UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MATHEUS MARQUES DE ARAÚJO

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE – PB
2020

MATHEUS MARQUES DE ARAÚJO

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE – PB
2020

A663c Araújo, Matheus Marques de.
A construção do conceito de limite através da resolução de problemas [manuscrito] / Matheus Marques de Araújo. - 2020.
146 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Departamento de Matemática - CCT."

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Resolução de problemas. 3. Educação Matemática. 4. Limites. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

MATHEUS MARQUES DE ARAÚJO

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovado com Distinção em: 07/08/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Pammella Queiroz de Souza

Profa. Dra. Pammella Queiroz de Souza
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico àquele que guia todos os meus passos, Deus, aquela que é a razão do meu viver, minha mãe Girlene, e a responsável por fazer de mim um homem tão feliz, minha irmã Thayanne.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

A Deus pelas oportunidades, orientações, encaminhamento e por abrir várias portas no momento em muitas se fecham.

A todos os bons anjos de luz que Deus colocou em minha vida, especialmente meu primo Aroldo (*in memoriam*). Obrigado por todas as boas inspirações, por me dar confiança e de junto a Deus me orientar para que eu siga no caminho certo.

A meu orientador e amigo, Prof. Dr. Roger Huanca, pela paciência, disponibilidade e confiança. Aprendi e aprendo muito com suas orientações que são verdadeiras aulas, se cheguei até aqui foi porque acreditastes em mim. Levarei seus ensinamentos para além da sala de aula e espero que em um futuro próximo continuemos a realizar grandes trabalhos juntos.

A banca examinadora desta pesquisa, o Prof. Dr. Silvanio, por todas as valiosas contribuições no tocante à Educação Matemática, saiba que seu incentivo e apoio durante toda a Pós-Graduação foram peças fundamentais para a construção e conclusão deste trabalho, foi uma grande honra ter sido seu aluno, e também a Profa. Dra. Pammella, pelas brilhantes considerações e imprescindíveis observações no que diz respeito ao Cálculo Diferencial e Integral, quero que saiba que foi uma grande satisfação tê-la em minha banca examinadora e que sua postura enquanto educadora serve de espelho para mim.

A toda a família UEPB, em especial, os professores do PPGECEM. Sinto-me honrado em poder compartilhar de seus conhecimentos.

A todos os amigos da turma 2018.1, pelas diversas trocas de experiências e conhecimento.

O apoio e parceria dos familiares e amigos que me ajudaram nessa conquista. Deixo aqui um agradecimento especial a minha vó Vanilda, minhas tias Jeane, Gilmara e Lena e meus tios Givaldo e Aramy e a meu amigo Denis.

A todos aqueles que foram meus alunos durante minha passagem enquanto docente, na Universidade Federal de Campina Grande, Campus Cajazeiras. Aprendi com vocês mais do que ensinei. Agradeço também a todos os meus ex-professores e colegas.

E a todas as outras pessoas, que apesar não terem sido citadas aqui, foram muito importantes durante todo esse processo.

Usamos a palavra infinito para descrever algo que seja sem fim, sem limites e sem restrições. O infinito é um conceito desconcertante para a mente, especialmente para nós, que vivemos em um universo fechado e finito, com um número finito de átomos. Em Matemática, o infinito é um número. Ainda que seja o número mais estranhos que conhecemos (SURENDRA; VERMA, 2016).

RESUMO

A matemática dos Limites funciona como o ponto chave da estrutura sob a qual todos os conceitos fundamentais do Cálculo estão construídos. No Ensino Superior o conceito de Limite é visto com bastante apreensão pelos estudantes, com isso acreditamos que a metodologia aplicada pelo professor e as lacunas advindas da Educação Básica, são alguns dos fatores que contribuem para o baixo rendimento na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Considerando-se essas lacunas, por parte dos estudantes, um dos objetivos deste trabalho consistiu em identificar os erros cometidos pelos estudantes a partir de suas atividades e avaliações. Nesta perspectiva, esta dissertação procura responder a seguinte questão: Como o estudo dos erros cometidos pelos estudantes pode ajudar no processo de ensino e de aprendizagem de Limite? Assim, procuramos respostas para essa questão ao coletarmos os dados (trabalhos e atividades) dos estudantes que estavam cursando a disciplina de CDI no ano de 2018 em uma Universidade Pública. Esta pesquisa teve caráter qualitativo e foi apoiada no Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, cujo Modelo apresenta onze atividades. Os dados coletados se deram através dos registros produzidos pelos estudantes durante as aulas de CDI, por meio de diário de campo do professor-pesquisador, ao longo das aulas. A análise destes trabalhos e atividades evidenciou que a compreensão do conceito de Limite não é bem internalizada pelos estudantes, além disso, apontou que a não consolidação de aspectos algébricos do Ensino Básico são fatores que contribuem para um aproveitamento insatisfatório de uma parcela significativa dos estudantes. Esses resultados nos levaram a desenvolver uma proposta de ensino e aprendizagem de Limite fundamentada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, segundo Onuchic e Allevato (2011).

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Limite. Cálculo Diferencial e Integral. Resolução de Problemas. Educação Matemática.

ABSTRACT

The mathematics of the Limits functions as the key point in the structure under which all the fundamental concepts of Calculation are built. In Higher Education the concept of Limit is viewed with great apprehension by students, so we believe that the methodology applied by the teacher and the gaps arising from Elementary education are some of the factors that contribute to low performance in the discipline of Differential and Integral Calculus (CDI). Considering these gaps, on the part of students, one of the objectives of this work was to identify the mistakes made by students from their activities and evaluations. From this perspective, this dissertation seeks to answer the following question: How can the study of the mistakes made by the students help in the process of teaching and learning of the limit? Thus, we sought answers to this question when collecting the data (works and activities) of the students who were studying the discipline of Differential and Integral Calculus in the year 2018 at a Public University. This survey was qualitative in nature and was supported by the Romberg-Onuchic Methodological Model, whose Model features eleven activities. The data collected were obtained from the records produced by the students during Differential and Integral Calculus classes, through the teacher-researcher's field diary, throughout the classes. Analysis of these works and activities showed that the understanding of the concept of limits is not well internalized by the students, and also pointed out that the lack of consolidation of algebraic aspects of Elementary education are factors that contribute to the unsatisfactory performance of a significant portion of the students. These results led us to develop a proposal for teaching and learning the limit based on the Teaching-Learning Methodology-Assessment through Problem-Solving, according to Onuchic and Allevato (2011).

Keywords: Limit Teaching. Differential and integral Calculus. Problem Solving. Mathematical Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS E GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A sala de aula funciona como um grande e moderno laboratório. Todos os eventos que ocorrem nesse ambiente são frutos de experiências realizadas por grandes protagonistas do saber: os estudantes e professores. Esses personagens são responsáveis pela criação de um ambiente rico de aprendizagem, cada um contribuindo à sua maneira.

Lorenzato (2010, p.3) deixa bem claro que “dar aulas é diferente de ensinar. Ensinar é dar condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento”. Pressupomos que para que a sala de aula se torne um ambiente favorável à aprendizagem, faz-se necessário que o professor planeje e construa sua aula com o objetivo de contribuir para a formação dos estudantes enquanto cidadãos, tornando-os capazes de utilizar conceitos, procedimentos e estratégias para explorar e interpretar situações em seus mais diversos contextos.

É com essa percepção que apresentamos neste capítulo o trabalho de pesquisa. Na introdução desse texto apresentamos brevemente toda trajetória profissional e acadêmica do pesquisador. Salientamos que esse trajeto possibilitou experiências, muita aprendizagem e oportunidades. Em seguida explicitamos à justificativa e origem do trabalho, a pergunta da pesquisa, a hipótese e os objetivos, para que por fim possamos apresentar a estrutura da dissertação.

Trajetória profissional e acadêmica

O pesquisador concluiu o curso de Licenciatura Plena em Matemática em 2018. Em 2008 começou a ministrar aulas particulares de reforço, sendo essa sua primeira experiência como docente. Anos depois, já como aluno da graduação, teve o seu primeiro contato formal com a sala de aula, durante a disciplina de Estágio Supervisionado I. Ambas as experiências influenciaram significativamente suas escolhas nos âmbitos profissional e acadêmico.

Durante toda a Educação Básica teve uma formação tradicional, sendo esse o seu modelo de referência até metade da graduação. O primeiro contato com algumas tendências metodológicas ocorreu durante a disciplina de Prática de Ensino I, a partir daí, o seu interesse pela Educação Matemática se intensificou e resolveu que faria uma Pós-Graduação na área.

No ano de 2017, obteve aprovação no PPGECEM[1]/UEPB, modalidade Mestrado Acadêmico, com um projeto voltado para Educação Básica, cujo tema era o Ensino-Aprendizagem de Frações. Coincidentemente, no ano seguinte foi aprovado em um concurso público para professor substituto na mesma instituição onde concluiu a graduação, no Sertão paraibano.

Paralelamente as atividades realizadas nas disciplinas, durante os dois primeiros semestres do mestrado, atuou no Ensino Superior lecionando as disciplinas de CDI I, II nos cursos de Licenciatura em Química, Física e Matemática e as disciplinas de CDI III, Estágio Supervisionado e Metodologia de Ensino de Matemática I no curso de Licenciatura em Matemática.

As disciplinas cursadas durante o mestrado o fez ter um novo olhar a respeito das tendências metodológicas, erros e dificuldades apresentadas pelos estudantes e ao deparar-se com diversos fenômenos ligados ao ensino e aprendizagem do CDI, em especifico com o conceito de Limite, resolveu alterar o foco de sua investigação, direcionando as atenções agora para o processo de ensino e aprendizagem do Limite de Funções Reais.

Descrita a caminhada do pesquisador até aqui, descrevemos na próxima seção a origem e justificativa da investigação.

1.1 Origem e Justificativa da Pesquisa

Esta investigação surgiu a partir das experiências e inquietações vividas em sala de aula e se edificou com o objetivo de contribuir, de maneira significativa, com o ensino e aprendizagem de Limite de Funções Reais, rico em compreensão e significado.

É importante frisarmos que o ensino e a aprendizagem de Matemática em nosso país sempre foi um processo desafiador. Os resultados das últimas avaliações, a nível internacional, revelaram sérias fragilidades dos estudantes brasileiros em Matemática, evidenciando o fato de mais da metade estarem abaixo do nível de proficiência esperado na área.

No momento em que esses estudantes resolvem ingressar no Ensino Superior, seja em cursos de licenciatura ou bacharelados voltados à área das Ciências Exatas[2], essas lacunas

[1] Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
[2] Matemática, Física, Química, Engenharias e etc.

advindas da Educação Básica logo se refletem em seus desempenhos, acentuando-se principalmente em conteúdos que dependem de conceitos prévios.

Além disso, pôr na maioria das vezes estarem envoltos em um universo de concepções tradicionalistas de ensino, boa parte dos estudantes não conseguem superar os obstáculos que surgem no processo de aprendizagem desses conceitos, o que acaba resultando em reprovação e evasão.

A disciplina de CDI é vista com bastante apreensão pelos estudantes universitários e seu insucesso provém justamente da falta de domínio prévio de conceitos chaves da Educação Básica. Essas dificuldades não passaram despercebidas durante a atuação do pesquisador no Ensino Superior.

Os resultados apresentados pelos estudantes nas atividades e avaliações, cujo conteúdo trabalhado era Limite de Funções Reais, foi extremamente preocupante. Os discentes afirmaram não compreender qual significado e aplicação do conceito, além de não conseguirem resolver questões que envolviam casos de fatoração, produtos notáveis, frações algébricas e interpretação gráfica.

A História do Cálculo nos revela que a Resolução de Problemas sempre esteve presente durante a evolução de seus principais conceitos e funcionou como mola propulsora no processo de formalização dos mesmos. Nesse sentido, como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se apresenta como um meio de ensinar e aprender Matemática, nada mais justo do que investirmos e desenvolvermos um caminho de compreensão através dela.

Exposta à justificativa e origem do trabalho, vamos agora detalhar o problema da pesquisa que norteou essa investigação.

1.2 Problema

O problema em questão foi levantado a partir das inquietações vivenciadas durante a experiência profissional do pesquisador, discussões dos textos estudados nas disciplinas ofertadas pelo Mestrado do PPGECEM e do Fenômeno de Interesse a ser investigado. A questão da pesquisa que resume o propósito dessa investigação é apresentada da seguinte forma: **Como o estudo dos erros cometidos pelos estudantes pode ajudar no processo de ensino e aprendizagem de Limite?** Para responder tal questionamento, levantamos a seguinte hipótese a ser apresentada na próxima seção.

1.3 Hipótese

O estudo dos erros cometidos pelos estudantes nos leva a pensar que é possível discutir a compreensão e valorização dos aspectos algébricos do Ensino Básico a partir da proposta metodológica de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. A Resolução de Problemas é vista como o foco principal do processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática, e é através dela que a prática pedagógica do professor é redirecionada e os personagens presentes na sala de aula assumem novos papéis que ressignificam o processo de construção do conhecimento matemático.

Diferentemente do papel exercido na metodologia tradicional, quando o professor organiza sua aula e trabalha a partir da Resolução de Problemas, os estudantes abandonam o papel de observadores e assumem uma função muito importante, a de se envolver na resolução e discussão do problema proposto, estando imersos em um processo de descobertas de habilidades, desenvolvimento de criatividade, autonomia e criticidade.

Neste percurso, o professor assume o papel de mediador e no processo de resolução do problema pode buscar formas de aproveitar, explorar e estimular a curiosidade e capacidade dos estudantes de resolvê-los. Este momento também pode proporcionar ao educador a oportunidade de pensar em novos métodos de avaliação, além de facilitar o planejamento pedagógico das aulas subsequentes com a turma.

De acordo com Luckesi (2002), o erro não pode ser tratado como uma fonte de castigo, pelo contrário, deve dar suporte para o crescimento e conhecimento. Infelizmente, nossa cultura educacional ainda carrega traços de uma visão tradicionalista de ensino que enxerga o erro como um fator negativo no processo de aprendizagem. No entanto, quando o professor o trata como riqueza diagnosticada e possibilita sua utilização no processo de aprendizagem, este está possibilitando a construção de um momento bastante rico em sua sala de aula, favorecendo a produção de conhecimento.

Para responder à pergunta norteadora segue os objetivos da pesquisa.

1.4 Objetivos

O trabalho tem os seguintes objetivos:

- Identificar os erros cometidos pelos estudantes a partir de suas atividades e avaliações.
- Investigar a compreensão do conceito de Limite por parte dos estudantes a partir de suas atividades e avaliações.

- Analisar criticamente a explanação do conceito de Limite em alguns livros de CDI.
- Desenvolver uma proposta de ensino e aprendizagem de Limite de Funções Reais fundamentada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

Apresentados os objetivos, explicitamos agora como está estruturada a pesquisa.

1.5 Estrutura da Pesquisa

O trabalho de pesquisa está organizado da seguinte forma:

Capítulo 2- Iniciando a pesquisa envolvendo o 1º bloco de Romberg-Onuchic: Apresentamos a metodologia da pesquisa baseada no 1º bloco da metodologia proposta por Romberg-Onuchic, particularizando o Fenômeno de Interesse, o Modelo Preliminar da pesquisa em questão, o vínculo do trabalho com outros pesquisadores e o Modelo Modificado.

Capítulo 3- Fundamentação Teórica: Neste capítulo apresentamos as discussões conceituais que deram suporte a este trabalho. Inicialmente apresentamos algumas ponderações a respeito da construção do conceito de Limite, trazendo uma breve introdução à História do CDI e apresentando algumas informações a respeito da inserção da disciplina no currículo do Ensino Superior brasileiro. Em seguida, apresentamos as principais definições, propriedades e teoremas dos Limites de Funções Reais, seguida de uma análise crítica dos livros-textos de CDI. Destacamos os trabalhos realizados sobre temas relacionados ao ensino e a aprendizagem do CDI, especificamente ensino e aprendizagem de Limite de Funções Reais e, ademais, abordamos também a Resolução de Problemas no contexto da Educação Matemática, destacando o papel da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

Capítulo 4- Metodologia- 2º bloco de Romberg-Onuchic: Neste capítulo tornamos a apresentar a metodologia da pesquisa, agora a partir do 2º bloco de Romberg-Onuchic. Essas atividades nos orientaram a escolher adequadamente as estratégias e procedimentos a fim de responder à pergunta da pesquisa.

Capítulo 5 - Coleta e Interpretação de Evidências – 3º bloco de Romberg-Onuchic: Este capítulo trata da análise e interpretação das evidências coletadas a partir dos registros produzidos pelos estudantes em sala de aula.

Capítulo 6- O ensino e aprendizagem de Limite através da Resolução de Problemas: uma proposta com aspectos práticos: Neste capítulo apresentamos problemas geradores para o ensino e aprendizagem do conteúdo de Limite de Funções Reais. Essa proposta é fruto da análise dos dados coletados na pesquisa de campo.

Por fim apresentamos as considerações finais, a referência utilizada e os anexos.

2. INICIANDO A PESQUISA ENVOLVENDO O 1º BLOCO DE ROMBERG-ONUCHIC

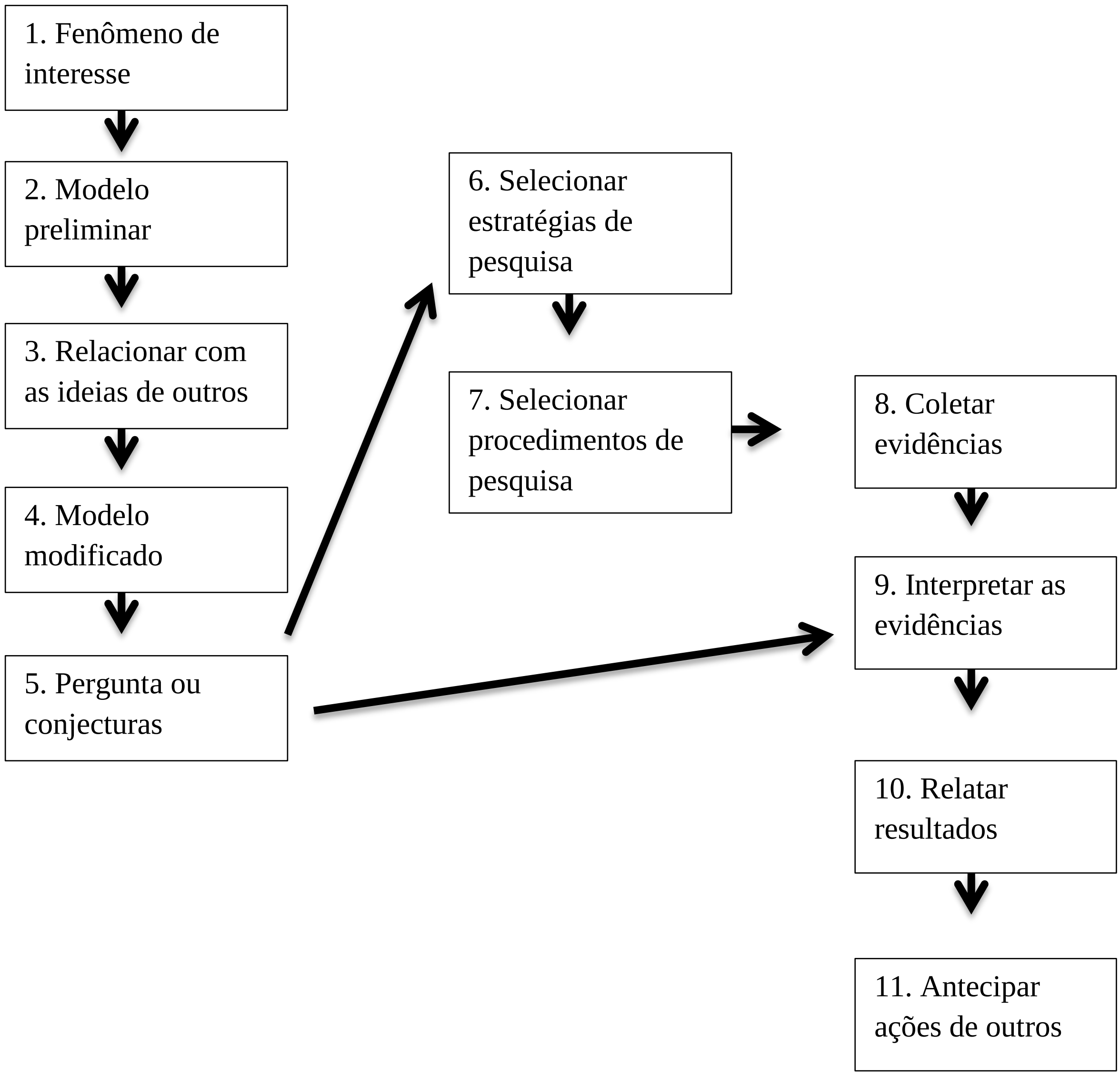
Fazer pesquisa é saltar de um barco à deriva rumo ao desconhecido. É ampliar a capacidade de descobrir novos conhecimentos em qualquer âmbito, seja ele, científico, literário ou artístico. A produção científica é um processo dinâmico e não definitivo, que se origina a partir do momento que institivamente nos dispomos a investigar inquietações de nosso interesse.

Romberg (2008, p.4) ressalta que,

> [...] fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. Como em todas as artes, há um consenso em um sentido amplo sobre que procedimentos devem ser seguidos e o que é considerado como um trabalho aceitável. Estes consensos surgem dos relacionamentos do dia-a-dia dos pesquisadores.

Qualquer atividade, seja ela prática ou teórica, necessita de suportes adequados para a sua execução. Assim, com o intuito de nortear o pesquisador, o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic propõe onze atividades que contribuem para o cumprimento do trabalho de pesquisa. Essas atividades são apresentadas no fluxograma, Figura 1, e estão distribuídas em três blocos:

Figura 1: Atividades de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic e Noguti (2014, p.59)

Assim, é a partir das atividades propostas que damos início ao detalhamento dos caminhos traçados para a pesquisa, abordando quatro atividades envolvendo o 1º bloco de Romberg-Onuchic.

2.1 Fenômeno de Interesse

Na Grécia Antiga, os gregos usavam narrativas conhecidas como mitos com o intuito de explicar fatos e fenômenos da natureza. Podemos citar, como exemplo, a reflexão proposta por Platão na alegoria da caverna, onde o filósofo busca refletir a respeito do conhecimento verdadeiro e a necessidade de se ter acesso a ele. Independentes de terem embasamentos científicos ou não, todas essas manifestações partiram de uma inquietação, de um desejo de explicar o mundo e a sociedade a sua volta.

No contexto da pesquisa em Educação Matemática, toda investigação se inicia a partir de um questionamento, uma curiosidade acerca de algum fenômeno particular próximo do pesquisador. "O Fenômeno de Interesse se manifesta, em geral, no envolvimento de professores; de alunos; de como se relacionam professores e alunos; de como os alunos se comportam nesse processo; de como os professores ensinam e como os alunos aprendem" (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.60). Nesse sentido, compreende-se que é a partir da necessidade de ampliar o campo de visão relacionado a esses fenômenos que o Fenômeno de Interesse se manifesta.

Para Araújo (2019, p.99), "[...] a sala de aula é um ambiente rico de fenômenos e onde se desenrolam situações de aprendizagem que vão muito além do simples ato de explicar e resolver exercícios". Portanto, é muito comum em nossa trajetória profissional depararmo-nos com particularidades que nos leve a algumas reflexões.

Nessa pesquisa, as dificuldades apresentadas por estudantes durante as aulas de CDI, despertou-nos o interesse de refletirmos a respeito dos diversos aspectos inerentes ao ensino e aprendizagem de Limite de Funções Reais. Essas considerações nos fizeram ansiar por algo que pudesse preencher as lacunas existentes neste processo.

Assim, ao buscarmos por respostas e com o objetivo de trazer contribuições a professores e estudantes, alicerçamos o Fenômeno de Interesse nas considerações feitas durante a prática docente do pesquisador, indagações e estudos preliminares. Sobre o tema em questão e por acreditar que é possível conduzir o estudante a um ambiente favorável à aprendizagem, **O ensino e a aprendizagem de Limite através da Resolução de Problemas** é o Fenômeno de Interesse da pesquisa.

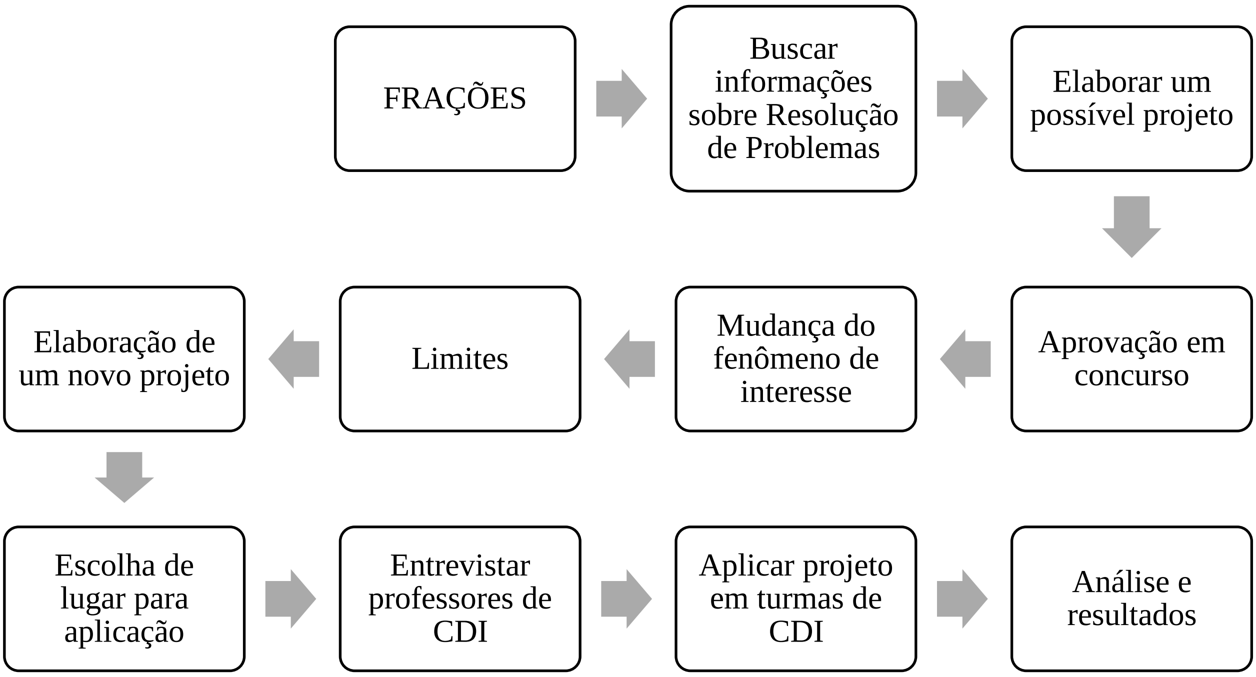
2.2 Modelo Preliminar

Entendemos o Modelo Preliminar como sendo um roteiro para o pesquisador, o seu ponto de partida, a relação entre as variáveis que constituem a ideia inicial de um trabalho e o Fenômeno de Interesse, que podem sofrer modificações de acordo com o desenvolvimento da pesquisa. "Um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados, depois os ilustra em um modelo" (ROMBERG, 2008, p. 6).

O Modelo Preliminar que foi utilizado contou com todas as etapas pelas quais passamos até chegar ao Fenômeno de Interesse. Podemos citar esse conjunto de etapas tais como: (1) Frações, Fenômeno de Interesse inicial do pesquisador, (2) a identificação de dificuldades nos conteúdos que envolvem números fracionários, identificados a partir de uma revisão de literatura nacional e estrangeira, (3) a busca de informações a respeito de tendência metodológicas de ensino, como a Resolução de Problemas, (4) a elaboração de um projeto a partir do embasamento teórico estudado, (5) as experiências vividas no âmbito profissional e acadêmico do pesquisador e seus impactos na pesquisa, (6) e (7) um novo direcionamento para pesquisa em questão, agora centrada na Educação Matemática no Ensino Superior, em especial o ensino de Limite de Funções Reais, (8) elaboração e busca de um local de aplicação de um possível projeto, (9) entrevista com professores de CDI, (10) aplicação do projeto de pesquisa no local escolhido, (11) Tirar conclusões a partir dos dados coletados.

Portanto, segue abaixo, no fluxograma, figura 2, a ideia inicial da pesquisa estruturada em um Modelo Preliminar, explicando cada uma das etapas.

Figura 2: Modelo Preliminar



Fonte: Organizado pelo autor

2.3 Relacionando a Pesquisa com as Ideias de Outros

Segundo Onuchic e Noguti (2014, p. 61), "A partir do Modelo Preliminar, o pesquisador obtém variáveis-chaves que irão auxiliá-lo a identificar e a relacionar o fenômeno e o modelo à ideia de outros". O fluxograma apresentado na Figura 2 determina as seguintes variáveis-chaves: o ensino e aprendizagem de Limite de Funções Reais; a Resolução de Problemas e o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e as dificuldades dos estudantes em CDI.

Nesta pesquisa, o objetivo é trabalhar a construção do conceito de Limite através da Resolução de Problemas, objetivando desenvolver uma proposta de ensino e aprendizagem, a partir dos erros cometidos pelos estudantes em sala de aula. Nessa perspectiva, buscamos nas variáveis-chaves, descobrir o que os outros pensam sobre o Fenômeno de Interesse. Para isso, fez-se necessário termos o auxílio de duas frentes (variáveis-chaves que surgiram do Modelo Preliminar) que expandiram o objeto de pesquisa e então, reservarmos um tópico próprio para cada uma delas, dentro da fundamentação teórica do trabalho.

Após as leituras e levantamento bibliográfico que realizamos, a pesquisa se edificou sobre essas frentes temáticas que consideramos serem fundamentais para o desenrolar do trabalho: O ensino e aprendizagem de Limite e a Resolução de Problemas.

Ensino e Aprendizagem do Limite de Funções Reais

Uma das discussões pertinentes ao Ensino de Matemática no nível Superior refere-se à dificuldade de ensinar e aprender Limite. A História da Matemática revela que por muito tempo diversos problemas fundamentais do CDI foram explorados mesmo que não tivesse uma fundamentação lógica conveniente. As ideias fundamentais do Cálculo começaram a ser estudadas a fundo, em meados do século XIX, evoluindo de noções intuitivas até atingir um patamar de rigor, como a formulação epsilônica, no caso do Limite. Assim, nos convém julgar interessante o difícil processo de compreensão de conteúdos relativos ao Cálculo.

Cornu (1991, apud AMORIM; REIS, 2013) enfatiza a importância do conceito de Limite e o trata como "pensamento necessário" para a construção da Matemática avançada. O autor ainda acrescenta que boa parte das dificuldades apresentadas pelos estudantes se deve a um privilégio de aspectos relativos à manipulação algébrica. Segundo ele,

> No contexto do ensino de Cálculo, pode-se dizer que a noção de limite de funções está mais caracterizada, portanto, como uma operação algébrica do que como uma operação analítica. Esta "algebrização" exacerbada da operação de limite caracteriza bem o que queremos dizer com a "prevalência da técnica sobre o significado". Exercícios de técnicas de derivação e integração também preponderam sobre exercícios de natureza conceitual (REZENDE, 2003, p.14, apud AMORIM; REIS, 2013, p.280).

Resolução de Problemas

De acordo com Onuchic (1999, p.210-211) "Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas como aprende Matemática para resolver problemas", de modo que devemos utilizar os problemas como ponto de partida, não tratando-os como caso isolado, mas sim como um meio de se ensinar Matemática.

Trabalhar problemas por meio de um processo de investigação e descobertas pode ser muito complicado e demandar um tempo, por isso Onuchic e Allevato (2011) nos alertam que,

> Fundamentar a Resolução de Problemas nessas concepções, e implementar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da

> Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que se pretende construir (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82).

Segundo Ferreira et al. (2017), o uso da Resolução de Problemas como metodologia de ensino no Ensino Superior ainda é recente, no entanto, quando utilizada, cumpre bem seu papel, promovendo situações que levem a construção do conhecimento durante a busca por estratégias para a resolução do problema. O autor ainda ressalta que “Nessa ação, os pesquisadores proporcionaram condições para a introdução de novos conceitos como: Derivada; Integral; Equações Diferenciais; Matemática aplicada à administração e outros” (FERREIRA et al, 2017, p.215).

2.4 Modelo Modificado

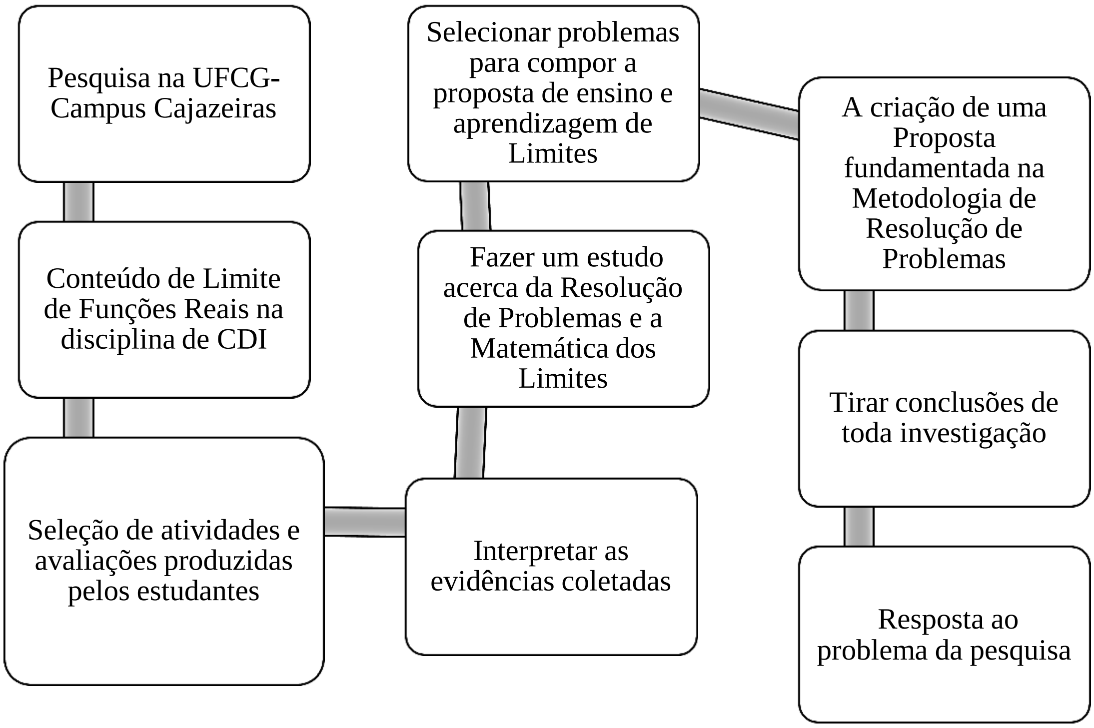
O Modelo Modificado da pesquisa se construiu mediante o amadurecimento frente às discussões relacionadas ao Fenômeno de Interesse do trabalho, um melhor esclarecimento teórico acerca da Metodologia de Resolução de Problemas e um novo olhar, no que diz respeito às dificuldades apresentadas pelos estudantes de CDI.

