcionadas pelas mídias informáticas. A sua importância foi identificada em todas as atividades que desenvolvemos”. Sobre a transição dos conceitos ele observou que a maioria dos alunos conseguiu transitar com êxito na extensão dos conceitos do cálculo de uma para duas variáveis. Também relatou a importância da postura do professor em sempre instigarem os alunos a pensarem no que foi estudado no cálculo com uma variável. Acerca do papel das mídias, esse autor destacou que:

> As facilidades de obtenção das imagens, as possibilidades de movimentar essas imagens, as possibilidades de experimentar modificações de parâmetros, de usar os recursos algébricos e gráficos nas telas do MAXIMA, assim como as possibilidades de explorar conceitos transitando entre as mídias informáticas, oralidade e escrita contribuíram para a produção de ideias matemáticas acerca dos temas estudados. (OLIVEIRA, 2014, p.120).

Como esse trabalho foi construído em um programa de mestrado profissional, o autor desenvolveu como produto final um material didático baseado nas atividades realizadas, intitulado “Abordagem de conceitos de funções de duas variáveis com o uso do software Maxima”[3].

Esse trabalho, sem dúvida, trouxe uma importante contribuição para o ensino e aprendizagem das FVV. A análise minuciosa produzida nas atividades propostas, destacando os pontos onde os alunos tiveram dificuldades, as estratégias para sanar tais dificuldades, as discussões acerca das limitações do software utilizado e a necessidade de casar essa mídia informática com outras mídias, como a oralidade e a escrita, para complementar essa limitação deram uma conotação impar para essa pesquisa. Do que foi dito nesse parágrafo não poderíamos deixar de citar o produto educacional produzido, uma rica proposta para o professor utilizar nas aulas da disciplina FVV.

Tese 1 – Aplicação da Sequência de Fedathi na promoção do raciocínio indutivo no Cálculo a Várias Variáveis

Esse trabalho é de autoria de Francisco Regis Vieira Alves e foi defendido no ano de 2011 na Universidade Federal do Ceará (UFC). Nessa tese, o conteúdo objeto foi dentro do CDI a Várias Variáveis, trazendo uma proposta metodológica nominada de Sequência de Fedathi (SF) e nela objetivou identificar e descrever quais categorias do raciocínio intuitivo estariam presentes nas fases de ensinos previstos nessa proposta. Aborda três tipos de categorias intuitivas: intuição afirmativa, intuição conjectural e intuição antecipatória e o próprio Alves (2011, p.17) disse que, “tais categorias intuitivas são assumidas como essenciais para a evolução do processo de

[3] Esse produto está disponível na página do programa Mestrado Profissional em Educação matemática da UFOP.

ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis". O intuito do autor com a SF era trazer uma abordagem diferenciada na tentativa de melhorar a prática de ensino bem como as sequências presentes nos livros didáticos.

O autor apoiou-se na teoria proposta por Duval sobre formação, tratamento e conversão de registros de representação semiótica para não ficar preso somente na exploração algorítmica do Cálculo, trazendo verdadeiramente uma compreensão perceptiva e intuitiva de propriedades específicas desses conceitos.

A sua pesquisa de campo ocorreu no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFCE – Fortaleza – Ceará com um grupo de 80 alunos. Sua tese é composta por seis capítulos, sendo o primeiro dedicado sobre o ensino do Cálculo na Universidade, onde traz algumas considerações sobre o ensino de Limite e Continuidade, Derivada e Integral. Ainda nesse primeiro capítulo traz algumas discussões que convergem para o campo das imagens conceituais, os softwares e suas implicações no ensino e sobre a transição e simbologia presentes no cálculo de uma variável e no cálculo de várias variáveis, onde defende que "abordagens metodológicas específicas precisam ser pensadas no sentido de proporcionar a transição interna do CUV para o CVV" (ALVES, 2011, p.85).[4]

O segundo capítulo o autor dedica a refletir sobre o papel da intuição na matemática; no terceiro apresenta o referencial teórico, falando sobre a SF, a intuição e as Representações Semióticas e por fim a teoria de Efrain Fischbein. No quarto capítulo aborda a pesquisa; no quinto explora a experimentação e análise dos dados e por fim, apresenta suas considerações finais.

Essa tese é bastante pertinente, pois ela traz uma reflexão e aprofundamento sobre o raciocínio indutivo, sobre o conceito de percepção, variáveis que estão presentes e são importantes nesse processo de ensino e aprendizagem do Cálculo. A ponderação sobre o uso dos softwares no ensino e a condensação dessas ideias amparadas na teoria das Representações Semióticas de Duval e a proposta metodológica da SF trouxeram um destaque ímpar para esse trabalho, contribuindo fortemente para Educação Matemática.

Tese 2 - A visualização na aprendizagem dos valores Máximos e Mínimos locais da Função de duas variáveis reais

[4] O autor usa as abreviações CUV indicando Cálculo de Uma Variável e CVV para Cálculo de Várias Variáveis.

Em sua tese, defendida no ano de 2014 na Pontifica Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Katia Vigo Ingar objetivou analisar o processo de visualização durante a aprendizagem das noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis locais. Os sujeitos dessa pesquisa foram alunos do curso de Engenharia de Alimentos, matriculados na disciplina denominada Matemática III, da Universidade Nacional do Callao, na cidade de Lima, Peru. Haviam 80 alunos matriculados nessa disciplina, onde a pesquisadora selecionou apenas 28 alunos, os quais estavam cursando essa disciplina pela primeira vez e ainda não tinham familiaridade com os conceitos de máximo, mínimo e ponto de sela.

A metodologia que foi utilizada nessa pesquisa foi a Engenharia Didática de Atigue, que segundo Ingar (2014, p.75): "situa-se no registro dos estudos de casos, cuja validação é essencialmente interna e fundamentada no confronto entre a análise a priori e na análise a posteriore". O referencial teórico desta pesquisa teve como lastro a Teoria dos Registros das Representações Semióticas de Duval, pautado principalmente nas apreensões perceptivas, discursiva, operacional e sequencial de um registro gráfico apresentado no *CAS Mathematica*, e na junção entre o registro gráfico e o algébrico. Utilizou também a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

A autora trouxe os resultados de sua tese, entre os quais destacamos o seguinte:

> O erro apresentados pelos alunos, ao construírem a noção de máximo e mínimos locais de uma função de duas variáveis reais, como o erro na representação algébrica do valor máximo (mínimo) e do valor máximo (de mínimo), é decorrente da falta de clareza na determinação e representação do domínio e imagem de uma função de duas variáveis reais. (INGAR, 2014, p.177).

Também pontuou que os alunos não tiveram dificuldades em operar com *CAS Mathematica* e que esse *software* contribuiu significadamente para a aprendizagem na disciplina Matemática III, uma vez que os alunos ao manipularem esse programa conseguiam transitar de um registro para outro, principalmente quando se tratava de uma representação algébrica de uma função desconhecidas a priori para eles, facilitando o entendimento da representação gráfica.

Com essa tese 2, fechamos nossa abordagem panorâmica de alguns trabalhos acadêmicos encontrados que tangenciam as FVV. A seguir, trazemos a tabela 1 situando nossa pesquisa e fazendo um comparativo com os trabalhos abordados nessa seção.

Tabela 1 – Síntese entre as pesquisas abordadas

Trabalho	**Relação existente com nossa pesquisa**
Artigo 1	Embora apoiada em uma proposta, TAD de Chevallard, distinta da nossa, um elemento similar com a nossa pesquisa foi a proposta da "praxeologia modelada", onde a construção dos conceitos sempre acontece partindo do interno (problema) para o externo (teoria).
Artigo 2	Esse trabalho relaciona-se com nossa pesquisa pela sua efetivação em sala de aula abordando as FVV no contexto da Modelagem Matemática.
Artigo 3	Assim como no artigo 2, esse trabalho teve sua efetivação em sala de aula abordando as FVV no contexto da Modelagem Matemática. Contudo, explorou uma modelagem mais realística, enquanto em nossa pesquisa exploramos modelos matemáticos, em boa parte, já construídos.
Dissertação 1	Esse trabalho procurou identificar as dificuldades e saberes manifestados pelos alunos relativos à transição do estudo de função de uma variável para o de duas variáveis no que diz respeito ao conceito de variáveis dependentes e independentes, ao domínio de função, os gráficos de função e a relação entre esse e o gráfico de seu domínio. Há semelhanças com nossa pesquisa por também acontecer em sala de aula abordando as FVV, porém o autor focou no processo transitório de função de uma para duas variáveis, enquanto nós na construção de conceitos através de modelos matemático.
Dissertação 2	Esse autor investigou as contribuições da visualização e a importância do software Maxima em conjunto com outras mídias (oralidade e escrita) na sua relação com aspecto algébrico para produção de ideias matemáticas acerca das FVV. Embora nossa pesquisa não enveredasse pelas mídias digitais, as imagens visuais de alguns modelos matemáticos foram fundamentais para abstrair a situação-problema. Dessa forma, a junção de mídias de fato é um potencial no ensino-aprendizagem das FVV.

(Continua)

Trabalho	Relação existente com nossa pesquisa
Tese 1	Esse trabalho não exploramos sua totalidade, apenas algumas seções sobre o ensino do Cálculo na Universidade, a qual traz algumas considerações sobre o ensino de Limite e Continuidade, Derivada e Integral. As reflexões sobre o campo das imagens conceituais, a parte sobre a transição e simbologia presentes no cálculo de uma variável e no cálculo de várias variáveis, foram detalhes importantes que contribuíram na execução e formalização dos conceitos através dos modelos matemáticos explorados.
Tese 2	Nesse trabalho a autora propôs analisar o processo de visualização durante a aprendizagem das noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis locais. A metodologia utilizada nessa pesquisa foi a Engenharia Didática de Atigue, que se situa no registro dos estudos de casos, cuja validação reside no confronto entre a análise a priori e na análise a posteriori. Embora seja uma metodologia distinta da utilizada em nossa pesquisa, na resolução dos modelos matemáticos em diversos momentos houve esse confronto entre o pensamento inicial antes da construção do conceito e o pensamento posterior à construção do conceito pelo aluno.

Fonte: dados da pesquisa (2018)

2.3 As Funções de Várias Variáveis

Nosso objetivo nessa seção é abordar sobre as FVV enquanto conteúdo da grade curricular dos cursos superiores em Matemática ou áreas afins. Começaremos refletindo sobre o conceito de função enquanto elemento peculiar do desenvolvimento científico e humano. Em seguida, discorreremos sobre alguns fatores importantes na transição de uma para duas ou mais variáveis e destacaremos alguns elementos importantes desse conteúdo no CVV.

2.3.1 *Algumas considerações sobre o conceito de função*

O conceito de função é um dos mais importantes dentro da matemática e sua relação e aplicabilidade perpassa por diversas áreas dessa ciência. Segundo Costa (2004) a evolução do conceito de função iniciou-se há cerca de 4000 anos, contudo, somente nos últimos três séculos apresentou-se verdadeiramente o seu desenvolvimento tendo uma relação estreita com problemas de Cálculo e Análise. No período de 20 séculos antes de Cristo até o século XVI, as relações funcionais aconteciam, em sua maioria, de forma verbal ou por meio de relações numéricas propagadas em tabelas.

A representação gráfica do conceito de função ocorreu, de acordo Costa (2004), na obra de Nicole Oresme (1323 - 1382) através de diferentes medida de intensidade das variáveis velocidade e tempo relacionadas durante um fenômeno.

As contribuições de Descartes (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665) introduziram um método analítico para introduzir relações, tendo um foco nas equações com várias soluções envolvendo variáveis contínuas. Essas variáveis tiveram um papel fundamental para o desenvolvimento do CDI. No ano de 1692 e 1694 surge pela primeira vez, em um trabalho publicado por Leibniz, o termo função com o significado de relação entre segmentos de reta e curvas. Porém, somente em 1718, surgiu a primeira definição de função apresentado por Bernoulli. (COSTA, 2004).

Evidentemente que nessa continuidade evolutiva do conceito de função existiram outros matemáticos que deram suas importantes contribuições para chegarmos ao conhecimento e a notação que temos hoje na teoria dos funcionais. O nosso intuito nesses parágrafos iniciais foi apenas de situar, historicamente, alguns momentos importantes no desdobramento do conceito de função.

Após apresentarmos essa síntese histórico em relação ao conceito de função e antes de começarmos a discutir sobre definições de FVV, é importante relembrarmos alguns pontos da teoria de funções com uma variável para então fazermos essa transição com mais clareza. Para início de conversa, levantamos as seguintes questões: o que é uma função? Para que serve uma função?

Didaticamente, é comum os livros iniciar sobre o conceito de função com uma variável fazendo analogia a uma máquina que possui uma entrada na qual será introduzido alguns objetos, uma lei de operação que irá transformar o objeto que foi introduzido em outro objeto de acordo a funcionalidade dessa lei e por fim a saída desse objeto. Como exemplo, podemos imaginar uma máquina de fazer bolo onde é introduzida como objeto à massa e ela possui uma lei de operação que transforma essa massa num bolo delicioso, isto é, o bolo é o objeto de saída.

Partindo de um determinado ponto de vista está tudo bem, é só introduzir a massa e essa máquina irá transformá-la em um bolo. Agora, sabemos que na realidade a massa para fazer bolo é composição de vários elementos distintos e que essa massa depende da interação correta entre esses elementos. Se quisermos examinar esse bolo em sua minúcia, teremos que modelar essa situação considerando a relação existente de todos os elementos de sua composição (quantidade de massa, leite, ovos, manteiga, etc.).

De maneira formal, aprendemos por volta das séries finais do ensino fundamental ou no início do ensino médio, antes de iniciar o estudo sobre função, o conceito de Relação. Mas antes de lembramos o que é Relação é importante ter em mente o que é um Produto Cartesiano. Domingues e Iezzi (2003, p.63) definem Produto Cartesiano da seguinte forma: "dados dois conjuntos E e F, não vazios, chama-se produto cartesiano de E por F o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) com x em E e y em F". Em símbolos, usa-se a notação $E \times F = \{(x, y) |\ x \in E \ \ e \ \ y \in F\}$. Tomando qualquer subconjunto de $E \times F$ é o que se denota por Relação.

No ensino usual desses conteúdos, o próximo passo, após definir domínio e imagem, seria fazer a representação gráfica e através de esquema de flechas. O problema na abordagem desse conteúdo é que eles são apresentados como algo desconexo com a realidade, acarretando em um ensino aprisionado em operações simbólicas e sem sentido para o aluno, gerando grandes barreiras e dificultando o aprendizado. É crucial que o aluno consiga compreender esse diálogo, essa relação entre as variáveis de dois conjuntos e que existem infinitas implicações no mundo real.

Explicar o que é uma função usando argumentos dentro da própria matemática talvez o aluno não consiga entender totalmente e continue a pensar que é mais uma operação comum. O caminho mais prático, quem sabe, seja explicar a própria evolução da ciência e suas estratégias para estudar os fenômenos. Para responder a pergunta sobre o que é uma função iremos discorrer sobre alguns elementos que julgamos importantes para a construção de uma resposta mais sólida.

Desde os tempos mais remotos, o homem sempre buscou estudar e entender a realidade complexa do universo. A busca por uma vida que lhe proporcionasse o controle sobre certas circunstâncias problemáticas e às vezes enigmática tem levado o homem a se debruçar na construção de modelos, explicativos ou ordenados, dos fenômenos naturais ou sociais que os cercam. A ciência, com seu princípio do pensamento e do agir racional, tem em constante objetivo construir quadros para esclarecer sobre os acontecimentos inerentes ao mundo físico, humano, individual e coletivo.

Nesse ambiente de investigação surge as Leis Naturais no intuito de esclarecer, controlar e prever certos problemas que aparece ao homem. (CARAÇA, 1951).

Ainda esse autor, refletindo sobre Leis naturais, estabeleceu duas características fundamentais que estão agregadas a realidade que o homem se esforça para compreender em seu sentido mais largo: interdependência e fluência. Quando se fala da característica interdependência é porque todas as coisas presentes nesse universo existem entre elas uma relação, todo esse cenário real que envolve o homem, os diversos elementos que participam direta ou indiretamente nesse mundo, comunicam e participam todos da vida uns dos outros. A segunda característica denominada fluência é porque esse mundo está em constante evolução, tudo está em movimento, até mesmo um objeto rígido e estático altera com o passar do tempo.

Nesse universo onde os elementos coligados dependem-se mutuamente e onde tudo está em constante agitação, o homem com suas limitações não tem capacidade de numa investigação de algum problema abraçar em sua completude todos os elementos interligados da problemática, devendo voltar sua atenção em um objeto particular encontrando os fatos pertinentes a esse objeto de estudo. Nesse sentido, Caraça (1951, p. 112) traz a noção de isolado como sendo “uma secção da realidade, nela recortada arbitrariamente”, isto é, um recorte num conjunto de fatos que envolvem o objeto de interesse. Este mesmo autor afirma que num isolado pode-se atribuir a noção de qualidade e que algumas qualidades pode-se conferir uma noção de quantificação.

Ao observar um isolado ou recorte da realidade, o homem em boa parte, procura encontrar fenômenos que se repetem com certa regularidade, ou seja, no processo de construção do conhecimento científico de algum fenômeno o ser humano busca padrões, repetições, regularidades, que existindo permite ao homem prever com precisão e ter domínio sobre a natureza. Assim, Caraça (1951, p.120) afirma que “investigar a Natureza é procurar regularidades dos fenômenos naturais” e define como “lei natural” toda regularidade que se pode extrair de um isolado em desenvolvimento. Essas leis naturais podem ser de natureza qualitativa ou quantitativa a depender de sua variação.

A conclusão sintética que chega é que a realidade como todo não pode ser estudada em sua completude, sendo necessário um recorte dela que se denominou de isolado, nesse isolado é procurado um fenômeno de regularidade que encontrado, dá condições de desenvolver as leis naturais (qualitativas ou quantitativas). Ainda segundo Caraça (1951), as leis existentes em sua maioria são quantitativas e o instrumento matemático peculiar para o desenvolvimento dessas leis quantitativas são nada menos do que as funções.

Nesse sentido, já podemos responder aquelas questões iniciais (o que é uma função e para que serve uma função) e também mostrar como as funções têm um papal fundamental para o desenvolvimento humano e científico. Boa parte dos modelos explicativos que o homem se propõe a construir racionalmente, as funções estarão marcando presença. Quando pretendemos estudar matematicamente alguma relação existente em nossa volta, a ferramenta matemática natural são as funções. Para Caraça (1951, p.129), "o conceito de função aparece-nos, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo de leis".

Por isso, a maioria dos fenômenos podem ser abordadas, de um ponto de vista matemático, em uma perspectiva simplificada, mas sabemos que não descreverá bem a realidade, como é o caso do exemplo dado sobre a máquina de fazer bolo dado. Entretanto, quando lidamos com funções de uma variável ocorre isso, os fenômenos que conseguimos modelar matematicamente são muito simplificados, a ponto de desprezar muitas sutilezas importantes no processo. Se o professor conseguir levar o aluno a perceber as funções como ferramenta de modelar problemas e estabelecer vínculos entre grandezas reais, o aluno não terá dificuldades no futuro de perceber a necessidade de expansão no conceito de função com uma variável e irá transitar fluentemente de uma para duas e, por conseguinte, para n variáveis.

Dessa forma, no momento de transição de uma para n variáveis é muito comum surgirem dificuldades no ensino-aprendizagem, haja vista as funções que os alunos estudaram antes dessa disciplina eram todas de domínio unidimensionais. E não só por questão do domínio, mas envolve uma série de coisas que criam um novo cenário de formação ou reformulação de conceitos.

Assim, as definições de funções dadas pelos teóricos que tratam desse assunto geralmente seguem duas vertentes enfáticas: uma prioriza a relação de dependência e independência das variáveis e a outra foca em uma base estruturalista dos conjuntos. Imafuku (2008) faz essa separação em seu trabalho, apontando teóricos que trazem definições de funções caracterizadas na ênfase da relação de dependência e independência das variáveis e outros teóricos que em suas definições de função enveredam pela estrutura conjuntista.

Vejamos dois exemplos de definições enfatizando a dependência e independência das variáveis. Courant e Robbins (2000, p. 335 apud Imafuku, 2008, p.25), dizem que:

> Uma função matemática é simplesmente uma lei que rege a interdependência de quantidades variáveis. Ela não implica na existência de qualquer relação de "causa e efeito" entre elas e enfatizam apenas a forma da *relação* entre as duas variáveis é considerada pelo matemático. Os autores, nessa definição, utilizam o termo variável como sendo entes matemáticos com os quais temos a liberdade de escolher arbitrariamente a partir de todo um conjunto S de entes.

Por outro lado, Caraça (1951, p.129) diz que:

> Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido de $x \to y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente.

Nos livros didáticos encontramos definições de função partindo de conjuntos, por exemplo, Lima (2012, p.13) afirma que:

> Uma função $f : A \longrightarrow B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).

Sendo assim, a exploração do conceito de função utilizando uma abordagem de conjuntos pode trazer mais dificuldades para o aluno quando for abranger para o conceito de função com duas variáveis, pois "os elementos do primeiro conjunto, 'conjunto domínio', parecem ser iguais para as funções de uma e de duas variáveis, o que pode fazer com que os alunos não percebam a diferença". (IMAFUKU, 2008, p.26).

Esse detalhe apontado pelo teórico supracitado é muito importante, pois muitos alunos não conseguem fazer essa distinção, que em uma função com uma variável o elemento do domínio é um número enquanto em uma função com duas variáveis o elemento do domínio é uma par ordenado. Esse mesmo autor defende que a abordagem pela dependência e independência das variáveis é mais viável para os alunos no que concerne aos significados.

Alves (2011) discute esse processo de transição interna do Cálculo com uma Variável (CUV) para o Cálculo com Várias Variáveis (CVV). Esse autor não encontrou em abundância trabalhos que enfatizassem essa transição interna, tanto na literatura nacional como internacional e levanta alguns pontos e elementos que merecem uma atenção nesse processo de mudança, a saber:

> (i) um sistema de representação simbólica mais complexo do que o outro; (ii) as argumentações envolvidas nas demonstração dos teoremas são mais complexas, inclusive a natureza das definições formais envolvidas; (iii) a natureza geométrica dos objetos envolvidos; (iv) a mudança da significação conceitual interpretada em um novo locus matemático e (v) o surgimento de regras operatórias particulares do CUV e do CVV; (vi) regras operatórias válidas num contexto e inapropriadas em outro; (vii) teoremas do CUV sem interpretações semelhantes no CVV; (viii) definições formais que envolvem uma mudança de significado de acordo com a teoria formal; (ix) generalização de noções e definições formais; (x) surgimento de conceitos no CVV que não possuem significados correspondentes no CUV. (ALVES, 2011, p.61).

Como mencionado por esse autor, existe uma reunião variados fatores que trazem obstáculos no ensino-aprendizagem das FVV. A notação é mais carregada, a interpretação geométrica, os resultados que soa diferentemente em cada contexto, CUV e CVV, além de aspectos topológicos que exigem algo a mais dos alunos e professores. Poderíamos continuar trazendo elementos e mais elementos sobre essa transição, mas não é objetivo nosso nesse trabalho, os trabalhos de Imafuku (2008) e Alves (2011) trazem um bom panorama sobre essa transição interna, o que queríamos ao elencar esses pontos citados anteriormente era mostrar que existem e que os professores ao lecionarem essa disciplina não podem desprezar esses detalhes na transição, se policiando com metodologias adequadas para que o ensino-aprendizagem ocorra de maneira mais saudável possível. Continuaremos falando, mesmo que de forma indireta, dessa transição interna ao fazer algumas considerações na próxima subseção.

Além dessa importante colocação sobre o processo de transição no ensino-aprendizagem das FVV, algumas discussões sobre as dificuldades em aprender matemática tomam outras dimensões.

Refletindo sobre a compreensão, natureza e onde residem as principais dificuldades na aprendizagem da matemática, Raymond Duval, em sua teoria dos Registros de Representação Semiótica, direcionou as respostas dessas inquietações para um ambiente além do campo matemático ou à sua história. Segundo Duval (2003), é necessária uma abordagem que possa delinear o funcionamento cognitivo e que essas abordagens possibilitem a compreensão, a realização e o controle da variedade de processos matemáticos que são propostos, fomentando o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização em situação cotidiana de ensino.

Procurando explicar o que caracterizava a atividade matemática do ponto de vista cognitivo, Duval (2003), afirma que essa atividade diferencia-se de outros domínios do conhecimento científico pela natureza de seus objetos. Os objetos matemáticos não têm existência física e não estão diretamente inteligíveis na percepção, exigindo o acesso a eles por meio de sua grande variedade das representações semióticas utilizados no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

Nesse sentido, por exemplo, ao abordar objetos matemáticos como Números, Equações, as FVV, entre outros, não estamos lidando com objetos físicos, mas com suas respectivas representações e por isso que existem muitas dificuldades na compreensão dos conteúdos matemáticos, especificamente do Cálculo. Neste trabalho, as ideias de Duval não foram utilizadas em profundidade, mas queremos destacar alguns registros.

Segundo Duval (2003), existem quatro tipos muito diferentes de registros sintetizados pela tabela 2.

Tabela 2 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRSENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais); Cálculo.	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistemas de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14).

Dessa forma, para Duval (2003), a originalidade da atividade matemática está na mobilização, ao mesmo tempo, de ao menos dois registros de representação ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Esse autor ainda elenca dois tipos importantes de transformação de representação semióticas que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critério de conexidade e de simetria.
> As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmo objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16).

Nesse sentido, podemos promover a conversão de registros ao trabalhar com funções, particularmente as FVV, ao passar, por exemplo, do registro algébrico para o registro numérico, do registro numérico para o registro gráfico, do registro algébrico para o registro gráfico, bem como as conversões inversas para representar o mesmo objeto matemático FVV.

Ainda segundo Duval (2003, p.19), "para analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada." Esse autor destaca dois tipos de fenômenos característicos da conversão: congruência e não congruência. Quando a conversão entre dois registros ocorre de forma direta, sem deparar com grandes dificuldades acontece uma conversão congruente. Por outro lado, se houver dificuldades em reconhecer no registro de chegada o objeto representado no registro de saída, temos uma conversão não congruente.

Nesse sentido, Imafuku (2008) exemplifica que no estudo de funções ao realizar a conversão do registro algébrico para o registro numérico se dá de forma direta, ou seja, é congruente. Porém, quando se inverte o sentido da conversão do registro numérico para o registro algébrico, essa conversão não ocorre de forma direta, caracterizando a conversão não-congruente.

Outra atividade apontado por Imafuku (2008) é quando cobra-se o gráfico do domínio de uma função com duas variáveis, por exemplo, da função $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$. Para essa atividade, será explorado o registro algébrico através da exploração dos pontos no plano que satisfaz a desigualdade $x^2 + y^2 > 4$. Dessa forma, fica evidente a necessidade de ao menos a mobilização de dois registros para que aconteça a atividade matemática.

Essa reflexão sobre os Registros de Representação Semiótica nos mostra como é importante esse olhar diferenciado para os objetos matemáticos e as sutilezas que os mesmos carregam, isto é, um único objeto matemático com suas diversas representações. Seguindo esse pensamento, percebemos, tanto pelos exemplos citados como pela própria vivência, que as FVV possuem uma diversidade de registros e que em comparação com uma função ordinária esses registros são mais complexos. Por isso é muito importante um ensino-aprendizagem desses conceitos que incentivem uma mobilização e uma articulação coesa entre os diferentes registros. Para Duval (2003, p.22) "é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o 'enclausuramento' de cada registro".

A seguir traremos algumas definições, resultados e conceitos do CDI sobre FVV, destacando alguns pontos importantes para o processo de ensino-aprendizagem.

2.3.2 *Algumas considerações envolvendo os conceitos das Funções de Várias Variáveis*

É inquestionável que a disciplina de CDI – III, cujo aborda as FVV é um importante momento na carreira de quem está cursando uma graduação em matemática ou áreas afins, pois é a disciplina que proporciona o primeiro contato com funções de mais de uma variável, ampliando o que se tinha estudado desde o ensino básico e início do ensino superior no tocante as funções. É também nesse momento que acontece uma abrangência nos conceitos de Limites, Derivadas e Integrais, tornando-a uma disciplina que merece uma atenção especial no que tange o ensino-aprendizagem.

Geralmente a ementa dessa disciplina aborda os seguintes conteúdos: Funções de várias variáveis, Limite e Continuidade, Derivadas Parciais e Direcionais, Regra da Cadeia, Extremos, Multiplicadores de Lagrange, Integrais múltiplas, Integração por Coordenadas Polares, Coordenadas cilíndricas e esféricas, Funções com valores vetoriais.

Vamos continuar com nossa conversa sobre alguns desses conteúdos analisando o elemento que é a "certidão de nascimento" dos objetos matemáticos: a definição. No que se refere às FVV vamos separar em dois tipos, as escalares e as vetoriais. Saliento que embora nos livros didáticos abordem separadamente esses tipos de FVV, nem sempre é destacada essa diferenciação e geralmente abordam-se apenas as funções escalares, deixando o aluno com a impressão que FVV se resume apenas as escalares, e são sobre estas que começaremos a discutir.

Uma FVV é do tipo escalar quando a cada ponto do domínio da função corresponde um único número real, isto é, o valor da função no ponto. As relações escalares na matemática são muito importantes, pois sintetiza um conjunto de informações em números. Podemos exemplificar isto olhando para situações onde tais relações estão presentes, como é o caso de expressar num único número (e considerando a unidade de medida conveniente) a capacidade volumétrica de um sólido geométrico, medir a altitude em função da posição no plano (mapa do relevo), anunciar a temperatura de uma superfície em função da posição de um dado ponto (x, y), exprimir a pressão em um fluido em função da posição $P(x, y, z)$.

Todos esses modelos matemáticos citados mostram que essas funções são ferramentas essenciais no processo da modelagem matemática de situações que um número real consegue organizar, reunir e idealizar todo um conglomerado de informações presentes em uma dada situação. Refletindo sobre a importância das FVV classificadas como escalares, Guidorizzi (2001, v.2, p.147) afirma que, "a maioria das relações que ocorrem na física, economia e, de modo geral, na natureza é traduzida por funções de duas, três e mais variáveis reais".

De acordo com Pinto e Morgado (2015, p.69), "uma função f de n variáveis associa a cada n-upla $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ um único número real $w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. O subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é chamado domínio da função f ."

Segundo Thomas (2009, p.287), em relação a definição de FVV, temos:

> Suponha que D seja um conjunto de n-uplas ordenados de números reais $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Uma função real f em D é uma regra que associa um único número real $w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ a cada elemento em D. O conjunto D é o domínio de f, e o conjunto de valores de w assumidos por f é a sua imagem. O símbolo w é a variável dependente de f, que, por sua vez, é considerada uma função de n variáveis independentes x_1 a x_n. Também chamamos os x_j de variáveis de entrada da função, e w é a variável de saída da função.

Gonçalves e Flemming (2007, p.2) já seguem uma linhagem mais conjuntivista em sua definição sobre FVV, vejamos:

> Seja A um conjunto do espaço n-dimensional $A \subseteq \mathbb{R}^n$, isto é, os elementos de A são n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Se a cada ponto P do conjunto A associamos um único elemento $z \in \mathbb{R}$ temos uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow R$. Essa função é chamada função de n-variáveis reais.

Essas definições são, geralmente, o ponto de partida de toda teoria vista na disciplina CDI - III. Alguns professores que seguem exclusivamente o livro didático, naturalmente jogam essa definição sem uma reciclagem sobre o conceito de função. O impacto é forte e o aluno na maioria dos casos vai empurrando e acumulando informações desconexas e sem significados. O pesquisador, falando com experiência do tempo de aluno e também como professor que já lecionou essa disciplina, pode afirmar que essa transição de uma para duas variáveis é, de certo modo, não trivial. Há vários conceitos importantes que precisam ser detalhados e trabalhados minuciosamente do ponto de vista metodológicos, especialmente os domínios dessas funções.

Para tanto, quando expandimos o domínio de uma determinada função, automaticamente estamos oferecendo a oportunidade de explorar mais detalhes em uma situação que queiramos interpretá-la matematicamente, convergindo para um modelo que se aproxime o máximo de nossa realidade. Desse modo, o entendimento sobre o domínio de uma função com mais de uma variável e saber distinguir a diferença para um domínio com uma variável é fundamental.

Os livros de cálculo em geral sempre enfatizam através de exemplos e exercícios sobre como determinar o domínio de uma função. Os alunos até então, estavam acostumados em ver os domínios como intervalos, agora começam a ver esses domínios em regiões planas, espaciais e em maiores dimensões. Boa parte ou todos os livros seguem essa linhagem, começa com funções de duas variáveis e generaliza os resultados para além de duas variáveis. Isso é prático, pois com duas variáveis dá para explorar muitos problemas além de ser possível ilustrar a geometria dessas funções.

Nessas discussões sobre o domínio das funções entram em cena novos elementos topológicos, antes era se o intervalo era aberto, fechado, etc. agora o debate entra se a região é aberta, fechada. A noção de ponto interior, de fronteira é expandida, na tentativa de compreender esses elementos em um espaço bidimensional, Thomas (2009, p.289) traz as seguintes definições:

> Um ponto (x_0, y_0) em uma região (conjunto) R no plano xy é um ponto interior de R se é o centro de um disco que está inteiramente em R. Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de fronteira de R se todo disco centrado em (x_0, y_0) contém ao mesmo tempo pontos que estão em R e do lado de fora de R. (O ponto de fronteira propriamente dito não precisa pertencer a R.)
> Os pontos interiores de uma região, como um conjunto, compõe o interior da região. Os pontos de fronteira da região compõem sua fronteira. Uma região é aberta se consiste inteiramente em pontos interiores. Uma região é fechada se contém todos os seus pontos de fronteira.

Nesse sentido, para ser ponto de interior em um intervalo, basta ver se existe o “vizinho” da direita e o da esquerda e se eles estão dentro dos limites do intervalo considerado, agora em um espaço bidimensional tenho que olhar para os “vizinhos” de todas as direções e ver se estão todos na região considerada, por isso na definição entra essa palavra disco. Então é notório que esses detalhes irão ganhar corpo e ter suas implicações no desenvolver da teoria e por isso é muito importante um esforço para que o aluno possa compreender bem esses conceitos topológicos que englobam os domínios das FVV.

Os reflexos do entendimento ou não entendimento desses conceitos topológicos anteriormente citados começam a se confirmar quando o aluno se debruça sobre uma maratona de exercícios que os livros didáticos de cálculo trazem ao abordar domínio de FVV, geralmente pedindo para identificar e descrever o conjunto domínio da função.

Essa descrição algébrica nem sempre é trivial, a depender de como a função esteja definida traz sérias dificuldades iniciais para os alunos.

Limite e Derivada de FVV

O conceito de Limite e Derivada são de fundamentais importância para compreensão da matemática contínua. Todas os conhecimentos construídos nas disciplinas de CDI os fundamentos repousam nesses conceitos, particularmente sobre o conceito de limite.

Segundo Amorim e Reis (2013) a própria história da matemática demonstra que houve um esforço de ilustres matemáticos para que o conceito de limite ganhasse a forma que o definimos hoje nas disciplinas de CDI. Até atingir esse patamar, perpassou por formulações mais intuitivas até alcançar uma formulação rigorosa e robusta denominadas por alguns teóricos de "epsilônica". Para esses autores, é natural que os alunos de CDI tenham dificuldades em relação a compreensão e a aprendizagem desse conceito.

Essa preocupação com o ensino e a aprendizagem de limites tem tomado parte das discussões no cenário da literatura nacional e internacional em Educação Matemática.

Amorim e Reis (2013), em relação ao conceito de função afirmam ser um "pensamento necessário"para o desenvolvimento de outros conceitos do CDI e para a construção de uma matemática avançada.

Nas reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de Limite, muitos teóricos comungam que o excesso de manipulações algébricas e o rigor formal da definição ganham mais evidência do que o entendimento do conceito em si. Sobre isso, Rezende (2003, p.14) afirma:

> Assim, no contexto do ensino de Cálculo, pode-se dizer que a noção de limite de função está mais caracterizada, portanto, como uma operação algébrica do que como uma operação analítica.
> Esta "algebrização"exacerbada da operação de limite caracteriza bem o que queremos dizer com a "prevalência da técnica sobre o significado". Exercícios de técnicas de derivação e integração também preponderam sobre os exercícios de natureza conceitual.

Essa realidade constatada por Rezende (2003) no ensino de limite é comum nas metodologias dos professores de graduação. No que tange a aprendizagem, algumas dificuldades comuns foram constatadas em pesquisas com esse tema. Zuchi (2005 apud Amorim e Reis, 2013, p. 281) afirma que:

> Na observação realizada em classe, identificaram-se várias dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite. Alguns desses obstáculos já tinham sido observados no contexto histórico, tal como a dificuldades de se trabalhar com grandezas infinitesimais e com a noção do infinito. Uma dificuldade bastante acentuada foi a relação entre *epsilon* e *delta* na definição de limite pelo ponto de vista de aproximação. Constatou-se que essa dificuldade de aprendizagem era gerada por vários fatores, dentre os quais se podem destacar: o obstáculo da linguagem matemática, a falha em conteúdos básicos como funções e inequações e principalmente, o onstáculo presente na passagem da noção intuitiva, a qual se utiliza do ponto de vista cinemático, diretamente para a definição de limite pelo ponto de vista de aproximação, de maneira direta e formalizada.

Outras pesquisas como Reis (2001) também questionam o ensino de limites através da ortodoxia epsilônica, respaldado em outros teóricos relacionados ao ensino de limites. Segundo Cabral e Baldino (2006, p.3):

> a teoria dia de Weierstrass (épsilon e delta), encontrada em livros tradicionalmente adotados, é uma tentativa de imposição prematura ao calouro de ideias que constituem o coroamento da própria matéria que se quer ensinar. Sabedores dessa dificuldade, muitos professores dedicam mais tempo à teoria e às abstrações na esperança de torná-las acessíveis. Porém, essa teoria é logo "esquecida"durante o curso. As tentativas de introduzir épsilons e deltas nos cálculos, sem fundamentação que tome como referência o aluno e seu processo de aprendizagem, geram *necessariamente* obstáculos de ordem pedagógica.

Nesse sentido, Reis (2009) defende que o rigor exigido em trabalhos acadêmicos seja transposto para sala de aula, não na mesma proporção, e sim, explorando e respeitando outros aspectos, como por exemplo, o conhecimento prévio dos alunos. Essa transposição deveria ocorrer tornando os conceitos intuitivamente significativos e compreensíveis.

Após fazermos essa breve discussão sobre o ensino e aprendizagem de limite,trazendo o posicionamento e reflexão de alguns teóricos importantes da literatura acadêmica dessa temática, continuaremos discutindo alguns conteúdos clássicos do CDI, analisando as diferenças existentes nas definições de limites para funções com uma variável e duas variáveis.

No cálculo com uma variável "$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$" . (LEITHOLD, 1994, p.58).

Já no cálculo com duas variáveis "$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ correspondente tal que, para todo (x, y) no domínio de f,

$|f(x,y) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$". (THOMAS, 2009, p.298).

Em termos estruturais não há muita diferença nessas definições, as modificações residem em termos topológicos do domínio da função, isto é, enquanto na reta tenho apenas vizinhos do lado direito e do lado esquerdo, no plano vou ter vizinhos em todas as direções. Essa observação já foi mencionada nas discussões anteriores sobre domínio de FVV e como havíamos falado teria implicações em todos os demais conteúdos.

Geralmente quando o aluno começa estudar limites no CUV, ao se deparar nos exercícios com questões para encontrar o limite de uma função através da definição é algo muito trabalhoso e logo se apega as propriedades e teoremas que surgem no avançar da disciplina para atacar tais problemas. Um conceito muito utilizado é dos limites laterais, segundo Guidorizzi (2001), se f é uma função, p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $(a,p) \ \text{ e } \ (p,b)$ estejam contidos em D_f. Então

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} f, \text{admite limites à direita e à esquerda em p} \\ \text{e}, \lim\limits_{x\to p^+} f(x) = \lim\limits_{x\to p^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Diante disso, quando o aluno inicia o estudo de limite de FVV logo percebe que o teorema supracitado é impotente diante da nova realidade que o domínio dessas funções impõe. Da geometria plana, sabemos que por um ponto passam infinitas retas e como cada reta representa uma direção distinta da outra, logo teremos infinitos caminhos para averiguar se os limites laterais são iguais nas proximidades desse ponto, o que é impossível. Diante dessa situação o modo mais prático é o famoso teste dos dois caminhos para conferir a não existência dos limites, ou seja, "se $f(x,y)$ tem limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes quando (x,y) se aproxima de (x_0,y_0), então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe". (THOMAS, 2009, p.302). Evidentemente se o limite existir ele será o mesmo em qualquer direção que se tome na vizinhança do ponto investigado.

Perante a imensidão de caminhos, encontrar dois cujos limites sejam diferentes em alguns casos não é tarefa trivial e o aluno sente isso. Acreditamos que essa questão da infinidade de caminhos é um dos detalhes mais importantes na diferenciação do estudo de limites de funções com duas ou mais variáveis, já que as propriedades operatórias e outros resultados se conservam semelhantemente as de uma variável.

Sabemos que derivar uma função é calcular certo limite, se este existir, logo essa questão de infinitas direções afetará também no estudo de derivadas envolvendo FVV, ocasionando o conceito de derivadas direcionais que por questão didática, para facilitar o entendimento e ir expandindo aos poucos o que se tinham aprendido no CUV, os livros abordam primeiramente as derivadas parciais, isto é, calcular um limite específico na direção dos eixos cartesianos.

Nesse sentido, Pinto e Morgado (2015) afirmam que a derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0) é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

se esse limite existir.

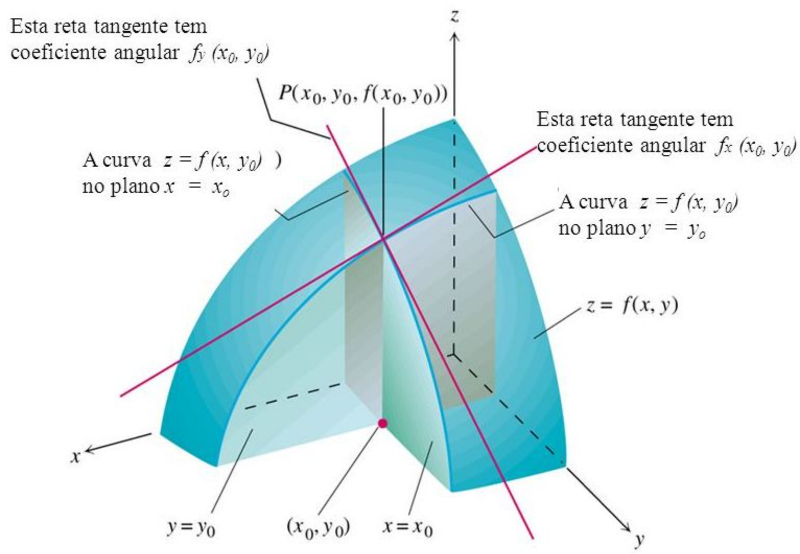
De modo análogo essas autoras também definem a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

se esse limite existir.

A interpretação geométrica de cada uma dessas definições recairá na mesma interpretação que se tinha no CUV em relação às derivadas, isto é, que a derivada é a inclinação ou reta tangente a uma curva dada em um determinado ponto. A diferença é que agora teremos duas ou mais retas tangentes no ponto considerado, dependendo da dimensão que esteja trabalhando essas derivadas parciais. A seguir, trazemos a imagem gráfica da interpretação geométrica das derivadas parciais.

Figura 1 – Interpretação geométrica das derivadas parciais



Fonte: Thomas (2009, p. 309)

A figura 1 mostra a interpretação geométrica de uma função cujo domínio é um conjunto contido no $\mathbb{R}^2$, e as derivadas parciais dessa função são duas retas concorrendo em um ponto P, e como sabemos na geometria plana, duas retas concorrentes determinam um plano, assim a consequência disso é que teremos um plano, que é tangente à superfície[5] . Essa é a diferença crucial quando analisamos a geometria da derivada de uma função com uma variável e com duas variáveis, isto é, de uma reta tangente a uma curva passamos a ter, dependendo de algumas condições, um plano tangente a uma superfície. Essa mudança inicialmente é conflituosa para o aluno e o seu pleno entendimento depende de uma maturação em enxergar essa transição com clareza.

Imafuko (2008) aponta que uma das dificuldades reside no fato dos alunos não conseguirem assimilar que as curvas nas quais se determinam os coeficientes angulares são obtidos por meio de interseções da superfície que representa a função e os planos obtidos ao assumir uma das variáveis como constantes. E diz mais, os alunos sentem dificuldades de enxergar que uma função constante é representada por um plano, já que habitualmente tinham a função constante como uma reta no sistema bidimensional.

[5] A existência das derivadas parciais assegura que haja um plano, mas este pode não ser tangente a superfície. Isso será discutido adiante quando abordarmos o conceito de diferenciabilidade.

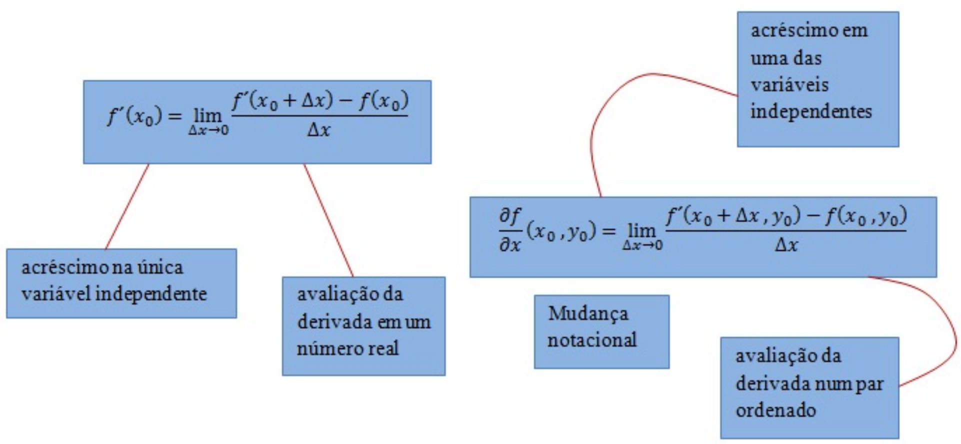
Essas dificuldades que o autor pontua no parágrafo anterior, alguns livros de cálculo se esforçam para explicar geometricamente, como foi ilustrado na figura 1 as curvas na superfície $z = f(x, y)$, ou seja, temos a curva gerada pela interseção dessa superfície $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$ e a curva gerada com a interseção com o plano $y = y_0$. Se essas curvas forem analisadas individualmente, recaímos no conceito de derivadas abordadas no CUV. Mesmo tendo essas representações, nem sempre os alunos conseguem fazer essa leitura e transição de conceito.

Como as derivadas parciais são uma espécie de cálculo diferencial de uma variável contido em um espaço de dimensão maior (o plano, espaço, etc.), assim, as propriedades operatórias se conservam e se aplicam também no CVV.

Sobre as notações, há uma variância de acordo o gosto de cada autor dos livros de CDI e possuem suas sutilezas. Por exemplo, a notação atribuída para derivadas , uns utilizam essa notação empregando o $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, outra bem utilizada também é f_x e f_y para designar derivada parcial da função f em relação a x e a y respectivamente.

Ainda falando sobre notação, Alves (2011) afirma que as mudanças são consideráveis ao passar de um ambiente com uma variável para várias variáveis no cálculo diferencial e levanta uma sugestão interessante, que alguns aspectos das derivadas parciais poderiam ser apreciados já no cálculo com uma variável, explorando as três dimensões ao invés de ficar apenas na dimensão do eixo x. A seguir, ilustramos algumas mudanças notacionais significativas.

