UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EDSON AMÉRICO DA SILVA

AS POTENCIALIDADES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E DO GEOGEBRA EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

CAMPINA GRANDE – PB
2020

EDSON AMÉRICO DA SILVA

AS POTENCIALIDADES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E DO GEOGEBRA EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Dissertação de Mestrado, elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE – PB
2020

S586p Silva, Edson Américo da.

As potencialidades da resolução de problemas e do GeoGebra em problemas de Otimização do Cálculo Diferencial [manuscrito] / Edson Américo da Silva. - 2020.

157 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Derivadas. 2. Resolução de problemas. 3. Tecnologias digitais. 4. Cálculo diferencial. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

EDSON AMÉRICO DA SILVA

AS POTENCIALIDADES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E DO GEOGEBRA EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Dissertação de Mestrado, elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovado em: 03/03/2020.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____

Prof. Dr. Helber Rangel Formiga Leite de Almeida (Membro interno)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Luciano Cipriano da Silva

Prof. Dr. Luciano Cipriano da Silva (Membro externo)
Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus que sempre me deu forças para enfrentar as adversidades da vida e para buscar os objetivos que sempre desejei.

Agradeço a minha mãe, Júlia, que sempre esteve do meu lado, torcendo, rezando e apoiando em tudo que eu precisasse. Ao meu pai, Cícero, que com seu exemplo de força e trabalho me ensinou como se portar como cidadão que hoje sou. À minha irmã, Edna, pelos incentivos incansáveis.

Ao meu orientador, professor Roger Huanca, pela acolhida e oportunidade de um novo aprendizado advindo da elaboração deste trabalho. Aos professores Luciano e Helber, membros da minha banca, que muito contribuíram para o aprimoramento da minha pesquisa.

Enfim, a todos meu muito obrigado e que Deus nos proteja sempre mais.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização. Para a realização da pesquisa, empregamos o modelo de Thomas A. Romberg caracterizado como uma maneira de desenvolver uma pesquisa científica obedecendo dez tarefas essenciais empregadas como metodologia científica, o que serviu para o planejamento e desenvolvimento deste trabalho. A pesquisa de campo foi realizada com alunos da Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB, campus I, durante dois encontros com duração de quatro horas cada, através de problemas selecionados que versavam sobre a familiarização com o GeoGebra e sobre a resolução e compreensão de problemas de Otimização do Cálculo Diferencial no contexto da Resolução de Problemas e do software já citado. A coleta de dados aconteceu mediante a preparação do pesquisador, registro das atividades feitas pelos alunos, anotações feitas pelo pesquisador, gravações de áudios e um questionário aplicado para a avaliação dos alunos diante da metodologia aplicada. Os dados analisados serviram para constatar que as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas aliada ao GeoGebra contribuiram na fixação de alguns conceitos pertinentes ao Cálculo Diferencial, despertando um olhar crítico diante dos problemas e estimulando um raciocínio visual, além de promover uma aprendizagem significativa.

Palavras-Chave: Derivadas. Resolução de Problemas. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

This work aims to investigate the potentialities of the methodology of Problem Solving and GeoGebra in the understanding of Derivative concepts, from Optimization problems. To carry out the research, we used the Thomas A. Romberg model characterized as a way to develop a scientific research obeying ten essential tasks employed as a scientific methodology, which served for the planning and development of this work. The field research was carried out with students from the UEPB Graduate School of Mathematics Science and Mathematics Education, during two meetings lasting four hours each, through selected problems related to the familiarity with GeoGebra and the solving and understanding Differential Calculation Optimization problems in the context of Problem Solving and the software already mentioned. Data collection took place through the researcher's preparation, record of student's activities, notes made by the researcher, audio recordings and a questionnaire applied to the students' assessment against the applied methodology. The data analyzed served to verify that the potentialities of the Problem Solving methodology combined with GeoGebra contributed to the establishment of some concepts relevant to Differential Calculus, arousing a critical look at the problems and stimulating a visual reasoning, in addition to promoting meaningful learning.

Keywords: Derivatives. Problem Solving. Digital Technologies.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A mola propulsora que impulsionou o objeto de estudo deste trabalho está relacionada com minha atuação profissional. Embora seja Licenciado em Matemática e Bacharel em Engenharia Elétrica, no momento trabalho na Biblioteca Central da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), campus de Campina Grande, onde se concentram os livros das Ciências Exatas e da Saúde, e foi nesse ambiente que percebi uma grande procura por alguns livros específicos de Cálculo e, até mesmo, livros de Pré-Cálculo.