Onuchic e Noguti (2014) afirmam que ao conhecermos o que os outros pensam sobre suas ideias e concepções, teremos subsídios capazes de preencher as lacunas da pesquisa de modo que saberemos o que modificar do modelo preliminar. As mesmas autoras acrescentam que:

> O *Modelo Modificado* apresenta-se como uma nova atividade no fluxograma e se faz importante a partir do momento que, após “ouvir os outros”, o pesquisador percebe que seu *Modelo Preliminar* encontra-se defasado ou possui poucas informações para ajuda-lo [...] (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 62).

Diante do exposto salientamos que o Modelo Preliminar, como foi inicialmente construído na seção 2.2, funcionou como guia norteador para o Modelo Modificado.

Figura 3: Modelo Modificado



Fonte: Organizado pelo autor

No próximo capítulo, apresentamos o referencial teórico que fundamentou e deu suporte a todo o trabalho de pesquisa.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos todo o referencial teórico que embasou essa investigação. Dentre as principais abordagens, podemos destacar as ponderações realizadas a respeito do CDI, bem como, a História do CDI, o seu processo de implantação, enquanto disciplina, no currículo do Ensino Superior brasileiro e as principais definições, propriedades e teoremas dos Limites. Além disso, podemos evidenciar as discussões realizadas a respeito da importância da Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática.

3.1 Introdução à História do CDI

O desenvolvimento do conceito de número foi um processo lento e gradual. Pressupõe-se que o desenvolvimento da linguagem foi primordial para o surgimento de um pensamento matemático abstrato, uma vez que o uso de sinais para números possivelmente precedeu o uso de palavras.

Historiadores relatam que na antiguidade os homens viviam em cavernas e sua principal atividade de subsistência se baseava na coleta de frutos e captura de animais. Dessa forma, supõe-se que ao realizarem atividades de pesca ou caça, levavam consigo pedaços de ossos ou até de madeira, de forma que para cada animal capturado se fazia um risco.

Com o passar do tempo o modo de viver passou por algumas transformações e os seres humanos passaram a organizar sua vida em sociedade, fixando-se em um só lugar e ampliando suas atividades. Acredita-se que com a introdução da prática pecuária, os antigos pastores, com o intuito de controlar o seu rebanho de ovelhas, usavam uma técnica primitiva de executar operações matemáticas simples por meio de pequenas pedras.

Cada pedra correspondia a uma ovelha, sendo que no início e final do dia, os pastores faziam as devidas correspondências verificando se seu rebanho estava completo. Provavelmente, esta maneira de realizar operações se configurou como um pontapé inicial de um dos ramos mais importantes da Matemática, empregado na resolução de problemas algébricos, aritméticos e geométricos, o **Cálculo**.

A necessidade de registrar quantidades não estava atrelada apenas a atividade pecuária, “mas também de insumos relacionados à sobrevivência e, sobretudo, à organização de sociedade” (ROQUE, 2012, p.35). Naquela época o ato e a necessidade de calcular eram tão importantes, que alguns grupos sociais que exerciam tal função recebiam nomes específicos. As pessoas que contavam e os professores eram conhecidos como, *Calculi* e

Calculones, respectivamente. Escravos e homens livres que tinham a função de contadores eram chamados de *Calculatores* e *Numerarii*.

A palavra cálculo vem do latim Calculus, que significa pedregulho. O Cálculo Diferencial e Integral é resultante do estudo de uma prolongada série de avanços, desenvolvidos a partir da Geometria e Álgebra, na tentativa de buscar estabelecer áreas de figuras com forma arbitrária, volumes de sólidos, acúmulo de quantidades, taxas de variação de grandeza, dentre outros.

O século XVII foi indiscutivelmente um período de muitas descobertas e de desenvolvimento matemático. Todos esses avanços "têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta" (EVES, 2011, p.417).

Embora hoje, textos e cursos básicos de Cálculo tragam uma sequência de conteúdos programáticos padronizados, o desenvolvimento histórico do Cálculo seguiu a contramão, de acordo com Eves (2011, p.417),

> [...] primeiro surgiu o Cálculo Integral e só muito tempo depois o Cálculo Diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

Embora boa parte das raízes históricas do Cálculo se situe durante o século XVII, é importante frisarmos as contribuições que precederam esse período. A seguir, discutimos, inicialmente, os estudos dos matemáticos gregos durante o século V a.C.

Zenão de Eleia (450 A.C)

O filósofo Zenão de Eleia era um dos integrantes da escola dos Eleatas, que tinha como um dos seus representantes o filósofo Parmênides. Zenão foi um dos primeiros pensadores a propor problemas baseados na ideia de infinito. Os Eleatas defendiam que a unidade do espaço e a permanência do ser no tempo correspondiam à ausência de mudança. A demonstração indireta, ou por absurdo, foi um dos procedimentos matemáticos mais importantes herdados pelos Eleatas.

Zenão de Eleia chamou atenção para algumas dificuldades lógicas ocultas, através de alguns paradoxos, que tiveram grande influência na Matemática. Para exemplificar citamos o paradoxo da Dicotomia. Segundo Eves (2011, p. 418), o paradoxo da Dicotomia é enunciado da seguinte forma: “Se um segmento de reta pode ser subdivido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece um quarto do segmento”.

O Método da Exaustão

Os primeiros problemas relacionados à História do Cálculo dizem respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Em meados do quarto século a.C, a Academia Platônica de Atenas se tornara um dos principais centros matemáticos do mundo, dos quais provieram grandes pesquisadores e mestres. Desses, o maior foi Eudoxo (408-355 a.C). Graças a ele, uma severa crise resultante do incomensurável fora enfrentada com êxito, além disso, foi Eudoxo o responsável por fornecer a chave para a solução de problemas envolvendo configurações curvas e retilíneas.

De acordo com Eves (2011), o Método da Exaustão se trata de uma resposta da escola platônica aos Paradoxos de Zenão. Boyer (1974, p.67) explica que segundo Arquimedes “foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado de Axioma de Arquimedes e que serviu de base para o Método da Exaustão”, e que por isso devemos creditar a Eudoxo as provas encontradas em Euclides dos teoremas sobre áreas de círculos e volumes de esferas.

O Método da Exaustão assevera que uma grandeza pode ser subdivida indefinidamente e tem por base a seguinte proposição: “Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e esse processo de subtração é continuado, finalmente se restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie” (BOYER, 1974, p.67).

Os primeiros passos dos processos de integração e diferenciação

Para alguns historiadores, Arquimedes foi o principal percursor do Cálculo. Ele foi o responsável por aperfeiçoar o Método da Exaustão para a prática da integração e enunciar importantes teoremas relacionados ao centro de gravidade de figuras planas e sólidos. Usando o Método da Exaustão, ele foi capaz de calcular a área de um círculo, sendo esse um exemplo bem antigo do uso da integração, o volume da área de uma esfera e cone, dentre outras superfícies.

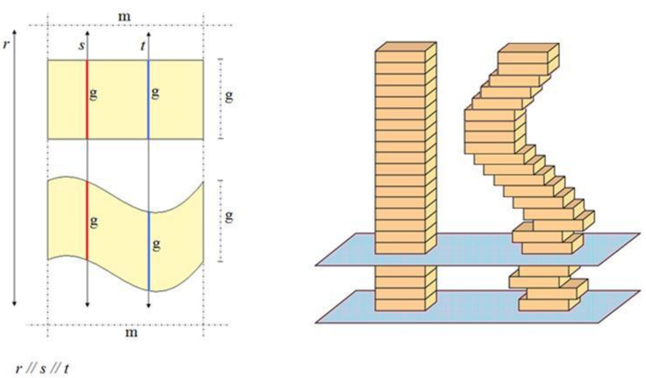
Johann Kleper fora um dos primeiros europeus modernos a desenvolver ideias relacionadas a infinitésimos em trabalhos com integração. “Kleper teve de recorrer a procedimentos de integração a fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho” (EVES, 2011, p.424).

No entanto, Kleper não tinha paciência com o rigor cuidadoso do Método da Exaustão e com o intuito de ganhar tempo e economizar trabalho, acabava por utilizar métodos que Arquimedes consideraria tão somente heurísticos.

Roberval e Cavalieri foram matemáticos que também trouxeram contribuições significativas. Roberval desenvolveu uma técnica capaz de encontrar tangentes baseadas em propriedades cinemáticas das curvas. Para isso,

> Roberval usou o método dos indivisíveis, que havia sido formulado pelo aluno de Galileu chamado Bonaventura Cavalieri, autor de um modo geométrico para calcular áreas publicado em 1635. Essa técnica era baseada na decomposição de uma figura em tiras indivisíveis, pois Cavalieri argumentava que uma linha é composta de pontos, assim como um cordão é formado por contas; um plano é feito de linhas assim como uma roupa, de fios; e um sólido é composto de planos assim como um livro, de páginas. Logo, a área de uma figura seria dada pela soma de um número indefinido de segmentos de reta paralelos. O volume seria a soma de um número indefinido de áreas paralelas (ROQUE 2012, p.347).

Figura 4: Método dos Indivisíveis de Cavalieri



Fonte: http://mauroweigel.blogspot.com/2010/08/bonaventura-cavalieri.html

Roberval, Fermat e Pascal utilizaram o Método dos Indivisíveis para encontrar as áreas delimitadas por diferentes curvas, contudo com modificações, ao invés da área ser decomposta em linhas, agora seria concebida como a soma de um número indefinido de retângulos. Dessa forma, "surgiu, assim, uma nova maneira de calcular áreas por meio da aproximação de uma área por retângulos infinitamente finos, e essa ferramenta podia ser aplicada a qualquer figura curvilínea" (ROQUE, 2012, p.348).

Segundo Eves (2011), o processo de diferenciação originou-se a partir de problemas relativos aos traçados de tangentes a curvas e de questões relacionadas à determinação de máximos e mínimos de funções. Ainda segundo Eves (2011, p.428-429), "Embora essas considerações remontem aos antigos gregos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat, expostas em 1629".

> Kleper observou que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto máximo ou mínimo em comum. Fermat transformou esse método num processo para determinar esses pontos de máximo ou mínimo. [...] Se *f(x)* tem um máximo ou mínimo comum em *x* e se *e* é muito pequeno, então o valor de *f(x-e)* é igual ao de *f(x).* Portanto, pode-se experimentar fazer *f(x-e) =f(x)* e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais *f(x)* assume um máximo ou mínimo (EVES, 2011, p.429).

Esse método estabelecido por Fermat equivale a impor:

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

e igualar a zero. Assim,

> É razoável acompanhar Laplace ao saudar Fermat como descobridor do cálculo diferencial, bem como co-descobridor da geometria analítica. Evidentemente Fermat não tinha o conceito de limite, mas por outro lado seu método para máximos e mínimos assemelha-se ao usado no Cálculo de hoje, só que agora se usa em geral o símbolo *h* ou Δx em lugar do *E* de Fermat. O processo de Fermat de mudar ligeiramente a variável e considerar valores vizinhos é a essencial da análise infinitesimal (BOYER, 1974, p.255).

A partir de seus estudos, Fermat foi responsável por determinar tangentes às seguintes curvas: Fólio de Descartes, elipse, cicloide, cissoide, conchoide e quadratiz.

Wallis e Barrow

John Wallis e Isaac Barrow foram dois grandes matemáticos ingleses que precederam Isaac Newton. Nascido em 1616, Wallis foi um dos matemáticos mais talentosos e originais de sua época. Aluno de Oughtred e professor saviliano de geometria de Oxford fez o uso metódico das séries em análise, o que contribuiu significativamente para os estudos de Isaac Newton.

Em seu livro, *Arithmetica Infinitorum,* Wallis sistematizou e estendeu os métodos de Descartes e Cavalieri, induzindo muitos resultados notáveis a partir de casos particulares. Wallis foi responsável por explicar, de maneira de plausível, o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários; deve-se a ele também a introdução do atual símbolo do infinito (∞), além disso, foi o matemático que mais perto esteve de resolver o desafio de Pascal sobre a cicloide. Um dos seus objetivos era determinar π, buscando encontrar uma expressão para a área $\frac{\pi}{4}$, de um quadrante do círculo $x^2 + y^2 = 1$, o que equivale a calcular,

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

O que não tinha condições de calcular diretamente por desconhecer o Teorema Binomial. Enquanto as contribuições de Wallis ao Cálculo estavam mais voltadas à integração, as mais notáveis contribuições de Barrow estavam ligadas a diferenciação.

Isaac Barrow nasceu em 1630, em Londres. Seu trabalho de maior relevância é *Lectiones opticae et geometricae*, onde se encontra uma abordagem razoavelmente próxima do processo moderno de diferenciação, por meio do chamado *triângulo diferencial*.

> Apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e integração são operações inversas uma da outra. Esse importante descoberta é conhecida como *teorema fundamental do cálculo* e aparece enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow (EVES, 2011, p.435).

A essa altura, o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral já tinha se desenrolado consideravelmente, uma vez que, muitas integrações já haviam sido realizadas, muitas cubaturas e quadraturas, um processo de diferenciação e muitas tangentes às curvas já tinham sido construídos, a ideia de Limite já havia sido concebida e o Teorema Fundamental do Cálculo já conhecido. No entanto,

> Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi à primeira dessas duas coisas, ou seja, à criação de um *cálculo*, manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição (EVES, 2011, p.435).

Dessa forma, ainda que os percussores de Newton e Leibniz tenham dado grandes contribuições, é atribuída a eles a criação do Cálculo em geral.

Newton e Leibniz

Sucessor de Barrow, Isaac Newton nasceu no dia de natal de 1642. Ainda jovem, mostrou-se ter muito talento ao projetar miniaturas engenhosas e regozijar-se com suas primeiras experiências. Ao completar 18 anos, devido a um livro de astronomia que lhe foi concedido, sua atenção se voltou a Matemática. Esse seu interesse, levou-o a explorar as seguintes obras: Os *Elementos* de Euclides, o qual achou óbvio, *La Géométrie* de Descartes, que achou difícil, a Clavis de Oughtred, trabalhos de Kleper e Viète e *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Além disso, devemos acrescentar as aulas que recebeu de Barrow, que estava como "*lucasian professor*". Não demorou muito para que Newton começasse a escrever suas próprias obras, conforme esclarece Boyer (1974, p.287):

> Pelo fim de 1964 Newton parece ter atingindo as fronteiras do conhecimento matemático e estava pronto para fazer contribuições próprias. Suas primeiras descobertas, datando dos primeiros meses de 1665, resultaram de saber exprimir funções em termos de séries infinitas- a mesma coisa que Gregory estava fazendo na Itália pela mesma época, embora dificilmente Newton pudesse saber disso. Newton também começou a pensar em 1665, na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, ou fluentes- tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas. Daí então Newton ligou esses dois problemas- das séries infinitas e das taxas de variação- como "meu método".

Foi durante 1665-1666, que Newton fez quatro de suas principais descobertas: Teorema Binomial, o Cálculo, a Lei da Gravitação e a Natureza das Cores. O Teorema Binomial foi descrito em duas cartas escritas no ano de 1876 a Henry Oldenburg, secretário da Royal Society, e publicado por Wallis (creditando Newton) na *Álgebra* de Wallis de 1685. O processo de descoberta não foi tão simples quanto imaginamos. Foi fruto de inúmeras tentativas e erros da parte de Newton com relação às divisões e radicais envolvendo as quantidades algébricas. Newton generalizou o teorema da seguinte maneira:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n} + \cdots,$$

onde A representa o primeiro termo (ou seja, $P^{m/n}$), B representa o segundo, a saber (m/n AQ), C representa o terceiro e assim por diante. Só depois de 150 anos que o matemático norueguês N.H.Abel (1802-1829) ajustaria com todas devidas restrições, a expansão binomial, para todos os valores complexos do expoente. Boyer (1974, p.289) elucida que,

> O próprio Newton nunca publicou o teorema binomial, nem o provou, mas redigiu e finalmente publicou várias exposições de sua análise infinita. A primeira dessas, cronologicamente, foi a *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta em 1669 com base em ideias adquiridas em 1665-1666 mas publicada só em 1711.

A *De Analysi* de Newton teve uma grande importância, uma vez que, foi à primeira exposição da principal descoberta de Newton, **o Cálculo**. No ano de 1666, Newton não tinha desenvolvido ainda um sistema de fluxos, todavia havia formulado um método sistemático de diferenciação que não estava tão distante do proposto publicado por Barrow em 1670. “Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita. Por isso é que mais tarde ele viu com maus olhos toda tentativa de separar seu cálculo de sua análise por séries infinitas” (BOYER, 1974, p.291).

Newton não foi o primeiro matemático a explorar a relação entre diferenciação e integração no Teorema Fundamental do Cálculo, na verdade sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos em um algoritmo geral que pudesse ser aplicado a todas as funções, sejam elas algébricas ou transcendentes. Na publicação de *principia*, Newton reconheceu que Leibniz estava de posse de um método muito semelhante ao seu, no entanto, após uma disputa acerca da prioridade e descoberta do cálculo, Newton omitiu a referência dada ao cálculo de Leibniz.

Rival de Newton quanto ao título de inventor do Cálculo, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, nasceu em Leipzig no ano de 1646. Ainda criança começou a desenvolver suas primeiras ideias, as quais chamou de *characteristica generalis*, cujas convicções estavam ligadas a Matemática universal, que mais tarde iria irromper na lógica simbólica de Boole (1815-1864) e nos *Principia mathematica*, obra de Whitehead e Russel.

Em 1673, Leibniz foi a Londres em uma missão política e lá comprou o exemplar das *Lectiones geometricae* de Barrow e tornou-se membro da Royal Society. Segundo Boyer (1974, p.293-294),

> É em grande parte em torno dessa visita que gira a querela posterior sobre prioridade, pois Leibniz poderia ter visto a *De Analysi* de Newton em manuscrito; mas é duvidoso que nessa altura ele pudesse tirar grande proveito disso, pois Leibniz não estava ainda bem preparado em geometria ou análise.

Leibniz teve um papel fundamental na mudança sobre a concepção de curva e no desenvolvimento dos Métodos Infinitesimais. Roque (2012, p.355) explica que após a leitura da geometria de Descartes em 1673, Newton,

> [...] considerou seu método de tangentes restritivo. Além de ser complicado não se aplicava a uma grande quantidade de curvas. Umas das principais contribuições de Leibniz foi justamente estender o domínio das curvas para além das algébricas, vistas por Descartes como as curvas da geometria por excelência.

Leibniz inventou seu cálculo entre 1673 e 1676. Pela primeira vez usara o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina soma (summa), em 26 de outubro de 1675. Segundo Eves (2011, p.443), "O objetivo era indicar a soma de indivisíveis". Em poucas semanas, Leibniz já escrevia diferenciais e Derivadas, assim como escrevemos atualmente, $\int x\, dy$ e $\int y\, dx$ para Integrais.

Os artigos escritos por Leibniz sobre Cálculo começaram a ser publicados a partir de 1684 em jornal científico, o Ata dos Eruditos. Em um desses artigos, define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção:

$$dy : dx = y : \text{subtangente}$$

Foi também nesses artigos que Leibniz introduz um novo método para encontrar máximos e mínimos. Com fórmulas simbólicas, expôs regras para encontrar a derivada de somas, diferenças, produtos, quocientes, potências e raízes. Leibniz denominava essas regras de "diferencial". A fórmula para encontrar a derivada enésima do produto de duas funções é conhecida por Regra de Leibniz.

Também foi atribuída a Leibniz a criação da Teoria dos Determinantes em 1693, objetivando o estudo das Equações Lineares, ainda que considerações sobre esses estudos já tivessem sido feitas dez anos antes, pelo japonês Seki K$\bar{o}$wa. Também se deve a Leibniz à generalização do Teorema Binomial para o Teorema Multinomial, fazendo a expansão de:

$$(a + b + c + \cdots + n)^r.$$

Segundo Roque (2012, p.354-355),

> A maior novidade introduzida na Matemática por Newton e Leibniz reside no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre como resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas não se dedicaram a mostrar a generalidade e a potencialidade das técnicas

> empregadas. Além disso, esses problemas eram tratados de forma independente e as semelhanças entre os métodos não eram ressaltadas.

Depois de Newton e Leibniz, os fundamentos do Cálculo permaneceram despercebidos. Só por volta de 1700 que a maior parte do Cálculo, hoje vistos nos cursos de graduação, fora se estabelecer. De acordo com Eves (2011), o primeiro texto de Cálculo foi publicado em 1696 pelo marquês de L'Hospital (1661-1704). Nesse livro, publicou depois de um acordo, as lições que recebera de seu professor particular, Johann Bernoulli. É nesse material que se encontra a chamada *Regra de L'Hôspital*, usada para determinar o limite de uma fração quando há uma indeterminação, ou seja, quando o numerador e denominador tendem a zero.

Apesar da ideia de Limite ter surgido na Grécia antiga, sua conceptualização é recente. Newton havia sido o primeiro matemático a reconhecer a necessidade do uso de limites. A formulação aritmética desse conceito foi formulada por Wallis em seu trabalho *Arithmetica Infinitorum*, no entanto, foi D'Alembert, quem reconheceu explicitamente a necessidade do Limite no Cálculo.

Em sua famosa obra, A *Encyclopédie*, D'Alembert, afirmou que para uma compreensão apropriada do conceito de Derivada era necessária à compreensão primeira de Limite, e enunciou: Um valor é dito limite de outro valor quando o segundo pode se aproximar do primeiro dentro de algum valor dado, de qualquer modo pequeno, embora o segundo valor nunca possa exceder o valor ao qual se aproxima.

O símbolo lim foi empregado pela primeira vez pelo matemático Simon L' Huilier (1750-1789) na sua obra *Exposition élémentaire de calculus supérieurs*, 1786 (DACORSO NETO, 1971, apud NETO, 2006).

3.2 Breve Discussão a Respeito do Ensino de CDI no Brasil

A implementação da disciplina de CDI no currículo universitário brasileiro deu-se no século XIX, sendo ministrada pela primeira vez no ano de 1810, na Academia Real Militar do Rio de Janeiro e anos mais tarde na Escola Politécnica de São Paulo. De acordo com Lima (2013, p.3),

> Tanto nos cursos de Cálculo da Academia Real Militar do Rio de Janeiro quanto nos da Escola Politécnica de São Paulo, as grades curriculares eram construídas com a finalidade de formar profissionais da área militar e engenheiros; ou seja, pessoas que deveriam ser capazes de utilizar, em seu cotidiano profissional, as ferramentas fornecidas pela Matemática ou, para sermos mais precisos, as técnicas de cálculo de derivadas e de integrais, uma

> vez que, aparentemente não eram apresentadas situações práticas envolvendo as aplicações dos conceitos do Cálculo; o conteúdo resumia-se basicamente a derivação e integração, sempre com ênfase nas regras destes processos, nos exercícios de cálculo. E os próprios livros-textos eram adotados levando em consideração este objetivo.

Em 1934, foi criada a primeira universidade do país em São Paulo, a USP. Nesta instituição o modelo de ensino presente nos cursos de Matemática foi implantado pelo italiano Luigi Fantappiè. Os conteúdos do CDI eram trabalhados na disciplina de Análise Matemática, isso porque, nos cursos de Matemática de diversos países da Europa, em especial, a Itália, não havia uma disciplina específica para o estudo do CDI. Enquanto nas escolas militares e politécnicas, citadas anteriormente, o estudo do CDI tinha caráter prático e dava ênfase a um ensino mais prático voltado para a manipulação e procedimentos algoritmos, na disciplina de Análise da USP, priorizava-se a formalização do conteúdo trabalhado, acompanhado de demonstrações.

No início da década de 50, a professora Elza Furtado Gomide percebeu que era importante que uma disciplina, com características menos crítica e mais manipulativa, precedesse a disciplina de Análise Matemática. Suas experiências enquanto discente a fez perceber que os estudantes não tinham certa maturidade matemática para compreender de fato muitos detalhes sofisticados exigidos pela disciplina de Análise.

Gomide defendia que técnicas utilizadas para o cálculo de limite, diferenciação e integração deveriam ser incorporadas a disciplina de Análise, não como monte central, mas sim como uma ferramenta capaz de possibilitar a manipulação desses conceitos, que segundo ela, deveriam ser trabalhados em um primeiro contato. Inicialmente, houve algumas mudanças sutis em relação ao direcionamento do estudo da Análise Real. Buscou-se uma abordagem mais próxima ao Cálculo do que da Análise.

Com o passar do tempo essas mudanças tornaram-se mais significativas. O nível do rigor exigido pela disciplina continuou, no entanto, foi se adequando de acordo com o nível de maturidade Matemática do seu público-alvo. Em 1964, a cátedra de Análise Matemática da FFCL da USP, foi renomeada e passou a se chamar de Cálculo Infinitesimal.

Nos anos que se seguiram, pôde-se observar um processo de transição e a coexistência de dois modelos de ensino: um voltado ao ensino do Cálculo diretamente da Análise e outro que começava a se instaurar: o ensino inicial dos conteúdos de Cálculo precedendo a Análise. Nos primeiros anos dessa transição houve uma preocupação didática por parte dos professores. Essa preocupação advinha de,

> [...] mudanças ocorridas no perfil dos ingressantes nas universidades desde que as mesmas foram criadas no país. Até, pelo menos, o final da década de 1960, os estudantes universitários, em geral, assumiam uma postura mais passiva e não tinham o hábito de questionar os professores a respeito de seus métodos didáticos ou sobre algo que não haviam compreendido bem. Consequentemente, não cobravam de seus professores condições para que pudessem ter um aprendizado mais significativo. Mas, a partir do início da década de 1970, começou-se a observar uma mudança de postura e de perfil por parte dos universitários e, com isso, os professores acabaram precisando buscar alternativas didáticas (LIMA, 2013, p.8).

Uma dessas alternativas era possibilitar que os estudantes pudessem compreender e interiorizar o tratamento rigoroso e formal apresentado naquela situação e não apenas memorizassem a fim de obter resultados satisfatórios nas avaliações. Essa alternativa baseava-se, no caso do curso de Matemática da USP, na adoção do livro *Cálculo: um curso universitário* de Moise, e na implementação de uma metodologia baseada no trabalho em grupo. Entretanto, Lima (2013, p.8) salienta que:

> [...]não havia preocupação em contextualizar aquilo que estava sendo trabalhado. Nos roteiros, notamos que grande parte das questões trabalhadas nos roteiros não fornecia subsídios para que o estudante pudesse perceber em quais contextos – matemáticos ou não – aquilo que estava sendo estudado poderia ser aplicado ou utilizado, o que é fundamental em um curso inicial de Cálculo. As atividades propostas, embora abrissem algum tipo de espaço para a intuição dos alunos, privilegiavam os aspectos formais dos conceitos abordados, ao invés de explorarem algo que, para os pesquisadores da Educação Matemática preocupados com questões ligadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo, é um dos pontos centrais em um primeiro contato dos alunos com a disciplina em questão: os aspectos epistemológicos e cognitivos de seus entes fundamentais.

O ensino de CDI também esteve presente no currículo da escola secundária no Brasil. O ensino de Cálculo fazia parte do programa da 3º série do chamado curso científico. O programa recomendava que conceitos como, derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como Polinômio de Taylor, fossem trabalhados. No entanto, com a reforma proposta pelo Movimento da Matemática Moderna esses conceitos foram retirados do currículo.

Entendemos que a atual estruturação do currículo dos cursos de Matemática, onde as disciplinas de Cálculo e Análise são ministradas separadamente, é conveniente, uma vez que, os estudantes ingressam no Ensino Superior trazendo consigo muitas dificuldades advindas do Ensino Básico, o que dificultaria, em um primeiro momento, a compreensão de alguns fundamentos da Análise. Além disso, essa ordem é justificada a partir do momento em que analisamos essa estruturação de um ponto de vista histórico. Ávila (2002) cita como exemplo, o fato do Cálculo não ter se desenvolvido a partir dos estudos de Arquimedes, ou sucessores imediatos. A preocupação exagerada com o rigor matemático e a tentativa de evitar o infinito, fez com que teoremas importantes, como o Teorema Fundamental do Cálculo, só se formalizassem no final do século XVII.

Atualmente, uma das principais preocupações consiste na busca de uma identidade para o curso de Cálculo. Segundo Lima (2013, p.13), isso se dá em virtude de nunca ter havido "uma preocupação em discutir quais deveriam ser os objetivos específicos dessa disciplina e, principalmente, o seu papel nos mais diversos cursos de graduação".

Ainda de acordo com Lima (2013), no campo universitário o nível de rigor simbólico-formal adotados na disciplina de Cálculo sempre foi cerne central das discussões relativas ao processo de ensino-aprendizagem de CDI. As dificuldades apresentadas pelos estudantes no ingresso do curso de Matemática acabam levando muitos professores a enfatizar em um primeiro curso de Cálculo, técnicas e procedimentos algorítmicos, o que faz com que as formalizações de alguns conceitos deixem de ser prioridade e passem a ser tratados em um segundo momento. Essa valorização excessiva do cálculo de limite, derivadas e integrais sem uma formalização, pode levar o estudante a não refletir a respeito dos significados e aplicações envolvidos no estudo destes conceitos.

Portanto, é preciso fomentar debates que promovam uma discursão a respeito de uma uniformidade em relação aos objetivos do curso de Cálculo, sendo necessário sempre se ter a real consciência da importância que a disciplina de Cálculo tem para a formação do professor de Matemática e de diversos outros profissionais.

3.3 Revisão de Literatura em Teses e Dissertações

Nesta seção apresentamos descrições de trabalhos que compõem o corpus da pesquisa, de modo que seja possível conhecer algumas abordagens realizadas sobre os temas relacionados ao ensino e aprendizagem de CDI, especificamente ensino e aprendizagem do Limite de uma Função.

Para Costa e Costa (2016) a revisão de literatura é à base de sustentação teórica de um trabalho de pesquisa, uma vez que reflete o nível de envolvimento do autor com o tema. Os autores esclarecem que a revisão literária, familiariza o pesquisador com trabalhos existentes relativos ao que tem sido feito, por quem, quando e onde, além de "Fornecer, a partir da delineação crítica de várias posições teóricas, uma moldura conceitual que ofereça base para derivação de hipóteses e sua fundamentação” (BASTOS et al., 1995, apud COSTA; COSTA, 2016, p.33).

Nessa perspectiva, buscamos na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), inicialmente por pesquisas que tinham como foco o Ensino-Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Em seguida, visando delimitar nossa busca, realizamos uma nova procura sobre pesquisas que tratam exclusivamente do ensino e aprendizagem de Limites. A análise dos trabalhos apresentados nos possibilitou compreender os mais diversos enfoques teórico-metodológicos que permitem uma melhor compreensão do Cálculo, possibilitando um melhor aprofundamento do objeto de pesquisa desta investigação.

Assim, apresentamos em ordem cronológica os trabalhos selecionados:

Em sua tese (**Nascimento, 2003**) buscou reexaminar as bases conceituais envolvidas na compreensão da noção de Limite, buscando evidenciar quais os principais obstáculos e dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem. Neste trabalho, foi proposta uma análise qualitativa dos protocolos de Resolução de Problemas, produzidos pelos estudantes participantes da pesquisa, estudantes da área II do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Pernambuco.

O processo de investigação se deu em duas etapas, a primeira envolvendo observações em sala de aula e a segunda etapa tratando-se de sessões individuais de Resolução de Problemas com questões específicas sobre limites, tendo esta etapa o objetivo de observar a sistematização e aplicação de regras e estratégias utilizadas pelos sujeitos da pesquisa, de modo que posteriormente fosse possível analisar os procedimentos utilizados.

A análise dos protocolos de Resolução de Problemas permitiu evidenciar três aspectos importantes interligados as dificuldades apresentadas pelos estudantes: a falta ou fragilidade de conhecimentos prévios básicos, oriundos da educação básica (fundamental e médio), inadequação de alguns modelos de representação e a complexidade do campo conceitual abrangido pela noção matemática de Limite, já que demanda uma associação de conceitos geométricos e existência de metáforas adequadas para abordagem da noção de Limites.

O desenvolvimento dessa investigação propiciou uma melhor abordagem acerca dos obstáculos concernentes ao ensino e aprendizagem do conteúdo em questão, além de fornecer subsídios eficazes para a evolução das propostas didáticas.

Neto (2006) tinha como objetivo analisar uma proposta de exploração do conceito de Limites para os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Em sua questão de pesquisa, buscava entender se seria possível melhorar o envolvimento dos estudantes na aprendizagem do conceito de Limites fazendo uso de softwares como ferramentas auxiliares, para isso resolveu explorar as potencialidades oferecidas pelos softwares Graphmatica, Cabri Géomètre e Excel.

Sua abordagem metodológica se dividiu nas seguintes fases: revisão de literatura, questionários com professores e alunos, elaboração de atividades envolvendo o uso dos softwares e minicursos.

Ao analisar minuciosamente os dados obtidos, o pesquisador ressaltou que os professores que lecionam a disciplina de CDI I preferem uma bibliografia voltada ao formalismo da Matemática, sem se preocupar muito com suas aplicações, divergindo das opiniões dos estudantes, que destacam as aplicações com fator primordial no processo de compreensão de um conceito matemático.

Com relação ao material elaborado e exposto em minicurso, o pesquisador percebeu que o mesmo teve uma boa aceitação por parte de professores e alunos e acredita em sua contribuição para o processo de ensino-aprendizagem, estimulando a reflexão sobre o uso dos recursos tecnológicos em sala de aula.

A pesquisa realizada por **Forster (2007)** teve como público-alvo estudantes do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade de ensino à distância de uma Universidade da Zona Sul de São Paulo. Sua investigação tinha como objetivo apresentar um material sobre o assunto de Limites e Continuidade de Funções com uma Variável Real, de modo que esse material pudesse estar acompanhado de uma metodologia de ensino que valorizasse as tendências em Educação Matemática.

Para a elaboração do trabalho, a autora buscou utilizar a metodologia de design, que segundo a mesma, faz o uso das análises qualitativas, quantitativas e principalmente, da triangulação dos dados coletados em diferentes perspectivas. Para as aulas, a autora da pesquisa e o tutor/professor, buscaram produzir recursos mediáticos, sendo que para as aulas via satélite (semipresenciais), produziram material impresso (apostila), composta por teoria e exercícios contendo o conteúdo programático de toda a disciplina, CDI II.

As atividades foram resolvidas em grupos formados por estudantes de um mesmo polo. Para as aulas web, não presenciais, procuraram selecionar tópicos importantes, principalmente aqueles em que os estudantes apresentaram uma maior dificuldade. O material foi disponibilizado pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem adotado pela instituição, por meio desse ambiente o estudante podia assistir às aulas quantas vezes julgava ser necessário.

Os principais resultados obtidos pela pesquisa revelaram que o material e a metodologia utilizados no curso foram bem aceitos mesmo havendo uma preferência por materiais de mídia impressa. Segundo a pesquisadora, as atividades com diferentes tipos de representação semiótica favoreceram a aprendizagem dos conceitos matemáticos, no entanto, o material referente ao conteúdo de Continuidade não se mostrou capaz de atingir os objetivos e a aprendizagem devendo ser reorganizado.

