UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EDSON AMÉRICO DA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

CAMPINA GRANDE – PB
2020

EDSON AMÉRICO DA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE – PB
2020

S586p Silva, Edson Américo da.
Uma proposta para o ensino de problemas de Otimização do Cálculo Diferencial [manuscrito] / Edson Américo da Silva. - 2020.
43 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Derivadas. 2. Resolução de Problemas. 3. Tecnologias digitais. 4. Cálculo diferencial. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O produto a seguir foi construído a partir da dissertação de mestrado intitulada **"As potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra em problemas de Otimização do Cálculo Diferencial"**, defendida em 2020. Nosso objetivo geral foi investigar as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do software GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização. Assim, como objetivos específicos, preparamos e aplicamos alguns problemas sobre Cálculo, adaptando-os à resolução com o GeoGebra; investigamos as formas como os alunos atuam no contexto da Resolução de Problemas; analisamos quais as estratégias que os alunos utilizaram para solucionar certos problemas e quais as dificuldades apresentadas diante das Derivadas; e, investigamos as potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra para a disciplina de Cálculo Diferencial.

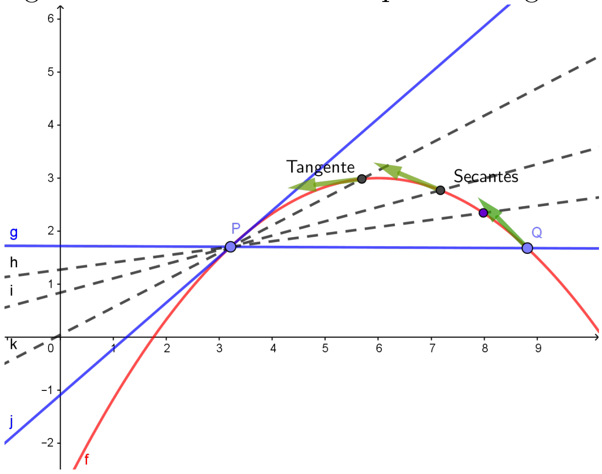
Dessa forma, este Produto Educacional tem a pretensão de servir como um manual para professores de Cálculo que irão trabalhar as Derivadas em problemas de Otimização. Com base nos livros didáticos de Ávila (2012), Flemming (2006), Thomas (2010) e Stewart (2011), e a partir de uma apresentação da metodologia de ensino da Resolução de Problemas e do GeoGebra, serão apresentados alguns atividades que podem ajudar o professor durante a abordagem dos conceitos da Derivada.

1 A DERIVADA

1.1 Retas Tangentes

Para definir ”tangência”para curvas em geral, é preciso um método dinâmico, levando em conta o comportamento das secantes que passam por um ponto P qualquer e pontos próximos (ponto Q, por exemplo), de modo que este ponto próximo se mova em direção a P ao longo da curva (Figura 5.1).

Figura 1: Método dinâmico para a tangência

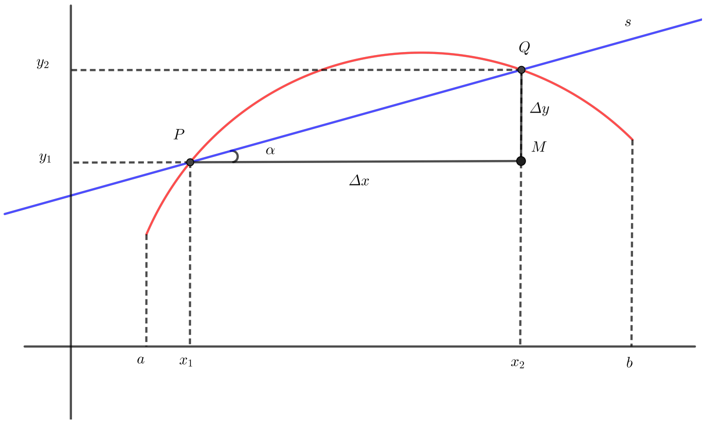


A partir da figura acima, fica evidenciado que a tangente a uma curva no ponto P é a reta através de P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$. Perceba que mantendo-se P fixo e movendo Q sobre a curva em direção a P, a inclinação da reta secante irá variar, de modo que, à medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante.

Uma outra maneira de se analisar a reta tangente é a seguinte: sejam $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a,b), $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pertencentes à curva $y = f(x)$. Agora, considerando s uma reta secante que passar por P e Q, e considerando o triângulo retângulo PMQ (Figura 2), tem-se a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) dado por:

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Figura 2: Inclinação da reta secante s



Definição 1 *Chama-se reta tangente a curva no ponto $P(x_1, y_1)$ à reta que passa por P e cujo coeficiente angular é o número m, também chamado declive da curva no ponto P, dado por:*

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$, pode-se escrever o limite na seguinte forma:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

A partir de então, conhecendo-se a inclinação m da reta tangente à curva no ponto P, é possível encontrar a equação da reta tangente à curva em P, já que a equação da reta é dada na forma:

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

Problema 1 *Encontre a reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ em $x = 1$.*

Solução:

Se $f(x) = x^2$, então $f(x_1) = x_1^2$ e $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 = x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2$.

Agora, tomando

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2) - x_1^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$m(x_1) = 2x_1,$$

que é a inclinação da reta tangente à curva $f(x) = x^2$ num ponto $(x_1, f(x_1))$.

Para $x_1 = 1$, tem-se que $m(1) = 2 \cdot 1$, ou seja,

$$m(1) = 2$$

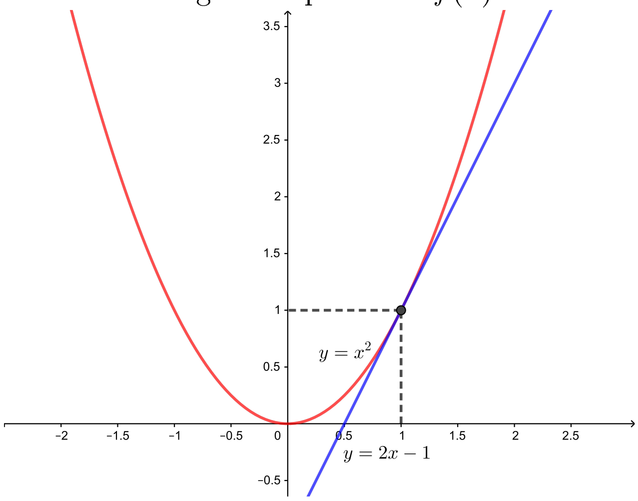
Tomando a equação da reta, tem-se que

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

$$y - f(1) = 2(x - 1)$$
$$y - 1^2 = 2(x - 1)$$
$$y = 2x - 1,$$

que é a equação da reta tangente ilustrada na figura abaixo.

Figura 3: Reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ em $x = 1$



1.2 Derivada de uma função em um ponto

A expressão

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

é chamada, de acordo com o Thomas(2009), *razão incremental ou diferenças dividida de f em x_0 com incremento h.* Se esta razão incremental possuir um limite quando h tende a zero, então esse limite é denominado *derivada de f em x_0*. Essa razão incremental pode ser interpretada como um coeficiente angular da secante e, nesse caso, a derivada dá o coeficiente angular da tangente e da curva no ponto onde $x = x_0$. Se a razão incremental for interpretada como uma taxa média de variação, então a derivada dá a taxa de variação da função em relação a x no ponto $x = x_0$.

Definição 2 *A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função dada por $f'(x)$, tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

se o limite existir.

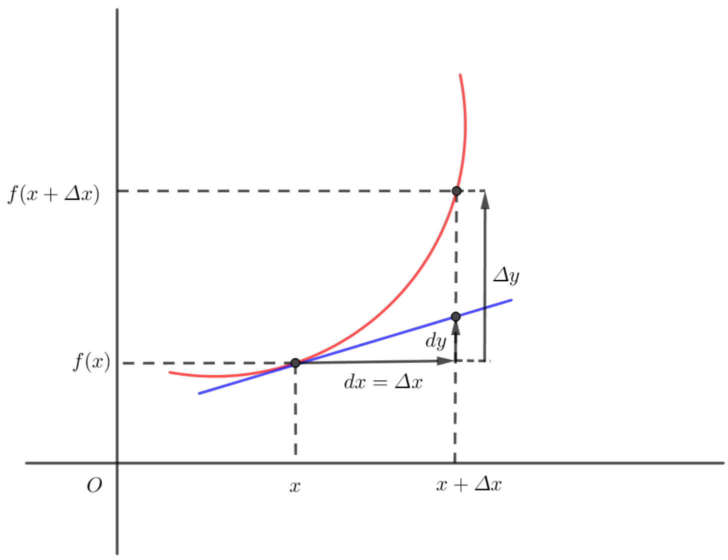
A função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Para indicar a derivada de uma função y são usados outros tipos de notação, como por exemplo $\dot{y}$; essa notação é devida ao inglês Isaac Newton (1642 - 1727). Por outro lado, deve-se a Leibniz (1646 - 1716) a seguinte notação $\frac{dy}{dx}$. Para ele, a derivada devia ser vista como o quociente de quantidades infinitamente pequenas dy e dx. Exemplo:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

Para entender a notação de Leibniz, observe a figura abaixo:

Figura 4: Representação da razão incremental



Ou seja, incremetando Δx a x, a variável y também será incrementada, de tal forma que

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

e a razão incremental será dada por:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - (x)} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se $\Delta x \to 0$, então Δy também tenderá a zero, de modo que a razão incremental se aproxime da derivada. Em outras palavras, a derivada $f'(x)$ é o quociente entre dy e dx.