Figura 2 – Comparação de mudanças na notação de derivadas



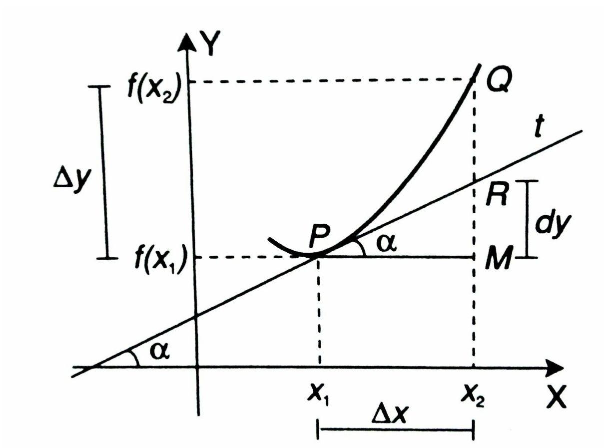
Fonte: Alves (2011)

Um fato que permeia na aprendizagem das derivadas parciais é a dificuldades que muitos alunos encontram para dosar quando a variável deixa de ser variável e passa a ser constante. Inicialmente, para o aluno chega a ser aterrorizante entender e aceitar essa mudança, Imafuku (2008, p.42) afirma:

> Em relação às derivadas parciais, parece-nos simples o fato de fazer ora uma depois a outra variável assumir o status de constante, porém não é de fácil interpretação, pois se fala que y é uma constante, mas no momento em que os estudantes vão derivar encontram a 'letra' y e, para muitos, uma letra representa uma variável e não uma constante.

Outra questão que merece uma atenção é o conceito de diferenciável. Começando pelo CUV, Pinto e Morgado (2015, p.92) de forma intuitiva traz a seguinte consideração sobre uma função ser diferenciável: "uma função $y = f(x)$ é diferenciável em x_0 se existe uma reta não vertical passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ que se confunde com o gráfico de f nas proximidades do ponto $(x_0, f(x_0)$". Podemos visualizar geometricamente isto, na figura 3 a seguir:

Figura 3 – Interpretação geométrica do conceito de diferencial no Cálculo com Uma Variável



Fonte: Flemming e Gonçalves (2006, p.174)

Observe na medida em que x_2 se aproxima de x_1, ou em outras simbologia $\Delta x \to 0$, a reta tangente t se torna indistinguível do gráfico na função f. No caso de uma função com duas variáveis, o objetivo é estender esse entendimento, ou seja, se a função for diferenciável num determinado ponto, então existirá um plano tangente a esta superfície neste ponto que vão estar tão próximos que se tornarão indistinguíveis.

Gonçalves e Flemming (2007) trazem uma definição sobre diferenciabilidade de uma função $f(x, y)$ em um ponto (x_0, y_0) que se resume na existência das derivadas parciais dessa função no ponto considerado e o seguinte limite ser satisfeito:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)[x-x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)[y-y_0]\right]}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} = 0.$$

Em outras palavras, a expressão que está dentro do colchete maior se resume na equação do plano no ponto (x_0, y_0) e esse limite está nos informando que a diferença entre a superfície da função e a equação do plano tangente é praticamente nula, na medida em que a distância entre os pontos (x, y) e (x_0, y_0) tornam suficientemente pequena. Se a distância é praticamente nula, então estão se tocando em algum ponto.

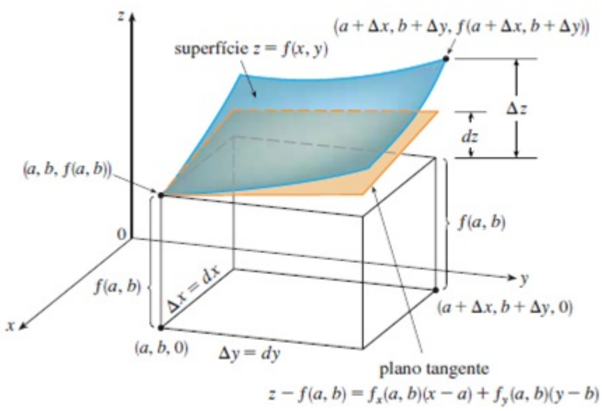
Apenas a existência das derivadas parciais não é suficiente para garantir a diferenciabilidade de uma FVV. Para mostrar esse fato, Pinto e Morgado (2015) traz como exemplo a função f definida como $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ e analisa sua diferenciabilidade no ponto $(0,0)$, onde verificam que as derivadas parciais existem, porém o limite definido anteriormente não converge para zero. Se uma função de duas ou mais variáveis possuir suas derivadas parciais em um conjunto aberto, considerando um dado ponto desse conjunto e essas derivadas parciais forem ali contínuas, isso é condição suficiente para a função ser diferenciável nesse ponto. Isso é um teorema importante que viabiliza os alunos a verificarem a diferenciabilidade de uma função sem recorrer sua definição.

Outro conceito importante é o de diferencial, Stewart (2007, p.925) diz que:

> Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos os diferenciais dx e dy como variáveis independentes, ou seja, pode ter qualquer valor. Então o diferencial dz, também chamado diferencial total, é definido por $dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy.$

Geometricamente, essa definição é ilustrada na figura 4 a seguir:

Figura 4 – Interpretação geométrica do diferencial dz e do incremento Δz



Fonte: Stewart (2007, p.926)

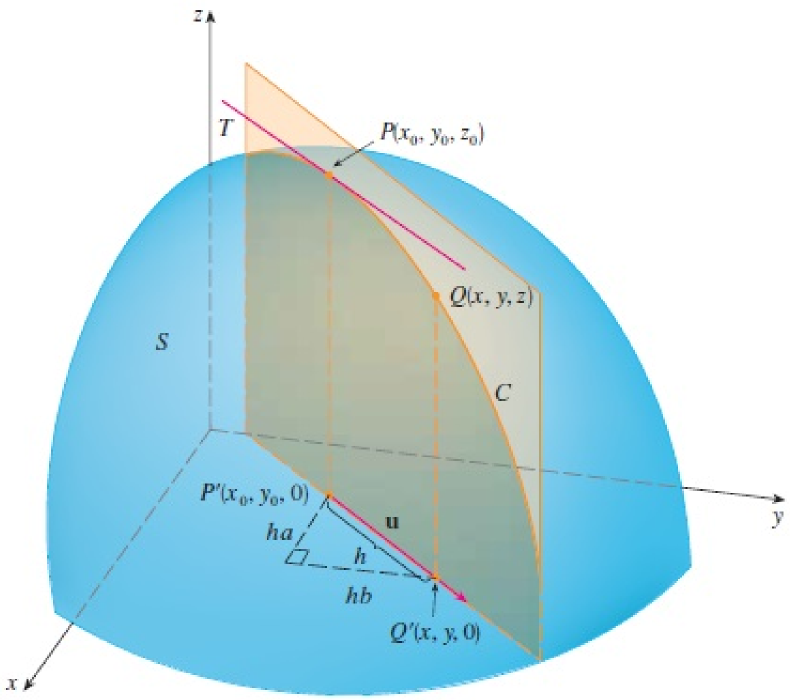
Ainda no campo do Cálculo Diferencial, outro conceito muito importante é sobre as Derivadas Direcionais. Evidentemente, a noção intuitiva desse conteúdo não será problema para um aluno que entendeu bem o conceito de derivadas parciais. Quando se calculava as derivadas parciais, automaticamente estavam medindo a taxa de variação na direção dos vetores canônicos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, isso para uma função com domínio em $\mathbb{R}^2$, para dimensões maiores, seus respectivos vetores canônicos. Para as derivadas direcionais em geral, considera-se um vetor unitário qualquer u e calcula a taxa de variação em sua direção.

Em síntese, Stewart (2007, p.939) traz a seguinte definição para derivadas direcionais, "a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção e sentido do vetor unitário $u = \langle a, b\rangle$ é

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir." Podemos ver na figura a seguir:

Figura 5 – Interpretação geométrica da definição de derivada direcional



Fonte: Stewart (2007, p. 939)

Nesse sentido, segundo Stewart (2007), a derivada direcional é a projeção escalar do vetor gradiente sobre **u**.

Diante dos conteúdos discutidos envolvendo as FVV nessa seção foi no campo escalar. Outro ramo muito importante que envolve as FVV ditas vetoriais, que são utilizadas, de acordo Gonçalves e Flemming (2007), para modelar fenômenos, tipo, fluidos em movimento, onde a cada partícula corresponde um vetor velocidade $\vec{v}$, superfície terrestre quando queremos calcular a velocidade do vento num determinado local, entre outros. Mas, em nossa pesquisa de campo não será abordado esses tipos de fenômenos.

Acreditamos que os modelos matemáticos sejam um excelente ponto de partida no ensino-aprendizagem de FVV, ou seja, pode enriquecer e fomentar um entendimento sólido desses e de outros conteúdos aqui mencionados, trazendo sentido e significado. Assim, a próximo seção será devotado para uma discussão sobre Modelagem Matemática, elencando alguns dos mais renomados autores que trabalham sobre essa temática.

2.4 Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática é atualmente uma forma de produção de conhecimento pelos alunos a partir de situações-problema nos quais eles são estimulados a pensar, criticar e criteriosamente escolher as melhores práticas para a resolução de questões oriundas de suas próprias inquietações ou de provocações por parte do professor. Abordamos nesta seção seu emprego e estímulo para o processo de aquisição de capacidade e de argumentação, experimentação e produção de saberes em relação às FVV por meio da aplicação de modelos matemáticos como estratégia de ensino-aprendizagem, em especial para os licenciandos em matemática. Ainda nessa seção falaremos um pouco da Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem, trazendo alguns teóricos de renome nessa área.

2.4.1 *Modelos matemáticos e sua relação com a natureza*

Desde o início da civilização é notório o esforço empregado pelo homem na direção de melhor compreender e dominar os fenômenos e mistérios inerentes ao universo que o cerca. Seja através de um pensamento fundamentado no senso comum ou em uma categoria mais avançada e rigorosa por meio do pensamento científico, sempre existiu uma tentativa ou esforço para explicar os acontecimentos do seu habitat. Desse modo, o simples conhecimento de algum fenômeno para o homem é uma condição necessária, mas não é suficiente para ela exercer-lo um pleno domínio, necessitando da busca por uma compreensão. Refletindo sobre isso, Caraça (1951, p.64) afirma que:

> Não basta conhecer os fenômenos; importa *compreender* os fenômenos, determinar as razões de sua produção, descortinar as *ligações* de um com outros. [...] Quanto mais alto for o grau de *compreensão* dos fenômenos naturais e sociais, tanto melhor o homem poderá defender dos perigos que o rodeiam, tanto maior será seu domínio sobre a Natureza e as suas forças hostis, tanto mais facilmente ele poderá realizar aquele conjunto de actos que concorrem para a sua segurança e para o desenvolvimento da sua personalidade, tanto maior será, em fim, a sua *liberdade*.

A busca por uma compreensão mais profunda dos objetos e fenômenos pertinente a natureza tem levado o homem a se debruçar no intuito de descobrir causas e os encadeamentos dos elementos que constituem cada acontecimento. Evidente que esse esforço se configura num longo processo que flui desde os tempos mais remotos e que o acúmulo de conhecimento e resultados perpassado de geração em geração repousa no que o homem definiu por ciência. Para Beltrão (2009, p.35),

> A ciência, de forma geral, é considerada uma criação humana de tão variada multiplicidade que ocupa um espaço cada vez maior e mais privilegiado no pensamento e na vida atual. O protagonismo de todas e cada uma das disciplinas que formam o tronco do pensamento científico é produto de um longo processo evolutivo, que surge da mera curiosidade e vai se desenvolvendo pela pressão da necessidade.

A ciência de acordo Caraça (1951) pode ser vista por duas formas, uma peculiar aos livros pela qual é exposta de maneira bem organizada, harmoniosa, onde a apresentação dos conteúdos são postos em ordem obedecendo a um encadeamento que nunca conduz a contradições ou surpresas, tudo decorre de maneira perfeita. A outra forma de enxergar a ciência é na sua forma progressista, ou seja, em um ambiente que na sua construção surge as dúvidas, contradições, hesitações que somente com uma árdua pesquisa e reflexões elas serão refinadas, podendo começar um novo ciclo de dúvidas até atingir a melhor compreensão possível. Olhando por esse último viés, a ciência é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinadas às grandes necessidades da humanidade na luta pelo entendimento e pela libertação. (CARAÇA, 1951).

Um dos ramos da ciência que sempre ocupou notoriedade com certeza é a matemática. Sem querer ser tendencioso, poderíamos até considerar a matemática não somente como um ramo e sim, como o tronco da ciência. Sem delongas nesse mérito, o fato é que o objetivo final da ciência, de acordo Caraça (1951), é fornecer quadros explicativos e ordenados dos fenômenos naturais. Nesse sentido, é plausível que muitas dessas explicações repousam em quantificações, mensurações ou até mesmo na busca por leis que interpretem certas regularidades e padrões, caracterizando elementos indissociáveis da matemática.

Sendo a matemática uma partição importante do conhecimento humano, por conseguinte ela está subordinada aos dois aspectos de ciência mostrados anteriormente (livros de ensino e progressista), recaindo em implicações diretas na forma de entender ou enxergar a matemática. No prefácio de seu livro, Caraça (1951, p. 13), afirmou que:

> A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro.
> Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também que os seus fundamentos mergulham tanto como os de

> outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre.

Assim, esse autor enxerga a matemática como uma ciência progressista, ou seja, é um conhecimento evolutivo que no seu desenvolvimento se depara com as dúvidas e contradições. Poderíamos estender essa reflexão e adentrar nas correntes filosóficas que acompanham ao longo da história o modo de visualizar a matemática, que não é interesse nosso neste trabalho. A seguir enfatizaremos sobre os Modelos Matemáticos na concepção da Modelização Matemática.

Para Huanca e Assis (2019), a modelização matemática enfatiza a importância de saber modelar problemas matemáticos, condição necessária à formação do estudante no sentido de que: ela desperta o interesse pela Matemática; leva a sentir sua beleza; melhora a busca pela construção de novos conceitos matemáticos; desenvolve a habilidade em resolver modelos matemáticos; e estimula a criatividade nos alunos. Para nós, trabalhar com modelos matemáticos em sala de aula significa fazer matemática ao modelar uma situação-problema ou tarefa.

Na modelização matemática, o professor pode optar por escolher determinados modelos matemáticos, fazendo sua aula mais dinâmica juntamente com os alunos de acordo com o nível em que estão, além de obedecer ao programa curricular. É bom que se tenham vários modelos matemáticos para que se possa optar entre eles e não por eles. Pois o seu aprimoramento ou adaptação cabe ao professor e a seu bom senso. (HUANCA; ASSIS, 2019).

Huanca e Assis (2019, p.3), dizem que:

> Quando envolvido no processo de modelização, os modeladores passam por iterações de expressar, testar e rever o modelo de julgamento. Ao fazê-lo, simultaneamente, eles melhoram o seu modelo e também desenvolvem uma compreensão mais profunda das restrições e das limitações que ainda existem em cada fase do desenvolvimento deste, e aprendem a articular (para membros do grupo) os “trade-offs” e os benefícios de um modelo particular. Portanto, um componente muito importante do desenvolvimento de processos de modelização do indivíduo é o de aprender a interpretar e, eventualmente, produzir diferentes pontos de vista, a fim de facilitar o processo de revisão do modelo matemático encontrado.

Sobre a análise de modelos, Soares e Souto (2014) afirmam que, os alunos partem de um modelo matemático já existente para determinado fenômeno. Consequentemente eles buscam compreender suas hipóteses, suas equações e a descrição que faz do fenômeno estudado. Dando prosseguimento, esses alunos procuram descortinar as soluções desse modelo, seu comportamento e que informações esse comportamento traz sobre a evolução do modelo, e a influência dos parâmetros nesse comportamento. Aliado a isso, está a construção de conceitos matemáticos. Nesse sentido, a análise dos modelos matemáticos, pode ser relacionada com a modelagem e traz uma maneira distinta de se trabalhar com modelos em sala de aula.

Ainda sobre o uso de modelos matemáticos em sala de aula, Araújo, Rocha e Martins (2014) afirmam que esses modelos não estão presentes, apenas, na sala de aula de matemática. Devido abordar problemas com referência à realidade, podem fazer parte das aulas de física, biologia, geografia e outras disciplinas. Esses autores entendem, modelo matemático, como uma representação de fenômenos científicos por meio de elementos matemáticos (funções, gráficos, tabelas etc.).

Sobre o papel dos modelos na prática pedagógica da Educação Matemática, Araújo, Rocha e Martins (2014) destacam três pontos importantes para: (1) justificar a introdução ou apresentação de um novo conceito científico; (2) definir ou criar um novo conceito científico; e (3) estruturar algum fenômeno científico, oferecendo estruturas para serem aplicadas na descrição e prescrição de fenômenos.

Em nossa pesquisa de campo pretendeu-se que os licenciandos ao trabalhassem a partir de modelos matemáticos desenvolvendo competências e permitindo ao professor uma interface de trabalho que resultasse em maior significação, a modelagem matemática se apresentou como uma valiosa estratégia pedagógica de ensino-aprendizagem, colaborando com o processo educacional ao envolver o estudante na condução do próprio aprendizado e construção consciente de seu conhecimento.

Outro importante aspecto trazemos para esse trabalho, a definição de modelos matemáticos/problemas segundo dois autores.

Biembengut (1996) chama de situações-problema, o que nós chamamos de modelos matemáticos aqueles desafios propostos para os quais ainda não se conhecem todas as regras e procedimentos, ou seja, a bagagem cognitiva do estudante não está plenamente formada e dele será necessário a aplicação de criatividade e vontade em resolvê-lo.

Já para D'Amore (2007, p.287), a situação-problema, "é uma situação de aprendizagem concebida de maneira tal que os alunos não podem resolver a questão por simples repetição de procedimentos e conhecimentos, mas pela formulação de hipóteses". O autor salienta ainda a grande dificuldade em se usar dessa pedagogia aplicada, pois demanda conhecimento dos alunos e suas competências, suas possibilidades criativas e como motivá-los a persistir no desafio.

Sabe-se que, de um lado é necessário que a atividade seja bem estruturada, e prevista em detalhe, para o desenvolvimento do conteúdo matemático, de outro é bom que o aluno se sinta livre para usar seus recursos cognitivos e conhecimentos prévios. Ao ser instigado em sua curiosidade, o estudante passa a ser responsável pelo desenvolvimento dos conteúdos, valorizando a troca de ideias, concepções, informações, e promovendo discussões que produzirão a cada tempo, caminhos diferenciados para a satisfação da resolução da situação-problema ou modelos matemáticos.

Segundo Barbosa (2001), um modelo matemático não é formulado como um fim em si mesmo, mas para resolver um problema. Sendo assim, a partir do modelo matemático, elabora-se um problema que será, se possível, resolvido pelas teorias matemáticas conhecidas. A solução é trazida de volta para a situação real para ser interpretada se possível, pode-se validar com os dados empíricos.

Ainda esse autor disse que, podemos procurar o significado e a acuidade da solução obtida na situação-problema. Se for julgada satisfatória aos propósitos do modelador, os resultados são comunicados; se não, retorna-se ao trabalho realizado, verificam-se os cálculos, as relações estabelecidas ou as simplificações realizadas no início do processo.

Assim, o processo de entendimento e compreensão das situações-problema passa pela escolha dos critérios e dados mais apropriados para analisar e desenvolver um raciocínio, que poderá fazer uso da matemática para sugerir melhores alternativas e direcionar as escolhas. Essa construção é reconhecida pela comunidade acadêmica como modelos matemáticos.

Diante dessas reflexões sobre os modelos matemáticos e seu valor no desenvolvimento científico para compreensão de fenômenos naturais e sua importância, optamos por trabalhar com modelos matemáticos no ensino-aprendizagem das FVV. Também, justifica-se por ser um conteúdo que integra os conceitos de funções, derivada e integral. Além disso, considerou-se importante escolher modelos matemáticos com o qual os alunos pudessem vir a trabalhar enquanto futuros professores de matemática, com o intuito de promover um debate que pudesse explicitar possíveis relações entre os conteúdos do ensino superior e com a educação básica.

2.4.2 *Modelagem na perspectiva da Educação Matemática*

Historicamente a Modelagem Matemática se desenvolveu no Brasil nos finais dos anos 1960 e início dos anos 1970, influenciado pelo movimento dito "utilitarista", que pregava que o ensino de matemática deveria se dar de forma que fosse útil, ou seja, "com situações do cotidiano e não através de aplicações padronizadas, mas que favorecessem a habilidade para matematizar e modelar problemas e situações da realidade". (BIEMBENGUT, 2009, p.8). Silveira (2007, p.33) disse que, a Modelagem Matemática

> [···] começou a ser pesquisada por alunos de cursos de pós-graduação Stricto Sensu, a partir de meados da década de 1970. O surgimento da Modelagem na Educação Matemática como um campo de pesquisa é devido às atividades de alguns professores e pesquisadores, dos quais citaremos três que são considerados muito importantes. São eles: Ubiratan D'Ambrosio, Aristides Camargos Barreto e Rodney Carlos Bassanezi.

Essa é uma das poucas vezes que o desenvolvimento de um campo científico ocorre no Brasil em sintonia com as pesquisas internacionais, figurando brasileiros entre os mais respeitados membros da comunidade internacional de pesquisadores em educação matemática, o que motiva novos pesquisadores, e assim vemos que estão aumentando o número de pesquisas e relatos de experiências em sala de aula apresentados em eventos de Educação Matemática e na Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, que se realiza a cada dois anos desde 1999. (BIEMBENGUT, 2009).

Podemos então perceber que o interesse pela modelagem matemática é recente e vêm gradativamente aumentando a quantidade de pesquisadores que dela fazem uso para incrementar e sugerir melhorias às práticas de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, nas nossas leituras em relação à Modelagem Matemática na Educação Matemática diversos autores sugerem o encaminhamento das atividades de Modelagem Matemática seguindo uma lógica de autonomia do estudante. (ALMEIDA; DIAS, 2004).

Na seção anterior discutimos, em síntese, que o intuito de dominar, racionalmente, os fenômenos naturais e sociais tem levado o homem ao longo do tempo desenvolver, em linguagem matemática, explicações para certos acontecimentos próprios da realidade em sua volta, visando, entre outros objetivos, obter um direcionamento nos desdobramentos desses fatos e até mesmo com um intuito de previsão de seus efeitos visando construir um modelo matemático.

Esses são alguns aspectos que conceituam um modelo matemático, sua definição tem variação de autor para autor, mas o sentido é comum. Bassanezi (2014, p.20) define modelo matemático como "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado".

Com essa definição a respeito do que seria um modelo matemático acreditamos que sua compreensão em relação a modelagem matemática seja melhor. Sem delongas, a modelagem matemática é o processo em si para obtenção do modelo matemático. Bassanezi (2014, p.24) define "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão e tendências". Podemos notar que de forma bastante similar, Burak (2010, p.35) considera "a Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões". Nesse sentido, Chaves (2014, p.25) considera:

> Modelagem Matemática como um processo que traduz ou que organiza situações-problema provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, também dita situação real, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de modelos matemáticos ou de relações matemáticas que procura representar ou organizar a situação/problema proposta, com vistas a compreendê-la ou solucioná-la.

Esse processo dinâmico torna a modelagem em uma ligação ou aproximação entre circunstância real e a matemática. Biembengut e Hein (2011) afirma que esse processo de interação entre a situação real e a matemática pode ser dividido em três etapas fundamentais: interação, matematização e modelo matemático.

O uso da modelagem matemática, segundo Bassanezi (2014), tem sido empregado por diversas áreas do conhecimento humano, a exemplo da Física Teórica, Química Teórica, Biomatemática entre outras. No contexto da Educação Matemática, quando a modelagem passa a ser usado como estratégia de ensino-aprendizagem ela ganha o nome de Modelação Matemática. Biembengut e Hein (2011, p.18) afirmam que "a modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem".

A modelagem na sala de aula tem-se mostrado bastante pertinente no processo de ensino-aprendizagem como apontam alguns teóricos. Burak (2010, p.35) afirma que "os resultados apontados mostram o potencial metodológico da modelagem para o ensino, entretanto, há ainda a necessidade de os professores incorporarem, de forma mais explícita, aspectos teóricos relativos ao ensino e a aprendizagem". Klüber (2010, p.111) defende que "a modelagem pode ser uma forte aliada dos professores de matemática e outros que buscam romper com a hegemonia da transmissão".

Rezende (2003) pontua que se tenha um aprendizado mais eficaz "o que se precisa fazer então é colocar o aluno na posição de falante para que este possa refletir criticamente a sua forma de pensar. O aluno precisa 'falar mais', e o professor 'falar menos e ouvir mais'". Comungando com esse pensamento acreditamos que a modelagem pode ser uma estratégia fértil para promover esse cenário, haja vista que no ensino através da modelagem o professor passa a ser um mediador. Bassanezi (2014, p.38) afirma que "com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural".

Silva e Bueno (2018) dizem que trabalhar Modelagem Matemática na formação inicial promovem reflexões sobre o modo como esses futuros professores adquirem o saber, que muitas vezes para eles não vêm com questionamentos, mas como formas prontas e estabelecidas, e que devem ser aceitas como verdades únicas. Ainda esses autores, dizem que, o pensar cientificamente na perspectiva no uso de atividades de modelagem, no qual, esse pensamento possui aspectos de *precisar, retificar, diversificar*.

Refletindo sobre os argumentos favoráveis e os obstáculos para inclusão da modelagem matemática no ensino, Bassanezi (2014) afirma que a modelagem pode agregar nos alunos um valor formativo no sentido de desenvolver a capacidade e atitudes criativas na resolução de problemas; desperta a competência crítica; enriquece o arsenal matemático para entender e interpretar a matemática em suas variadas faces; fomenta uma aprendizagem mais significativa e de modo a valorizar mais a própria matemática; fornece uma alternativa epistemológica.

Apesar desses atributos à modelagem, Bassanezi (2014) levanta alguns obstáculos para sua efetivação: as instituições nos seus cursos regulares possuem um programa e uma grade de conteúdos a ser cumprida e a depender da situação a modelagem pode ser um processo demorado; foge da rotina dos alunos acostumados com um ensino pautado na transmissão e assim, podem se tornar apáticos nas aulas; muitos professores não sentem preparados para trabalhar a modelagem em suas aulas e acreditam que demandará muito tempo para planejar as aulas e faltará tempo para cumprir o programa na sua totalidade.

Silveira e Caldeira (2012) são outros teóricos que fazem um levantamento, com base em trabalhos de pesquisadores que abordaram a temática sobre a concretização da modelagem na prática docente, fazendo um mapeamento nos principais obstáculos e resistências para o desenvolvimento da modelagem matemática em sala de aula. Esses autores caracterizaram cinco grupos não estanques entre si, oferecendo um panorama didático sintetizados na tabela 3 a seguir.

Tabela 3 – Obstáculos e resistências em aplicações com Modelagem Matemática

Categorias	**Obstáculos e resistências**
Professor e suas relações com o trabalho	✓Maior exigência do professor na preparação e no momento da aula; ✓Insegurança diante do novo; ✓O não acompanhamento de um profissional que tenha maior experiência e domínio sobre modelagem matemática; ✓Grande quantidade de alunos por turmas.
Professor e suas relações com a escola	✓Ausência de colaboração da parte administrativa; ✓Estrutura da escola; ✓Objetivos diferentes dos objetivos da instituição.
Professor e suas relações com o currículo	✓Preocupação em cumprir o conteúdo; ✓Preocupação com a sequência dos conteúdos diferente da “sequência lógica”; ✓Falta de tempo ou preocupação com excessivo; ✓Preocupação sobre o processo de construção do conhecimento.
Alunos e suas relações com uma modelagem	✓Reação dos alunos; ✓Indisposição e cansaço por parte dos alunos do noturno no desenvolvimento das atividades; ✓Os alunos não gostam de método novo.
Professor e suas relações com a família dos alunos	✓Preocupação com a reação dos pais; ✓Ausência de colaboração dos pais.

Fonte: Silveira e Caldeira (2012)

Em suma, Bassanezi (2014, p.43), afirma que:

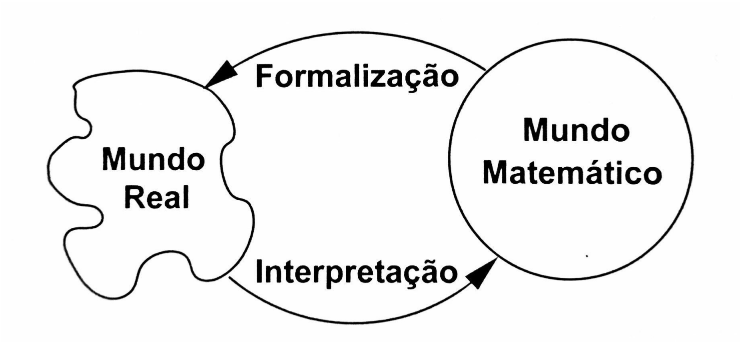
> A maior dificuldade que notamos para a adoção do processo de modelagem, pela maioria dos professores de matemática, é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional onde o objetivo de estudo apresenta-se quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada – tal horizonte é muitas vezes o cumprimento do programa da disciplina.

Ainda segundo esse autor, na modelagem, a tarefa inicial se resume apenas no tema de estudo escolhido, evidentemente com a ressalva de ainda não existir clareza sobre o conteúdo matemático que será desenvolvido. O importante é começar, mesmo que seja simplesmente pela ação do contar ou medir, naturalmente os dados e as tabelas irá aparecer e nesse ponto isso pode ser o começo da modelagem. Entretanto, esse autor pondera que o aprendizado de modelagem não se restringe ao aprendizado de técnicas padronizadas ou procedimentos sequenciais tal como um protocolo cirúrgico, mas o resultado final dependerá de fatores intuitivos e peculiares de cada individuo, a saber: a criatividade e habilidade. Ainda assim, cada atuação e rendimento podem ser bastante diferenciados.

Além disso, esse autor chama atenção para o fato que a atividade de aplicar matemática é tão antiga quanto à própria matemática e que muitas ideias surgiram nesse cenário de contato com problemas práticos, porém o simples fato em treinar e familiarizar os matemáticos com as teorias existentes, isso não assegurará que demonstre habilidades para empregar matemática em outras áreas. Essas habilidades, segundo o autor, residem na competência de tomar um problema definido em algumas situações práticas e transformá-los em um modelo matemático definido e que possa ser reinterpretada em termos da situação-problema original.

Podemos sintetizar, na forma de esquema, o processo de modelagem matemática pela figura a seguir:

Figura 6 – Esquema simplificado de modelagem matemática



Fonte: Bassanezi (2014, p. 44)

Na figura 6 está esquematizado como ocorre o processo da modelagem matemática, contudo, tal esquema não revela como se podem desenvolver habilidades nem tampouco como adquiri-las. Dessa forma, "[· · ·] a melhor maneira de se aprender modelagem matemática é fazendo modelagem, e de preferência juntamente com alguém mais experiente." (BASSANEZI, 2014, p.44).

Nesse sentido, Silva e Oliveira (2012), dizem que a modelagem no âmbito da Educação Matemática tem sido apresentada como uma das maneiras de organizar as aulas, possibilitando o estabelecimento de um ambiente de investigação e reflexão no contexto da sala de aula. Assim, a modelagem cria um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são convidados a investigar os modelos provenientes do cotidiano, de outras ciências ou de áreas profissionais, por meio da matemática.

Compartilhando com o pensamento de Burak (2010), a modelagem matemática continua ganhando adeptos por diversos fatores inerentes de suas características, ou seja, pelas possibilidades metodológicas ofertadas, pela visão ampla em relação a um conteúdo, pela visão de totalidade, por envolver de forma natural e indissociável o ensino e a pesquisa.

Essa crescente nas pesquisas com Modelagem Matemática pode ser constatada e confirmada cientificamente na pesquisa de Biembengut (2012), na qual realizou um mapeamento iniciado no ano de 2006 sobre produção brasileira de Modelagem Matemática na Educação. Essa autora buscou trazer nesse mapeamento não apenas o número de produções, mas também analisou atividades, temas, conteúdos matemáticos abordados e em quais perspectivas ou tendências estavam inseridos.

Em relação às tendências em Modelagem Matemática, até algum tempo havia a predominância, no cenário internacional, em duas tendências. A primeira tendência dava ênfase em resolução de problemas aplicados, na qual os teóricos catalogaram como visão *pragmática*; a segunda tendência buscava estabelecer relações com outras áreas a partir da própria matemática, sendo denominada de visão *científica*. (DOMINGOS, 2016).

Com o avançar dos anos, novas tendências em Modelagem Matemática foram surgindo no panorama das pesquisas nacionais e internacionais. Com base em uma amostra nas produções da literatura internacional, Kaiser, Lederich e Rau (2010 apud Biembengut, 2012) apresentam um sistema de classificação de abordagens de aplicação e modelagem na Educação Matemática, especificamente nas conferências do *International Congress on Mathematical Education* – ICME e *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* – ICTMA. Esses autores, indicam cinco perspectivas de aplicação e modelagem que chamam de *realística ou aplicada, contextual, educacional, sócio crítica, epistemológica*; além dessas, destacam uma meta-perspectiva, modelagem cognitiva.

Dessa forma, temos as seguintes classificações para cada uma dessas tendências anteriormente citadas:

> *Realística ou aplicada*, os objetivos são pragmáticos, isto é, resolver situações-problema autênticas de indústria, comércio ou ciência, per-

> mitindo aos estudantes desenvolver habilidades e competências para resolvê-las. Contextual, o objetivo centra-se em metas psicológicas, isto é, resolver situações-problema efetuando práticas e experiências a fim de que a matemática necessária à resolução destas situações faça sentido aos estudantes.
> *Educacional*, o objetivo é pedagógico, isto é, estruturar os processos de aprendizagem para introduzir e desenvolver conceitos matemáticos, motivar a aprender matemática, promover entendimento crítico do processo e do modelo desenvolvido. Os problemas são autênticos e integrados com o desenvolvimento das teorias matemáticas.
> *Sócio-crítica*, os objetivos centram-se no reconhecimento da relação entre a matemática e sociedade e na necessidade de compreensão crítica desta relação sobre o meio circundante; as situações-problema são pontos de partida para analisar a natureza e a relação do modelo matemático na sociedade, reconhecer dependência cultural.
> *Epistemológica ou teórica*, o objetivo é desenvolver teoria matemática, promovendo conexões entre atividades de modelagem e de matemática; situações-problema são designadas a levar o estudante a entender teoria matemática.
> *Cognitiva* é uma meta perspectiva, restrita à pesquisa: objetiva analisar os vários processos de modelagem com diferentes tipos de situações de modelagem, variando seu grau de autenticidade ou complexidade matemática. (KAISER; LEDERICH; RAU, 2010 apud BIEMBENGUT, 2012).

Assim, quaisquer que sejam as tendências adotadas nas pesquisas, suas concepções ou representação social dominante que geram, o importante é reconhecer que são contribuições positivas como essas levarão a novas tendências, novas concepções, novos conhecimentos. Além dessas características descritas, existe uma que está acima de todas e que é a marca peculiar da modelagem e um dos principais objetivos da educação: o desenvolvimento da autonomia do educando.

Para fechar essa discussão sobre as tendências em Modelagem Matemática, trazemos abaixo uma síntese das perspectivas em modelagem e seus respectivos objetivos.

Tabela 4 – Perspectivas em Modelagem Matemática e seus objetivos

Perspectivas	**Objetivo didático**
Epistemológico, Educacional e Contextual	O desenvolvimento da teoria Matemática
Realística	O desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas
Sócio-crítica	A análise da natureza e do papel dos modelos matemáticos na sociedade
Cognitiva	A construção do conhecimento através da Resolução de Problemas.

Fonte: Domingos (2016).

Dessa abordagem e breve discussão que fizemos nessa seção sobre a Modelagem na perspectiva da Educação Matemática, o desejo e a crença em mudar o papel do professor (de detentor do conhecimento para mediador) e do estudante (tirando-o de uma posição de receptor e colocando-o como sujeito capaz e autônomo) são inquietações oriundas da sala de aula que tem fomentado diversas pesquisas nesse ambiente da educação e muita delas é produzida no contexto da modelagem. Nesse ambiente de pesquisa, em sua maioria, prima-se pela abordagem qualitativa de pesquisa.

Refletindo sobre a pesquisa qualitativa em Modelagem Matemática, Klüber e Burak (2012), trouxeram algumas compreensões nesse cenário. Para esses autores, alguns elementos constituem-se no eixo principal dessas investigações, a saber: as descrições e relatos, por meio da presença do pesquisador que não busca neutralidade.

Nesse sentido, Bogdan e Biklen (1994) elencam cinco características importantes de uma investigação qualitativa:

1. O ambiente natural é a fonte direta dos dados e o pesquisador torna-se o instrumento pricipal;

2. A investigação qualitativa é descritiva;

3. O interesse é dado mais ao processo do que aos resultados obstidos;

4. Os investigadores qualitativos analisam os dados de forma indutiva, ou seja, a partir da análise dos dados individuais chega-se a um resultado geral;

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Ainda segundo esses autores, os investigadores qualitativos em educação estão sucessivamente a questionar os sujeitos de investigação, com a finalidade de perceber o que eles conhecem, o modo como eles interpretam os seus conhecimentos e do mundo social em que fazem parte. O processo de condução de investigação qualitativa acontece em torno de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado que estes sujeitos não são abordados pelos investigadores de uma forma neutra.

Embora o aspecto subjetivo e a não neutralidade sejam uma marca da abordagem qualitativa, Klüber e Burak (2012) enfatizam que o rigor, enquanto busca incessantes por expressar claramente o que se faz na investigação, não deve ser entendido em termos matemáticos, mas como uma maneira de oferecer credibilidade e consistência aos processos descritos e aos resultados alcançados.

Ainda segundo esses autores, mesmo que a subjetividade seja um conceito ou uma marca que sustenta a pesquisa qualitativa, não se pode pensar que falar de um lugar individualizado é o suficiente para investigar qualitativamente. Embora pautada em descrições e relatos subjetivos, existem percursos, critérios ou fundamentos a seguir no intuito de alinhar o entendimento de pesquisa qualitativa, mesmo em sua multiplicidade. Dessa forma, os autores ainda ressaltam que os critérios na pesquisa qualitativa não é questão de enquadrar ou homogeneizar essa modalidade, mas de promover um debate que conduza à sua maior valorização e união entre a comunidade de pesquisadores dessa abordagem, produzindo avanços e credibilidade no campo da Educação Matemática e de suas tendências.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

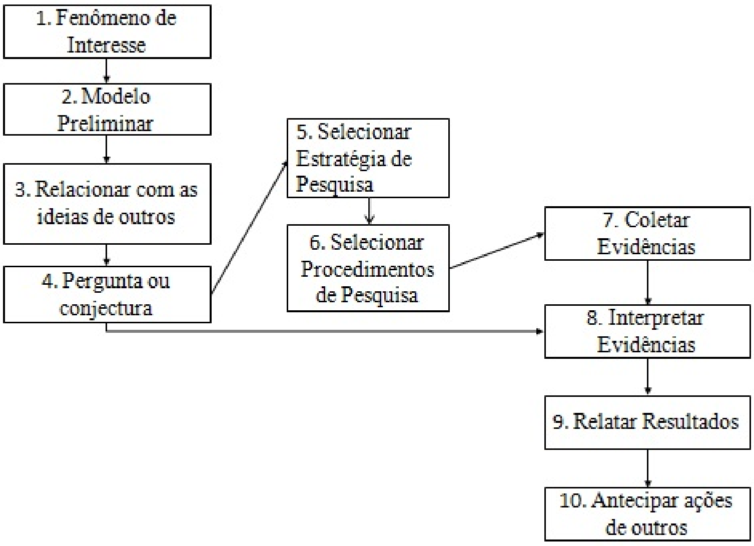
Neste capítulo, inicialmente, apresentaremos nossa pesquisa dentro das atividades que os pesquisadores devem seguir apresentado por Thomas A. Romberg no artigo “Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa”, traduzido por Lourdes de La Rosa Onuchic e Maria Lúcio Boero, e as contribuições de Onuchic e Noguti (2014) no artigo “A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica”. Finalmente, trabalharemos os três blocos de atividades de Romberg.

Também, neste capítulo, justificaremos a escolha metodológica adotada na construção da pesquisa mostrando o contexto da pesquisa, pautando as devidas justificativas para os métodos utilizados na coleta de dados, a concepção das atividades e o seu desenvolvimento.

3.1 As atividades de Romberg e as Contribuições de Onuchic para a Pesquisa

Nesta seção apresentamos o fluxograma com as 10 atividades de Romberg (2007 apud Huanca, 2014, p. 19-21), representado na figura 7, que guiam a pesquisa e estão distribuídos em três blocos: no primeiro “as atividades levam o pesquisador a definir um problema particular a ser investigado”; o segundo orienta o pesquisador “na tomada de decisão sobre que tipo de evidências coletar e como realizar seu trabalho de campo”; e no terceiro o pesquisador “com os dados coletados deverá tirar conclusões e divulgar seus resultados à comunidades científica”.

Figura 7 – Fluxograma das atividades



Fonte: Romberg (2007)

Romberg (2007) disse que, não há nada exclusivo neste fluxograma. No geral, a maioria das bibliografias sobre métodos de pesquisa resumem um conjunto semelhante de atividades. Entende-se então, como metodologia de pesquisa um processo que se inicia desde a disposição inicial de se escolher um determinado tema para pesquisar até a análise dos dados com as recomendações para a minimização ou solução do problema pesquisado. Portanto, o fluxograma que Romberg apresenta é um processo que engloba um conjunto de atividades e métodos para realizar e analisar a pesquisa, conhecer a realidade e produzir novos conhecimentos. Assim,

> O termo pesquisa refere-se a processos – as coisas que se faz, não os objetos que alguém pode tocar e ver. Além disso, fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. (ROMBERG, 2007, p.97).

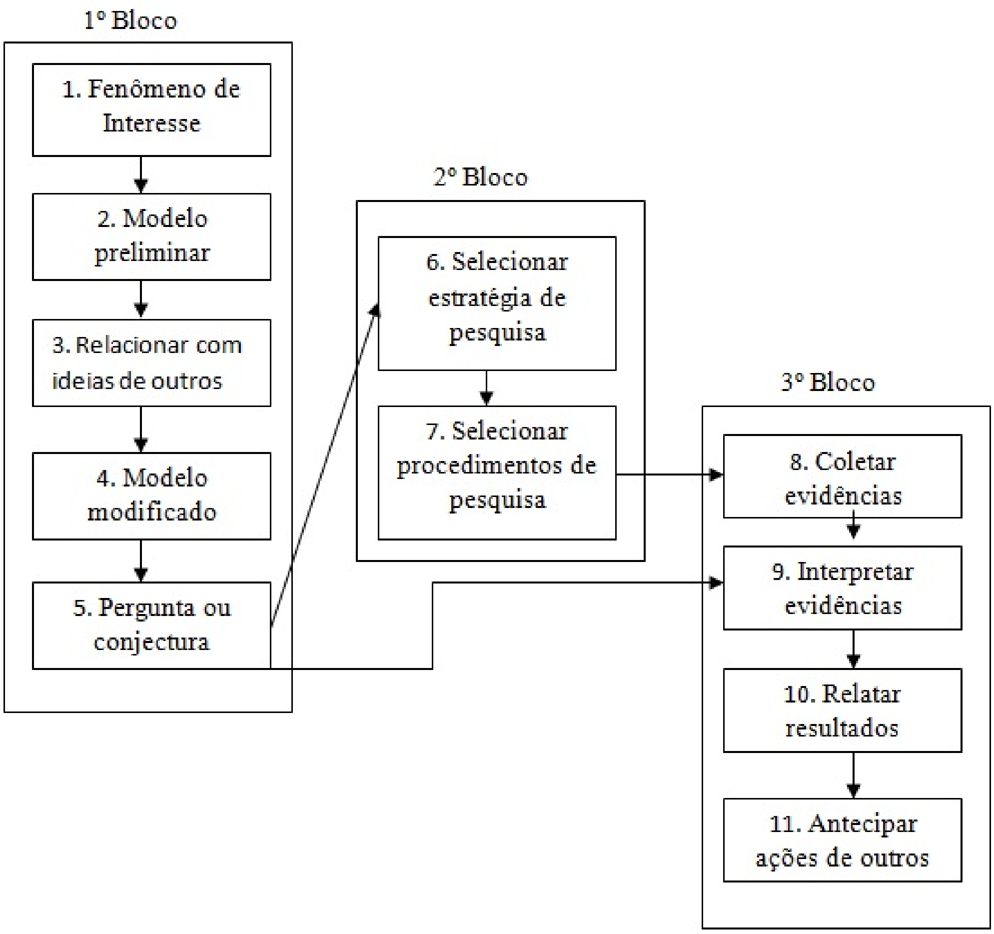
Nesse sentido, Onuchic e Noguti (2014) dizem que, no trabalho realizado pelo pesquisador, muitas vezes se torna importante estabelecer um plano de ação e, também, estratégias e procedimentos que o levem à solução do problema inicialmente proposto.

> Durante alguns anos de pesquisa, observação e uso do modelo metodológico de Romberg os membros do GTERP, que utilizaram e utilizam esse modelo para compor suas dissertações e teses, perceberam que alguns passos poderiam ser alterados a fim de estabelecer um modelo mais completo para a realidade e objetivos do grupo. Sendo as-

> sim, fez-se necessário que o novo modo de trabalho, em pesquisas científicas desenvolvidas pelo GTERP, fosse apresentado à comunidade científica, com as contribuições que foram sendo somadas ao modelo de Romberg nesse tempo. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.57-58).

Dessa forma, foi acrescentado, pelas autoras supracitadas, mais uma atividade no fluxograma de Romberg chamada de Modelo Modificado. Essa inserção se deve a um fato muito comum nas pesquisas, ou seja, ao relacionar o fenômeno da pesquisa e o modelo preliminar com as ideias de outros autores presentes no levantamento bibliográfico, se percebe que o modelo preliminar ainda encontra-se muito "pobre". Dessa forma, muitas ideias precisam ser modificadas e outras incluídas nesse modelo preliminar. Sendo assim, torna-se necessário construir um novo modelo que justamente Onuchic e Noguti (2014) chamam de Modelo Modificado. A seguir, apresentamos essa nova atividade (modelo modificado) no esboço de Romberg - Onuchic.

Figura 8 – Esboço de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic e Noguti (2014)

O modelo modificado apresenta-se como uma nova atividade no fluxograma de Romberg e se faz importante a partir do momento que, após “ouvir os outros”, o pesquisador percebe que seu modelo preliminar encontra-se defasado ou possui poucas informações para ajudá-lo a formular uma pergunta de pesquisa. Desta forma, segundo elas, o Modelo Modificado da pesquisa, em geral, é mais abrangente do que o inicialmente proposto, e deve conduzir o pesquisador à sua pergunta ou conjectura da pesquisa. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

Devido a essa nova atividade, as autoras apresentam um novo esboço que elas chamam de esboço de Romberg-Onuchic, apresentado na figura 8 que utilizamos em nossa pesquisa desde o início até o fim.

3.2 Primeiro Bloco - a nossa Pesquisa apoiada na Metodologia de Romberg-Onuchic

Segundo Romberg (2007), as quatro primeiras atividades são as mais importantes, pois elas são envolvidas com situar as ideias de alguém sobre um problema particular no trabalho de outros estudiosos e decidir o que investigar.