Celestino (2008) desenvolveu sua pesquisa com um grupo de estudantes do 5° período do curso de Engenharia Elétrica de uma Universidade particular da Zona Leste de São Paulo. Seu objetivo era o de investigar as concepções dos estudantes do Ensino Superior acerca do conceito de Limite e possíveis imbricações entre os obstáculos epistemológicos ali estabelecidos.

Para obtenção de seus resultados, elaborou um conjunto de atividades que se apoiavam no estudo dos obstáculos epistemológicos identificados em pesquisas anteriores que tratavam sobre o conceito de Limite.

As atividades desenvolvidas na pesquisa estavam relacionadas ao conteúdo de Sequências Numéricas e buscavam abordar aspectos acerca das ideias de convergência e monotonicidade, relações entre “ter limite” e “ser limitada”.

Para análise de dados utilizou o software CHIC[3] e fundamentou sua análise tomando como referências as pesquisas de Cornu (1983), Sierpinka (1985) e Robert (1982). Com sua pesquisa foi possível destacar as seguintes imbricações existentes entre os obstáculos ligados a noção de Limite:

> (a) “limite... atinge ou não”?, (b) associar o limite a um movimento físico e o obstáculo do símbolo lim e (c) significados dos termos cotidianos influenciando as percepções dos estudantes sobre esses termos em um contexto matemático (CELESTINO, 2008, p.170).

[3] Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva.

Amorim (2011) discutiu de forma abrangente o ensino de Cálculo e Análise na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior. A autora investigou o papel exercido pelas imagens conceituais e definições conceituais na aprendizagem de Limites de Funções de uma única variável.

O trabalho de enfoque qualitativo fundamentou-se nos trabalhos de Tall, Vinner, Cornu, Pinto e Reis e foi realizado com os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto de Ensino Superior da cidade de Montes Claros. A questão de investigação da pesquisa foi a seguinte: Como uma proposta de ensino, baseada nas imagens conceituais, relacionadas ao conceito de Limite de uma Função, (re)construídas por alunos do curso de Licenciatura em Matemática, após cursarem Análise Real, pode contribuir para a aprendizagem desses alunos?

Com o intuito de responder a sua inquietação, a autora buscou fazer uma análise de como o conceito de Limite é explorado em livros didáticos de Cálculo e Análise utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática e elaborou uma proposta de ensino contendo um conjunto de atividades didáticas a serem aplicadas aos sujeitos da investigação.

Após a aplicação da proposta de ensino e coleta de dados, a autora pôde concluir:

- Que foi possível constatar a difícil natureza do conceito de Limite e as dificuldades presentes durante a ação pedagógica;
- Os livros didáticos abordam o conceito de Limite utilizando uma linguagem epsilônica, além do fato, de os autores considerarem que o conceito de Limite já foi construído anteriormente pelo estudante;
- A importância de identificar e descontruir as imagens conceituais equivocadas apresentadas pelos estudantes;
- É preciso repensar a prática pedagógica e incentivar uma postura mais crítica dos estudantes com o intuito de desmistificar o “horror” a Análise;

Em sua tese, **Escher (2011)** abordou as dimensões teórico-metodológicas do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação no CDI a partir de duas perspectivas: a (1) histórica e (2) ensino e aprendizagem. Sua investigação de caráter qualitativo foi construída com o intuito de responder a seguinte questão: Quais são as dimensões teórico-metodológicas presentes nas inter-relações do Cálculo Diferencial e as Tecnologias Informacionais e Comunicacionais no contexto de ensino e aprendizagem da Matemática?

Analisar os livros didáticos de CDI, realizar uma revisão de literatura relativa ao uso das Tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo e entrevistar professores, que lecionam ou lecionaram a disciplina de Cálculo, foram os procedimentos utilizados para responder à pergunta da pesquisa.

De acordo com o autor, a partir da abordagem das duas perspectivas foi possível evidenciar as seguintes dimensões Teórico-Metodológicas: Linguísticas, Formalistas, Epistemológicas e Socioculturais, sendo possível concluir que,

> As TIC adquirem uma característica forte o bastante para alterar todas as dimensões - Linguagem, Formalista, Sócio-cultural, Metodológicas ou Epistemológicas - assumindo, pois, seu caráter epidêmico, justificando sua característica revolucionária (Castells, 1999) retratado na exposição da teoria com base nos dados desta pesquisa, evidenciado nas pesquisas sobre as TIC, nas Entrevistas com professores, nos livros e na prática do professor (AMORIM 2011, p.141).

Santos (2013) trouxe à tona "Um olhar para o conceito de limite: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos sobre seu Ensino e Aprendizado". Seu principal objetivo foi trazer novas reflexões sobre o conceito de Limite e buscar respostas para alguns questionamentos como: de onde vem à aprendizagem desse conceito, como os livros os apresentam e em que professores universitários se apoiam para ensiná-lo.

Além de uma revisão bibliográfica, a pesquisadora delineou seu percurso metodológico, fazendo uma reflexão profunda sobre o desenvolvimento e constituição do conceito de Limite, a partir da História da Matemática, realizou um estudo do conceito de Limite nos principais livros textos de Cálculo, tendo como suporte a Teoria Antropológica do Didático e das Representações Semióticas, além de explicitar a percepção de professores e estudantes sobre o conceito de Limite.

Ao fazer uma análise minuciosa dos dados obtidos durante a investigação, a pesquisadora evidenciou os seguintes resultados:

- A linguagem adotada nos livros didáticos não é suficiente para atuar como facilitador no processo de compreensão por partes dos estudantes;
- A utilização da História da Matemática por partes dos professores é bem reduzida, o que pode impactar de certa forma a compreensão desse conceito;
- Ausência da definição formal por parte dos livros textos analisados e por parte dos estudantes;

Com o intuito de contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos do CDI e sanar lacunas existentes na aprendizagem dos mesmos, **Santos (2019)**, objetivou em sua dissertação responder a seguinte questão: Que (re)significações sobre os conceitos abordados em Cálculo Diferencial e Integral I podem ser elaborados pelos professores em formação inicial a partir do uso de Mapas Conceituais?

Para realização e coleta de dados dessa investigação, o autor criou um grupo semanal de estudos com os sujeitos de sua pesquisa, quatro licenciandos do Núcleo de Formação Docente de uma Universidade Federal. Nesses encontros, Mapas conceituais a respeito do Cálculo I eram elaborados e discutidos pelos estudantes durante todo semestre letivo.

Segundo o autor da pesquisa, a partir dos dados levantados, foi possível perceber que ao utilizar diferentes estratégias de mapeamento conceitual, os participantes do grupo foram capazes de (re)negociar significados e relacioná-los por meio de proposições adequadas. Além disso, revelou que o uso de Mapas Conceituais pode tornar os conceitos de Cálculo I mais significativos para os estudantes, podendo contribuir para a diminuição da retenção e evasão.

Com o intuito de fornecer uma visão geral dos trabalhos apresentados nessa seção, apresentamos a seguir um quadro com os principais aspectos das pesquisas analisadas.

Quadro 1- Síntese de Pesquisas relativas ao ensino e aprendizagem de CDI

Autor	**Pressupostos Teóricos**	**Cerne dos Dados**	**Principais Resultados**
Nascimento (2003)	Campos Conceituais (Vergnaud, 1997), Construtivismo (Piaget, 1975). Obstáculos epistemológicos e didáticos (Bachelard, 1974 e Brossou, 1976)	Estudantes da área II da UFPE	Fornecer subsídios para uma melhor clarificação dos obstáculos concernentes ao ensino e aprendizagem de Limites
Neto (2006)	Construtivismo (Vygotsky, 1984 e Ausubel, 1983)	Estudantes do curso de Licenciatura em Matemática	Estimular a reflexão sobre o uso de recursos tecnológicos em sala de aula
Foster	Representação Semiótica	Estudantes do	Favorecer a compreensão dos

(2007)	(Duval, 2003). Interacionismo (Piaget, 1975 e Vygotsky, 1984)	curso de Licenciatura em Matemática-Modalidade à distância	conceitos a partir dos diferentes tipos de representação
Celestino (2008)	Pesquisas de Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Robert (1982)	Estudantes do 5º período do curso de Engenharia Elétrica	Identificar possíveis imbricações entre alguns obstáculos
Amorim (2011)	Pensamento Matemático Avançado (Tall, 1991 e Tall e Vinner, 1981)	Estudantes do curso de Licenciatura em Matemática	Identificar, desconstruir e (re)construir imagens conceituais equivocadas
Escher (2011)	TIC’s	Análise dos livros de Cálculo e entrevista com professores	Mostrar as potencialidades das TIC’s e sua característica revolucionária
Santos (2013)	Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1992), Representação Semiótica (Duval, 2003), Teoria de Bakthin (2010)	Análise dos livros textos de Cálculo	Confirmar resultados de estudos anteriores e perceber que a linguagem adotada nos livros didáticos não é suficiente para atuar como facilitador no processo de compreensão por partes dos estudantes
Santos (2019)	Mapas Conceituais (Novak, 2002, 2010)	Licenciandos do Núcleo de Formação Docente	O uso de Mapas Conceituais como estratégia de (re)negociação de conceitos

Fonte: Organizado pelo autor

3.4 Artigos que Tratam do Ensino de CDI e Resolução de Problemas

Neste tópico apresentamos alguns artigos publicados em anais de eventos e revistas nacionais e internacionais voltadas à pesquisa em Educação Matemática. Os conteúdos dessas pesquisas além de trazerem reflexões acerca do processo de ensino e aprendizagem do CDI e Resolução de Problemas, trazem contribuições no que se refere ao uso de metodologias neste processo.

Souza e Fonseca (2017) apresentaram reflexões pertinentes ao ensino e aprendizagem de CDI e propuseram atividades para abordar noções básicas dos Limites e Continuidade, fundamentadas a partir de uma metodologia ativa, a Problem-Based Learning [4] (PBL).

Segundo Ribeiro (2008, apud SOUZA; FONSECA, 2017):

> A Aprendizagem Baseada em Problemas (Problem-Based-Learning- PBL) propõe que tanto o aluno quanto o professor se deparem com situações desafiadoras, o que ocorre por meio da adoção de problemas reais ou realísticos (aqueles passiveis de ocorrer em uma certa área profissional).

Os autores enfatizam a importância do uso de metodologias ativas nas aulas de Cálculo, uma vez que são capazes de enriquecer a dinâmica em sala de aula e consideram que a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) é capaz de fornecer subsídios que favorecem a ressignificação de saberes do cálculo, além de aproximar o estudante do objeto de estudo e contribuir para a construção de conceitos interdisciplinares.

Em seu artigo, **Messias e Brandemberg (2014)** apresentaram resultados que partiram de uma investigação com estudantes universitários sobre o conceito de Limite de uma Função. Sua investigação foi dividida em dois momentos, onde de início buscou aplicar um questionário aos estudantes, englobando aspectos conceituais de Limites e por fim a realização de entrevistas, de modo que a partir dele pudesse fazer uma análise mais detalhada desses aspectos evocados.

A partir das análises relacionadas à temática surgiu a seguinte questão: O limite pode ser alcançado? Os autores puderam observar que as evocações emitidas pelos estudantes se pautaram principalmente na noção de Continuidade de funções. Segundo os autores, essas evocações,

> [...] Permitiram evidenciar que algumas das imagens conceituais evocadas pelos sujeitos investigados não se fizeram coerentes com a definição

[4] Aprendizagem Baseada em Problemas

> conceitual, fato que os influenciou a construir uma definição conceitual pessoal diferente da definição conceitual formal de limite de função (MESSIAS; BRANDEMBERG, 2014, p.208).

Soares (2017) propôs em seu artigo, um trabalho que objetivava identificar quais as características da Teoria dos Três Mundos, proposta por Tall (2008; 2013), podem ser evidenciadas a partir da definição conceitual de Limite de quatros estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.

Para atender os objetivos de sua pesquisa, o autor aplicou um questionário aos estudantes com o intuito de obter a seguinte resposta: O que significa dizer que, dada uma função f, o limite de $f\ (x)$, quando x tende a um número a, é igual a L?

As análises dos dados evidenciaram que os estudantes possuem dificuldades em definir corretamente o conceito de Limite, e das quatro respostas obtidas, apenas uma delas foi considerada totalmente correta.

Com relação às características da Teoria dos Três Mundos surgidas nas respostas dos estudantes, pôde-se perceber que, “todos apresentam características do Mundo Conceitual Corporificado, que é o mundo mais básico, em que definições e aprendizagens são baseadas na visualização de objetos matemáticos (reais ou mentais)” (SOARES, 2017, p.10).

O autor conclui chamando a atenção para a necessidade de uma reflexão acerca dos objetivos das disciplinas de cálculo nos cursos de formação de professores, uma vez que a aprendizagem dos conceitos por parte dos estudantes ainda está em um nível mais básico de apropriação.

Sulczinscki et al. (2019) trouxeram em seu artigo um estudo a respeito do papel das alternativas educacionais dadas a estudantes, a fim de sanarem suas dificuldades e lacunas de conhecimento em conteúdos matemáticos básicos. Neste caso, tiveram por objetivo investigar a necessidade do desenvolvimento de estratégias de acolhimento a estudantes iniciantes que têm os cursos de Matemática como componentes de seus currículos.

A pesquisa foi aplicada a estudantes de uma Universidade pública que possuem algum tipo de deficiência em conteúdos matemáticos básicos. Para atender seu objetivo, os autores buscaram criar grupos de estudos, a fim de entender quais motivos justificavam os altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo. Vale salientar, que os objetivos das atividades trabalhadas no grupo não tinham o intuito de apenas fortalecer a base Matemática dos estudantes iniciantes, mas também dar a oportunidade de estudo aos discentes que não tinham estudado alguns dos tópicos abordados anteriormente.

Ao fim os autores puderam concluir que foi possível evidenciar certa evolução na compreensão de alguns conteúdos, assim como também, foi possível destacar alguns “bloqueios” manifestados pelos discentes durante a realização das atividades.

Fernández e Mora (2019) apresentaram um estudo acerca da formação de professores de Matemática na modalidade à distância e relacionados ao aprendizado da teoria dos Limites das funções. Essa investigação tinha o objetivo de analisar as dificuldades conceituais enfrentadas pelos estudantes, na formação inicial do Ensino de Matemática, em provas escritas de Cálculo Diferencial de uma Universidade da Costa Rica.

Os autores chamam a atenção para a ausência de informações sobre assuntos ligados a Educação à distância e principalmente a formação do professor. Nesse estudo foram levados em consideração três categorias de análise: a dificuldade do formalismo simbólico, a dificuldade da argumentação e a dificuldade conceitual.

A análise dos dados coletados permitiu que o objetivo da pesquisa fosse atendido e com isso foram destacados os seguintes resultados:

- Erros do tipo simbólico e algébrico;
- Dificuldades estreitamente relacionadas ao conceito de limite;
- Os estudantes aplicam mecanicamente a definição de limite, mas não é internalizada ou entendida corretamente, uma vez que em exercícios onde eles devem calcular um limite, essa compreensão não é evidenciada, dada a erros de argumentação encontrados;

Jurado (2016) apresentou um estudo que trouxe uma abordagem panorâmica dos avanços e experimentos de pesquisas que têm como objetivo trabalhar a Formulação de Problemas no ensino de Matemática. Sua pesquisa fundamentou-se principalmente nos trabalhos de Kilpatrick (1987), as publicações na edição especial de Educational Studies in Mathematics (2013) e algumas investigações realizadas na América Latina.

Jurado (2016) relatou que uma das principais inquietações acerca do Ensino-Aprendizagem de Matemática com ênfase na Resolução de Problemas é o fato de quase sempre os problemas desconsiderarem o contexto no qual os estudantes estão inseridos. Segundo o autor,

> [...]cada grupo de estudantes tem suas próprias particularidades, motivações, dificuldades e exigências, bem como seu próprio ambiente sociocultural e conjunto de experiências e conhecimentos anteriores. Tudo isso requer atenção especial do professor e - obviamente - o uso de problemas apropriados a cada conjunto de alunos. Assim, surge claramente um grande desafio para o professor: criar esses problemas. Problemas que estão relacionados a esse contexto educacional específico e que favorecem a aprendizagem [...] (JURADO, 2016, p.79, grifo nosso).

De acordo com Jurado (2016), o avanço nas investigações a respeito da formulação de problemas depende do trabalho interdisciplinar dos educadores matemáticos, que devem buscar sempre integrar as abordagens e resultados encontrados em suas pesquisas.

Assim como fizemos na seção anterior, sintetizamos as investigações descritas nesta seção em um quadro-resumo, de modo que pudemos destacar dos artigos analisados: os objetivos das pesquisas, os sujeitos e os principais apontamentos (resultados).

Quadro 2- Síntese dos artigos relativos ao ensino e aprendizagem de CDI e Resolução De Problemas

Autor	**Objetivos**	**Cerne do estudo**	**Resultados**
Souza e Fonseca (2017)	Propor atividades para abordar noções de Cálculo, tomando como princípio norteador uma metodologia ativa, no caso, a Aprendizagem Baseada em Problemas	Estudantes de CDI	Amenizar certos entraves observados no ensino e na aprendizagem de Cálculo e contribuir com a construção de conhecimentos transdisciplinares
Messias e Brandemberg (2014)	Investigar as imagens conceituais dos sujeitos acerca da relação entre Limite e Continuidade de uma Função	Estudantes do 3º e 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática	Ressaltar as imagens conceituais voltadas para a ideia de que o fato de uma função não estar definida em determinado ponto do domínio implica, necessariamente, na não existência do limite da função naquele ponto
Soares (2017)	Identificar características	Quatro	Concluir que a

	dos três mundos da Matemática propostos por Tall	estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática	aprendizagem desses estudantes ainda está em um nível mais básico de apropriação, levando a crer, a necessidade de repensar os objetivos das disciplinas de Cálculo
Sulczinscki et al. (2019)	Conhecer e descrever as alternativas educacionais dadas a estudantes iniciantes dessa instituição a fim de que possam superar suas dificuldades, sanar lacunas de conhecimento em conteúdos matemáticos básicos e, com isso, alcancem sucesso em suas aprendizagens	Estudantes da disciplina de CDI	Destacar alguns “bloqueios” manifestados pelos discentes durante a realização das atividades
Fernández e Mora (2019)	Analisar as dificuldades conceituais enfrentadas pelos estudantes, em provas escritas de Cálculo Diferencial	Avaliações realizadas pelos estudantes de CDI	Melhorar os processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos e buscar a melhoria do desempenho acadêmico dos estudantes
Jurado (2016)	Apresentar uma visão panorâmica dos avanços nas pesquisas e experimentos de ensino em formulação de problemas	Trabalhos de Kilpatrick (1987), livros sobre a temática estudada e pesquisas realizadas na América Latina	Favorecer o envolvimento com a formulação de problemas nos sistemas de ensino

Fonte: Organizado pelo autor

3.5 A Matemática dos Limites

O estudo da Matemática dos Limites implica na ampliação dos conceitos da Álgebra e das Funções. Neste sentido, apresentamos nesta seção as principais definições, propriedades e teoremas dos Limites de uma Função Real. Para isso, usamos como base os livros-textos de Flemming e Gonçalves (2012), Thomas (2009), Guidorizzi (2013), e Stewart (2014). No final da seção, apresentamos uma análise crítica desses livros-textos.

3.5.1 Limite de uma Função

Podemos definir a ideia de Limite a partir da seguinte definição

Definição 1: Seja $f\ (x)$ uma função definida num intervalo aberto I em torno de a, exceto talvez, no próprio a. Dizemos que o limite de $f\ (x)$ quando x aproxima-se de a é L e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Em outras palavras, podemos dizer que a ideia intuitiva de Limite está associada à ideia de distância entre dois pontos, ou seja, a distância entre $f\ (x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a a, suficientemente pequena (mas não igual à zero).

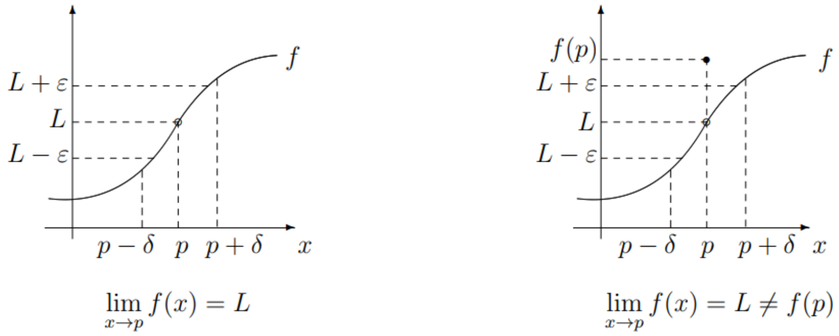
Podemos também, enunciar a definição 1, em termos de intervalos, da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno ε for), **podemos achar** $\delta > 0$ **tal que, se** $\boldsymbol{x}$ **estiver no intervalo aberto** $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, **então** $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$ **estará no intervalo aberto** $(\mathrm{L} - \varepsilon, \mathrm{L} + \varepsilon)$.

Graficamente, podemos interpretar essa definição de acordo com a figura:

Figura 5: Interpretação geométrica de Limites



Fonte: https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma301/Calculo1c-AM6.pdf

3.5.2 Limites Laterais

Dando continuidade ao estudo dos Limites, enunciamos agora a definição de Limites Laterais:

Definição 2: Seja f uma função definida em um intervalo I aberto (a, c). Dizemos que L é o limite à direita de f quando x tende para a e escrevemos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$ >, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que a < x < a + δ.

Usamos o símbolo $x \to a^+$ para indicar que os valores são sempre maiores que a. De maneira análoga, definimos limite à esquerda.

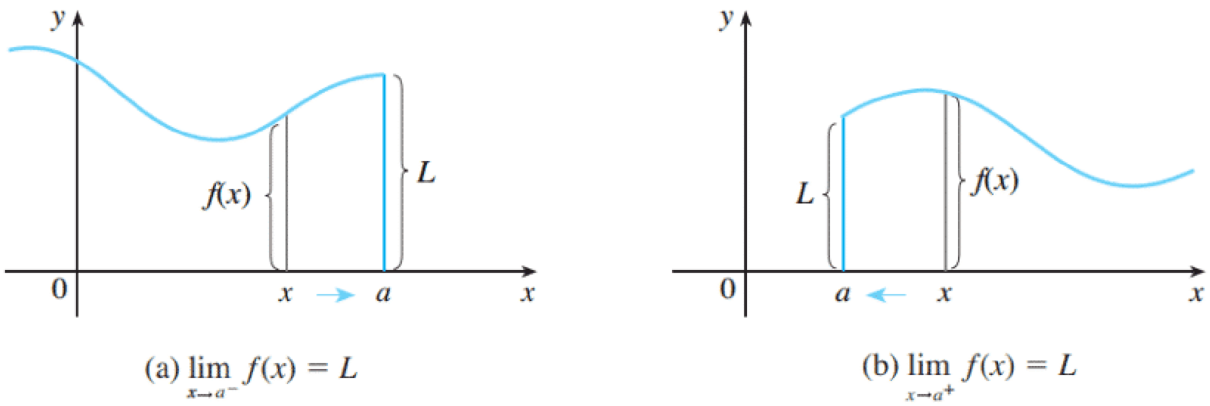
Definição 3: Seja f uma função definida em um intervalo I aberto (d, a). Dizemos que L é o limite à esquerda de f, quando x tende para a e escrevemos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que a – δ < x < a.

Nesse caso, utilizamos o símbolo $x \to a^-$ para indicar que os valores são sempre menores que a. Essas definições são ilustradas na figura a seguir:

Figura 6: Limites laterais pela direita e esquerda



Fonte: https://www.todoestudo.com.br/matematica/limites

Apresentamos agora algumas propriedades operatórias do estudo de Limite.

3.5.3 Propriedades Operatórias

Se L, M, a e K são constantes reais e, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então:

(1) Regra da Soma e Diferença

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x\to a} \; f(x) \;\; + \; g(x)$$

(2) Regra da Multiplicação por constante

$$\lim_{x\to a} Kf(x) = KL = K\lim_{x\to a} \; f(x)$$

(3) Regra do Produto

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

(4) Regra do Quociente

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{desde que } M \neq 0.$$

(5) Regra da Potenciação

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\frac{r}{s}} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\frac{r}{s}}, \text{com } r \text{ e } s \;\in\; Z \;\text{ e }\; s \neq 0, \text{desde que } L^{\frac{r}{s}} \;\in R.$$

Segue algumas demonstrações:

(1) De acordo com a definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe um número positivo δ tal que:

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x-a| < \delta$$

Pela desigualdade triangular temos,

$$|f(x)+g(x)-(L+\mathrm{M})| \leq |f(x)-L| + |g(x)-M|$$

Da hipótese que,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

temos que existem δ_1 e δ_2 tais que:

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ e,}$$

$$|g(x)- M| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } 0 < |x-a| < \delta_2 \text{ .}$$

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, assim,

$$|\ [f(x)+g(x)-(L+M)\ | < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x-a| < \delta$$

(2) Consideremos $Kf\ (x) = 0$ para todo $x\ \in\ D(f)$.

De acordo com a definição de limite, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe um número positivo δ, de tal forma que,

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{|k|}\text{ ,}$$

sendo k um número real diferente de zero. Dessa forma,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |kf(x)-kL| < \varepsilon.$$

(3) Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que,

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow\ |f(x)-L| < \varepsilon$$

e

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow\ |f(x)-M| < \varepsilon$$

Queremos mostrar que:

$$|f(x)g(x)-LM| < \varepsilon.$$

Para isso, tomemos δ = min $\{\delta_1, \delta_2\}$, onde $< 0 < |x-a| < \delta$, temos:

$|f(x)g(x)-\mathrm{LM}|=|(f(x)-\mathrm{L})(g(x)-\mathrm{M})+\mathrm{L}(g(x)-\mathrm{M})+\mathrm{M}(f(x)-\mathrm{L})|$

$\leq |f(x)-\mathrm{L}||g(x)-\mathrm{M}|+|\mathrm{L}||g(x)-\mathrm{M}|+|\mathrm{M}||f(x)-\mathrm{L}|$**.**

A última igualdade foi obtida aplicando a desigualdade triangular. Agora, utilizaremos as hipóteses dos limites de $f\ (x)$ e $g\ (x)$:

$|f(x)-\mathrm{L}||g(x)-\mathrm{M}|+|\mathrm{L}||g(x)-\mathrm{M}|+|\mathrm{M}||f(x)-\mathrm{L}| \leq \varepsilon.\varepsilon + |\mathrm{L}|\,\varepsilon + |\mathrm{M}|\,\varepsilon = \varepsilon\ (\varepsilon + |\mathrm{L}| + |\mathrm{M}|)$.

E, portanto, concluímos que o limite do produto é equivalente ao produto dos limites.

(4) Podemos manipular o limite da seguinte forma:

$$[\,f(x)\,\frac{1}{g(x)}] = \mathrm{L}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}}$$

Se mostrarmos que:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \frac{1}{\mathrm{M}}\ , \mathrm{M} \neq 0$$

concluímos a demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$, existem δ_1 e δ_2 positivos, tais que,

$$0\ <\ |x-a| < \delta_1\ \Rightarrow\ |g(x)|\ >\ \left|\frac{g(x)}{2}\right|$$

e

$$0\ < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow\ |g(x)-\mathrm{M}| < \varepsilon.$$

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, onde $0 < |x-a| < \delta$, temos:

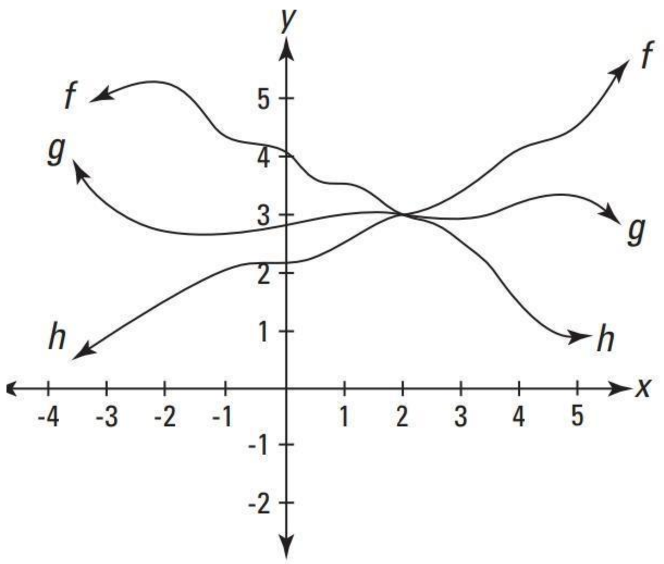
$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right| = \left|\frac{\mathrm{M}-g(x)}{g(x)\cdot\mathrm{M}}\right| = \frac{|\mathrm{M}-g(x)|}{|g(x)||\mathrm{M}|} < \frac{|\mathrm{M}g(x)|}{\frac{|\mathrm{M}|}{2}|\mathrm{M}|} = \frac{2}{\mathrm{M}^2}|\mathrm{M}-g(x)| < \frac{2}{\mathrm{M}}\ \varepsilon.$$

É muito importante apresentarmos as demonstrações das propriedades e dos teoremas durante as aulas de CDI, pois elas são essências para a compreensão dos conceitos. O estudo dessas propriedades a partir de um problema gerador possibilita que o estudante compreenda que estudar o Limite de uma Função não se resume apenas em resolver exercícios e aplicar fórmulas.

3.5.4 Teorema do Confronto

Se não pudermos obter o limite diretamente, talvez seja possível obtê-lo indiretamente com o Teorema do Confronto. Esse teorema se refere a uma função real g cujos valores estão limitados entre os valores de outras duas funções reais, $f\ e\ h$. Se f e h tiverem o mesmo limite quando x se aproxima de a, então g também terá esse limite.

Figura 7: Teorema do Confronto



Fonte: Ryan (2011)

Teorema do Confronto: Se $f\ (x) \leq\ g(x) \leq\ h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)\ = L$$

Então,

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

O Teorema do Confronto também é comumente chamado de Teorema do Sanduíche ou do Imprensamento.

Demonstração:

Por hipótese, sabendo que o limite de f, g e h existem, dado ε>0, existem $\delta_1 > 0\ e\ \delta_2$>0, tais que:

se 0 < $|x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - L|$ < ε (1) e,

se 0 < $|x - a| < \delta_2$, então $|h(x) - L|$ < ε (2).

Então, de (1), temos que $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$, ou seja, $-\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon + L$ para todo *x* tal que 0 < $|x - a| < \delta_1$.

E, de (2), temos que $-\varepsilon < h(x) + L < \varepsilon$, ou seja, $-\varepsilon + L < h(x) < \varepsilon + L$ para todo x tal que 0 < $|x - a| < \delta_2$.

Tomemos, δ = min $\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, se 0 < $|x - a| < \delta$ temos:

$$-\varepsilon + \mathrm{L} < f(x) < \varepsilon + L \text{ e } -\varepsilon + L < h(x) < \varepsilon + L,$$

assim como,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Podemos escrever:

$$-\varepsilon + \mathrm{L} < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \varepsilon + L$$

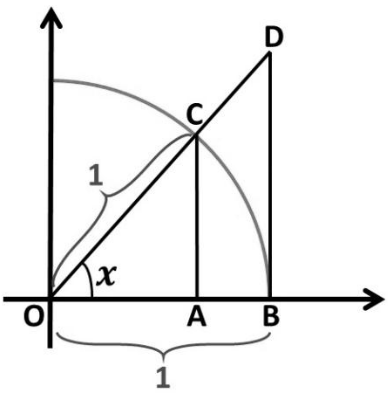
Logo, se 0 < $|x - a| < \delta$, temos $-\varepsilon + L < g(x) < \varepsilon +$ L, ou seja, $|g(x) - L| < \varepsilon$, o que significa que $\lim_{x \to a} g(x) = L$, como queriamos demonstrar.

3.5.5 O Limite Fundamental

Proposição 1 : $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$

Demonstração: Consideremos o setor circular abaixo:

Figura 8: Setor circular de raio 1



Fonte: https://www.dicasdecalculo.com.br/limites-fundamentais/

Seja x a medida em radianos do arco $A\hat{O}C$. Limitamos a variação de x ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Observando a Figura 8, escrevemos as desigualdades equivalentes:

$$\text{área } \Delta COA < \text{área setor } COB < \text{área } \Delta\, BOD.$$

$$\frac{\overline{OA}}{2} \cdot \overline{CA} < \frac{\overline{OB}}{2} \cdot \widehat{BC} < \frac{\overline{OB}}{2} \cdot \overline{BD} \Rightarrow \overline{CA} < \widehat{BC} < \overline{BD}$$

o que implicará em,

$$0 < senx < x < tgx.$$

Dividindo a última desigualdade por $sen\, x$, já que $sen\, x > 0$ para $x \epsilon (0, \frac{\pi}{2})$, temos:

$$1 < \frac{x}{sen\, x} < \frac{1}{cos\, x} \Rightarrow 1 > \frac{sen\, x}{x} > cos\, x$$

Por outro lado, $\frac{sen\, x}{x}$ e $cos\, x$ são funções pares. Então,

$$\frac{sen\,(-x)}{(-x)} = \frac{sen\, x}{x} \text{ e } cos\,(-x) = cos\, x.$$

Portanto, como $cos\, x = 1$, pelo Teorema do Confronto, segue que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1.$$

Caracterizam também como os chamados Limites Fundamentais, os Limites apresentados nas proposições abaixo:

Proposição 2: $\mathbf{lim}_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$, onde e é um número irracional neperiano, cujo valor aproximado é $2{,}718281828459\ldots$.

Proposição 3: $\mathbf{lim}_{x \to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = ln\, a \ (a > 0, a \neq 1)$.

3.5.6 Limites envolvendo Infinito

Limites no Infinito

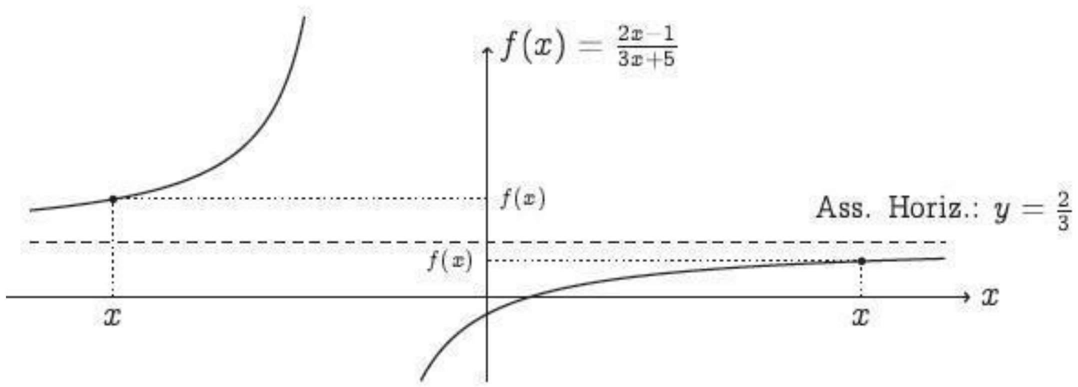
Inicialmente, introduzimos a noção de limite, $\lim_{x \to a} f\,(x) = L$, dos valores da função real $f(x)$ quando x tende ao número a. Uma extensão conveniente dessa ideia é sugerida pelo comportamento da função racional definida por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 5}$$

quando x tende ao infinito, Figura 9.