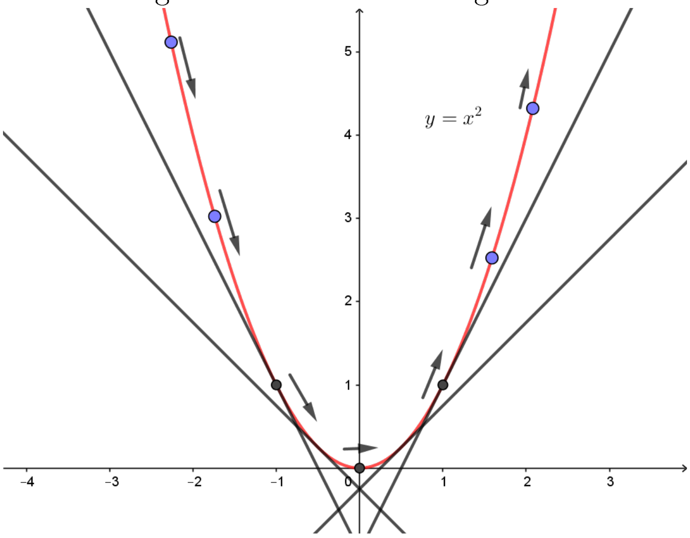
Problema 2 *Dada a função $f(x) = x^2$, encontre $f'(2)$.*

Solução:

Usando a definição

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2) - 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} \\
f'(2) &= 4
\end{aligned}
$$

Figura 5: A derivada e o gráfico



A partir da figura acima, é possível fazer algumas análises a respeito da derivada e do gráfico de uma função (que neste caso é a função $y = x^2$): começando em qualquer valor negativo de x, a derivada vai crescendo com o crescer de x, se anula em $x = 0$ (tangente horizontal) e, na parte positiva do eixo Ox, o declive $2x$ é positivo e vai crescendo á medida que x cresce. Ou seja, a reta tangente vai passando de muito vertical na região negativa, se aproximando da horizontal em $x = 0$ e, em seguida, com o crescer da derivada, a tangente vai ficando muito vertical na região positiva. Tudo isso evidencia que a curva tem concavidade voltada para cima.

1.3 Derivada como taxa de variação

Existe uma maneira bem comum de analisar a derivada a partir da ideia de velocidade. Para isso, a cinemática vem à tona com o movimento de um ponto material cuja equação horária $s = s(t)$ descreve a posição de um móvel ao longo de uma trajetória como função do tempo t. É sabido que a velocidade média é dada por:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Porém, para saber a velocidade num dado instante t, deve-se considerar intervalos de tempo cada vez menores, de modo que as velocidades médias encontradas nesses intervalos dêem informações mais precisas do que acontece no instante t. Dessa maneira, surge o conceito de velocidade instantânea, $v = v(t)$ no instante t como o limite da razão incremental que dá a velocidade média com $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A velocidade média e a velocidade instantânea são, respectivamente, taxa de variação média e taxa de variação instantânea, ambas da função espacial $s = s(t)$.

O conceito de taxa se aplica às funções de um modo geral. Assim, a *taxa de variação média* da função f no intervalo $(x, x + \Delta x)$ é dada por

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

No entanto, a taxa de variação num ponto x é a taxa de variação instantânea, ou seja, a derivada dada por $f'(x)$.

2 Regras de Derivação

Para muitas funções, encontrar sua derivada através da sua definição, calculando o limite da razão incremental é um processo simples. Porém, nem sempre esse procedimento é viável em vários outros tipos de funções, sendo necessário o uso de regras que serão destacadas a seguir. A dedução dessas regras fica a critério do leitor, podendo ser verificada em qualquer livro de Cálculo, já que a seguir serão apresentadas as regras com seus resultados finais.

1. **Derivada de uma constante:** seja f dada por $f(x) = c$, onde c é uma constante. Então:
$$f'(x) = 0$$

2. **Derivada de x^n:** seja n um inteiro positivo. Então:
$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

3. **Derivada de uma soma:** sejam f e g duas funções deriváveis de x. Então, a soma dessas duas funções é derivável em qualquer ponto onde ambas sejam deriváveis:
$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

4. **Derivada de um produto:** sejam f e g funções deriváveis em x. Então, o produto entre elas também é derivável e dado por:
$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

5. **Derivada do produto de uma constante por uma função:** sejam f uma função, c uma constante e g uma função dada por $g(x) = c \cdot f(x)$. Então:

$$g'(x) = [c \cdot f(x)]'$$

$$= (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 + c \cdot f'(x)$$

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

6. **Derivada de um quociente:** sejam f e g deriváveis em x e $g(x) \neq 0$. Então, o quociente $\frac{f}{g}$ é derivável em x e

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

3 Derivada de uma função composta

Suponha que para derivar um função $y = (x^3 + 4x)^{10}$ fosse necessário expandir essa potência binomial até obter um polinômio de grau 30. Primeiro, seria um processo analiticamente enfadonho que exigiria muito tempo; e, segundo, as regras de derivação vistas anteriormente não seriam suficientes. Perceba que y é uma função composta, pois tomando $f(u) = u^{10}$ e $g(x) = x^3 + 4x$, tem-se que:

$$f(x^3 + 4x) = (x^3 + 4x)^{10} = y$$

$$f[g(x)] = y$$

Nesse caso, a derivada pode ser encontrada com o uso da *regra da cadeia*, segundo a qual a derivada da composta de duas funções deriváveis é produto de suas derivadas calculadas em pontos adequados.

Definição 3 *A regra da cadeia é uma regra de derivação segundo a qual se $y = f(u)$, $u = g(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então, a função composta $y = f[g(x)]$ tem derivada que é dada por*

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Sugere-se ao leitor verificar nos livros de Cálculo a demonstração da regra da cadeia.

Problema 3 *Calcular a derivada de $y = (x^3 + 4x)^{10}$*

Solução:

Essa função pode ser reescrita da seguinte forma $y = u^{10}$, $u = x^3 + 4x$. Daí:

$$\frac{dy}{du} = 10u^9$$

e

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4$$

Portanto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot (3x^2 + 4)$$

$$y' = 10(x^3 + 4x)^9(3x^2 + 4)$$

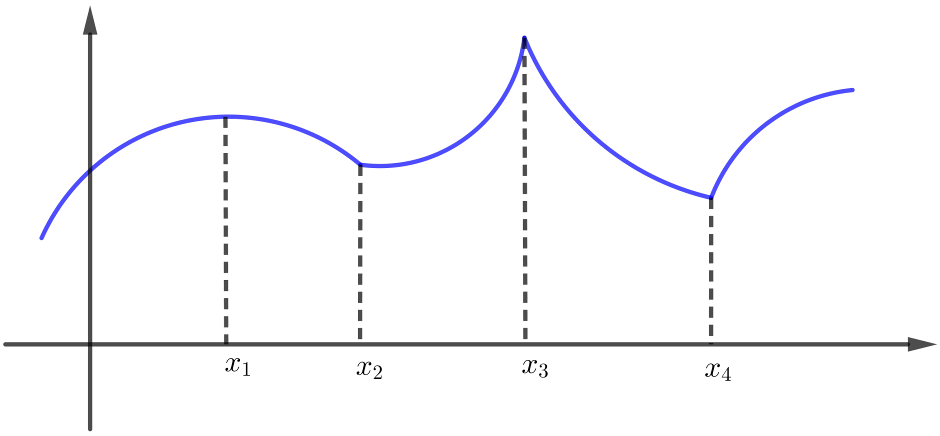
4 Aplicações da Derivada

4.1 Extremos de funções

A partir da derivada é possível obter valores extremos de uma função contínua, que são importantes na resolução de *problemas de otimização* (aqueles que permitem encontrar a solução ótima para um dado problema ou situação).

Seja o gráfico de uma função qualquer $y = f(x)$ mostrado na figura abaixo, onde estão destacados os pontos de abscissas x_1, x_2, x_3, x_4.

Figura 6: Pontos extremos de uma função



Esses pontos são chamados *pontos extremos da função* cujos valores $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são os *máximos relativos* e $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os *mínimos relativos.*

Definição 4 *Uma função f terá um valor* ***máximo relativo*** *em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo x nesse intervalo.*

Definição 5 *Uma função f terá um valor* ***mínimo relativo*** *em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo x nesse intervalo.*

Máximos e mínimos relativos são também chamados de *máximos e mínimos locais* (**extremos locais**), pois se referem a uma domínio restrito da função. Já o máximo e mínimo referentes a todo o domínio da função costumam ser chamados de *máximo e mínimo absolutos* (conhecidos como **extremos absolutos** ou **extremos globais**).

Definição 6 *Seja f uma função de domínio D. Então, f tem um valor **máximo absoluto** em D em um ponto c, se $c \in D(f)$ e*

$$f(c) \geq f(x),$$

para qualquer x em D.

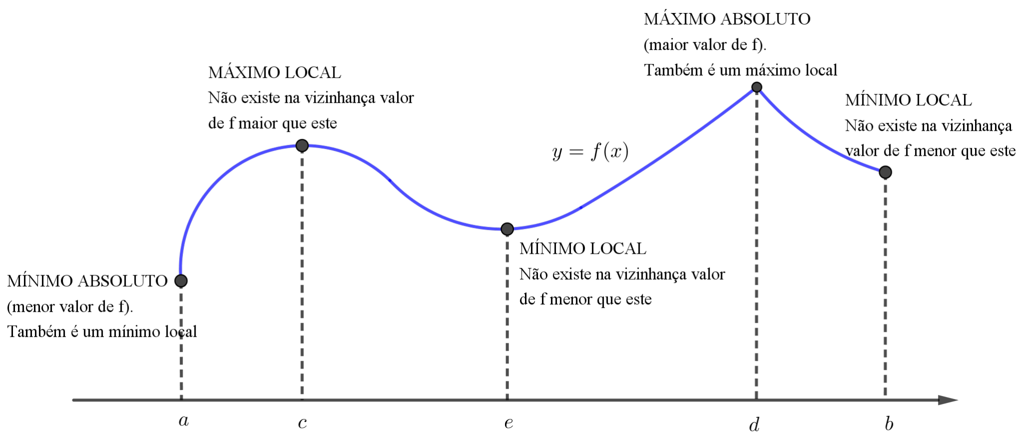
Definição 7 *Seja f uma função de domínio D. Então, f tem um valor **mínimo absoluto** em D no ponto c, se $c \in D(f)$ e*

$$f(c) \leq f(x),$$

para qualquer x em D.

Afim de simplificar as ideias vistas até agora, a figura abaixo mostra um gráfico com alguns pontos, onde a função tem valores extremos em seu domínio $[a, b]$.

Figura 7: Classificação dos máximos e mínimos



A partir de então, se faz necessário introduzir uma nova definição, a dos *pontos críticos*, muito usada no âmbito de máximos e mínimos.