Esta pesquisa interage questões da matemática do curso superior com a Educação Matemática, em especial, o processo de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, à busca de uma metodologia de pesquisa, nos ajudou a refletir sobre a Pesquisa em Educação Matemática visando à sala de aula. Não pretendemos apenas explicar nosso fenômeno encontrado, mas queremos aprofundar a compreensão sobre esse fenômeno, ultrapassando as barreiras e os desafios acerca de como conduzir a nossa pesquisa até o final.

Olsen (2015, p.15) pontua que “os melhores pesquisadores desenvolvem uma forte reputação por métodos de pesquisa sistemáticos, lógicos e bem fundamentados”. Embora a pesquisa carregue consigo uma marca peculiar, o crivo técnico, as atividades de um pesquisador exige mais do que puramente a técnica, muita das vezes a arte entra contracenando e embelezando o cenário da pesquisa. Desse modo, o fato é que em um mestrado ou doutorado muitos dilemas e inquietações surgem na vida do pesquisador a respeito da metodologia. Refletindo sobre isso, Borba, Almeida e Gracias (2018, p.39) dizem que, “a chegada à pós-graduação traz a necessidade do desenvolvimento de uma pesquisa sobre sua inquietação e, portanto, de uma pergunta e/ou objetivo e, também, uma metodologia de pesquisa", os autores complementam ainda que a metodologia envolve os percursos, as opções a empregar para compreender e interpretar as interrogações acerca do objeto de investigação.

Diante do exposto, consideramos que essa pesquisa é de caráter qualitativo por melhor adequar as característica e demanda desse trabalho. Vale salientar que algumas das demandas dessa pesquisa englobam a busca da compreensão, a descrição e interpretação de fenômenos sociais, elementos cruciais em uma pesquisa qualitativa.

Goldenberg (2003, p.53) assegura que uma pesquisa de caráter qualitativo "consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos". Bogdan e Biklen (1994, p.48) afirmam que:

> Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudos porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência.

A seguir, trabalharemos sobre o primeiro bloco do fluxograma de Romberg-Onuchic: identificar nosso fenômeno de interesse; construir um modelo preliminar; relacionar o fenômeno de interesse e o modelo preliminar com ideias de outros pesquisadores; construir o modelo modificado; e trazer a pergunta da pesquisa e seus objetivos.

Fenômeno de Interesse

Entende-se como fenômeno de interesse um processo que se inicia desde a disposição inicial de se escolher um determinado tema para pesquisa até a análise dos dados e a solução do problema pesquisado. Sabemos que, as dificuldades em matemática no ensino superior, especificamente em Cálculo tem sido objeto de estudo de diversas pesquisas em Educação Matemática desenvolvidas no Brasil e no exterior, isso porque muitos alunos apresentam dificuldades que se fazem presentes, principalmente, na compreensão dos conceitos envolvidos, em detrimento das tarefas que enfocam aspectos operatórios de Pré-Cálculo.

Sabe-se que muitas dessas dificuldades de aprendizagem estão estritamente relacionadas com o entendimento da noção de limite, derivada e integral. Frente a essas constatações, pretendemos direcionar a temática desta pesquisa de mestrado para o âmbito do Cálculo. Nesse sentido, nosso objeto de pesquisa é a necessidade de criar um espaço para produção de significados pelos licenciandos, ou seja, esses futuros professores de matemática assumirão o papel fundamental, na medida em que compatibilizará os métodos de ensino e teorias de trabalho através de modelos matemáticos envolvendo FVV, tornando-as partes integrantes da realidade do futuro professor.

Sempre houve muita dificuldade para se ensinar Matemática. Apesar disso todos reconhecem a importância e a necessidade da Matemática para compreender nosso planeta Terra. Onuchic (2003, p.1-2) afirma que "como o elemento mais importante para se trabalhar Matemática é o professor de Matemática e como este está sendo bem preparado para desempenhar bem suas funções, as dificuldades neste processo têm aumentado muito". Nesse sentido, essa autora faz questionamentos como: Por que educar? Por que Matemática? O que é Matemática e onde e como a Matemática é usada? E ela completa dizendo que, fazem parte da vida do professor que nem sempre está preparado para respondê-los.

Dessa forma, refletindo sobre nossa experiência profissional, a preocupação por um ensino voltado à aprendizagem, com significado e compreensão, identificamos como nosso fenômeno de interesse: *O Ensino de Funções de Várias Variáveis através de modelos matemáticos*.

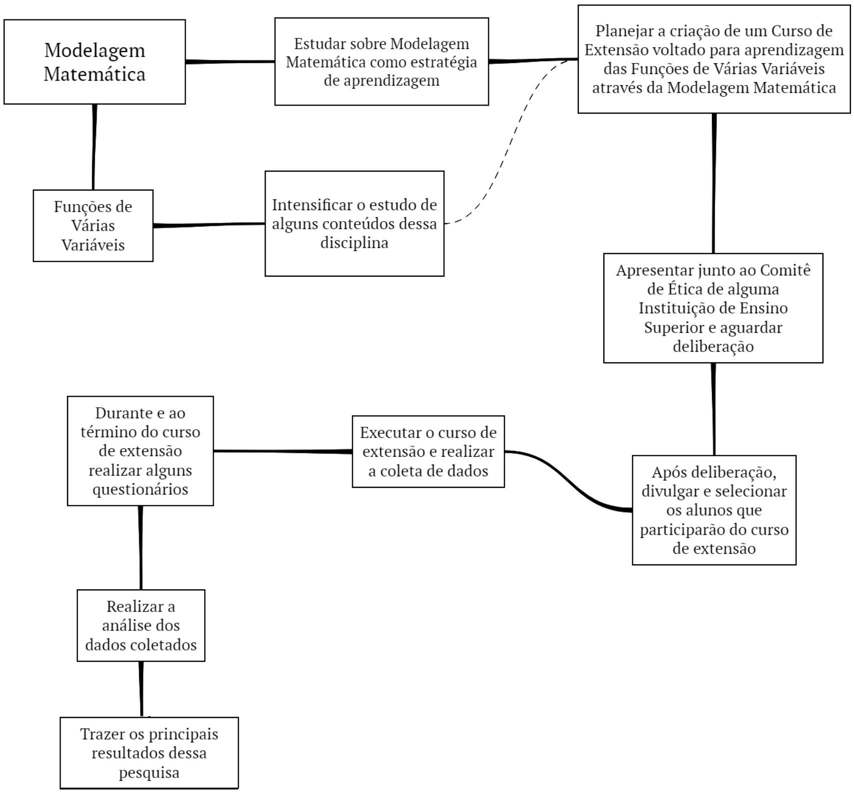
Modelo Preliminar

O Modelo Preliminar é o guia de uma pesquisa, a ideia inicial de um trabalho, em que encontramos os elementos constituintes do fenômeno de interesse e as relações entre eles. Nesse sentido, o modelo preliminar constitui-se o ponto de partida da nossa pesquisa, ou seja, de como a pesquisa poderia ser desenvolvida e vendo até onde ela pode nos levar.

Nesse sentido, nosso Modelo Preliminar constituiu-se por um conjunto de etapas tais como: (1) O conhecimento prévio da Matemática trabalhada com alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática, visando à construção de modelos matemáticos ou situações-problemas necessária para se trabalhar, com eficiência, as FVV; (2) A identificação de dificuldades dos alunos no trabalho com conteúdo que envolve FVV, estudar a modelagem matemática, identificado na literatura nacional e estrangeira, relações entre ensino e a aprendizagem de FVV; (3) A busca e a aceitação de um local para aplicação de um possível projeto, isto é, a definição de uma instituição superior e a permissão para nela aplicar um projeto; (4) A criação de um projeto de extensão, ou seja, criar um projeto que vise a aprendizagem de FVV dando atenção à aplicação e à análise nos trabalhos dos alunos; (5) A aplicação do projeto de extensão; (6) A busca de diferentes modos de ajudar os alunos a superar suas dificuldades; e (7) Tirar conclusões.

Assim, na figura a seguir, a ideia inicial da nossa pesquisa em um modelo preliminar, explicando cada uma das etapas.

Figura 9 – Modelo Preliminar



Fonte: Elaborado pelo autor

Relacionar com ideias de outros autores

Olhando nosso modelo preliminar da figura anterior, ele nos apresenta variáveis-chave como: o Ensino-aprendizagem das FVV; os modelos matemáticos e o uso da metodologia da Modelagem Matemática; e a formação inicial de professores de matemática.

Nosso interesse nesta pesquisa é trabalhar as FVV na formação inicial de professores de matemática, objetivando contribuir para a sua formação profissional, através de modelos matemáticos, tendo os alunos como co-construtores de um novo conhecimento. Nesse sentido, buscamos nas variáveis-chave, o que outros pensam sobre o nosso fenômeno de interesse, até chegar à pergunta que direcionará toda a pesquisa.

Dentre muitas leituras e levantamentos bibliográficos que fizemos, nossa pesquisa se fundamenta sobre dois eixos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho: às Funções de Várias Variáveis e a Modelagem Matemática.

O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa

Após o estudo realizado, se esclareceu e definiu melhor a presente pesquisa. Sendo assim, apresentamos um Modelo Modificado que nos guiou até a análise dos dados e resultados parciais que trazemos para o exame de qualificação. Então, após a investigação feita sobre os dois eixos (FVV e a Modelagem Matemática) identificados e já apresentados nesta pesquisa, entendemos que é necessário reavaliar o nosso Modelo Preliminar e, consequentemente, elaborar um novo modelo e redefinir a pergunta da pesquisa.

Nos estudos sobre o ensino de FVV, aprofundamos nossos conhecimentos em relação ao conteúdo, por exemplo, conceitos de derivadas direcionais; conceitos de Máximo e Mínimo de FVV entre outros. Também sua importância na continuidade dos conteúdos da Licenciatura em Matemática e sua contribuição para melhor compreensão da importância das funções no contexto científico e educacional. Além disso, a partir dos estudos realizados para a composição do tema, conseguimos perceber a importância do ensino das FVV através de modelos matemáticos para desenvolvimento das competências do CDI- III. Também devemos compreender a importância de abordar conceitos que tratem da Matemática da Educação Básica e que façam uma ligação entre os conceitos do curso Superior, nesse sentido, trabalhamos as FVV através de modelos matemáticos, com base nos livros analisados e na ementa da Disciplina de CDI - III do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB, Campus Monteiro.

Desse modo, trabalhamos alguns conteúdos da ementa do curso, utilizando a metodologia de Modelagem Matemática.

Segue abaixo a ementa da disciplina CDI-III, onde alguns desses conteúdos foram trabalhados através de modelos matemáticos.

Tabela 5 – Ementa da Componente Curricular Cálculo Diferencial e Integral III

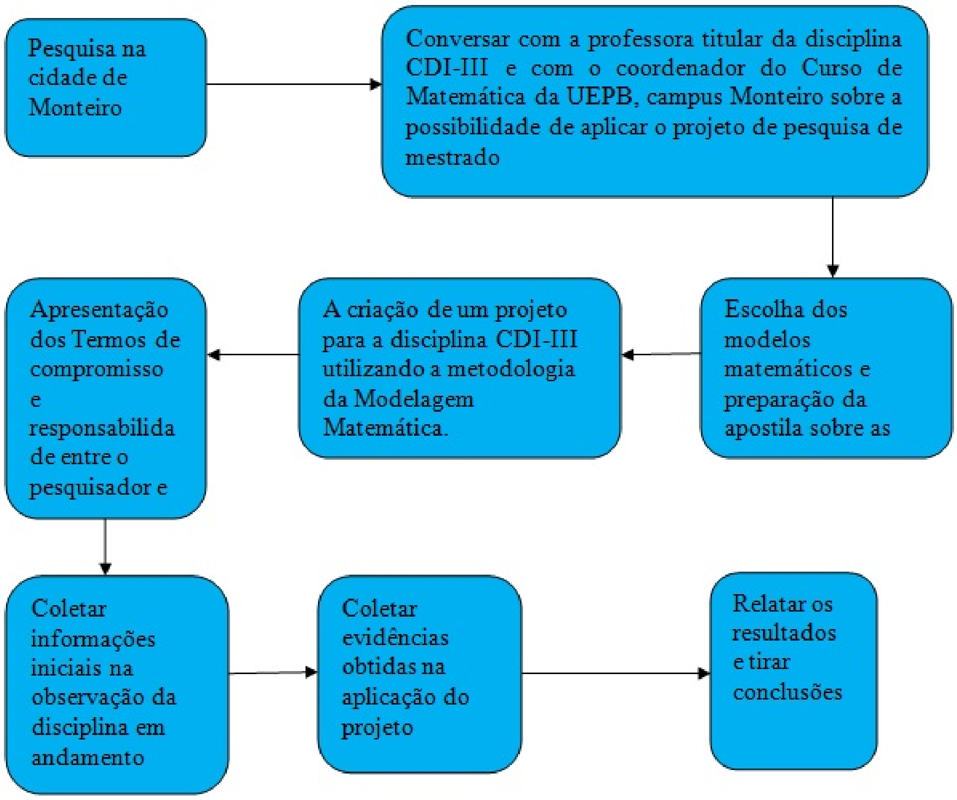
MAT06020 – Cálculo Diferencial e Integral III
Ementa: Funções de várias variáveis. Limite e Continuidade. Derivadas Parciais e Direcionais. Regra da Cadeia. Extremos. Multiplicadores de Lagrange. Integrais múltiplas. Integração por Coordenadas Polares, Coordenadas cilíndricas e esféricas. Funções com valores vetoriais.
Referências
Básica LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994. v.2. MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**. Rio de Janeiro : Guanabara Dois, 1982. v. 2. SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: McGrawHill. v. 2. **Complementar** APOSTOL, T.M. **Calculus**: Muti-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability, John Wiley & Sons, New York, 2006. v. 2. ÁVILA, G. **Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2010. v. 2. FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo B**. Rio de Janeiro: McGraw Hill, 1999. SIMMONS, G. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson MakronBooks, 1988. v. 2. THOMAS, G. B. **Cálculo**. 11 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. v. 2.

Fonte: PPC do Curso de Matemática da UEPB, campus Monteiro

O propósito desta pesquisa é de que os futuros professores tenham autonomia para estudar os diversos conteúdos necessários para sua formação e que compreendam a importância das FVV no seu cotidiano. Acreditamos então que, o trabalho com modelos matemáticos no contexto da modelagem seja o foco principal para que isso aconteça como parte desse processo. Nesse sentido, iremos descrever o nosso Modelo Modificado detalhando as variáveis-chave que foram detectadas no estudo ao relacionar com as ideais de outros pesquisadores, para auxiliar na busca pela resposta à questão proposta neste trabalho.

A seguir, descreveremos o nosso Modelo Modificado detalhando as variáveis-chave que foram detectadas.

Figura 10 – Modelo Modificado



Fonte: Elaborado pelo autor

A Pergunta da Pesquisa

Para Romberg (2007), chegar à pergunta ou à conjectura é um passo decisivo durante o processo de pesquisa, no entanto, identificar qual é o problema de pesquisa não é fácil. De fato, depois de termos modificado o modelo com as devidas análise feita e após relacionar com ideias de outros, fomos levado a chegar à seguinte pergunta da pesquisa:

Quais as principais contribuições a serem produzidas nos alunos de Licenciatura em Matemática diante do ensino-aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral - III relativo às Funções de Várias Variáveis através de Modelos Matemáticos?

Sendo assim, o principal objetivo desta pesquisa é analisar as possibilidades de ensino-aprendizagem das FVV a partir de uma investigação qualitativa através de modelos matemáticos, à luz de aspectos da modelagem matemática.

A fim de trazer compreensões a respeito do objetivo geral acima, apresentamos alguns objetivos específicos para o desenvolvimento da pesquisa:

- Analisar como os alunos interagem diante de um ambiente com aspecto da Modelagem Matemática;
- Abordar alguns conceitos de FVV através de Modelos Matemáticos;
- Observar como os alunos construirão seus conhecimentos sobre FVV no contexto da Modelagem Matemática;
- Discutir e refletir com os alunos a importância das Derivadas Parciais para a compreensão da matemática, especificamente os conceitos de Máximos e Mínimos de FVV.

As duas atividades seguintes, 6 e 7, constituem o segundo bloco do esboço de Romberg-Onuchic, planejamento da pesquisa, que envolvem a tomada de decisões sobre a seleção de estratégias de pesquisa e seleção de procedimentos de pesquisa, visando à resolução da pergunta da nossa pesquisa. (HUANCA, 2014).

3.3 Segundo Bloco – estratégias e procedimentos de pesquisa

As atividades 6 e 7 do segundo bloco de Romberg, em que o pesquisador deve planejar uma Estratégia Geral e seu correspondente Procedimento Geral, onde Estratégias e Procedimentos Auxiliares serão necessários para que se obtenha sucesso no desenvolvimento deste trabalho. Isto significa descobrir “o que fazer?” e “como fazer?” para responder nossa pergunta da pesquisa, ou seja, devemos elaborar um plano de ação para o mesmo. Este plano é focado no Modelo Modificado que deve contemplar as variáveis-chave que nele aparece.

Nesse sentido, nossa Estratégia Geral será a criação de um projeto de trabalho: Ensino-aprendizagem das FVV, apoiado na Metodologia de Modelagem Matemática, com alunos da disciplina CDI III do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB, Campus Monteiro.

A seguir apresentamos as estratégias auxiliares para compor o projeto da pesquisa.

E_1: Identificar o campo da pesquisa;

E_2: Entrar em contato com a professora titular da disciplina CDI – III e com o coordenador do Curso e Matemática da UEPB sobre a possibilidade de aplicar o projeto de pesquisa de mestrado;
E_3: Selecionar os Modelos Matemáticos e desenvolver uma apostila sobre FVV;
E_4: Criar um projeto para a disciplina de CDI-III utilizando a metodologia da Modelagem Matemática;
E_5: Apresentar os termos de compromisso e responsabilidade entre o pesquisador e os licenciando;
E_6: Coletar informações iniciais na observação da disciplina em andamento; E_7: Coletar evidência obtida na aplicação do projeto;
E_8: Relatar os resultados e tirar conclusões.

Na composição do Procedimento Geral estará a criação de um roteiro de atividades compondo uma variedade de situações-problema/modelos matemáticos permitindo a aplicação da teoria criada como fundamentação teórica. Por se tratar de uma pesquisa que teve como foco o ensino-aprendizagem das FVV com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática da UEPB, Campus Monteiro, essa pesquisa teve uma abordagem qualitativa em sala de aula. Desse modo, para a coleta de dados utilizamos no ensino-aprendizagem das FVV a metodologia de Modelagem Matemática, já tendo como procedimentos metodológicos: observação, material escrito pelos alunos, questionários, fotos, algumas filmagens, gravações, registros no caderno de campo do pesquisador e seminários envolvendo os participantes da pesquisa. Nesse contexto o pesquisador atuou como observador/professor no ambiente a ser pesquisado, a fim de compreendê-lo e, sobretudo, tentar modificá-lo em direções que permitam a melhoria da prática em sala de aula.

A seguir apresentamos os procedimentos auxiliares.

P_1: A Instituição escolhida para realização de nossa pesquisa foi a Universidade Estadual da Paraíba, campus VI, Monteiro e os sujeitos da pesquisa são alunos do curso Licenciatura em Matemática;
P_2: Reunião com a professora titular da disciplina CDI –III e com o coordenador do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, campus VI, Monteiro;
P_3: Escolha de Modelos Matemáticos e produção de uma apostila sobre alguns conteúdos envolvendo as FVV;

P_4: A criação do projeto para o ensino-aprendizagem das FVV utilizando a metodologia da Modelagem Matemática;
P_5: Apresentação dos termos de compromisso e responsabilidade entre o pesquisador e os sujeitos da pesquisa que estão em anexo;
P_6: Aplicação dos modelos matemáticos escolhidos para o ensino-aprendizagem das FVV.

Dentro dos seis procedimentos de pesquisa apresentados, o P_3 - Escolha de Modelos Matemáticos e produção de uma apostila sobre alguns conteúdos envolvendo as FVV, que foi o nosso objeto de pesquisa, se transformou em um capítulo próprio denominado:
Capítulo 4 - Calculo Diferencial com Funções de Várias Variáveis.

Nesse sentido, essa apostila, chamada de capítulo 4, foi confeccionada durante o P_3 para orientar os alunos na pesquisa e construção dos conceitos relacionados as FVV.

Dessa forma, tendo um forte apoio teórico em Pinto e Morgado (2015) e outras literaturas auxiliares como Thomas (2009), Guidorizzi (2001), Gonçalves e Flemming (2007), Bianchini (2016), selecionamos os modelos matemáticos e para dar um respaldo teórico na construção dos conceitos, os alunos eram incentivados a explorar a apostila entregue no primeiro encontro/aula. Essa apostila também serviu para otimizar o tempo durante as formalizações dos conceitos, evitando de copiar no quadro as definições, resultados e tarefas propostas.

4 CÁLCULO DIFERENCIAL COM FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Estudar derivada envolvendo FVV, é na verdade, repetir em cada variável dessa função o conceito de derivada estudado envolvendo funções com uma variável. Por exemplo, para derivar uma função de duas variáveis x e y, o processo gira em torno de fixar uma das variáveis (x ou y) envolvidas e fazer variar a outra.

Neste capítulo, traremos alguns conceitos e resultados envolvendo as FVV no contexto do Cálculo Diferencial, iniciando com as derivadas parciais.

4.1 Derivadas Parciais

Definição 4.1.1. *Seja f uma função real definida por $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. A derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0) é dada por*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

se esse limite existir.

De maneira similar define-se derivada parcial de f em relação a variável y, vejamos.

Definição 4.1.2. *Seja f uma função real definida por $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. A derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) é dada por*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

se esse limite existir.

Considerando a função $z = f(x, y)$, a notação utilizada nas definições acima $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ indica derivada parcial de f em relação a variável x e derivada parcial de f em relação a variável y, respectivamente. Além dessa notação, alguns livros utilizam também expressões como $f_x,\ f_y,\ z_x,\ z_y$.

As propriedades de derivação utilizadas com funções de uma variável, também são válidas no contexto envolvendo as FVV. Vejamos a utilização de algumas dessas propriedades nas tarefas que seguem.

Tarefa 4.1.1. *Calcule as derivadas parciais* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *da função* f *definida por* $f(x,y) = xy^2 \cos xy$.

Solução. *Iremos utilizar, dentre algumas das regras de derivação, a regra do produto e a regra da cadeia, derivando* f *primeiro em relação a variável* x *depois em relação a variável* y.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^2 \cdot \cos xy + xy^2 \cdot (-\sin xy \cdot (y)) = y^2 \cdot \cos xy - xy^3 \cdot (\sin xy) \\ &= y^2 \cdot (\cos xy - xy \cdot \sin xy).\end{aligned}$$

Agora iremos derivar f *em relação a variável* y.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xy \cdot \cos xy + xy^2 \cdot (-\sin xy \cdot (x)) = 2xy \cdot \cos xy - x^2 y \cdot (\sin xy) \\ &= xy \cdot (2\cos xy - x \cdot \sin xy).\end{aligned}$$

Tarefa 4.1.2. *Seja* f *uma função real definida por* $f(x,y) = \sqrt{x^2y + 3x}$. *Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Solução. *Como temos uma composição de funções iremos utilizar a regra da cadeia. Vale lembrar que:* $f(x,y) = \sqrt{x^2y+3x} = \left(x^2y+3x\right)^{\frac{1}{2}}$. *Como salientamos no início dessa seção, derivar parcialmente uma função é fazer variar uma variável por vez e manter a outra constante. Assim, primeiro vamos considerar* y *uma constante e derivar* f *em relação a variável* x.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(x^2y+3x\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2xy+3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2xy+3)}{(x^2y+3x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2xy+3)}{2\sqrt{x^2y+3x}} \\ &= \frac{(2xy+3) \cdot \sqrt{x^2y+3x}}{2 \cdot (x^2y+3x)}.\end{aligned}$$

Agora, utilizando as mesmas propriedades vamos manter a variável x constante e derivar f *em relação a y.*

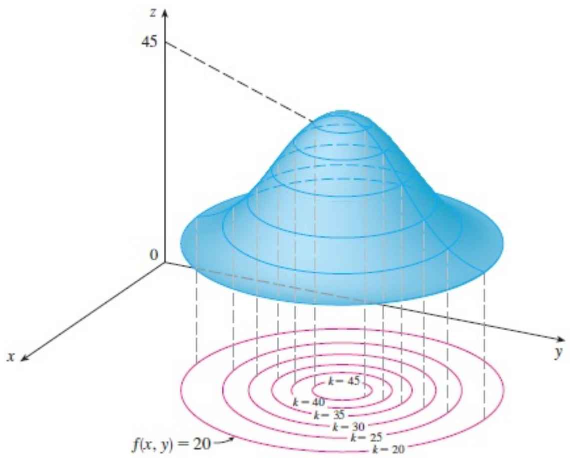
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left(x^2y+3x\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{(x^2y+3x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2y+3x}} \\ &= \frac{x^2 \cdot \sqrt{x^2y+3x}}{2 \cdot (x^2y+3x)} = \frac{x\sqrt{x^2y+3x}}{2(xy+3)}.\end{aligned}$$

A seguir, traremos a definição de curvas de contorno e curvas de nível que será explorado, doravante, em algumas tarefas e resultados.

Definição 4.1.3. *Denominamos* ***curva de contorno*** *a todos os pontos na interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $z = k,\ k \in \mathbb{R}$. Quando projetamos verticalmente essa curva no plano xy obtemos uma* ***curva de nível****.*

Vejamos a visualização dessa definição na figura a seguir:

Figura 11 – Exemplo de curva de contorno e curva de nível



Fonte: Thomas (2009, p.291)

As tarefas, (4.1.1) e (4.1.2), tiveram o objetivo de fixar ou relembrar as propriedades de derivação vistas na disciplina CDI-I, mostrando seu efetivo funcionamento no contexto das FVV. A próxima tarefa propõe trazer significados e um melhor entendimento a esses conceitos relativos às derivadas parciais. Nesse sentido, o objetivo não é somente construir um resultado, é também compreender o que esse resultado nos diz.

Tarefa 4.1.3. *A temperatura em uma placa de metal em cada ponto (x, y) é dada por $T(x, y) = 9x^2 + 4y^2$.*

a*) Determine a curva de nível que passa pelo ponto $(2, 1)$.*

b) *Uma formiga está no ponto $(2, 1)$ e caminha na direção do eixo x, isto é, sobre a reta $y = 1$ até o ponto sobre a curva de nível $z = 80$. Calcule a taxa média de variação da temperatura sofrida pela formiga.*

c) *Calcule, agora, a taxa (instantânea) de variação da temperatura sofrida pela formiga, em relação à distância andada na direção do eixo x sofrida pela formiga.*

d) *Se ela andar na direção do eixo y, qual é a taxa instantânea de variação de temperatura?*

Solução. *(a) Como estamos buscando determinar a curva de nível que passa pelo ponto $(2,1)$, então queremos encontrar os valores da função T, tal que $T(2,1) = k$ onde $k \in \mathbb{R}$. Desta forma:*

$$T(2,1) = 9 \cdot (2)^2 + 4 \cdot (1)^2 = 9 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 40$$

*Assim, a curva de nível que passa pelo ponto $(2,1)$ é formada pela equação $9x^2+4y^2 = 40$. Isso significa que essa equação expressa os valores de x e y que substituídos seja o valor constante igual a 40. O conjunto de pontos ao longo da curva de nível onde a temperatura permanece constante denominamos de **isoterma**.*
(b) Como podemos notar a temperatura no ponto $(2,1)$ é de 40 graus. Determinando o ponto de interseção da curva de nível $z = 80$ com a reta $y = 1$, temos

$$9x^2 + 4 \cdot (1)^2 = 80 \Rightarrow x^2 = \frac{80-4}{9} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{76}{9}} = \frac{\sqrt{76}}{3} \Rightarrow x \cong 2,9$$

Assim a taxa média de variação de temperatura para a formiga ir do ponto $(2,1)$ até ponto $(2,9\ ;\ 1)$ é aproximadamente:

$$\frac{80-40}{2,9-2} = \frac{40}{0,9} = 44,4\frac{graus}{metro},$$

na direção do eixo x.
(c) Para calcularmos a taxa (instantânea) de variação de temperatura no ponto $(2,1)$ em relação à distância andada na direção do eixo x, observe que y permanece constante e igual a 1, o que varia é apenas a variável x. Neste caso, o que fazemos é calcular o limite das taxas médias de variação de temperatura em relação à variação de x, ou seja, derivamos a função T em relação a variável x no ponto $(2,1)$.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(2,1) = 9 \cdot 2x + 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(2,1) = 18x \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 18 \cdot 2 = 36\ \frac{graus}{metro}.$$

Isso significa que a cada metro percorrido pela formiga na direção do eixo x (entenda que a formiga está caminhando no plano, ou seja, no domínio da função) a temperatura (que é a imagem da função T) irar variar $36°$.

Se a formiga andar na direção do eixo y, a variável x permanece constante e neste caso calculamos a derivada parcial de T em relação a variável y, ou seja

$$\frac{\partial T}{\partial y}(2,1) = 0 + 8y \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(2,1) = 8y \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = 8 \cdot 1 = 8\ \frac{graus}{metro}$$

Isso significa que a cada metro percorrido pela formiga na direção do eixo y (entenda que a formiga está caminhando no plano, ou seja, no domínio da função) a temperatura (que é a imagem da função T) irar variar $8°$.

Essa tarefa leva-nos a entender, em termos concretos, o conceito das derivadas parciais. Em relação a interpretação geométrica, o processo é análogo quando comparamos com função de uma variável real. A diferença é que se tratando de uma função com duas variáveis, ao invés de uma reta tangente à curva num ponto (x_0, y_0) teremos duas retas tangente à curva nesse ponto. Os números encontrados ao calcular $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são os coeficientes angulares das retas tangentes no ponto (x_0, y_0), conforme ilustrado na figura (1) do capítulo 2.

4.1.1 ***Diferenciabilidade de Funções de Várias Variáveis***

Uma curva que não possui pontos angulosos (uma curva suave) é a característica principal do gráfico de uma função derivável com uma variável e em cada ponto dessa curva tem-se uma reta tangente única. De modo análogo, a característica de uma função diferenciável com duas variáveis é a suavidade de seu gráfico, assim, deverá existir um único plano tangente em cada ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Isso representa uma "boa aproximação"de f perto de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. (GONÇALVES; FLEMMING, 2007).

De maneira formal, tem-se a seguinte definição sobre diferenciabilidade de função com duas variáveis.

Definição 4.1.4. *Dizemos que a função $f(x, y)$ é diferenciável no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot[x-x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot[y-y_0]\right]}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0,$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$.

A motivação para esse limite na definição segue do fato que a equação do plano tangente a $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é

$$h(x, y) = ax + by + c \tag{4.1}$$

onde a é a inclinação do plano na direção do eixo x $\left(a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ e b é a inclinação do plano a direção do eixo y $\left(b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

Se o ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ satisfaz a equação $h(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, então a equação 4.1 fica:

$$h(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y + c \tag{4.2}$$

Sendo $h(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, então podemos reescrever (4.2) como:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y_0 + c & (4.3) \\ c &= f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y_0 & (4.4) \end{aligned}$$

Substituindo (4.4) em (4.2), chega-se:

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y + f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y_0 \\ h(x,y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot [x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot [y - y_0] & (4.5) \end{aligned}$$

Existindo o plano tangente ao gráfico $z = f(x,y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dado pela fórmula:

$$\boxed{h(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot [x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot [y - y_0]}$$

Dessa forma, quando escrevemos o limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot [x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot [y - y_0]\right]}{\|(x,y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

estamos afirmando que a diferença entre a superfície da função $f(x,y)$ e o plano tangente a essa superfície no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é praticamente nula.

Dando prosseguimento, iremos trazer alguns resultados importantes sobre diferenciabilidade de funções com duas variáveis. Na disciplina CDI - I, os conceitos agregados a uma função em relação ao estado de ser derivável ou diferenciável num determinado ponto são praticamente sinônimos. Quando mudamos o habitat dessa função de uma variável para o contexto com funções de duas ou mais variáveis os conceitos de derivável e diferenciável tomam algumas conotações diferentes.

Os teoremas que discutiremos aqui não serão acompanhadas das suas respectivas demonstrações, nos livros usuais de CDI já o fazem com maestria.

Teorema 4.1.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $f(x, y)$ é diferenciável num ponto (x_0, y_0), então $f(x, y)$ será contínua em (x_0, y_0).*

Esse teorema conserva o mesmo resultado que se tinha no cálculo com funções de uma variável que é a relação diferenciabilidade $\Rightarrow$ continuidade. Ou seja, diferenciabilidade é condição necessária para uma função ser contínua num determinado ponto. A negação disso também é válida, isto é, se uma função $f(x, y)$ não é contínua num ponto (x_0, y_0), então f não é diferenciável nesse ponto.

Outro resultado muito importante é o fato de diferenciabilidade num ponto (x_0, y_0) implica que a função é derivável nesse ponto. Vejamos:

Teorema 4.1.2. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em (x_0, y_0). Então existem em (x_0, y_0) suas derivadas parciais.*

Desse teorema é de imediato a percepção que se alguma das derivadas parciais de f não existirem em (x_0, y_0), logo essa função não será diferenciável nesse ponto.

No CDI-I, se a função fosse derivável em x_0 então essa função também era diferenciável em x_0. Nas FVV isso nem sempre ocorre, ou seja, a existência das derivadas parciais num ponto (x_0, y_0) não é uma condição suficiente para que a função seja diferenciável em (x_0, y_0). O teorema a seguir ilustra essa observação.

Teorema 4.1.3. *Considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e A um conjunto aberto. Seja $(x_0, y_0) \in A$ e suponhamos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem nesse conjunto aberto A que contém (x_0, y_0) e que essas derivadas sejam contínuas em (x_0, y_0). Então f é diferenciável em (x_0, y_0).*

4.2 Regra da cadeia

A relação válida para funções reais ou vetoriais de uma variável se estende para funções de várias variáveis no tocante a famosa regra da cadeia. Vamos relembrar essa regra.

Teorema 4.2.1. *Se $\sigma(u)$ é uma função vetorial diferenciável em I e u é uma função real diferenciável de uma variável real t cuja imagem está contida em I, então:*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\sigma\left(u(t)\right) = \frac{d\sigma}{du}\left(u(t)\right)\frac{du}{dt}}$$

Demonstração. Seja $\sigma\left(u(t)\right) = \left(x\left(u(t)\right), y\left(u(t)\right), z\left(u(t)\right)\right)$. Pela regra da cadeia para função de uma variável real temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma\left(u(t)\right) &= \left(\frac{dx}{du}\left(u(t)\right)\frac{du}{dt}\left(t\right), \frac{dy}{du}\left(u(t)\right)\frac{du}{dt}\left(t\right), \frac{dz}{du}\left(u(t)\right)\frac{du}{dt}\left(t\right)\right) \\
&= \left(\frac{dx}{du}\left(u(t)\right), \frac{dy}{du}\left(u(t)\right), \frac{dz}{du}\left(u(t)\right)\right)\cdot\frac{du}{dt}\left(t\right) \\
&= \frac{d\sigma}{du}\cdot\frac{du}{dt}.
\end{aligned}$$

□

No teorema (4.2.1), tomamos uma função vetorial e outra real. Vejamos agora como fica essa relação estendendo para funções vetoriais com várias variáveis.

Teorema 4.2.2. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo o conjunto A é aberto e $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, tal que $\sigma(I) \subset A$. Se $\sigma(t)$ é diferenciável em $t_0 \in I$ e $f(x,y)$ é diferenciável em $\sigma(I) = (x_0, y_0)$, então a função composta $z(t) = f\left(\sigma(t)\right)$, $t \in I$, é diferenciável em t_0 e*

$$\boxed{\frac{dz}{dt}\left(t_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t_0), y(t_0)\right)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t_0), y(t_0)\right)\frac{dy}{dt}(t_0)}$$

Demonstração. De fato, como f é diferenciável em (x_0, y_0), temos:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + E(x,y), \tag{4.6}$$

onde $\lim\limits_{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\to 0}\dfrac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$. Portanto, a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}, & (x,y) \neq (x_0,y_0), \\ 0, & (x,y) = (x_0,y_0), \end{cases}$$

é contínua em (x_0, y_0).

Assim, dividindo ambos os membros da equação (4.6) por $t - t_0,\ t \neq t_0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(t_0))}{t - t_0} &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\sigma(t_0)\right)\frac{(x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sigma(t_0)\right)\frac{(y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\
&+ g(\sigma(t))\frac{\|\sigma(t) - \sigma(t_0)\|}{t - t_0}.
\end{aligned}$$

Perceba que

$$\frac{\|\sigma(t)-\sigma(t_0)\|}{t-t_0}=\left\|\frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{t-t_0}\right\|\frac{|t-t_0|}{t-t_0}.$$

Como $\lim\limits_{t\to t_0} g(\sigma(t))=0$ e a função $\dfrac{|t-t_0|}{t-t_0}$ é limitada, temos

$$\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t))\frac{|t-t_0|}{t-t_0}=0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{t\to t_0}\left\|\frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{t-t_0}\right\|=\|\sigma'(t_0)\|.$$

Dessa forma,

$$\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t))\frac{\|\sigma(t)-\sigma(t_0)\|}{t-t_0}=0.$$

Logo,

$$\frac{dz}{dt}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(\sigma(t))-f(\sigma(t_0))}{t-t_0}=\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0)$$

□

Observação 4.2.1. *A demonstração do teorema 4.2.2 também é válida se substituirmos a função f por outra função definida no $\mathbb{R}^n$, com $n>2$.*

Tarefa 4.2.1. *Sejam $z=f(x,y)=x^3y^2,\ x(t)=e^{-t}\ \mathrm{e}\ y(t)=t\cdot\sin t$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}(t)$.*

Solução. *De início, calculemos as derivadas parciais de f em relação a x e depois em relação a y.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2\ \ \mathrm{e}\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=2x^3y \tag{4.7}$$

Agora, calculemos as seguintes derivadas:

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\ \ \mathrm{e}\ \ \frac{dy}{dt}=t\cdot\cos t+\sin t \tag{4.8}$$

De acordo com o Teorema 4.2.2, temos:

$$\frac{dz}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0).$$

Substituindo nessa fórmula os resultados obtidos em (4.7) e (4.8), teremos:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0)\\ &= 3x^2y^2\cdot(-e)^{-t}+2x^2y\cdot(t\cos t+\sin t)\\ &= 3e^{-2t}\cdot\left(-e^{-t}\right)\cdot(t\sin t)^2+2e^{-2t}\cdot(t\sin t)\cdot(t\cos t+\sin t)\\ &= -3e^{-3t}\cdot\left(t^2\sin^2 t\right)+2e^{-2t}\cdot(t\sin t)\cdot(t\cos t+\sin t).\end{aligned}$$

Tarefa 4.2.2. *A temperatura de $T(x, y)$ graus centígrados em cada ponto (x, y) de uma chapa de metal não varia com o tempo. Um besouro atravessando a chapa está em $(x, y) = \left(t^2 + 1, 3t\right)$ no instante t. A temperatura tem as propriedades:*

$$T(5, 6) = 40, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(5, 6) = 4 \text{ e } \frac{\partial T}{\partial y}(5, 6) = -2$$

Qual a taxa de variação dessa temperatura em relação ao tempo no instante $t = 2$?

Solução. *A temperatura em cada instante é $z(t) = T\left(x(t), y(t)\right), \text{ onde } x(t) = t^2 + 1 \text{ e } y(t) = 3t$. Utilizando o Teorema (4.2.2), temos:*

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial T}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right)\frac{dy}{dt}$$

Desta forma, considerando $t = 2$, segue:

$$\frac{dz}{dt}(2) = \frac{\partial T}{\partial x}\left(x(2), y(2)\right)\frac{dx}{dt}(2) + \frac{\partial T}{\partial y}\left(x(2), y(2)\right)\frac{dy}{dt}(2) \tag{4.9}$$

Além disso, sabemos que

$$x(t) = t^2 + 1 \Rightarrow x(2) = 5 \quad \text{e} \quad y(t) = 3t \Rightarrow y(2) = 3 \cdot 2 = 6 \tag{4.10}$$

temos,

$$\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \frac{dx}{dt}(2) = 4 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt}(2) = 3.$$

Substituindo em (4.9), tem-se:

$$\frac{dz}{dt}(2) = \frac{\partial T}{\partial x}(5, 6) \cdot 4 + \frac{\partial T}{\partial y}(5, 6) \cdot 3$$

Como por hipótese $\frac{\partial T}{\partial x}(5, 6) = 4 + \frac{\partial T}{\partial y}(5, 6) = -2$, então:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(2) &= \frac{\partial T}{\partial x}(5, 6) \cdot 4 + \frac{\partial T}{\partial y}(5, 6) \cdot 3 \\ &= 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 = 16 - 6 = 10. \end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação dessa temperatura em relação ao tempo no instante $t = 2$ é igual a 10° centígrados.

Existe ainda uma versão mais geral do Teorema 4.2.2 para funções definidas no plano. Para ilustrar essa afirmação vejamos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.3. *Considere a função $f(x,y)$ uma função diferenciável num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2,$ de modo que $g(x,y)$ e $h(x,y)$ sejam funções diferenciáveis num conjunto $V \subset \mathbb{R}^2$ tais que para todo $(u,v) \in V$, $(x,y) = (g(u,v), h(u,v)) \in U$. Considere*

$$F(u,v) = f\left(g(u,v), h(u,v)\right), (u,v) \in V.$$

Então:

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \text{(ii)}\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ devem ser calculadas no ponto $(g(u,v), h(u,v))$.

Demonstração. Pelas informações das hipóteses, $F(u,v) = f(x,y)$ onde $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$.

(i) Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, faremos como aprendemos em derivadas parciais, iremos considerar v constante e consequentemente x e y irá depender apenas de da variável u. Como as hipóteses desse Teorema satisfazem o teorema 4.2.2, então:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v),$$

onde $(x,y) = (g(u,v), h(u,v))$.

(ii) Seguindo o mesmo raciocínio demonstraremos esse ítem agora considerando u constante. Segue que

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v),$$

onde $(x,y) = (g(u,v), h(u,v))$. □

Tarefa 4.2.3. *Calcule as derivadas $\frac{\partial F}{\partial u}$ e $\frac{\partial F}{\partial v}$ em termos de u e v sabendo que $F(u,v) = x^3 + y^2,$ onde $x = u + v$ e $y = -u - v$.*

Solução. *Pela tarefa 4.2.3 sabemos que $F(u,v) = f(x,y)$ e assim:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= 3x^2 + 2y \cdot (-1) = 3x^2 - 2y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= 3x^2 + 2y \cdot (-1) = 3x^2 - 2y. \end{aligned}$$

4.3 Derivada direcional e Vetor Gradiente

Quando definimos as derivadas parciais de uma função f de duas variáveis, por exemplo, obtínhamos a taxa de variação apenas na direção do eixo x e do eixo y. Mas, evidentemente que no plano existem infinitas direções e, nesse sentido, temos a necessidade de ampliar o conceito de derivadas parciais.

Definição 4.3.1. *A derivada direcional de uma função* $z = f(x, y) \text{ em } P_0$ *na direção do versor* u *é definida por*

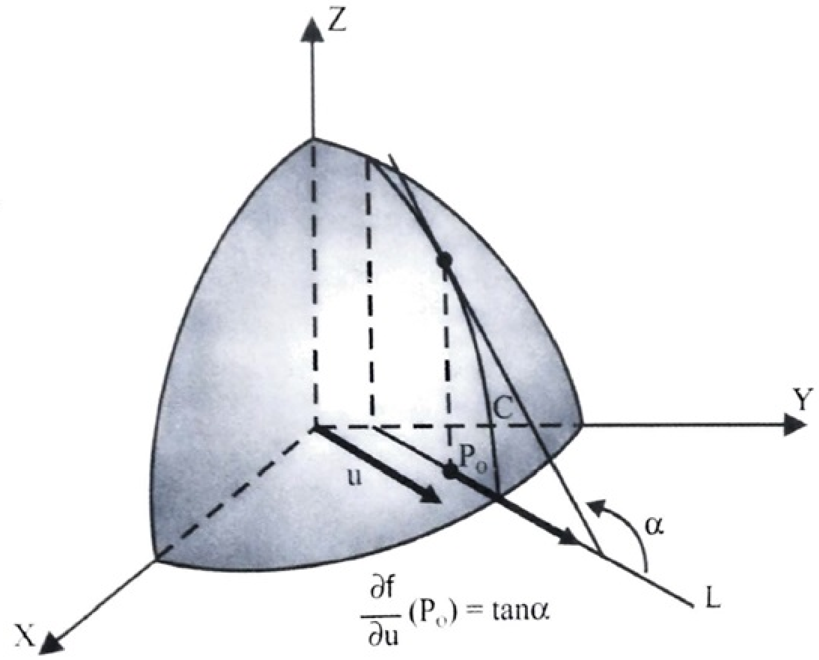
$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t\,\|u\|},$$

se esse limite existir.

Analisando essa definição notamos que f é uma função de domínio em $\mathbb{R}^2$ e P_0 é um ponto desse domínio, assim como o vetor $u \neq 0$. Perceba que a expressão $P_0 + tu,\ t \in\ \mathbb{R}$ é uma reta paralela ao vetor u.

A **derivada direcional** de $f(x_0, y_0) \,\text{em}\, P_0$ na direção de u, cuja notação corriqueiramente utilizada é $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0) \text{ ou } (D_u f)_{P_0}$, é a taxa na qual a função $f(x, y)$ varia em P_0 na direção da reta r representada pelo conjunto de pontos $P_0 + tu,\ t \in \mathbb{R}$. Interpretando geometricamente essa definição, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0) \text{ ou } (D_u f)_{P_0}$ significa a inclinação da reta tangente à curva C constituída pela equação $z = f(P_0 + tu)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, conforme figura 12 a seguir.

Figura 12 – Interpretação da derivada direcional



Fonte: Pinto e Morgado (2015, p.117)

Toda derivada parcial é uma derivada direcional na direção dos vetores canônicos do espaço onde a função está definida.