Vemos pelo gráfico que $f\ (x)$ de $\frac{2}{3}$ quando tomamos x tendendo ao infinito. O mesmo ocorre se tomarmos $x \to -\infty$. Isso nos motiva a darmos as seguintes definições:

Figura 9: Exemplo ilustrando os Limites no infinito



Fonte: https://www.e-scola.edu.gov.cv

Definição 4: Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

O que significa que os valores de $f\ (x)$ ficam arbitrariamente próximos de L, tornando x suficientemente grande. Vale salientar que o símbolo ∞ não representa um número.

Definição 5: Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

O que significa que os valores de $f\ (x)$ ficam arbitrariamente próximos de L, tornando x suficientemente grande em valor absoluto, no entanto negativo. Novamente salientamos que o símbolo∞ não representa um número.

<u>Limites Infinitos</u>

Definição 6: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, mas com $x \neq a$. Então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo N, há um número positivoδ, tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \ \text{ então } \ f(x) > N$$

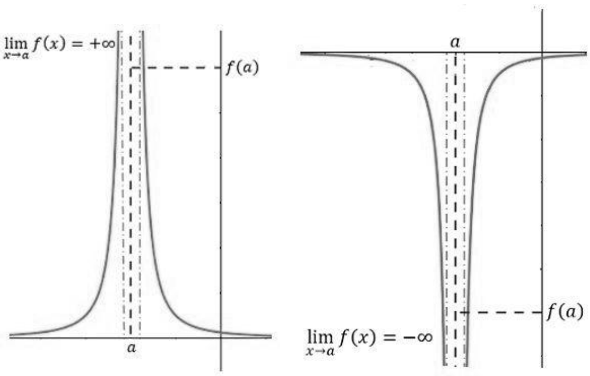
Definição 7: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, mas com $x \neq a$. Então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que para todo número negativo N, há um número positivo δ, tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \ \text{ então } f(x) < -N$$

Figura 10: Limites Infinitos



Fonte: https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/limites-infinitos/

3.5.7 Continuidade

O Limite de uma função quando x tende ao número a pode ser encontrado quando calculamos o valor da função em a. Quando isso acontece dizemos que funções com essa propriedade são ditas contínuas. No seu uso mais comum, entendemos contínuo, como sendo um processo gradual, onde não há interrupções ou mudanças abruptas. De acordo com a definição Matemática:

Definição 8: Uma função é dita contínua em um dado número a se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

O que implica diretamente que,

- A função f está definida em a, ou seja, a está no domínio de f;
- O limite da função $f(x)$ existe;
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

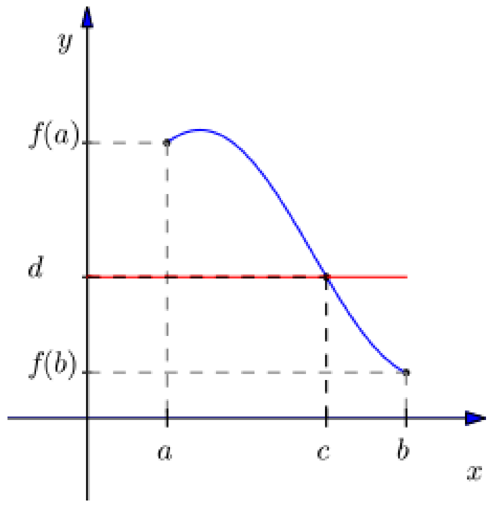
Dizemos que f é descontínua em a, quando não atende uma das condições expostas acima.

Além disso, os seguintes tipos de funções são descontínuas para todo número de seus domínios: **Funções Polinomiais, Funções Trigonométricas, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Funções Racionais, Funções Raízes e Funções Trigonométricas Inversas.**

Uma propriedade muito importante das funções contínuas está expressa no teorema a seguir. Segundo o Teorema do Valor Intermediário, uma função f contínua, assume todos os valores intermediários entre os valores da função $f\ (a)$ e $f\ (b)$.

Teorema do Valor Intermediário: Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e d um número natural qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a,b) tal que $f(c) = d$.

Figura 11: Teorema do Valor Intermediário



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_do_valor_intermedi%C3%A1rio

Demonstração:

Seja $f: [a,b] \rightarrow\ R$ contínua em (a,b), tal que, $f(a) < d < f(b)$, então $\exists\ c\ \in\ (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Defina os conjuntos:

$$A = \{\,x\ \in\ [a,b];\ f(x)\ \leq\ d\}$$

e

$$B = \{\,x\ \in\ [a,b];\ f(x)\ \geq\ d\}$$

Observe que A e B são fechados. Veja ainda que,

$$A \cup B = \{ x \in [a,b];\ f(x) \leq d\} \cup \{ x \in [a,b];\ f(x) \geq d\}$$
$$= \{x \in [a,b];\ f(x) \leq d \; ou \; f(x) \geq d\}$$
$$= [a,b]$$

Assim temos,

Caso 1: $\boldsymbol{A \cap B \neq \emptyset}$

Se $A \cap B \neq \emptyset$, então $\exists\, x \in A \cap B$, daí $x \in A$ e $x \in B$

-Se $x \in A \Rightarrow f(x) \leq d$

-Se $x \in B \Rightarrow d \leq f(x)$

Logo $d \leq f(x) \leq d \Rightarrow f(x) = d$, fazendo $x = c$, então $f(c) = d$.

Caso 2: $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$

Se $A \cap B = \emptyset$ e $[a,b] = A \cup B$

Logo $[a,b]$ é uma cisão com $A \cap B = \emptyset$, isto é, $[a,b]$ é uma cisão não trivial, mas todo intervalo $[a,b] \subset R$ admite somente a cisão trivial.

O QUE É UM ABSURDO!

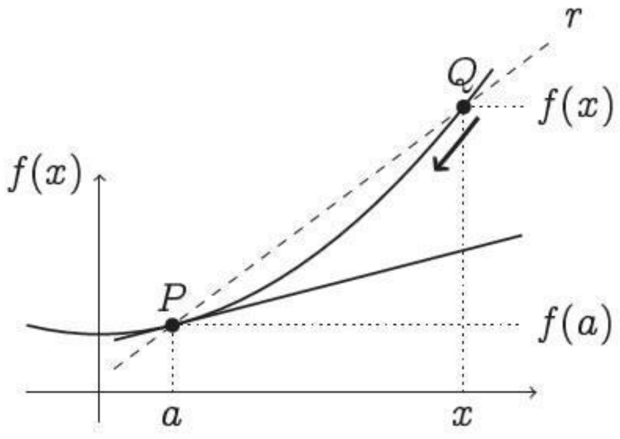
O que implica $A \cap B \neq \emptyset$ e pelo Caso 1, $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Como queríamos demonstrar.

3.5.8 Taxas de Variação e Derivadas

A Matemática dos Limites funciona como um microscópio que amplia uma curva. Aprofundando essa ideia, podemos dizer, que o problema de encontrar uma reta tangente a uma curva ou determinar a velocidade de um objeto consiste em um mesmo tipo especial de limites, que recebe o nome de Derivada e pode ser interpretado como sendo uma taxa de variação nas ciências e engenharias.

Figura 12: Reta tangente a uma curva



Fonte: https://www.e-scola.edu.gov.cv/index.php?option=com_rea&id_disciplina=1&id_materia=5&id_capitulo=103&Itemid=180

A partir do gráfico acima podemos fazer as seguintes considerações: Suponhamos que a curva tenha uma função $y = f(x)$ e queremos encontrar a reta tangente à curva dada no ponto $P\ (a, f(a))$. Considerando um ponto próximo $Q\ (x, f(x))$, com $x \neq a$, e calculando a inclinação da reta secante PQ,

$$m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva ao obrigarmos x tender a a. Assim, se m_{PQ} tender a um número n, definimos então a tangente t como a reta que passa por P e tem inclinação n, o que implica na seguinte definição:

Definição 9: A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P\ (a, f(a))$ é a reta que passa por P com inclinação,

$$n = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

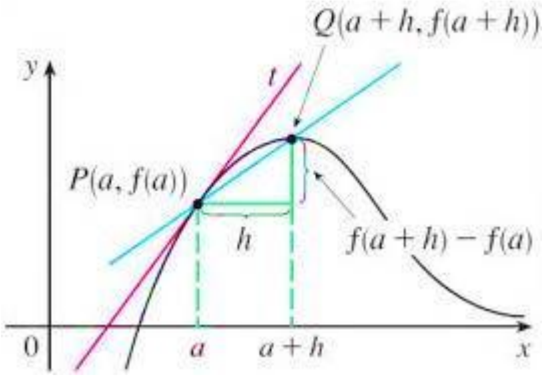
Desde que o Limite exista.

Outra expressão para a inclinação da reta tangente é a seguinte:

$$n = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Neste caso fazemos $h = x - a$ e então $x = a + h$. Podemos observar a partir da Figura 13, que quando x tende ao número a, h tende a 0.

Figura 13: Inclinação da reta tangente



Fonte: http://wwwp.fc.unesp.br/~adriana/calculol/Derivada.pdf

Limites deste tipo surgem comumente em aplicações envolvendo taxas de variação, por isso, recebe o nome de Derivada e a seguinte notação:

Definição 10: A Derivada de uma função f em um número a, denotada por $\boldsymbol{f'(a)}$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Sempre que o limite existir.

3.5.9 Regra de L'Hôspital

Durante o cálculo do limite de uma função, é muito comum nos depararmos com indeterminações que inviabilizam o cálculo do limite por meio dos métodos convencionais. Nesta seção apresentamos um método sistemático conhecido como Regra de L'Hôspital. Esse método viabiliza o cálculo de limites que possuem algumas formas indeterminadas.

Definição 11: Suponhamos que f e g sejam duas funções deriváveis e $g'(x) \neq 0$, em um intervalo aberto I que contenha a, exceto possivelmente em a . Suponhamos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

Então,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se o limite do lado direito existir, ou for ∞ ou - ∞.

É importante destacar que: quando usamos a Regra de L'Hôspital, em linhas gerais, estamos derivando o numerador e denominador separadamente, ou seja, não usamos a Regra do Quociente.

- Forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$ (Produtos Indeterminados)

No caso de nos depararmos com um produto indeterminado, é possível reescrever o produto $f \cdot g$, de modo que se torne possível usar a Regra de L'Hôspital.

$$f \cdot g = \frac{f}{1/g} \text{ ou } \frac{g}{1/f}$$

- Forma indeterminada do tipo ∞-∞ (Diferenças Indeterminadas)

No caso de nos depararmos com uma forma indeterminada do tipo ∞-∞, devemos tentar converter a diferença em um quociente, de modo que a partir desse quociente seja possível aplicar a Regra de L'Hôspital.

- Formas Indeterminadas do tipo $0^0, \infty^0, 1^\infty$ (Potências Indeterminadas)

Podemos tratar qualquer um dos três casos, considerando:

$$y = [f(x)]^{g(x)}, \text{ então } ln\, y = g(x)\, ln\, f(x)$$

Como também, escrevendo como uma Função Exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) ln ln\, f(x)}$$

3.5.10 As Abordagens do Conceito de Limite nos Livros de CDI

Para findar as discussões a respeito do conceito de Limite, fizemos uma análise crítica dos quatro livros-textos de Cálculo que serviram de suporte para as seções anteriores. O objetivo é tecer algumas considerações relativas à apresentação dessa definição.

- **Cálculo, Volume 1, 7º Ed.- Livro 1**

James Stewart, autor do livro 1, publicou a 7º Ed. desse livro no ano de 2014. Antes de conceituar a ideia de Limite, o autor propõe aos estudantes a resolução de alguns exercícios de Pré-Cálculo e aborda em todo Capítulo 1 a ideia de Função.

No Capítulo 2, intitulado de Limites e Derivadas, a noção de Limite é apresentada como sendo à base de vários ramos do Cálculo. Na primeira seção, o autor apresenta a noção de Limite a partir da busca da tangente de uma curva ou a velocidade de um objeto. Nas seções seguintes, a atenção se volta para os limites em geral e os diferentes métodos de calculá-los.

Pode-se perceber que todas as seções que discorrem sobre esse assunto tratam o conceito de Limite de um ponto de vista descritivo, gráfico, numérico e algébrico. Os exercícios propostos nos capítulos se pautam na resolução de exercícios, situações-problema, demonstrações e intepretação de gráficos. Muitos deles exploram o significado de Limite em diversos contextos.

- **Cálculo, 10º Ed.- Livro 2**

O livro 2, de autoria de George B. Thomas, é organizado com o objetivo de servir de base para todos os cursos da área de Ciências Exatas. O texto em geral mantém todos os elementos tradicionais presentes em outros livros de Cálculo: O rigor matemático, aplicações para ciências e engenharia e exercícios.

Antes de abordar a ideia de Limite no Capítulo 1, o autor destaca em uma seção, denominada de preliminares, todas as funções familiares do Pré-Cálculo. Um dos pontos fortes dessa seção são exercícios propostos envolvendo Modelagem Matemática e o uso da calculadora.

No Capítulo 1, o conceito de Limite é introduzido por meio das Taxas de Variação e é complementado com uma seção sobre retas tangentes. São dadas definições informais e precisas sobre Limites, no entanto, o autor não costuma enfatizar o uso da definição precisa para provar os teoremas e proposições.

Os exemplos e exercícios abordados levam o estudante a compreender o conceito em uma perspectiva gráfica, numérica e algébrica. Algumas questões exploram padrões numéricos e necessitam do uso de uma calculadora gráfica para que se chegue a uma solução. O autor continua a explorar o conceito de Modelagem Matemática ao propor questões de aplicação e a Resolução de Problemas seguindo a perspectiva de George Polya.

- **Cálculo A, 6º Ed. – Livro 3**

De autoria de Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves, o livro 3 faz em seus dois primeiros capítulos, uma revisão do Conjunto dos Números Reais e Funções. As autoras reservam todo o Capítulo 3 para apresentar as definições de Limite. De acordo com as autoras, o objetivo do capítulo é discutir a definição de Limite a partir de diferentes ângulos.

Nesse sentido, introduzem o conceito com uma noção intuitiva de Limites apoiada em exemplos de sucessões numéricas. A seguir apresentam vários exemplos de tabelas e gráficos que auxiliam na visualização do Limite da Função, para que, desta forma possam apresentar a definição formal e as demonstrações de propriedades que serão utilizadas no cálculo de limites.

Os exercícios propostos em todo o capítulo são bem mecânicos, não são apresentadas contextualizações ou Situações-problema. O capítulo se encerra com o conceito de Continuidade de funções.

- **Um Curso de Cálculo, Volume 1, 5º Ed. – Livro 4**

Hamilton Luiz Guidorizzi, autor deste livro 4, teve por objetivo publicar um material que pudesse ser trabalhado de forma que os conceitos e teoremas apresentados, possam vir sempre que possível, acompanhados de uma interpretação geométrica ou física.

O autor aborda o conceito de Limite nos Capítulos 3,4 e 5. A noção intuitiva de Limite é apresentada aos leitores a partir da definição de Função Contínua. Sempre que possível, o autor também busca utilizar o recurso de visualização do limite da função a partir de gráficos e tabelas. Notas históricas também estão presentes no final de algumas seções.

Um dos pontos forte do livro 4 é a forma como o autor aborda e explora a definição formal de Limite. Os exercícios propostos no capítulo são organizados em ordem crescente de dificuldade, alguns deles, exigindo um maior domínio do conteúdo e possuindo certo nível de abstração.

Algumas considerações

No decorrer das observações foi possível perceber que os livros abordam de diferentes formas o conceito de Limite, mesmo que em alguns tópicos sigam o mesmo padrão de linearidade. Chamou-nos atenção o fato dos livros-textos trazerem apontamentos históricos bem reduzidos a respeito da formalização do Limite.

O uso de problemas e aplicações em ¾ dos livros analisados foi outro ponto ao qual nos chamou bastante atenção. É satisfatório ver que os autores estão propondo atividades que trazem contribuições não só para a compreensão do Cálculo, como também, para outros ramos das ciências e engenharia. Além disso, é importante citar o trabalho com as representações múltiplas (numérica, algébrica, gráfica e verbal), que dois dos autores propõem durante a apresentação e discussão dos exemplos.

Um curso não é feito apenas por um livro, mas por estudantes e professores. Infelizmente, os livros analisados não conseguem por si só atuar como facilitadores no processo de compreensão dos conceitos por parte dos estudantes. Assim, para que aconteça uma mudança significativa na aprendizagem do CDI, é preciso que os professores tenham um interesse maior pelo assunto e aposte em metodologias que venham a contribuir para o processo de Ensino-Aprendizagem.

3.6 Abordando a Resolução de Problemas no Contexto da Educação Matemática

A Resolução de Problemas na Matemática escolar não é recente. De acordo com Onuchic (1999, p.199), "registros de problemas matemáticos são encontrados na história antiga egípcia, chinesa e grega, e são, ainda encontrados em livros-texto de Matemática dos séculos XIX e XX".

Até pouco tempo atrás, a presença de problemas no ensino de Matemática caracterizava-se como um processo de pura reprodução de técnicas específicas. Os problemas eram tratados de forma mecânica, como uma forma de treinamento dos conceitos e técnicas trabalhadas em sala, ensinava-se Matemática para resolver problemas, problemas esses quase sempre de mesma natureza.

Essa forma de organizar o ensino de Matemática e a Resolução de Problemas deu-se em virtude da estruturação curricular do ensino de Matemática vigente em todo século XX. Nesse período as atividades de ensino tinham um viés voltado à repetição e treino de longas listas de exercícios, a fim de que ao final de cada módulo trabalhado, os estudantes obtivessem aprovação mediante testes, em sua grande maioria, bem semelhantes às atividades realizadas em sala.

Com o tempo, o avanço da atividade industrial e o processo de urbanização exigiu uma reorientação do exercício docente, de modo que fosse necessário pensar em um processo de Alfabetização Matemática, processo esse responsável por estimular a capacidade de compreensão e interpretação dos saberes matemáticos, sendo capaz de proporcionar uma participação mais crítica e responsável das pessoas na sociedade.

Entre a segunda metade da década de 30 até o fim da década de 1940, foi possível perceber que o ensino de Matemática se pautou principalmente nos processos de aprendizagem e não apenas em seus resultados. Foi nesse cenário que a Resolução de Problemas começou a ganhar destaque, a partir do matemático Húngaro George Polya.

A pesquisa de Polya na área da Resolução de Problemas começou a ganhar forma nos Estados Unidos e atingiu seu ápice no ano de 1945, com a publicação do livro *A arte de resolver problemas*. Nesta obra, Polya apresentou uma sequência de fases que, segundo ele, eram necessárias durante a execução de um problema, sendo elas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e examinar a solução. Para Morais e Onuchic (2014), a pesquisa de Polya transcendia as quatro fases apresentadas, uma vez que,

> Sua preocupação estava voltada para a melhoria das habilidades da Resolução de Problemas pelos estudantes e, para que isso ocorresse, era preciso que os professores se tornassem bons resolvedores de problemas e que estivessem interessados em fazer de seus estudantes também bons resolvedores (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p.23).

Nos anos seguintes, a pesquisa em Resolução de Problemas ganhou força em todo mundo. Importantes pesquisas foram produzidas e desenvolviam-se paralelamente ao currículo escolar. Neste período dois grandes movimentos, de impacto mundial, influenciaram diretamente a organização do currículo escolar vigente, sendo o primeiro deles o Movimento da Matemática Moderna. Surgido na década de 60, esse movimento se baseava na formalidade e rigor de fundamentos que estavam atrelados à Teoria dos Conjuntos e da Àlgebra.

O despreparo docente e ausência de participação dos pais e estudantes neste processo foram um dos principais motivos que levaram o movimento a fracassar. Os testes realizados revelaram que os níveis de desempenho atingido pelos estudantes estavam longe do desejado. Assim, frente a esses resultados, percebeu-se que,

> [...] era preciso uma nova mudança curricular, com vistas a melhor preparar os estudantes de Matemática, de forma que pudessem bem desempenhar suas habilidades de Resolução de Problemas, tornando-se capazes de, além de encontrar as respostas para os problemas trabalhados, entender os princípios e as operações Matemáticas do problema, ampliando os conhecimentos adquiridos para outros contextos. Era a vez da retomada do "ensino com compreensão" (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p.27).

Mediante os resultados e em busca de um ensino de Matemática com compreensão e significado, em 1980 o NCTM[5] divulgou o documento "Uma agenda para Ação-Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980", propondo então que "a Resolução de Problemas fosse o foco da Matemática escolar nos anos de 1980" (ONUCHIC, 1999, p.204).

---

[5] National Council of Mathematics Teachers

No entanto, mesmo pautando-se nos ideais construtivistas, em especial de Vygotsky, “não havia coerência e clareza na direção necessária para se atingir bons resultados com o ensino de Matemática apoiado na Resolução de Problemas” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.78). Isso porque, existiam diversas concepções acerca do significado de “Resolução de Problemas foco da Matemática escolar”.

Assim, com o intuito de promover uma reflexão e uma melhor compreensão a respeito dessas concepções, Schroeder e Lester (1989) apresentaram três modos de abordar a Resolução de Problemas no contexto do ensino, sendo eles: (a) Ensinar *sobre* Resolução de Problemas, (b) Ensinar Matemática *Para* resolver problemas e (c) Ensinar Matemática *via/através* da Resolução de Problemas. Segundo Morais e Onuchic (2014, p. 29-30),

> Ensinar “sobre” Resolução de Problemas é trabalhar com o método proposto por Polya (1945/1995) ou alguma pequena variação dele; no ensino “para”, o professor se concentra sobre as formas de como a Matemática a ser ensinada pode ser aplicada na Resolução de Problemas rotineiros ou não rotineiros. [...] o ensino via Resolução de Problemas, problemas são válidos não só com o propósito de se aprender Matemática, mas, com o significado primeiro de fazer Matemática.

Onuchic e Allevato (2011, p. 38) ressaltam que, “foi a partir dos Standards 2000 que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas”. Em sua publicação foram enunciados seis princípios (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia); cinco padrões de conteúdo (Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, analises de dados e probabilidade), além de cinco padrões de procedimentos, dentro os quais, destaca-se a Resolução de Problemas.

O processo de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas configura-se como metodologia capaz de propiciar um ensino de Matemática com compreensão.

> Na realidade, consideramos que a expressão “através”- significando “ao longo”, “no decurso”- enfatiza o fato de que ambas, Matemática e Resolução de Problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.38).

Segundo Lambdin e Walcott (2007, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.76), durante o século XX até atualmente, o ensino de Matemática experenciou seis fases com diferentes ênfases, sendo elas:

(1) Exercício e prática;

(2) Aritmética significativa;

(3) Matemática moderna;

(4) Volta às bases;

(5) Resolução de Problemas;

(6) Padrões e responsabilidades;

O quadro a seguir sintetiza cada uma das fases supracitadas, salientando suas características e particularidades:

Quadro 3: Relações entre as Fases da Educação Matemática e as Teorias Psicológicas de Aprendizagem

Fases	**Principais Teorias e Teóricos**	**Foco**	**Como atingir**
Exercício e Prática (aprox.1920-1930)	Coneccionismo e Associacionismo (Thorndike)	Facilidade com o Cálculo	• Rotina, memorização de fatos e algarismos • Quebrar todo o trabalho em séries de pequenos passos
Aritmética Significativa (aprox.. 1930-1950s)	Teoria de Gestalt (Brownell, Wertheimer, Van Engen, Fehr)	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas, Aplicações da Matemática em problemas do mundo real	• Ênfase nas relações Matemáticas • Aprendizagem incidental. • Abordagem de atividade orientada
Matemática Moderna (aprox.. 1960-1970s)	Psicologia do desenvolvimento, Teoria sociocultural (Brunner, Piaget, Dienes)	Compreensão da estrutura da disciplina	• Estudo das estruturas Matemáticas • Currículo em espiral • Aprendizagem por descoberta
Volta às bases (aprox. 1970s)	(Retorno ao) Coneccionismo	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do	• (Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e

		conhecimento e das habilidades	prática
Resolução de Problemas (aprox. 1980)	Construtivismo, psicologia cognitiva e teoria sociocultural (Vygotsky)	Resolução de Problemas e processo de pensamento matemático	• Retorno à aprendizagem por descoberta • Aprendizagem a através da Resolução de Problemas
Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1990 até o presente)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural VS renovada ênfase na psicologia experimental. (NCBL)	Guerras Matemáticas: preocupação com a alfabetização Matemática dos indivíduos VS preocupação com a gestão dos sistemas educacionais	• NSF-desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados ao estudante VS foco na preparação para os testes com expectativas específicas

Fonte: Onuchic e Allevato (2011, p.77)

Para Lambdin e Walcott (2007, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2007, p.77),

> [...] tais fases merecem atenção porque cada uma delas corresponde a um período em que a educação, em geral, estava caminhando através de mudanças radicais e fundamentais e cada uma introduzia práticas novas e inovadoras para a Educação Matemática. A essas razões, acrescenta-se o fato de que algumas das fases apontadas também foram vivenciadas em outros lugares do mundo, e exerceram forte influência nos rumos que o trabalho com a Matemática escolar tomou a partir de então.

3.7 O Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas

As pesquisas no âmbito da Educação Matemática, que evidenciam a necessidade de um novo olhar sobre o desenvolvimento de se resolver problemas, são recentes. “Somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção” (ONUCHIC, 1999, p.203).

A Educação Matemática caracteriza a atividade de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, segundo Onuchic (1999, p.203), como “trabalho considerando os estudantes como sendo sujeitos ativos e a Resolução de Problemas como uma coordenação complexa de vários níveis de atividade”, evidenciado dessa forma a Resolução de Problemas como sendo um amplificador de conhecimentos. Essa metodologia se comporta como uma via de mão-dupla, permitindo que o estudante aprenda Matemática resolvendo problemas e use o conhecimento aprendido para resolver outros problemas.

No entanto, ensinar Matemática com problemas não é uma tarefa fácil. É preciso que o professor planeje e selecione tarefas a cada dia e se necessário, faça um esforço para produzir modificações em livros-textos tradicionais. Nessa perspectiva, Onuchic e Allevato (2004) descreve algumas boas razões para se fazer esse esforço, são elas:

- Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre ideias e sobre o “dar sentido”. Ao resolver problemas os estudantes refletem sobre as ideias que estão inerentes e/ ou ligadas ao problema;
- Resolução de Problemas desenvolve o “poder matemático”. Os estudantes, ao resolver problemas em sala de aula, se engajam em todos os cinco padrões de procedimento descritos no Standards 2000, além de permitir ir bem além na compreensão do conteúdo que está sendo construído em sala de aula;
- Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os estudantes são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido. Cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autovalorização dos estudantes são desenvolvidas;
- Resolução de Problemas provê dados de avaliação contínua. Esses dados podem ajudar os estudantes e professores;
- Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar de modo “ensinar dizendo”;
- A formalização de toda teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um problema assumido, faz mais sentido para os estudantes;

Durante esse processo de investigação, os estudantes podem fazer alguns questionamentos pertinentes que devem ser observados e esclarecidos com devida atenção pelo professor. Esses porquês são naturais e importantíssimos para ampliação da compreensão e construção de sentidos durante a Resolução de Problemas, uma vez que,

> Na prática pedagógica, a presença do porquê indica que a situação de aprendizagem está ganhando sentido, que o processo de compreensão está em movimento e não só para aquele que pergunta, uma vez que ela provavelmente influi sobre os outros colegas. Ao professor atento, as perguntas revelam os pontos de dificuldades de aprendizagem, indicando o que necessita de revisão ou de modificação de estratégia de ensino (LORENZATO, 2010, p.97).

Dessa forma é importante reconhecer que a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, de forma que os problemas sejam o veículo pelo qual um currículo seja desenvolvido.

3.7.1 Mas o que é um Problema?

Como já discutimos anteriormente, o uso de problemas nas aulas de Matemática é um tema que vem sendo bastante discutido ao longo dos últimos anos. Na busca por uma solução, os estudantes são levados a criar e discutir estratégias de resolução junto aos seus colegas, comparar resultados e raciocinar logicamente, além de participarem ativamente de um processo inédito de construção de significados.

No entanto, na maioria das vezes os problemas são empregados nas aulas de Matemática como instrumento de avaliação, com o objetivo de fazer com que os estudantes apliquem conceitos, técnicas e procedimentos que lhes foi ensinado. Diante dessa perspectiva, surge a seguinte questão: essas situações aplicadas em sala de aula são de fato problemas?, trata-se de aplicações ou apenas exercícios?. Apesar de serem empregadas com sentido equivalente, os papéis que assumem e seus significados são outros.

Muitas são as definições para o termo "problema". Para Onuchic e Allevato (2011, p.81), "um problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer", não podendo ser tratado como caso isolado, mas sim como ponto de partida e como meio de se ensinar Matemática. De acordo com o mini Aurélio (2001, p. 559), um problema trata-se de uma "questão Matemática proposta para que lhe dê uma solução".

Vila (2006) concorda e acrescenta que, "os problemas são um meio para pôr o foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos", sendo papel do professor encontrar maneiras de aproveitar e explorar, através de situações-problema concretas essa capacidade e curiosidade do aluno de buscar soluções.

Massucato e Mayrink (2015) fazem uma distinção acerca de quais atividades são necessariamente exercícios e quais são problemas. As autoras explicam que o exercício se trata de uma atividade que conduz o estudante a utilizar algum conhecimento matemático que já foi aprendido, servindo para consolidar e automatizar técnicas, habilidades e procedimentos.

Para as autoras, problemas exigem reflexão, questionamentos e tomada de decisão, tratando-se de uma situação na qual se procura o desconhecido, não tendo o estudante nenhum algoritmo prévio que garanta sua solução. E ainda ressaltam que, o que é um problema para um estudante pode não ser para outro, em virtude do seu nível de desenvolvimento intelectual e conhecimentos que dispõe.

Essa visão das autoras acerca da distinção entre problemas e exercícios vai de encontro com o que pensa Ponte (2005) a respeito de Ensino-Aprendizagem exploratório e direto.

> No ensino direto o professor assume o papel de fornecedor da informação de uma forma clara, sistematizada e atrativa, apresentando exemplos e comentando situações. Considera-se que o aluno aprende ouvindo o professor e realizando exercícios de aplicação. No ensino exploratório a informação aparece a propósito de uma atividade que o aluno realiza. Estas atividades são normalmente tarefas desafiantes e com algum grau de abertura, como os problemas [...] (PONTE, 2005, apud SERRAZINA, 2017, p.69).

Segundo Van de Walle (2001, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p.221), “[...] um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta”. Para Van de Walle (2009), três características são consideradas importantes ao ensinar Matemática pela Resolução de Problemas, sendo elas,

> O problema deve partir da compreensão atual dos alunos, fazendo sentido para os mesmos; o problema precisa estar relacionado com a Matemática que os alunos irão aprender, pois assim, os alunos ao resolverem, produzirão significados à Matemática e consequentemente desenvolverão a compreensão das ideias; a aprendizagem Matemática demanda justificativa das respostas encontradas pelos alunos, fazendo parte do processo de Resolução de Problemas.

Van de Walle (2001) ainda esclarece que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa apenas apresentar um problema e esperar que uma mágica aconteça. Nesse sentido, o autor reitera a importância do papel do professor no processo da resolução de um problema, sendo agora o professor,

> [...] responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as

> expectativas estejam claras. Na fase “durante”, os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho. Na terceira, “depois”, o professor aceita a solução dos alunos sem avalia-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos (VAN DE WALLE, 2001, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p.221).

Serrazina (2014, p.60) define um problema como sendo “uma situação para a qual se procura uma solução, não existindo à partida um procedimento que conduza a essa solução, havendo uma fronteira ténue entre problema e tarefas de investigação”. Para a autora são características de um bom problema:

i. Ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva Matemática;
ii. Ser adequado, de modo que permita relacionar o conhecimento que os estudantes já têm com o novo conhecimento, propiciando que as capacidades de cada um possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas;
iii. Ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está visível;

Existem ainda muitas outras abordagens relativas à definição de problema, todas elas convergindo para a mesma ideia, a associação de tarefas em que se procura uma solução sem saber à partida para a resolução. Com o intuito de encerrar essa discussão trazemos definição de problema na visão de Kantowski e Lester (1980, apud SERRAZINA, 2017):

- Kantowski: Para o autor um problema é uma situação com que uma pessoa se depara e para a realização da qual não tem procedimento ou algoritmo que conduza à sua solução.
- Lester: O autor considera que uma situação é ou não problema consoante a reação do indivíduo a quem é proposta. Assim, para que uma situação seja um problema para um determinado indivíduo, é preciso que este lhe desperte a necessidade e interesse em resolvê-la.

Reconhecemos o quão é desafiante trabalhar com a Resolução de Problemas em sala de aula e que muitas perguntas podem surgir a respeito deste tema. No entanto, concordamos com Onuchic (1999, p.215) quando esta afirma que: “A atividade Matemática escolar não se resume a olhar para as coisas prontas e definitivas, mas para a construção e apropriação, pelo aluno, de um conhecimento do qual se servirá para compreender e transformar a realidade”.

Nesse sentido, olhando para a Resolução de Problemas como metodologia, para nós, exercício matemático é uma atividade que permite a consolidação de conceitos a partir da repetição de questões que já foram apresentadas ao estudante durante a exposição de um conteúdo. Enquanto o problema configura-se como uma situação que permite a construção de um novo conceito, do qual o estudante não tem conhecimento, a partir de sua resolução, exploração e da proposição de novos problemas.

Sendo assim, concordamos com Andrade (2017, p.357), quando este afirma que,

> Os estudantes, através de um processo de codificação e descodificação, aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito ou ideia matemática explorando, resolvendo e propondo problemas ou situações-problema.

Dessa forma, o ensino de Limites na perspectiva da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas permite o trabalho colaborativo dos estudantes na construção dos significados, favorecendo a reflexão dos diferentes sentidos que um mesmo problema pode possuir. Além disso, Santos e Andrade (2020) dizem que os processos de codificação e descodificação são utilizados como ferramenta no processo de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, ou seja, devendo estar presente durante todo o movimento denominado de *problema-trabalho-reflexões* e *sínteses-resultados*.

3.8 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas

Durante o século XX, período de muitas mudanças no ensino de Matemática, a academia passou a entender que o ensino e aprendizagem de Matemática ocorrem simultaneamente. Onuchic e Allevato envolvidas com o tema Resolução de Problemas deram início a um processo de trabalho Pós-Polya, acrescentando o termo avaliação e empregando agora a palavra composta Ensino-Aprendizagem-Avaliação, dentro de uma dinâmica de trabalho nas aulas de Matemática, de modo a tratar esse processo como sendo uma metodologia. Onuchic e Allevato (2011, p.81) destacam que:

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da Resolução de Problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Assim, o estudante analisa seus métodos e busca caminhos para chegar à solução do problema gerador, dando sentido e justificando o que faz, construindo um campo de conceitos que ganham sentidos em um campo de problemas. O professor, atuando como mediador, avalia o processo de construção da solução e seus resultados.

> Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor *ensina*, o aluno, como um participante ativo, *aprenda*, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu *pensar matemático*, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.81).

Onuchic e Allevato (2011) frisam que implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas exigirá que estudantes e professores passem a ter novas posturas no trabalho realizado em sala de aula, uma vez que, o professor deverá deixar de ser o centro das atenções, passando para o estudante a maior responsabilidade que se pretende atingir, para isso, “o professor precisa preparar ou escolher problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que se pretende construir” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82).

Buscando atender à demanda de prover os estudantes de conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia, Onuchic e Allevato (2011) propuseram um roteiro que consiste na organização das atividades durante a Resolução de Problemas de acordo com as etapas a seguir:

- *Preparação do Problema:* Selecionar um problema, objetivando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado de problema gerador. Convém ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema gerador não pode ter sido, ainda, trabalhado em sala de aula.

- *Leitura individual:* Nesta etapa uma cópia do problema é entregue a cada estudante. Solicita-se uma leitura.

- *Leitura em conjunto:* Grupos são formados e uma nova leitura do problema é solicitada, agora nos grupos. Ressalta-se que o que professar poderá auxiliar o estudante, caso exista, dificuldade na leitura do texto. Além disso, se no texto houver palavras desconhecidas, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, junto os estudantes, consultar um dicionário.

- *Resolução do Problema:* A partir do entendimento do problema, os estudantes, em seus grupos, realizando um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. O problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- *Observar e Incentivar:* Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os estudantes, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- *Registro das resoluções na lousa:* Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os estudantes as analisem e discutam.

- *Plenária:* Para esta etapa todos os estudantes são convidados a discutir as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, a fim de defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- *Busca de consenso:* Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso acerca do resultado correto.

- *Formalização:* Neste momento, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem Matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Nos últimos anos, a Proposição de Problemas passou a ganhar força, assumindo uma posição de destaque nas pesquisas relativas ao processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Pensando nisso, Onuchic e Allevato (2015) passaram a entender que a Proposição de Problemas deveria ser mais uma etapa deste roteiro.

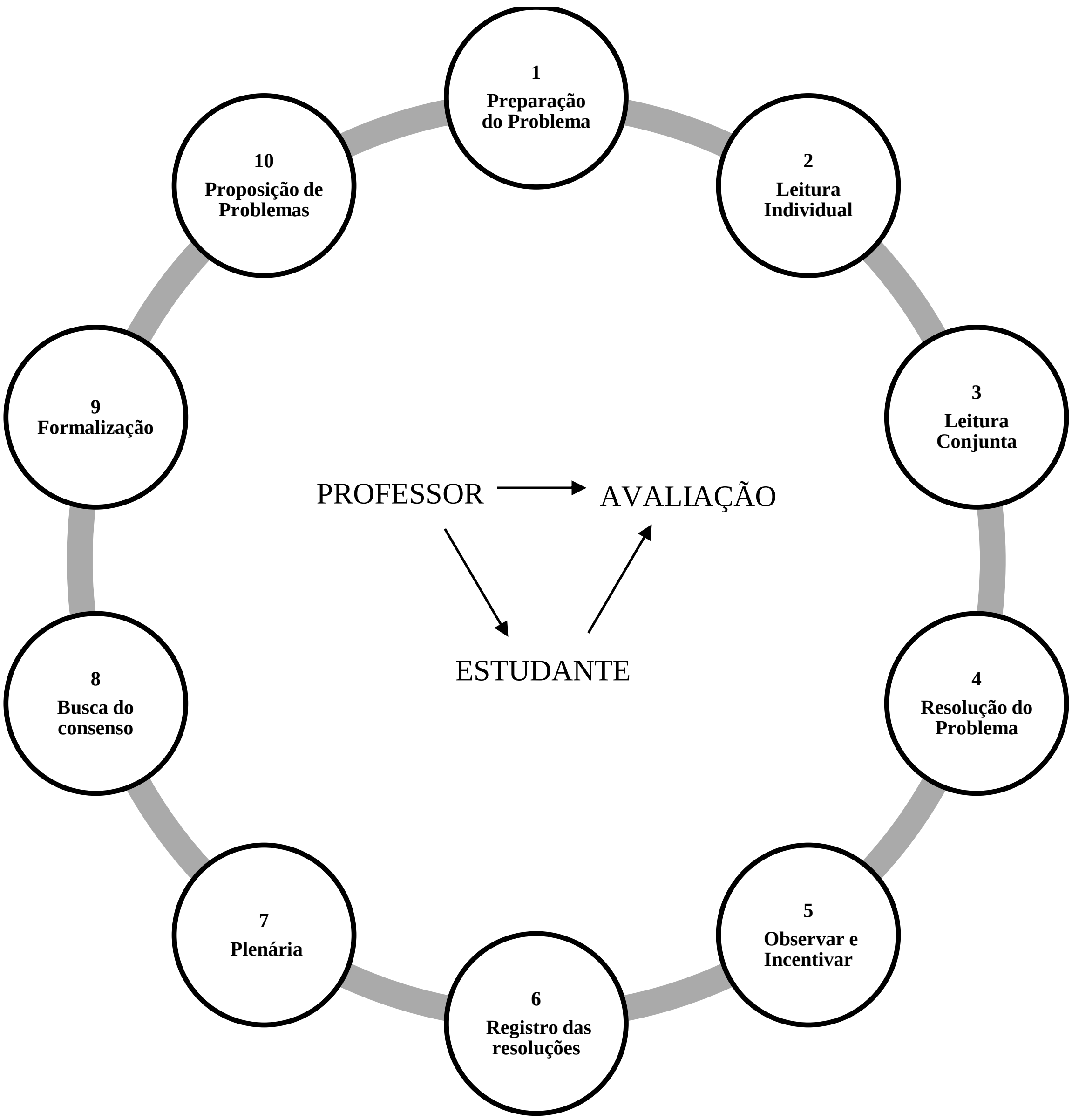
- *Proposição de Problemas:* De acordo com Andrade e Onuchic (2017), a Proposição de Problemas aprofunda e amplia a capacidade dos estudantes em resolver problemas e compreender as ideias matemáticas básicas.

Para Kilpatrick (2017), a Formulação de Problemas deve ser tanto um objetivo quanto um meio de se ensinar Matemática. Segundo o autor:

> Um professor pode introduzir uma situação para os aprendentes fornecendo a fonte de um problema. Uma vez que os aprendentes construíram um modelo matemático da situação, eles podem usar esse modelo para formular um problema. O processo de reformulação, então, pode começar imediatamente conforme os aprendentes verificam tanto o modelo quanto sua adequação à situação (KILPATRICK, 2017, p. 170-171).

A figura abaixo sintetiza a organização das atividades durante a Resolução de Problemas, de acordo com o que discutimos acima.

Figura 14: Organização das atividades durante a Resolução de Problemas segundo Onuchic e Allevato



Fonte: Organizado pelo autor

Onuchic e Allevato (2011, p.85) reiteram que:

> Nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas Matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado.

É importante que durante a escolha do problema o professor leve em consideração o conteúdo matemático que se deseja trabalhar com seus estudantes e, além disso, procure pensar quais conhecimentos prévios os alunos já dominam para resolver o problema. Segundo Pironel e Vallilo (2017, p.286), “após ter definido qual seria o problema gerador, o professor deve iniciar um exame minucioso sobre a validade da atividade para que sejam alcançados os objetivos propostos”. É de suma importância que o professor resolva o problema gerador e tente chegar à solução por diversos caminhos, para que assim, enxergue possibilidades de erros ou obstáculos que o estudante possa cometer ou enfrentar.

O processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se encerra com a avaliação, que se realiza para ambos. Essa exerce um papel fundamental, com vistas a nortear as práticas em sala de aula. Pironel e Vallilo (2017, p.294) reiteram que durante o processo de avaliação o professor,

> [...] pode verificar os significados que os alunos estão produzindo ao se debruçarem sobre um problema. Ao observar as inquietações e estratégias dos alunos sobre o problema gerador, o professor pode propor questões que conduzam o aluno a produzir significados relacionados ao conteúdo a ser abordado.

Portanto a avaliação pode ser vista como uma boa oportunidade para aprender, já que passamos a considerar o desenvolvimento dos processos mais importantes que os resultados obtidos do problema.

3.8.1 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas no Contexto do Ensino de Cálculo

Nas seções anteriores, evidenciamos que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas tem se mostrado uma estratégia didática promissora capaz de romper com o tradicionalismo, uma vez que, reorganiza e evidencia o papel do estudante, tratando-o como sujeito ativo e comprometido com sua aprendizagem, e do professor que assume em sala de aula o papel de mediador dos processos ali envolvidos.

Visando contribuir para um ensino de CDI através da perspectiva da Resolução de Problemas, Azevedo *et al.* (2020) adaptou os roteiros propostos pelo GTERP[6], de modo que ele pudesse ser implementado durante o ensino de conteúdos do CDI. Esse roteiro adaptado é constituído de dez atividades e foi ampliado de forma que fosse possível cumprir o plano de ensino da disciplina respeitando o calendário acadêmico.

O roteiro proposto por Azevedo *et al.* (2020), pode propiciar um melhor planejamento das aulas de Cálculo na perspectiva da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, além de tornar o processo de avaliação mais efetivo, viabilizando uma melhor identificação das dificuldades apresentadas pelos alunos. O roteiro resultante dessa adaptação é o seguinte:

1. *Preparação do problema*
2. *Formar grupos*
3. *Leitura individual*
4. *Leitura em conjunto*
5. *Resolução do problema*
6. *Observar e incentivar*
7. *Compartilhamento de estratégias*
8. *Discussão coletiva*
9. *Formalização do conteúdo*
10. *Proposta de novos problemas*

Findada as discussões teóricas que deram suporte ao trabalho de pesquisa, apresentamos no próximo Capítulo o 2º bloco de Romberg-Onuchic, no qual destacamos as atividades, estratégias e procedimentos que nos orientaram, “de quê?” e “como?”, coletar os dados da investigação a fim de responder a pergunta da pesquisa.

---

[6] Grupo de Trabalhos e Estudo em Resolução de Problemas.

4. METODOLOGIA- 2º BLOCO DE ROMBERG-ONUCHIC

Neste capítulo, apresentamos as atividades 6 e 7 do segundo bloco de Romberg-Onuchic. Esse bloco nos direcionou a elaborar um plano de ação para resolver o problema proposto pela pergunta da pesquisa. Essas ações provieram das questões selecionadas e postas em prática, a partir das evidências coletadas.

4.1 Estratégias e Procedimentos da Investigação

Nesta etapa, elaboramos o plano de ação. Esse plano esteve de acordo com o Modelo Modificado e levou em consideração todos os elementos relevantes que apareceram na pesquisa bibliográfica. Antes de colocá-lo em prática, planejamos muito bem as estratégias e os procedimentos.

Frente à pergunta da pesquisa "Como o estudo dos erros cometidos pelos estudantes pode ajudar no processo de ensino e aprendizagem de Limite?", propomos um plano de ação com as seguintes estratégias: (E_G) Estratégia Geral: **Apresentar atividades e avaliações de pesquisa produzidas pelos estudantes durante as aulas de Limites.** Esse material de pesquisa teve como um dos objetivos a criação de uma proposta de ensino e aprendizagem de Limite através da Resolução de Problemas. Para que essa estratégia geral se concretizasse, foi preciso assumir as estratégias auxiliares:

$\mathbf{E_1}$: Identificar o local onde foram coletadas as atividades e seus sujeitos;

$\mathbf{E_2}$: Selecionar os registros (atividades e avaliações) produzidos pelos estudantes de CDI;

$\mathbf{E}_3$: Criar uma proposta de ensino que possibilite o ensino e aprendizagem de Limite na perspectiva da Resolução de Problemas;

Foi a partir da seleção das estratégias, geral e auxiliares, que criamos os procedimentos. Cada um dos procedimentos executados correspondeu a uma estratégia do plano de ação. Assim, para colocarmos em prática o plano de ação, utilizamos os seguintes procedimentos: ($\mathbf{P}_G$) Procedimento Geral: **Interpretar as atividades e avaliações produzidas pelos estudantes do 2º período de Ciências Naturais e Exatas durante as aulas de Limites.** Para que o Procedimento Geral fosse desenvolvido, assumimos os seguintes Procedimentos Auxiliares ($\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$).

$\mathbf{P_1}$**:** A instituição escolhida para a realização da pesquisa de campo foi à UFCG, campus Cajazeiras, e os sujeitos da pesquisa foram os estudantes da disciplina de CDI I, composta por estudantes dos cursos de Matemática, Química e Física.

P_2: Coleta das atividades e das avaliações feitas por estudantes de CDI I durante a exposição do conteúdo de Limite.

P_3: Seleção de problemas para compor a proposta de ensino e aprendizagem de Limite.

4.2 Os Procedimentos em Ação

Para executarmos o Procedimento Geral, foi necessário colocarmos em prática os procedimentos supracitados no tópico anterior.

- **P_1 em ação - A instituição escolhida para a realização da pesquisa de campo foi à UFCG, campus Cajazeiras, e os sujeitos da pesquisa foram os estudantes da disciplina de CDI I, composta por estudantes dos cursos de Matemática, Química e Física.**

Escolhemos a Universidade Federal de Campina Grande, campus Cajazeiras, para realizar a pesquisa de campo. Essa escolha deu-se em virtude de o pesquisador ter feito a graduação nesta instituição e atuar como docente substituto nos cursos de Licenciatura em Matemática, Química e Física.

Figura 15: Universidade Federal de Campina Grande

Fonte: https://g1.globo.com/pb/paraiba

A Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) foi criada[7] pela Lei Nº. 10.419 de 09 de abril de 2002. Sua criação se deu na década de 50, quando foram criadas a Escola Politécnica de Campina Grande (1952) e a Faculdade de Ciências Econômicas (1955), neste

[7] Informações retiradas do site da Universidade Federal de Campina Grande.

período o Ensino Superior dava os primeiros passos na Paraíba. Este momento histórico foi responsável pela construção de uma identidade própria que motivou o desmembramento da Universidade Federal da Paraíba e a criação da UFCG.

Em 2002, já contava com unidades acadêmicas e estruturas administrativas nas cidades de Campina Grande, Patos, Sousa e Cajazeiras, oferecendo 29 cursos de graduação e 8 programas de pós-graduação, com 13 mestrados e 9 doutorados. Ofertava 1.570 vagas de ingresso em seu processo vestibular.

A sede da reitoria, campus Campina Grande, abrigava o Centro de Humanidades (CH), o Centro de Ciências Biológicas e da Saúde (CCBS) e o Centro de Ciências e Tecnologia (CCT). Logo após a criação da UFCG, foram criados mais dois novos centros: o Centro de Engenharia Elétrica e Informática (CEEI) e o Centro de Tecnologia e Recursos Naturais (CTRN). No campus Patos já existia o Centro de Saúde e Tecnologia Rural (CSTR); no campus Sousa, o Centro de Ciências Jurídicas e Sociais (CCJS); e, no campus Cajazeiras o Centro de Formação de Professores (CFP).

Em 2006, com a adesão da UFCG ao Programa de Expansão do MEC, foi criado o campus Cuité, que passou a abrigar o Centro de Educação e Saúde (CES).

A UFCG continua sua expansão em 2008 com a criação do Centro de Ciências e Tecnologia Agroalimentar (CCTA) no campus Pombal, e do Centro de Desenvolvimento Sustentável do Semiárido (CDSA), no campus Sumé, em 2009.

Com este novo formato, a UFCG possui atualmente 7 campus universitários, 11 centros de ensino, 77 cursos de graduação, 47 programas de pós-graduação - com 34 mestrados e 13 doutorados -, 16.971 estudantes na graduação e 3.288 estudantes na pós-graduação - 2.423 mestrandos e 865 doutorandos, ofertando 4.685 vagas de ingresso na graduação por meio do Sistema de Seleção Unificado (SISU).

Essa pesquisa, como dito anteriormente, foi realizada no estado da Paraíba, mais especificamente na cidade de Cajazeiras, onde se localiza o Centro de Formação de Professores (CFP). A cidade de Cajazeiras localiza-se no alto sertão paraibano, pertencendo à região intermediária Sousa-Cajazeiras e estando a mais de 468 km de distância da capital da Paraíba, João Pessoa.

Principal cidade da região do Alto Piranhas, Cajazeiras possui uma área de aproximadamente 566 km² e sua população, em 2018, era de aproximadamente 61 776 habitantes. O setor terciário é sua principal fonte de renda, tendo o comércio e os serviços como importantes atividades econômicas. Possui também uma cultura diversificada, realizando diversos eventos anualmente, como o carnaval e o Festival Estadual de Teatro, e possui algumas atrações turísticas, como o teatro Íracles Pires.

A cidade Cajazeiras também é considerada um dos polos universitários do Sertão da Paraíba, tendo 7 instituições de Ensino Superior, entre elas podemos citar: a Faculdade São Francisco da Paraíba (FASP), a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Cajazeiras (FAFIC), a Faculdade Santa Maria (FSM), o Instituto Superior de Educação de Cajazeiras (ISEC), a Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), e o Instituto Federal da Paraíba (IFPB).

- **P_2 em ação: Coleta das atividades e das avaliações feitas por estudantes de CDI I durante a exposição do conteúdo de Limite.**

Optamos por coletar algumas atividades e avaliações que foram realizadas durante o trabalho com o conteúdo de Limite. Foram um total de nove encontros que se iniciaram no dia 30/08/2018, com uma discussão acerca da definição de Limite, e terminaram dia 04/10/2018 com a aplicação de um exercício avaliativo escrito.

A seguir apresentamos um quadro com os respectivos temas que foram trabalhados em cada um dos encontros:

Quadro 4: Aulas ministradas pelo professor-pesquisador

Data	Horas/Aula	Conteúdo trabalhado
30/08/2018	2	Limites: noção intuitiva, definição formal e unicidade
31/08/2018	2	Limites: definição e propriedades. Cálculo de limites: Limite de uma Função Polinomial
06/09/2018	2	Limite de uma Função Polinomial
13/09/2018	2	Limites laterais; Limites no infinito
14/09/2018	2	Limites no infinito e Limites infinitos
20/09/2018	2	Limites Infinitos. Teorema do Confronto: demonstração e aplicação
21/09/2018	2	Estudo sobre os Limites Fundamentais
27/09/2018	2	Limites Fundamentais, Revisão dos conteúdos para a avaliação
28/09/2018	2	Revisão dos conteúdos para a avaliação
04/10/2018	2	1º Exercício avaliativo de Cálculo

Fonte: Organizado pelo autor

Durante todo esse período, as atividades foram ministradas dentro daquilo que chamamos de metodologia tradicional de ensino. Isso porque, era esse o modelo de referência que o pesquisador tinha para o ensino de CDI na época. O processo de amadurecimento frente às tendências metodológicas de ensino, em especial a metodologia de Resolução de Problemas, ocorreu após sucessivas reuniões com o orientador, aliadas as discussões realizadas no Mestrado do PPGECEM/UEPB.

Além das dificuldades relacionadas ao processo de aprendizagem dos estudantes, alguns outros fatores acabaram influenciando o decorrer das atividades. Cerca de 95% dos estudantes moravam em outras cidades, isso fazia com que a duração das aulas tivesse um tempo reduzido. Em decorrência desse empecilho, a maioria das atividades e avaliações foram realizadas às pressas.

Esses fatores influenciaram a coleta das atividades e avaliações realizadas por esses estudantes, uma vez que, muitas das atividades sugeridas eram entregues pela metade ou não eram realizadas. Dessa forma, o professor-pesquisador ficava responsável por respondê-las na aula seguinte.

Nesse sentido, o detalhamento das atividades coletadas, bem como suas respectivas interpretações, são apresentadas no Capítulo 5, que chamamos de "Coleta e Interpretação de evidências - 3º Bloco de Romberg-Onuchic", tendo em vista que as evidências coletadas necessitam ser expostas minuciosamente.

- **P_3 em ação: Seleção de problemas para compor a proposta de ensino e aprendizagem de Limites.**

A partir da análise das informações coletadas, selecionamos alguns problemas para compor a proposta de ensino e aprendizagem de Limite. Escolhemos problemas que pudessem funcionar como problemas geradores e problemas complementares. A proposta de ensino e aprendizagem de Limite foi organizada de modo que o docente e o estudante possam executá-la em sala de aula no contexto da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

Nesse procedimento de ação foi abordado o tema Limite. Esse tema desempenha um papel importante no Cálculo em geral, pois estabelece conexões entre os mais diversos temas, proporcionando a ampliação e a consolidação do conceito de Função e aplicação do CDI, nas Equações Diferenciais Aplicadas, Análise Matemática, na Mecânica, entre outros. Nessa perspectiva, no Capítulo 6, a partir de onze problemas geradores e onze problemas complementares, são fornecidas possibilidades de trabalho com o tema apoiando-se na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Essa metodologia se constitui em um caminho para se ensinar e aprender Limites através da Resolução de Problemas e não apenas para ensinar a resolver problemas.

5. COLETA E INTERPRETAÇÃO DE EVIDÊNCIAS – 3º BLOCO DE ROMBERG

Neste capítulo, antes de apresentarmos as evidências coletadas durante a pesquisa de campo, explanamos um pouco a respeito da abordagem metodológica realizada no desenvolvimento da pesquisa e os procedimentos metodológicos utilizados para a coleta de dados. Em seguida, descrevemos o contexto do estudo no qual essa pesquisa está inserida e finalizamos com uma discussão sobre a análise dos dados coletados.

5.1 A Abordagem Qualitativa e Os Sujeitos da Pesquisa

Diante de todos os métodos de pesquisa existentes, entendemos que essa pesquisa é do tipo qualitativa. Para chegarmos a essa identificação nos sustentamos no referencial dos seguintes autores (Goldenberg 2004; Gil 2008; Minayo 2001).

Para Minayo (2001, p.21), "a pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado". Ou seja, podemos dizer que a pesquisa qualitativa leva em consideração questões ligadas a valores, crenças, atitudes e fenômenos que não se reduzem unicamente a variáveis que podem ser quantificadas. Dessa forma, podemos afirmar que essa investigação não está interessada em quantificar o número de erros cometidos pelos estudantes de CDI, na verdade, estamos preocupados em entender como esses ocorrem, por que ocorrem e de que forma podemos contribuir para que os mesmos cessem.

Os sujeitos da pesquisa são estudantes dos cursos de Matemática, Química e Física que estavam matriculados na disciplina de CDI I. As evidências coletadas na pesquisa de campo surgiram a partir da realização de atividades propostas em sala de aula.

5.2 Análise e Interpretação dos Dados

Para interpretar as evidências nos apoiamos no conceito de Imagem Conceitual e Definição Conceitual (Tall; Vinner, 1981) e nos estudos sobre análise dos erros de Cury (2018).

Chamamos de imagem conceitual toda associação que nossa estrutura cognitiva evoca quando se entra em contanto com nome de determinado conceito. Assim podemos dizer que quaisquer impressões, experiências ou representações que são ativadas nesse momento engloba o que chamamos de imagem conceitual. Assim sendo,

> Usaremos o termo *imagem conceitual* para descrever a estrutura cognitiva total que está associado ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados. Ele é construído ao longo dos anos

> através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (TALL; VINNER, 1981, p.152, grifo nosso).

Cabe aqui destacar, que as situações experenciadas não garantem a evocação de imagens conceituais coerentes, de modo que muitas vezes as interpretações são contraditórias e estão em desacordo com a definição conceitual do objeto. Tall e Vinner (1981) definem definição conceitual como sendo,

> [...]uma forma de palavras usadas para especificar esse conceito. Pode ser aprendido por um indivíduo de forma mecânica ou mais significativamente aprendida e relacionada, em maior ou menor grau, ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução pessoal pelo estudante de uma definição (TALL; VINNER, 1981, p.152, grifo nosso).

Por diversas vezes uma imagem conceitual de algum conceito acaba entrando em conflito com a sua definição conceitual, seja ela pessoal ou não. A esse fenômeno, chamamos de fator de conflito potencial.

De acordo com Cury (2018), as pesquisas de Thorndike, Hadamard, Krutetskii, Newell e Simon, Brousseau e Barasi, foram percussoras nos estudos que levam em consideração a análise de respostas matemáticas. Suas investigações foram de fundamental importância, pois subsidiaram muitas pesquisas que até hoje trabalham nessa vertente.

Para Cury (2018, p.66):

> Em uma pesquisa sobre respostas dos alunos a questões de Matemática, seja em uma investigação formal (projeto, dissertação, tese) ou em um trabalho realizado em sala de aula, como metodologia de ensino, são escolhidas as questões, formuladas as hipóteses e estabelecidos os objetivos.

Dessa forma, fizemos uma leitura e mapeamos quais tipos de prova seriam considerados nesse estudo. Segundo Moraes (1999, p.15, apud CURY, 2018, p.66), essa preparação de informações possibilita “identificar rapidamente cada elemento da amostra de depoimentos ou documentos a serem analisados”. A fase seguinte consiste na investigação das respostas dos estudantes. Para Cury (2018, p.66), essa fase, permite “destacar as unidades, e esse procedimento às vezes envolve separar, efetivamente, cortando, fotocopiando ou “escanceando” as respostas”, estabelecendo assim uma relação e compreendendo o que elas têm em comum.

Na fase de tratamento dos resultados, são descritas as categorias, que podem ser feitas por meio da apresentação de tabelas, quadros ou auxilio de softwares. De acordo com Cury (2018, p.67) com base na compreensão dos dados que foram coletados, “é possível utilizar os resultados, respondendo às questões de pesquisa ou elaborando estratégias de ensino para auxiliar os alunos a superarem as dificuldades detectadas".

5.3 Análise dos Registros Produzidos pelos Estudantes em Sala de Aula

Dividimos a análise das atividades e avaliações dos estudantes em três etapas: na primeira etapa formulamos questões em relação ao Limite, a segunda etapa é a análise da resposta dos estudantes e finalmente na etapa três trazemos a visão dos estudantes a partir das evidências coletadas.

Etapa 1: Formulando questões para a discussão sobre Limite

Durante as aulas de Cálculo foram sugeridas algumas atividades. Dentre as atividades trabalhadas, escolhemos durante a coleta de dados àquela que teve o seguinte objetivo: identificar quais imagens conceituais os estudantes esboçavam quando questionados sobre Limites. Para tal fim, expusemos a seguinte notação:

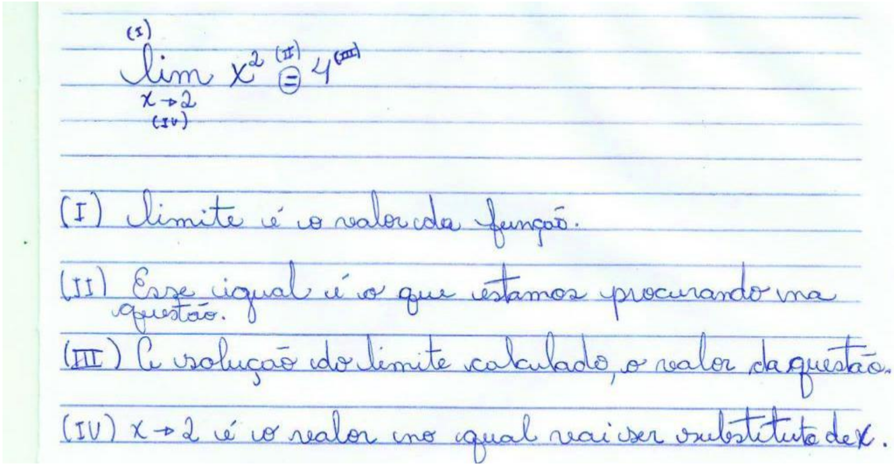
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Selecionamos também, quatro avaliações realizadas pelos estudantes na disciplina de Cálculo para a obtenção da 1º nota. Essa ação visava detectar quais as principais dificuldades e erros eram comuns durante o cálculo do Limite.

Etapa 2: Interpretando as respostas

Após coleta e análise dos registros foi possível evidenciar a evocação das seguintes imagens conceituais:

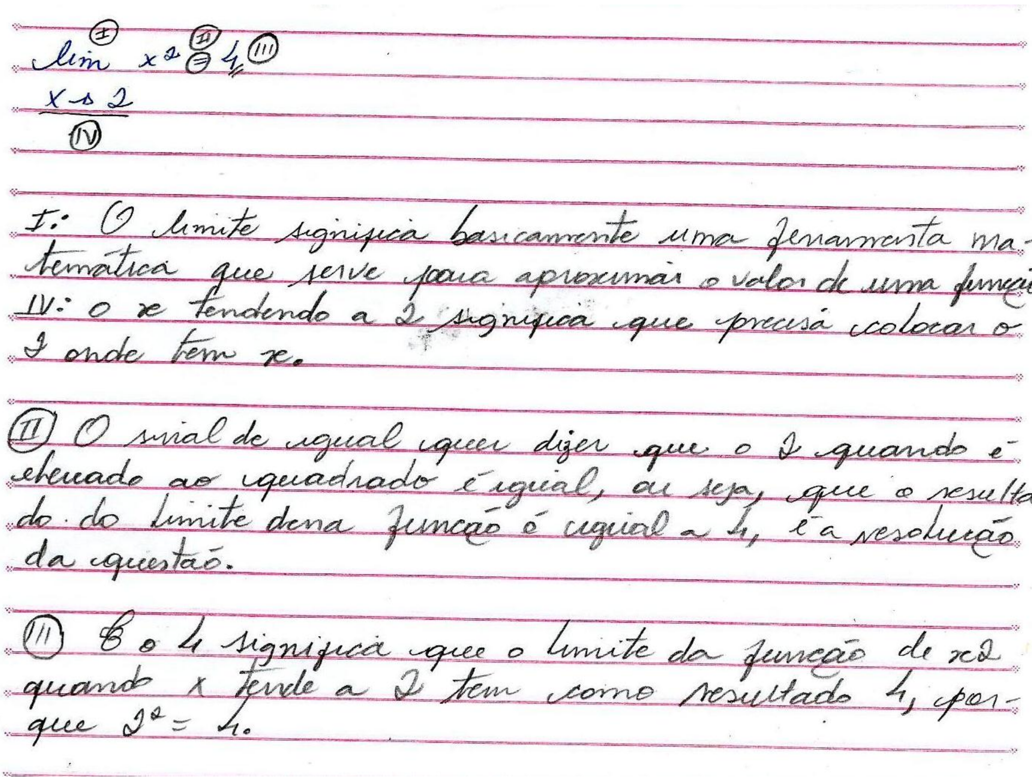
Figura 16: Estudante A


(I)
$\lim_{x \to 2} x^2 \overset{(II)}{=} 4^{(III)}$
(IV)

(I) limite é o valor da função.
(II) Esse igual é o que estamos procurando na questão.
(III) a solução do limite calculado, o valor da questão.
(IV) $x \to 2$ é o valor no qual vai ser substituto de x.

Fonte: Acervo de dados do pesquisador

Figura 17: Estudante B


(I) (II) (III)
$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$
(IV)

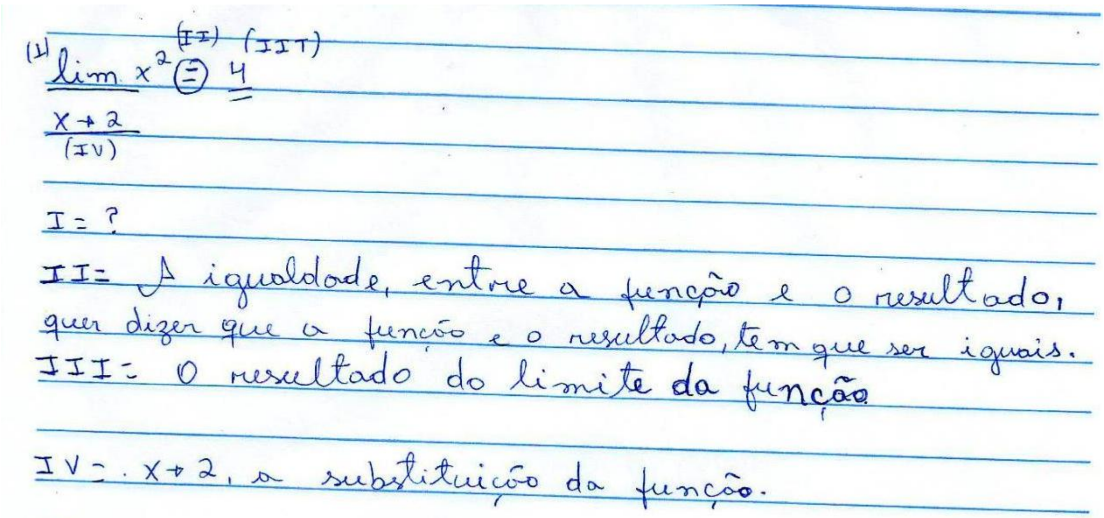
I: O limite significa basicamente uma ferramenta matemática que serve para aproximar o valor de uma função.
IV: o x tendendo a 2 significa que precisa colocar o 2 onde tem x.

(II) O sinal de igual quer dizer que o 2 quando é elevado ao quadrado é igual, ou seja, que o resultado do limite dessa função é igual a 4, é a resolução da questão.

(III) E o 4 significa que o limite da função de x2 quando x tende a 2 tem como resultado 4, porque $2^2 = 4$.

Fonte: Acervo de dados do pesquisador

Figura 18: Estudante C



(I) (II) (III)

$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

(IV)

I= ?

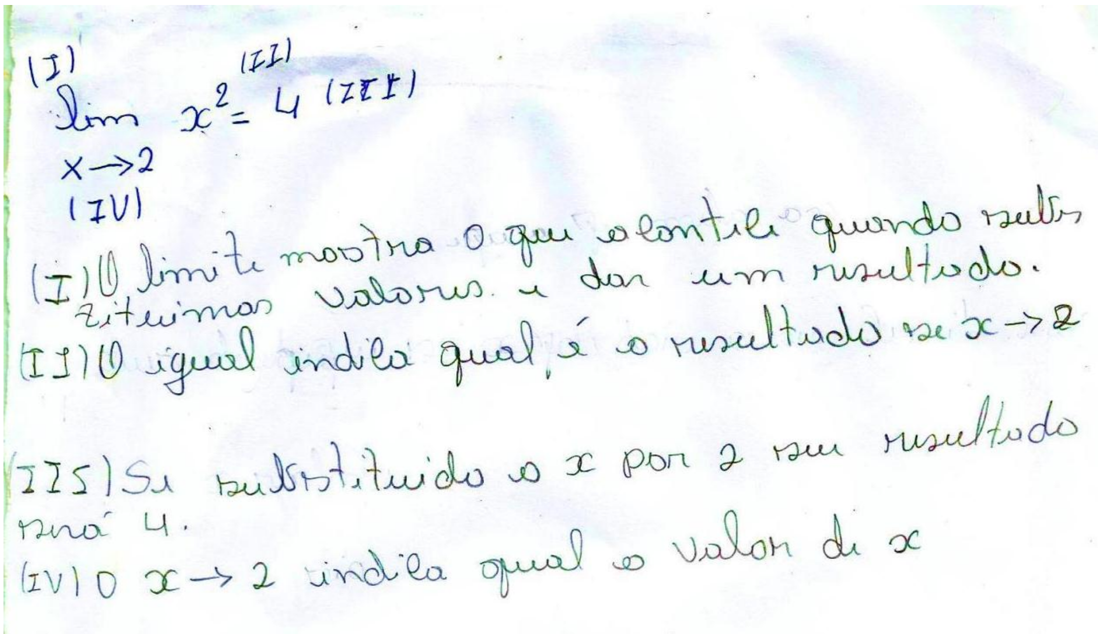
II= A igualdade, entre a função e o resultado, quer dizer que a função e o resultado, tem que ser iguais.