Definição 8 ***Pontos Críticos*** *ou pontos estacionários de uma função f são pontos onde a derivada da função se anula. Ou seja, é um ponto interior do domínio f em que f' é zero ou indefinida.*

Assim sendo, o primeiro passo a ser feito para encontrar os extremos de uma função será determinar os pontos críticos da mesma (supostos máximos e mínimos locais, ou absolutos). Para saber se tal ponto será máximo ou mínimo, será destacado a seguir o teorema de grande importância que explicará o porquê de investigar apenas alguns valores para determinar o extremo de uma função. Mais uma vez, a demonstração deste teorema pode ser verificada em livros de Cálculo, ficando essa tarefa incubida ao leitor.

Teorema 1 ***Primeiro teorema da derivada para valores de extremos locais***
Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f' é definida em c, então:

$$f'(c) = 0$$

Ou seja, de acordo com o Teorema 1, a primeira derivada de uma função será sempre zero em um ponto interior em que a função tenha um valor extremo local e a derivada seja definida.

4.2 Teorema sobre derivadas

Teorema 2 ***O Teorema de Rolle***
Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se

$$f(a) = f(b),$$

então há pelo menos um número c em (a, b) tal que

$$f'(c) = 0$$

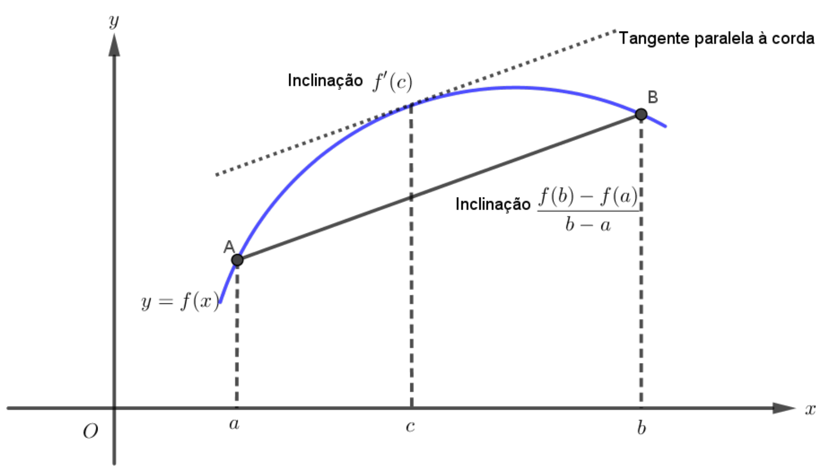
Em outras palavras, segundo o teorema de Rolle, uma curva derivável tem ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva cruza uma reta horizontal, conforme explanado na figura abaixo:

A partir do Teorema de Rolle, é possível chegar ao *Teorema do Valor Médio*, o qual estabelece que, dada uma função f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe pelo menos um ponto c em (a, b) de modo que a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, conforme visualizado na figura abaixo. Em outras palavras, é uma versão inclinada do Teorema de Rolle.

Teorema 3 ***O Teorema do Valor Médio***
Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então, existe pelo menos um ponto c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Figura 8: Teorema do Valor Médio

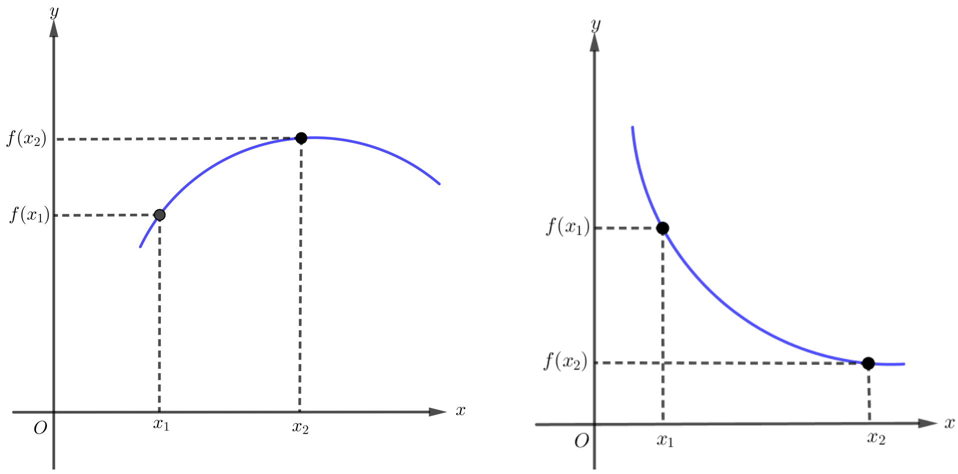


4.3 Testes das derivadas primeira e segunda

O tópico que será visto agora requer uma certa revisitação aos conceitos de função crescente e decrescente. Seja uma função f, definida num intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de I. Então:

- f é **crescente** em I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$;
- f é **decrescente** em I se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$;

Figura 9: Funções crescentes e decrescentes



Se uma função f for crescente ou decrescente num intervalo I, então ela é dita monótona nesse intervalo.

No âmbito do Cálculo Diferencial, a análise geométrica do sinal da derivada de uma função permite determinar os intervalos onde essa função derivável é crescente ou decrescente. Tem-se, então, a seguinte proposição.

Proposição 1 *Seja uma função f contínua num intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a,b).*

(i) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é **crescente** em $[a, b]$;*

(ii) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é **decrescente** em $[a, b]$;*

A seguir, serão apresentados teoremas que permitem estabelecer critérios para determinar os extremos de uma função.

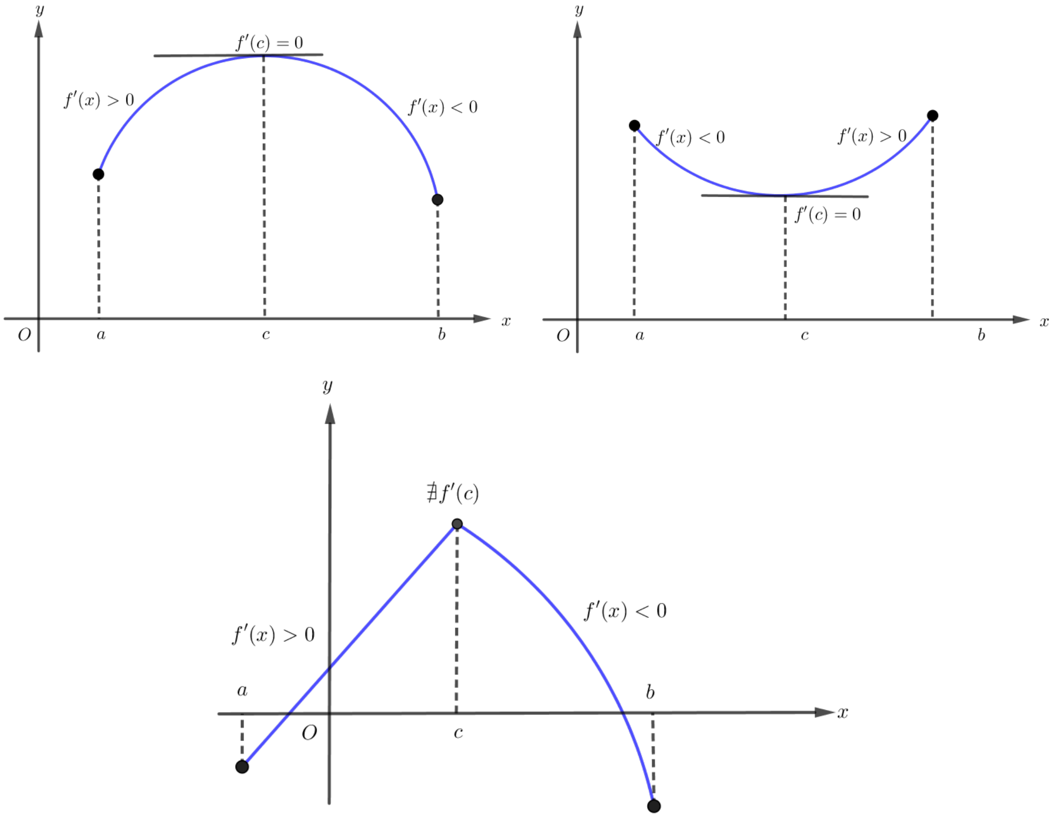
Teorema 4 ***Teste da derivada primeira***

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto crítico c pertencente ao intervalo dado. Então:

(i) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um **máximo relativo** em c;*

(ii) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um* ***mínimo relativo*** *em c;*

Figura 10: Possibilidades do Teste da derivada primeira



Problema 4 *Dada a função $f(x) = (x^3/3 - 4x + 2)$, encontre os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos.*

Solução:

Primeiro, derive $f(x)$ e iguale a zero para encontrar os pontos críticos da função:

$$f'(x) = 0$$

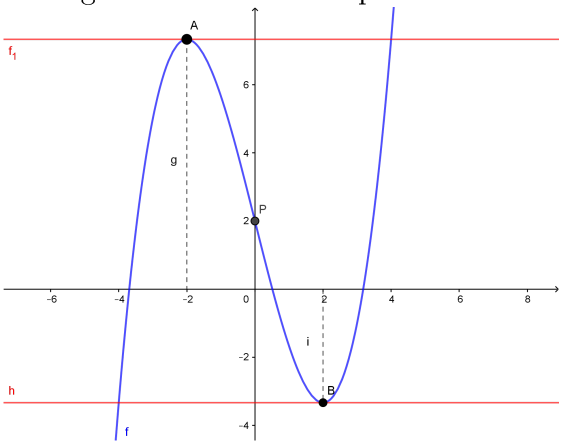
$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

.

Assim, usando o Teste da Derivada Primeira, conclui-se que: $f'(x)$ é positiva para $x < -2$, ou seja, é crescente em $(-\infty, -2)$; $f'(x)$ é negativa para $-2 < x < 2$, ou seja, é decrescente no intervalo $(-2, 2)$; e, $f'(x)$ é positiva para $x > 2$, ou seja, $f'(x)$ é crescente em $(2, +\infty)$. O gráfico da figura abaixo mostra, portanto, que f tem um *máximo relativo* em -2 e um *mínimo relativo* em 2.