Tarefa 4.3.1. *Calcule a derivada da função f definida por $f(x,y) = x^2 + xy$ em $P_0 = (1,2)$ na direção do vetor unitário $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.*

Solução. *Pela definição (4.3.1), temos:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t\,\|u\|}. \tag{4.11}$$

Perceba que

$$P_0 + tu = (1,2) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\ ,\ 2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Aplicando a função f em $P_0 + tu$, temos:

$$f(P_0 + tu) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Por sua vez, f aplicada no ponto P_0 é $f(1,2) = 1^2 + 1 \cdot 2 = 3$ e a norma do vetor u é:

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Substituindo esses valores em (4.11) temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(P_0+tu)-f(P_0)}{t\,\|u\|}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-[1^2+1\cdot 2]}{t\,\|u\|}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}\right)+\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}\right)-3}{t\,\|u\|}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\frac{2t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}\right)+\left(2+\frac{3t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}\right)-3}{t\,\|u\|}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\left(3+\frac{5t}{\sqrt{2}}+\frac{2t^2}{2}\right)-3}{t\,\|u\|}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{5t}{\sqrt{2}}+t^2\right)}{t\,\|u\|}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+t\right)}{t\,\|u\|}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}+t}{\|u\|}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}+t}{1}=\frac{5}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo a taxa de variação de $f(x,y)=x^2+xy$ em $P_0=(1,2)$ *na direção do vetor unitário* $u=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ *é igual a* $\frac{5}{\sqrt{2}}$*. Isso significa que a cada unidade percorrida no conjunto domínio de* f*, haverá uma variação de* $\frac{5}{\sqrt{2}}$ *na superfície gerada por* $f(x,y)$*.*

É notável que calcular a derivada direcional de uma função via definição torna-se um pouco trabalhoso. Nosso objetivo é desenvolver uma fórmula mais eficiente para calcular a derivada direcional para uma função diferenciável f. Consideremos a reta

$$
r:\begin{cases} x &= x_0+su_1\\ y &= y_0+su_2\end{cases}
$$

que passa pelo ponto $P_0(x_0,y_0)$ e está parametrizada pelo comprimento de arco s na direção do vetor $u=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$. Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{ds}(P_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\frac{dy}{ds}\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)u_1+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)u_2\\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j}\right](u_1\vec{i}+u_2\vec{j}).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Isto nos motiva dar a seguinte definição:

Definição 4.3.2 (vetor gradiente)**.** *Considere* f *uma função de* n *variáveis* $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$*. Se* f *possui derivadas parciais no ponto* $P_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ *denominamos **vetor gra-***

diente *de f aplicado em P_0 por*

$$\nabla f\,(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right).$$

Se usarmos essa definição de vetor gradiente na equação do Teorema (4.2.2), podemos reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,(x(t),y(t))\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x(t),y(t))\,\frac{dy}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,(x(t),y(t))\,, \frac{\partial f}{\partial y}\,(x(t),y(t)) \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \right) \\ &= \nabla f\,(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \qquad (4.13) \end{aligned}$$

onde $\nabla f\,(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ é o produto escalar dos vetores $\nabla f\,(\sigma(t))$ e $\sigma'(t)$.

O vetor gradiente é muito importante pois ele sempre vai ser normal a superfície num ponto considerado e por conseguinte perpendicular ao vetor tangente a superfície nesse ponto considerado. Essa é a afirmação descrita no próximo teorema, contudo, antes de enunciá-lo é importante lembrar dois conceitos que serão explorados nas hipóteses desse teorema, a saber: função de classe C^1 e superfície de nível.

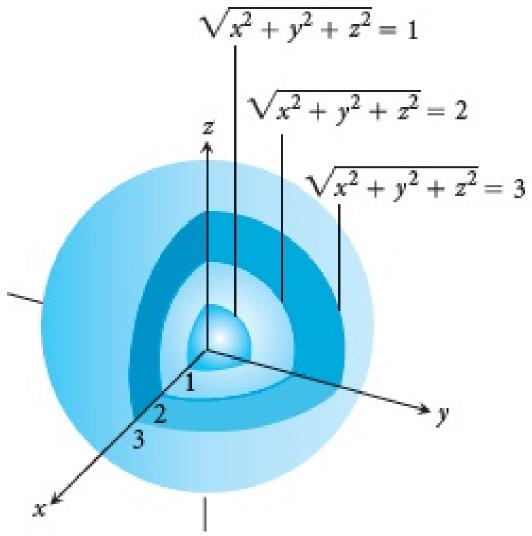
Definição 4.3.3. *Uma função real f com n variáveis reais é dita de classe C^1 num ponto P_0 se, e somente se, f possui derivadas parciais numa bola aberta $B_r(P_0)$ e estas derivadas parciais são contínuas em P_0.*

Definição 4.3.4. *O conjunto de pontos no espaço (x, y, z) onde uma função f de três variáveis independentes tem um valor constante k, ou seja, $f(x, y, z) = k$ é chamada **superfície de nível** de f.*

Sabemos que os gráficos de funções de três variáveis são compostas por pontos $(x, y, z, f(x, y, z))$ num espaço de quatro dimensões e trona-se inviável sua visualização no sistema usual de representação gráfica tridimensional. Contudo, podemos obter uma noção do comportamento dessas funções analisando as superfícies de nível tridimensionais.

Na figura 13 temos as superfícies de nível de esferas concêntricas definidas pela função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Figura 13 – Superfície de nível de esferas concêntricas



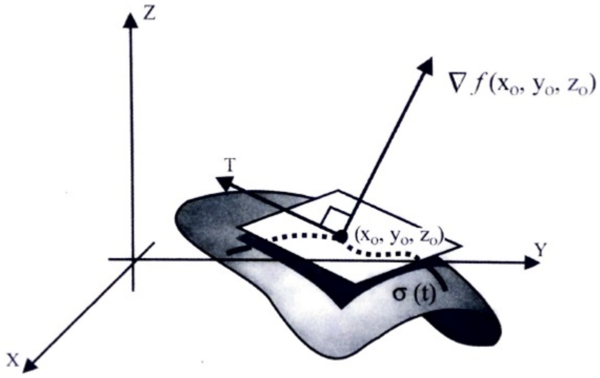
Fonte: Thomas (209, p.292)

O valor da função f expressa a distância da origem até os pontos (x, y, z) localizados da superfície das esferas. Os valores expresso por $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = k,\ k > 0$, são esferas centrada na origem e de raio k.

Teorema 4.3.1. *Sejam $w = f(x, y, z)$ uma função de classe C^1 definida num conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$. Se S é a superfície de nível de equação$f(x, y, z) = k$ (k=constante) que contém P_0, então $\nabla f(P_0)$ é perpendicular a qualquer vetor tangente a S em P_0.*

Esse teorema nos dá a interpretação geométrica do vetor gradiente de uma função de três variáveis. Vejamos a ilustração:

Figura 14 – Interpretação geométrica do vetor gradiente



Fonte: Pinto e Morgado (2015, p.109)

Além disso, esse teorema da a possibilidade de definir plano tangente a uma superfície de nível S, vejamos.

Definição 4.3.5. *Sejam S uma superfície de nível de equação $f(x,y,z) = k$ (k =constante) e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Se $f(x,y,z)$ é de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P_0 \in U$ e $\nabla f(P_0) \neq 0$. Definimos o plano tangente a S em P_0 pela equação*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{4.14}$$

Além disso, a reta de equação

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(P_0),\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.15}$$

*denomina-se **reta normal** a S em P_0.*

Vamos ver uma tarefa para entender o funcionamento dessa definição.

Tarefa 4.3.2. *Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície S de equação $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.*

Solução. *A superfície $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$ é de classe C^1, pois é um polinômio. O gradiente de f no ponto $(1, -1, 1)$ é:*

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 6y, 8z) \Rightarrow \nabla f(1, -1, 1) = (2, -6, 8)$$

Aplicando o resultado acima na equação (4.14), temos:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\
\nabla f(1, -1, 1) \cdot (x - 1, y - (-1), z - 1) &= 0 \\
(2, -6, 8) \cdot (x - 1, y - (-1), z - 1) &= 0 \\
2x - 2 - 6y - 6 + 8z - 8 &= 0 \Rightarrow \boxed{2x - 6y + 8 = 16} \hookrightarrow \text{eq. do plano tangente}
\end{aligned}$$

Utilizando a equação (4.15), encontraremos a equação da reta normal.

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(P_0) \Rightarrow (x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(2, -6, 8),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como já conhecemos o conceito de vetor gradiente, a seguir traremos alguns resultados importantes no estudo das derivadas direcionais que facilitará os cálculos como também ajudará a encontrar a direção que a função possui maior ou menor variação.

Teorema 4.3.2. *Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|} \tag{4.16}$$

onde $\nabla f(P_0) \cdot \dfrac{u}{\|u\|}$ é o produto escalar de $\nabla f(P_0)$ pelo versor (ou vetor unitário) $\dfrac{u}{\|u\|}$ na direção e sentido do vetor u.

Demonstração. De fato, como por hipótese f é diferenciável em P_0, então:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \cdot (tu)}{\|tu\|} = 0$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\left| \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t\,\|u\|} - \frac{\nabla f(P_0) \cdot (tu)}{t\,\|u\|} \right| &= 0 \\ \lim_{t\to 0}\left| \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t\,\|u\|} - \frac{\nabla f(P_0) \cdot (u)}{\|u\|} \right| &= 0. \end{aligned}$$

Das propriedades de limites essa última igualdade tem como consequência:

$$\begin{aligned} \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t\,\|u\|}}_{def.\ de\ derivada\ direcional} &= \frac{\nabla f(P_0) \cdot (u)}{\|u\|} \\ \frac{\partial f}{\partial u}(P_0) &= \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}, \end{aligned}$$

como queríamos demosntrar. □

Teorema 4.3.3. *Seja f uma função diferenciável em P_0 tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$, então o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ ocorre quando o vetor u tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0),\ \text{sendo}\ \|\nabla f(P_0)\|$ o seu valor máximo.*

Demonstração. Com efeito, da hipóteses de f ser diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então do Teorema (4.3.2) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(P_0) &= \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|} \overbrace{=}^{*} \|\nabla f(P_0)\| \cdot \underbrace{\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\|}_{igual\,a\,um} \cdot \cos\theta \\ \frac{\partial f}{\partial u}(P_0) &= \|\nabla f(P_0)\| \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$

A igualdade assinalada com $*$ acima é consequência da interpretação geométrica do produto escalar de dois vetores. Como θ é o ângulo compreendido entre os vetores

$\nabla f(P_0)$ e u, então $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ terá valor máximo quando $\theta = 0$ ($\cos 0 = 1$), ou seja, quando u tem a mesma direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$ e seu valor máximo é $\|\nabla f(P_0)\|$.

$\square$

Vamos fazer algumas tarefas para entendermos a utilização e aplicabilidade desses teoremas.

Tarefa 4.3.3. *Determine a taxa de variação de* $f(x,y,z) = xyz + e^{2x+y}$ no ponto $P_0 = (-1,2,1)$ *na direção do vetor* $u = (1,1,\sqrt{2})$*.*

Solução. *As derivadas parciais de f são:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2,1) &= yz + 2e^{2x+y} = 2\cdot 1 + 2e^{-2+2} = 4;\\
\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2,1) &= xz + e^{2x+y} = -1\cdot 1 + e^{-2+2} = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,1) &= xz = -1\cdot 2 = -2.
\end{aligned}$$

Como as derivadas parciais existe e são contínuas em P_0, então f é diferenciável nesse ponto. Assim pelo Teorema 4.3.3, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1,2,1) = \nabla f(-1,2,1)\cdot\frac{u}{\|u\|} = (4,0,-2)\cdot\frac{(1,1,\sqrt{2})}{2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}.$$

Tarefa 4.3.4. *Seja $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{x^2+y^2+1}$. Determine:*

a) *A direção de maior variação de f e a taxa de maior variação da função no ponto $P = (1,0,-1)$.*

b) *A taxa de variação de f no ponto $P = (1,0,-1)$ na direção do vetor $u = \sigma'(t)$, onde $\sigma(t) = (t, 1+2t, -1+t)$.*

Solução. *Calculando as derivadas parciais de f em P_0 temos:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,-1) &= \frac{z\cdot(x^2+y^2+1) - xz(2x)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{z\cdot(x^2+y^2+1) - 2x^2z}{(x^2+y^2+1)^2}\\
&= \frac{z\cdot(x^2+y^2+1-2x^2)}{(x^2+y^2+1)^2}\\
&= \frac{-1\cdot(-1+1)}{(1+0+1)^2} = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,-1) &= \frac{-xz\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2} = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,-1) &= \frac{x\cdot(x^2+y^2+1) - xz\cdot 0}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{x}{(x^2+y^2+1)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Como f é diferenciável em P_0 e $\nabla f(P_0) = \left(0, 0, \dfrac{1}{2}\right) \neq 0$, então o teorema 4.3.3 garante que a direção de maior variação é a do vetor $u = (0, 0, \dfrac{1}{2})$ e a maior taxa de f em P_0 é $\|\nabla f(P_0)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$.

***Solução (b):** Como $\sigma(t) = (t, 1+2t, -1+t) \Rightarrow \sigma'(t) = (1, 2, 1)$ por conseguinte $u = \sigma'(t) = (1, 2, 1)$. Calculemos a derivada direcional de f em P na direção de u.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(P) &= \nabla f(P) \cdot \frac{u}{\|u\|} \\ &= \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{12}. \end{aligned}$$

Tarefa 4.3.5. *Uma chapa de metal aquecida está situada no plano xy de tal modo que a temperatura em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto à origem. A temperatura em $(3, 4)$ é de 100 graus. Suponha que os eixos positivo $0x$ e $0y$ apontam, respectivamente, para leste e norte. Um objeto se encontra no ponto $P_0 = (2, 2)$.*

a) Se o objeto se mover para nordeste, ele aquecerá ou esfriará? E para sudeste? Justifique.

b) Se o objeto se mover na direção do vetor $(-1, -1)$, ele aquecerá ou esfriará? Com que taxa?

c)Se a velocidade com que o objeto se move na direção do item b) é de $\dfrac{1}{5}\, m/s$, calcule a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo no ponto P_0.

d) Na direção e sentido de que vetores o objeto deve se mover, a parti de P_0, para que a temperatura permaneça constante?

Solução. *Fica a cargo do leitor.*

Tarefa 4.3.6. *O Capitão Astro está outra vez em perigo perto da órbita de Mercúrio. Ele está em $P_0 = (1, 1, 1)$, e a temperatura da blindagem de sua espaçonave num ponto (x, y, z) é dada por $T(x, y) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$ graus.*

a) Que direção ele deve tomar para perder temperatura o mais rápido possível?

b) Se a espaçonave viaja a e^8 unidades de comprimento por segundo, com que taxa a temperatura irá cair quando ele seguir a direção do item a)?

c)Infelizmente, a blindagem da espaçonave se danificará se a taxa de variação da *temperatura for inferior a $\sqrt{14}e^2$ $graus/s$. Que comjunto de possíveis direções ele pode tomar sem causar danos á sua espaçonave, a partir de P_0, com velocidade do item b)?*

Solução. *Fica a cargo do leitor.*

4.4 Máximos e mínimos de Funções de Várias Variáveis

Compreender o comportamento de uma função na completude de seu domínio é algo muito importante. No cálculo envolvendo funções de uma variável é desenvolvido toda uma teoria abordando conceitos de máximo e mínimos locais e globais. Essa noção, doravante, será ampliada para FVV onde o interesse é o mesmo do CDI-I, ou seja, estudar o comportamento dessas funções em domínios fechados e limitados.

Definição 4.4.1 (Ponto crítico)**.** *Um ponto (x_0, y_0) interior ao domínio de uma função $z = f(x, y)$ é chamado **ponto crítico** de f se suas derivadas parciais de primeira ordem não existem ou sejam nulas em (x_0, y_0).*

O objetivo aqui é relatar os principais métodos existentes para captar os valores extremantes de uma FVV. De início, procuraremos captar esses pontos localizado no interior do domínio de uma função e aos poucos avançaremos a captura desses pontos para a fronteira do domínio. Vamos iniciar definindo valores extremos de uma FVV.

Definição 4.4.2. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um máximo local de f (respectivamente valor mínimo local), se existir uma bola aberta B centrada em (x_0, y_0) e raio δ contida em A, de modo que:*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \;\; (\text{respectivamente } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)) \, ,$$

para todo $(x, y) \in B$.

Alguns livros denominam máximo ou mínimo local por máximo ou mínimo relativo. O ponto (x_0, y_0) no qual a função f assume esse valor extremo é dito ponto extremo local.

Assim como em outros conteúdos de matemática, encontrar esses valores extremos via definição nem sempre é confortável, assim traremos alguns resultados que facilitam o processo de obter esses extremantes.

Teorema 4.4.1. *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* (x_0, y_0) *um ponto interior de* A. *Se* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *existem e* $f(x, y)$ *tiver um extremo local em* (x_0, y_0)*, então:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Demonstração. De fato, utilizando a definição de derivadas parciais no ponto (x_0, y_0), temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Vamos supor que f possui um valor máximo local em (x_0, y_0). De acordo com a Definição 4.4.2, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0$$

sempre que $0 < |\Delta x| < \delta$. Dessa última desigualdade, temos que analisar dois casos:

- Se $0 < \Delta x < \delta$, então

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0. \tag{4.17}$$

  Como, por hipótese, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe, então de (4.17) tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leq 0.$$

- Por outro lado, se $-\delta < \Delta x < 0$,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0. \tag{4.18}$$

  Como, por hipótese, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe, então de (4.18) tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \geq 0.$$

Desse modo, conclui-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$

De modo similar, verifica-se que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$ □

Esse teorema é uma condição necessária para existência de extremos locais, alguns livros denominam esse teorema como *teste da derivada primeira para extremos locais*.

Tarefa 4.4.1. *Seja* $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$*. Se* $(x,y)\neq(0,0)$*, então:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Logo $\nabla f(x,y)\neq(0,0)$*. De outra forma,* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *não existem. Portanto,* $(0,0)$ *é o único ponto crítico da função* f*.*

Como $f(0,0)=\sqrt{0^2+0^2}=0$ e $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0=f(0,0)\Rightarrow f(x,y)\geq f(0,0),\ \forall\ x$ e y *do domínio. Pela definição 4.4.2* f *atinge o valor de mínimo em* $(0,0)$*.*

Vale apenas lembrar que no cálculo com funções de uma variável existiam os pontos de inflexões, ponto esses que atendiam os requisitos de ser considerado um extremante mas na realidade não acontecia. Lembremos, por exemplo, da função $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $g(x)=x^3$. Sua derivada existe$\big(g'(x)=3x^2\big)$ e $g'(0)=0$, contudo o ponto $x=0$ não é crítico e sim, de inflexão.

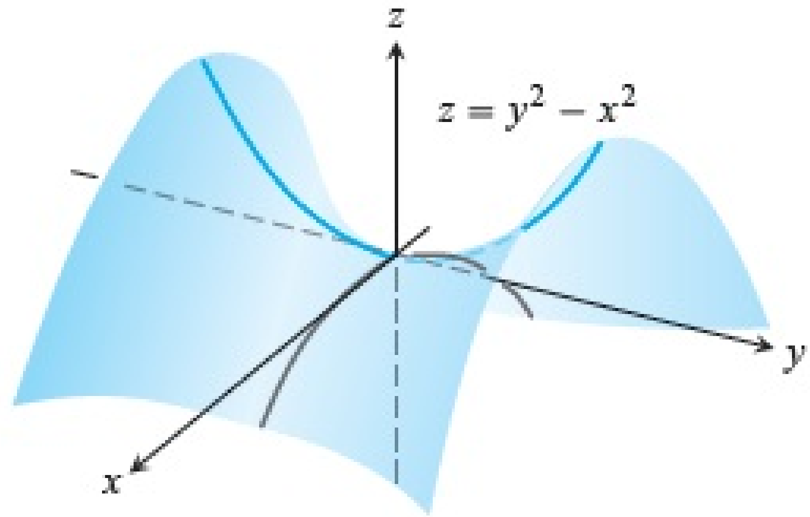
Nas FVV também existe algo similar,o que denomina-se por **ponto de sela**. Vejamos a definição.

Definição 4.4.3. *Seja* $f:A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Dizemos que* f *tem um ponto de sela em um ponto crítico* (x_0,y_0) *se para toda bola aberta centrada nesse ponto existem pontos* $(x,y)\in A$, tal que $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ *e pontos* $(x,y)\in A$, tal que $f(x,y)<f(x_0,y_0)$*. O ponto* $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ *na superfície de* f *é chamado* ***ponto de sela****.*

Tarefa 4.4.2. *A função definida por* $z=f(x,y)=y^2-x^2$*. O ponto crítico é* $(0,0)$ e $f(0,0)=0$*. Contudo* f *não possui extremo local em* $(0,0)$*.*

A figura 15 ilustra o comportamento da função expressa nessa tarefa 4.4.2.

Figura 15 – Ilustração de um ponto de sela em $(0, 0, 0)$



Fonte: Thomas (2009, p.353)

É possível perceber que se uma função tem suas derivadas parciais nulas em algum ponto do interior do domínio não garante que f possua um extremo local naquele ponto. Um outro critério muito utilizado é analisar a derivada de segunda ordem, cuja dá mais precisão sobre a natureza de um ponto crítico.

Antes de enunciar o próximo teorema, na Definição 4.3.3 tratamos do que seria uma função de classe C^1, ou seja, quando suas derivadas parciais de primeira ordem existem e são contínuas. De modo bem similar, temos a seguinte definição para função de classe C^2.

Definição 4.4.4 (Função de classe C^2)**.** *Dizemos que uma função f é de classe C^2 em (x_0, y_0) quando suas derivadas parciais de segunda ordem existem e são contínuas nesse ponto.*

De posse desta definição, enunciaremos o seguinte resultado:

Teorema 4.4.2 (Teste da derivada segunda)**.** *Seja $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 numa bola aberta $B_\delta(x_0, y_0)$. Se (x_0, y_0) é um ponto crítico de $f(x, y)$ e $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Consideremos por:*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ e } C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Se

1. $B^2 - AC < 0$ e $A < 0$*, então* f *tem um valor máximo local em* (x_0, y_0)*;*

2. $B^2 - AC < 0$ e $A > 0$*, então* f *tem um valor mínimo local em* (x_0, y_0)*;*

3. $B^2 - AC > 0$*, então* f *tem um ponto de sela em* (x_0, y_0)*.*

Demonstração. Seja $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ um vetor unitário na direção de um vetor que faz um ângulo $\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi$, com o eixo positivo x. A derivada direcional de $f(x, y)$ na direção de u é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) &= \nabla f \cdot u = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\alpha.\end{aligned}$$

Perceba que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = 0,\ \forall\ \alpha\ \in\ [0, 2\pi]$.

A derivada direcional de segunda ordem de f na direção de u é definida por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Como f é de classe C^2, então pelo Teorema de Schwarz[1], temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \forall\ (x, y)\ \in\ B_\delta(x_0, y_0).$$

onde $B_\delta(x_0, y_0)$ é a bola, em $\mathbb{R}^2$, centrada em (x_0, y_0) e raio δ. Assim,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha, \forall\ (x, y)\ \in\ B_\delta(x_0, y_0).$$

Desse modo, utilizando os valores de $A,\ B,$ e C da hipótese, teremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, y) = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha.$$

Consequentemente, o estudo da natureza dos pontos críticos de f se reduz a análise do sinal da função: $P(\alpha) = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$.

Se $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \dfrac{3\pi}{2}$, podemos escrever:

$$P(\alpha) = \cos^2\alpha \cdot \left(A + 2B\tan\alpha + C\tan^2\alpha\right).$$

Assim, $P(\alpha)$ é positivo, negativo ou nulo dependendo de o polinômio $Q(v) = A + 2Bv + Cv^2$ ser positivo, negativo ou nulo, onde $v = \tan\alpha$.

[1] Ao leitor interessado, sugerimos consultar Lima (2004).

Para demonstrar (i), suponhamos $B^2 - AC < 0$ e $A < 0$, então por conseguinte $C < 0$, pois $0 < B^2 < AC$ e para essa desigualdade ser verdadeira C tem que ser negativo.

Por outro lado, $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = C < 0$. O polinômio $Q(v)$ não possui raízes reais, visto que $B^2 - AC < 0$. Dessa forma, $Q(v)$ tem sempre o sinal de C, que é negativo.

Portanto, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ é negativo em todas as direções $\alpha,\ \alpha \in [0, 2\pi]$.

(ii) Agora vamos supor $B^2 - AC < 0$ e $A > 0$. Consequentemente, $0 < B^2 < AC$ e $C > 0$, pois do contrário não satisfazia as desigualdades.

Por outro lado $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = C > 0$. O polinômio $Q(v)$ não possui raízes reais, visto que $B^2 - AC < 0$. Dessa forma, $Q(v)$ tem sempre o sinal de C, que é positivo.

Dessa forma, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ é positivo em todas as direções $\alpha,\ \alpha \in [0, 2\pi]$.

(iii) Suponhamos agora que $B^2 - AC > 0$, o polinômio $Q(v)$ possui duas raízes reais e distintas. Logo, $Q(v)$ é positivo para alguns valores de v e negativo para outros.

Portanto, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ é positiva aem algumas direções e negativa em outras. $\square$

Observação 4.4.1. *No caso em que $B^2 - AC = 0$, o ponto crítico pode ser um ponto de mínimo local de f, um ponto de máximo local de f ou não satisfazer nenhuma dessas propriedades.*

A expressão $B^2 - AC$ utilizada no Teorema 4.4.2 é denominada **determinante ou discriminante da Matriz Hessiana** de f.

Tarefa 4.4.3. *Localize e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$.*

Solução. *De início, derivamos f em relação a x e em relação a y. Segue:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6x \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3.$$

Para encontrar os possíveis pontos críticos, pelo teorema (4.4.1), devemos fazer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \text{ ou } \boxed{x = 1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \Rightarrow 3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}. \end{aligned}$$

Portanto os possíveis pontos críticos são: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$. *Para classificar a natureza desses pontos, calculemos as derivadas parciais de segunda ordem de* f*, vejamos:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 0.$$

Usando o Teorema 4.4.2 nos possíveis pontos críticos, teremos:

- *No ponto* $(0,1):\ B^2 - AC = 36 > 0.$
- *No ponto* $(0,-1):\ B^2 - AC = -36 < 0 \ \text{ e } \ A = -6 < 0.$
- *No ponto* $(1,1):\ B^2 - AC = -36 < 0 \ \text{ e } \ A = 6 > 0.$
- *No ponto* $(1,-1):\ B^2 - AC = 36 > 0.$

Logo, f *assume um valor de máximo local no ponto* $(0,-1)$ *e um valor de mínimo local no ponto* $(1,1)$*. Os pontos* $(0,1)$ *e* $(1,-1)$ *são pontos de sela.*

Perceba que até aqui abordamos resultados referentes a extremos locais, vamos agora investigar as funções de um ponto de vista global, incluindo a fronteira do domínio. Para isso vamos definir valor extremo absoluto.

Definição 4.4.5. *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função real e* $(x_0, y_0) \in A$*. Dizemos que* $f(x_0,y_0)$ *é um máximo absoluto de* f *(respectivamente valor mínimo absoluto), se:*

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \ \text{ (respectivamente } f(x,y) \geq f(x_0,y_0)) \, , \ \forall \ (x,y) \in A$$

Essa definição é bem semelhante a definição dada sobre extremos locais, que focava somente os pontos interiores da região considerada. O teorema a seguir, conhecido como Teorema de Weierstrass, garante a existência de um valor máximo e mínimo absoluto.

Teorema 4.4.3 (Teorema de Weierstrass)**.** *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua num conjunto fechado e limitado* A*. Então* f *possui um valor máximo e um valor mínimo absoluto em* A*.*

Não faremos aqui a demonstração deste Teorema, ao leitor interessado consultar Lima (2004).

O Teorema 4.4.3 é de grande valia para assegurar a existência dos pontos extremos absoluto, embora não ofereça um critério de localização desses pontos. Para termos sucesso na localização dos pontos de máximo e mínimo absolutos devemos seguir alguns procedimentos práticos, tais como relacionar os pontos interiores do domínio da função com os extremos situados na fronteira do domínio. Por fim, compara-se os valores de f nesses pontos e chega-se a alguma conclusão.

Tarefa 4.4.4. *Encontre o máximo e o mínimo da função* $f(x,y) = (x-2)^2y + y^2 - y$ *definida em* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \leq 0 \text{ e } x+y \leq 4\right\}$*.*

Solução. *Como f é contínua em D (D é limitado e fechado), então o Teorema (4.4.3) garante que existem máximo e mínimo em D. Segue:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot (x-2) \cdot y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (x-2)^2 + 2y - 1.$$

Queremos o ponto onde essas derivadas parciais sejam zero, assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 2y(x-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x=2} \text{ ou } \boxed{y=0} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow (2-2)^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = \tfrac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, o ponto crítico no interior de D é $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$. A imagem da função f nesse ponto D é:

$$f\left(2, \frac{1}{2}\right) = (2-2)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}. \tag{4.19}$$

Agora vamos analisar o comportamento de f na sua fronteira. Segue:

- *Para $y = 0$, o intervalo $0 \leq x \leq 4$ a função é nula. De fato, se $y = 0 \Rightarrow f(x,y) = 0$, o mesmo acontece no intervalo $0 \leq x \leq 4$, pois os pontos no eixo x a ordenada y é zero.*

- *No segmento de reta $x = 0,\ 0 \leq y \leq 4$ a função f pode ser representada por:*

$$h(y) = f(0,y) = (0-2)^2y + y^2 - y = y^2 + 3y,\ 0 \leq y \leq 4.$$

Como h é estritamente crescente no intervalo $0 \leq y \leq 4$, então f tem um mínimo em $y = 0$ e um máximo em $y = 4$ (resultado do cálculo I). Assim,

$$h(0) = f(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad h(4) = f(0,4) = 4^2 + 3 \cdot (4) = 16 + 12 = 28.$$

Por fim, vamos comparar os valores obtidos:

$$f\left(2, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \leq f(0,0) = 0 \leq f(0,4) = 28.$$

Logo f assume um valor mínimo $-\frac{1}{4}$ em $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ e um valor máximo 28 em $(0,4)$.

4.4.1 ***Máximos e mínimos condicionados (Multiplicadores de Lagrange)***

Na tarefa (4.4.4), em dado momento restrigimos a função de duas variáveis a uma função com uma variável e encontramos os valores extremantes da função, contudo, isso não é aplicável a todos os casos. Abordaremos um método mais praticável quando a questão de extremos envolve condicionamentos.

Teorema 4.4.4. *Consideremos $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1, onde A é aberto e contém a curva C com equação $g(x,y) = 0$. Se $f(x,y)$ possui um valor máximo ou mínimo num ponto $(x_0, y_0) \in C$ e $g_x(x_0,y_0)$ e $g_y(x_0,y_0)$ são diferentes de zero, então vai existir um número real λ tal que*

$$\nabla f(x_0,y_0) + \lambda \nabla g(x_0,y_0) = 0. \tag{4.20}$$

Demonstração. Com efeito, se $\nabla f(x_0,y_0) = 0$, então basta considerar $\lambda = 0$ e o teorema estará demonstrado.

Consideremos então $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$. Como, por hipótese, $\nabla g(x_0,y_0)$ é não nulo, então pelo Teorema da Função Implícita[2] a equação $g(x,y) = 0$ define y como uma função diferenciável de x ou x como uma função diferenciável de y numa vizinhança de (x_0,y_0). Assim, uma parte de C contendo (x_0,y_0) pode ser parametrizada por $r(t) = (x(t), y(t))$, $a < t < b$, onde $r(t_0) = (x_0,y_0)$ e o vetor $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ é não nulo e tangente a C em (x_0,y_0).

Como $(x_0,y_0) \in C$ é um extremo de $f(x,y)$, então a função $F(t) = f(r(t)),\ a < t < b$, possui um extremo em $t_0 \in (a,b)$ e, por conseguinte, $F'(t_0) = 0$.

Utilizando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} 0 = F'(t_0) &= \frac{d}{dt}\left(f(r(t_0))\right) = \\ &= \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0) = \\ &= \nabla f(x_0,y_0) \cdot r'(t_0). \end{aligned}$$

[2] Ao leitor interessado, sugerimos consultar Pinto e Morgado (2015).

Como o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ é não nulo, então ele é perpendicular ao vetor tangente $r'(t_0)$ e, consequentemente, à curva C em (x_0, y_0).

Do fato de $\nabla g(x_0, y_0)$ ser também perpendicular à curva de nível C de equação $g(x, y) = 0$, então os dois gradientes são paralelos configurando a equação

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0.$$

$\square$

Vamos compreender melhor o que diz esse teorema. Uma das hipóteses do teorema nos dizem que em $(x_0, y_0) \in C$, C é uma curva que satisfaz a equação $g(x, y) = 0$, a função f possui um extremante nesse ponto. Se atentarmos para o gráfico de $g(x, y) = 0$ e traçarmos diversas curvas de nível $f(x, y) = p$, observando sempre quando C cresce. O maior valor de $f(x, y)$ na curva C de equação $g(x, y) = 0$ coincide com o maior valor p que intercepta a curva C, ou seja, a curva de nível em $(x_0, y_0) \in C$ é tangente e os gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são paralelos e supondo $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ vai existir um $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Esse teorema é um forte resultado matemático para localizar candidatos a valores extremos de uma função e é conhecido como multiplicadores de Lagrange, sendo λ esse multiplicador.

Vamos ver algumas tarefas para entender melhor a aplicação desse teorema.

Tarefa 4.4.5. *Determine os extremantes de $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrinção $x^2 + y^2 = 1$.*

Solução. *Vamos considerar $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Queremos descobrir os extremantes de f na região $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x, y) = 0\}$.*

Perceba que g é de classe C^1, pois suas derivadas de primeira ordem existem e são contínuas, e $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0) \in B$. Os candidatos a extremantes locais são os pontos que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Como $\nabla f(x,y) = (3,2)$*, assim:*

$$\begin{cases} (3,2) = \lambda \nabla g(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda 2x & (1) \\ 2 = \lambda 2y & (2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Considerando $\lambda \neq 0$*, então em (1) e (2):*

$$\boxed{x = \frac{3}{2\lambda}} \quad \text{e} \quad \boxed{y = \frac{2}{2\lambda}}$$

Substituindo esses valores de x *e* y *na equação (3) do sistema, teremos:*

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{2\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{13}{4\lambda^2} = 1$$
$$\Rightarrow 4\lambda^2 = 13 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{13}{4}} = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Para $\lambda = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$*, temos:*

$$\begin{aligned} \lambda 2x &= 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{13}}{2} 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \lambda 2y &= 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{13}}{2} 2y \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{13}}{13}. \end{aligned}$$

Assim, uma solução é $P_1 = \left(\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\ ,\ \dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.

Para $\lambda = -\dfrac{\sqrt{13}}{2}$*, realizando as contas de modo similar chegaremos em*

$$P_2 = \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}\ ,\ -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right).$$

Esses dois pares são os candidatos a extremantes locais. Como B *é compacto (fechado e limitado), então* $f(P_1) > f(P_2)$*, vejamos:*

$$\begin{aligned} f(P_1) &= 3 \cdot \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \frac{9\sqrt{13}}{13} + \frac{4\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13} \\ f(P_2) &= 3 \cdot \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \frac{-9\sqrt{13}}{13} - \frac{4\sqrt{13}}{13} = -\sqrt{13} \end{aligned}$$

Logo P_1 *é ponto de máximo e* P_2 *ponto de mínimo.*

Tarefa 4.4.6. *Encontre o ponto da curva C de equação $(1-x)^3 + y^2 = 0$ mais próximo da origem.*

Solução. *Como queremos investigar a vizinhança do ponto mais próximo da origem, para isto, consideremos a função distância*

$$f(x,y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

isto é,

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4.21}$$

Entretanto, minimizar a função (4.21) é equivalente a minimizar a função

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \tag{4.22}$$

Dessa forma, nosso objetivo é minimizar a função (4.22) sujeito a restrição $g(x,y) = (1-x)^3 + y^2 = 0$.

Observe que as derivadas parciais de primeira ordem de f e g existem e são contínuas, consequentemente, f e g são de classe C^1. Assim,

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = \left(-3(1-x)^2\ ,\ 2y\right).$$

Tomando $\nabla g(x,y) = (0,0)$, teremos

$$-3(1-x)^2 = 0 \Rightarrow (1-x)^2 = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

e

$$2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}.$$

Logo, $\nabla g(1,0) = (0,0)$ e mais, o ponto $(1,0) \in g(1,0) = 0$, ou seja, $(1,0)$ pertence a curva C.

Seja $(x,y) \in C$, tal que $(x,y) \neq (1,0)$. Então:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) &= 0 \\
\Rightarrow (2x, 2y) + \lambda\left(-3(1-x)^2, 2y\right) &= 0 \\
\Rightarrow (2x, 2y) &= -\lambda\left(-3(1-x)^2, 2y\right) \\
&= \left(3\lambda(1-x)^2, -2\lambda y\right).
\end{aligned}$$

Essa última igualdade e a restrição da questão resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x = 3\lambda(1-x)^2 & \text{(1)} \\ 2y = -2\lambda y & \text{(2)} \\ (1-x)^3 + y^2 = 0 & \text{(3)} \end{cases}$$

Na equação (2), temos:

$$2y = -2\lambda y \Rightarrow y + \lambda y = 0 \Rightarrow y \cdot (1+\lambda) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \text{ ou } \boxed{\lambda = -1}.$$

Se $y = 0$, então na equação (3) teremos

$$(1-x)^3 + 0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}.$$

Contudo, $x = 1$ não satisfaz a equação (1) do sistema, pois

$$2(1) = 3\lambda(1-1)^2 \Rightarrow 2 = 0$$

o que não é possível.

Se $\lambda = -1$, na equação (1) teremos:

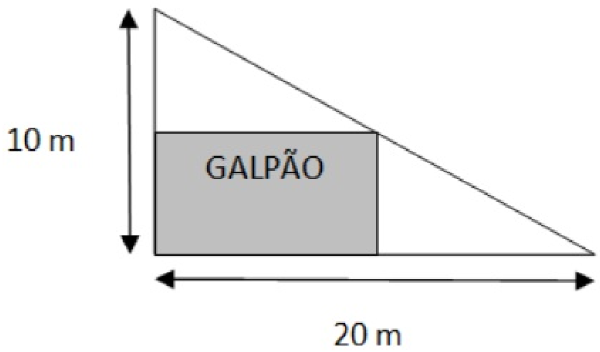
$$\begin{aligned} 2x = 3(-1)(1-x)^2 &\Rightarrow 2x = -3(1-x)^2 \\ &\Rightarrow -\frac{2x}{3} = (1-x)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{-\frac{2x}{3}} = \sqrt{(1-x)^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{-\frac{2x}{3}} = 1 - x. \end{aligned}$$

Assim, essa equação não terá solução real para todo x. Nesse caso, resta que a solução do problema é o ponto $(1,0)$, já que $f(1,0) = 1$ e se $(x,y) \in C$, então $x \geq 1$. Assim

$$f(x,y) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 1.$$

Tarefa 4.4.7. *Um galpão retangular deve ser construído em um terreno com a forma triangular conforme figura a seguir. Determine a área máxima possível para o galpão.*

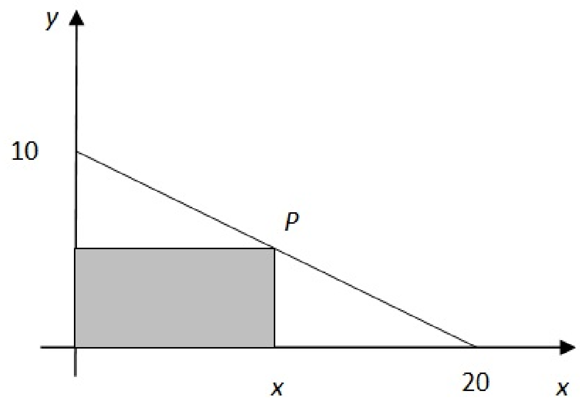
Figura 16 – Planta baixa do terreno



Fonte: Gonçalves e Flemming (2007)

Solução. *De início, vejamos um esboço geométrico dessa tarefa:*

Figura 17 – Esboço geométrico da Tarefa (4.4.7)



Fonte: Gonçalves e Flemming (2007)

A área do galpão é $A(x,y) = x \cdot y$. Perceba, pela figura anterior que representa o esboço geométrico da questão, que o ponto P pertence a equação da reta $x + 2y = 20$. Assim, queremos descobrir a área máxima de $A(x,y)$ sujeita a condição $g(x,y) = x + 2y - 20 = 0$. Segue do Teorema $(4.4.4)$:

$$\nabla A(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Rightarrow (y,x) = \lambda(1,2) \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda & \textit{(1)} \\ x = 2\lambda & \textit{(2)} \\ x + 2y - 20 = 0 & \textit{(3)} \end{cases}$$

Substituindo os valores das equações (1) e (2) na equação (3), teremos:

$$2\lambda + 2\lambda - 20 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 20 \Rightarrow \boxed{\lambda = 5}.$$

Dessa forma, substituindo esse valor de λ nas equações (1) e (2) chegaremos nos seguintes valores:

$$\boxed{y = 5} \quad \text{e} \quad \boxed{x = 10}.$$

Portanto, $A(10, 5) = 10 \cdot 5 = 50\ m^2 \hookrightarrow$ ***área máxima****.*

Esses problemas de encontrar extremantes sujeito a uma determinada condição podem ser expandidos e envolverem funções com três ou mais variáveis e uma restrição, duas ou mais restrições.

5 APLICAÇÃO DO PROJETO - UMA INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA EM SALA DE AULA

Os demais passos das atividades de Romberg, Coletar/Selecionar, Interpretar Evidências, Relatar resultados e Antecipar ações de outros, foi por nós conduzidos para completar a nossa pesquisa. Nesse sentido, o Terceiro Bloco de Romberg, após o Procedimento Geral posto em ação, evidências preliminares foram coletadas, selecionadas entre elas as que se relacionam diretamente ao nosso objetivo geral, e, então, os resultados obtidos foram relatados neste trabalho. Como diz Romberg (2007, p.97) “coisas que vierem antes e coisas que vêm após qualquer estudo particular são importantes”.

Dessa forma, nesse capítulo trazemos as descrições de como aconteceu a aplicação do projeto dessa pesquisa, uma etapa muito importante que colocou em prática todo um percurso de planejamento.

As primeiras seções trazem os instrumentos que foram utilizados para coletar os dados, as etapas do desenvolvimento dessa pesquisa sobre os sujeitos participantes, e, trazemos a descrição dos episódios-aula separados em dois momentos: observação e intervenção. No desenvolvimento dessas descrições será realizada uma análise inicial das atividades aplicadas e suas principais implicações.

Olsen (2015, p.19) afirma que “os resultados de pesquisa podem ser controversos, mas precisam se encaixar em um argumento que seja claramente enunciado, calcado em evidências e adequado para adicional discussão e desenvolvimento por outros.” Assim, é nesse capítulo que apresentaremos as evidências para sustentar os resultados dessa pesquisa.

5.1 Instrumentos de pesquisa

A coleta de dados foi realizada por meio de observações de aulas e encontros aulas. Como mencionado anteriormente, houveram duas etapas na coleta de dados: a observação de algumas aulas e a intervenção. Na etapa da observação, os instrumentos de pesquisa utilizados basicamente foram o caderno de campo do pesquisador, questionários e (em algumas aulas) a utilização do gravador de áudio. Na etapa da intervenção, que foi desenvolvido através de encontros aulas, os instrumentos de pesquisa foram as anotações no caderno de campo, gravações de áudios, questionários, registros das resoluções dos modelos matemáticos, seminários e filmagens.

Para uma melhor descrição dos instrumentos utilizados, a seguir faremos por tópicos um detalhamento:

- *Registros no caderno de campo do pesquisador*: esse instrumento foi utilizado em todas as etapas da coleta de dados, onde eram registradas as observações, falas de alguns alunos durante as aulas e outras informações. O maior volume de anotações ocorreu principalmente durante as observações, pois o professor-pesquisador estava concentrado apenas em observar, diferentemente de quando estava intervindo, onde dava para fazer anotações de todos os detalhes. No geral, essas anotações focavam nos diálogos aluno-aluno, aluno-professor, erros, dificuldades, estratégias de resoluções, etc.

- *Registros das resoluções dos modelos matemáticos trabalhados*: esses registros foram construídos na etapa da intervenção, quando foram propostos para os alunos alguns modelos matemáticos de acordo com os conteúdos abordados. Todos esses registros eram recolhidos antes da formalização do professor-pesquisador, e, alguns deles eram tarefas que ficavam para eles resolverem extraclasse, algumas dessas eram avaliações discretas que os alunos eram submetidos.

- *Questionário*: foram aplicados três questionários durante a coleta de dados, dois deles na etapa da observação e um no término das atividades. Todos foram aplicados individualmente e a identificação ficou a critério de cada aluno. Nesses questionários foram exploradas questões abertas, onde os alunos tiveram a oportunidade de expor suas percepções e críticas sobre o aprendizado ou as atividades propostas.

- *Gravador de áudio e filmagem*: Na observação apenas algumas aulas foram gravadas em áudio. Já nas aulas de intervenção foram todas, com o objetivo de não perder nenhumas das falas e poder realizar com mais clareza a análise dos dados. Em alguns encontros foram realizados filmagens.

- *Seminários*: em três encontros foram realizados seminários com os alunos, envolvendo o conteúdo de Integrais Múltiplas. O motivo foi devido aos meses de outubro e novembro terem muito dias que não houveram aula, por causa de feriados e eventos na universidade, que ocorreram em dias das aulas da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, atrasando o fluxo dos conteúdos. A parte de Integração não foi possível abordar. Então, foi sugerido que os alunos apresentassem alguns conceitos importantes desse conteúdo.

5.2 Descrições do desenvolvimento da pesquisa

O desenvolvimento dessa pesquisa ocorreu basicamente em três importantes etapas:

1. Levantamento bibliográfico, estudo e preparação das modelos matemáticos e as observações;
2. Coleta de dados;
3. Descrição e análise de dados de cada encontro.

Levantamento bibliográfico, estudo e preparação dos modelos matemáticos e observações

O levantamento bibliográfico foi a primeira atividade da pesquisa onde foram levantados os trabalhos já realizados por outros autores acerca das FVV. Essa atividade começou ainda quando o pesquisador estava cursando a disciplina obrigatória do mestrado Metodologia da Pesquisa. Além dos trabalhos envolvendo o conteúdo de FVV buscamos também alguns envolvendo modelagem matemática e outros temas adjacentes como ensino e aprendizagem no âmbito superior.

Na atividade de estudo e preparação dos modelos matemáticos, empregou-se muito esforço nas análises de diversos livros didáticos que abordam as FVV e dedicação para encontrar os modelos que se adaptavam e agregavam às exigências da pesquisa. A escolha dos livros se deu com base em dados da biblioteca do campus que apontam esses como os mais utilizados pelos alunos, com exceção de um que foi uma escolha conjunta entre o pesquisador e o orientador. Além dessa análise, desenvolvemos uma espécie de apostila, sintetizando os conteúdos que abordaríamos durante a intervenção e listando diversos modelos matemáticos, separadas por conteúdo, para posteriormente aplicar na intervenção. Outra atividade desenvolvida nessa primeira etapa foi a observação de oito aulas ministradas pela professora da disciplina CDI-III.

Coleta de dados

A pesquisa de campo (ou coleta de dados, como alguns denominam) ocorreu no segundo semestre de 2018 em uma turma da disciplina titulada como CDI-III no curso de Licenciatura Plena em Matemática de uma universidade pública localizada no interior do estado da Paraíba. O motivo da escolha dessa universidade foi pelo fato deste pesquisador de já ter lecionado nessa instituição e residir na mesma cidade onde ela se situa.

Essa disciplina onde aconteceu, a pesquisa de campo, possui uma carga horária de 60 horas, distribuídas em aulas que ocorriam nas segundas e terças, no horário das 10h até as 12h da manhã.

O período da pesquisa de campo ocorreu em oito encontros durante a etapa de observação e dez encontros durante etapa da intervenção. Cada encontro era composto por duas aulas com duração de 1 hora.

5.3 Caracterizações dos sujeitos

Os sujeitos participantes dessa pesquisa eram todos alunos regulares do quarto período diurno do curso de Licenciatura Plena em Matemática, os quais estavam cursando a disciplina CDI-III pela primeira vez. Haviam matriculados no sistema nove alunos, sendo que desses frequentavam apenas oito, sendo quatro homens e quatro mulheres.

Desses alunos, um já lecionou no Ensino Fundamental (anos finais); uma já foi Monitora de Informática; um aluno fazia parte da Residência Pedagógica e seis participam do PIBID,[1].

Todas as aulas ocorreram na sala de número A8, esta possuía um espaço amplo para a pouca quantidade de alunos, havia televisão, aparelho de DVD e datashow, este último estava em manutenção, mas nas aulas foi utilizado outro cedido pela coordenação do curso. O quadro era bem amplo e essa sala era climatizada.