III= O resultado do limite da função

IV= . x→2, a substituição da função.

Fonte: Acervo de dados do pesquisador

Figura 19: Estudante D



(I) (II) (III)

$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

(IV)

(I) O limite mostra o que acontece quando substituimos valores e dar um resultado.

(II) O igual indica qual é o resultado se x→2

(III) Se substituido o x por 2 seu resultado será 4.

(IV) O x→2 indica qual o valor de x

Fonte: Acervo de dados do pesquisador

Interpretando as respostas dos estudantes A, B, C e D

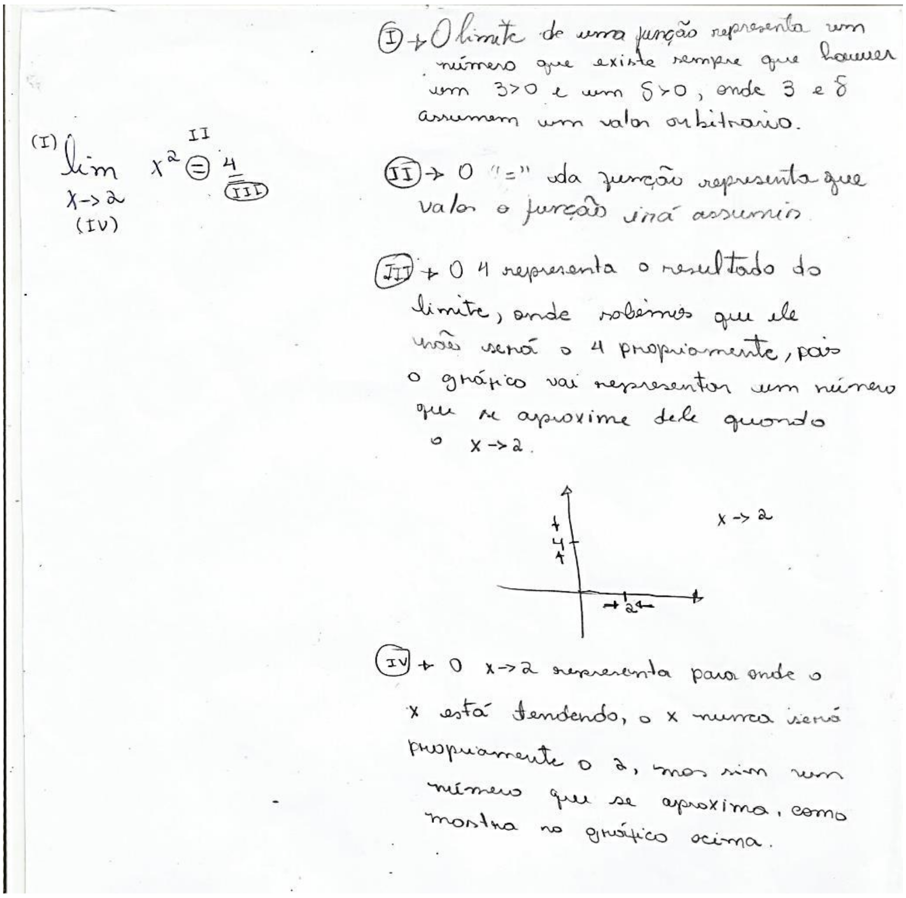
Podemos dizer que os estudantes evocam uma imagem conceitual alusiva à ideia de que o limite funciona como recurso para aproximação. Além disso, parecem estar convictos de que a função dada tem o papel de operar com valores, tal qual ocorre no estudo do cálculo algébrico. Isso se torna evidente, a partir do momento em que entendem o “x tender a 2”, como sendo um valor numérico a ser substituído. Essas concepções acabam entrando em contradição quando os mesmos não conseguem definir ao certo, qual o significado do símbolo de igualdade “=” nessa conjuntura.

Em matemática, o sinal de igualdade assume diferentes significados, a depender do contexto em que está sendo empregado. Neste caso, podemos dizer que os estudantes compreendem o sinal de igualdade a partir de um ponto de vista operacional, ou seja, acreditam que a finalidade do seu uso no contexto dos Limites é apenas de indicar um cálculo a ser realizado, quando na verdade assume o sinônimo de “aproximar”.

Segundo Kieran (2004), razões para isso, decorrem do fato dos livros reforçarem aspectos transformacionais, com ênfase nas regras e manipulações, ao invés de trabalhar com aspectos conceituais.

Interpretando as respostas dos estudantes E e F

Figura 20: Estudante E



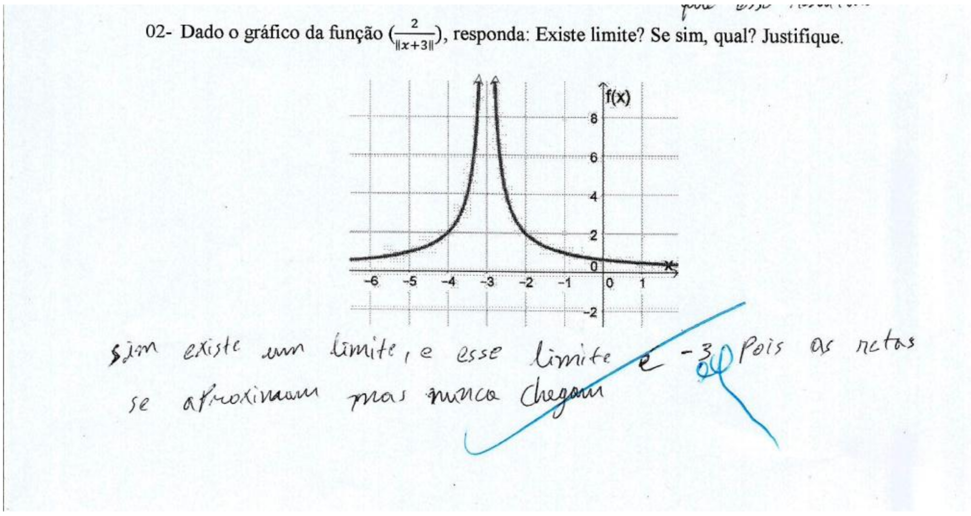
Fonte: Acervo de dados do pesquisador

Para expor sua interpretação, o estudante E buscou utilizar o registro verbal e gráfico. Identificamos em sua resposta que os valores arbitrários, épsilon e delta, estão presentes em sua imagem conceitual. Consequentemente, esses elementos configuram um fator de conflito potencial, isso porque, ao tentar fazer uma conjectura plausível e associar corretamente a definição conceitual, o estudante encontra dificuldades.

Para o estudante, a definição de Limite adquire um caráter dinâmico de aproximação, ou seja, em sua visão, os valores de $f(x)$ podem se aproximar suficientemente de L, à medida que os valores de x, aproximam-se suficientemente de a, mas nunca $x = a$. Para Tall e Vinner (1981), expressões como essas podem se configurar como sendo um fator de conflito potencial, uma vez que levam a ideia de que $f(x) \neq L$. Portanto, podemos afirmar que a compreensão do conceito de Limite se deu de forma parcial.

Os grandes matemáticos se empenharam bastante para a formalização dessa ideia, sendo que dessa forma, “parece-nos natural pensar que, para os nossos alunos de cálculo, não é fácil a compreensão e aprendizagem desse conceito” (AMORIM; REIS, 2013, p.277).

Figura 21: Estudante F



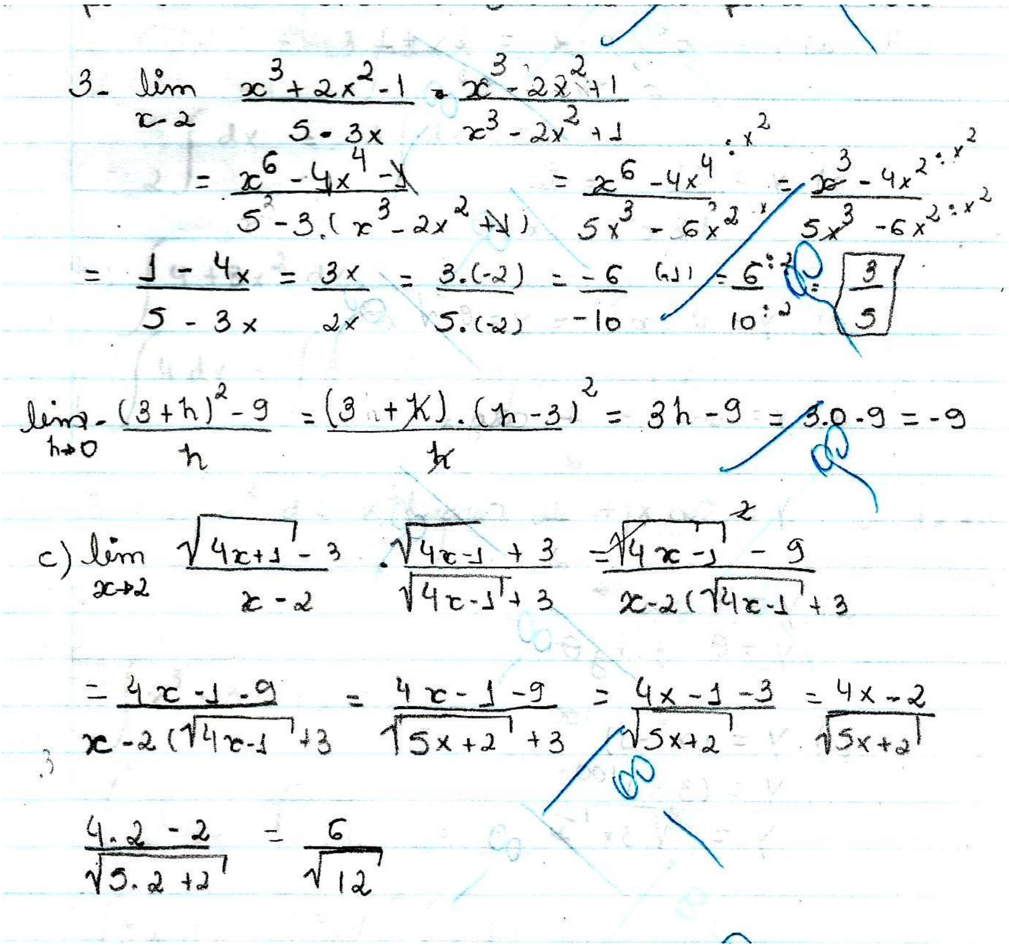
Fonte: Acervo de dados do pesquisador

Neste último caso, o estudante F possui dificuldades em compreender a ideia de Limite a partir de uma interpretação geométrica. Nota-se que o estudante não conseguiu perceber que o exemplo acima se trata de um Limite infinito, cuja função não tem limite especifico, uma vez que cresce ilimitadamente.

O estudante percebe que as assíntotas, chamadas por ele de retas, tendem ao infinito, mas se contradiz ao afirmar que os valores da função estão tentando se aproximar do -3. Caracterizamos esse exemplo, como sendo um fator de conflito potencial, visto que, sua imagem conceitual, centrada na ideia do Limite de uma função como aproximação, entra em conflito com a real definição, neste caso dos limites infinitos.

Interpretando as respostas dos estudantes G, H e I

Figura 22: Estudante G



$$3-\ \lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} \cdot \frac{x^3-2x^2+1}{x^3-2x^2+1}$$

$$= \frac{x^6-4x^4-1}{5^2-3.(x^3-2x^2+1)} = \frac{x^6-4x^4}{5x^3-6x^2} = \frac{x^3-4x^2}{5x^3-6x^2}$$

$$= \frac{1-4x}{5-3x} = \frac{3x}{2x} = \frac{3.(-2)}{5.(-2)} = \frac{-6}{-10} = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} = \frac{(3+h).(h-3)^2}{h} = 3h-9 = 3.0-9 = -9$$

$$c)\ \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{4x-1}+3}{\sqrt{4x-1}+3} = \frac{\sqrt{4x-1}^2-9}{x-2(\sqrt{4x-1}+3}$$

$$= \frac{4x-1-9}{x-2(\sqrt{4x-1}+3} = \frac{4x-1-9}{\sqrt{5x+2}+3} = \frac{4x-1-3}{\sqrt{5x+2}} = \frac{4x-2}{\sqrt{5x+2}}$$

$$\frac{4.2-2}{\sqrt{5.2+2}} = \frac{6}{\sqrt{12}}$$

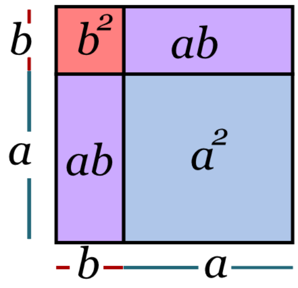
Fonte: Acervo de dados do pesquisador

A não consolidação de aspectos algébricos do Ensino Básico se configura como uma das principais fragilidades dos estudantes no cálculo dos Limites. Na atividade acima, o estudante G erra ao tentar eliminar uma indeterminação que não existe e tem muita dificuldade de reconhecer padrões em uma expressão algébrica.

As multiplicações que envolvem os polinômios e apresentam uma regularidade em seus produtos, são conhecidas como produtos notáveis. Conhecendo-os, podemos reduzir o tempo gasto na resolução dos problemas e agilizarmos os cálculos matemáticos. São alguns produtos notáveis:

- Quadrado da Soma de dois termos: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

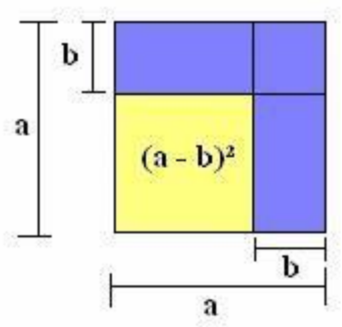
Figura 23: Quadrado da Soma



Fonte: https://www.todoestudo.com.br/matematica/produtos-notaveis

- Quadrado da Diferença de Dois Termos: $(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

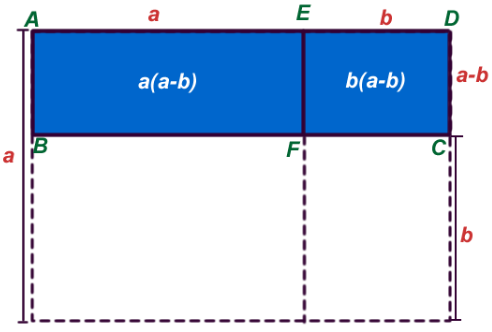
Figura 24: Quadrado da Diferença



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12574

- Produto da Soma Pela Diferença: $(a+b)\,(a-b)$

Figura 25: Quadrado da Soma pela Diferença



Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/produto-notavel-soma-pela-diferenca-dois-termos.html

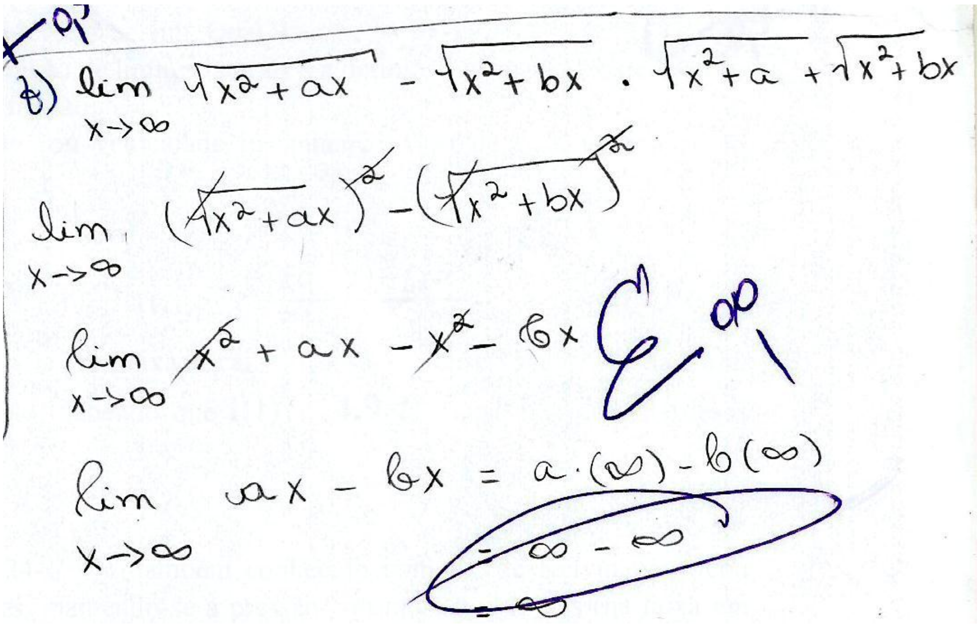
São inúmeras as contribuições dos produtos notáveis e da fatoração. Com elas os cálculos de expressões podem se tornar mais simples. Podemos aplicá-los em: cálculos numéricos, simplificação, operações com frações algébricas e na resolução de equações-produtos.

De acordo com Costa et al. (2016, p.160), as dificuldades apresentadas em Álgebra provavelmente se iniciaram,

> [...] na introdução ao pensamento algébrico, uma vez que tal processo representa uma transição entre o que era manipulado pelo discente como concreto e que passa, então, para a desconhecida e abstrata incógnita. Apesar dos conteúdos de Álgebra terem aplicação na vida cotidiana, os discentes lidam com pouca variedade de aplicações e manipulações de conceitos, pois o ensino de Matemática nas escolas se dá, principalmente, na visão destas pesquisadoras, de forma mecânica, com o uso do livro didático e de exercícios prontos.

Nesta dissertação, chamamos atenção para o fato dos aspectos algébricos serem apresentados aos estudantes do Ensino Básico sem nenhuma contextualização. Acreditamos que no Ensino Superior o professor pode reverter essa situação a partir do momento em que fundamenta seu trabalho na Metodologia de Resolução de Problemas. Dessa forma, durante as aulas de Limite, por exemplo, estudantes e professores podem consolidar conceitos da Álgebra ao mesmo tempo em que formalizam um novo conceito.

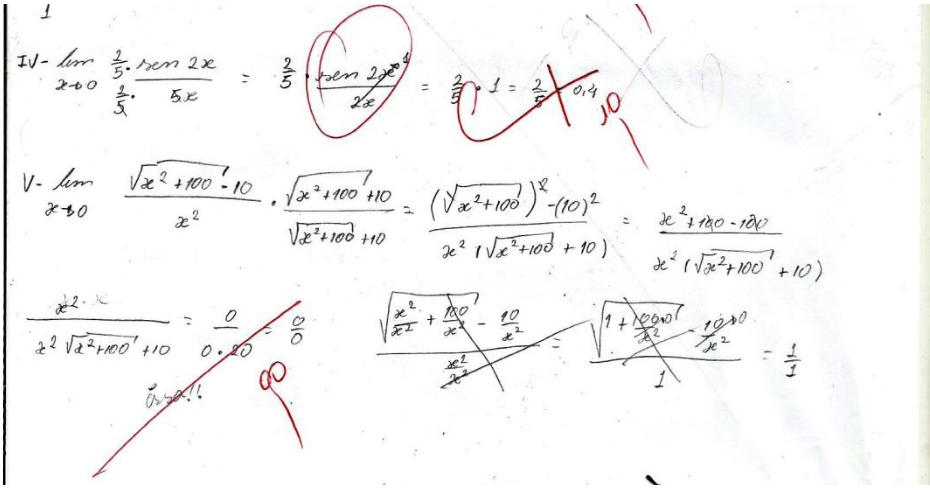
Figura 26: Estudante H



Fonte: Acervo de dados do pesquisador

Vemos que apesar de reconhecer inicialmente um padrão na expressão algébrica, o Estudante H, comete um erro muito comum envolvendo a indeterminação. Isso se dá em virtude de sua imagem conceitual tratar o infinito como sendo um número real.

Figura 27: Estudante I



Fonte: Acervo de dados do pesquisador

Os erros cometidos pelo estudante I são bem comuns e praticamente se assemelham aos dos seus colegas. Percebemos nitidamente que no exemplo IV e V, o estudante erra em virtude da ausência do domínio de conhecimentos acerca da simplificação de frações algébricas.

Definimos Frações Algébricas, como sendo, uma expressão que representa o quociente de dois polinômios e que tenha variáveis no denominador. Simplificar uma Fração Algébrica consiste em escrever uma fração equivalente mais simples. Para isso, escrevemos o numerador e denominador na forma fatorada e cancelamos os fatores que são comuns.

Etapa 3: O que os estudantes querem dizer?

Após descrevermos todos os principais erros e dificuldades apresentados pelos estudantes, apresentamos a seguir quais os principais resultados que essa investigação pôde evidenciar. Tendo como base a pergunta da pesquisa e o trabalho de outros pesquisadores, que nos deram o suporte teórico, foi iniciada uma reflexão sobre os dados obtidos a partir análise dos dados.

Quase todos os estudantes responderam a atividade proposta, no entanto apenas cinco responderam por completo, isso justifica o fato de termos escolhido apenas os cinco registros, inicialmente apresentados. Convém ressaltar, que o registro que corresponde ao Estudante F, foi um recorte de uma questão, por ele respondida, em sua avaliação e tinha o mesmo objetivo da atividade apresentada anteriormente. Como já destacamos quais os procedimentos foram utilizados para a análise dos dados, podemos dizer que foi possível evidenciar a evocação das seguintes imagens conceituais:

- O limite de uma função é visto como uma operação algébrica, onde operamos com valores e encontramos um valor numérico;
- A compreensão de limite como uma noção intuitiva;

Dessa forma foi possível chegarmos à conclusão de que a compreensão do conceito de Limite por parte dos estudantes não é internalizada corretamente, uma vez que, essa compreensão não é evidenciada e entra em conflito com a definição conceitual de Limite.

Para descrever melhor quais estudantes evocaram as imagens conceituais acima, organizamos o quadro a seguir:

Quadro 5- Distribuição das Imagens Conceituais

Imagens evocadas	Estudantes
Limite como operação algébrica	A, B, C, D
O Limite como noção intuitiva	E, F

Fonte: Organizado pelo pesquisador

Percebemos que os erros cometidos pelos estudantes G, H e I se dão em virtude da ausência do domínio de conceitos básicos da álgebra, essa percepção vai de encontro ao que relevam as últimas pesquisas relativas ao Ensino-Aprendizagem de CDI. Nesse caso, as análises de seus escritos revelaram que os mesmos têm dificuldades em reconhecer padrões e identificar a ocorrência ou não de indeterminação, além de reconhecer o ∞ como sendo um número, como exemplificado pelo estudante H.

No que se refere à ausência de conceitos prévios da álgebra, a partir dos erros foi possível evidenciar que existem lacunas em aberto na compreensão dos conceitos de:

- Fatoração;
- Produtos notáveis;
- Simplificação e operações com frações algébricas;

- Expressões indeterminadas;

Concordamos com Schneider (2013, p. 11), quando afirma que

> Os conceitos algébricos iniciais são as bases para a formação de diversos conceitos algébricos posteriores, e quando não são trabalhados o suficiente, é provável que o déficit no ensino da Álgebra se prolongue, constituindo um fator importante na dificuldade de aprendizagem de outros conceitos da Matemática.

Salientamos que a partir da investigação desses registros, fica claro o fato da metodologia de ensino tradicional, nas aulas de CDI, não estar sendo capaz de suprir essas lacunas advindas da Educação Básica, nos levando a crer que esses percalços acompanharão os estudantes até o fim da graduação, comprometendo diretamente sua formação.

Os resultados obtidos a partir da coleta e interpretação dos dados motivou a construção de uma proposta de ensino e aprendizagem de Limite fundamentada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, a ser apresentada no capítulo seguinte.

6. O ENSINO E APRENDIZAGEM DE LIMITE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA COM ASPECTOS PRÁTICOS

Já abordamos em discussões anteriores a importância que o conteúdo de Limite tem no currículo do CDI. Apresentamos também quais as principais dificuldades apresentadas por estudantes de Cálculo, durante o trabalho com o conteúdo, e quais metodologias os principais livros de CDI adotam ao explanar tal conceito. Neste capítulo temos por objetivo abordar de forma prática a construção do conceito de Limite a partir da Resolução de Problemas.

É inegável a importância do conceito de Limite no CDI. A Matemática dos Limites funciona como ponto chave da estrutura sob a qual os conceitos fundamentais do Cálculo estão construídos. No entanto, em sala de aula muitas vezes essa importância passa despercebida. Isso se dá porque não há uma clareza de objetivos dentro do que estamos acostumados a trabalhar durante as aulas CDI.

Eichler e Erens (2014) apontam a necessidade de o professor distinguir quais os objetivos centrais, subordinados e periféricos do Cálculo, uma vez que, segundo o autor quase todo professor de Cálculo tem o mesmo objetivo periférico, o de relacionar o Cálculo a "um conjunto de regras e procedimentos a serem memorizados, organizado e aplicado em tarefas rotineiras" (EICHLER; ERENS, 2014, apud BRESSOUD et al., 2016, p.25, grifo nosso).

Nesse sentido, apresentamos uma proposta para o ensino e aprendizagem de Limite, composta de 22 problemas, sendo 11 problemas geradores e os demais problemas complementares. Vale salientar que também abordamos nessa proposta o conceito de Continuidade e Derivada, já que se trata de uma extensão do conceito de Limite.

Para cada problema destacamos: objetivos, conteúdos abordados, principais estratégias de resolução, breve comentários e proposição de um problema complementar.

Problema 1: Área máxima

Fernando demarcou uma região retangular de $100\,m$ de perímetro em um terreno para construir uma casa. Calcule quais as dimensões essa região deve ter, de modo que Fernando aproveite a maior área possível.

Objetivos:

- Rever conceitos de Função Quadrática trabalhados no ensino médio.
- Entender o conceito de Limite a partir de um problema de área.

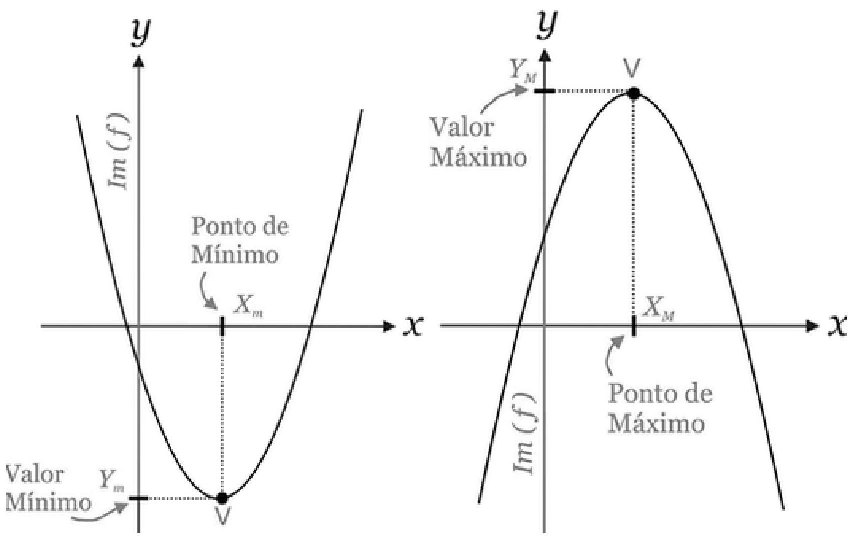
Conteúdos abordados: Função Quadrática, Valor Máximo e Mínimo, Noção inicial de Limite.

Valor Máximo e Mínimo de uma Função Quadrática

Chamamos de Função Quadrática, ou ainda Função Polinomial do 2º grau, toda função cuja lei pode ser escrita na forma $y = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e c números reais, com $a \neq 0$, e x pode ser qualquer número real.

Consideremos uma função polinomial do 2º grau.

Figura 28: Ponto de máximo e mínimo



Fonte: obaricentrodamente.com

Se,

- $A > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Assim, o vértice é o ponto de mínimo do gráfico, e a ordenada do vértice, valor mínimo da função.
- $A < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Assim, o vértice é o ponto de máximo do gráfico, e a ordenada do vértice, valor máximo da função.

Possíveis Estratégias de Resolução

(1) Busca da solução a partir de estimativas.

Os estudantes podem construir uma tabela, trabalhar com estimativas e descobrir as dimensões do terreno para a área seja máxima deve ser $25m$ x $25\ m$.

Tabela 1- Dimensões do Terreno

$\boldsymbol{x}$	**y**	$A = xy$	$P = 2x + 2y = 100$
15	35	525	100
20	30	600	100
40	10	400	100
25	**25**	**625**	**100**

Fonte: O autor

(2) Encontrar o valor máximo da função a partir das coordenadas do vértice.

Agora, de forma mais rigorosa, professor e estudantes, podem se certificar do que já haviam constatado a partir da tabela. Se os estudantes já conhecem a fórmula para o cálculo do x_v e y_v, ela será utilizada. Se não, essa pode ser a oportunidade de o professor construí-la com eles.

Antes de usar a fórmula de resolução, o professor deve levar o estudante a reconhecer qual a lei de formação da Função Polinomial do 2º grau que estamos trabalhando.

RESOLUÇÃO:

Perímetro $2x + 2y = 100 \ \div 2 \rightarrow \ x + y = 50 \rightarrow \ y = 50 - x$

Área $A(x, y) = \ x.y \rightarrow \ A(x, y) = \ x.(50 - x) \rightarrow \ A(x) = 50x - x^2$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-2} = 25$$

$$y_v = 50.25 - (25)^2 = 625$$

$$y = 50 - 25 = 25$$

E, portanto, as coordenadas do vértice $V = \ (25{,}625)$, as dimensões $25\ cm$ x $25\ cm$ e a área máxima $625\ m^2$.

Formalização

Neta etapa, o professor pode pedir aos estudantes que analisem a tabela usada na primeira estratégia e ainda sugerir que a complete com outros valores próximos a 25. Em seguida, o professor pode fazer o seguinte questionamento: O que acontece com área do terreno à medida que as dimensões se aproximam de 25? Espera-se que a partir daí o professor apresente o conceito inicial de limite e o formalize da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 25} 50x - x^2 = 625$$

Esse momento é ideal para que o professor analise junto ao seu aluno o que acontece nas proximidades de 25 a partir do gráfico da função e assim formalize essa ideia inicial.

Comentários:

- É comum que os estudantes apresentem dificuldades para resolver o problema a partir de conceitos ligados a Função Quadrática. Vale salientar, que os estudantes podem trazem consigo algumas lacunas que não foram consolidadas durante o ensino médio, sendo papel do professor de Cálculo explorar esses conceitos e consolidar essas definições durante a resolução do problema.
- O professor pode ainda trabalhar com uma noção mais rigorosa de Limite a partir da definição.

Extensões do Problema: Após trabalhar o problema 1, o professor pode propor um novo problema que venha consolidar e aprimorar as discussões realizadas em sala.

Problema Complementar:

Durante uma situação de emergência, o capitão de um barco dispara um sinalizador para avisar a guarda costeira sua localização. A trajetória que o sinal luminoso descreve é um arco de parábola. A função que descreve o movimento do sinal luminoso é dada por h $(t) = 80t - 5t^2$, sendo h a altura do sinal, em metros, e t, o tempo percorrido após o disparo, em segundos. Pergunta-se: Quantos segundos se passaram, após o disparo, até que o sinal luminoso atingir a altura máxima?

Problema 2: Quantidade de droga na corrente sanguínea

Um paciente recebe uma injeção de uma droga a cada 3 horas. A função que modela a quantidade de medicamento na corrente sanguínea do paciente é a seguinte:

$$f(x) = 2x + |x - 3|$$

Sabendo que a quantidade de medicamento na corrente sanguínea é dada em mg, estime qual deve ser a quantidade de medicamento existente antes e logo após as primeiras 3 horas.

Objetivos: Apresentar a definição de Limites Laterais a partir de um problema que envolve Função Modular.

Conteúdos Abordados: Função Modular, Limites Laterais.

Principais Estratégias de Resolução

Após leitura individual e em grupo, é o momento de o professor averiguar se o conceito de Função Modular é bem internalizado por parte dos estudantes. Se não, surge então um problema secundário. Dessa forma, é necessário que o professor reveja e reconstrua novamente a ideia de Função Modular. Em seguida, o professor deve incentivar a resolução do problema gerador. Uma das estratégias de resolução é buscar a imagem da função, usando a definição de Função Modular e aplicando valores próximos a 3 e então construir o gráfico da função.

$$f(x) = \begin{cases} 3(x-1), se\ x > 3 \\ x+3, se\ x < 3 \end{cases}$$

$f(2{,}5) = 2{,}5 + 3 = 5{,}5\ mg$

$2\ hrs\ 40\ m \cong 2{,}66\ hrs\ \rightarrow f(2{,}66) = 2{,}66 + 3 = 5{,}66\ mg$

$2\ hrs\ 55\ m \cong 2{,}91\ \rightarrow f(2{,}91) = 2{,}91 + 3 = 5{,}91\ mg$

$2\ hrs\ 59\ m\ 59\ s\ \cong 2{,}99\ \rightarrow f(2{,}99) = 2{,}99 + 3 = 5{,}99\ mg$

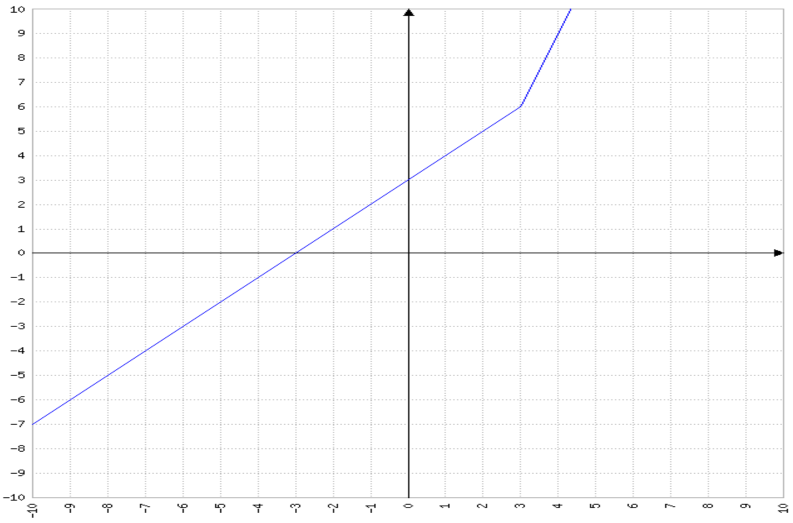
$3\ hrs\ 10\ m \cong 3{,}16\ hrs\ \rightarrow f(3{,}16) = 3(3{,}16 - 1) = 6{,}48\ mg$

$3\ hrs\ 5m \cong 3{,}083\ hrs \rightarrow f(3{,}083) = 3(3{,}083 - 1) = 6{,}24\ mg$

$3\ hrs\ 1m\ 59\ s \cong 3{,}033\ hrs \rightarrow f(3{,}033) = 3(3{,}033 - 1) = 6{,}099\ mg$

$3\ hrs\ 00m\ \ 6s \cong 3{,}001\ hrs \rightarrow f(3{,}001) = 3(3{,}001 - 1) = 6{,}003\ mg$

Figura 29: Função Modular



Fonte: O autor

Esses resultados mostram que não há uma mudança abrupta na quantidade de droga presente na corrente sanguínea do paciente logo antes ou após $t = 3hrs$.