Figura 11: Gráfico do problema 4



Teorema 5 ***Teste da derivada segunda***

Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f pertencente ao intervalo dado. Se f for duplamente derivável neste intervalo (f'' em (a, b)), então:

(i) *Se $f''(c) > 0$, o gráfico de f ao longo do intervalo é* ***côncavo para cima*** *e f tem um valor mínimo relativo em c;*

(i) *Se $f''(c) < 0$, o gráfico de f ao longo do intervalo é* ***côncavo para baixo*** *e f tem um valor máximo relativo em c;*

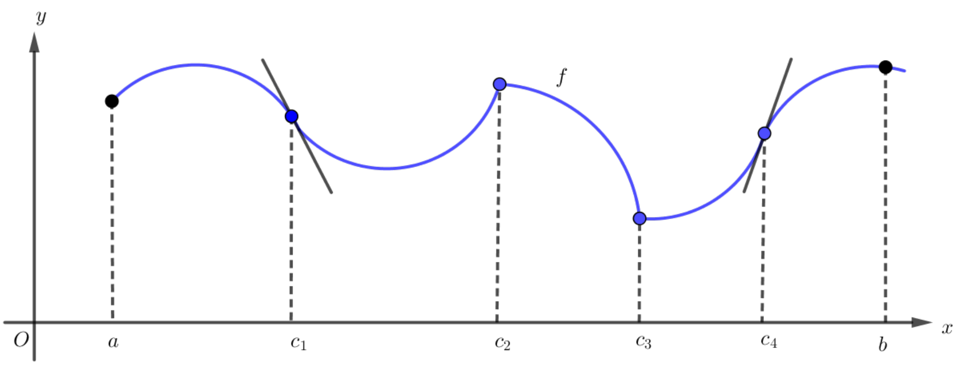
Existem pontos no gráfico de uma função onde a concavidade muda de sentido. Esses pontos recebe um nome especial, o qual será definido a seguir.

Definição 9 *Um ponto de inflexão é aquele dado por $P(c, f(c))$ do gráfico de um função contínua f, desde que exista um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das situações abaixo ocorra:*

(i) *f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b);*

(ii) *f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b);*

Figura 12: Pontos de inflexão



A partir da figura acima, pode-se fazer algumas observações:

1. As abcissas c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão;

2. c_2 e c_3 são pontos de extremos de f, mas f não é derivável nesses pontos;

3. Existem as derivadas de $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$;

4. A reta tangente corta o gráfico de f em $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$;

Problema 5 *Dada a função $f(x) = (x^3/3 - 4x + 2)$ do problema 14, determine os pontos de inflexão e indique os intervalos onde a função tem concavidade voltada para cima ou para baixo.*

Solução:

Sabendo que os pontos críticos da função dada são -2 e 2, e utilizando a derivada segunda de f ($f''(x) = 2x$), conclui-se que: o gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(0, +\infty)$ e tem um mínimo relativo de valor 2; f é côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e tem um máximo relativo em -2; no ponto $c = 0$ a concavidade muda de sentido, ou seja, o ponto $P(c, f(c))$ do gráfico da função é um *ponto de inflexão* ($P(0, 2)$).

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E TECNOLOGIAS DIGITAIS

5.1 A Resolução de Problemas como uma metodologia

Para Onuchic e Allevato (2011), não existem formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula de Matemática. Mas, em 1998, no intuito de ajudar os professores a empregar essa metodologia em suas aulas, foi criado um *Roteiro de Atividades* que permitia fazer uso dessa metodologia, promover entusiasmo em suas salas de aula e fazer com que os alunos vissem a Matemática com um olhar mais confiante (a criação desse Roteiro teve a participação de 45 professores participantes de um Programa de Educação Continuada). Este roteiro, em sua primeira versão, foi subdividido nas seguintes etapas: formar grupos e entregar uma atividade, o papel do professor, registrar os resultados na lousa, realizar uma plenária, analisar os resultados, buscar um consenso e fazer a formalização.

Entretanto, várias pesquisas e experiências em formação de professores revelaram que os alunos ainda continuavam com muitas dificuldades diante da matemática e, pensando nisso, Onuchic e Allevato (2011) reiteraram esse Primeiro Roteiro e incluíram algumas mudanças para a criação de um Segundo Roteiro que provesse aos alunos os conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia, ficando assim caracterizado:

- ***Preparação do problema:*** Selecionar um problema, visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

- ***Leitura individual:*** Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

- ***Leitura em conjunto:*** Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

  - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

- ***Resolução do problema:*** A partir da compreensão do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que ao longo de sua resolução conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- ***Observar e incentivar:*** Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor atua como mediador e leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

  - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e as ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

- ***Registro de resoluções na lousa:*** Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- ***Plenária:*** Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- ***Busca do consenso:*** Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta com toda a classe chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- ***Formalização do conteúdo:*** Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Porém, Onuchic e Andrade (2017), afirmam que em 2015, Onuchic e Allevato propuseram mais uma etapa para este roteiro intitulada como *Proposição de problemas.* Esta etapa pode ser analisada de acordo com dois pontos de vista: de um lado, para os professores, propor problemas é fundamental para ensinar matemática através da resolução de problemas, pois favorece e enriquece a aprendizagem dos alunos; por outro lado, para os alunos, propor seus próprios problemas recairia no fato de que a capacidade de resolver problemas e, assim, compreender ideias matemáticas, seria enriquecida.

5.2 Tecnologias Digitais na Educação Matemática

A tecnologia exerce forte influência na vivência societária. Sua aplicabilidade no mundo moderno abrange as indústrias, o comércio, os transportes, os meios de comunicações e, também, a educação, destacando-se no âmbito do ensino e da aprendizagem.

No que diz respeito à Educação Matemática, a tecnologia assumiu diferentes nomes em épocas distintas. Nesse sentido, Borba, Silva e Gadanidis (2014) refletiram a partir de várias pesquisas desenvolvidas no Brasil e consideraram que o uso das tecnologias digitais na Educação Matemática no Brasil pode ser estruturado em quatro fases:

> A primeira fase é caracterizada pelo uso do software LOGO, a segunda pelo uso de softwares de geometria dinâmica e sistemas de computação algébrica, a terceira pelo uso da internet em cursos a distância e a quarta pelo uso da internet rápida que democratiza a publicação de material digital na grande rede. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 13).

No quadro abaixo, é apresentado, de maneira resumida, os aspectos e elementos que caracterizam cada uma dessas fases.

Quadro 1 – As quatro fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática

	Tecnologias	**Natureza ou base tecnológica das atividades**	**Perspectivas ou noções teóricas**	**Terminologia**
Primeira fase (1985)	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação	Construcionismo; micromundo.	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda fase (início dos anos 1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; fórum; google.	Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC).
Quarta fase (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

Fonte: Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 39).

Porém, Borba, Silva e Gadanidis (2014) destacam que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a fase anterior, já que elas vão se integrando de tal maneira que aspectos que surgiram nas três primeiras fases ainda são fundamentais dentro da quarta fase.

Com o quadro 1, é possível inferir que as fases podem ser caracterizadas por terminologias diferentes: a expressão TI (Tecnologias Informáticas ou Tecnologias da Informação), que é utilizada nas duas primeiras fases, se refere aos computadores, calculadoras gráficas e softwares; já o termo TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) é utilizada na terceira fase, caracterizando-se pelo uso dos computadores e da internet; por sua vez, a expressão TD (Tecnologias Digitais) passa a designar o uso dos computadores, tablets, telefones celulares e internet rápida.

Percebe-se que o intenso desenvolvimento das tecnologias vem promovendo, com o passar do tempo, novos cenários para a sala de aula e novos procedimentos metodológicos. Como bem destaca Richit et al. (2012), a inserção da tecnologia faz com que os processos de ensino e aprendizagem possam ser mais significativos e produtivos para o aluno, mas não é trivial para o professor, demandando tempo para sua incorporação nas aulas.

A utilização das Tecnologias Digitais em sala de aula, em especial o computador, é uma tendência muito discutida na atualidade devido à importância que representam. Essas ferramentas computacionais possuem um amplo potencial pedagógico, podendo auxiliar o professor em relação a diversos conteúdos e, no ensino da Matemática, podem contribuir para o entendimento de um determinado conceito.

Por sua vez, a internet passou a oferecer aos professores e alunos um mundo de possibilidades no que tange à troca de informações e comunicação de ideias, além de sites dedicados ao uso da informática na educação, inclusive com sugestões de atividades. Para Borba e Penteado (2007), o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que inclua uma "alfabetização tecnológica". Segundo os mesmos autores, essa tal alfabetização deve ser vista como uma maneira de aprender a ler essa nova mídia a partir da inserção dos computadores em atividades essenciais como ler, escrever, entender gráficos, entre outros, em que a informática na escola se constitui em parte da resposta a questões ligadas à cidadania.

Segundo Onuchic e Allevato (2005):

> Ademais, o computador permite relacionar a descoberta empírica com as representações Matemáticas algébricas e, ainda, confirmar numericamente modelos

> algébricos por meio da possibilidade de infindáveis simulações. Estas características o tornam um poderoso recurso quando associado à Resolução de Problemas. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 225).

O uso dos softwares possibilita, por meio de construções e manipulações, a exploração dos conceitos matemáticos, permitindo que os resultados adquiridos analiticamente de um problema possam ser verificados por meio de visualizações em 2D ou 3D. Na disciplina de Cálculo, por exemplo, que apresenta certo grau de abstração, seria interessante o uso de softwares para facilitar o entendimento das representações gráficas e algébricas. Mas, para que as tecnologias contribuam de maneira eficaz no processo de aprendizagem, é necessário que os professores adotem metodologias que explorem, juntamente com os alunos, todo o conceito matemático envolvido.

Nesse sentido, Gravina e Santarosa (1999) alertam que para haver a mudança de paradigmas na educação, é necessário ser crítico e cuidadoso no processo de uso da informática:

> A informática por si só não garante esta mudança, e muitas vezes engana pelo visual atrativo dos recursos tecnológicos que são oferecidos, os quais simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento. (GRAVINA; SANTAROSA, 1999, p. 74).