[1] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

Para cursar a disciplina CDI-III (esta não sendo requisito paranenhuma disciplina posterior), exige-se como pré-requisito a disciplina CDI-II.

5.4 Levantamentos de dados

Para identificação dos alunos participantes dessa pesquisa, será nomeado por ordem alfabética do diário no seguinte estilo: $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Essa maneira visa preservar, por questões éticas, a identidade dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

As atividades foram realizadas durante as aulas da disciplina de CDI-III, de modo que os temas abordados obedeceram ao fluxo sequencial dos conteúdos de acordo com o cronograma da disciplina em questão.

Para a efetivação das atividades, os alunos foram organizados em pequenos grupos de forma espontânea, não havendo nenhuma interferência nesse sentido por parte do pesquisador na formação dos grupos. Com exceção das entrevistas, todas as atividades foram realizadas em grupos, favorecendo o diálogo e cooperação nas discussões entre os alunos na construção do conhecimento.

Abaixo, traremos a tabela 6 que mostra a sequência de atividades desenvolvidas na etapa da intervenção em cada encontro/aula.

Tabela 6 – Roteiro dos encontros/aula

Encontro e data	**Atividade**	**Conteúdo(s)**	**Algumas ideias matemáticas trabalhadas**
1º encontro 22/10/2018	Modelo matemático 1	Regra da cadeia	Composição de funções; Derivadas parciais; Diferenciabilidade.
2º encontro 23/10/2018	Formalização e continuação sobre Regra da Cadeia; Abordagem sobre Vetor Gradiente e iniciar o Modelo 2.	Regra da Cadeia; Vetor Gradiente.	Composição de funções; Derivadas parciais; Vetores; Diferenciabilidade; Proporcionalidade; Distância de pontos no plano.

(continua)

Encontro e data	**Atividade**	**Conteúdo(s)**	**Algumas ideias matemáticas trabalhadas**
3º encontro 30/10/2018	Modelo 2 (continuação); Formalização do conteúdo; Modelo 3 (como tarefa extra-classe).	Derivadas direcionais	Proporcionalidade; Distância de pontos no plano; Derivadas Parciais; Produto escalar entre vetores; Vetor gradiente; Posições e orientações no plano.
4º encontro 05/11/2018	Continuação da Formalização do conteúdo; Modelo 5 (Deixei como tarefa extra-classe).	Derivadas direcionais	Derivadas Parciais; Produto escalar entre vetores; Vetor gradiente; Posições e orientações no plano.
5º encontro 06/11/2018	Modelo 4; Formalização do conteúdo	Extremantes de uma FVV	Derivadas parciais; Máximo e mínimo local e global de uma FVV; Condição necessária para extremo local; Teste da deriava segunda; Matriz Hessiana.
Aula 12/11/2018 Foi ministrada pela professora da disciplina e não entrará na contagem dos encontros/aula.	Aula de esclarecimentos de dúvidas sobre a lista de exercício.	Regra da cadeia; Vetor Gradiente; Derivadas direcionais; Extremantes de uma Função de Várias Variáveis; Multiplicadores de Lagrange.	Composição de funções; Derivadas parciais; Diferenciabilidade; Derivadas dieracionais; Máximo e mínimo local e global de uma F.V.V.; Condição necessária para extremo local; Teste da deriava segunda; Matriz Hessiana; Multiplicadores de Lagrange.
6º encontro 19/11/2018	Concluir a formalização do Modelo 4; Modelo 5	Extremos de uma FVV	Máximo e mínimo local e global de uma F.V.V.; Condição necessária para extremo local; Teste da deriava segunda; Matriz Hessiana.
7º encontro 26/11/2018	Seminário sobre Integrais com FVV	Integrais Múltiplas; Integrais por coordenadas polares.	Propriedades das Integrais; área e volume de sólidos; Trigonometria e outros.

(continua)

Encontro e data	Atividade	Conteúdo(s)	Algumas ideias matemáticas trabalhadas
8º encontro 27/11/2018	Seminário sobre Integrais com FVV	Integrais por coordenadas cilíndricas e esféricas.	Propriedades das Integrais; área e volume de sólidos; Trigonometria e outros.
9º encontro 03/12/2019	Seminário sobre Integrais com FVV	Integrais de superfície; aplicação do questionário.	Propriedades das Integrais; área e outros.

Fonte: dados do pesquisador

5.5 Descrições dos episódios/aula da pesquisa: análise e discussões

Goldenberg (2003, p.53) assegura que uma pesquisa de caráter qualitativo “consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos”. Bogdan e Biklen (1994, p.48) afirmam que “os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudos porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência”.

Nesse sentido, pretendemos realizar uma descrição analítica de como os alunos interagiram diante de um processo de ensino-aprendizagem de alguns conceitos da disciplina FVV em um ambiente com Modelagem Matemática. Olsen (2015, p.16): “um bom pesquisador científico é capaz de gerar ou criar conjuntos de dados que sejam úteis para argumentos científicos”. Dessa forma, essa descrição analítica estará voltada para os principais fatos ocorridos durante as aulas, tais como os diálogos aluno-aluno, aluno-professor e o desenvolvimento das atividades que foram propostas.

A coleta de dados efetivou-se em duas etapas: no primeiro momento observamos algumas aulas da professora titular da disciplina e no segundo momento realizamos uma intervenção nessa turma por se tratar de um motivo circunstancial, não previsto, quando começamos a projetar e pensar essa pesquisa.

O nosso intuito era realizar na etapa da coleta de dados um curso de extensão para tal procedimento. Para isso, construímos o projeto de extensão e levantamos quase toda a documentação burocrática exigida para implementação do mesmo, porém, detectamos uma realidade que colocou em dúvida a viabilidade de executar tal projeto.

O curso de Licenciatura em Matemática no campus onde realizamos a coleta de dados funciona no turno matutino e noturno, tendo um maior público no turno noturno. Diante disso, pensávamos em executar o curso de extensão no turno vespertino, onde agregaria alunos dos dois turnos. Contudo, não previmos que boa parte dos alunos desse curso são de cidades vizinhas e que sua maioria só consegue se locomover para universidade nos turnos que frequentam suas aulas.

Diante dessa possibilidade de não haver alunos suficientes para executar o projeto de extensão, repensamos o procedimento de coleta de dados da pesquisa e vimos que o mais conveniente naquela altura da pesquisa era aplicar essa coleta em uma turma regular do curso de matemática. De imediato levantamos as informações para ver se havia alguma turma cursando CDI-III (disciplina que aborda o conteúdo objeto dessa pesquisa) e vimos que havia uma no turno matutino. Entramos em contato com a professora dessa disciplina e falamos da nossa pesquisa, a qual se prontificou de nos ajudar e imediatamente concedeu autorização para aplicarmos a coleta de dados em sua turma. Como já havia iniciado o semestre letivo e os conteúdos já estavam em andamento, percebemos a necessidade de haver um momento para observar e situar qual seria a ocasião certa para intervir e coletar os dados necessários para atingir os objetivos da pesquisa.

Sendo assim, explicado o motivo da realização dessas duas etapas na coleta de dados, iremos a seguir este trabalho descrevendo como ocorreu cada episódio, tanto nas observações quanto nas intervenções. Vale salientar que a descrição das aulas observadas serão breves e panorâmicas, apenas com o intuito de situar o andamento dos conteúdos e alguns aspectos que chamaram mais atenção. Nas descrições dos episódios-aula da intervenção seremos mais analíticos.

5.6 Episódios/aula da observação

Primeira Observação

Às 10h e 12min do dia 20 de agosto de 2018, deu-se início a primeira observação, onde nessa ocasião houve um comparecimento de 8 alunos. As primeiras falas da professora foram para combinar futuras datas para a primeira avaliação da II unidade.

Essa aula era o fechamento do conteúdo de continuidade e início de derivação de funções vetoriais. Havia ficado uma questão para examinar se a função era contínua, porém nenhum aluno resolveu essa questão. Ela deu alguns minutos para os alunos discutirem e em seguida resolveu a questão, esclarecendo algumas dúvidas.

Dando prosseguimento à aula, definiu derivada de uma função vetorial, os alunos atentamente tomam as notas de aulas e o silêncio pairava na sala. A professora quebra o silêncio falando da presença do pesquisador na sala de aula e deu um breve espaço que o mesmo se apresentasse e falasse da pesquisa que seria desenvolvida, o mesmo fez de forma bem rápida para não interromper o fluxo da aula.

Em seguida, a professora fez alguns exemplos, explorou a interpretação geométrica da derivada com função vetorial, abordou suas principais propriedades, algumas realizando suas respectivas demonstrações, tais como a propriedade da derivada do produto escalar de duas funções.

Basicamente essa foi a estrutura principal dessas aulas, onde ficou notável que os alunos tinham dificuldades operatórias básicas no que tange algumas propriedades das derivadas. A professora expôs bem o conteúdo, em alguns momentos repetindo o procedimento, contudo, o ritmo de compreensão para alguns alunos dessa turma não era tão rápido.

Segunda observação

Essa aula iniciou às 10h e 10min do dia 27 de agosto de 2018. Inicialmente só havia duas alunas presentes, contudo, os demais foram chegando aos poucos, totalizando em sete alunos. Antes da professora iniciar sua aula foi pedido permissão pelo pesquisador para que no término dessas aulas pudesse aplicar um questionário para os alunos, sendo prontamente atendido.

O objetivo dessa aula era tirar dúvidas a respeito de uma lista de exercícios que abordavam todos os conteúdos que cairiam na avaliação. Os alunos tinham muitas dúvidas e a professora os atendia obedecendo a sequência proposta na lista. As primeiras questões tratavam de dada uma situação prática, deduzir ou construir a função de várias variáveis que expressasse uma fórmula e em cima dessa função calcular algo.

Outras questões envolviam domínio e imagem de FVV, bem como a representação gráfica dos domínios. Nessas questões a professora incentivou que os alunos utilizassem algum software gráfico, sugerindo o Geogebra. Os alunos solicitaram que a professora explicasse a questão que trazia a seguinte função: $z = \dfrac{x}{y^2+1}$. Após algumas discussões chegaram na seguinte resposta: $D(z) = (x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 + 1 \neq 0.$

As demais questões abordavam derivadas de funções vetoriais, e devido a falta de tempo ela optou por deixar essas questões para aula seguinte, que seria no dia 28/08/2018. Assim, ela cedeu espaço para que o pesquisador aplicasse o questionário. Os alunos interagiram bastante nessa aula, contudo, havia alguns homens trabalhando no campus, devido às proximidades da semana acadêmica e o barulho acabou atrapalhando um pouco o andamento.

Terceira observação

Às 10h e 08min do dia 10 de setembro de 2018 teve início a terceira observação. Na semana anterior havia acontecido à semana acadêmica no campus e por isso não houve aula.

A professora iniciou sua aula entregando a avaliação realizada na aula anterior e corrigiu juntamente com os alunos, tirando algumas dúvidas e dando um desfecho nesses conteúdos abordados que em sua maioria carregava conceitos relacionados às funções vetoriais.

Após essa correção iniciou o estudo sobre o capítulo que tratava de Limites e Continuidade de FVV. A professora começou abordando alguns conceitos básicos da topologia no $\mathbb{R}^2$ (ponto interior e de fronteira, conjunto aberto, conjunto fechado, etc.). Neste sentido, havia uma reclamação comum entre os alunos que era a falta de livros, pois devido à greve dos agentes administrativos a biblioteca não estava funcionando.

Os alunos em sua maioria se preocupavam mais em copiar o que a professora escrevia na lousa do que atentar nas explicações. Havia uma falta de uma conexão entre os elementos topológicos da reta, os quais os alunos já estão mais familiarizados, e os elementos então abordados concernentes ao plano. Desta forma, podemos citar um exemplo: se iria explicar sobre conjunto aberto no $\mathbb{R}^2$, interligava com o conceito de intervalo aberto que os mesmos já conhecem.

Quarto encontro

Nesse dia não ocorreu às aulas, pois houve no campus das 10 às 12 horas uma reunião com os postulantes ao cargo de diretor de centro. Então, todos os professores, alunos e funcionários iriam participar dessa reunião.

Quinto encontro

Às 10h e 11min do dia 17 de setembro de 2018 deu-se início à aula, estando presentes seis alunos. A professora iniciou a aula dando continuidade à abordagem topológica, enfatizando o conceito de conjuntos conexo e/ou simplesmente conexo e também sobre fronteira de um conjunto. Particularmente houve ausência de uma noção mais clara sobre vizinhança, sem isto os alunos teriam dificuldades para entender ponto de acumulação que influencia bastante na compreensão de limites.

Dando prosseguimento, a professora definiu ponto de acumulação e em seguida limites de FVV. Na explicação a professora fez algumas comparações com a definição de limites com função de uma variável. Finalizando, resolveu algumas questões e exemplos evolvendo limites de FVV.

Sexto encontro

Essas aulas ocorreram no dia 18 de setembro de 2018, por motivos pessoais o pesquisador chegou um pouco atrasado, por volta das 10h e 20min e já havia iniciado a aula. A professora combinava com os alunos sobre o cronograma da disciplina. Em seguida expõe a proposição que assegura se os limites são distintos por algum caminho em torno de um ponto, então não existe o limite naquele determinado ponto.

Depois propôs para os alunos resolverem a seguinte questão: Prove que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Os alunos de início tiveram bastante dificuldade, a professora tirou individualmente algumas dúvidas e estes começam a entender. Começou a ecoar vozes como: "*Professora, agora entendi*". Outras vozes também como "*eu coloquei no eixo x*", ou, "*eu coloquei no eito y*" para enfatizar o caminho escolhido para calcular os limites.

Em seguida a professora expôs sua resolução calculando o limite quando (x, y) se aproximava do ponto $(0, 0)$ escolhendo o caminho através de $y = \sqrt{x}$. Assim sua resolução ficou:

$$\lim_{(x,y)\to(0,\sqrt{x})} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,\sqrt{x})} \frac{x(\sqrt{x})^2}{x^2+(\sqrt{x})^4} = \lim_{(x,y)\to(0,\sqrt{x})} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,\sqrt{x})} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Se $(x, y) \to (0, 0)$ pelo caminho $y = 0$, ou seja pelo eixo x, teremos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,\sqrt{x})} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0.$$

Como os limites são distintos, logo não existe o limite no ponto considerado.

Os alunos começaram a enxergar as infinitas possibilidades de caminhos a se tomar para calcular esses limites, uma aluna explanou "*se colocar y=x dá o mesmo resultado*", a professora veio e verificou que havia um erro de cálculo, contudo mesmo com esse equívoco a aluna percebeu outros caminhos que poderiam ser explorados. Acredito que a professora deveria ter fomentado mais essa discussão para que os demais alunos também chegassem a esse entendimento. Dando prosseguimento a professora abordou as propriedades de limites, em algumas fazendo suas demonstrações. E com isso terminou a aula.

Essa aula abordou um conteúdo muito importante para o entendimento de conceitos futuros a serem abordados, como derivadas direcionais. Houve uma falta de analogias com o CDI-I, por exemplo, comparar sobre o fato de no limite envolvendo funções de uma variável tínhamos apenas uma direção e dois sentidos de aproximação para verificar a existência desse limite, agora com FVV temos infinitas direções ao longo de um ponto para calcular esse limite. De acordo Imafuku (2008), esses detalhes são importantes para compreender essa expansão de conceitos.

Sétimo encontro

Essa aula teve início às 10h e 09min do dia 24 de setembro de 2018. Estavam presentes oito alunos e a professora iniciou a aula com uma proposição que tratava do limite de composições de funções, mostrando alguns exemplos. Em seguida deixou esse limite para os alunos resolverem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \sin x + y$$

Apenas um estudante conseguiu resolver de imediato, os demais tiveram dificuldades, logo em seguida a professora fez a resolução.

Dando continuidade a professora abordou uma proposição que trata sobre o produto de uma função de limite zero e outra limitada, onde resulta num limite igual a zero. Fez um exemplo e deixou uma questão para os alunos mostrarem que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

Os alunos não conseguiram resolver e assim a professora fez a resolução, considerando duas funções $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)}$ e em seguida mostrou que o limite da primeira função é igual a zero quando $(x,y) \to (0,0)$. Para mostrar que a função $g(x, y)$ era limitada ela utilizou coordenadas polares, contudo os alunos não lembravam dessas mudanças de variáveis.

Prosseguindo, ela começou a abordagem em limites envolvendo indeterminações e nesse quesito a professora fez bastantes comparações com o CDI-I para explicar que com as FVV o processo seria semelhante. Em seguida deixou para os alunos calcularem o seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^3 + x^2y - 2xy - 2x^2 - 2x + 4}{xy + x - 2y - 2}.$$

Os alunos tiveram como esperado dificuldades com as manipulações algébricas que são utilizadas para retirar as indeterminações e a professora teve que auxiliar.

Dando continuidade, a professora definiu sobre continuidade e finalizou a aula deixando uma questão para os alunos verificarem a continuidade da seguinte função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Oitavo encontro

Às 10h e 13min do dia 01 de outubro de 2018 tiveram início essas aulas com a presença de sete alunos. Essa foi uma aula devotada para esclarecimentos de dúvidas a respeito de uma lista de exercício sobre limites de funções. A professora destacou apenas as questões que houve muitas divergências de resultados por parte dos alunos.

As maiores dúvidas residiam nas indeterminações, onde necessitava de manejos algébricas e quando solicitava para mostrar o limite via definição. No final dessa aula apliquei um questionário para ver quais as visões que os alunos adquiriram ao estudarem limites com FVV. Segue abaixo a pergunta e algumas respostas selecionadas.

Com isso terminamos essas observações e chegou ao conteúdo que projetamos nossa intervenção, que foi às derivadas parciais. Essa etapa foi fundamental para conhecer melhor o perfil da turma, seu ritmo, as dificuldades e assim poder balizar a próxima etapa que é o objetivo maior nessa pesquisa.

5.7 Os encontros/aula da pesquisa: descrição e análise

Nesta seção faremos uma descrição analítica dos encontros/aula ocorridos, procurando registrar os fatos sucedidos nesse período que ficaram mais evidentes. Essa etapa era um momento crucial da pesquisa e para chegar nesse ponto houve um árduo trabalho no sentido de selecionar os modelos chave para cada encontro, o que requereu uma demanda para analisar diversos livros com o objetivo de encontrar as questões que adequasse no estilo e exigência da nossa pesquisa.

Dessa forma, propomos relatar de formar detalhada como ocorreram esses encontros/aula, sempre dispondo em analisar e interpretar os fatos que ficaram mais em evidência no intuito de responder à pergunta problemática dessa pesquisa: **Quais as principais contribuições a serem produzidas nos alunos de Licenciatura em Matemática diante do ensino-aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral - III relativo às Funções de Várias Variáveis através de Modelos Matemáticos?**

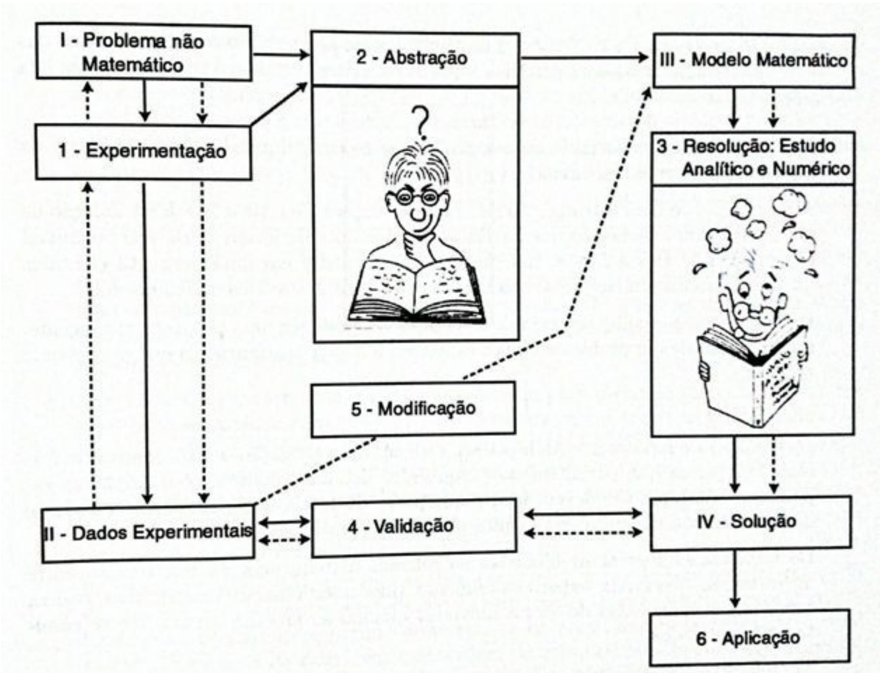
ENCONTRO/AULA 1: Breve reflexão sobre ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática e a situação-problema do besouro

Esse primeiro encontro/aula ocorreu no dia 22 de outubro de 2018, iniciando por volta das 10h e 30 minutos na sala A8 no CCHE da UEPB, na cidade de Monteiro. Estavam presentes nesse encontro sete alunos, a professora da disciplina CDI-III e o professor-pesquisador. Essa aula começou com cerca de trinta minutos de atraso devido a professora ter usado esse tempo para concluir algumas pendências da aula anterior.

Como o professor-pesquisador já havia lecionado para estes alunos enquanto professor substituto na referida Instituição e já havia observado diversas aulas anteriormente, iniciou retomando a conversa sobre a pesquisa a ser desenvolvida. Dito retomando porque já havia, na etapa da observação, dado uma breve explanação sobre a tal pesquisa de mestrado, porém, agora a discussão foi mais aprofundada sobre o que seria um ensino-aprendizagem no contexto da Modelagem Matemática.

Nesse sentido, houve uma breve apresentação dos conceitos atrelados à Modelagem Matemática abordando um importante teórico nessa área e que é um dos lastros principais da nossa pesquisa: Rodney Carlos Bassanezi. Nessa abordagem focamos nos passos ou atividades intelectuais que devem orientar a sequência de atividades a serem desenvolvidas quando se pretende modelar matematicamente uma situação ou problema real. Para isso, exploramos em um dos slides a seguinte figura síntese.

Figura 18 – Esquema das etapas do processo de Modelagem Matemática



Fonte: Bassanezi (2014, p. 27)

Após explicar cada uma dessas seis etapas ficou esclarecido para os alunos que trabalharíamos uma modelagem mais voltada para sala de aula, o que segundo o próprio Bassanezi denomina de Modelação. Neste sentido, apresentou-se a ideia inicial que era trabalhar com problemas reais que demandasse as FVV para interpretar-lo matematicamente, ou seja, dada uma situação e a partir da observação e experimento construir alguma função dessa espécie. Contudo, muitos problemas dessa natureza demandam uma matemática que foge da ementa proposta pelo curso de Matemática para a disciplina CDI-III, e como o curso é regular não se podia fugir e sim cumprir a ementa. Dessa forma, ficou evidenciado que trabalharíamos situações-problemas teóricas retiradas de alguns livros didáticos.

Após esclarecer esse detalhe, também houve explicação que inicialmente poderia haver algum estranhamento, pois inverteríamos a sequência usualmente seguida no ensino tradicional (conteúdo $\rightarrow$ exemplos $\rightarrow$ exercícios $\rightarrow$ aplicações), começando agora por alguns modelos matemáticos (que pode ser visto como uma aplicação) e culminando da formalização de algum conteúdo. A estudante A_8 disse de forma irônica: "*o professor quer deixar logo a gente doida*". Já A_7 solicitou: "*professor, pega leve*". Então ficou dito que o propósito não era dificultar e sim, abordar novas estratégias de ensino-aprendizagem.

Em seguida foi solicitado que formassem dois grupos, como havia sete alunos, foi organizado em um grupo com quatro alunos e outro grupo com três. Logo em seguida distribui-se para cada componente do grupo o Modelo 1, retirada do livro de Pinto e Morgado (2015).

Modelo 1
A temperatura de $T(x, y)$ graus centígrados em cada ponto (x, y) de uma chapa de metal não varia com o tempo. Um besouro atravessando a chapa está em $(x, y) = \left(t^2 + 1, 3t\right)$ no instante t. A temperatura tem as propriedades:

$$T(5,6) = 40, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(5,6) = 4 \ \text{ e } \ \frac{\partial T}{\partial y}(5,6) = -2$$

Qual a taxa de variação dessa temperatura em relação ao tempo no instante $t = 2$?

Juntamente com esse modelo foi entregue para cada estudante presente nessa aula uma espécie de apostila que continha os conteúdos necessários para a resolução desse problema e dos demais que seriam abordados no decorrer dos encontros/aula. Essa apostila era um resumo contendo definições, teoremas e tarefas dos conteúdos envolvendo as FVV que variavam desde Derivadas Parciais até Máximo e Mínimo (locais e globais).

Após entregar para cada grupo o modelo proposto e as apostilas foi solicitado que os alunos lessem o problema, discutissem entre colegas e depois explorassem a apostila na seção que tratava da regra da cadeia. Eles iniciaram a discussão e houve uma observação com o intuito de registrar alguma fala ou discussão entre eles.

O primeiro questionamento foi feito pelo aluno A_2, que a priori interpretou que havia um erro no enunciado da questão e questionou: "*se ela não varia com o tempo, por que tem que dizer a taxa de variação?*" Esse "*ela*" presente na pergunta do aluno era referente à função temperatura $T(x, y)$ e em seguida ele não entendia a indagação final da questão, que pedia para calcular a taxa de variação no instante $t = 2$. Então relendo juntamente com esse estudante e os demais do grupo buscou-se compreender que a função temperatura era constante em cada ponto da chapa, ou seja, nesses pontos a temperatura não variava com o passar do tempo.

O que ficou claro nessa indagação desse aluno é que ele não havia compreendido que existia uma composição de funções nessa situação-problema. A função temperatura T descrevia a temperatura em cada ponto (x, y) da chapa. Por outro lado, o percurso do besouro nessa chapa é dado em função do parâmetro t, ou seja, $x(t)$ e $y(t)$. Essa percepção os alunos não conseguiram abstrair.

Os alunos continuaram tentando resolver, mas o foco era em derivar ou substituir valores que não tinham nexo e apenas refletiam que boa parte dos alunos enfatiza a mecânica sem buscar uma compreensão. Evidente que o conteúdo ainda não havia sido formalizado, mas o desespero por resultado fazia os alunos forçarem operações sem a mínima compreensão da questão como um todo.

Apesar das dicas e alguns esclarecimentos percebeu-se que os alunos não estavam conseguindo e o tempo estava passando rápido, então a a folha de resposta foi recolhida dos grupos e iniciou-se a resolução por etapas. A primeira etapa era entender a composição de funções que existia e após algumas explicações os alunos conseguiram entender que a temperatura em cada instante é dada por:

$$z(t) = T(x(t), y(t)), \text{ onde } x(t) = t^2 + 1 \text{ e } y(t) = 3t.$$

Ao chegar nesse ponto, discutiu-se sobre o que seria calcular a taxa de variação dessa função em cada instante de tempo t, e logo os alunos compreenderam que deveriam derivar essa função. O professor-pesquisador indagou: “*quando existe composição de função qual regra de derivação utilizar?*” Os alunos de imediato afirmaram que deviam utilizar a regra da cadeia. Vale salientar que eles haviam estudado, algumas aulas anteriores dessa disciplina, a regra da cadeia com funções vetoriais, o que foi bastante explorado para fazer um elo ao estender essa regra para FVV.

A próxima etapa foi expor em slide o teorema que abordava a regra da cadeia para FVV, em particular, começou-se com duas variáveis. Tudo o que foi exposto nos slides de apresentação havia sido retirado da apostila entregue logo no início, dessa forma facilitaria o acompanhamento dos alunos que não precisariam tomar notas de aulas e com isso ganharíamos tempo na formalização dos conteúdos. O teorema exposto abaixo foi retirado da apostila que foi entregue para os alunos.

Começamos a formalizar Regra da Cadeia com FVV explicando o teorema ilustrado abaixo, retirado de Pinto e Morgado (2015, p.104).

> Sejam $z = f(x,y)$ uma função definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\sigma(t) = (x(t), y(t))\,,\ t \in\ I$, tal que $\sigma(I) \subset U$. Se $\sigma(t)$ é diferenciável em $t_0 \in I$ e $f(x,y)$ é diferenciável em $\sigma(t_0) = (x_0, y_0)$, então a função composta $z(t) = f(\sigma(t))\,,\ t \in\ I$, é diferenciável em t_0 e
>
> $$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\,\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\,\frac{dy}{dt}(t_0).$$

Após explicar a importância das hipóteses desse teorema, a tese e a sua mecânica através dos diagramas foi percebido pelo olhar dos alunos, que não estavam compreendendo. Assim, mostrou-se algumas tarefas e juntos apontava para a resolução, passo a passo, e aos poucos eles começaram a entender o funcionamento desse teorema. Uma das tarefas, retirada de Pinto e Morgado (2015), foi a seguinte:
Tarefa: Sejam $z = f(x,y) = x^3y^2$, $x(t) = e^{-t}$ e $y(t) = t \sin t$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}(t)$.

Em seguida, foi pedido que eles retomassem a situação-problema inicial, porém o tempo da aula estava no limite, faltando apenas 15 minutos para seu término. Dessa forma, ficou concluído de forma bem acelerada a resolução.

A percepção enquanto professor-pesquisador desse encontro/aula foi que a parte inicial fluiu bem, principalmente a exposição sobre ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática e suas etapas. Em relação ao modelo trabalhado não houve surpresa os alunos não conseguirem ter resolvido ou chegado próximo da resolução, já era esperado essa dificuldade pelo fato dessa turma está habituada com o estilo de aula usual. Sendo assim, não é considerado que esse insucesso na resolução seja um ponto negativo, pois os alunos estão acostumados em receberem as informações prontas e apenas treinar seu processamento.

Em relação aos grupos ficou notável que alguns alunos interagem pouco, ficam só ouvindo e pouco contribui no processo de construção das soluções. Vale salientar que a formação dos grupos não teve nenhuma interferência na pesquisa, os alunos tiveram total autonomia na formação desses. Mesmo assim, a interação entre eles, inicialmente, foi tímida e havia muito medo do erro, mostrando uma falta de confiança e também a perpetuação dessa cultura que prevalece nos cursos de matemática.

É importante aqui destacar um ponto bastante negativo desse encontro/aula, que foi a administração do tempo. Embora o planejamento feito para esse encontro fosse de duas horas aula, no início já houve um imprevisto de 30 minutos tomado pela professora titular dessa turma, como já mencionei no começo. Ademais, foi esperado os alunos resolverem o modelo matemático, porém, o professor-pesquisador poderia ter antecipado mais as intervenções. Com isso, as etapas finais ficaram muito atropeladas e estas são de fundamental importância em um ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.

ENCONTRO/AULA 2: ampliando a discussão sobre Regra da Cadeia e Vetor Gradiente

Essa aula ocorreu no dia 23 de outubro de 2018, em uma terça-feira e teve início por volta das 10h e 15min. Estavam presentes sete alunos, a professora titular da disciplina e o professor-pesquisador. Como relatamos no encontro/aula anterior, por conta do tempo, no final da aula adiantamos a etapa da validação do resultado obtido e concluímos de forma muito rápida. Sendo assim, planejamos para esse encontro retomar a etapa final da situação-problema, expandir a formalização da Regra da Cadeia e abordar o conceito de Vetor Gradiente.

Vale salientar aqui que nesse encontro/aula, com exceção da atividade no final da aula, utilizamos uma metodologia usual de ensino através da exposição. Optamos fazer assim para dar celeridade nos conteúdos. Quem leciona em cursos regulares sabe que a ementa deve ser cumprida e no caso dessa turma a sequência dos conteúdos estavam atrasados por motivo principalmente dos feriados. Dessa forma, destacamos os conteúdos principais para trabalhar aspecto da modelagem e outros de menor expressão optamos por aulas usuais.

Começamos escrevendo a função que tínhamos construído, a saber:

$$z(t) = T(x(t), y(t)), \text{ onde } x(t) = t^2 + 1 \text{ e } y(t) = 3t.$$

Foi apresentado novamente, em rápidas palavras, o teorema e de forma enfática o aplicamos na função que descrevia o problema. Os alunos participaram mais e mostram que havia entendido o funcionamento da regra da cadeia nesse caso. Apenas uma aluna que não tinha vindo na aula anterior que teve mais dificuldades.

Logo em seguida abordamos a Regra da Cadeia para um novo caso, isto é, quando existisse uma função definidas em superfícies do tipo $z = f(x, y, z)$, sendo x, y e z como funções com duas variáveis. Sem delongas, apresentamos o seguinte teorema, retirado de Thomas (2009, p.323).

Suponha que $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ e $z = k(r, s)$. Se todas as quatros funções forem diferenciáveis, então w terá derivadas parciais em relação a r e s, dadas pelas fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\end{aligned}$$

Inicialmente, os alunos ficaram espantados e confusos, contudo, o professor-pesquisador ia fazendo comparações com o teorema visto na aula passada e mostrando que a função do primeiro teorema era derivável em t enquanto esse segundo teorema da regra da cadeia a função terá derivadas parciais em relação à r e s.

Em seguida, trabalhamos uma tarefa para aplicar e entender a dinâmica desse teorema da seguinte forma: "Expresse $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial s}$ em termos de r e s se $w = x + 2y + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r + \ln s$ e $z = 2r$."(THOMAS, 2009, p.323).

Os alunos começaram e fomos auxiliando e orientando os caminhos, dessa vez cronometrou-se o tempo e fixou-se um prazo de 10 minutos para que eles resolverem. Eles começaram a resolver e discutir entre si. Depois de esgotado o tempo estimado, começamos a correção e por incrível que pareça a dificuldade dos alunos não residia no entendimento da dinâmica do teorema mas sim, nas propriedades operatórias de derivação. Evidente que no período que eles se encontravam não era admissível tais dúvidas. Por exemplo, sendo $x = \frac{r}{s}$ quando o professor-pesquisador fazia $\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{s} \cdot 1$ de forma direta usando o processo de repetir a constante e derivar a variável da vez, contudo alguns diziam: "*não estou entendendo, o professor não tem que usar a regra do quociente?*" Dessa forma, as resoluções tinham que ser bem detalhadas e utilizar processo que demoravam e não otimizavam o tempo.

Em seguida, foram feitas algumas perguntas e uma condução aos alunos para entender a generalização desse teorema 7, mostrando que se uma função tiver duas, três, quatro, n variáveis, então cada equação descrita terá duas, três, quatro, n parcelas. Se essas variáveis dependerem de duas, três, n outras variáveis, então teremos duas, três, n equações.

Quando encerramos sobre Regra da Cadeia a aluna A_1 perguntou para professora titular da disciplina: "*professora, esse conteúdo vai cair na prova? Misericórdia, por favor, não coloque*". A professora da disciplina respondeu: "*é simples pessoal, só lembrar que todas as variáveis que aparecer você terá que derivar*". Embora esse receio, o problema maior como relatado anteriormente foram as dificuldades nas derivações.

Concluída essa parte iniciamos o conceito de Vetor Gradiente e solicitou-se que os alunos prestassem atenção e tirassem todas as suas dúvidas, pois esse conteúdo seria de suma importância para o próximo que seria abordado (derivadas direcionais). Novamente, o professor-pesquisador recorreu aos slides para ganhar mais tempo. Alguns alunos reclamaram, afirmando que preferiam "aula de quadro". Então foi explicado o porquê estava utilizando essa ferramenta, e começamos a explorar a definição de gradiente e resolver algumas questões. Em seguida, aplicou-se uma tarefa ,retirada e adaptada de Thomas (2009).

Tarefa: Seja $f(x,y) = xe^y + \cos xy$. Calcule o gradiente de f no ponto $P_0 = (2,0)$.

Deixou-se os alunos resolverem e apenas dois deles conseguiram chegar ao resultado, os demais tiveram dificuldades nas derivadas envolvendo o cosseno. Houve a resolução e em seguida abordagens nos slides o seguinte teorema.

> Sejam $w = f(x,y,z)$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e $P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in U$ tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$. Se S é a superfície de nível de equação$f(x,y,z) = k$ (k=constante) que contém P_0, então $\nabla f(P_0)$ é **normal** a S em P_0, ou seja, $\nabla f(P_0)$ é perpendicular a qualquer vetor tangente a S em P_0. (PINTO; MORGADO, 2015, p.108).

Na explicação desse teorema foi percebido pelo olhar dos alunos que eles não estavam compreendendo, principalmente quando tocamos na parte de curvas e superfície de nível. Embora de forma superficial, relembrou-se esses conceitos, mas notou-se que não foi suficiente e o tempo não permitia dá maior ênfase nesses conceitos.

Como já havíamos mencionado, falado bastante e a turma estava meio cansada não alongou-se os alunos com mais explicações, optou-se em iniciar o modelo 2 que era um problema chave para introduzir as derivadas direcionais.

O modelo matemático abaixo foi retirada do livro de Pinto e Morgado (2015). Como o tempo não daria para abordar todo o problema, então dividiu-se em duas etapas, sendo a primeira modelar a função que satisfizesse matematicamente as condições do enunciado. E a segunda etapa ficaria para o próximo encontro, onde seria realizado o restante das resoluções.

Modelo 2

Uma chapa de metal aquecida está situada no plano xy de tal modo que a temperatura em cada ponto é iversamente proporcional à distância do ponto à origem. A temperatura em $(3, 4)$ é de 100 graus. Suponha que os eixos positivo $0x$ e $0y$ apontam, respectivamente, para leste e norte. Um objeto se encontra no ponto $P_0 = (2, 2)$.

a) Se o objeto se mover para nordeste, ele aquecerá ou esfriará? E para sudeste? Justifique.

b) Se o objeto se mover na direção do vetor $(-1, -1)$, ele aquecerá ou esfriará? Com que taxa?

c)Se a velocidade com que o objeto se move na direção do item b) é de $\frac{1}{5}\,m/s$, calcule a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo no ponto P_0.

d) Na direção e sentido de que vetores o objeto deve se mover, a parti de P_0, para que a temperatura permaneça constante?

Como havia sete alunos, dividiu-se dessa vez em três grupos, sendo dois grupos com dois alunos e um com três. Estes formaram os grupos conforme solicitados e em seguida distribuiu-se para cada aluno o Modelo 2.

A seguir temos uma imagem do momento em que os alunos discutem entre si.

Figura 19 – Alunos discutindo o modelo matemático 2

Fonte: arquivo da pesquisa, 2018

Vemos por essa imagem da figura 19 que dois grupos ficaram bem próximos, eles perguntaram se poderiam permanecer nessas posições, falou-se que não haveria problemas desde que todos os componentes participassem ativamente.

Fizemos a primeira leitura e houve um direcionamento onde eles deveriam focar, muitos insistiam em querer resolver as alternativas sem mesmo modelar a função.

Nesse momento relembrou-se das etapas no processo de modelagem, explicando-os que eles estavam na segunda etapa denominados abstração. Segundo Bassanezi (2014, p.27) a etapa da abstração é "o procedimento que deve levar á formulação dos Modelos Matemáticos".

Prosseguindo, o professor/pesquisador os deixou discutir e ficou circulando entre os grupos. O aluno de um dos grupos, identificado nessa pesquisa por A_4, em tom de brincadeira disse a professora da disciplina: "*professora! A senhora devia fazer grupo com a gente, o negócio aqui está muito difícil*". A professora apenas sorriu, ficou percebido desde a observação que os alunos têm uma relação muito amigável com a professora.

Depois de perceber que os grupos estavam tendo dificuldades começou-se a orientar os alunos a focarem o problema por partes, iniciando no entendimento da primeira frase que se estendia até o primeiro ponto. O professor-pesquisador perguntou aos alunos qual o ambiente que o problema estava situado, se era no plano, no espaço, etc. Todos falaram que era no plano, então o mesmo perguntou mais uma vez como se representa um ponto qualquer no plano, houve um breve silêncio e em seguida o aluno A_5 respondeu: "*por um par ordenado (x ,y)*". O professor/pesquisador respondeu: "muito bem, agora procurem reler a frase novamente e chegue a alguma conclusão".

Ao passar alguns minutos, o grupo formado pelos alunos A_5 e A_7 chamaram e falaram: "*professor, como as distâncias do ponto até a origem são inversamente proporcionais, então quanto maior for à temperatura menor será à distância e quanto menor for à temperatura, maior será à distância*". Então, o professor-pesquisador falou para o grupo que isso era abstrair o problema, levantando hipóteses para depois testá-las.

Em seguida, se ouviu a conversa de duas alunas A_1 e A_3: "*acho que tem que fazer um desenho de uma função detalhando, é modelagem, então tenho que desenhar para pode fazer uma abstração*." No que entendeu-se, a aluna defendia que para ter uma ideia geral (abstração) primeiro teria que ter algo concreto ou visível (desenho). Aqui vemos a importância das diferentes representações, apontadas por Duval (2003), para a construção e entendimento dos conceitos explorados no modelo matemático abordado.

A professora chamou o professor/pesquisador e mostrou a função que ela havia construído e perguntou se era daquela forma que estava correto, faltando apenas inserir o valor na constante de proporcionalidade. Foi dito para a turma, em tom de descontração, que uma aluna havia conseguido e de imediato um aluno falou: "*me passa a folha de resposta professora*".

Após alguns minutos o aluno A_5 chamou e perguntou: "*professor, nesse caso a origem é* $(0,0)$*, então vai ficar raiz de* x^2 *menos zero?*" O professor-pesquisador respondeu que ele estava conseguindo entender e na verdade estava propondo calcular distância de dois pontos no plano, orientou-se ele a tentar se lembrar da informação que essa distância entre o ponto à origem era inversamente proporcional.

Logo em seguida o grupo formado pelos alunos A_2 e A_6 chamou, mostrando o que já haviam construído e perguntaram: "*é algo assim não é? Inversamente proporcional?*" Ao ver percebeu-se que eles estavam muito perto de modelar a função, então incentivando-os, foi mostrado que continuassem com o raciocínio.

A maioria dos grupos ficou com dificuldades em relacionar grandezas inversamente proporcionais e estavam angustiados. O aluno A_5 com um tom chateado exclamou: "*não consigo fazer isso!*" A professora da disciplina questionou a turma: "*quando duas grandezas são inversamente proporcionais? Relacionem as variáveis*". Em seguida, ela começou a circular entre os grupos e quando alguns pressionaram pela resposta ela falou: "*não posso interferir na pesquisa do colega*". A professora da disciplina CDI-III participou bastante sempre tendo o cuidado de não dá as respostas e sim orientar os alunos em detalhes que eles não conseguiam enxergar.

Passados alguns minutos o grupo formado pelos alunos A_2 e A_6 chamaram novamente e mostraram a função que tinham modelado, quando o professor-pesquisador olhou, vibrou de alegria por notar que eles tinham conseguido e ao dizer para eles que estava correto foi grande a satisfação da dupla. A maneira como eles utilizaram as informações da questão foi ótimo, principalmente na dedução do valor da constante de proporcionalidade. Logo abaixo segue a resolução desse grupo.

Figura 20 – Resolução apresentada pelo grupo A_2 e A_6

Fonte: arquivo da pesquisa, 2018

Quando o aluno escreve "$T(D)$ tem a estrutura igual a $1/D$" está usando a informação da inversão de proporcionalidade entre a temperatura e a distância do ponto à origem. Como a distância do ponto $(3, 4)$ até a origem é igual a cinco (o aluno usou a notação $D(3, 4) = 5$) e nesse ponto a temperatura é sempre 100 graus (informação da questão), logo a dupla concluiu "$T(D) = 500/D$, pois $100 = 500/5$".

Embora a notação utilizada pelo aluno mereça uma clareza maior, foi uma resposta convincente e após o processo da abstração conseguiram concluir o terceiro passo da modelagem que é a resolução. Para Bassanezi (2014, p.29), no processo da resolução "o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente".

Verifica-se na resposta desse grupo que eles cumpriram a quarta etapa da modelagem denominada de validação, que "é o processo de aceitação ou não do modelo proposto". (BASSANEZI, 2014, p.30). Embora a testagem fosse apenas ao ponto $(3, 4)$, onde verificaram que satisfazia a condição de nesse ponto a temperatura ser igual a 100 graus conforme exigência dos dados iniciais da questão, eles tiveram o cuidado de examinar se o modelo obtido tinha algum nexo com o enunciado.

Dos outros grupos, uma dupla começou bem e até chegou perto de conseguir responder, mas não conseguiram visualizar a questão das grandezas inversamente proporcionais. Já o grupo que tinha três alunos ficou apenas no âmbito das discussões, porém, não concretizaram nenhuma informação.

Dessa forma, podemos concluir em linhas gerais, que esse encontro/aula, apesar das dificuldades, foi mais frutífero em relação ao primeiro. Na primeira parte da aula que contemplou a retomada final do Modelo 1, continuação da formalização da Regra da Cadeia e abordagem sobre Vetor Gradiente a aula fluiu dentro do esperado. Um ponto negativo foi a percepção que a interpretação geométrica de vetor gradiente merecia mais ênfase, principalmente no tocante aos conceitos de curva e superfície de nível, mas o fator tempo não permitiu. Foi importante esse momento, pois nas tarefas realizadas mapeamos as dificuldades operatórias de derivação que não contávamos que nessa altura do curso os alunos ainda possuíssem.

Na segunda parte da aula, onde foi trabalhado elementos concernentes à pesquisa, foi bastante positiva e podemos trabalhar uma Modelagem contemplando quase todas as etapas defendidas por Bassanezi. Mesmo todos os alunos não logrando êxito na construção do modelo matemático, o esforço para abstrair o problema, os debates entre os grupos, com o professor/pesquisador, com a professora titular foram elementos que enriqueceram essa aula. Outro fator positivo foi a boa racionalização do tempo. No próximo encontro faremos a continuação dessa situação-problema 2 e a formalização de regra da cadeia.

ENCONTRO/AULA 3: situação-problema da chapa de metal e sua variação de temperatura em diversas direções

Esse encontro/aula aconteceu no dia 30 de outubro de 2018, em um dia de terça-feira e iniciou-se por volta das 10h e 35min. O motivo desse atraso foi a professora da aula anterior ter estendida sua aula e tomado alguns minutos desse encontro. A professora titular também chegou um pouco atrasada.

Compareceram nessa aula seis alunos, a professora - titular da disciplina e o professor-pesquisador. Para esse encontro tínhamos como objetivo retomar e concluir o Modelo 2, bem como formalizar o conteúdo Derivada Direcional.

O último encontro/aula tinha ocorrido na semana anterior, ou seja, sete dias atrás. O encontro aula do dia 29/10/2018 não ocorreu por ser um dia pós-eleição. Como já tinha passados todos esses dias, então foi entregue as folhas de resoluções para os grupos relembrarem as resoluções que tinham construído. Mesmo após xerocar todas as resoluções feitas no encontro/aula anterior, foi solicitado que eles não riscassem e nem alterassem a parte já escrita.

Em seguida, fizemos a formalização sobre a modelação da função que descrevia a temperatura em cada ponto da chapa. Começamos discutindo que a distância de um ponto qualquer no plano $P = (x, y)$ até a origem é dada pela pela seguinte expressão: $d_{\overline{PO}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$. Como a temperatura em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto até a origem, então:

$$T(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ onde } k \text{ é a constante de proporcionalidade.}$$

Da hipótese, $T(3,4) = 100 = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow 100 = \dfrac{k}{5} \Rightarrow k = 500$. Portanto a função temperatura é dada por:

$$T(x,y) = \frac{500}{\sqrt{x^2+y^2}}; (x,y) \neq (0,0).$$

Modelar essa função não exigiu nada além dos conhecimentos matemáticos sobre distância de pontos no plano, a hipótese $T(3,4) = 100$ e o conceito de proporcionalidade. Para resolver os demais itens dessa questão com maior precisão matemática precisaria construir um novo conceito denominado derivada direcional.