Formalização

Para atingirmos o objetivo do problema na etapa da formalização, faz-se necessário que durante a plenária o professor procure fazer com que os estudantes associem o contexto do problema a ideia de Limite. É o momento de o professor apresentar a definição de Limites Laterais e mostrar que é a partir das condições de existência da Função modular, que temos os limites à esquerda e direita.

$$\lim_{x \to 3^+} 3(x-1) = 6 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^-} x + 3 = 6$$

Comentários:

- O professor pode levantar o seguinte questionamento: "O que aconteceria com Limite da função dada, se os Limites à direita e esquerda fossem diferentes?". A partir de tal questionamento o professor pode apresentar outras características referentes à definição de Limites Laterais e introduzir o conceito de continuidade, se for o caso.
- É muito comum que o professor ao trabalhar o conceito de Limites Laterais priorize os cálculos e dê pouca ênfase à resolução gráfica que vem a corroborar com a construção do significado. Neste problema, o professor pode explorar e possibilitar que os estudantes

cheguem à resposta correta do problema não só a partir dos cálculos, como também a partir da exploração do gráfico.

Extensões do problema: O professor pode estender a discussão propondo um novo problema que tenha o objetivo de aprimorar o conceito de Limites Laterais a partir da definição de Função Modular e exploração do gráfico.

Problema Complementar:

Seja $f(x) = \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$, responda:

a) Encontre os limites laterais no ponto $x = 2$;
b) O limite da função $g\ (x)$ quando x tende a 2, existe?
c) Esboce o gráfico de g;

Problema 3: Concentração de sal em um tanque

Um tanque contém 5000 litros de água pura. Água salgada contendo $30g$ de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de $25\ l/min$. Nestas condições mostre que a concentração de sal depois de t minutos (em gramas por litro) é a seguinte:

$$c(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

O que acontece com concentração de água à medida que o tempo cresce (passa)?

Objetivos: Introduzir o conceito de Limites no Infinito.

Conteúdos Abordados: Função. Limites no Infinito.

Principais Estratégias de Resolução:

Após t minutos, 25 litros de água salgada (salmora) com $30\ g$ de sal por litro foram bombeados para o tanque, para que ele contenha: $5000 + 25 \cdot t$ litros de água e consequetemente $25t \cdot 30 =\ 750 \cdot t$ gramas de sal. Dessa forma, a concetração de sal depois de t minutos será:

$$c(t) = \frac{750 \cdot t}{5000 + 25 \cdot t} = \frac{30t}{200 + t}$$

Agora iremos estimar a concentração de sal, à medida que o tempo cresce:

Suponhamos que:

T=5→ $c(5) = \frac{30\cdot5}{200+5} = \frac{150}{205} = 0{,}7\ g/l$

T=10→ $c(10) = \frac{30\cdot10}{200+10} = \frac{300}{210} = 1{,}42\ g/l$

T= 15→ $c(15) = \frac{30\cdot15}{200+15} = \frac{450}{215} = 2{,}09\ g/l$

T= 25→ $c(25) = \frac{30\cdot25}{200+25} = \frac{750}{225} = 3{,}33\ g/l$

T= 50→ $c(50) = \frac{30\cdot50}{200+50} = \frac{1500}{250} = 6\ g/l$

T= 100→ $c\ (100) = \frac{30\cdot100}{200+100} = \frac{3000}{300} = 10\ g/l$

T= 200→ $c\ (200) = \frac{30\cdot200}{200+200} = \frac{6000}{400} = 15\ g/l$

T= 500→ $c\ (500) = \frac{30\cdot500}{200+500} = \frac{15000}{700} = 21{,}4\ g/l$

T= 1000→ $c\ (1000) = \frac{30\cdot1000}{200+1000} = \frac{30000}{1200} = 25\ g/l$

T= 1500→ $c\ (1500) = \frac{30\cdot1500}{200+1500} = \frac{45000}{1700} = 26{,}4\ g/l$

T= 3000 → $c\ (3000) = \frac{30\cdot3000}{200+3000} = \frac{90000}{3200} = 28{,}1\ g/l$

T= 5000→ $c\ (5000) = \frac{30\cdot5000}{200+5000} = \frac{150000}{5200} = 28{,}8\ g/l$

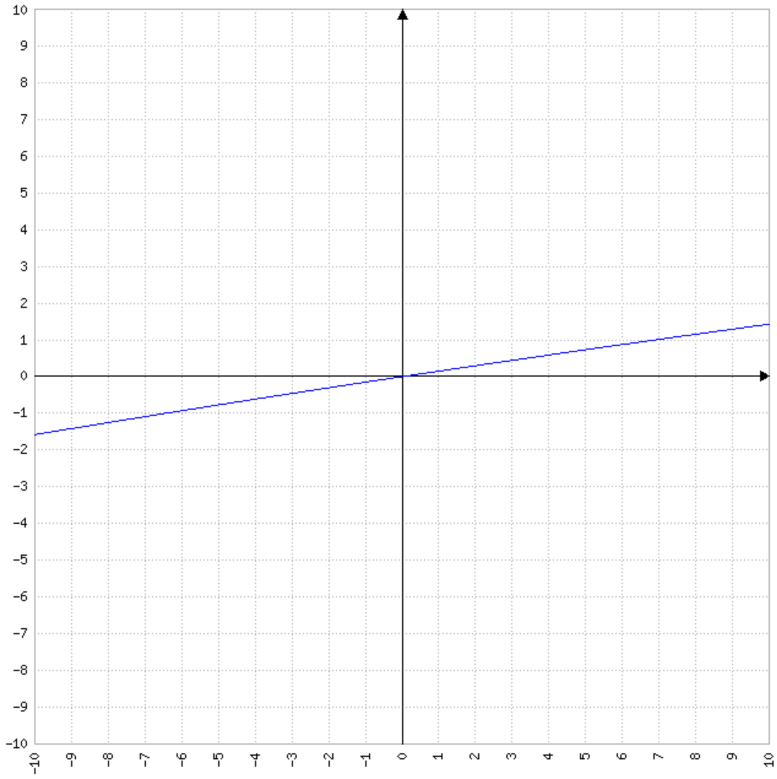
T= 10000 → $c\ (10000) = \frac{30\cdot10000}{200+10000} = \frac{300000}{10200} = 29{,}4\ g/l$

T= 20000 → $c\ (20000) = \frac{30\cdot20000}{200+20000} = \frac{600000}{20200} = 29{,}7\ g/l$

T= 50000 → $c\ (50000) = \frac{30\cdot50000}{200+50000} = \frac{1500000}{50200} = 29{,}8\ g/l$

Por tentativas, vemos que à medida que o tempo vai passando a concentração em g/l cresce e tende a se aproximar de 30. No entanto, chegar a uma conclusão a partir de tentativas pode ser um trabalho muito cansativo, então a construção do gráfico pode ser uma 2º estratégia de resolução do problema.

Figura 30 - Concentração em g/l



Fonte: O autor

Formalização

O professor poderá formalizar, junto aos estudantes, conceitos de Funções e Limites Infinitos envolvidos nos problemas. Seria interessante se durante o processo de formalização, o professor abordasse, a partir da História da Matemática, a ideia de infinito. No final da discussão o professor deve fazer com que os estudantes relacionem as informações contidas no problema com a definição de Limite e a partir daí apresentar o conceito de Limites Infinitos, abordado no capítulo anterior, e então apresentar uma nova resolução para o problema.

Seja a função $c\ (t)\ = \frac{30t}{200+t}$, então:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{30t}{200+t} = \frac{\frac{30t}{t}}{\frac{200}{t}+\frac{t}{t}} = \frac{30}{0+1} = 30\ g/l$$

Comentários:

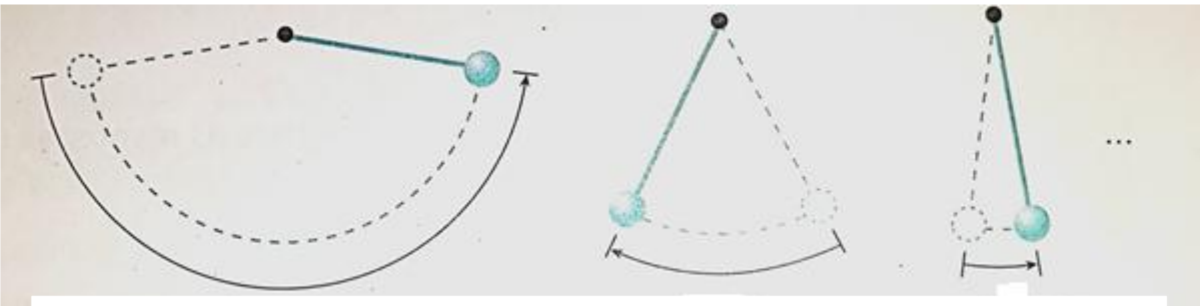
- Na formalização, os estudantes perceberão que podem pensar de formas diferentes, mas que o conceito utilizado para resolução é o mesmo.
- A presença da História da Matemática durante a plenária é muito importante. O professor pode levantar algumas questões a respeito do infinito, podendo questionar: infinito é um número?

Extensões do Problema: O professor pode trabalhar com outros problemas de mesma natureza e abordar outros conceitos como o da soma dos termos de uma PG finita. O problema complementar que propomos a seguir tem o seguinte objetivo: Compreender a ideia de Limites envolvendo o infinito a partir da soma dos termos de uma PG infinita.

Problema Complementar:

Observe a trajetória percorrida por um pêndulo:

Figura 31- Trajetória de um pêndulo



$\mathbf{0,9}\ \boldsymbol{m}$ $\mathbf{0,09}$ **m** $\mathbf{0,009}$ **m**

- Quanto o pêndulo percorrerá até parar?

Problema 4: O número e como Limite

Estime o valor do limite $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ com cinco casas decimais, depois responda:

a) Esse número lhe parece familiar?
b) Esboce o gráfico da função;
c) Mostre que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

Objetivos:

- Expressar o número e como sendo Limite de uma Função;
- Apresentar os Limites Fundamentais;
- Instigar a partir da resolução do problema a argumentação e demonstração em matemática;

Conteúdos abordados: Funções, Limites, Limites infinitos, Limites Fundamentais, Derivadas.

Estratégias de Resolução:

Devemos analisar o comportamento da função, à medida que os valores de x se aproximam de zero.

Tabela 2- Comportamento da Função

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0,1}$	$\mathbf{0,01}$	$\mathbf{0,001}$	$\mathbf{0,0001}$	$\mathbf{0,00001}$	$\mathbf{0,000001}$
$\boldsymbol{f(x)}$	2,59374	2,70481	2,71692	2,71814	2,71826	2,71828

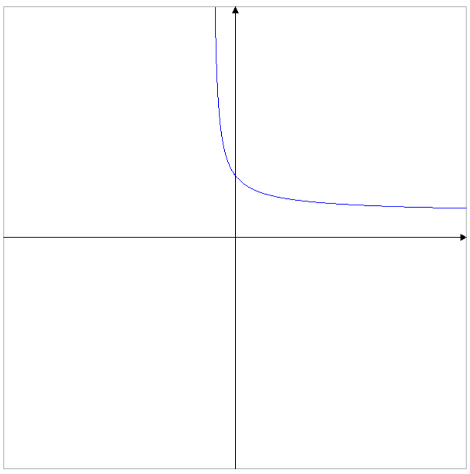
Fonte: O autor

Pela tabela é possível perceber que à medida que os valores de x tendem a se aproximar de 0, a função aproxima-se do número e. Dessa forma,

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

Esboço Gráfico:

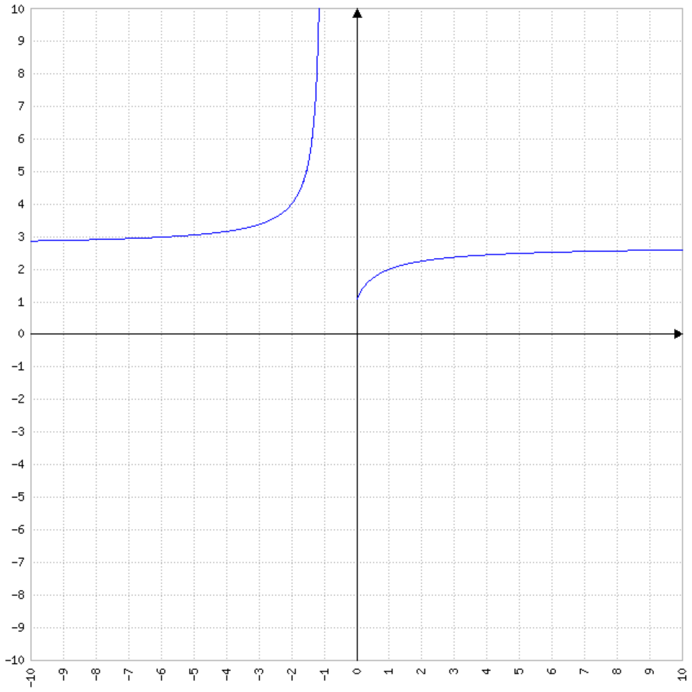
Figura 32- Função $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$



Fonte: O autor

O esboço do gráfico da função $f\ (x)\ =\ (1+\frac{1}{n})^n$ também é uma estratégia de resolução para mostrarmos a afirmação de que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Figura 33- Função de Euler



Fonte: O autor

Formalização

A formalização do problema se trata de uma etapa muito importante, pois durante a plenária todos devem chegar ao consenso de que podem solucionar o problema proposto a partir de argumentos fornecidos pelo próprio CDI. Além disso, é o momento do professor complementar que:

A derivada da função $f\ (x)\ =\ lnx$ é a função racional $f'(x)\ =\ \frac{1}{x}\cdot$, assim $f'(1)\ = 1$. Podemos usar esse fato para mostrar a partir da definição de derivadas que:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-ln1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \boldsymbol{\lim_{x\to 0}\ ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

Pelo fato de $f'(1) = 1$, temos que:

$$\lim_{\boldsymbol{x \to 0}} \boldsymbol{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = 1$$

Pela Continuidade da função exponencial, temos:

$$e^1 = e^{\lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\,ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{\boldsymbol{x\to 0}}\boldsymbol{(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

Se pegarmos o resultado anterior e colocarmos $n = 1/x$, veremos que n tende a crescer arbitrariamente para o infinito à medida que os valores de x se aproximam de zero pela esquerda. Assim uma expressão alternativa para e é a seguinte:

$$e = \lim_{\boldsymbol{n\to\infty}}\boldsymbol{(1+\frac{1}{n})^{n}}$$

Comentários:

- A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas possibilita que o estudante atue como construtor do seu próprio conhecimento. Quando propomos situações onde o estudante deve chegar a solução do problema utilizando argumentos e demonstrações matemáticas, é muito comum que eles tenham dificuldade. Por isso o professor deve aproveitar o momento da plenária e formalização para fazer com que eles se familiarizem com uma escrita matemática mais sofisticada, isso fará com que o estudante seja capaz de solucionar problemas com um maior rigor matemático.

Extensões do Problema: O professor poderá ampliar esse problema de modo que seja possível aprimorar o raciocínio algébrico e abstrato através da Resolução de Problemas. Segue o problema complementar:

Problema Complementar:

Mostre que $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ é estritamente decrescente para $x > 0$ e conclua que $(1+\pi)^e < (1+e)^\pi$.

Problema 5: Estabelecendo relações entre Limites e Continuidade

Seja $f(x) = \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}}$.

a) Determine o domínio da função f;

b) Calcule lim $f(x)$ no infinito e limites laterais nos pontos $x = -2, x = 1$;

c) Esboce o gráfico dessa função;

d) Determine a imagem da função f.

Objetivos:

- Aperfeiçoar os conceitos de Limites infinitos, Limites laterais e Continuidade;
- Estabelecer relações entre o conceito de Limite e Continuidade;
- Compreender o conceito de Limite e Continuidade a partir do esboço gráfico;
- Trabalhar com o conceito de assíntota vertical e horizontal, bem como evidenciar sua utilidade no esboço de gráficos;

Conteúdos trabalhados: Intervalos, Funções, Inequações-Produto e Quociente, Limite, Continuidade.

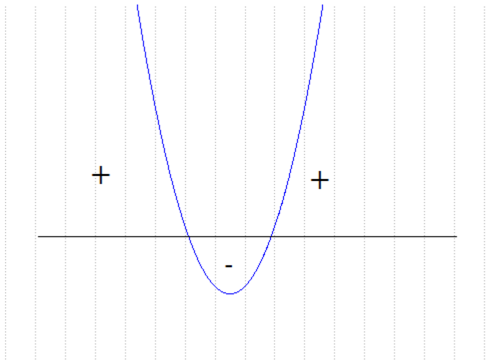
Principais Estratégias de Resolução:

i. Domínio da Função:

Para determinarmos o domínio da função $f(x)$, devemos analisar as condições impostas pela função.

- $g(x) = x.(x+1) \rightarrow h(x) = x^2 + 1$
  Zeros da função: 0 e 1.
  Esboço gráfico:

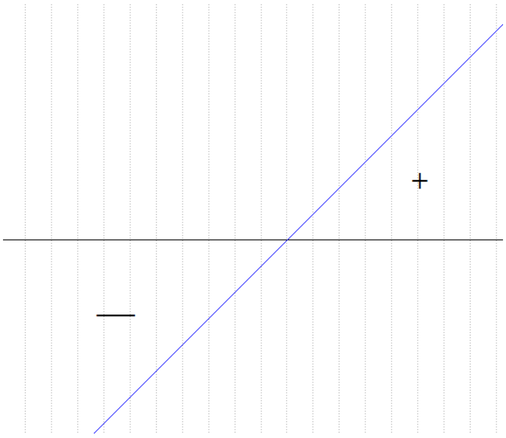
Figura 34- Função $g(x)$



Fonte: O autor

- $h(x) = x - 1$
  Zeros da função: 1
  Esboço gráfico:

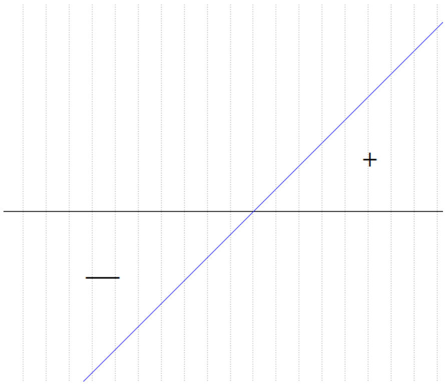
Figura 35 - Função $h(x)$



Fonte: O autor

- $z(x) = \ x + 2$
  Zeros da função: -2
  Esboço gráfico:

Figura 36- Função $z(x)$



Fonte: O autor

- Quadro de Sinais:

Tabela 3- Quadro de Sinais

	-2	-1	0	1	
$g(x)$	+	+	-	+	+
$h(x)$	-	-	-	-	+
$z(x)$	-	+	+	+	+
$\frac{g(x)}{h(x)\cdot z(x)}$	+	-	+	-	+

Fonte: O autor

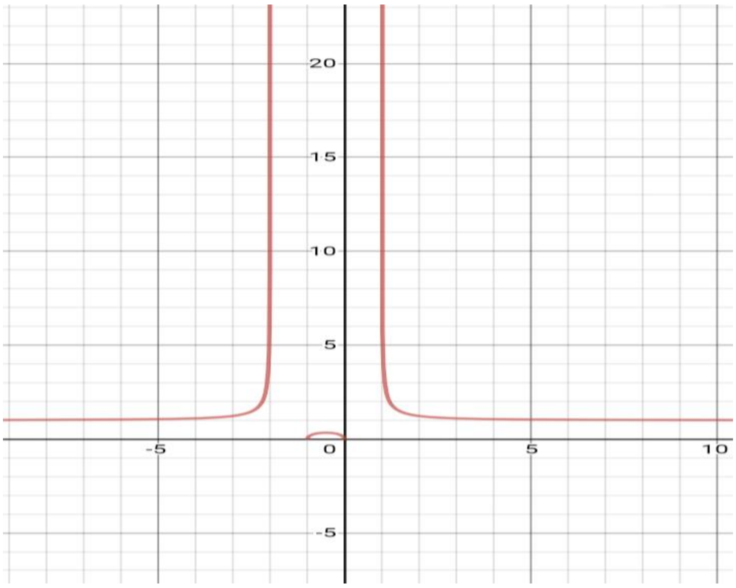
Como $f(x) \geq 0$, os intervalos que compreendem o domínio da função são: $D(f) = \{ x \in \mathbb{R} / x < -2$ ou $-1 < x < 0$ ou $x > 1\}$

ii. Determinar os limites no infinito e laterais:

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

iii. Esboço Gráfico:

Figura 37- Função $y = \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}}$



Fonte: O autor

iv. Imagem

$Im(f) = \{\, y \ \epsilon\ \mathbb{R} / \frac{-1}{4} < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

Formalização:

A partir da resolução e discussão do problema é possível formalizar e apresentar as seguintes definições:

- Assíntotas horizontais e verticais

Chamamos a reta $y = L$ de assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se $\lim_{x\to\infty} L$ ou $\lim_{x\to-\infty} L$. A função $f(x) = \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}}$ tem a reta $y = 1$ como uma assíntota horizontal pois, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Chamamos a reta $x = a$ de assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se ao menos uma das condições a seguir for satisfeita:

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ $\qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ $\qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

A função $f(x) = \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}}$ tem duas assíntotas horizontais, as retas $x = -2\ e\ x = 1$.

No esboço de curvas as assíntotas são de extrema importância, pois sua interpretação imprime importantes significados.

- Relações estabelecidas entre o conceito de Limite e Continuidade

Os limites da função quando $x = -2$ e $x = -1$ não existem, pois $f(x)$ torna-se arbitrariamente grande à medida que x aproxima-se de -2 e 1. Nesse sentido, dizemos que a função não é definida em $x = -2$ e $x = -1$ e que, portanto, f é descontínua nesses pontos.

Comentários: A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas permite a apresentação de novos conteúdos a partir da consolidação e exploração de conceitos pretéritos. Essa perspectiva torna-se bem evidente no problema em questão. A plenária irá se configurar como uma das etapas mais importantes da resolução desse problema, justamente pelo fato de ser possível trabalhar com muitos conceitos da Educação Básica.

Extensões do problema: É possível sugerir o mesmo problema no contexto das Aplicações de Derivada. Dessa vez o professor pode propor as seguintes questões:

a) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente e decrescente;
b) Encontre os valores máximos e mínimos locais;
c) Encontre os intervalos de concavidade e pontos de inflexão;
d) Use as informações anteriores e esboce o gráfico de f;

Problema 6: Raiz real de uma equação

Mostre que a equação $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ tem exatamente uma raiz real

Objetivos: Apresentar o teorema do valor intermediário e suas respectivas aplicações.

Conteúdos trabalhados: Continuidade, Função.

Principais Estratégias de Resolução:

I. Tentativa e erro;

Podemos reescrever a equação como sendo uma função, em que $y = 3x - 2 + cos\frac{\pi x}{2}$.

Por tentativa e erro podemos atribuir valores a x e verificar quais satisfazem a igualdade.

Tabela 4- Tentativa e Erro

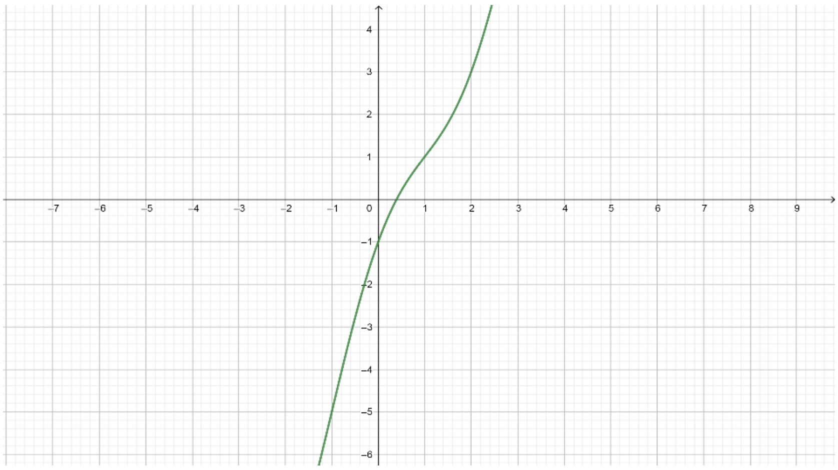
x	-1	0	1
y	-5	-1	1

Fonte: O autor

Note que $f(0) < 0 < f(1)$, logo, existe um número N entre $f(0)$ e $f(1)$, que satisfaz a equação.

II. Esboço gráfico

Figura 38- Função $y = \ 3x - 2 + cos\frac{\pi x}{2}$



Fonte: O autor

Pelo esboço é possível percebe que o gráfico da função intercepta o eixo x em apenas um ponto, estando esse contido no intervalo $[0,1]$. Logo, a equação $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ tem exatamente uma única raiz real.

Formalização:

Após a plenária o professor deve formalizar o problema apresentando o Teorema do Valor Intermediário, como sendo uma extensão do conceito de Continuidade. Segundo o Teorema do Valor Intermediário, se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, existirá um número N entre $f(a)$ e $f(b)$, de modo que $f(c) = N$. No contexto desse problema, existe um número c entre $[0,1]$, tal que $f(c) \ = 0$. Desse modo, chegamos à conclusão de que a equação tem pelo menos uma raiz real no intervalo $[0,1]$.

Comentários: Geralmente, ao trabalhar com alguns teoremas do CDI, o professor se prende apenas a demonstrar, não sendo muito comum, o trabalho com problemas que valorizem o significado de cada teorema exposto. Nesse problema, os papéis se invertem. O estudante constrói argumentos e compreendem as aplicações do Teorema do Valor Intermediário, a partir da discussão e resolução do problema.

Extensões do Problema: O professor pode apresentar o mesmo problema no contexto das aplicações de derivadas. A partir dele o professor pode trabalhar o Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio.

Problema 7: A definição precisa de Limite

> Considere a função: $f(x)=\begin{cases} 2x-1, se\ x \neq 3 \\ 6, se\ x = 3 \end{cases}$
>
> Pergunta-se: Quão próximo de 3 deverá estar x, de modo que a distância de $f(x)$ seja menor que 0,1?

Objetivos:

- Entender o papel do ε e δ na definição formal de um Limite;
- Interpretar geometricamente o Limite a partir do gráfico de uma Função;
- Estimular o pensamento matemático algébrico a partir da Resolução de Problemas;

Conteúdos Trabalhados: Funções, Inequação, Distância entre dois pontos, Limites.

Principais Estratégias de Resolução:

A partir do estudo da função é possível perceber que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5, dessa forma, $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.

A distância de um dado número x a 3 é $|x-3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$. Assim, o que queremos é encontrar um número que satisfaça a seguinte afirmação:

$|f(x) - 5| < 0{,}1$ se e somente se a distância de x a 3, $|x - 3|$, for menor que esse número. Observe que:

$|f(x) - 5| < 0{,}1$ equivale a $|(2x - 1) - 5| < 0{,}1$, que por sua vez é igual a $|2x - 6| < 0{,}1$.

Se usarmos a fatoração, teremos a seguinte desigualdade:

$$2|x-3| < 0{,}1 \rightarrow |x-3| < 0{,}05$$

Podemos perceber que ao final chegamos a uma formulação equivalente ao que tínhamos no início do problema. Dessa forma, a distância que satisfaz a afirmação (I) é $0{,}05$.

Formalização:

Vimos que a distância de um dado número x a 3 é $|x-3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$. Assim, o que queremos é encontrar um número que satisfaça a seguinte afirmação: $|f(x)-5| < 0{,}1$ se e somente se a distância de x a 3, $|x-3|$, for menor que esse número. Esse é o momento do professor apresentar o ε e δ como sendo letras, comumente usadas no trabalho com limites, que representam valores arbitrários. Assim, podemos reescrever o problema da seguinte forma:

Devemos encontrar um δ , tal que $|f(x)-5| < 0{,}1$ se $|x-3| < \delta$, com $x \neq 3$. Note que, se $|x-3| > 0$, é possível escrever uma formulação equivalente do problema. Precisamos encontrar um δ, tal que:

$$|f(x)-5| < 0{,}1 \text{ se } 0 < |x-3| < \delta$$

Observe que,

$$|f(x)-5| = |(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < 2(0{,}05) = 0{,}1$$

Isto é,

$$|f(x)-5| < 0{,}1 \; se \; 0 < |x-3| < 0{,}05$$

Assim, uma resposta para o problema é dada por δ=0,05; ou seja, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

O número 0,1 é uma tolerância de erro que podemos admitir. Se chamarmos ε a um número positivo arbitrário, então encontraremos, como anteriormente que:

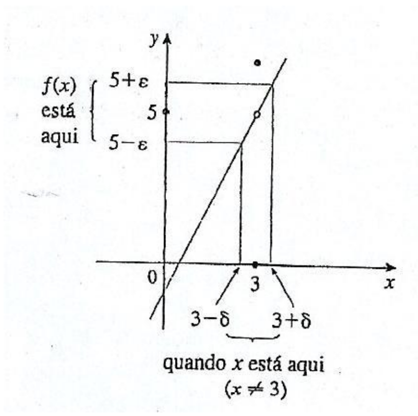
$$|f(x)-5| < \varepsilon \text{ se } 0 < |x-3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Em outras palavras podemos dizer que os valores de $f(x)$ ficarão dentro de uma distância arbitrária ε de 5 tomando os valores de x dentro de uma distância $\frac{\varepsilon}{2}$ de 3, mas sempre $x \neq 3$. Podemos ainda reescrever da seguinte forma:

$$\text{Se } 3 - \delta < x < 3 + \delta \text{ então } 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

Ou seja, tomando valores de x dentro do intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos obter valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$. Segue abaixo uma interpretação geométrica do que discutimos:

Figura 39- Interpretação Geométrica



Fonte: Stewart,2014

Comentários: Trabalhar a definição formal de Limite não é uma tarefa fácil, já que normalmente exige certo grau de abstração. O problema acima propõe que professor e estudante construam essa definição aos poucos, partindo de uma situação mais concreta, de modo que gradualmente alguns elementos importantes como o ε e δ, sejam introduzidos. Seria interessante que o professor, ao final da formalização, discutisse um pouco a construção da definição de Limite a luz da História da Matemática.

Extensões do Problema: O professor pode apresentar um novo problema que complemente a discussão realizada em sala de aula. O problema que aqui propomos nos permite ampliar as conjecturas a respeito do ε e δ.

Problema Complementar:

Demonstre que o $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$

Problema 8: Problema da reta tangente

Ache a equação da reta que passa pelo ponto $(2,6)$ e é tangente à parábola $$y = x^2 + x$$

Objetivos:

- Encontrar a reta tangente a uma curva;
- Apresentar a definição de Derivada a partir do problema da tangente;

Conteúdos Trabalhados: Função, Tópicos de Geometria Analítica, Limite, Derivada.

Principais Estratégias de Resolução:

Temos aqui que $a = 2$ e $f(x) = x^2 + x$, logo a inclinação é:

$$m = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} x + 3 = 5$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(2,6)$ é:

$$y - 6 = 5(x - 2) \text{ ou } y = 5x - 4$$

Formalização:

O Problema de encontrar a reta tangente a uma curva dada consiste em determinar um tipo especial de Limite, que chamamos de Derivada. A Derivada, dependendo do contexto em que está sendo empregada, pode ser interpretada como sendo uma taxa de variação.

Eventualmente, nos referimos à inclinação da reta tangente como uma inclinação da curva em um ponto. Isso acontece, em virtude do fato de que se fizermos uma aproximação em direção ao ponto, iremos perceber que quanto maior for à aproximação, mais indistinguível da reta tangente, será a curva.

Já vimos que outra expressão para a inclinação da reta tangente é a seguinte:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

neste caso fazemos $h = x - a$ e então $x = a + h$, e que é exatamente esse tipo de limite que chamamos de derivada.

Sabemos que a derivada de $y = x^2 + x$ no número a é $f'(a) = 2a + 1$. Portanto, a inclinação da reta tangente em (2,6) é $f'(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, será possível reescrever uma equação da reta tangente à uma curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

E, portanto, uma equação da reta tangente para a situação descrita no problema é a seguinte:

$$y - 6 = 5(x - 2) \text{ ou } y = 5x - 4$$

Comentários: Esse problema configura-se como mais uma oportunidade de o professor mediar à construção de um elo entre a Matemática do Ensino Superior e a Matemática da Educação Básica. Durante a resolução é possível perceber que o estudante está a todo tempo em contato com o conceito de Derivada, mesmo que isso seja imperceptível para ele. Propor aos estudantes situações desse tipo, a partir da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, propicia em sala de aula um ambiente rico de aprendizagem.

Extensões do Problema: Encontrar a reta tangente ou encontrar a velocidade de um dado objeto consiste em determinar o mesmo tipo de limite. Assim sendo o professor pode propor uma nova discussão a partir de um problema envolvendo velocidade.

Problema Complementar:

Suponha que uma bola foi deixada cair do posto de observação de uma torre que está a 450m acima do solo. a) Qual a velocidade da torre após 5 segundos? b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

Problema 9: Limites com indeterminação

Calcule: $\lim_{x \to 0} (1 + sen\ 2x)^{\frac{1}{senx}}$

Objetivos:

- Trabalhar com Limites que possuem formas indeterminadas;
- Estabelecer relações entre as formas indeterminadas e a Regra de L'Hôspital;

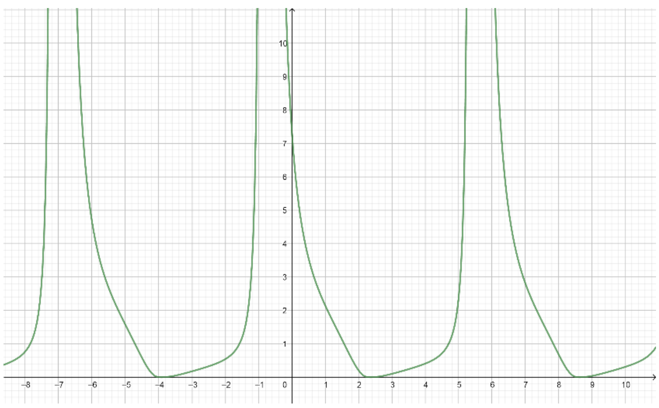
Conteúdos Trabalhados: Funções, Limite, formas indeterminadas, Derivadas, Regra de L'Hôspital.