De nada adiantaria o uso da informática ou de outras ferramentas computacionais sem um devido planejamento, no qual o professor deve aliar as atividades e conteúdos objetivando o desenvolvimento de habilidades nos alunos que garantam uma aprendizagem efetiva. Se, por um lado, essas ferramentas podem auxiliar os professores, por outro lado, as mesmas possibilitam aos alunos um conhecimento dinâmico, já que é possível modelar e simular problemas, visualizando situações dificilmente obtidas de maneira manual. Assim sendo, Bittar (2010) reforça esse ponto quando diz que:

> Não podemos correr o risco de usar a informática como um "apêndice" do curso habitual, ou seja, o professor dá a aula da maneira como está habituado, na maioria das vezes somente no ambiente papel e lápis, e, quando leva os alunos ao laboratório, as atividades realizadas não contribuem com a compreensão dos conceitos estudados. (...) Ora, nesse caso o computador foi usado de forma artificial e não foi explorado em sua potencialidade máxima como um meio que pode oportunizar mudanças no processo de ensino e aprendizagem que sejam de ordem do conhecimento (BITTAR, 2010, p. 239 - 240).

A princípio, tanto o aluno quanto o professor devem ter compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos para, só assim, tirar o melhor proveito do computador, conforme destaca Allevato (2005):

> (...) para utilizar eficientemente o computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (ou o professor) precisam ter conhecimento do que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Eles precisam saber Matemática embora, muitas vezes, uma Matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino. (ALLEVATO, 2005, p. 79).

A presença das tecnologias redefine o papel do professor e do aluno, pois implicam nas formas de transmitir e armazenar informações e nos modos de construção do conhecimento. De acordo com Marin e Penteado (2011), a presença das tecnologias no cenário educacional faz com que o professor enfrente novas situações, sendo desafiado a rever e ampliar seus conhecimentos, já que as tecnologias provocam demandas que vão além da sala de aula. Para Borba (2011), as tecnologias podem levar os alunos a desenvolverem suas ideias, criarem conjecturas, validando-as e levantando subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática, devido às possibilidades de investigação e experimentação que essas mídias propiciam.

Em outras palavras, o professor precisa repensar sua prática docente, estando preparado para os diversos desafios e situações que as tecnologias proporcionam, ao mesmo tempo em que motiva os alunos à exploração de ideias, à criatividade e ao enfrentamento de desafios que permitam aos estudantes fazerem suas próprias descobertas. Assim, Borba e Penteado (2007) reforça esse pensamento quando dizem que:

> Entendemos que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento. (BORBA e PENTEADO, 2007, p. 45).

De maneira geral, as tecnologias promoveram e ainda promovem diversas tendências no ensino como um todo, e isso sugerem mudanças na ação dos docentes.

Para Richit (2016), o uso das tecnologias digitais para a realização de cálculos, a representação de conceitos geométricos e funções é importante na resolução de problemas e na experimentação matemática, pois nessas situações os processos algoritmizados não se constituem no objetivo-fim dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Ademais,

> Verifica-se que o entendimento acerca do papel das tecnologias digitais nos processos de ensino e aprendizagem presente nas diretrizes político-pedagógicas dos PCN evidencia aspectos como a visualização, a otimização de cálculos e operações algébricas, ampliação das possibilidades de representação gráfica e, sobretudo, a realização de atividades de investigação e experimentação matemática. Além disso, destaca a possibilidade de promover uma visão ampliada sobre a matemática, uma vez que o desenvolvimento de atividades matemáticas, associadas às situações sociais ou naturais da realidade e pautadas no uso de tecnologias ampliam os modos de ver e aprender a própria matemática. Os aspectos aqui destacados sinalizam a sinergia entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas. (RICHIT, 2016, p. 115).

Assim, nosso interesse é trabalhar a metodologia da Resolução de Problemas juntamente com a tecnologia, mais precisamente o GeoGebra, o qual será abordado a seguir.

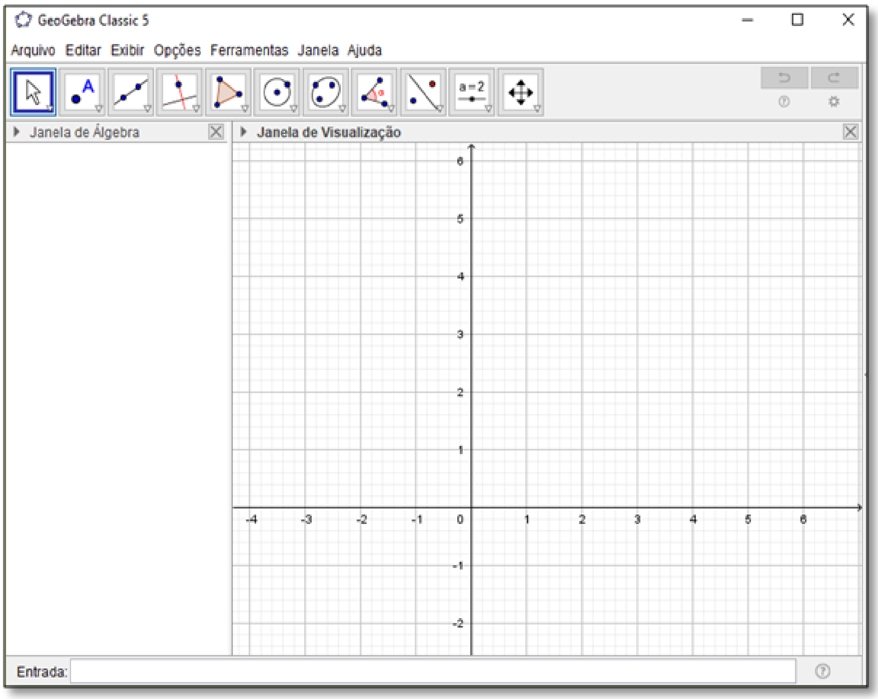
5.3 O Software GeoGebra

Desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software com alto potencial didático e pedagógico que reúne ferramentas para Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, podendo ser utilizado nos sistemas operacionais *Windows*, *Linux* ou *Mac OS*, abrangendo desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Sua interface dispõe de um campo de entrada, de uma janela de Álgebra e outra de Geometria, em que cada objeto geométrico criado possui uma correspondência algébrica, de modo que tudo que é construído na zona gráfica o próprio software algebriza mostrando uma expressão algébrica que represente tal figura construída; a partir de então, é possível manipular objetos construídos e movê-los sem alterar suas propriedades. Por isso, o GeoGebra é conhecido como um software de geometria dinâmica, em que o usuário assume o controle das representações a partir da execução de cada uma das etapas necessárias para uma determinada construção geométrica.

Além do mais, o GeoGebra facilita a investigação dos alunos, que podem movimentar os objetos e acompanhar as variações ocorridas, relacionando os conteúdos algébricos e geométricos, o que torna algo extremamente valioso no ensino de Cálculo Diferencial.

A janela inicial do Geogebra é formada por uma barra de menus, uma barra de ferramentas, uma janela de álgebra, uma janela de visualização, o campo de entrada de texto, um menu de comandos e um menu de símbolos, conforme figura abaixo:

Figura 13 - Interface do GeoGebra

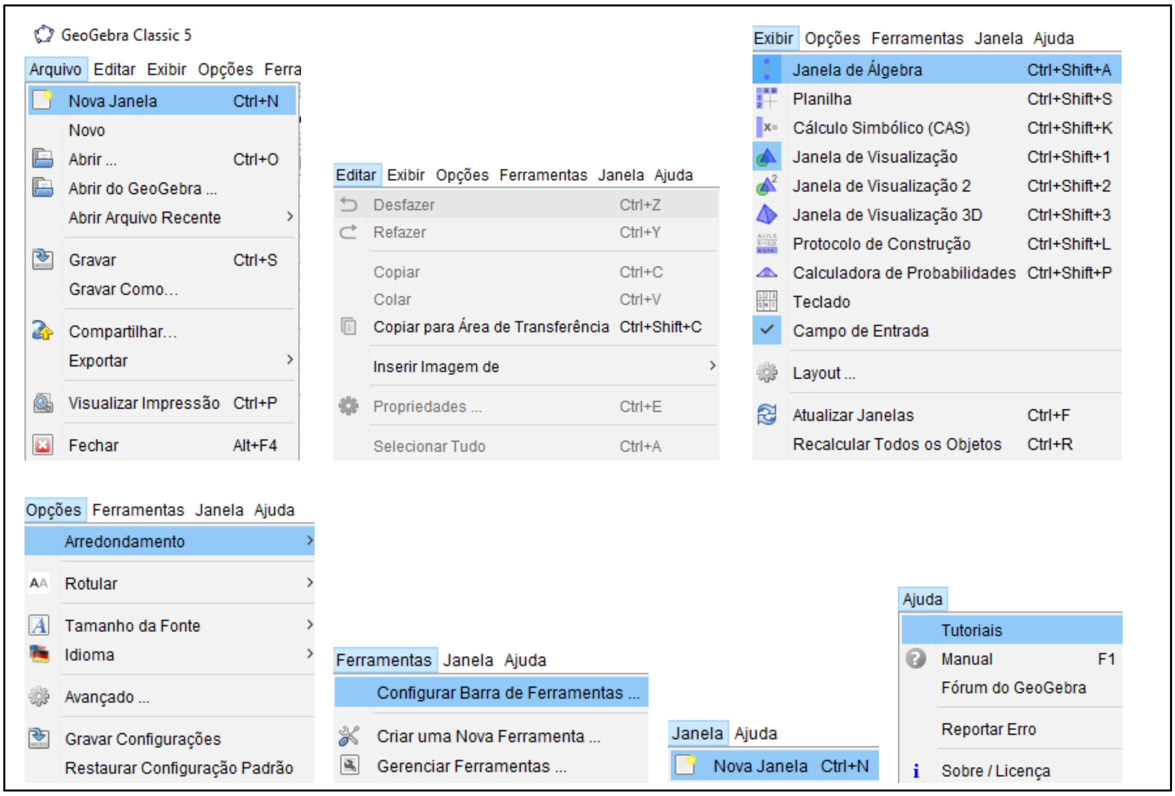


Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

De maneira geral, a tela inicial do GeoGebra é dividida em três partes: *a janela algébrica*, que é responsável pela edição, mostrando informações como valores, coordenadas, funções, além de equações; *a janela gráfica*, que é responsável pela visualização dos gráficos, pontos, vetores, segmentos, polígonos, que podem ser introduzidos a partir da entrada de texto; e *o campo de entrada*, que, por sua vez, é responsável por criar funções ou equações, sendo usada para inserir comandos.