Antes de abordarmos esse novo conceito tínhamos como objetivo levar os alunos a perceberem, através do Modelo 2, a necessidade de expandir o conhecimento sobre derivadas parciais. Assim, logo após construir o modelo matemático, validar e modificar algum detalhe no modelo, etapas pertinentes à modelagem matemática solicitou-se aos grupos que retomassem a situação-problema e começassem a resolver o item dessa questão.

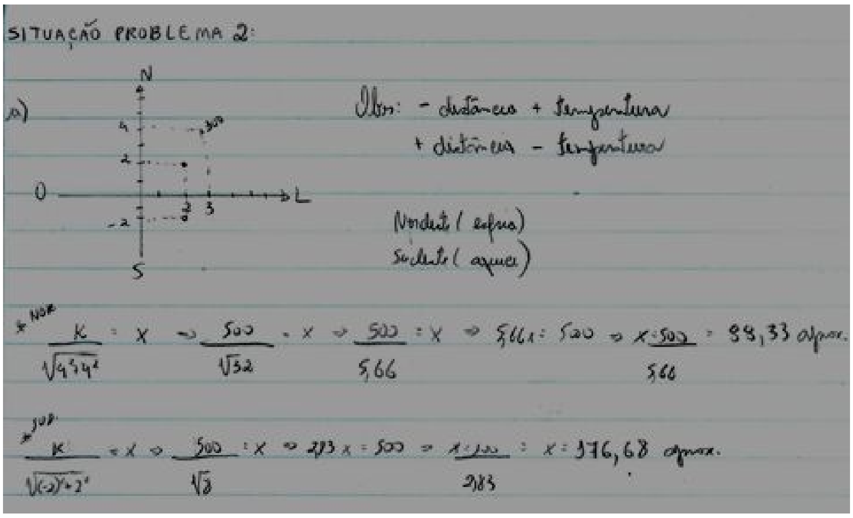
As três duplas começaram a discutir a questão de localização nordeste e sudeste, pelas conversas alguns alunos estavam com dúvida sobre essas direções, - um deles relatou: "*eu me confundo muito sobre essas direções*". A aluna A_8 explicou em alta voz: "*o nordeste está aqui entre o norte e o leste, o sudeste o próprio nome já diz, entre o sul e o leste*".

Depois de sanada entre eles essa questão de direção, os grupos começaram a conjecturar possíveis respostas para as perguntas "*se o objeto se mover para nordeste, ele aquecerá ou esfriará? E para sudeste?*" O aluno A_7 deu a seguinte opinião: "*como ele está se distanciando da origem, então ele esfriará*". Aqui que os alunos ao invés de considerarem o ponto dado na questão $(2,2)$, estavam tomando como referência a origem do plano cartesiano.

Outra discussão era sobre a direção sudeste, a aluna A_1 comentou: "*o sudeste está no quarto quadrante e uma das coordenadas é negativa*". Nesse momento a aluna A_8 respondeu: "*mas está se distanciando da mesma forma do ponto*". Assim, todos concordaram que tanto a nordeste como a sudeste, a temperatura diminuiria. Então foi questionado pelo professor-pesquisador como transformar essas conjecturas em números, eles pensaram um pouco e o aluno A_4 perguntou: "*professor vai ter que usar aquela fórmula?*" A fórmula que ele se referia era o modelo que foi construído. Então foi exclamado que era um bom começo e em seguida os alunos debatiam entre si.

Os alunos começaram a resolver a questão utilizando a estratégia de substituir pontos na função T, começando pelo ponto P_0 e tomando outros a nordeste deste, tais como $(3,3)$ e $(4,4)$. Um dos grupos iniciou com a seguinte resolução ilustrada na figura a seguir.

Figura 21 – Resolução das alunas A_6 e A_8.



Fonte: arquivo da pesquisa, 2018

Em linha geral, os alunos tomaram raciocínio de substituir valores estratégicos que obedeciam as direções solicitadas (nordeste e sudeste). Após algumas discussões e sem avanços concretos na resolução, eles começaram a segunda pergunta do item (b) que interrogava sobre a taxa de variação, não conseguiram resolver essa parte. Nesse momento o professor-pesquisador começou a dialogar com os alunos objetivando construir o conceito de derivadas direcionais.

O diálogo a partir do que eles tinham trabalhado, ou seja, a partir de substituir valores na função. Foi indagado aos alunos que se precisassem saber o valor da taxa de variação dessa função a cada instante, qual ferramenta matemática utilizariam? Os alunos pensaram e após alguns instantes e algumas tentativas erradas, concluímos que a ferramenta adequada para essa situação era a derivada. De forma rápida, foi relembrado que as derivadas parciais eram justamente a taxa de variação instantânea na direção do eixo x e do eixo y. Nesse momento que os alunos lembraram esses conceitos, foi feita a seguinte pergunta chave: *nesse problema que estamos trabalhando, como calcular essa taxa de variação da direção nordeste ou sudeste?* Após essas reflexões, os alunos compreenderam que haveria a necessidade de ampliar o conceito de derivadas parciais.

Dessa forma, iniciamos a formalizar o conceito de derivadas direcionais, iniciando pela exposição e discussão da definição abaixo, retirada de Pinto e Morgado (2015, p.117).

> A derivada direcional de uma função $z = f(x, y) \text{ em } P_0$ na direção do vetor u é definida por
>
> $$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t\,\|u\|}$$
>
> , se esse limite existir.

Inicialmente houveram bastante dúvidas denunciadas pelos olhares dos alunos, o que exigiu um detalhamento dessa definição. Foi exposta uma imagem geométrica dessa definição e fomos discutindo cada elemento presente nessa definição, principalmente o entendimento desse limite.

Em seguida, explorou-se algumas tarefas da apostila utilizadas pelos alunos, dentre elas, começamos por essa descrita abaixo, retirada de Thomas (2009).

Tarefa - Calcule a derivada da função f definida por $f(x, y) = x^2 + xy \text{ em } P_0 = (1, 2)$ na direção do vetor unitário $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Aqui não tínhamos abordado nenhum teorema e o caminho foi resolver essa tarefa via definição. Embora conseguissem entender com ajuda do professor-pesquisador, os alunos acharam trabalhoso esse procedimento. Foi nesse momento que abordou-se o teorema, retirado de Pinto e Morgado (2015, p.117-118), que oferece um processo mais prático para resolver questões dessa natureza.

> Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então
>
> $$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}$$
>
> onde $\nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}$ é o produto escalar de $\nabla f(P_0)$ pelo versor (ou vetor unitário) $\frac{u}{\|u\|}$ na direção e sentido do vetor u.

Após mostrar e explicar o funcionamento desse teorema, resolvemos a tarefa proposta anteriormente utilizando e aplicando esse teorema. Os alunos, apesar das dificuldades com o vetor gradiente, acharam bem mais prático. Fizemos uma ponte com o Modelo 2 mostrando que se quisermos calcular a variação da direção nordeste ou sudeste, é só fixar um vetor nessa direção e usar esse teorema.

O próximo resultado dentro das derivadas direcionais é o teorema que mostra qual direção e sentido a derivada direcional tem maior variação e estava no planejamento desse encontro. Contudo, os minutos finais da aula foram tomados pela professora titular da disciplina para combinar datas de avaliação e continuidade dos conteúdos. A discussão se estendeu um pouco e por isso não deu para terminar o que tínhamos planejado. Desse modo, o professor-pesquisador falou que concluiria no próximo encontro, deixando como tarefa para casa, a retomada ao Modelo 2 resolvendo utilizando os conceitos de derivadas direcionais.

Esse encontro/aula, apesar do atraso justificado no início dessa descrição, atingiu quase todo o objetivo proposto. Uma dificuldade sentida nesse encontro foi a ausência de dois alunos que se destacam bastante nas discussões e resoluções das questões, tanto é que nessa retomada os grupos expressaram dúvidas por geralmente esses alunos dependerem da posição e da liderança desses alunos ausentes. Embora haja um esforço por parte do professor/pesquisador para envolver todos nas discussões, sempre algum aluno se destaca mais nesse processo.

Em alguns momentos da aula, os alunos estavam muito inseguros nesse encontro, o que dificultou arrancar alguma fala ou interação. Para piorar a situação, três alunos tiveram que se retirar em um momento da aula para resolver algumas pendências no campus, ficando apenas três alunos que são bem inibidos. Houve momentos que a professora da disciplina interviu com falas do tipo: "*gente, falem alguma coisa. Não é preciso ter medo*".

Algo que considerou-se bastante pertinente nesse encontro foi o raciocínio genuíno que os alunos utilizaram ao iniciarem resolver os item do Modelo 2. Mesmo que não utilizaram uma ferramenta matemática ligada ao cálculo, propuseram trabalhar a função modelada e substituir pontos e verificar se satisfazia a questão da inversão de proporcionalidade exigida na questão, mostrando que a modelagem da função foi essencial para um entendimento mais amplo da situação exigida, e não apenas focar em realizar operações matemáticas sem uma interpretação.

Outro ponto que merece ser destacado foi o poder cristalizador de conceitos ofertados pela modelagem. Quando se explicava a definição e o teorema relativo ao cálculo das derivadas direcionais, bem como na resolução da tarefa proposta fazia-se uma ligação com o modelo 2 e os alunos sinalizavam, através de suas expressões, que estavam começando a compreender tais conceitos.

ENCONTRO/AULA 4: fechando as discussões sobre derivadas direcionais

Essas aulas ocorreram no dia 05 de novembro de 2018 e iniciaram-se às 10h e 14min. Estiveram presentes sete alunos, a professora titular da disciplina e o professor-pesquisador. O objetivo desse encontro seria concluir a formalização sobre derivadas direcionais e fechar a abordagem na modelo 2.

Iniciamos essa aula explicando o teorema que assegura a direção onde a derivada direcional possui maior valor. A versão abaixo foi retirada de Pinto e Morgado (2015, p.119).

> Seja f uma função diferenciável em P_0 tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$, então o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ ocorre quando o vetor u tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, sendo $\|\nabla f(P_0)\|$ o seu valor máximo.

Salientamos que esse teorema tinha sido o resultado que faltava para o fechamento da abordagem sobre derivadas direcionais. A discussão desse teorema foi muito interessante e através do diálogo construído entre o professor-pesquisador e os alunos permitiram que outras consequências desse resultado fossem deduzidas. Durante a demonstração desse teorema questionamos se os alunos lembravam-se da interpretação geométrica do produto escalar, porém, ao ver que eles não se lembravam, foi feita uma breve revisão e explorado esse conhecimento para provar esse resultado. Destacamos a parte chave nessa demonstração.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) &= \nabla f(P_0)\cdot\frac{u}{\|u\|} \overbrace{=}^{*} \|\nabla f(P_0)\|\cdot\underbrace{\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\|}_{igual\,a\,um}\cdot\cos\theta \\
&= \|\nabla f(P_0)\|\cdot\cos\theta.
\end{aligned}$$

A igualdade destacada com asterisco é para indicar que foi usada a interpretação geométrica do produto escalar. Quando chegamos à segunda igualdade houve questionamentos aos alunos do tipo: “qual o maior valor que o $\cos\theta$ pode assumir?”Neste momento, houve um silêncio entre os alunos, então a indagação foi reformulada: "os valores de $\cos\theta$ estão definidos em qual intervalo?"Dessa vez a aluna A_1 respondeu: "*entre um e menos um*". Assim, ao perguntar qual era o maior valor nesse intervalo todos afirmaram que era o número um. Prosseguindo com esse raciocínio, o pesquisador questionou aos alunos: "*quando o $\cos\theta$ é igual a zero ou qual o ângulo θ cujo cosseno desse ângulo é igual a zero?*" Logo responderam, $\theta = 0$. Continuando os questionamentos: "*se o ângulo θ entre o vetor gradiente e o vetor u é igual a zero, isso significa que a derivada direcional possui maior valor quando. . . ?*" Em seguida a aluna A_8 completou: "*mesma direção e sentido*".

Observe que o resultado foi construído nesse jogo de perguntas e respostas, depois dessa primeira conclusão as demais saíram rapidamente. Depois dessa fala, da aluna, reforçou-se que se quisermos saber o tamanho dessa derivada era só calcular a norma do vetor gradiente. Em seguida, retomando novos questionamentos: "*se a derivada direcional atinge um valor máximo quando o vetor u possui mesma direção e sentido do vetor gradiente, quando essa derivada terá um valor mínimo?*" De imediato a aluna A_8 respondeu num tom interrogativo e proposicional: "*se o valor máximo tem que ter sentido e direção igual, então tem que ser o oposto?*" Respondendo que ela estava correta, e indagando qual o valor desse ângulo, os alunos ficaram indecisos, mas passado alguns segundos e com algumas provocações do professor-pesquisador concluíram que o ângulo deveria ser 180 graus.

Depois disso foi dito aos alunos que dava para tirar outra conclusão além das outras já construídas (valor máximo e valor mínimo) e feita a seguinte pergunta: "*será que não posso encontrar uma direção que o valor da derivada seja nulo?*" Nenhum dos alunos conseguiu responder, então foi pedido que eles olhassem para a expressão $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \|\nabla f(P_0)\| \cdot \cos\theta$, e respondessem quando esse produto seria igual a zero. A aluna A_6 respondeu: "*quando o gradiente for zero.*" Então em resposta a aluna foi dito que essa possibilidade estava descartada pela hipótese que exige $\|\nabla f(P_0)\| \neq 0$. Em seguida a aluna A_1 perguntou: "*professor, ali não pode ser seno ao invés do cosseno, porque se for seno tem como dá zero*". Então, houve outro questionamento: "se o cosseno não poderia dá zero"? Em seguida a aluna A_6 respondeu que o cosseno de $\dfrac{\pi}{2}$ é igual a zero.

Desses diálogos, escrevemos essas conclusões como sendo propriedades. Essas propriedades ajudariam muito em problemas que abordassem questionamentos sobre a direção que a função tem maior, menores ou nenhuma variação. Depois disso, foram exploradas algumas tarefas da apostila, dentre elas destacamos essa abaixo retirada e adaptada de Pinto e Morgado (2015).

Tarefa - Seja $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{x^2 + y^2 + 1}$. Determine:
a) A direção de maior variação de f e a taxa de maior variação da função no ponto $P = (1, 0, -1)$.
b) A taxa de variação de f no ponto $P = (1, 0, -1)$ na direção do vetor $u = \sigma'(t), \text{ onde } \sigma(t) = (t, 1 + 2t, -1 + t)$.

Com ajuda do professor-pesquisador, os alunos resolveram o item (a), embora houvesse muitas dificuldades de alguns alunos com operações básicas de derivação bem como alguns esperarem as respostas prontas. O item (b) foi desenvolvido boa parte da resolução pelo professor-pesquisador.

Logo em seguida, foi questionado aos alunos se tinham feito a tarefa deixada para casa (resolver os itens do Modelo 2) e nenhum deles tinham feito. Assim, foi solicitado que eles retomassem e tentassem resolver. Foi sugerido que eles conservassem os mesmos grupos, mas como o aluno A_2 faltou então a aluna A_6, que fazia dupla com esse aluno ausente, ingressou em uma das duplas formadas.

Após alguns minutos acompanhando os grupos, percebemos que eles estavam começando a utilizar os conceitos de derivadas direcionais, os vetores direção correspondiam as direções exigidas na situação-problema, porém, a velocidade nas resoluções eram muito lentas. Os alunos não conseguiam ter uma plena concentração, algumas vezes conversavam com a professora da disciplina sobre a lista de exercícios.

Percebendo isso e pressionado pelo cronograma de conteúdos que tinham de ser abordados, o professor-pesquisador optou por fazer a formalização e o fechamento das discussões acerca do modelo 2. Em seguida, trazemos o modo que a solução foi descrita para os alunos.

Solução do item (a): O intuito principal era saber se o objeto que se encontra no ponto P_0 ao se mover para nordeste ele aquecerá ou esfriará. Para isso calculamos a derivada direcional na direção da reta $x = y$, a saber, do vetor **u** $= (1, 1)$. Iniciamos, encontrando o gradiente da função $T(x,y) = \dfrac{500}{\sqrt{x^2+y^2}}$, com $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) &= 500 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = -500x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\
\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) &= 500 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2y = -500y\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Assim, $\nabla T(2,2) = \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}(2,2), \dfrac{\partial T}{\partial y}(2,2)\right) = \left(-\dfrac{125}{2\sqrt{2}}, -\dfrac{125}{2\sqrt{2}}\right)$. Como o vetor $\mathbf{u} = (1,1)$, então $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$ e consequentemente $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Aplicando esses resultados na expressão abaixo, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial u}(2,2) &= \nabla T(2,2) \cdot \frac{u}{\|u\|} = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\frac{125}{4} - \frac{125}{4} = -\frac{250}{4} = -62,5.
\end{aligned}$$

Portanto, se o objeto se mover para nordeste do ponto P_0 ele esfriará.

Podemos perceber a importância dessa ferramenta matemática, além de mostrar que a temperatura está diminuindo nessa direção ela nos fornece com qual intensidade, para ser mais exato, a cada unidade percorrida no plano na direção indicada, a temperatura cairá $-62,5$ graus. Por isso a importância do vetor ser unitário na definição, facilita a compreensão métrica do problema.

Continuando a resolução, queremos agora a variação da temperatura quando o objeto se mover para sudeste do ponto P_0. Para isso consideremos $\mathbf{u} = (1,-1)$. Utilizando o mesmo procedimento anterior, chegaremos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial u}(2,2) &= \nabla T(2,2) \cdot \frac{u}{\|u\|} = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\frac{125}{4} + \frac{125}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Logo nessa direção não há variação de temperatura.

Solução do item (b): Se o objeto se mover na direção do vetor $\mathbf{u} = (-1,-1)$, teremos um sentido oposto do tomado inicialmente no item anterior. Assim, teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial u}(2,2) &= \nabla T(2,2) \cdot \frac{u}{\|u\|} = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{125}{4} + \frac{125}{4} = \frac{250}{4} = \frac{125}{2} = 62,5.
\end{aligned}$$

Solução do item (c): Se a velocidade com que o objeto se move na direção do item (b) é de $\frac{1}{5}\,m/s$, então a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial u}(2,2) &= \nabla T(2,2)\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{u}{\|u\|} = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{125}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{125}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{25}{4}+\frac{25}{4} = \frac{25}{2}\ graus/s.
\end{aligned}$$

Essa resposta nos mostra que a derivada direcional além de prever a variação tomando como parâmetro a unidade percorrida no plano é possível estabelecer essa variação tomando como referência o tempo e suas unidades. Nesse caso, com a velocidade estabelecida mostrou-se a mudança da temperatura a cada segundo.

Solução do item (d) Sabemos, pelo teorema 4.3.3, que o gradiente de uma função aponta para a direção e o sentido de maior crescimento na taxa de variação e os vetores ortogonais ao gradiente aponta a direção e sentido de variação nula. Desse modo, consideremos $\nabla T(2,2) = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right)$, então consideremos o vetor direcional **u** na mesma direção e sentido do vetor gradiente, ou seja:

$$\begin{aligned}
u = \left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \|u\| &= \sqrt{\left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{15625}{8}+\frac{15625}{8}}\\
&= \sqrt{\frac{31250}{8}} = \frac{125\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{125}{2}.
\end{aligned}$$

Normatizando o vetor **u**, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\|u\|} &= \frac{\left(-\frac{125}{2\sqrt{2}}, -\frac{125}{2\sqrt{2}}\right)}{\frac{125}{2}} = \left(-\frac{2}{125}\cdot\frac{125}{2\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{2}{125}\cdot\frac{125}{2\sqrt{2}}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Como queremos a direção e o sentido na qual o objeto deve se mover, a parti de P_0, para que a temperatura permaneça constante, então se tomarmos vetores ortogonais a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, o problema estará resolvido. Sem mais delongas, os vetores serão:

$$\boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \text{ou}\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)},$$

pois o produto escalar entre $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e esses dois vetores é igual a zero.

Os alunos tomaram notas dessa solução e nesse momento a professora titular começou a informar sobre as próximas aulas e o cronograma de conteúdos e atividades. Relatou que passaria dois trabalhos, sendo um deles seminário sobre Integrais Múltiplas. Os alunos em geral relutaram e pediram para professora não colocar em prática tal trabalho e as discussões se prolongaram por vários minutos.

Como não havia mais tempo para nada, foi deixado o modelo 3 como tarefa para casa e pedido que os alunos tentassem resolver, pois era de fundamental importância esses dados para a pesquisa desenvolvida. Esse modelo matemático foi retirada do livro de Pinto e Morgado (2015):

Modelo 3
O Capitão Astro está outra vez em perigo perto da órbita de Mercúrio. Ele está em $P_0 = (1,1,1)$, e a temperatura da blindagem de sua espaçonave num ponto (x,y,z) é dada por $T(x,y) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$ graus.
a) Que direção ele deve tomar para perder temperatura o mais rápido possível?
b) Se a espaçonave viaja a e^8 unidades de comprimento por segundo, com que taxa a temperatura irá cair quando ele seguir a direção do item a)?
c)Infelizmente, a blindagem da espaçonave se danificará se a taxa de variação da temperatura for inferior a $\sqrt{14}e^2\ graus/s$. Que comjunto de possíveis direções ele pode tomar sem causar danos á sua espaçonave, a partir de P_0, com velocidade do item b)?

A percepção desse encontro enquanto professor-pesquisador no tocante aos conteúdos propostos afirma-se que conseguimos atingir os objetivos, vendo de forma efetiva todos os conceitos centrais sobre derivadas direcionais. Notamos pelas tarefas realizadas e os diálogos construídos que os alunos deram leves sinais que estavam entendendo esse conteúdo, melhoraram bastante no entendimento de vetor gradiente, embora o ritmo dessa turma seja um pouco lento.

Dois fatores pesaram negativamente para esse encontro/aula, um deles foi a desconcentração dos alunos. Hoje eles estavam muito preocupados com uma lista de exercício que a professora titular da disciplina havia passado, abordando os conteúdos que cairiam na avaliação que aconteceria na próxima semana. Dessa forma, sempre havia conversas com os colegas e com a professora titular da disciplina. Por exemplo, ao pedir que eles retomassem a resolução do modelo 2, eles se concentravam muito pouco, e isso atrasou o ritmo da resolução. Além disso, neste dia a professora avisou que fecharia a disciplina com um seminário sobre Integrais Múltiplas[2] e isso agitou bastante a turma dificultando ainda mais o foco nas atividades propostas.

O segundo fator negativo foi não ter esperado eles resolverem toda a situação-problema envolvida no modelo 2 e o motivo já foi explicado anteriormente. Mesmo de forma tímida e com alguns equívocos operatórios eles estavam começando a utilizar o conceito de derivadas direcionais, mas tivemos que interromper por causa do tempo e expor a resolução do problema.

Mesmo com esses fatores que pontuamos como negativos, podemos destacar que no processo como um todo houve avanços, os alunos estão se adaptando com esse novo modelo de aulas e apesar de não resolverem completamente o modelo 2, contudo, o processo de modelagem ajudou muito no entendimento e no uso das derivadas direcionais. Bassanezi (2014, p.38) afirma: “a modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado”.

ENCONTRO/AULA 5: começando as discussões sobre extremantes de uma FVV

Esse encontro/aula aconteceu no dia 06 de novembro de 2018, iniciando por volta das 10h e 08 minutos. Estiveram presentes nessa aula seis alunos, a professora da disciplina e o professor pesquisador. Tínhamos como objetivo geral para esse encontro iniciar a abordagem sobre extremos de uma FVV. Para isso iniciaríamos como vínhamos fazendo nos encontros anteriores, iniciando com uma situação-problema, porém, no decorrer da aula iria nos ater mais na exposição do conteúdo.

A primeira coisa que foi feita foi cobrar dos alunos a tarefa extraclasse que havíamos deixado na aula anterior, mas nenhum aluno tinha ao menos tentado. Eles alegam que estavam sem tempo e com muitas atividades das outras disciplinas.

Logo em seguida, foi solicitado que se organizassem em três duplas, distribuindo entre eles o Modelo 4, retirada e adaptada de Pinto e Morgado (2015).

[2] Vale salientar que esse seminário foi uma proposta feita pelo professor-pesquisador atendendo a uma sugestão do professor orientador da pesquisa. A professora da disciplina CDI-III gostou da ideia e atendeu de imediato.

> **Modelo 4**
> Analise a natureza dos pontos críticos das seguintes funções:
> a) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$.
> b) $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$.

Essa questão é típica de quando objetivamos nos exercícios praticar algoritmos ou procedimentos técnicos repetitivos. E esse foi o intuito ao selecionar essa modelo, para que os alunos pudessem, nas etapas propostas pela modelagem matemática, sistematizar a aplicar toda dinâmica técnica e repetitiva envolvendo o processo de encontrar valores extremantes de uma FVV.

Desta forma, o professor/pesquisador orientou aos alunos que lessem a apostila no tópico que abordava sobre extremos de funções e o mesmo ficou observando os grupos. Alguns minutos depois, percebeu-se que os grupos focavam suas leituras nas tarefas já solucionadas na apostila para ver se conseguem reproduzir os procedimentos, sem ao menos entender as definições e teoremas. Nesse instante, houve intervenção e questionamentos acerca do entendimento o que a questão está cobrando, se eles sabiam, por exemplo, o que seria um ponto crítico. Os alunos ficaram parados sem dar respostas e foi aí que começamos a fazer uma ponte com esses conceitos que os alunos estudaram na disciplina CDI-I. A aluna A_8 relatou: "*professor lembro que estudei, só não sei dizer o que é*".

Nesse momento começamos a por em prática uma estratégia que já havíamos pensando em utilizar desde alguns encontros anteriores, que era ensinar aos alunos a como explorar um livro ou a apostila que lhes foi entregue de forma correta. Dessa forma, estaríamos expondo o conteúdo e ao mesmo tempo mostrando a sequência de leituras e atividades que deveriam ser seguidas para um bom desempenho nas atividades de matemática.

Foi pedido que os alunos voltassem a atenção novamente ao início da abordagem sobre máximos e mínimos locais, iniciando uma leitura coletiva de suas definições e procurando entender cada elemento ali presente. A figura 22 mostra alguns dos momentos desses entendimentos:

Figura 22 – Alguns momentos expositivos desse encontro/aula

Fonte: arquivo da pesquisa, 2018

Em seguida, discutimos que dependendo da função, ficaria desconfortável encontrar esses valores diante de uma infinidade de números e dessa maneira precisaríamos de um resultado que direcionasse mais o procedimento de encontrar esses extremos locais. Quando chegamos nesse ponto da conversa, o teorema conhecido como: "Teste da derivada primeira", era o resultado matemático que direcionaria mais nossa procura por esses extremantes, assim lemos e exploramos as hipóteses e o porquê delas, bem como sua tese. O teorema abaixo foi retirado de Pinto e Morgado (2015), com a seguinte afrimação: seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e (x_0, y_0) um ponto interior de A. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e $f(x, y)$ tiver um extremo local em (x_0, y_0), então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Discutimos sobre essa condição necessária exibida no teorema e ponderamos que esse resultado já existia de forma bastante similar no Cálculo I. Mostramos que assim como no cálculo com funções de uma variável, a suficiência[3] desse teorema não se assegurava.

Dando continuidade, abordamos sobre pontos críticos de uma FVV e logo em seguida exploramos algumas questões práticas sobre esse conceito e também algu-

[3] Derivadas parciais iguais a zero num determinado ponto nem sempre implica na existência de algum extremo local nesse ponto.

mas tarefas, dentre elas a seguinte tarefa da apostila, retirada e adaptada de Pinto e Morgado (2015) para os grupos discutirem.

Tarefa: O único ponto crítico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$ é $(0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. No entanto, f não possui extremo relativo em $(0, 0)$. Justifique essas afirmações!

O intuito dessa tarefa era mostrar que as vezes precisamos entender os argumentos que estão implícitos na questão. Embora a tarefa já esteja resolvida, precisamos entender bem essas frases e tomar o hábito de explicitar algum detalhe embutido, por exemplo, os alunos foram levados a explicarem porque o ponto crítico é $(0, 0)$ e esclarecer o motivo que f não possui extremo local nesse ponto. Assim, ao mesmo tempo em que aprofundava o entendimento nessas questões exercitavam a teoria. Essa tarefa também tinha o intuito de reforçar a condição de insuficiência desse teorema, ou seja, deixar claro que uma função ter suas derivadas parciais nulas em algum ponto do interior do domínio não garante que f possua um extremo local naquele ponto.

Uma discussão paralela interessante que surgiu durante a resolução dessa tarefa foi um questionamento da aluna A_3: "*professor, por que não colocar exemplo e sim tarefa*"? Esse questionamento surgiu devido os alunos estarem acostumados com os professores explorarem os exemplos durante as exposições, dessa forma, foi explicado que na tarefa o aluno constrói a resolução e o seu entendimento de uma forma mais autônoma, já o exemplo leva mais para o processo da repetição mecânica. Houve várias opiniões e falas nesse momento, o aluno A_4 afirmou: "*um exemplo não é uma prova, mas um contra-exemplo sim*". O aluno aqui quis dizer que os contra-exemplos são mais fortes no sentido de provar algo, já que basta um contra-exemplo para derrubar e provar o contrário de uma determinada uma teoria.

Outra questão que debatemos sobre o teorema até aqui discutido foi que ele indica possíveis extremantes, mas não indica nada sobre sua natureza e assim temos que recorrer a definição para poder chegar a alguma conclusão. Dessa forma, o professor-pesquisador mostrou a necessidade de se obter um resultado mais específico e assim relatamos que o caminho é analisar a derivada de segunda ordem.

Prosseguindo, trouxemos o teorema que dá uma condição suficiente para um ponto crítico ser um extremo local também conhecido no meio acadêmico como critério ou teste da derivada segunda. Esse resultado dá mais precisão sobre a natureza de um ponto crítico sem ser preciso recorrer as definições de máximo e mínimo locais.

Vejamos: seja $A \subset f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 numa bola aberta $B_\delta(x_0, y_0)$. Se (x_0, y_0) é um ponto crítico de f e $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Assim:

1. f tem um máximo local em (x_0, y_0) se
$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ e } f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0.$$

2. f tem um mínimo local em (x_0, y_0) se
$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ e } f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0.$$

3. f tem um ponto de sela em (x_0, y_0) se
$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0.$$

4. O teste é inconclusivo em (x_0, y_0) se
$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0.$$

Após a leitura coletiva desse teorema a aluna A_8 exclamou: "*esse teorema tem muitas observações*". Assim, afirmou-se que essas informações seriam muito importantes quando desejássemos saber a natureza de um ponto crítico, e nesse momento o professor/pesquisador exemplificou com o Modelo 4, mostrando aos alunos que nesse teorema estaria a solução da questão posto no início dessa aula. Então começamos a discutir cada elemento da hipótese e as conclusões, relatando que a expressão $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$ tratava-se do determinante da matriz hessiana. Mostrei que eles já haviam estudado essa matriz e um procedimento similar no Cálculo I.

Após explicar todo o funcionamento desse teorema, o professor/pesquisador passou uma tarefa para entender na prática sua mecânica. Retirou e adaptou de Pinto e Morgado (2015):

Tarefa: Localize e classifique os pontos críticos da função
$f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$.

Quando foi solicitado para os alunos resolverem, muitos reclamaram dizendo que era muito difícil, outros reclamaram que era muita coisa. Então, o professor/pesquisador começou a dar algumas dicas e incentivou a fazer por etapas, iniciando com a procura dos pontos críticos e depois aplicar o teste da derivada segunda nesses pontos. Assim foi feito, após localizar os quatro pontos críticos aplicamos o teorema da derivada segunda em dos pontos e os demais, assim como a resolução do modelo 4 ficaram como tarefa para casa.

Terminada a aula o professor/pesquisador pediu que os alunos contribuíssem e fizessem as tarefas para casa e em seguida a professora titular também solicitou e disse: "*gente esses dados são indispensáveis para a pesquisa dele, ele depende do que vocês produzem para fazer a análise desses dados*". Vale salientar aqui que o nosso próximo encontro seria à duas semanas, pois na semana seguinte seria aulas de resolução das listas e a primeira avaliação da segunda unidade.

Podemos afirmar sobre esse encontro/aula que os objetivos foram alcançados no quesito abordagem dos conteúdos propostos. Embora o processo de aula tenha sido usual foi muito importante porque ao mesmo tempo mostramos aos alunos a postura que eles devem tomar quando confrontado com alguma situação-problema que exija a construção de novos conceitos, como vem ocorrendo nas aulas com modelagem matemática. Não é só olhar para os procedimentos técnicos e sim a teoria como todo.

Nesse momento da pesquisa, houve um desespero do professor-pesquisador em relação aos dados que estavam sendo produzidos pelos alunos, pois além de terem sido pouco, eram incompletos e com pouca maturidade. Não que o mesmo desejasse respostas corretas e completas, mas as que estavam sendo produzidas (com exceção do começo do Modelo 2) encontravam-se muito abaixo do esperado e pondo em xeque os objetivos da pesquisa. Essa foi mais uma razão de escolher essa postura metodológica nesse encontro, com a esperança de após essa chamada de atenção, mesmo que de forma indireta, eles passassem nos próximos encontros, serem mais acadêmicos nas atividades propostas.

Um fato que vale apenas ser discorrido aqui e que também preocupou bastante o professor-pesquisador, era a falta de compromisso dos alunos com as tarefas extraclasse que eram propostas, notando que os alunos não estavam levando a sério as atividades, talvez por essas atividades não terem sido colocadas pela professora daquela disciplina, pois, sempre perguntavam a ela se o assunto que estava explicando cairia na avaliação ou nas futuras listas de exercícios.

Para os próximos encontros ficou combinado com os alunos que terminaríamos sobre extremos de FVV e abordaríamos mais alguns modelos matemáticos.

ENCONTRO/AULA 6: trabalhando otimização envolvendo as FVV

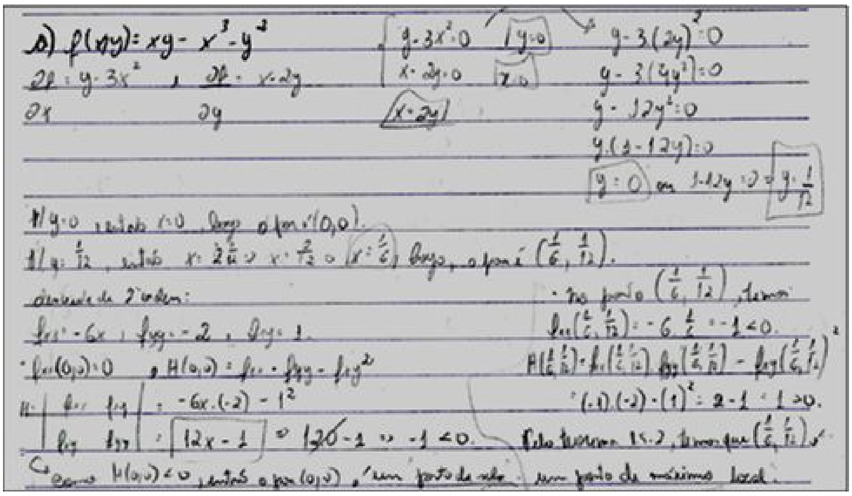
Esse encontro/aula ocorreu dia 19 de novembro de 2018, iniciando por volta das 10h e 10 minutos, com a presença de seis alunos, a professora da disciplina e o professor-pesquisador. Para esse encontro tínhamos como objetivo formalizar o Modelo 4 e iniciar a abordagem do Modelo 5, além discutir sobre máximo e mínimo global.

Os encontros/aula anteriores não haviam sido filmados por falta de equipamento adequado, assim, conseguimos filmar essas aulas através de um notebook localizado no final da sala, onde conseguia uma visão panorâmica da turma. O áudio da gravação não ficou com uma boa qualidade, mas salientamos que gravamos o áudio com um gravador profissional, como já vínhamos utilizando nos encontros anteriores.

Vale salientar que já havia passado cerca de 14 dias do nosso último encontro e nesse intervalo, houve uma partilha do professor-pesquisador com a professora da disciplina sobre a angustia sentida pelo fato dos alunos não estarem fazendo as tarefas que lhes são passadas extraclasse. Logo no início da aula a professora da disciplina cobrou dos alunos as atividades e para a surpresa do professor-pesquisador dessa vez alguns haviam resolvidos outros nem se lembravam mais dessas atividades. Só relembrando, o modelo matemático 4 pedia a natureza dos pontos críticos de duas funções: $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$ e $f(x,y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$.

Ressaltamos que os alunos no encontro anterior acharam difícil esse conteúdo, mas pelas resoluções entregues, percebe-se que eles entenderam o funcionamento do processo de analisar a natureza de um ponto crítico, embora alguns cometessem equívocos operacionais em relação a derivadas. Um dos grupos, constituído pelos alunos A_2 e A_6, conseguiu resolver os dois itens com bastante segurança e vale pontuar aqui que em atividades anteriores esses dois alunos se destacaram nas resoluções.

Figura 23 – Resolução do item (a) do modelo 4 pelos alunos A_2 e A_6.


$f(x,y) = xy - x^3 - y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y$

$y - 3x^2 = 0$, $x - 2y = 0$, $x = 2y$

$y - 3(2y)^2 = 0$

$y - 12y^2 = 0$

$y(1 - 12y) = 0$

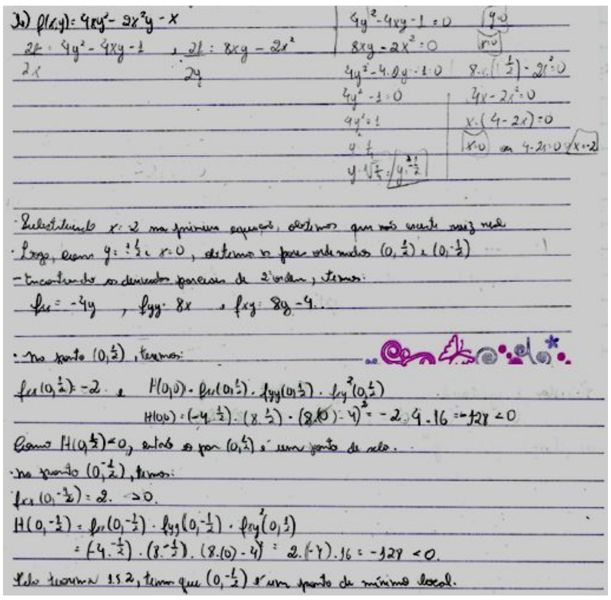
$y = 0$ ou $1 - 12y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{12}$

Fonte: arquivo da pesquisa, 2018

Embora a organização não esteja boa eles desenvolveram corretamente o processo, primeiro encontrando as derivadas parciais em relação à x e a y e depois igualando a zero para encontrar os possíveis pontos críticos. Ao desenvolver o sistema de equação chegam aos pares ordenados: $(0,0)$ e $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$. Em seguida aplicam o teste da derivada segunda nesses pontos e concluem que $(0,0)$ é um ponto de sela e $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ é um ponto de máximo local.

Esse grupo foi o único que logrou êxito no item (b), os demais uns não fizeram e outros deixaram a questão incompleta.

Figura 24 – Resolução do item (b) do modelo 4 pelos alunos A_2 e A_6



Fonte: arquivo da pesquisa, 2018

Prosseguindo, o professor/pesquisador disse aos alunos que iriam trabalhar outra situação-problema que exigira os conhecimentos de máximos e mínimos estudados até aqui, nesse momento o aluno A_4 fez a seguinte reclamação num tom meio que de revolta: "*o professor nem terminou bem dizer o problema 4 e já quer passar outro probleminha pra nós resolvermos, desse jeito fica difícil*". Então, foi explicado que formalizaria o Modelo 4 em seguida e que abordaria o outro problema, mostrando que na formalização as dúvidas que por ventura existisse seriam esclarecidas.

O professor/pesquisador questionou se algum grupo gostaria de expor sua resposta no quadro, mas nenhum aceitou. Após recolher todas as resoluções começamos a formalização desse Modelo 4 e nesse momento os alunos tiraram suas dúvidas, principalmente nos equívocos operatórios. Vejamos a formalização:

Modelo 4

Analise a natureza dos pontos críticos das seguintes funções:

a) $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$.

b) $f(x,y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$.

Solução (a): De início, encontremos as derivadas parciais de f, segue:

$$f_x = y - 3x^2 \text{ e } f_y = x - 2y.$$

Igualando essas derivadas a zero obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y - 3x^2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação desse sistema resulta que $x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$. Substituindo esse valor de x na primeira equação do sistema, teremos:

$$y - 3 \cdot (2y)^2 = 0 \Rightarrow y - 12y^2 = 0 \Rightarrow y \cdot (1 - 12y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{12}.$$

Se $x = 0$, então $y = 0$ e por conseguinte teremos o par $(0,0)$. Por outro lado, se $y = \frac{1}{12}$, então:

$$x - 2 \cdot \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$$

Logo, também teremos como possível ponto crítico o par $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$.

Agora, iremos calcular as derivadas parciais de segunda ordem e a derivada parical mista de f, segue:

$$f_{xx} = -6x, \;\; f_{yy} = -2 \;\text{ e }\; f_{xy} = 1.$$

Utilizando o critério da derivada segunda, analisemos os pares anteriormente mensionados.

- No ponto $(0,0)$, temos:

$$f_{xx}(0,0) = -6 \cdot 0 = 0 \;\text{ e }\; H = f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0) = -1 < 0.$$

  Como $H < 0$, então $(0,0)$ é um ponto de sela.

- No ponto $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) &= -6 \cdot \frac{1}{6} = -1 < 0. \\ H\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) &= f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \cdot f_{yy}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) - f_{xy}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \\ &= (-1) \cdot (-2) - 1 = 1 > 0. \end{aligned}$$

  Como $f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) < 0$ e $H > 0$, então de acordo com o critério da derivada segunda $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ é ponto de máximo.

Solução (b): De início, encontremos as derivadas parciais de f, segue:

$$f_x = 4y^2 - 4xy - 1 \;\text{ e }\; f_y = 8xy - 2x^2.$$

Igualando essas derivadas a zero obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4y^2 - 4xy - 1 = 0 \\ 8xy - 2x^2 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação desse sistema resulta que $2x \cdot (4y - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = \frac{x}{4}$. Substituindo esse valor de y na primeira equação do sistema, teremos:

$$4 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 - 4x \cdot \frac{x}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow -\frac{3x^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{3}.$$

Desse modo, para $y = \frac{x}{4}$, conclui-se que x não apresenta valor real. Assim, resta que se $x = 0$, então:

$$4y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}.$$

Logo, os possíveis pontos críticos são os pares $\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

Agora, iremos calcular as derivadas parciais de segunda ordem e a derivada parical mista de f, segue:

$$f_{xx} = -4y, \ \ f_{yy} = 8x \ \text{ e } \ f_{xy} = 8y - 4x.$$

Utilizando o critério da derivada segunda, analisemos os pares anteriormente mensionados.

- No ponto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} f_{xx}\left(0, \frac{1}{2}\right) &= -2 < 0. \\ H\left(0, \frac{1}{2}\right) &= f_{xx}\left(0, \frac{1}{2}\right) \cdot f_{yy}\left(0, \frac{1}{2}\right) - f_{xy}\left(0, \frac{1}{2}\right) = -16 < 0. \end{aligned}$$

  Como $H < 0$, então $(0, \frac{1}{2})$ é um ponto de sela.

- No ponto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} f_{xx}\left(0, -\frac{1}{2}\right) &= 2 > 0. \\ H\left(0, -\frac{1}{2}\right) &= f_{xx}\left(0, -\frac{1}{2}\right) \cdot f_{yy}\left(0, -\frac{1}{2}\right) - f_{xy}\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -16 < 0. \end{aligned}$$

  Como $H < 0$, então $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ também é um ponto de sela.

Após concluir essa etapa na aula, foi pedido que os alunos formassem os grupos. Nesse caso, como havia seis alunos, os mesmos se organizaram em três duplas. Em seguida, foi distribuido o Modelo 5, retirado de Guidorizzi (2001).

Modelo 5
Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com $1\,m^3$ de volume. O material a ser utilizados nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

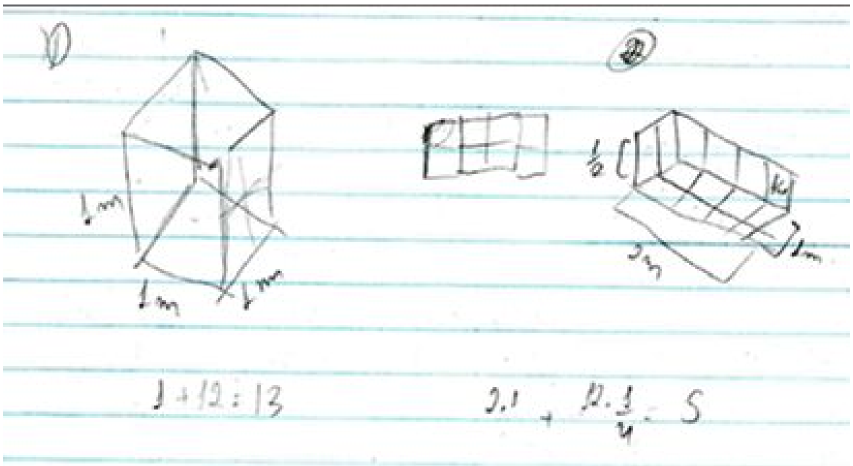
Duas duplas ficaram próximas uma da outra e a terceira dupla ficou mais afastada. Nota-se que os alunos A_2 e A_6 sempre que os dois estão presentes fazem grupos juntos. As demais duplas ou trio alteram um ou outro componente, mas na maioria dos casos repetem-se as mesmas duplas ou trio. As imagens abaixo mostram como ficou a distribuição dos alunos na sala e o momento que observava as discussões dos alunos.

Figura 25 – Acompanhando as discussões das duplas sobre o Modelo 5

Fonte: arquivo da pesquisa,2018.

Os alunos começaram a discutir a questão iniciando a fase da abstração do problema, com a tarefa inicial de modelar a função que desse o custo por metro quadrado nessa caixa. Os alunos em sua maioria começaram desenhando a imagem de um paralelepípedo e um deles começou a atribuir valores numéricos às dimensões da caixa que satisfizesse o volume ser igual a 1 metro cúbico, conforme ilustra a figura 26:

Figura 26 – Estimativas numéricas de um dos grupos



Fonte: arquivo da pesquisa,2018.

Embora não escreveram, mas onde colocou $1+12=13$ trás por trás, segundo a escuta dos diálogos dessa dupla, a seguinte interpretação: como a área de cada face é igual 1 metro quadrado e o custo da área lateral é o triplo da área da base, então teremos $1+3\cdot 4=1+12=13$. Isso mostra que eles haviam abstraído bem a situação. A outra igualdade $2\cdot 1+12\cdot 1/4=5$ mostra a ideia de dividir a área lateral em pedaços que representava a fração de $1/4$, depois soma a área da base $(2\cdot 1)$ mais todos os pedaços fracionados da área lateral $(12\cdot 1/4)$. Nesse raciocínio, não atribuíram a relação de custos, mas pelas conversas averiguaram que diminuía o custo com essas novas dimensões.