Principais Estratégias de Resolução:

Precisamos analisar como a função se comporta se próximo a 0. Vamos tentar analisar esse comportamento a partir de três pontos de vista. Observe que não é possível calcularmos o limite dessa função de forma direta, uma vez que, não é possível aplicarmos as Propriedades dos Limites e nos deparamos com uma indeterminação, o que nos leva a crer que o limite pode ou não existir.

Uma alternativa que poderia nos auxiliar na resolução do problema seria a construção do gráfico da função. No entanto, a partir do gráfico abaixo, nota-se que é muito difícil chegarmos a uma conclusão particular acerca do problema apresentado.

Figura 40- Função $(1 + sen\ 2x)^{\frac{1}{senx}}$



Fonte: O autor

Podemos então, analisar o comportamento da função em torno de 0 atribuindo valores a função.

Tabela 5: Comportamento da Função em torno de 0

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$\mathbf{-0,01}$	$\mathbf{7,3916}$
$\mathbf{-0,001}$	$\mathbf{7,3893}$
$\mathbf{-0,0001}$	$\mathbf{7,3890}$
$\mathbf{0,01}$	$\mathbf{7,3864}$
$\mathbf{0,001}$	$\mathbf{7,3887}$
$\mathbf{0,0001}$	$\mathbf{7,3890}$

Fonte: O autor

Podemos perceber que à medida que os valores de x tendem a se aproximar de zero, pela direita e pela esquerda, a imagem da função tende a se aproximar de 7,3. Portanto, podemos dizer que: $\lim_{x \to 0} (1 + sen\ 2x)^{\frac{1}{senx}} \approx 7{,}3$.

Formalização

Observe primeiro que, quando $x \to 0$, temos, $1 + sen2x \to 1\ e\ \frac{1}{senx} \to \infty$, assim o limite é o tipo indeterminado, uma vez que, temos uma potência indeterminada. É possível nos casos de potência indeterminada, resolver o problema usando o logaritmo natural:

Considere $y = [f(x)]^{g(x)}$, então $ln\, y = \ g(x)\ ln\, f(x)$

Como também, escrevendo como uma função exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$$

Se considerarmos,

$$y = \lim_{x \to 0} (1 + sen\ 2x)^{\frac{1}{senx}}$$

Então,

$$ln\, y = \ ln[(1 + sen\ 2x)^{\frac{1}{senx}}] = \frac{1}{senx} \cdot ln(1 + sen2x)$$

E logo, a Regra de L'Hôspital fornece,

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\mathrm{sen}2\mathrm{x})'}{(senx)'} = \frac{2cos2x}{cosx} = \frac{2}{1} = 2$$

Até agora encontramos o $\lim_{x\to 0} lny$, no entanto gostaríamos de encontrar o $\lim_{x\to 0} y$, para isso usaremos o fato de que:

$$y = e^{lny}$$

Note que,

$$\lim_{x\to 0} (1 + sen\ 2x)^{\frac{1}{senx}} = \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} e^{y} = e^{2} \cong 7{,}3$$

Comentários: Durante a plenária é importante que o professor discuta com os estudantes o que de fato é uma indeterminação. Nesse momento, o professor deve instiga-los a apresentarem alternativas que eliminem a indeterminação. Após a formalização, o professor também pode apresentar o seguinte questionamento: A forma 0^{∞} é uma potência indeterminada?, e então encerrar a discussão.

Extensões do Problema: A partir do questionamento apresentado nos comentários acima, o professor pode propor o seguinte problema complementar:

Problema Complementar:

Suponha que f seja uma função positiva. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, mostre que:

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$$

Problema 10: Limite e Continuidade de uma função definida por partes

Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > 1, \\ \min\{x, sen\ x\}, & |x| \leq 1. \end{cases}$

a) Calcule limites laterais nos pontos $x = -1, x = 1$;

b) Esboce o gráfico dessa função;

c) Determine o conjunto dos pontos onde $f(x)$ é contínua;

Objetivos:

- Aprofundar o estudo de Limite e Continuidade a partir de uma função definida por partes;
- Estimular a interpretação do problema mediante resolução algébrica e gráfica;

Conteúdos Trabalhados: Funções, Intervalos, Limite, Continuidade.

Principais Estratégias de Resolução:

Devemos inicialmente determinar o domínio da função. Perceba que $y = \frac{1}{x}$, desde $|x| > 1$, ou seja, $x < -1$ ou $x > 1$. Para $y = min\,\{x, senx\}$, devemos ter $|x| \leq 1$, ou seja, -1 $\leq x \leq 1$. Portanto, $D(f)$ = (-∞, $-1)\cup(-1{,}1)\cup(1,\infty)$.

- ❖ Calculando os Limites Laterais:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \min\{x, senx\} = -0{,}841\ldots$$

Perceba que $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$, portanto a função é descontínua em -1.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \min\{x, senx\} = 0{,}841\ldots$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{x} = 1$$

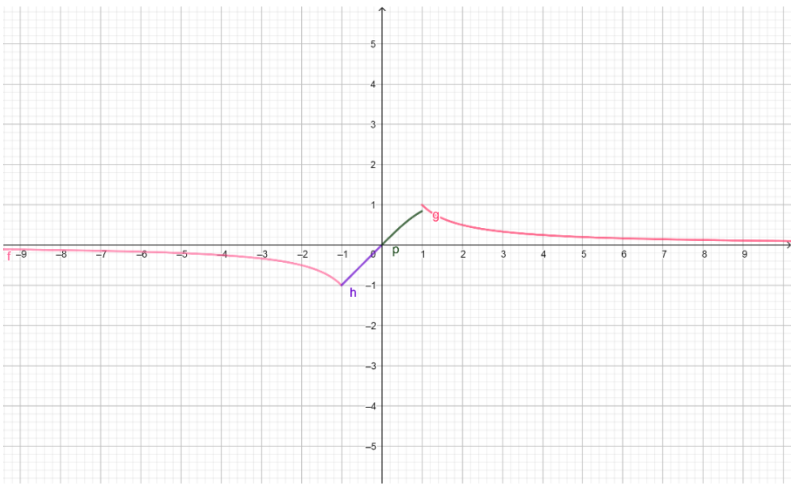
Analogamente a questão anterior, a função é descontínua em 1.

- ❖ Pontos onde a função é contínua:

A função é contínua em todos os pontos de seu domínio com exceção de $x = -1$ e $x = 1$.

- ❖ Esboço Gráfico:

Figura 41- Função Definida por Partes



Fonte: O autor

Formalização:

O professor deve dar encaminhamento aos conceitos matemáticos que estão sendo construídos e fazer uso de conceitos já apresentados anteriormente. A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas permite que os estudantes aprimorem conceitos que já estão sendo trabalhados a partir de problemas geradores. Esses devem cobrar a construção, organização, compreensão e memorização dos conceitos já vistos e suas respectivas relações, por isso, durante a plenária o professor pode questionar: De que forma o problema apresentado está contribuindo para a consolidação dos conceitos? Quais relações podemos estabelecer entre os conceitos trabalhados a partir do esboço gráfico? Todos esses questionamentos irão ajudar o professor durante o processo de avaliação.

Comentários: A exploração e discussão de problemas desse tipo, mediante diversas perspectivas, corroboram para uma melhor aprendizagem de conceitos chaves não só do CDI, como também servem de base para uma melhor compreensão dessas definições a luz da Análise Matemática, uma vez que, o conceito de Limite serve de alicerce para a construção de todos os conceitos posteriores dentro do estudo do Cálculo.

Extensões do Problema: Como na Análise Real, os conceitos de Ínfimo, Supremo, Máximo e Mínimo, adquirem certa relevância desde a própria construção dos Números Reais e estão intimamente ligados à ideia de Limite, o professor pode estender esse problema e já introduzir uma discussão a respeito desses temas. Segue a sugestão do problema complementar.

Problema Complementar:

A partir do problema 10, calcule (caso existam) supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto de valores de $f(x)$ quando x percorre a reta real $\mathbb{R}\}$.

Problema 11: Explorando o Teorema do Confronto

Seja a função: $f(x) = x \cdot sen\frac{1}{x}$, avalie:

a) Domínio da função;
b) Gráfico da função;
c) O limite de f quando os valores de x tendem a zero;

Objetivos:

- Aprofundar o estudo do Limite de uma Função;
- Apresentar o Teorema do Confronto;

Conteúdos Trabalhados: Funções, Limite, Teorema do Confronto.

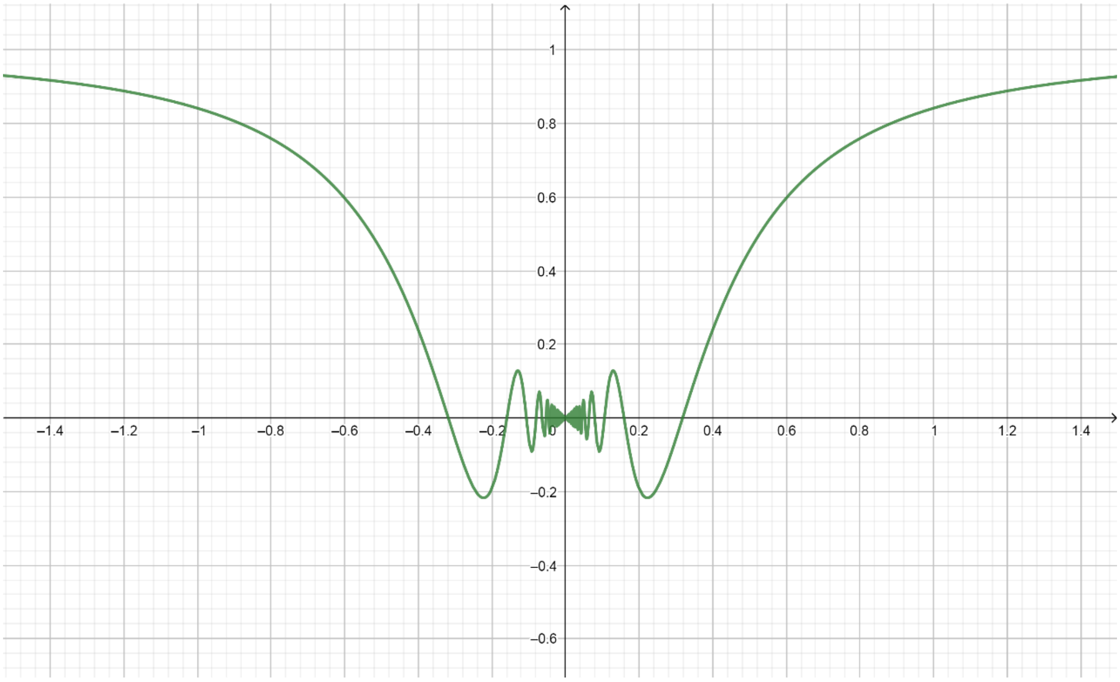
Principais Estratégias de Resolução:

Inicialmente devemos buscar qual o domínio da função. A função não está definida em $x = 0$. Portanto os valores de x que satisfazem o domínio da função devem ser: $x < 0$ ou $x > 0$. Assim,

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Definido o conjunto de valores que satisfazem o domínio da função, podemos recorrer a uma calculadora gráfica a fim de plotar o gráfico da função, já que não se trata de uma função fácil.

Figura 42- Função $x \cdot sen\frac{1}{x}$



Fonte: O autor

Não é possível calcular o limite utilizando métodos algébricos. Assim usaremos a calculadora para descobrir o que acontece com f à medida que os valores de x tendem a se aproximar de zero.

Tabela 6- Imagem de f em torno de 0

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$
$\mathbf{-0,09}$	$\mathbf{-0,0893}$
$\mathbf{-0,08}$	$\mathbf{-0,0053}$
$\mathbf{-0,05}$	$\mathbf{0,04564}$
$\mathbf{-0,02}$	$\mathbf{-0,00524}$
$\mathbf{-0,0001}$	$\mathbf{-0,00003}$
$\mathbf{0}$	**Não existe**
$\mathbf{0,09}$	$\mathbf{-0,0893}$
$\mathbf{0,08}$	$\mathbf{-0,0053}$
$\mathbf{0,02}$	$\mathbf{-0,00524}$
$\mathbf{0,0001}$	$\mathbf{-0,00003}$

Fonte: O autor

Nota-se que f tende a zero à medida que os valores de x se aproximam de zero em outras palavras, a partir da tabela, $\lim_{x\to 0} x \cdot sen\frac{1}{x} = 0$.

Formalização

Durante a formalização o professor deve mostrar que é possível solucionar o limite matematicamente, mesmo que já se tenha chegado a uma conclusão plausível por meio da calculadora. Ao apresentar o Teorema do Confronto o professor deve estimular o raciocínio matemático dos estudantes, de modo que possam perceber que o estudo das funções é importante para a "produção" das funções f e h.

Sabe-se que a função seno é limitada,

$$-1 \leq sen\frac{1}{x} \leq 1$$

Multiplicando a desigualdade acima por x segue que,

$$-x \leq xsen\frac{1}{x} \leq x$$

E portanto, calculando o limite com $x \to 0$, segue que

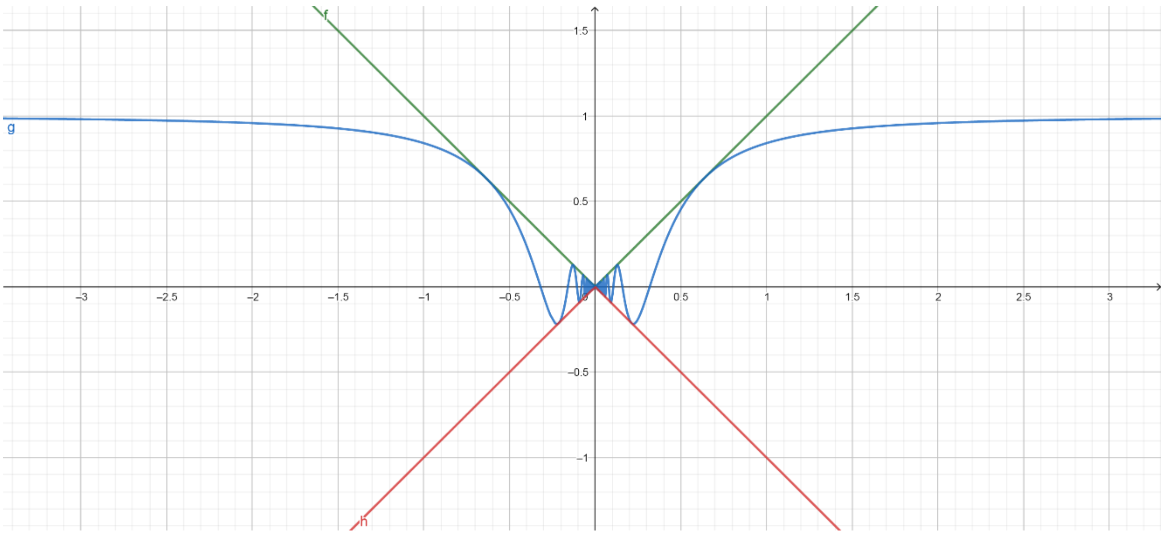
$$0 \leq \lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x} \leq 0$$

Pelo Teorema do Confronto, concluímos que,

$$\lim_{x\to 0} xsen\frac{1}{x} = 0$$

Graficamente,

Figura 43- Representação Teorema do Confronto



Fonte: O autor

Comentários: Problemas desse tipo são importantes para evidenciar discussões que em aulas tradicionais muitas vezes ficam implícitas. A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas permite que estudantes e professores façam correlações dentro do campo de estudo trabalhado e percebam as aplicações envolvidas.

Extensões do Problema: Para fechar a discussão o professor pode sugerir o problema a seguir.

Problema Complementar:

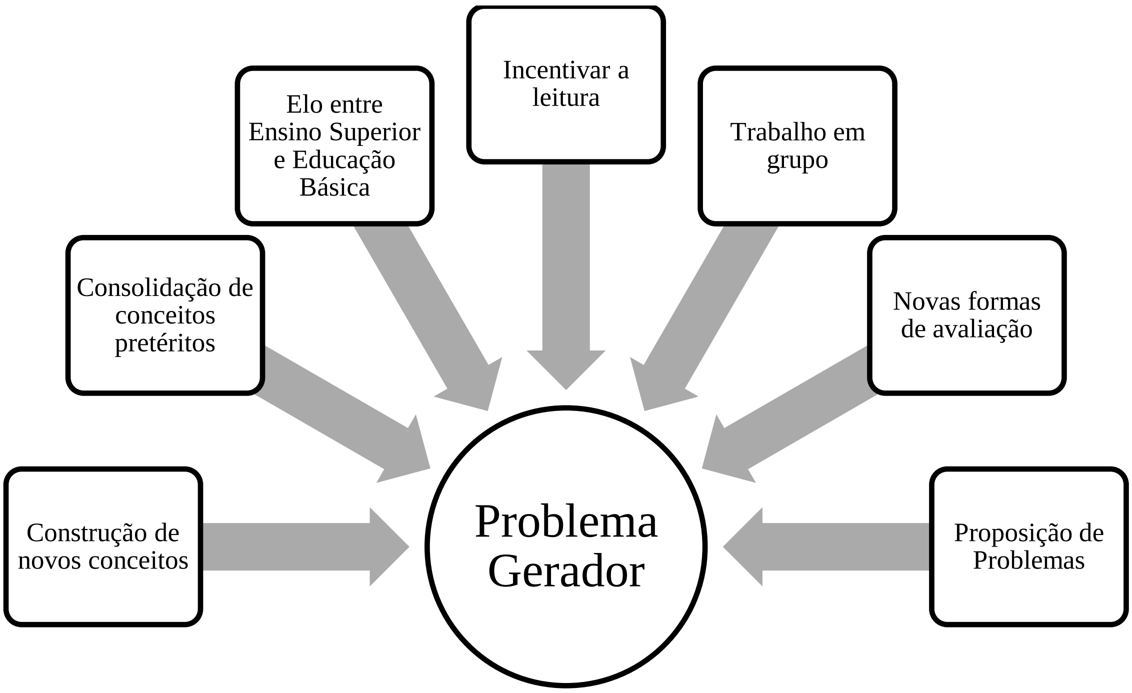
Suponha que $\lvert f(x)\rvert \leq M$ para todo x, onde M é uma constante. Prove que o $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$

Muitas são as contribuições do emprego da Resolução de Problemas em sala de aula. Diante do cenário de mudanças em sala de aula, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, surge com o propósito de dinamizar as aulas de matemática e evidenciar o estudante como ser protagonista e responsável pela sua aprendizagem. Com o professor não é diferente. Assumindo o papel de mediador, contribui para o progresso do seu aluno e se depara com novas possibilidades de avaliação.

A proposta de ensino e aprendizagem, apresentada acima, foi organizada de modo que docentes e discentes possam perceber essas potencialidades, entendendo a proposta como um pontapé inicial para novas formas de se trabalhar o CDI. Uma lista complementar de Problemas envolvendo Limites se encontra no anexo.

A figura abaixo resume todas as contribuições que a proposta de ensino e aprendizagem de Limite através da Resolução de Problemas apresentada, possibilita a professores e estudantes:

Figura 44: Contribuições da Proposta de Ensino e Aprendizagem de Limite através da Resolução de Problemas



Fonte: Organizado pelo autor

Apresentamos no Capítulo seguinte, as considerações finais dessa investigação.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fazer a análise de erros não é um trabalho fácil para um professor inexperiente, ou, ainda que experiente, pouco inclinado a inovações de sala de aula, como por exemplo, a utilização de estratégias e metodologias de ensino e de aprendizagem. No entanto, acreditamos que na prática, já estando o professor familiarizado, essas estratégias e metodologias podem torna-se um procedimento naturalmente integrado aos demais procedimentos didáticos do professor.

Romberg (2008) diz que é comum em Educação Matemática, que pessoas ou grupos criem novos produtos com a intenção de melhorar o ensino e a aprendizagem. Os produtos podem ser novos materiais didáticos, técnicas educativas ou programas educativos. Nesse sentido, em nosso entender o que apresentamos de novo aqui diz respeito à antecipação do conceito de Limite para estudantes dos cursos de Matemática, Química, Física, entre outros, em nível superior.

Sabemos que, o conceito de Limite está presente nas mais diversas atividades do dia-dia e, portanto, é um assunto que merece um tratamento especial desde cedo para iniciantes em Cálculo. Como pudemos constatar nesta investigação, esse conceito pode ser introduzido de forma intuitiva já na Educação Básica. Quanto mais cedo os estudantes se familiarizarem com o estudo de Limites no contexto da álgebra, melhor darão sentido a esse importante conceito do Cálculo.

Assim, durante a pesquisa de campo, pensávamos em responder a seguinte pergunta: **Como o estudo dos erros cometidos pelos estudantes pode ajudar no processo de ensino e aprendizagem de Limite?**

Ao formular a pergunta da pesquisa não imaginávamos que todos os registros dos estudantes nos fornecessem tantos pontos primordiais para um repensar da prática docente em sala de aula. O erro não deve ser provocado, mas quando ocorre e enxergamos as suas potencialidades, acabamos por refletir sobre a importância do nosso papel enquanto formadores, uma vez que, é a oportunidade que temos de nos debruçar sobre eles e tentar propor soluções que possam promover o aprendizado. Cury (2018, p. 82), destaca que,

> [...] o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas.

Não se trata apenas de apontar o erro para o estudante e mostrá-lo qual o caminho correto que se deve seguir, mas sim, criar possibilidades para ampliação da compreensão e construção de sentidos e instigar o surgimento dos porquês durante esse processo.

O estudo dos erros cometidos pelos estudantes nos ajudou a perceber que a metodologia que aplicávamos antes dessa investigação, não estava sendo capaz de promover um ensino de Limite com compreensão, além de não ter promovido a discussão dos aspectos algébricos da Educação Básica. Com isso, acreditamos que se tivéssemos trabalhado com a metodologia de Resolução de Problemas no contexto do ensino e aprendizagem de Limite, os resultados teriam sido satisfatórios.

Além disso, esta investigação nos fez perceber que o ensino de Limites desprovido de uma contextualização e pautados em um processo tecnicista, onde o professor incentiva a resolução de longas listas e usa os livros-textos de CDI como única fonte, contribui significativamente para o baixo rendimento dos estudantes na disciplina, além de não ser capaz de promover a compreensão de vários tópicos da Educação Básica. Se "o formador de futuros professores, o educador matemático, trabalhasse bem o conceito de Limite, ele poderia mostrar que esse conceito é o responsável por justificar aquilo que se faz apenas com regras quando são trabalhadas suas técnicas operatórias" (ONUCHIC; HUANCA, 2013, p.321-322).

A análise dos erros cometidos pelos estudantes, a partir de suas atividades e avaliações, nos ajudou a identificar e interpretar as principais dificuldades e fragilidades apresentadas pelos estudantes durante o estudo do Limite. Esta análise contribuiu para a construção de uma proposta de ensino e aprendizagem de Limite, fundamentada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, onde acreditamos fortemente que essa proposta irá promover o ensino e aprendizagem de Limite com mais compreensão e significado.

Estamos convencidos de que a proposta de ensino cumprirá bem esse papel, pois possibilitará a discussão e a valorização dos aspectos algébricos do Ensino Básico, a partir da compreensão de novos conceitos e revisão dos já vistos, e contribuirá para uma melhor formação de professores de Matemática.

De maneira geral, a interpretação dos dados aqui expostos nos faz pensar que é,

> [...] primordial repensar o ensino de Cálculo para alunos ingressantes em cursos superiores, empregando metodologias e recursos variados e, especialmente, destinando períodos para atendimento individual, seja com

> monitores, seja com bolsistas de Iniciação Científica, ou até mesmo com alunos de mestrado, que podem realizar seus estágios curriculares com atividades voltadas para os alunos das disciplinas Matemáticas iniciais dos cursos de graduação (CURY; CASSOL, 2004, p.33-34, apud CURY, 2018, p.61).

A todo o momento nossos alunos querem nos dizer algo. Sejam com seus erros, acertos, questionamentos ou resultados, há sempre em nossas mãos reflexos diretos de nossa prática. No entanto fazemos o seguinte questionamento: Será que sempre estamos atentos a esses feedbacks? Até que ponto estamos dispostos a ouvir ou a mudar? Ensinar não é uma tarefa fácil. Não existe receita pronta para se aplicar em sala de aula. Trabalhar com metodologias faz parte de um processo de ensaio, erro e experimentação. O importante é não desistirmos e sempre estarmos prontos para ensinar e aprender.

Estamos convictos de que a proposta apresentada impulsionará investigações futuras, de modo que será possível aprofundarmos ainda mais a compreensão do objeto de estudo da pesquisa a partir da aplicação dessa proposta em sala de aula e de seu aprimoramento a partir da contribuição de outras metodologias, como por exemplo, a Modelagem Matemática, a História da Matemática, dentre outras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALGUNS fatos históricos sobre os Limites. *In:* E-Calculo-USP. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_limites.htm#:~:text=Isaac%20Newton%2C%20em%20Principia%20Mathematica,sentido%2C%20a%20necessidade%20do%20limite.&text=Ele%20havia%20descoberto%20o%20papel,a%20semente%20da%20defini%C3%A7%C3%A3o%20moderna . Acesso em: 10 jul. de 2020.

ALLEVATO, N.S.G.; ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Matemática: Por que Através da Resolução de Problemas? **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

AMORIM, L.I.F. **A (Re) Construção do Conceito de Limite do Cálculo para Análise: Um Estudo com Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática**. 2011. 134f. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática)- Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

AMORIM, L.I.F.; REIS, F. D.S. A (Re)Construção do Conceito de Limite do Cálculo para a Análise. In: Frota, M.C.R.; BIANCHINI, B.L.; CARVALHO, A.M.F.T.D. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 277-305.

ANDRADE, C.P.; ONUCHIC, L.D.L.R. Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP.In: ONUCHIC, L.D.L.R; JUNIOR, L.C.L; PIRONEL,M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 433-466.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. In: ONUCHIC, L.D.L.R; JUNIOR, L.C.L; PIRONEL,M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-395.

ARAÚJO, M. M. A. Pesquisa como Ferramenta na Produção de Conhecimentos: a sala de aula como laboratório. In: MOITA, F.M.G.D.S.C.; VIANA, L.H.(Org.). **Teorias e Práticas Docentes no Ensino de Ciências e Matemática**. Curitiba: CRV, 2019. p. 99-112.

ÁVILA, G. **O ensino de Cálculo no 2º grau**. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm. Acesso em 10 jul. de 2020.

ÁVILA, G. O ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, São Paulo, n. 33, p. 83-95, 2012.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 8 ed. São Paulo, SP: Moderna, 2015.

BIHUNA DE AZEVEDO, E.; BAPTISTA PALHARES, P. M.; BAR DE FIGUEIREDO, E. Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. e020012, 1 maio 2020.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRESSOUD, D. et al. **Teaching and Learning of Calculus**. Hamburg: ICME-13,2016.

CELESTINO, M.R. **“Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos no Ensino Superior”**. 2008. 208f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

COSTA, M.A.F.D. **Projeto de pesquisa: entenda e faça**. 2. Ed.- Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

COSTA, A.S.da. et al. Investigando as dificuldades apresentadas em álgebra por alunos do oitavo ano do ensino fundamental. **Revista Destaques Acadêmicos**, Lajeado, V.8, nº 4, p. 159-176, 2016.

CURY, H.N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 2 Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

ESCHER, M.A. **Dimensões Teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas históricas e de ensino e aprendizagem**. 2011. 222f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERNÁNDEZ, C.Q.; MORA, E.P. Límites de funciones en una variable y principales dificultades conceptuales de estudiantes en formación inicial. In: **XV CIAEM-IACME**, 15, 2019. Medellín/COL. ***Anais […].*** Medellín: XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2019.

FERREIRA, A.B.D.H. **Mini Aurélio - O Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FERREIRA, N. C.; SILVA, L.E.; MARTINS, E.R. Resolução de Problemas no Ensino Superior. In: ONUCHIC, L.D.L.R; JUNIOR, L.C.L; PIRONEL,M. (Org.). **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 189-219.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

FORSTER, S.R.L. **Ensino a Distância: Uma análise do design de um curso de Cálculo com um olhar no conteúdo de limites e continuidade de uma variável.** 2007. 288f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. Ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa**. 8. Ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de Cálculo**. Volume 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013.

HUANCA, R.; ONUCHIC, L.D.L.R. A Licenciatura em Matemática: O Desenvolvimento Profissional dos Formadores de Professores. In: Frota, M.C.R.; BIANCHINI, B.L.; CARVALHO, A.M.F.T.D. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.** Campinas, SP: Papirus, 2013. – (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

JURADO, U.M. Creación de Problemas. Avances y Desafíos en la Educación Matemática. In: **REMATEC**, 2011, num.21, p. 79-90, Jan. 2016.

KIERAN, C. **Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

KILPATRICK, J. Reformulando: Abordando a Resolução de Problemas Matemáticos como Investigação. In: ONUCHIC, L.D.L.R; JUNIOR, L.C.L; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p.163-187.

LIMA, G.L. O ensino do cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. In: **Xi Encontro Nacional De Educação Matemática**, 11, 2013, Curitiba. ***Anais [...].***Curitiba-PR,2013.

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores associados, 2010. (Coleção Formação de Professores)

LUCKESI, C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. 13. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

MASSUCATO, M.; MAYRINK, E.D. **Qual a diferença entre problema e exercício?.** Disponível em: https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1504/qual-a-diferenca-entre-problema-e-exercicio. Acesso em: 20 out. de 2019.

MESSIAS, M.A.V.D.F; BRANDEMBERG, J.C. Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais. **Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 53, p.1224-1241, dez. 2015. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

MINAYO, M.C.D.S (org.). **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade**. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MORAIS, R.D.S.; ONUCHIC, L.D.L.R. Uma abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L.D.L.R; ALLEVATO, N.S.G.; NOGUTI, F.C.H.; JUSTILIN, A.M. (Org.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17-34.

NASCIMENTO, J.C.D. **O Conceito de limite em Cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de Matemática**. 2003. 337f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2003.

NETO, J.P.D.S. **Um Estudo sobre o Ensino de Limite: Um Tratamento Computacional com Aplicações.** 2006. 123f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p.199-220.

ONUCHIC, L.R; ALLEVATO, N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, M.A.V.; Borba, M.C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p. 212-231.

ONUCHIC, L.D.L.R; ALLEVATO, N. S.G. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, vol.25, n.41, p. 73-98, dez. 2011. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

ONUCHIC, L. D.L.R; NOGUTI, F.C.H. A Pesquisa Cientifica e a Pesquisa Pedagógica. In: ONUCHIC, L.D.L.R; ALLEVATO, N.S.G.; NOGUTI, F.C.H.; JUSTILIN,A.M. (Org.).**Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 53-68.

PIRONEL, M.; VALLILO, S.A.M. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. . In: ONUCHIC, L.D.L.R; JUNIOR, L.C.L; PIRONEL,M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 279-304.

PREFEITURA MUNICIPAL DE CAJAZEIRAS. Cajazeiras-PB, 2020. **Dados do Munícipio**. Disponível em: https://cajazeiras.pb.gov.br/omunicipio.php. Acesso em: 30 de jan. 2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE. Portal UFCG, 2019. **Conheça a UFCG.** Disponível em: https://portal.ufcg.edu.br/conheca-a-ufcg.html . Acesso em 03 jul. 2020.

ROMBERG, A. T. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. **Boletim de Educação Matemática**, vol.20, núm.27, p. 93-139, fev. 2008. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RYAN, M. **Cálculo para leigos**. Rio de Janeiro, RJ: Alta Books, 2011.

SANTOS, M.B.S.D. **Um Olhar para o Conceito de Limite: Constituição, Apresentação e Percepção dos Professores e Alunos sobre seu Ensino e Aprendizado**. 2013. 338f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SANTOS, L.D.S.D. **As Contribuições dos Mapas Conceituais para a (Re) Significação de Conceitos em Cálculo Diferencial e Integral I na Formação Docente.** 2019. 98f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal do Pernambuco, Caruaru, 2019.

SANTOS, E. V.; ANDRADE, S. Resolução, Exploração e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. e020030, 1 maio 2020.

SCHNEIDER, A. **A Aprendizagem da Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

SERRAZINA, L. Resolução de Problemas e Formação de Professores: um Olhar sobre a Situação em Portugal. In: ONUCHIC, L.D.L.R; JUNIOR, L.C.L; PIRONEL,M. (Org.).**Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 55-83.

SILVA, G.S. **A História do Cálculo**. Disponível em: https://www.phylos.net/2017-12-18/a-historia-do-calculo/. Acesso em: 10 jul. 2020.

SOARES, G.D.O. Definição do conceito de limite apresentada por quatro estudantes de um curso de licenciatura em Matemática: uma análise a partir dos Três Mundos da Matemática.

In: **XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, 2017, Pelotas. ***Anais […].*** Pelotas, RS, 2017.

SOUZA, D.V. D; FONSECA, R.F.D. Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e integral. **Educação Matemática Pesquisa**, v.19, n.1, p.197-221, 2017.

STEWART, J. **Cálculo.** Volume 1, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

SULCZINSCKI, P.E.M.; OLIVEIRA, P.X.D.O.; DÖRR, R.C. O grupo de estudos de Cálculo como alternativa de apoio a estudantes do ensino superior. In: **XV CIAEM-IACME**, 15, 2019. Medellín/COL. ***Anais […].*** Medellín: XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2019.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, 12, p. 151-169, 1891.

THOMAS, G.B. **Cálculo**. 11 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

VILA, A. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na Resolução de Problemas**. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

VAN DE WALLE, J. A**. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ANEXO A- Lista Complementar de Problemas

Problema 1.

a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2e^{-x}$, determinando explicitamente: os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente, os intervalos nos quais a função tem concavidade para cima ou para baixo e os limites em $\pm\infty$, caso existam.

Problema 2. Determine, em função de k, o número de soluções da equação $ke^x = x^2$.

Problema 3. Encontre, caso existam, os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ em que a soma das distâncias a $(2,0)$ e $(-2,0)$ é mínima e os pontos em que a referida soma é máxima.

Problema 4. Calcule os seguintes limites

$a)$ $\lim_{x\to 0} \frac{8x^5 - x^3}{3x^4 + 8x^3}$,

$b)$ $\lim_{x\to 0} sen\ 3x\ ctg 5x$,

$c)$ $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$,

$d)$ $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$,

$e)$ $\lim_{x\to 1} (1 - x) tg \frac{\pi x}{2}$,

$f)$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{5x - 10}$.

Problema 5. Uma partícula está se movendo ao longo da curva $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto $(4,2)$, sua coordenada x cresce $3\ cm/s$. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem nesse instante?

Problema 6. Calcule f' e f'', sendo $y = tg\ (cos x)$.

Problema 7. Calcule: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

Problema 8. Determine o $\lim_{x\to\infty} f(x)$, onde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que:

$$\frac{4x - 1}{x} < x < \frac{4x^2 + 3x}{x^2}$$

Para todo $x > 5$.

Problema 9. Sejam $L \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, se\ x \neq 1 \\ L, \quad se\ x = 1 \end{cases}$$

Encontre (caso exista) L para que f seja contínua.

Problema 10. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f\ (x) = \begin{cases} x^2 sen \dfrac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

Determine se f é derivável em $x = 0$.