O menu localizado na parte superior da interface do GeoGebra é constituído por várias funções, explanadas da seguinte forma:

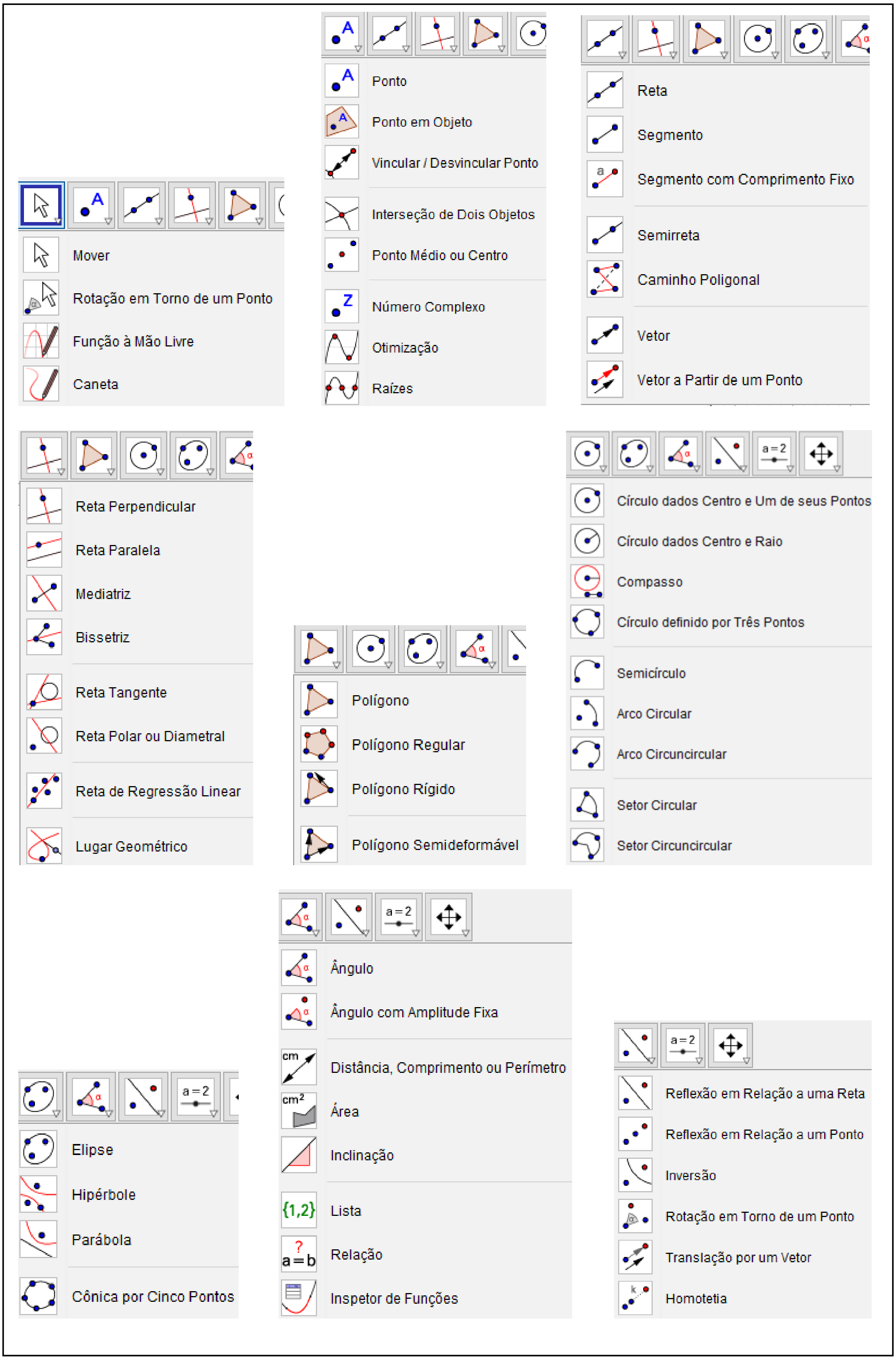
Figura 14 - Barra de menu do GeoGebra



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

Uma barra de ferramentas ou barra de comandos (Figura 15) permite que o usuário, através de um acesso rápido, tenha à disposição uma gama de opções que pode ser usada de acordo com a atividade proposta a ser desenvolvida. Tais comandos podem ser facilmente utilizados devido à clareza com o qual os mesmos são mostrados; ou seja, com uma rápida inspeção visual, o usuário já tem uma ideia do que cada qual significa. Por outro lado, há de se destacar que a disposição de alguns comandos pode variar de acordo com a versão instalada do GeoGebra. Aqui, foi utilizada a versão 5 (*GeoGebra Classic 5*).

Figura 15 - Detalhes da Barra de ferramentas



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

A seguir, serão apresentadas as atividades propostas.

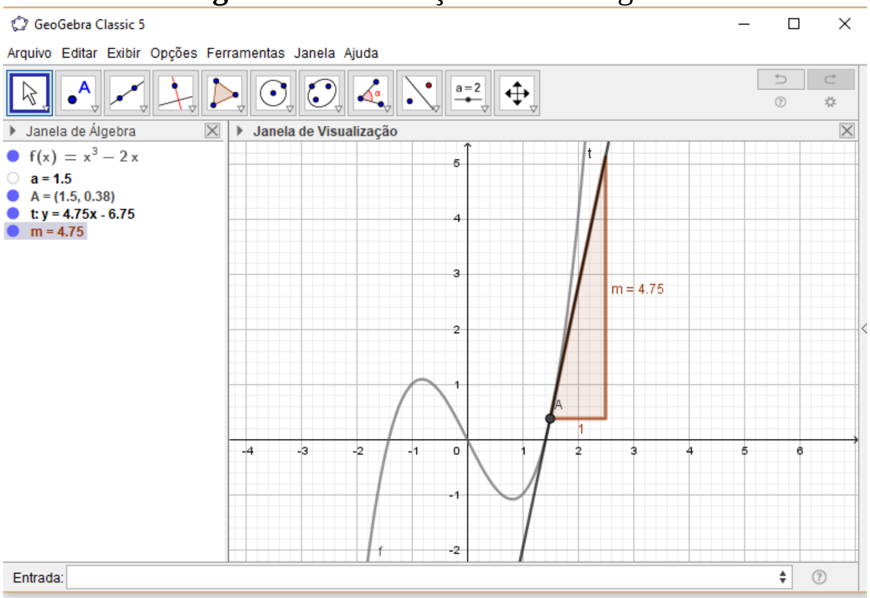
6 ATIVIDADES PROPOSTAS

- **<u>Atividade 1</u>: Retas tangentes**

  - **Objetivos:** construir a ideia de derivadas a partir da reta tangente num ponto; entender a ideia da derivada a partir de uma função dada.
  - **Roteiro:**

1) Insira a função $f(x) = x^3 - 2x$ e aperte *Enter;*
2) Entre com a abscissa do ponto em $a = 3/2$;
3) Digite agora o ponto sobre o gráfico de f com a abscissa a: $A = (a, f(a))$;
4) Insira t = *Tangente [A,f]* que é a reta tangente de f no ponto a;
5) Por fim, digite m = *Inclinação[t]* que é a inclinação da reta tangente e confira o resultado com a figura abaixo.

Figura 16 - Inclinação da reta tangente



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- **<u>Atividade 2</u>: Retas tangentes**

- ✓ **Objetivos:** construir a ideia de derivadas a partir da reta tangente num ponto; entender a ideia da derivada a partir de uma função dada; visualizar a reta tangente sobre a curva a partir da alteração angular da reta.
- ✓ **Roteiro:**

1) Na barra de menu, na 3ª janela (*Exibir*) selecione a opção *Cálculo Simbólico (CAS)* ou pressione *Ctrl+Shift+K*;

2) Insira a função $f(x) = (-x^2/10) + x$ na caixa de entrada. Em seguida, na 1ª linha da janela CAS, digite *f(x)* e perceba que a função aparecerá no campo desta janela;

3) Na próxima linha da janela CAS, digite *f(x)* e em seguida clique na opção 9, para derivar a função; ou, simplesmente, digite a função *f'(x)*;

4) Na caixa de entrada, insira a variável $a = 1$ e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-1, 11] com incremento 1;

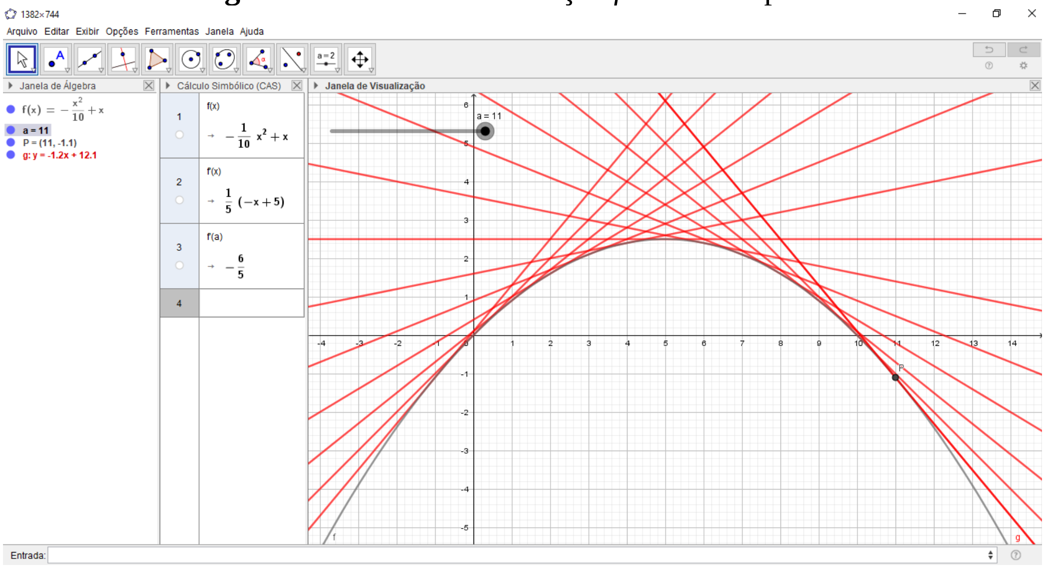
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto $P = (a, f(a))$, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente,* clique sobre a curva de *f* e clique sobre o ponto *P;*

7) Na terceira linha da janela CAS, insira *f'(a)* para visualizar o valor da derivada no ponto *a;*