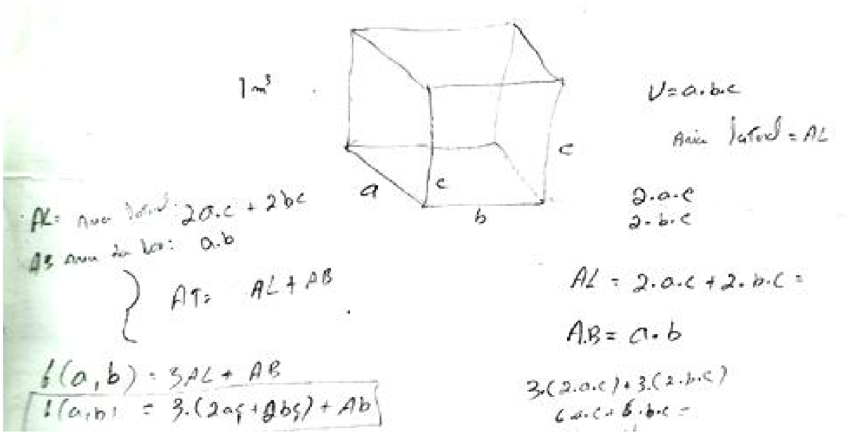
Depois de algumas tentativas, perceberam que havia muitas possibilidades e precisariam de um procedimento mais eficiente. Nas sondagens realizadas em cada grupo percebeu-se que eles haviam compreendido e abstraído boa parte da situação-problema, pois começavam a discutir sobre área lateral e área da base. Observando os diálogos dos alunos houve a seguinte conversa entre a dupla constituída pelos alunos A_4 e A_7: "*acho que vai ficar três vezes essa parte mais essa outra.*" Quando o aluno fala "*três vezes essa parte*" ele apontava com a caneta para área lateral do paralelepípedo, eles estavam levantando as hipóteses e conjecturando, mas tiveram dificuldades em atribuir uma linguagem matemática nesses pensamentos.

Alguns grupos já iniciavam a terceira etapa da modelagem matemática, porém com dificuldades em apresentar variáveis genéricas ao problema. Nesse instante, o professor-pesquisador começou a orientar os alunos para representarem as dimensões do paralelepípedo com variáveis genéricas. Eles seguiram essa orientação e alguns grupos chegaram próximos a formalizar um modelo, contudo se deparam com uma dúvida: a função era de duas ou três variáveis.

Boa parte dos alunos inicialmente estava crente que se tratava de uma função com três variáveis no domínio, devido às três dimensões do sólido. Então começamos um diálogo, fez-se um questionamento aos alunos se a função custo que estávamos modelando dependia exclusivamente do volume desse sólido ou de parte da área lateral. Os alunos em sua maioria concordaram que dependia de parte da área lateral e que o volume exigido era apenas uma condição. Após haver um consenso que dependia da área lateral ficou fácil o entendimento que a função custo na verdade teria um domínio contido em $\mathbb{R}^2$.

No desenvolvimento e construção do modelo aparecia a situação de ter uma função de duas variáveis, mas sempre aparecia uma terceira variável no modelo encontrado. Vejamos na figura a seguir uma situação que exemplifica o dilema vivenciado pelos alunos relatado anteriormente.

Figura 27 – Início do processo de modelagem da função dos alunos A_4 e A_7

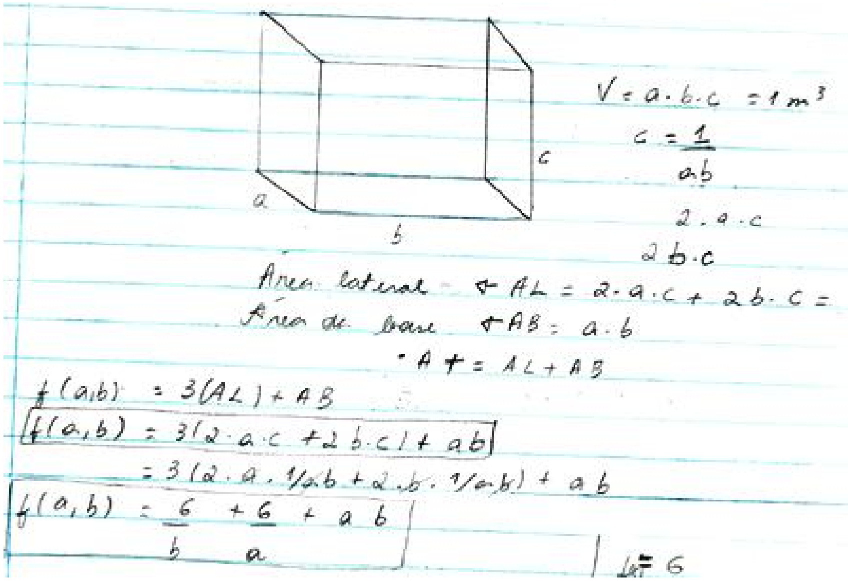


Fonte: arquivo da pesquisa,2018.

É perceptível que a função que esses alunos chegaram foi $f(a, b) = 3 \cdot (2ac + 2bc) + ab$. Nesse momento, houve uma pergunta se não havia a possibilidade de colocar um variável em função de outra. Eles ainda continuaram com dúvidas, então, o professor-pesquisador sugeriu que eles olhassem para a condição do volume ser igual a 1 metro cúbico, ou seja, $a \cdot b \cdot c = 1$. Depois dessa sugestão, dois grupos conseguiram isolar a variável c em função de a e b, e construir a função custo. Ao ver que esses grupos haviam conseguido fiquei muito feliz.

Em seguida, os grupos socializaram as resoluções entre si, comparando a maneira com que cada um construiu a função. Abaixo temos a imagem que descreve a solução do modelo construído por um dos grupos:

Figura 28 – Resolução do modelo construído pelas alunas A_1 e A_3



Fonte: arquivo da pesquisa,2018.

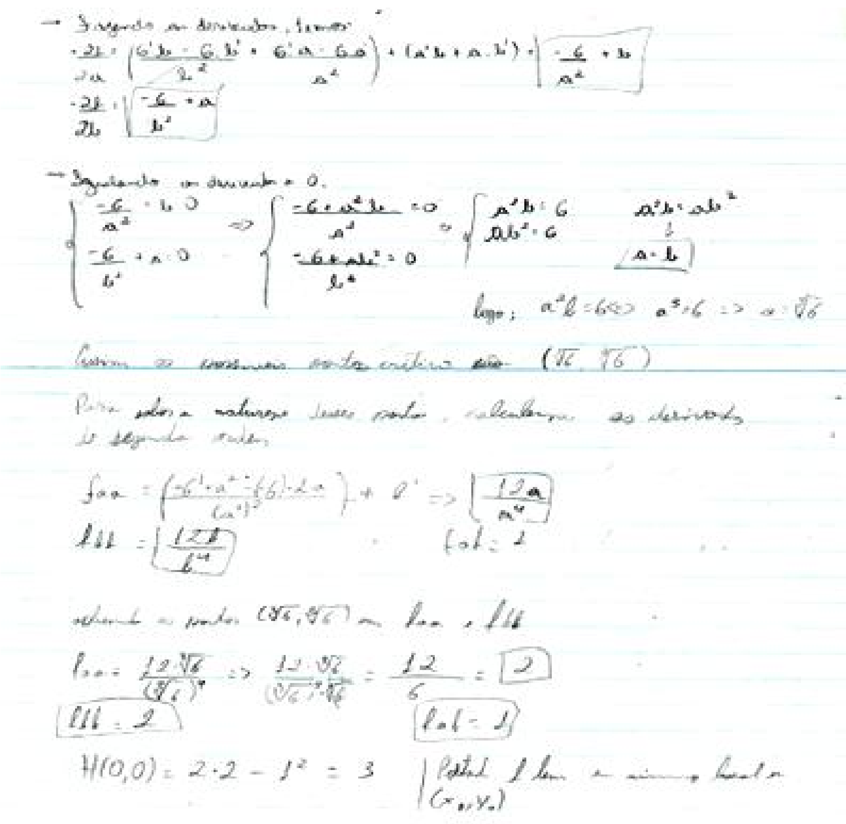
Prosseguindo, o professor/pesquisador solicitou que eles validassem esse resultado, sugerindo a dupla A_2 e A_6, que no início fizeram algumas estimativas numéricas, para comparar se ao substituir aqueles valores nessa função chegaria ao mesmo resultado. Eles testaram e confirmaram que estava dando o mesmo resultado, ou seja, se considerar um cubo de lado igual a $1\,m$, por exemplo, em suas estimativas logo no início dava $1 + 3 \cdot 4 = 13$ e utilizando a função modelada, teríamos: $f(1,1) = 6/1 + 6/1 + 1 \cdot 1 = 13$. Repetiu-se o teste com as demais estimativas e em todos os resultados foram os mesmos, validando assim, essa função custo.

Depois do modelo pronto foi pedido que os alunos voltassem suas atenções para a cobrança principal da situação-problema: determinar as dimensões da caixa que minimizassem os custos do material. Para isso, utilizaríamos os conhecimentos teóricos sobre máximo e mínimo na função modelada. Os alunos continuaram a tarefa de encontrar os possíveis pontos crítico.

Os alunos entenderam bem os procedimentos para encontrar o ponto crítico e estudar sua natureza, as dúvidas eram mais no campo operatório. Nesse, a professora titular ajudou os alunos esclarecendo e sanando essas dúvidas, o que contribuiu bastante para estes chegassem à solução. Essa etapa, apesar de em termos de operações serem mais extensas, ocorreu de forma mais rápida do que a etapa de modelar a função.

Um dos grupos terminou antes do término da aula e os demais estavam bem adiantados, mas não deu tempo de concluir. Assim, explora-se fotos do que eles haviam produzido em sala de aula, preservando e tomando o cuidado para não haver adulteração nos dados, e os mesmos levaram para concluir em casa. Na figura a seguir, ilustramos a segunda parte da resolução do Modelo 5 feito pelo grupo que conseguiu resolver no tempo da aula.

Figura 29 – Resolução do modelo 5 dos alunos A_2 e A_6



Fonte: arquivo da pesquisa,2018.

Assim, sobre esse encontro/aula o professor-pesquisador ficou devendo em um dos objetivos, que era abordar sobre máximo e mínimo global. Contudo, foi um encontro muito produtivo, onde as etapas da modelagem matemática foram executadas em sua maioria. Esse Modelo 5 era parecido com o Modelo 2, no tocante de não dar pronta a função e exigir do aluno sua construção. Evidente que cada uma oferece suas peculiaridades, mas nessa situação-problema os alunos foram mais eficazes e boa parte logrou êxito no processo de modelação da função.

Verificou-se que boa parte dos alunos, apesar de reclamar muito desse conteúdo, conseguiram entender o processo para obtenção dos pontos críticos e também analisar sua natureza. As maiores dificuldades continuam residindo em operações matemática, como derivação e outras.

Mesmo que alguns alunos não estiveram levando a sério as atividades propostas pelo professor/pesquisador, nessa aula houve um fluxo maior de obtenção de dados. A professora da disciplina, nesse e em outros encontros anteriores, deu bastante apoio no sentido de cobrar dos alunos pontualidade nas entregas das atividades e também ofereceu um bom auxílio no acompanhamento dos grupos quando estão realizando as atividades.

ENCONTRO/AULA 7: conversando sobre extremos globais e multiplicadores de Lagrange

Esse encontro aula ocorreu no dia 20 de novembro de 2018, sendo iniciado por volta das 10h e 08 min. Estiveram presentes seis alunos, a professora titular da disciplina e o professor pesquisador.

Começamos o encontro e alguns que alunos ficaram de concluir o final do Modelo 5 entregaram a folha de resolução, em seguida fizemos a formalização. Para ganhar tempo foi explicado o raciocínio para modelar a função custo f definida como:

$$f(a,b) \;=\; \frac{6}{a}+\frac{6}{b}+ab;\;\; \text{com}\;\; a>0 \;\; \text{e} \;\; b>0.$$

Como queríamos encontrar as dimensões da caixa onde minimizaria o custo de sua produção, logo deveríamos utilizar os conhecimentos teóricos sobre máximo e mínimo locais. Assim, a primeira tarefa era encontrar os pontos críticos e para isso deveríamos usar o teste da derivada primeira. Derivando parcialmente f, temos:

$$f_a = -\frac{6}{a^2}+b \;\; \text{e} \;\; f_b = -\frac{6}{b^2}+a.$$

Igualando essas derivas a zero e resolvendo o sistema chega-se ao seguinte resultado: $a=b=\sqrt[3]{6}$. Logo o ponto crítico a ser estudado sua natureza é $(\sqrt[3]{6},\sqrt[3]{6})$. Dessa forma, aplicando o teste da derivada segunda nesse ponto, conclui-se que ele é um ponto de mínimo e mais, pela natureza do problema configura-se num mínimo global. Portando, as dimensões são:

$$a=\sqrt[3]{6},\;\; b=\sqrt[3]{6} \text{ e } c=\frac{\sqrt[3]{6}}{6}$$

No final da resolução tínhamos falado em mínimo global, mas os alunos não tinham visto ainda esse conceito e nesse momento começamos a explicação. Para ganhar tempo, foi solicitado que os alunos acompanhassem pela apostila e destacado no quadro apenas alguns elementos que os alunos não compreendiam bem ao longo das explicações. Assim, começamos explorando, baseada em Pinto e Morgado (2015), a seguinte definição: considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um máximo absoluto de f (respectivamente valor mínimo absoluto), se:

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \ \ (\text{respectivamente } f(x,y) \geq f(x_0,y_0))\,, \ \forall\ (x,y) \in A.$$

Os alunos não tiveram dificuldade em entender essa definição, contudo foi explicado que a depender da função, nem sempre é conveniente e fácil o processo de encontrar tais valores através dessa definição. Antes de mostrar os multiplicadores de Lagrange, vimos o teorema, conhecido como Teorema de Weirstrass, forte resultado matemático de existência que afirma o seguinte: considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num conjunto fechado e limitado A. Então f possui um valor máximo e um valor mínimo absoluto em A.

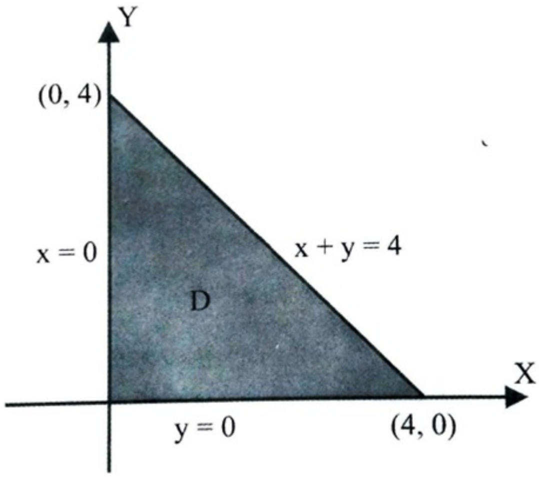
Foi mostrado que esse resultado era uma expansão de um resultado bastante similar estudado no Cálculo I e também era de grande valia para assegurar a existência dos pontos extremos globais ou absolutos, porém não oferece um critério de localização desses pontos. Saber onde esses pontos estão localizados, por hora, teríamos que separar entre os extremantes encontrados no interior e os encontrados na fronteira para então, aplicando a definição, comparar o maior e o menor valor. Para ilustrar de forma prática foi dito que os alunos analisassem a seguinte tarefa da apostila, retirada e adaptada de Pinto e Morgado (2015):

Tarefa: Encontre o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = (x-2)^2y + y^2 - y$ definida em $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \leq 0 \text{ e } x + y \leq 4\big\}$.

Essa tarefa já trazia a resolução, mas havia algumas passagens que exigia um maior entendimento e esse era o principal intuito nosso com essa atividade, induzir os alunos a questionarem essas passagens inicialmente obscuras. Os alunos olharam, mas estavam perdidos e para não perder muito tempo o professor-pesquisador questionou questionando se eles haviam entendido o formato desse conjunto domínio D.

Prosseguindo, foi apresentado geometricamente como era constituído o conjunto D e todos entenderam que formava um triângulo conforme imagem abaixo.

Figura 30 – Interpretação geométrica do conjunto D



Fonte: Pinto e Morgado (2015, p.137).

Depois que os alunos entenderam que o domínio da função f era fechado e limitado, foi reafirmado sobre o início, ou seja, o teorema anterior garante a existência de um ponto de máximo, um ponto de mínimo global e teríamos que analisar os pontos extremantes no interior do conjunto D e em seguida os pontos extremantes na fronteira para então compará-los.

Dessa forma, começamos a analisar os pontos interiores, os alunos ficaram com muitas dúvidas nos resultados da resolução da apostila, e, nesse sentido tivemos que minudenciar as operações que eram omitidas. Após alguns cálculos concluímos que no interior de D só havia um ponto crítico, a saber, $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ e $f\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

Em seguida fomos analisar os pontos na fronteira e o procedimento adotado foi transformar em alguns intervalos dessa fronteira em função de uma variável. Para exemplificar, trazemos abaixo um recorte da solução existente na apostila dos alunos:

Agora vamos analisar o comportamento de f na sua fronteira. Segue:

- Para $y = 0$, o intervalo $0 \leq x \leq 4$ a função é nula. De fato, se $y = 0 \Rightarrow f(x, y) = 0$, o mesmo acontece no intervalo $0 \leq x \leq 4$, pois os pontos no eixo x a ordenada y é zero.

- No segmento de reta $x = 0,\ 0 \leq y \leq 4$ a função f pode ser representada por:

$$h(y) = f(0, y) = (0 - 2)^2 y + y^2 - y = y^2 + 3y,\ 0 \leq y \leq 4.$$

Como h é estritamente crescente no intervalo $0 \leq y \leq 4$, então f tem um mínimo em $y = 0$ e um máximo em $y = 4$ (resultado do cálculo I). Assim,

$$h(0) = f(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad h(4) = f(0, 4) = 4^2 + 3 \cdot (4) = 16 + 12 = 28.$$

Esse trecho foi preciso explicar muitas vezes para os alunos compreenderem e isso demandou boa parte do tempo da aula. Tivemos que revisar alguns resultados do CDI - I e depois concluímos comparando as imagens dos pontos obtidos. Os alunos reclamaram muito, a aluna A_1 disse: "*professor isso é muito extenso*". Outros reclamavam a professora titular "*se for cobrar isso na prova tem que ser só uma questão*".

Depois de encontrar todos os pontos e compará-los concluímos que a função f assume um valor mínimo global igual a $-\dfrac{1}{4}$ em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ e um valor máximo global de 28 em $(0, 4)$. Em seguida, discutiu-se que esse processo utilizado para encontrar extremantes na fronteira a depender da função seria muito trabalhoso e assim, utilizando essa motivação, apresentamos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, retirado de Pinto e Morgado (2015, p.141):

> Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções definidas e de classe C^1 num subconjunto aberto U do plano xy que contém a curva C de equação $g(x, y) = 0$. Se $f(x, y)$ tem um valor máximo ou mínimo em $(x_0, y_0) \in C$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ não é o vetor nulo, então existe um número real λ tal que
>
> $$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0.$$

Inicialmente os alunos não entenderam nada sobre a dinâmica e funcionalidade desse teorema, pois os olhares, as conversas entre eles em voz baixa os denunciavam. Então, foi feita uma apresentação de sua funcionalidade através de um esboço geométrico das curvas de nível das funções f e g, mostrando o papel fundamental do multiplicador λ desempenhava para tornar os vetores gradientes dessas funções paralelos. Para mostrar na prática a funcionalidade desse teorema, trabalhamos a seguinte tarefa retirada de Guidorizzi (2001):

Tarefa: Determine os extremantes de $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrinção $x^2 + y^2 = 1$.

Discutimos cada etapa da resolução dessa tarefa e principalmente no papel fundamental do multiplicador λ, pois mesmo não aparecendo da resposta final desses problemas ele direciona e é responsável pela localização desses extremos na fronteira, mostrando a beleza matemática desse processo.

Como não havia mais tempo para trabalhar outras tarefas, foi explicado aos alunos que no planejamento desse encontro/aulas tinha como objetivo mostrar o trabalho de Mestrado desenvolvido por Diego Piasson[4] que expunha uma importante aplicação dos multiplicadores de Lagrange. Nessa conversa ficou claro a riqueza desse resultado matemático e pontuando que o que havíamos estudado, embora os alunos achassem difícil, era só um dos casos e havia outros casos de multiplicadores de Lagrange com FVV e restrita a diversas restrições.

Depois dessa conversa relatada no parágrafo anterior os alunos ficaram bastante entusiasmados e a aluna A_3 falou: "*dá pra fazer um TCC*[5] *sobre esse conteúdo*". Então, foi respondido que sem dúvida esse conteúdo seria ótimo tema para um trabalho de conclusão de curso.

Prosseguindo, o professor-pesquisador relatou que havia planejado trabalhar oito modelos matemáticos e como só havia trabalhado apenas cinco, os três que restavam iriam se inserir na lista de exercício da professora da disciplina[6]. Os alunos solicitaram que as questões fossem colocadas do livro Cálculo B, então expliquei que as questões já estavam prontas e que independente do livro o importante era utilizar os conhecimentos adquiridos. A professora da disciplina estabeleceu a data da entrega e assim finalizou-se esse sétimo encontro/aula.

A análise desse encontro/aula se comporta em fatores positivos e negativos. Vamos começar elencando os fatos que contribuíram positivamente. Em relação aos conteúdos conseguiu-se concluir o que havia sido planejado para essa aula apesar

[4] Trabalho de Mestrado Profissional em Matemática da Unicamp.
[5] Trabalho de Conclusão de Curso.
[6] Vale salientar que havia combinado isso com a professora da disciplina, ou seja, se não desse tempo de abordar todos os modelos matemáticos, então os colocaria nessa última lista de exercício.

da velocidade em sua abordagem. Nessa aula, os alunos que ficaram de entregar a Modelo 5 cumpriram com o prometido, possibilitando uma boa obtenção de dados.

Em relação ao conteúdo os alunos tiveram muita dificuldade em acompanhar, acredita-se que dos conteúdos abordados até o presente encontro, essa parte de extremantes foi a que eles mais reclamaram. Dois alunos nesse encontro não estavam presentes no encontro anterior e sentiram dificuldades nessa aula. Em relação à tarefa trabalhada na apostila para entender o processo de encontrar extremantes em conjuntos fechados e limitados temos dois olhares: o primeiro é um ponto negativo, acredita-se que houve um equívoco na seleção dessa tarefa, apesar de simples, ela trás uma resolução extensa, e isso colocou medo nos alunos em relação a esse conteúdo. Também tomou mais tempo do que esperava e esse tempo poderia ter sido usado, para começar o Modelo.

Por outro lado, foi uma boa motivação para mostrar a necessidade de ter um resultado mais objetivo e que facilitasse o processo de encontrar extremantes na fronteira desses conjuntos, mostrando nesse momento o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange.

Os alunos em alguns momentos da aula estavam um pouco desanimados, talvez por se sentirem impotentes diante das dificuldades sentidas com esse conteúdo, mas o professor/pesquisador foi tentando motivá-los e na última tarefa trabalhada, que mostrava a praticidade dos multiplicadores de Lagrange, eles começaram a dar sinais que estavam entendendo a dinâmica.

Além dos três Modelos que iriam ser inserido na lista de exercício sobre extremantes de FVV, colocamos também o Modelo 3 que foi deixada como tarefa extraclasse sobre derivadas direcionais e os alunos não a fizeram. Na próxima subseção será descrito os seminários sobre Integrais Múltiplas apresentados pelos alunos.

ENCONTRO/AULA 8: seminário sobre Integrais Duplas e Mudança de Variáveis

No dia 26 de novembro de 2018, segunda-feira, iniciava esse oitavo encontro/aula por volta das 10h e 10 min. Estavam presentes oito alunos (toda a turma), a professora da disciplina e o professor-pesquisador. Nessas aulas iniciaria os seminários sobre Integrais Múltiplas a serem apresentados pelos alunos. Foram divididos quatro grupos de dois alunos e estava previsto para esse encontro a apresentação de dois grupos.

O objetivo desses seminários era levar os alunos a refletirem sobre suas potencialidades e capacidade de modelar seu próprio conhecimento na relação aluno – conteúdo, saindo da posição de receptor e tomando uma posição de construtor do seu próprio conhecimento.

Vale salientar que a professora titular e o professor-pesquisador apenas orientaram acerca dos materiais de pesquisa e algumas dúvidas pontuais nos minutos de pré-apresentação. Assim, os alunos de fato executaram os trabalhos no sentido de estudarem as definições e propriedades, bem como as atividades práticas de aplicação desses conteúdos. Dessa forma, os aspectos da modelagem matemática aqui presente se dão a partir dos alunos se debruçarem nos livros para abstraírem o conteúdo, entender tal resolução, validar e aplicar esses conhecimentos.

No início da aula os alunos, principalmente os grupos que apresentariam nesse dia, estavam bastante ansiosos e concentrados no roteiro de aula por eles desenvolvido. Dessa maneira, cerca de vinte minutos foram gastos para esclarecer algumas dúvidas em relação aos conceitos, nas tarefas para aplicação dos conceitos, as propriedades entre outros. Vozes como "*professor deu um branco*", "*não vou conseguir falar*" e outras nesse sentido eram frequentes. A aluna A_3 pediu que não gravasse essa aula porque "*pagaria um mico*", expressão utilizada para indicar que não conseguiria apresentar de forma clara o conteúdo. Na medida do possível, tanto a professora titular como o professor-pesquisador diziam palavras de ânimo. Abaixo algumas imagens antes das apresentações:

Figura 31 – Momento pré-apresentação dos seminários

Fonte: arquivo da pesquisa,2018.

A primeira imagem mostra os alunos tirando dúvidas com a professora da disciplina, a segunda imagem mostra um aluno treinando na lousa os desenhos de alguns gráficos que faria na sua apresentação.

Após esse intervalo para os alunos tirarem suas dúvidas, o primeiro grupo, constituído pelas alunas A_1 e A_3, iniciaram sua apresentação por volta das 10h e 32min. Elas utilizaram a estratégia de expor em slides as definições e propriedades e exploraram na lousa apenas as resoluções dos exemplos. O tema desse seminário era Integrais Duplas, que abordou desde os conceitos iniciais, passando pelo processo de cálculo dessas integrais e fechando com as mudanças de variáveis.

Quem iniciou a apresentação foi a aluna A_1, onde fez a seguinte indagação: "*para que serve uma integral dupla?*" Em seguida a aluna A_6 respondeu: " *para calcular a integral de duas funções.*" A partir desse primeiro diálogo, a aluna A_1 começou a definir integrais dupla e em seguida fez uma interpretação geométrica dessa definição. Nas explicações conceituais não houve questionamentos por parte dos demais alunos.

Prosseguindo, abordaram cinco propriedades da integral dupla sem fazer suas demonstrações e também não houve uma busca de atribuir significados para essas propriedades. Já em seguida, adentrou na explicação sobre o cálculo da integral dupla analisando os dois tipos de integração:

$$\text{Tipo I: } \begin{cases} f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad \text{, com } f_1(x) \text{ e } f_2(x) \text{ contínuas em } [a,b].$$

$$\text{Tipo II: } \begin{cases} g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad \text{, com } g_1(y) \text{ e } g_2(y) \text{ contínuas em } [c,d].$$

Essa parte elas explicaram bem e as imagens gráficas ajudaram bastante para compreensão desses conceitos.

Prosseguindo com o seminário, abordaram algumas tarefas para ilustrar esses tipos de integração, nessa parte houve uma interação maior dos alunos. A aluna A_1 mostrou a importância de em cada tipo o intervalo de integração da parte externa sempre constar o intervalo numérico para o resultado final ser um número. Durante a explicação os alunos não entendiam algumas passagens, mas a aluna A_1 nesses exemplos estava com bastante segurança na resolução, mostrando que estudou e entendeu o processo dessas integrações. O que deixou o professor-pesquisador satisfeito foi perceber que a aluna A_1 detalhou bem a resolução, e não apenas transmitiu o que estava no livro texto.

Após a conclusão dos exemplos, a segunda componente do grupo, a aluna A_3, iniciou a abordagem sobre Mudanças de Variáveis em Integrais Duplas. Ela iniciou tentando mostrar os caminhos para se construir a expressão:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_R f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Falou rapidamente do determinante jacobiano $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ de x e y em relação a u e v, já passando a falar das coordenadas polares. As discussões foram superficiais e jogadas sem buscar um significado matemático para essas mudanças de coordenadas, como os alunos não questionavam, a dupla seguia sua sequência de explicação sem pausas. Após substituir as variáveis

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

e desenvolver o determinante jacobiano com essas modificações chegaram à seguinte fórmula que expressa uma integral dupla na forma polar:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta.$$

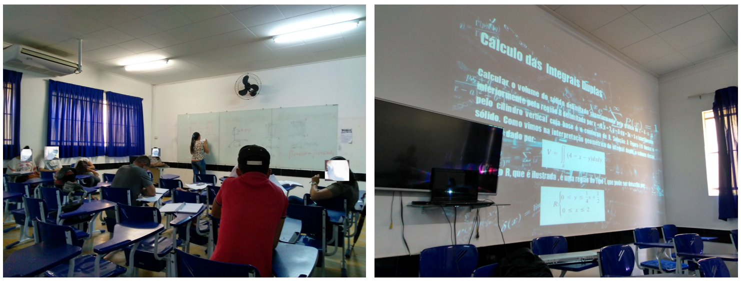
Prosseguindo, fez alguns exemplos e mostrou algumas aplicações sobre volumes e uma na área da física sobre os conceitos de Momentos. Com isso, esse grupo finalizou sua apresentação por volta das 11h e 48min, não havendo mais tempo para o segundo grupo se apresentar. A aluna A_1 do grupo relatou na sua última fala da apresentação: “*gente é isso, não sei se vocês aprenderam alguma coisa, mas eu aprendi*”.

A professora da disciplina CDI-III em sua fala parabenizou o grupo e já deixou combinado com os demais alunos que na próxima aula iria começar no horário e não teria mais esse tempo para esclarecimento de dúvidas antes da apresentação, solicitando que os grupos fossem mais objetivos na apresentação e não precisava selecionar exemplos longos ou questões que eles não compreendessem.

A análise que se faz dessa apresentação é que variou em momentos bons e outros que deixaram muito a desejar. A primeira componente, A_1, foi mais segura e mostrava mais domínio nos conteúdos, principalmente nas resoluções dos exemplos. Já a segunda componente, A_3 mostrou muita insegurança e em momentos realizava a leitura dos tópicos sem ela mesma compreender o que estava abordando.

Esse grupo não seguiu a sugestão dada pelo professor-pesquisador para utilizar algum modelo matemático e trabalhar brevemente algumas etapas da modelagem nessas questões. Esse grupo construiu toda sua exposição fielmente com base no livro Cálculo B de Gonçalves e Flemming. Abaixo segue algumas imagens da apresentação desse grupo.

Figura 32 – Momentos da apresentação do primeiro grupo



Fonte: arquivo da pesquisa,2018.

As imagens mostram a aluna na lousa expondo as explicações e as representações de slides projetadas para o fundo da sala.

ENCONTRO/AULA 9: seminários sobre Integrais Triplas e Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Esse encontro/aula ocorreu no dia 27 de novembro de 2018, em uma terça-feira, iniciando às 10h e 05min. Estiveram presentes oito alunos, a professora da disciplina e o professor-pesquisador. Para esse encontro estava programada a continuação das apresentações dos seminários sobre Integrais Múltiplas, o que de fato aconteceu e tivemos nesse dia a apresentação de dois grupos.

Primeira apresentação desse encontro/aula: seminários sobre Integrais Triplas

Dando sequência nas apresentações, o grupo constituído pelos alunos A_4 e A_7 abordou sobre as Integrais Triplas. Iniciando por volta das 10h e 15min, esse grupo fez sua apresentação sem utilizar recursos tecnológicos, como data-show, concentrando suas explicações apenas em um diálogo e registros na lousa.

A exposição desse grupo começou com o aluno A_7 trazendo uma ideia intuitiva das integrais triplas e em seguida A_4 exibiu a definição formal desse conteúdo. A explicação do limite das somas de Riemann ficou um pouco a desejar. Diferentemente do grupo anterior que as alunas dividiram a apresentação em um bloco de conteúdo para cada, ou seja, alternaram o momento de cada uma falar.

Após definir a integral tripla A_4 explorou um exemplo que calculava o volume de um paralelepípedo de dimensões 2, 3 e 4. Rapidamente, utilizando uma matemática elementar, chegou no resultado $24\,u.v$. Então, A_4 mostrou aos alunos que poderiam resolver esse mesmo problema via integral e desenhando a figura de um paralelepípedo, modelou a seguinte expressão:

$$\iiint_T dx\,dy\,dz.$$

Após explicar a modelação dessa expressão e se valendo da explicação do grupo anterior, afirmou que utilizaria o mesmo processo para resolver essa integral, ou seja, começaria pela integral interna até chegar à integral externa. Mostrando as variações dos intervalos ao longo dos três eixos, construiu a resolução que apresentaremos resumidamente:

$$\iiint_T dx\,dy\,dz = \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^3 dz = 24\,u.v.$$

Chegando ao resultado acima, A_4 comparou com o que tinha obtido usando a matemática elementar, validando assim a resposta. Embora de forma discreta e superficial, A_4 tentou trabalhar aspectos da modelagem matemática ao construir via a ferramenta de integrais triplas uma maneira de calcular volume de um paralelepípedo. Foi uma ótima oportunidade desperdiçada por esse grupo de explorar isso como tarefa para os demais alunos.

Dando continuidade o aluno A_7 mostrou três propriedades das integrais triplas e igualmente ao grupo anterior não foi realizadas demonstrações nem tão pouco se buscou discutir algum significado, explorando-se apenas a sintaxe dessas propriedades. Em seguida começou explorar e formalizar o cálculo de integral tripla, já abordada por seu colega no exemplo do paralelepípedo.

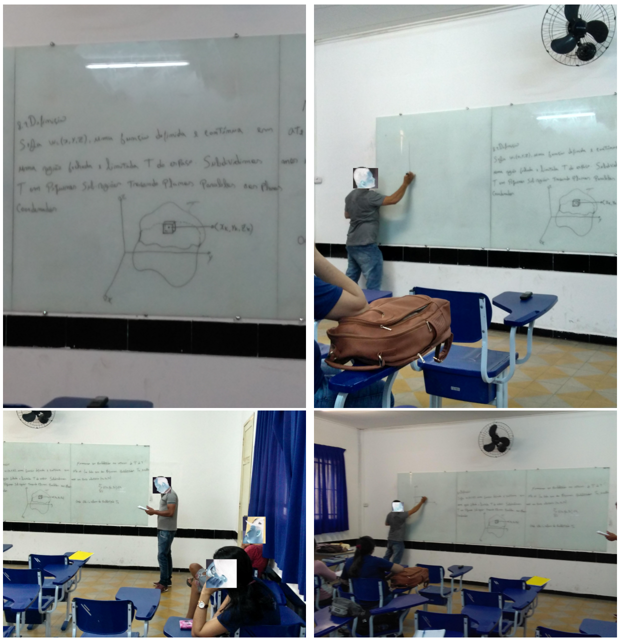
Começou frisando que o cálculo dessas integrais era feita da mesma forma que as integrais duplas e questionou a professora titular se era necessário explorar os tipos de integração, a professora respondeu que sim. Dessa forma, o aluno já mostrava que estava inseguro nessa aperte, mas em seguida fez a abordagem desses casos.

O aluno A_7 explicou cada caso através de figuras desenhadas do livro, o que não foi uma boa estratégia pelo motivo dos desenhos não serem tão simples para quem não tem um bom domínio em desenhos. O primeiro caso foi até bem explicada, mas o segundo e terceiro caso A_7 mostrou muita insegurança e apenas fez uma leitura conforme estava no livro texto.

Dando continuidade o aluno A_7 explorou o seguinte exemplo para ilustrar o cálculo de integrais triplas: "calcule a integral tripla $\iiint_T xyz^2\,dv$, onde T é o paralelepípedo retângulo $[0,1]\times[0,2]\times[1,3]$". Nesse exemplo, o aluno mostrou domínio e explicou com propriedade e de forma que os demais alunos indicaram ter compreendido essa parte do cálculo com integrais triplas.

Apesar da organização no quadro, havia precisado melhorar, e, isso a professora da disciplina chamou a atenção no final da apresentação, em alguns momentos a dupla explicou muito bem os conteúdos. Houve partes que eles repetiram o mesmo procedimento do grupo anterior, apenas leram o que estava escrito no livro sem mesmo eles entenderem o que aquilo significava. A seguir, trazemos algumas imagens de momentos da apresentação desse grupo.

Figura 33 – Momentos da apresentação do segundo grupo



Fonte: arquivo da pesquisa,2018.

Diferentemente do grupo anterior, esses alunos tentaram por em prática a sugestão dada de abordar de algum Modelo e explorar aspectos da modelagem matemática. O exemplo do paralelepípedo foi uma tentativa de praticar essa estratégia de ensino-aprendizagem, porém, faltaram paciência e confiança nessa dupla de executá-la de maneira correta. O livro texto base para essa apresentação também foi o Cálculo B de Gonçalves e Flemming.

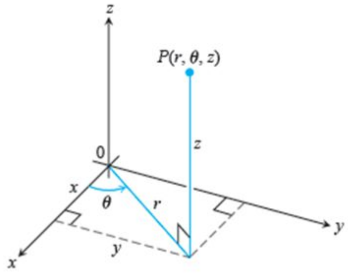
Segunda apresentação desse encontro/aula: seminários sobre Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

O terceiro grupo, constituído pelos alunos A_2 e A_6, fez sua apresentação seguindo a mesma estratégia do primeiro grupo, ou seja, a aluna A_6 explicou sobre as coordenadas cilíndricas e o aluno A_2 abordou as coordenadas esféricas. Iniciaram por volta das 11 horas e utilizou apenas como recurso pedagógico o quadro branco. Foi uma apresentação bem sucinta, através de dois desenhos gráficos, que por sinal não estavam bem entendível, ela mostrou a diferença entre coordenadas cartesianas (x, y, z) e coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Enfatizou mecanicamente as substituições que são realizadas no processo de conversão de coordenadas, a saber:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r^2 = x^2 + y^2 \text{ e } z = z.$$

Embora A_6 tenha falado que r seria o raio e θ o ângulo envolvido, conforme estampado no desenho no quadro da sala, não houve um esclarecimento mais preciso e também o conhecimento sobre coordenadas polares que era de fundamental importância. A figura 34 trás uma imagem gráfica do que a aluna A_6 tentou explicar para turma:

Figura 34 – Representação geométrica das coordenadas cilíndricas de um ponto no espaço



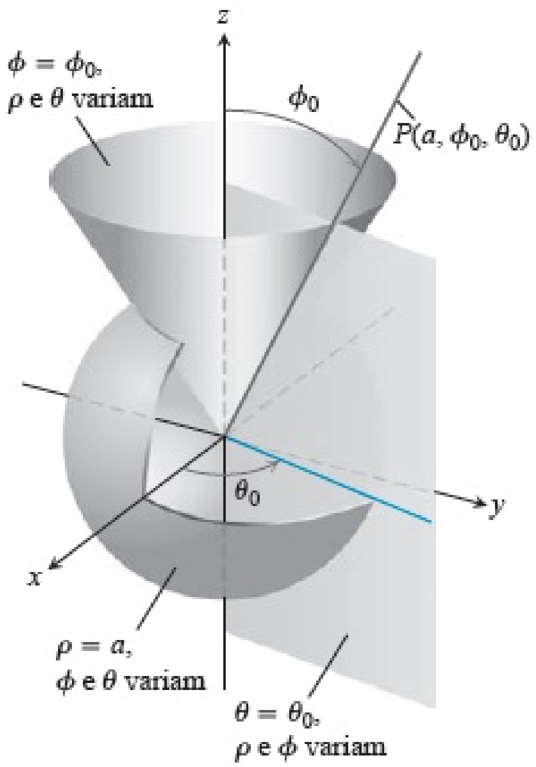
Fonte: Thomas (2009, p.438)

Prosseguindo, já mostrou como calcular a integral tripla utilizando coordenadas cilíndricas através da expressão: $\iiint_D dV = \iiint_D f\, dz\, r\, dr\, d\theta$. Em seguida, trabalhou um exemplo com os alunos para mostrar na prática como calcular essas integrais e assim terminou sua apresentação.

Essa aluna, A_6, apesar de algumas partes carecesse de maior significado, mostrou domínio nas explicações e resoluções do exemplo trabalhado. Levando em conta que eram apresentações conceituais de forma superficial e considerando a densidade desse conteúdo, isso mostrou que essa aluna estudou e conseguiu, um entendimento relevante do assunto.

Dando continuidade, o aluno A_2 iniciou a explicação sobre coordenadas esféricas e a estrutura de sua apresentação foi muito similar a de sua colega, ou seja, fez um esboço gráfico no quadro e a partir disso mostrou cada coordenada e diferenciou com as usuais coordenadas cartesianas. A imagem que esse aluno utilizou para expor as mudanças de variáveis está exposta a seguir na figura 35.

Figura 35 – Interpretação geométrica das coordenadas esféricas



Fonte: Thomas (2009, p.443)

Dessa forma, mostrou aos alunos que a coordenada ρ seria a distância do ponto P até a origem, a outra coordenada ϕ seria o ângulo que $\overrightarrow{OP}$ faz com o eixo positivo z,de modo que $0 \leq \phi \leq \pi$. Por fim, a terceira coordenada θ seria o ângulo das coordenadas cilíndricas. Em seguida, mostrou as equações que relacionavam essas coordenadas cartesianas e esféricas, isto é:

$$\begin{aligned} r &= \rho \sin\theta, \;\; x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta \\ z &= \rho\cos\theta, \;\; y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta \\ \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2+z^2}. \end{aligned}$$

Não houve uma preocupação por parte do aluno A_2 em mostrar as deduções dessas equações, apenas este mostrou de forma pronta e acabada para os alunos, utilizando a imagem gráfica apenas para indicara onde cada uma estava localizada. Em seguida o aluno escreveu a fórmula para calcular integrais com coordenadas esféricas.

$$\iiint_D f(\rho,\phi,\theta)dV = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\ d\phi\, d\theta.$$

Esse aluno argumentou que para cada tipo de coordenadas teríamos um formato de dV diferente. O aluno não procurou mostrar a geometria por traz dessa definição, ou seja, que essa integral era resultado do somatório de n pequenas cunhas esféricas ao serem particionadas.

Na sequência, trouxe um exemplo para aplicar os conceitos sobre intrgral com coordenadas esféricas. Tratava-se de uma situação-problema para encontrar o volume do “sorvete de casquinha”. Nessa parte da apresentação, o aluno desperdiçou uma oportunidade de trabalhar as etapas da modelagem matemática, mesmo assim percebemos que este seguiu a orientação do professor-pesquisador em trazer questões que caracterizasse a modelagem matemática. Finalizando sua apresentação o aluno mostrou um quadro síntese com as fórmulas para mudanças de coordenadas abordadas nessa apresentação.

Figura 36 – Síntese das fórmulas de mudanças de coordenadas

Fórmulas de conversão de coordenadas

Cilíndricas para Retangulares	Esféricas para Retangulares	Esféricas para Cilíndricas
$x = r\cos\theta$	$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta$	$r = \rho\operatorname{sen}\phi$
$y = r\operatorname{sen}\theta$	$y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$	$z = \rho\cos\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$	$\theta = \theta$

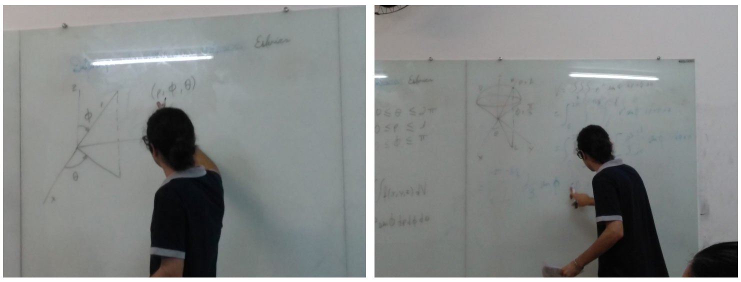
Fórmulas correspondentes para dV em integrais triplas:

$$\begin{aligned} dV &= dx\,dy\,dz \\ &= dz\,r\,dr\,d\theta \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \end{aligned}$$

Fonte: Thomas (2009, p.447)

Apesar de faltar, alguns esclarecimentos em sua apresentação, o referido aluno mostrou segurança em sua fala, nas resoluções dos exemplos e apresentações conceitual, mostrando que a estratégia do seminário foi positiva para o aluno se debruçar com a teoria. O livro texto seguido por esse grupo foi o Cálculo volume 2 de Thomas. A seguir, trazemos algumas imagens de momentos da apresentação desse grupo.

Figura 37 – Momentos da apresentação do terceiro grupo



Fonte: arquivo da pesquisa, 2018.

Após os alunos concluírem sua apresentação, a professora da disciplina abriu espaço para alguns questionamentos por aparte dos outros alunos e em seguida perguntou se o professor-pesquisador queria usar a palavra. Nesse momento, a componente do grupo A_6 questionou: "*por que só no grupo da gente*"? O grupo indagou a professora devido nas outras apresentações não ter tido espaço para comentários, mesmo assim o professor-pesquisador usou a palavra e iniciou acalmando o grupo, pois faria um comentário genérico.

O professor-pesquisador falou da importância dos grupos quando forem apresentar seminários ou quando for planejar aula não utilizar apenas um livro e sim vários, pois a depender da escrita facilita e complementa o entendimento. Foi pontuado para os grupos que definir o intervalo de integração era uma tarefa primordial nessas mudanças de coordenadas e também com coordenadas cartesianas na parte que aborda os tipos de integração. Essa fala foi para reforçar um ponto que ficou a desejar nas apresentações, principalmente desse terceiro grupo o que é entendível pela densidade do conteúdo. Também foi dito para os alunos que essas mudanças de coordenadas em determinados problemas facilitaria bastante os cálculos.

A professora da disciplina reforçou que essas apresentações eram superficiais e o intuito era deixar a turma com uma noção e quem quisesse aprofundar teria que estudar mais. Por fim, parabenizamos as duplas e com isso finalizou esse encontro/aula.

ENCONTRO/AULA 10: seminários sobre Integrais de Superfície e aplicação do questionário final da pesquisa

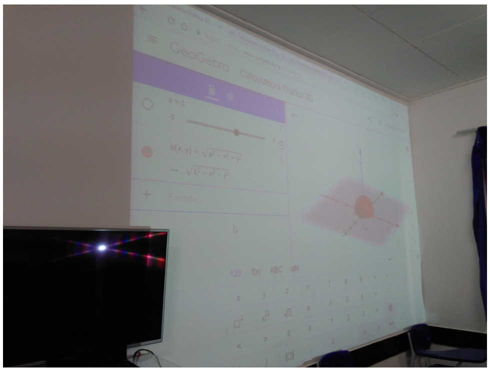
Esse encontro aula aconteceu no dia 03 de dezembro de 2018, em um dia de segunda-feira e teve início por volta das 10h e 20min. Compareceram a esse encontro oito alunos, a professora titular da disciplina e o professor-pesquisador. Para essa aula, estava previsto a última apresentação dos seminários e em seguida aplicaríamos um questionário final da pesquisa.

Salientamos que esse encontro/aula no cronograma inicial estava planejado para ter acontecido na aula anterior, porém, como o primeiro grupo se alongou em sua apresentação, atrasou o término da conclusão desses seminários. Pontuamos também que por um problema técnico não foi possível realizar a filmagem desse encontro/aula.

Essa foi a quarta apresentação e o grupo era constituído pelos alunos A_5 e A_8. Antes de iniciar o seminário, os alunos ficaram discutindo a lista de exercício a ser entregue a professora titular da disciplina, alguns aproveitaram para tirar alumas dúvidas. Esse grupo utilizou como recursos didáticos que variava entre o quadro (utilizado na apresentação do componente A_5) e o datashow (utilizado na apresentação do componente A_8).