8) Clique com o botão direito do mouse sobre a reta tangente e selecione *Habilitar Rastro.* Em seguida, varie o valor de *a* através do controle deslizante e verifique se o resultado obtido coincide com a figura abaixo:

Figura 17 - Derivada da função *f* em vários pontos



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

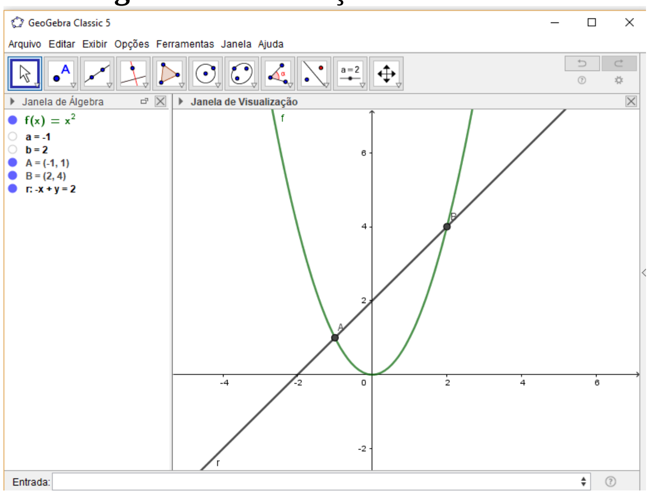
Com isso, percebe-se que com a variação de *a*, ocorre também a variação do coeficiente angular da reta tangente à curva *f* no ponto *P*. Ao mesmo tempo, é possível verificar a variação da reta tangente na janela de álgebra e a variação da derivada na janela CAS.

- **<u>Atividade 3</u>: Teorema do Valor Médio**

  - ✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar o Teorema do Valor Médio.
  - ✓ **Roteiro:**

1) No campo de entrada, insira a função *f(x) = x^2* e tecle *Enter;*
2) Insira *a = -1* (tecle *Enter*) e *b = 2* (tecle *Enter*);
3) Entre, agora com os seguintes pontos: *A = (a, f(a))* e *B = (b, f(b));*
4) O próximo comando é: *r = Reta[A, B]*. Feito isso, verifique se seu gráfico encontra-se em conformidade com a figura abaixo:

Figura 18 – Ilustração da atividade 3



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

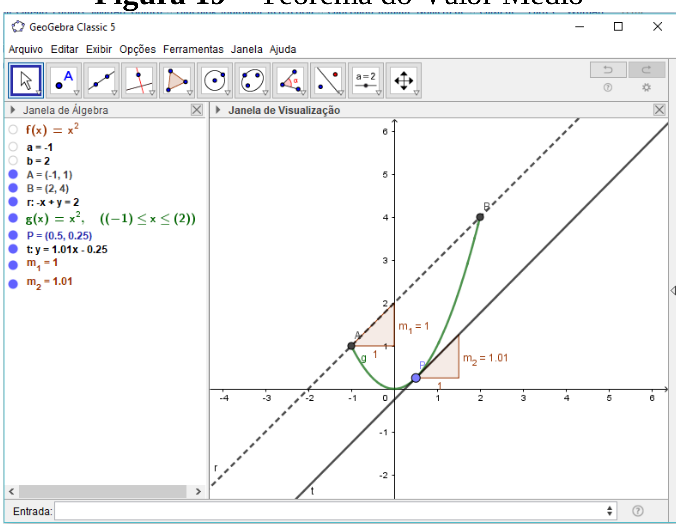
5) Agora, clique com o botão direito do mouse sobre a parábola e desmarque a opção *Exibir Objeto*;

6) Pressione o botão direito do mouse sobre a reta que intercepta A e B, selecione a opção *Propriedades* e escolha (na guia *Estilo*) um tipo de *linha;*

7) No campo de entrada insira: *Função[f,a,b]* (tecle *Enter*), *P=Ponto[f]* (tecle *Enter*), *t=Tangente[P,f]* (tecle *Enter*), *m_1 = Inclinação[r]* (tecle *Enter*), *m_2 = Inclinação[t]* (tecle *Enter*).

8) Arraste o ponto P, confira o resultado obtido com a figura abaixo para as devidas análises:

Figura 19 – Teorema do Valor Médio



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- **<u>Atividade 4</u>: Se 1200cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa (STEWART, 2011, p. 307).**

  - ✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar a aplicação das derivadas;
  - ✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas o material disponível*;*

____

____

____

2) Escreva uma fórmula *V(x)* para o volume da caixa em função da medida *x*;

____

____

3) Construa o gráfico no Geogebra;

4) Na caixa de entrada, insira a variável *a = 1* e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-30, 30] com incremento 5;

5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto *P = (a, V(a))*, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de *V* e clique sobre o ponto *P;*

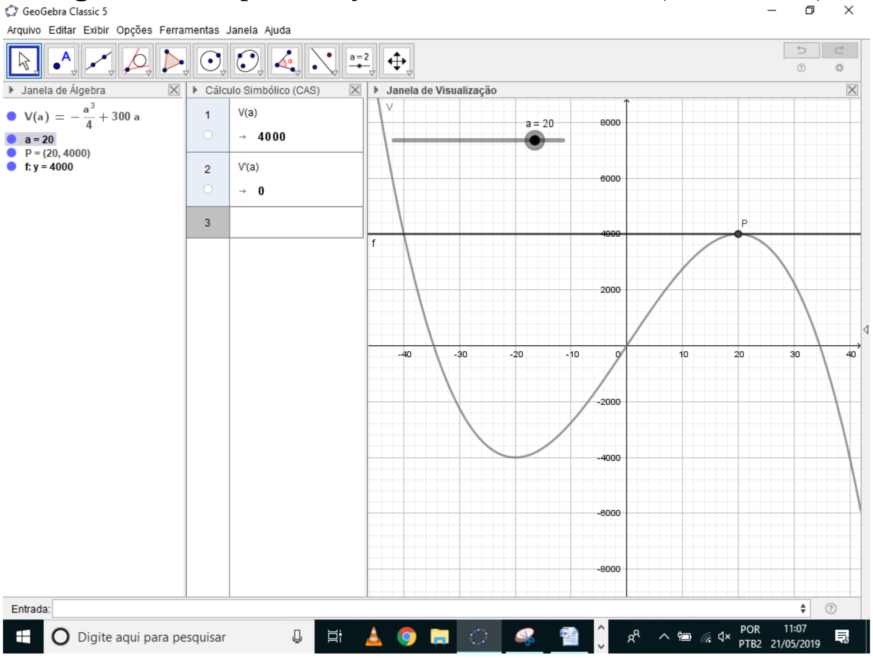
7) Na terceira linha da janela CAS, insira *V'(a)* para visualizar o valor da derivada no ponto *a;*

8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a figura abaixo e relate suas conclusões;

____

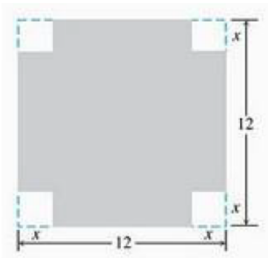
____

Figura 20 - Representação do volume máximo (Atividade 4)



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- <u>Atividade 5</u>: **Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 12 x 12cm e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima? (THOMAS, 2010, p. 303).**



✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar a aplicação das derivadas;

✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados;

____

____

2) Escreva uma fórmula *V(x)* para o volume da caixa em função da medida *x* da aresta da base;

3) Construa o gráfico no Geogebra;

4) Na caixa de entrada, insira a variável *a = 1* e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-10, 10] com incremento 0.1;

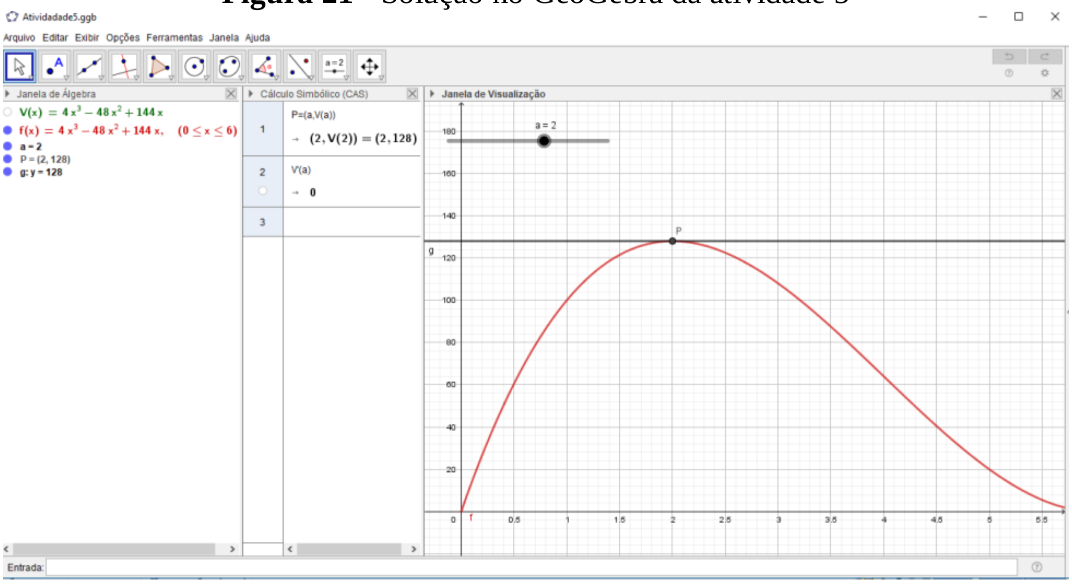
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto *P = (a, V(a))*, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de *V* e clique sobre o ponto *P;*

7) Na terceira linha da janela CAS, insira *V'(a)* para visualizar o valor da derivada no ponto *a;*

8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a figura abaixo e relate suas conclusões;

Figura 21 - Solução no GeoGebra da atividade 5



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- <u>**Atividade 6**</u>**: Um fazendeiro tem 1200m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área? (STEWART, 2011, p. 302).**

  ✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar a aplicação das derivadas;

✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados. Verifique, também, a possibilidade de obter diferentes áreas do campo retangular;

____

____

2) Obtenha a expressão para a área em função de x. Para isso, obtenha a expressão para o perímetro em função dos comprimentos x e y;

____

3) Construa o gráfico no Geogebra;

4) Na caixa de entrada, insira a variável $a = 1$ e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-50, 1000] com incremento 50;

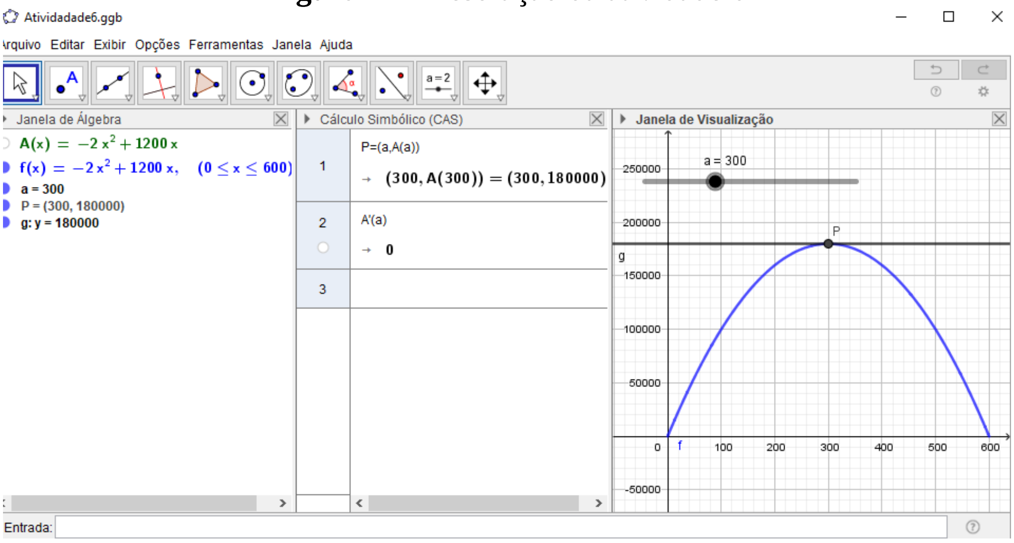
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto $P = (a, A(a))$, em que a cada variação de a ocorre variação na posição de P sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de A e clique sobre o ponto P;

7) Na terceira linha da janela CAS, insira $A'(a)$ para visualizar o valor da derivada no ponto a;

8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a figura abaixo e relate suas conclusões;

Figura 22 - Resolução da atividade 6



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- **<u>Atividade 7</u>: Sua metalúrgica foi contratada por uma fábrica de papel para projetar e construir um tanque retangular de aço, com base quadrada, sem tampa e com $500cm^3$ de capacidade. O tanque será construído soldando-se chapas de aço umas às outras ao longo das bordas. Quais as dimensões para a base e a altura que farão o tanque pesar o mínimo possível? (THOMAS 2010, p. 311 adaptado).**

  ✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar a aplicação das derivadas;

  ✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados;

____

____

____

2) Construa o gráfico no Geogebra;

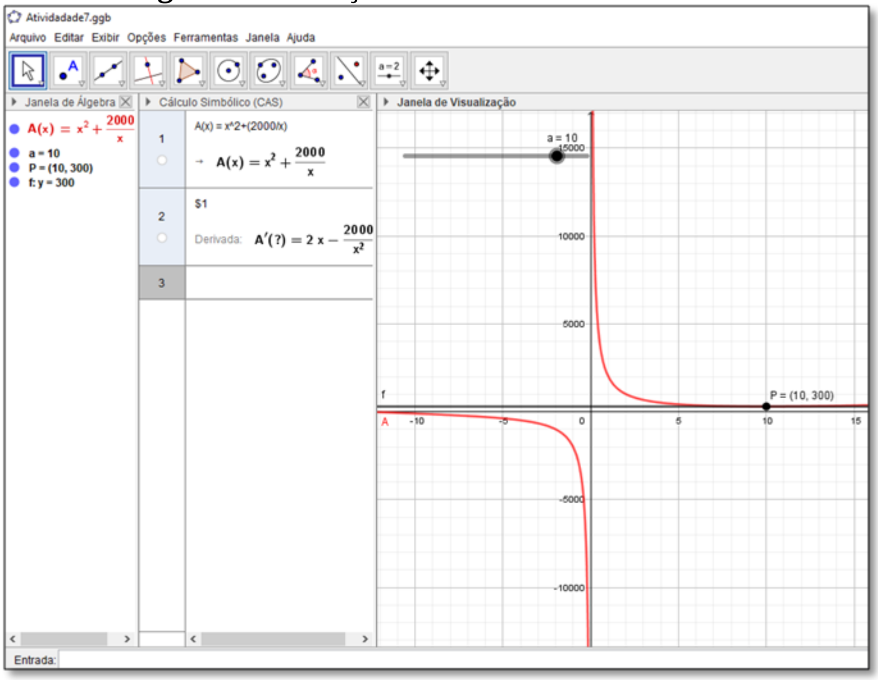
3) Na caixa de entrada, insira a variável $a = 1$ e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-15, 15] com incremento 1;

5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto $P = (a, A(a))$, em que a cada variação de a ocorre variação na posição de P sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de A e clique sobre o ponto P;

7) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a figura abaixo e relate suas conclusões;

Figura 23 - Solução no GeoGebra da atividade 7



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do nosso trabalho de dissertação, elaboramos a seguinte pergunta que nos guiou durante a pesquisa: **Quais as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização?**

Na busca de respostas para tal pergunta, realizamos a pesquisa de campo com quatro alunos da Pós-Graduação do PPGECM da UEPB, campus de Campina Grande, durante dois encontros com duração de 4 horas cada, em que foram aplicadas as atividades previamente elaboradas. O objetivo das atividades (que foram divididas em duas categorias) foi de familiarizar os participantes no ambiente do GeoGebra (conhecido por alguns) e de construir ilustrações que permitissem visualizar a aplicação das Derivadas a partir de problemas de Otimização.

A princípio, a utilização da metodologia de Resolução de Problemas serviu para trabalharmos a partir de atividades adaptadas de alguns livros didáticos com os alunos seguindo o esquema proposto por Onuchic e Allevato (2011). Depois de uma escolha cuidadosa das atividades, os alunos trabalharam em conjunto para resolvê-las enquanto observávamos e incentivávamos na busca de suas soluções. Aqui, coube muita cautela no sentido de tentar aproveitar ao máximo todo o conhecimento utilizado pelos participantes, sendo possível, após a plenária e a busca do consenso diante de determinada atividade, se chegar a conclusões efetivas através da formalização do conteúdo (se, por exemplo, o aluno arbitrasse um valor para encontrar o maior volume possível para a caixa da atividade 4 e, por coincidência, esse valor realmente levasse ao volume máximo, então, a aplicação das Derivadas não seria necessária para o caso).

Além disso, a Resolução de Problemas permitiu visualizar algumas aplicações das Derivadas no que se refere a problemas práticos de máximos e mínimos, o que pode ampliar as estratégias de resolução das atividades.

Concomitantemente, o software GeoGebra, que possui uma interface amigável e de fácil manipulação, contribuiu para o desenvolvimento das atividades, possibilitando a investigação dos conceitos do Cálculo de maneira dinâmica, além de facilitar a construção de gráficos dificilmente obtidos manualmente. O fato de refazer os problemas de Otimização no GeoGebra mostrou que quando se alia as soluções analíticas com as representações gráficas obtidas, os alunos se mostraram satisfeitos e impulsionados a realizarem outras atividades, pois o processo de visualização ocorrido proporcionou aos participantes uma melhor compreensão, por exemplo, do significado do *ponto crítico*. Ademais, os aspectos visuais, geométricos e algébricos, proporcionados pela dinamicidade do software, serviram para ampliar a compreensão de alguns conceitos do Cálculo.

Por fim, concluímos que as potencialidades da Resolução de Problemas somadas às do GeoGebra permitem intensificar o ensino e a aprendizagem do Cálculo, ampliando a compreensão de alguns conceitos. ***A metodologia da Resolução de Problemas***, que partiu dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos, os quais precisaram de incentivos para se chegar ao insight necessário para as soluções adequadas, contribuiu para o entendimento do conteúdo, pois os problemas de Otimização permitiram visualizar algumas aplicações das Derivadas. Já ***o GeoGebra*** permitiu verificar e ampliar alguns conceitos do Cálculo, despertando um olhar crítico diante dos problemas e estimulando um raciocínio visual, o que pode auxiliar tanto na formulação e validação de conjecturas, quanto na compreensão e fixação de alguns conceitos.

Assim sendo, espera-se que este trabalho seja um propulsor para outros que objetivem explorar outras potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra, possibilitando o aumento das estratégias de resolução de alguns problemas e intensificando o uso dinâmico de alguns conceitos do Cálculo.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associado o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosófico-científicos) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ASSUMPÇÃO, P. G. S. **Introdução ao estudo de derivada: uma sequência didática com o uso do software Geogebra.** Especialização em Educação Matemática). Universidade Federal de Santa Maria: Rio Grande do Sul, 2011.

ÁVILA, G.; ARAÚJO, L. C. L. **Cálculo: ilustrado, prático e descomplicado**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

BITTAR, M. **A Escolha do Software Educacional e a Proposta Didática do Professor: estudo de alguns exemplos em matemática**. In: Willian Beline; Nielce Meneguelo Lobo da Costa. (Org.). Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões. Campo Mourão - PR: ed. Fecilcam, 2010, p. 215-243.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C. **Educação Matemática a distância online: balanço e perspectivas**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, Recife, *Anais*... Recife: EDUMATEC, p. 1-9, 2011.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. In: Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV, 1999. Anais. Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275. Acesso em: 07 de junho de 2019.

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. **Professores que Utilizam Tecnologia de Informação e Comunicação para Ensinar Cálculo.** Educação Matemática Pesquisa, v. 13, n. 3, 2011.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de derivadas em cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do Geogebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Minas Gerais, 2015.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005, p. 213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; ANDRADE, C. P. **Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP**. In: Perspectivas para Resolução de Problemas/ Lourdes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Júnior, Márcio Pironel (orgs) - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

RICHIT, A. et al. **Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia.** Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 90-99, 2012.

RICHIT, A. **Interfaces entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas na perspectiva da educação matemática.** In: REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática, ano 11, n. 21, 2016, p. 109-122.

STEWART, J. ***Cálculo***. Volume I. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2011.

THOMAS, G. B. ***Cálculo I***. São Paulo: Addison Wesley, 2010.