Em relação as apresentações anteriores, esse grupo foi dinâmico e inovou em alguns aspectos didáticos. Quem iniciou a exposição foi a aluna A_8 dando alguns exemplos de equações de superfície e para ilustrar tanto geometricamente como algebricamente utilizou o software Geogebra. A seguir temos uma imagem que descreve esse momento:

Figura 38 – Utilização do Geogebra para exemplificar equações de superfícies



Fonte: arquivo da pesquisa, 2018.

Percebemos nessa imagem a projeção gráfica do software mencionado. O início da apresentação desse grupo foi bem interessante e a aluna explorou bem esse recurso tecnológico facilitando o entendimento dos demais alunos. O desenho geométrico ajuda no entendimento de um conceito matemático e os grupos anteriores pecaram bastante nesse sentido.

Prosseguindo, A_8 abordou sobre as representações explícitas e implícitas de uma equação de superfície, bem como sua abordagem parametrizada. Nessa parte, esta ficou um pouco insegura e em parte apenas realizou a leitura do que estava escrito nos slides.

Dando continuidade na apresentação, o aluno A_5 abordou sobre plano tangente e reta normal. Diferentemente de sua colega, este em partes utilizou slides, mas alguns detalhes teóricos que não estavam explícitos ele o esclarecia no quadro. Por exemplo, ele mostrou no slide a definição de plano tangente via os vetores constituídos pela derivadas parcial $\dfrac{\partial r}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial r}{\partial v}$ ao longo de duas curvas u e v em uma superfície S. Enfatizou sobre o vetor normal constituído pelo produto vetorial $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ citados e relembrou no quadro sobre equações do plano tangente e produto vetorial através do seguinte exemplo conceitual: uma superfície S é descrita pela equação $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2 - 1)$ com $0 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq 2\pi$. Determinar os vetores $\dfrac{\partial r}{\partial u}, \dfrac{\partial r}{\partial v}, \dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ para $u = 2$ e $v = \dfrac{\pi}{4}$ e representá-los no ponto correspondente sobre o gráfico de S.

Não foi citado na apresentação, mas esse exemplo foi retirado e adaptado do livro Cálculo B de Gonçalves e Flemming. Na sequência a aluna A_8 iniciou a explicar sobre o conceito de superfícies suaves trazendo a noção intuitiva (ausência de arestas ou vértices) e depois mostrou a condição de suavidade ou regularidade. Quando exemplificou algumas superfícies suaves (plano, cilindro, esferas, etc.) ela fez a seguinte indagação: "*eu quero que vocês dois me expliquem e me tirem um dúvida, por que o cone não é uma superfície suave*?" Quando ela falou "vocês dois" se referia a professora da disciplina e o professor-pesquisado; esse questionamento deixou claro que a aluna falou da noção intuitiva mas não compreendeu. Dessa forma, explicamos para A_8 e todos da sala, que o cone não era uma superfície suave pela existência de um "bico" ou vértice e isso impossibilitava nesse vértice a existência das derivas parciais e por conseguinte não satisfazia a condição de suavidade de uma superfície.

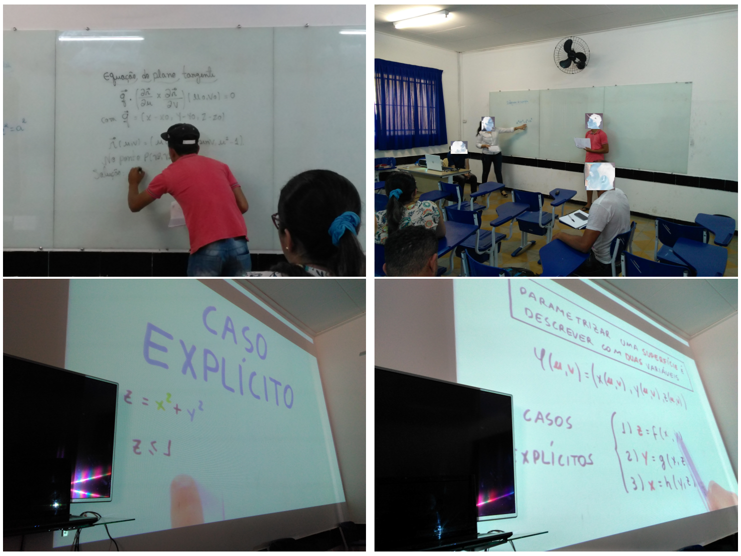
Em seguida, essa aluna abordou superficialmente sobre área de uma superfície, trazendo a seguinte definição retirada de Gonçalves e Flemming (2007, p.382).

> A área de S denotada por $a(S)$, é definida pela equação
>
> $$a(S) = \iint_R \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv$$
>
> quando a integral à direita existe.
> Se S é suave por partes, a área de S é definida como a soma das áreas sobre cada pedaço suave de S.

O aluno A_5 retomou sua participação explicando sobre Integral de superfície em campo escalares e depois num campo vetorial. Essa parte o aluno mostrou muita insegurança e basicamente só houve a leitura das definições. Outros tópicos de conteúdos existentes dentro de Integral de Superfície, como o Teorema de Stokes e o Teorema da Divergência, os alunos não abordaram e confessaram que não conseguiram entender.

Para finalizar a apresentação, o referido grupo trouxe um pequeno vídeo que dava uma ideia geral sobre as representações de uma superfície (explícita, implícita e parametrizada). Foi interessante porque este grupo explorou poucos exemplos e situações práticas com os conceitos abordados o vídeo foi bem didáticos e reforçou essa lacuna. A seguir, trazemos alguns momentos da apresentação desse grupo.

Figura 39 – Momentos da apresentação do quarto grupo



Fonte: arquivo da pesquisa, 2018.

Percebemos que esse grupo, apesar de alguns pontos que necessitassem de uma explicação mais clara, empenhou-se bastante montando estratégias diversificadas como por exemplo o uso do Geogebra e o vídeo no final da apresentação. Os poucos exemplos abordados mostraram pleno domínio e entendimento no que explicava.

A professora titular ao término da apresentação parabenizou todos os grupos pelo esforço e dedicação, afirmando que estava crente que todos em suas apresentações aprenderam bastante apesar de se tratar de conceitos um pouco complexo para quem o aborda pela primeira vez e principalmente essa turma que não teve aula sobre Integrais Múltiplas. Com essa atividade e a entrega da lista de exercício a professora destacou que estaria encerrando os conteúdos dessa disciplina. Ela também agradeceu aos alunos por terem colaborados com a pesquisa.

Em seguida, a professora passou a palavra para o professor-pesquisador que teve a oportunidade de parabenizá-los pela coragem de tomar a responsabilidade de sentar, estudar e preparar uma apresentação de conteúdos não triviais. Nesse momento, este foi interrompido pelo aluno A_4 que relatou o seguinte: "*esses seminários não foi nada fácil, mas a minha parte eu aprendi. Integrais Triplas se fosse de outro modo sua abordagem eu não teria aprendido e nem estudado tanto.*" A professor da disciplina tomando a palavra novamente complementou: "*é porque de certo modo você é obrigado estudar mais por conta da responsabilidade em explicar aquele* *conteúdo*".

O professor-pesquisador fez um comentário sobre a beleza do conteúdo apresentado pelo quarto grupo, mostrando a todos da turma que a matemática é um processo evolutivo. No ensino básico tínhamos um conhecimento matemático que permitia calcular áreas de diversas figuras planas em regiões regulares. Após estudar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II e conhecer as integrais definidas, evoluímos matematicamente e passamos a conseguir calcular área de figuras em superfícies planas definidas em regiões irregulares. Agora, após conhecer as Integrais de Superfície, somos capazes de calcular a área da face de qualquer figura imersa no espaço. E mais, além da noção escalar, existe a noção vetorial dessas integrais que permite o cálculo de fluídos sobre essas superfícies. Ou seja, quanto mais avançamos nos conhecimentos matemáticos, eles nos possibilita a abordar um problema com mais gravidade.

5.8 Aplicação do questionário final da pesquisa

Nesta seção, falaremos do momento da aplicação do último questionário na etapa final da coleta de dados. As perguntas selecionadas foram todas discutidas com o professor orientador da pesquisa visando uma objetividade maior na coleta desses dados.

Antes de entregar os questionários aos alunos foi solicitado que os alunos fossem sinceros nas respostas e que não maquiassem no propósito de agradar o professor-pesquisador ou até mesmo por medo de represálias. Ficou esclarecido sobre a importância dessas respostas, pois em cima delas será construída parte da análise e por conseguinte influenciaria na conclusão da pesquisa. A seguir tem-se as imagens do momento em que foi aplicado esse questionário:

Figura 40 – - Aplicação do questionário final

Fonte: arquivo da pesquisa, 2018.

Após todos os alunos concluírem, o professor-pesquisador fez os agradecimentos finais, pois, encerrava nesse momento a pesquisa de campo. Primeiramente agradeceu por a professora abrir as portas de sua sala de aula para que fosse concretizada essa coletas de dados. Em seguida, aos alunos pelo empenho e por permitirem serem elementos de investigação nessa pesquisa. Após esta fala, houve muitos depoimentos por parte de alguns alunos e por parte da professora da disciplina.

Começamos esses depoimentos pela professora da disciplina CDI-III que agradeceu pelas aulas ministradas do professor-pesquisador, pelos ensinos e por mostrar essa estratégia de ensino-aprendizagem da modelagem matemática para os licenciandos dessa turma. Uma fala que merece destaque da professora foi a seguinte: " *é muito importante esse ambiente de colaboração, pois o conhecimento quando é compartilhado todo mundo aprende.*"

Depois da fala dessa professora, os alunos começaram a interagir e foi criado uma atmosfera de depoimentos. Boa parte dos comentários foram sobre os seminários. A aluna A_1 fez o seguinte relato: "*Eu absorvi muita coisa, principalmente na parte que apresentei, inclusive na aula de outra disciplina consegui resolver uma questão que envolvia volume via integração. Se eu não tivesse apresentado esse seminário não iria saber resolver daquela forma*".

Logo em seguida, a aluna A_8 relatou: "*seminários de cálculo faz o aluno estudar mais do que para uma prova escrita, pois o aluno pesquisa mais, vai mais a fundo nos conceitos e conteúdos.*"

Esses depoimentos confirmam que esta pesquisa, pautada em uma estratégia de ensino-aprendizagem dentro do contexto da modelagem matemática, impactou os alunos e levaram-os a refletirem e propiciar na prática que são capazes de mudar velhos hábitos e serem mais autônomos na busca de uma aprendizado mais significativo. Sendo assim, acreditamos que para esses futuros professores, foi um momento rico para projetarem o uso dessas estratégias em suas aulas.

Após esses diálogos e depoimentos, os alunos pediram um esclarecimento em uma das questões colocadas na lista de exercício. Vale lembrar que essa lista seria parte da última nota na segunda unidade e a data limite para entrega seria no dia 04 de dezembro, ou seja, no dia seguinte a esse décimo encontro/aula. Assim, o professor-pesquisador explorou algumas ideias que ajudariam os alunos no processo de abstração e resolução da situação-problema. Com isso, finalizamos essa aula que marcou o final da etapa de coleta de dados, ficando pendente pegar com a professora titular as resoluções que foram entregues na data limite para entregar conforme foi explicitado anteriormente.

6 INTERPRETAÇÃO DE EVIDÊNCIAS DA PESQUISA

No capítulo anterior estão relatados e descritos todos os encontros/aula realizados durante a etapa da pesquisa de campo. Foi um momento relevante da pesquisa no sentido de tornar concreto um conjunto de ideias, a priori abstratas, presentes apenas em um esboço e planejamento do projeto de pesquisa. Foi nessa etapa que se construiu os dados necessários para validar ou não as premissas levantadas inicialmente e, desses dados, saíram as respostas para a questão norteadora da pesquisa. Evidentemente, para isso ocorrer foi crucial uma análise bem sucedida para trazer uma interpretação correta, ética e científica.

Com essa motivação, pretende-se nesse capítulo fazer uma análise aprofundada dos dados levantados. Salientamos que no capítulo anterior foi descritos os episódios e já realizada uma análise inicial desses dados. Assim, daremos continuidade trazendo uma visão sintética dos principais fatos ocorridos durante a coleta de dados.

A etapa da análise de dados não é uma tarefa trivial. Bogdan e Biklen (1994, p.205) afirmam que:

> Apesar da análise ser complicada, constitui, igualmente, um processo que pode ser dividido em várias fases. Se for encarada como uma série de decisões e tarefas, em vez de ser vista como um imenso esforço de interpretação, a análise de dados surge como algo agradável.

Esse mesmo autor aconselha pesquisadores principiantes que realizem a análise de dados de forma concomitante, ou seja, na medida em que são recolhidos os dados paralelamente o pesquisador já vai efetivando sua análise. Com base nessa reflexão, procuramos nessa pesquisa seguir parcialmente essa recomendação, ou seja, ao término de cada encontro/aula o pesquisador gravava um áudio relatando sua percepção inicial e destacando os principais acontecimentos. No final, quando se concluiu todos os encontros, de imediato iniciamos uma análise mais minuciosa no material coletado que discorreremos nas seções que seguem.

Assim, dividiremos esse capítulo em algumas seções devotadas a realizar uma análise nas atividades escritas, áudios e nos questionários. Dessa análise, procuraremos responder a pergunta norteadora da pesquisa: **Quais as principais contribuições a serem produzidas nos alunos de Licenciatura em Matemática diante do**

ensino-aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral - III relativo às Funções de Várias Variáveis através de Modelos Matemáticos?

6.1 Momento da observação

No início do capítulo anterior apresentamos uma justificativa mostrando os motivos que levaram a separar a coleta de dados em dois momentos: observação e intervenção. Iniciaremos nossa análise pautando nos momentos vivenciados durante os oitos encontros na observação.

Yiin (2016) refletindo sobre as cinco características da pesquisa qualitativa destaca a importância de abranger sobre as condições contextuais onde as pessoas estão inseridas. Nesse sentido, as observações realizadas foram salutares para conhecer melhor cada indivíduo no contexto central da pesquisa: a sala de aula. Foram observadas as interações aluno-professor, aluno-aluno, o comportamento individual, as dificuldades, as perspectivas iniciais em relação a disciplina e sobre alguns conteúdos específicos. Conhecer esse perfil foi fundamental para planejar e se preparar para a segunda etapa: a intervenção.

Durante essa etapa da observação em sala de aula, em alguns momentos foram aplicados alguns questionários pontuais, um no início e outro quando os alunos estavam estudando o conceito de limite com FVV. O primeiro foi aplicado na segunda aula observada, um pequeno questionário contendo duas perguntas abertas da seguinte forma:

1. Do que você estudou até aqui e tendo em vista toda a continuação da ementa, qual sua perspectiva sobre essa disciplina?

2. O que você poderia dizer sobre a importância das Funções de Várias Variáveis para você como futuro professor de Matemática e no contexto da própria Matemática?

A maioria das respostas na primeira pergunta convergia para o mesmo sentido, ou seja, girou em torno da seguinte frase: "*aprimorar mais os conhecimentos do cálculo*".

A segunda pergunta tinha uma relevância maior, pois tangenciava sobre o conteúdo objeto dessa pesquisa. Boa parte das respostas ecoou em tonalidades similares, ou seja, como futuros professores a importância residia no fato de "*ampliação de conhecimento*" e no contexto da própria matemática para "*complementar*" ou dar suporte para outros conteúdos.

Ainda sobre a segunda pergunta, duas respostas chamaram a atenção do pesquisador, embora elas não refletissem de modo separado a importância dessas funções para futuros professores e no contexto da própria matemática. O aluno A_2 respondeu da seguinte da seguinte forma: "*As Funções de Várias Variáveis são muito importantes e comuns em nosso cotidiano, em termos gerais e sistemáticos, problemas físicos e reais raramente dependem de uma só variável. Na verdade nós tendemos a simplificar nossas análises para o universo limitado de nossos conhecimentos*".

Outra resposta teve uma similaridade com a relatada anteriormente, foi a do aluno A_5 descrita da seguinte forma: "*Essencial como quase todos os processos que ocorrem no mundo possuem múltiplas variáveis, este assunto ajuda a compreender a relação entre matemática e realidade.*"

Percebemos nessas duas respostas que esses alunos possuem um bom entendimento da relação entre as funções e sua utilidade nos modelos desenvolvidos em situações práticas do cotidiano, enxergando nas FVV uma possibilidade de ampliar e desenvolver modelos mais realísticos.

No avançar das aulas observadas o pesquisador começou a construir o perfil da turma através dos diálogos entre aluno-aluno, aluno-professor, da postura deles diante das atividades propostas, durante as explicações e sintetizamos nas seguintes informações:

- os alunos tomam nota de tudo o que a professor copia de tal maneira, que em momentos focam mais na escrita do que na explicação;
- boa parte dos alunos tem dificuldades gritantes em operações básicas de limite e derivação;
- os alunos são um pouco retraídos em momentos que a professora tenta dialogar nas explicações. Há certo receio em errar;
- os alunos cooperam e se ajudam bastante nas atividades propostas.

Essas características foram importantes, como já mencionamos, para se preparar e projetar com mais eficiência as atividades da intervenção. Por exemplo, através desse perfil já dava para cogitar que em relação à aplicação da estratégia de ensino-aprendizagem das FVV através de Modelos matemáticos não teria problemas no quesito cooperação, mas um grande desafio seria trabalhar com atividades que fomentaria no aluno a autonomia em buscar as informações.

Quando foi concluído o conceito de limite de FVV na altura da oitava aula, o pesquisador aplicou um questionário com apenas uma questão aberta para saber qual visão os alunos tinham absorvidos sobre esse conteúdo mencionado e qual a relação que eles faziam com limite de função de uma variável. A pergunta foi da seguinte forma: *Existe alguma diferença no estudo de limites envolvendo funções de uma variável e funções de duas variáveis? Justifique.*

As respostas basicamente giraram em torno da seguinte frase: "*a estrutura é a mesma, porém limite com função de duas variáveis é uma forma mais avançada*". Quando foi elaborada essa pergunta a intenção era obter respostas no campo dos domínios das funções, ou seja, a relação entre limites laterais e limites em diversas direções. Porém, os alunos não tocaram nessa diferenciação, talvez por não terem compreendido essa parte ou a pergunta do pesquisador devesse ser mais objetiva.

Com essas considerações, sintetizamos essa análise na parte das observações. Reafirmamos que essa etapa foi fundamental para conhecer melhor o perfil da turma, seu ritmo, as dificuldades e assim poder balizar a próxima etapa, objetivo maior dessa pesquisa.

6.2 Momentos da intervenção: os encontros/aula

Essa etapa foi um momento crucial da pesquisa e para chegar nesse ponto houve um árduo trabalho no sentido de selecionar os modelos matemáticos chaves para cada encontro, o que requereu uma demanda para olhar diversos livros no sentido de encontrar as questões que adequasse no estilo e exigência da nossa pesquisa.

Quando o pesquisador conheceu o perfil da turma durante a fase da observação, já imaginava que seria um grande desafio ensinar os conteúdos envolvendo FVV através de Modelos matemáticos. Os primeiros encontros/aula não foram fáceis, houve momentos de grande angústia, até mesmo de pensar que não conseguiria os dados suficientes para uma boa análise. Os alunos eram muitos retraídos, tinham medo de falar, baixo-estíma em excesso, era natural ouvir quando ia recolher as resoluções falas como: “*eu fiz, mas tenho certeza que está errado*”.

O ensino-aprendizagem no contexto da modelagem matemática requer certos cuidados, principalmente em deixar o aluno produzir e ter autonomia para buscar ou construir seu próprio conhecimento, cabendo ao professor apenas mediar esse processo. Dessa forma, um planejamento minucioso foi muito importante para saber o momento certo e ter paciência para não entrar em cena antes do tempo nem tão pouco demorar demasiadamente, o que não foi algo trivial para alguém que em sala de aula sempre seguiu o modelo usual para ensinar.

Como mencionamos anteriormente, os primeiros encontros foram marcados pela dificuldade dos alunos romperem com hábitos usuais no tocante a resolução das atividades. Quando era entregue cada modelo, o foco era em aplicar alguma operação matemática ou substituir valores que não tinham nexo e apenas refletiam que boa parte dos alunos enfatizam a mecânica sem buscar uma compreensão. O desespero por resultado fazia os alunos forçarem operações sem a mínima compreensão da questão como um todo. Com o avanço das intervenções notamos que os alunos tornaram mais analíticos, começaram a refletir mais antes de começar a usar as ferramentas matemática concernentes a cada questão.

Olsen (2015, p.16) afirma que “um bom pesquisador científico provavelmente é capaz de gerar ou criar um conjunto de dados que sejam úteis para argumentos científicos”. Comungando com esse autor e na preocupação com a responsabilidade de desenvolver uma boa argumentação científica nesse trabalho, durante os encontros/aula podemos afirmar que houve uma oscilação entre momentos que trazia uma clareza e confirmava algumas premissas levantadas na elaboração do projeto de pesquisa, oferecendo dados suficientes para responder a questão norteadora, em outras ocasiões, os dados deixavam tudo nebuloso fomentando momentos de angústias e dúvidas em relação a validação da premissa da pesquisa.

Aplicar essa pesquisa e um curso regular de graduação foi um compromisso no qual o pesquisador teve que equilibrar bem dois fatores fundamentais: coerência com a estratégia de ensino-aprendizagem das FVV através de modelos matemáticos no contexto da modelagem e cumprir com a ementa do curso. Isso exigiu um jogo de cintura, contudo, em alguns momentos o fator tempo forçou o adiantar de algumas etapas que carecia de uma maturação maior para uma conclusão mais efetiva e com paridade exigida pelo percurso da modelagem matemática. Assim, quando os alunos começavam a atividade ou começava a produzir algum resultado e esbarravam em algumas dificuldades e não finalizavam o processo, mas para cumprir com a demanda dos conteúdos o professor-pesquisador tinha que intervir e concluir a questão. Isso levantava dúvidas e angústias, pois fugia dos resultados ideais que se objetivava.

Apesar dessas variações, vale salientar que aqui houve momentos que desencadearam debates ricos, como ficou comprovado nos modelos 2 e 5. Por outro lado, ficou também evidente a necessidade de um espaço para a produção de significados pelos licenciandos e da relevância dessa produção para que eles não sejam simples aplicadores de conhecimentos produzidos por outros.

Os seminários sobre Integrais Múltiplas, apesar de boa parte das apresentações terem sidas superficiais e com alguns déficits, fomentaram nos alunos um sentimento de autonomia e mudança de postura tornando-os capazes de buscar, construir o conhecimento e não apenas ser um receptor de informações. Isso ficou evidenciado nos depoimentos, por exemplo, o mais forte foi da estudante A_1, já descrito anteriormente: "*Eu absorvi muita coisa, principalmente na parte que apresentei, inclusive na aula de outra disciplina consegui resolver uma questão que envolvia volume via integração. Se eu não tivesse apresentado esse seminário não iria saber resolver daquela forma*".

Alguns depoimentos desses alunos, citados nas descrições dos encontros/aula, afirmam que essa maneira os levou a estudar mais o conteúdo, a buscar mais informação e detalhes teóricos sobre o assunto, e, pontuam que se esses mesmos conteúdos tivessem sido trabalhados através de listas e avaliações escritas, eles teriam estudado menos.

Durante toda a pesquisa que realizamos nos encontros/aula da disciplina de CDI-III, procuramos levantar os dados necessários que se concretizassem ou nos fornecessem indícios para responder a seguinte pergunta: **Quais as principais contribuições a serem produzidas nos alunos de Licenciatura em Matemática diante do ensino-aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral - III relativo às Funções de Várias Variáveis através de Modelos Matemáticos?**

No decorrer da pesquisa, a cada encontro tínhamos fragmentos dessa resposta. Percebemos que trabalhar o ensino-aprendizagem das FVV através de modelos matemáticos foi proveitoso e isso ficou evidente em algumas respostas dos alunos no questionário aplicado no último encontro/aula da pesquisa.

Nesse sentido, trazemos aqui algumas perguntas desse questionário e algumas de suas respectivas respostas, no intuito de com alguma dessas respostas e com as outras evidências relatadas, encaminhar, no próximo capítulo, os resultados finais. Desse modo, iniciamos pela pergunta 3 descrita a seguir.

Q_3: Destaque os pontos positivos e negativos da disciplina CDI-III, que você cursou esse semestre. Se pudesse mudar alguma coisa, o que você mudaria?

Destacamos duas respostas descritas abaixo.

A_2: "*As aulas foram claras e a didática é muito boa*".

A_8: "*Se possível trabalharia a modelagem em todos os cálculos para facilitar a aprendizagem*".

Essas respostas sinalizam algum efeito positivo produzido, principalmente na resposta do aluno A_8, pois como futuro professor esse licenciando ficou simpatizado com essa estratégia de ensino-aprendizagem e enxergou nessa estratégia um caminho para fomentar uma melhor compreensão de alguns conceitos do Cálculo e, consequentemente, da matemática em si.

Por outro lado, em relação a pergunta 4 desse questionário, segue.

Q_4: Descreva alguns momentos que mais chamou sua atenção durante os encontros/aula que foram realizados neste semestre? Os alunos responderam:

A_4: "*O momento que o professor começou a aula dele com uma resolução de problemas*[1] *para os alunos responderem de acordo com um conceito que já tem*".

A_8: "*A intervenção com modelagem matemática. Pelo fato de ser algo novo, outra forma de ensino*".

A_6: "*As apresentações em duplas, pois todos aprenderam muito e com certeza levaremos esse aprendizado para o resto de nossas vidas.*"

Diante de tais respostas podemos perceber que os alunos destacaram pontos positivos a respeito do ensino-aprendizagem das FVV no contexto da modelagem matemática.

Na pergunta 5 do questionário - Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina CDI - III, na formação de professores -

[1] Entendemos que o aluno se referiu a abordagem da nossa pesquisa: ensino-aprendizagem de FVV através de modelos matemáticos.

obtivemos algumas respostas descritas abaixo.

A_2: "*Aumenta as formas de interpretar problemas, algo importante tanto para o professor quanto para o aluno*".

A_4: "*Como enxergar essa disciplina com outro olhar, ela ajuda nas outras disciplinas, resumindo ela fecha todo o conteúdo dos assuntos dados*".

A_6: "*Amplia o conhecimento do professor, abri caminhos para as outras disciplinas e áreas e desperta a habilidade de pensar além do que se ver*".

Analisando a fala dos alunos, percebemos que eles enxergaram a disciplina como uma forma de criar meios para resolver problemas não só na área de matemática, como também em outras áreas do conhecimento.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino e a aprendizagem nas disciplinas que compõe o CDI tornaram-se uma grande área de pesquisa em Educação Matemática. Muitos pesquisadores nos últimos anos tem se debruçado com questões diversas no intuito de apresentar alternativas metodológicas para reverter os altos índices de reprovações, desistências e principalmente trazer sentido e significados aos conteúdos que são abordados nessas disciplinas.

As pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior tem conquistado um lugar de destaque, por exemplo, o CDI está dividido em dois grupos: com uma variável e com *n* variáveis. Nesse sentido, a nossa pesquisa está inserida no crescente número de pesquisadores interessados no CDI com *n* variáveis, especificamente no que concernem as FVV.

Assim, durante o estudo teórico e a pesquisa de campo investigamos aspectos relacionados a este tema procurando responder a seguinte questão norteadora: **Quais as principais contribuições a serem produzidas nos alunos de Licenciatura em Matemática diante do ensino-aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral - III relativo às Funções de Várias Variáveis através de Modelos Matemáticos?**

Acreditando na premissa que a Modelagem Matemática, em sala de aula, proporciona oportunidades para se desenvolver estratégias de ensino-aprendizagem que conduza o aluno a um relacionamento mais íntimo e autônomo com a teoria usada no processo, no sentido de compreensão, significado e aplicação, a pesquisa de campo envolveu alunos da Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina CDI-III, onde foram abordadas as FVV através de modelos matemáticos.

Para nós, foi empolgante trabalhar com a metodologia de Modelagem Matemática porque conseguimos levar para sala de aula de uma Universidade uma abordagem não tradicional, levando os alunos, futuro professores, a refletirem e terem outros olhares sobre o CDI. Porém, foi um grande desafio, pois, substituir métodos tradicionais por métodos novos leva certo tempo e requer muito estudo e paciência, até porque tanto o professor como os alunos têm certa resistência em aceitar novas metodologias. Entretanto, foi muito gratificante ver também a mudança deles em relação ao aprendizado das FVV.

Nesse sentido, diante desse grande desafio supracitado, o pesquisador tem, hoje, uma visão diferente sobre a prática em sala de aula. Antes dessa pesquisa, a concepção desse pesquisador era centrada em ter domínio sobre o conteúdo para então efetuar a transmissão aos alunos. Agora, percebe-se que, além de um domínio eficaz sobre os conteúdos, passou-se a enxergar os alunos como protagonistas e indivíduos ativos no processo de ensino-aprendizagem.

Por sua vez, Huanca e Melo (2019) dizem que, ao refletir-se sobre a relevância do processo de ensino-aprendizagem, devemos focalizar nas possíveis contribuições que ele pode trazer à ação prática e reflexiva sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, por meio da estratégia Modelagem Matemática, em particular no que se refere a alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Sobre Modelagem Matemática, o presente pesquisador tinha um conhecimento muito limitado e essa investigação alavancou novos olhares e novos entendimentos sobre esse importante ramo da matemática. Embora tenha muita coisa para aprender, há uma consciência que se evoluiu nesse aspecto.

Ainda que não explorada nessa pesquisa, a tendência de modelagem matemática sócio crítica despertou-nos entusiasmo. Nesse sentido, compreende-se que trabalhar os modelos matemáticos nessa perspectiva fomenta não apenas a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, mas também uma consciência crítica essencialmente importante para o exercício da cidadania. Dessa forma, o que fica é o interesse e a necessidade de realizar novas investigações.

Sobre alguns resultados que conseguimos abstrair durante o processo da pesquisa e a análise dos dados coletados, os momentos mais específicos foram os encontros/aula e deles saíram os resultados de maior peso para essa pesquisa. Também, vale salientar que antes desses encontros houve algumas observações de aulas que, a priori, tinha simplesmente o intuito de situar o andamento do conteúdo e conhecer o perfil da turma. Contudo, não sendo nosso foco, ocasionou em um rico espaço para confrontar e conferir alguns elementos estudados na literatura sobre ensino-aprendizagem das FVV.

Acreditamos que a proposta da pesquisa resultou em uma melhor aprendizagem dos alunos, pois nos encontros/aula foram colocados os modelos matemáticos e foi observado um melhor desempenho após o desenvolvimento do projeto "ensino-aprendizagem de FVV através de modelos matemáticos". Mesmo sem a interferência do pesquisador eles mostraram utilizar as estratégias da modelagem.

Outro ponto que ficou evidente nos últimos encontros/aula foram os depoimentos nas entrevistas sobre os seminários de Integrais Múltiplas. Apesar das exposições terem sido superficiais, contudo, impactou os alunos e reforçou, nestes, o que já vinha sendo fomentando com o ensino-aprendizagem das FVV através de modelos matemáticos, ou seja, a busca da autonomia na construção do conhecimento.

Não pretendemos aqui dizer que tudo ocorreu na mais completa harmonia e mostrar um resultado perfeito. Houve momento de oscilações que variaram entre momentos de dúvida em relação à proposta do projeto de pesquisa e momentos que atenderam claramente aos objetivos propostos. Na verdade, essa não linearidade de resultados indica que de fato nossa pesquisa ocorreu no contexto da modelagem matemática.

Diante da experiência realizada com este trabalho, destacamos o conteúdo das Funções de Várias Variáveis desenvolvidas para alunos do 4º período da disciplina CDI-III do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB, Campus Monteiro com resultados positivos. Com isso, sugerimos que outros professores utilizem da metodologia Modelagem Matemática, bem como a tecnologia digital no ensino de FVV. Isso contribui para que o estudante entenda melhor os conceitos da matemática continua.

Realizada estas considerações, concluímos então, que esta pesquisa pode trazer contribuições para superar as dificuldades existentes no ensino-aprendizagem do CDI no tocante as FVV, além de constatar a necessidade de um espaço para produção de significados pelos licenciandos e da relevância dessa produção para que eles não sejam simples aplicadores de conhecimentos produzidos por outros.

Portanto, a certeza que fica é que o fechamento de uma pesquisa abre possibilidades para o início de tantas outras. Assim sendo, que outros pesquisadores possam aprimorar e suprimir as lacunas que aqui ficaram, para que de luz em luz possamos alcançar o bem comum na educação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem básica . **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 22, p. 19–35, 2004.

ALVES, F. R. V. **Aplicação da Sequência de Fedathi na promoção do raciocínio indutivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011. 397 f. Tese (Doutorado em Educação - Área de Ensino de Ciências e Matemática) — Programa de Pós-graduação em Educação Brasielira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, 2011.

AMORIM, L. I. F.; REIS, F. S. A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise. In: FROTA, C. R.; CARVALHO, A. M. F. T.; BIANCHINI, B. L.(Orgs.). **Marcas da educação matemática no enisno superior**. Campinas: Papirus, 2013.

ARAÚJO, J. L.; ROCHA, A. P.; MARTINS, D. A. Papel da matemática (ou de modelos matemáticos) em ambientes de modelagem: a proposta de Rafael. **REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Natal, n. 17, p. 5 – 12, 2014.

BALDINO, R. R. **Desenvolvimento de essências de Cálculo Infinitesimal**. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática**: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2001.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado em Educação – Área de Didática) — Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BELTRÃO, M. E. P. **Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações – Teoria e Prática**. 2009. 322 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BIANCHINI, W. **Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2016. Disponível em: ⟨http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/calculo2.pdf⟩. Acesso em: 21 out. 2018.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática**: implicações para o ensino-aprendizagem de matemática. Blumenau: FURB, 1996.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 7 – 32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M. S. Concepções e tendências de modelagem matemática na Educação Básica. **Tópicos Educacionais**, Recife, v. 18, n. 1 - 2, p. 118 – 138, 2012.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula**: diferentes vozes em uma investigação. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018.

BURAK, D. Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática. In: BRANDT, C. F. (org.). **Modelagem Matemática: uma perspectiva para Educação Básica**. Ponta Grossa: editora UEPG, 2010. p. 15–38.

CABRAL, T. C. B.; BALDINO, R. R. Cálculo Infinitesimal para um curso de engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 25, n. 1, p. 3–16, 2006. Disponível em: ⟨http://revista.educacao.ws/revista/index.php/abenge/article/view/31/13.⟩ Acesso em: 22 jul. 2019.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: editora Lisboa, 1951.

CHAVES, M. I. A. Repercussões de experiências com modelagem matemática em ações docentes . **REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Natal, n. 17, p. 24 – 45, 2014.

COSTA, A. C. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função**. 2004. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

D’AMORE, B. **Didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Fisica, 2007.

DOMINGOS, R. M. C. **Resolução de problemas e modelagem matemática**: Uma experiência na formação inicial de professores de física e matemática. 2016. 193 f. Dissertação (Educação Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11 – 33.

FROTA, M. C. R. Estilos de aprendizagem matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. v. 5, p. 59 – 79. ISBN 978-85-98092-10-2.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2003.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo B**: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2001. v. 2.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE A. END NAGAMINE, C. M. L. Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1261–1288, 2012.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação**: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

HUANCA, R. R. H.; ASSIS, M. A. P. Resolução de Problemas e Modelização Matemática na Sala de Aula. In: CIACEM - CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Medelin - Colômbia. **Anais Eletrônicos...** Comunicação científica, 2019. Disponível em: ⟨http://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/379/70⟩. Acesso em: 28 mai. 2019.

HUANCA, R. R. H.; MELO, M. B. M. Modelagem matemática: possibilidades para o ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral. In: CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS, 4., 2019, Campina Grande. **Anais eletrônicos...** Campina Grande: Realize, 2019. Disponível em: ⟨http://editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV126_MD1_SA1_ID2078_01072019135656.pdf⟩. Acesso em: 02 out. 2019.

IMAFUKU, R. S. **Sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis**. 2008. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

INGAR, K. V. **A visualização na aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos locais da Função de duas variáveis**. 2014. 202 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

KLÜBER, T. E. Modelagem matemática: revisando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In: BRANDT, C. F. (org.). **Modelagem Matemática: uma perspectiva para Educação Básica**. Ponta Grossa: editora UEPG, 2010. p. 97–114.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. Sobre a Pesquisa Qualitativa na Modelagem Matemática em Educação Matemática. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 883 – 905, 2012.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. v. 2.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2012. v. 1.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: E.P.U., 1992.

OLIVEIRA, F. L. **A produção de conhecimento matemático acerca de Funções de duas variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias**. 2014. 151 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

OLSEN, W. **Coletas de dados**: debates e métodos fundamentais em pesquisa social. Tradução de Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2015.

ONUCHIC, L. Ensino de matemática através da resolução de problemas e modelagem matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. **Anais...** Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003. p. 1–11.

ONUCHIC, L. R.; HUANCA, R. R. A Licenciatura em Matemática: o desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: FROTA, C. R.; CARVALHO, A. M. F. T.; BIANCHINI, B. L.(Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: Papirus, 2013.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F. C. H. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In: ONUCHIC, L. R. et al. (orgs.). **Resolução de Problemas: teoria e prática**. São Paulo: Paco, 2014. p. 53–68.

PINTO, D.; MORGADO, M. C. F. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: editora UFRJ, 2015.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise**: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) — Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (orgs.). **Educação matemática no ensino superior: Pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 81 – 97.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo**: Dificuldades de natureza epstemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) — Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 27, p. 93 –119, 2007.

SANTOS, A. R. **Metodologia científica**: a construção do conhecimento. 7. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SILVA, L. A.; OLIVEIRA, A. M. P. As discussões ente formador e professor no planejamento do ambiente de modelagem matemática. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 299–329, 2012.

SILVA, M. N.; BUENO, S. Modelagem Matemática: uma contribuição para o Ensino Superior. **Tangram – Revista de Educação Matemática**, Dourados, v. 1, n. 3, p. 81–95, 2018.

SILVEIRA, E. **Modelagem matemática em educação no Brasil**: entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na Sala de Aula: resistências e obstáculos. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 1021–1047, 2012.

SOARES, D. S.; SOUTO, D. L. P. Tensões no processo de análise de modelos em um curso de cálculo diferencial e integral. **REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Natal, n. 17, p. 46 – 76, 2014.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007. v. 2.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Rio de Janeiro: Petrópolis, 2002.

TATSCH, K. J. S.; RACHELLI, J.; BISOGNIN, V. Modelagem Matemática no Ensino e Aprendizagem de Funções de Várias Variáveis. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Cominicação científica. Disponível em: ⟨http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6257_3995_ID.pdf⟩. Acesso em: 17 fev. 2019.

THOMAS, G. B. **Calculo**. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009. v. 2.

TREVISAN, E. P. Sólidos de Revolução e o Teorema de Pappus – Guldin: uma experiência em uma turma de Cálculo de Várias Variáveis. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 54, p. 106–115, 2017.

YIIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Porto Alegre: Penso, 2016.

ANEXO A – CARTA PARA COORDENAÇÃO DE CENTRO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Campina Grande, Agosto de 2018

Ilmo Sr.
Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Coordenador do Curso de Matemática
UEPB – Campus VI

Prezado Coordenador

Como professor orientador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, Campus Campina Grande – PB, venho por meio desta, apresentar meu orientando de Mestrado Acadêmico **Izaias Nário da Silva** a esta coordenação do CCHE, a fim de desenvolver sua pesquisa de mestrado intitulada: **Conectando pesquisa e prática: possibilidades para o ensino-aprendizagem de Funções de Várias Variáveis**, que tem por objetivo contribuir significativamente com a formação inicial de futuros professores de Matemática.

Na certeza de contar com seu apoio gostaríamos de sua permissão para que o mesmo venha a realizar a coleta de dados a partir do dia 20 de agosto de 2018, com alunos do 4° período do curso de Licenciatura Plena em Matemática, observando e em alguns momentos intervindo na disciplina: "Cálculo Diferencial de Integral III". Coloco-me à disposição para esclarecimentos que se fizerem necessários.

Atenciosamente,

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca
Orientador da pesquisa

Recebido em
14 de agosto de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI
Prof. Luciano dos Santos Ferreira
Coordenador do Curso de Matemática

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO-TCLE

Pelo presente Termo de Consentimento Livre e Esclarecido eu, ____________________ ____________________, em pleno exercício dos meus direitos me disponho a participar da Pesquisa "O Ensino-aprendizagem das Funções de Várias Variáveis através de modelos matemáticos: uma investigação qualitativa em sala de aula". Declaro ser esclarecido e estar de acordo com os seguintes pontos: O trabalho **O Ensino-aprendizagem das Funções de Várias Variáveis através de modelos matemáticos: uma investigação qualitativa em sala de aula** terá como objetivo geral construir ou reconstruir alguns conceitos de conteúdos relacionados às Funções de Várias Variáveis através de modelos matemáticos no contexto da Modelagem Matemática. Ao voluntário só caberá a autorização para ser observado, fornecer material escrito, responder questionários, autorizar gravações, filmagem e não haverá nenhum risco ou desconforto ao voluntário.

- Ao pesquisador caberá o desenvolvimento da pesquisa de forma confidencial; entretanto, quando necessário for, poderá revelar os resultados ao médico, indivíduo e/ou familiares, cumprindo as exigências da Resolução Nº. 466/12 do Conselho Nacional de Saúde/Ministério da Saúde.
- O voluntário poderá se recusar a participar, ou retirar seu consentimento a qualquer momento da realização do trabalho ora proposto, não havendo qualquer penalização ou prejuízo para o mesmo.
- Será garantido o sigilo dos resultados obtidos neste trabalho, assegurando assim a privacidade dos participantes em manter tais resultados em caráter confidencial.
- Não haverá qualquer despesa ou ônus financeiro aos participantes voluntários deste projeto científico e não haverá qualquer procedimento que possa incorrer em danos físicos ou financeiros ao voluntário e, portanto, não haveria necessidade de indenização por parte da equipe científica e/ou da Instituição responsável.

- Qualquer dúvida ou solicitação de esclarecimentos, o participante poderá contatar a equipe científica no número **(083) 99664-8393** com **Izaias Nário da Silva.**

- Ao final da pesquisa, se for do meu interesse, terei livre acesso ao conteúdo da mesma, podendo discutir os dados, com o pesquisador, vale salientar que este documento será impresso em duas vias e uma delas ficará em minha posse.

- Desta forma, uma vez tendo lido e entendido tais esclarecimentos e, por estar de pleno acordo com o teor do mesmo, dato e assino este termo de consentimento livre e esclarecido.

Assinatura do pesquisador responsável

Assinatura do Participante

ANEXO C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGENS (FOTOS E VÍDEOS)

Eu, ____, **AUTORIZO** o Professor Izaias Nário da Silva, coordenador(a) da pesquisa intitulada: **O Ensino-aprendizagem das Funções de Várias Variáveis através de modelos matemáticos: uma investigação qualitativa em sala de aula** a fixar, armazenar e exibir a minha imagem por meio de fotos ou vídeos com o fim específico de inseri-la nas informações que serão geradas na pesquisa, aqui citada, e em outras publicações dela decorrentes, quais sejam: revistas científicas, jornais, congressos, entre outros eventos dessa natureza.

A presente autorização abrange, exclusivamente, o uso de minha imagem para os fins aqui estabelecidos e deverá sempre preservar o meu anonimato. Qualquer outra forma de utilização e/ou reprodução deverá ser por mim autorizada, em observância ao Art. 5º, X e XXVIII, alínea "a" da Constituição Federal de 1988.

O pesquisador responsável Izaias Nário da Silva, assegurou-me que os dados serão armazenados em meio digital, sob sua responsabilidade, por 5 anos, e após esse período, serão destruídas. Assegurou-me, também, que serei livre para interromper minha participação na pesquisa a qualquer momento e/ou solicitar a posse de minhas imagens. Ademais, tais compromissos estão em conformidade com as diretrizes previstas na Resolução Nº. 466/12 do Conselho Nacional de Saúde do Ministério da Saúde/Comissão Nacional de Ética em Pesquisa, que dispõe sobre Ética em Pesquisa que envolve Seres Humanos.

Monteiro, 10/09/2018.

____

Assinatura do Participante

____

Assinatura do pesquisador responsável

ANEXO D – **TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ**

Eu, ____, depois de entender os riscos e benefícios que a pesquisa intitulada **O Ensino-aprendizagem das Funções de Várias Variáveis através de modelos matemáticos: uma investigação qualitativa em sala de aula** poderá trazer e, entender especialmente os métodos que serão usados para a coleta de dados, assim como, estar ciente da necessidade da gravação de minha entrevista, **AUTORIZO**, por meio deste termo, o pesquisador Izaias Nário da Silva a realizar a gravação de minha entrevista sem custos financeiros a nenhuma parte.

Esta **AUTORIZAÇÃO** foi concedida mediante o compromisso dos pesquisadores acima citados em garantir-me os seguintes direitos:

1. poderei ler a transcrição de minha gravação;
2. os dados coletados serão usados exclusivamente para gerar informações para a pesquisa aqui relatada e outras publicações dela decorrentes, quais sejam: revistas científicas, jornais, congressos entre outros eventos dessa natureza;
3. minha identificação não será revelada em nenhuma das vias de publicação das informações geradas;
4. qualquer outra forma de utilização dessas informações somente poderá ser feita mediante minha autorização, em observância ao Art. 5º, XXVIII, alínea “a” da Constituição Federal de 1988;
5. os dados coletados serão guardados por 5 anos, sob a responsabilidade do(a) pesquisador(a) coordenador(a) da pesquisa Izaias Nário da Silva, e após esse período, serão destruídos e,
6. serei livre para interromper minha participação na pesquisa a qualquer momento e/ou solicitar a posse da gravação e transcrição de minha entrevista.

Ademais, tais compromissos estão em conformidade com as diretrizes previstas na Resolução Nº. 466/12 do Conselho Nacional de Saúde do Ministério da

Saúde/Comissão Nacional de Ética em Pesquisa, que dispõe sobre Ética em Pesquisa que envolve Seres Humanos.

Monteiro, 10/09/2018.

Assinatura do Participante

Assinatura do pesquisador responsável

ANEXO E – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO

Questionário (use o verso, se considerar necessário)

1. Do que você estudou até aqui e tendo em vista toda a continuação da ementa, qual sua perspectiva sobre essa disciplina?

2. O que você poderia dizer sobre a importância das Funções de Várias Variáveis para você como futuro professor de Matemática e no contexto da própria Matemática?

ANEXO F – SEGUNDO QUESTIONÁRIO

Questionário (use o verso, se considerar necessário)

1. Existe alguma diferença no estudo de limites envolvendo funções de uma variável e funções de duas ou mais variáveis? Justifique.

ANEXO G – QUESTIONÁRIO FINAL DA PESQUISA

QUESTIONÁRIO (use o verso da folha, se o espaço para resposta for insuficiente)

1. Você considera que a Matemática é importante? Por quê?

2. Você acha importante que Funções de Várias Variáveis sejam ensinadas no Curso de Licenciatura em Matemática?

3. Destaque os pontos positivos e os negativos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, que você cursou esse semestre. Se pudesse mudar alguma coisa, o que você mudaria?

4. Descreva alguns momentos que mais chamou sua atenção durante os encontros (aulas) que foram realizados neste semestre?

5. Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, na formação de professores.

6. Você consegue visualizar aplicações dos conceitos de Funções de Várias variáveis?

7. A Modelagem Matemática pode ser pensada como uma metodologia de Aprendizagem?