Dessa forma, em 2016, me submeti à seleção para o Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática, oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM) da UEPB. Após a aprovação e classificação para o mestrado, cursei algumas disciplinas oferecidas pelo programa e dei início à investigação de uma das aplicações do Cálculo Diferencial[1] (problemas de Otimização), utilizando como metodologia a Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra.

1.1 Justificativa

O curso de Cálculo ocupa um lugar significativo no currículo do Ensino Superior de um grande número de profissões, já que o mesmo se caracteriza por ser a porta de entrada para diversos cursos de graduação, como Ciências Exatas e Licenciaturas. No entanto, as principais dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem do Cálculo estão vinculadas ao não entendimento dos seus significados, conceitos e ideias (como a dificuldade de fazer conexões entre a Derivada e a Integral e relacioná-las a problemas cotidianos), associado a um ensino com ênfase em técnicas e repetição. Além do mais, muitos alunos que ingressam em um curso de exatas trazem consigo deficiências relacionadas a produtos notáveis, fatoração, potenciação, função, equações, trigonometria, dentre outros conteúdos que são pré-requisitos para se trabalhar no Cálculo, o que ocasionam muitas dificuldades quando é abordado o conceito de Derivada.

Por outro lado, as principais dificuldades expostas por alguns professores referentes ao domínio do conteúdo são de cunho conceitual, em que muitas vezes se tem apenas o livro como fonte de preparação, o que pode limitar o professor na superação de obstáculos que possam surgir durante as aulas.

---

[1] Neste trabalho, utilizaremos a palavra Cálculo para se referir à disciplina Cálculo Diferencial.

O ensino do Cálculo é, na maioria das vezes, abordado de maneira tradicional, em que o professor apresenta as definições, propriedades, regras e exemplos, enquanto os alunos resolvem uma série de exercícios de maneira mecânica e muitas vezes sem contextualização. Ou seja, é realizado um ensino tradicional que prioriza o processo algorítmico, afastado de situações reais e apoiado em livros que, muitas vezes, são carentes de aplicações em outras áreas do conhecimento. A partir de então, dificuldades podem surgir, o que fica evidente com os elevados índices de reprovação e, até mesmo, desistências das disciplinas de Cálculo.

Segundo Barufi (1999), na visão dos professores universitários matemáticos espera-se, no curso de Cálculo, propiciar aos alunos uma visão mais ampla e global de como o conhecimento matemático pode ser articulado na resolução de problemas reais. E muitos alunos ainda seguem usando o pensamento matemático da Educação Básica. É necessário que os alunos compreendam e reconstruam os conceitos, sentindo-se seguros para trabalhar com problemas matemáticos reais.

Já Rezende (2003), destaca que há a necessidade de tornar o ensino de Cálculo mais significativo e motivador para o aluno. Segundo ele, a dificuldade na aprendizagem de Derivadas e Integrais acontece devido à falta de amadurecimento das ideias de infinito e o entendimento que o limite de uma sequência tende, mas não alcança, o seu ponto limite.

1.2 Problematização

Despertar nos alunos o interesse pela matemática nunca foi um processo fácil. Contextualizar problemas que chamem a atenção diante da aplicabilidade de determinado conteúdo com situações do mundo real tem se tornado um desafio para os professores do Ensino Básico. Desafios também existem no âmbito do Ensino Superior, já que muitos alunos dos cursos de Ciências Exatas e Licenciaturas se questionam sobre a necessidade de se estudar determinado assunto.

Os estudantes da Licenciatura em Matemática, por exemplo, muitas vezes se preocupam apenas em resolver as enormes listas de Cálculo sem questionar a essência dos conteúdos abordados, talvez por falta de interesse ou talvez por falta de motivação. No entanto, durante meu curso de bacharelado, percebi a necessidade de se ter um conhecimento consolidado dos conteúdos básicos para uma formação científica e tecnológica (Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais, entre outras disciplinas) necessários para a obtenção de conhecimentos profissionais e essenciais para a formação do Engenheiro Eletricista. Neste sentido, recaem sobre o professor do Ensino Superior (e mais precisamente da disciplina de Cálculo) duas responsabilidades: despertar o interesse nos alunos e (re)acender a motivação acerca dos conteúdos abordados.

Para a concretização desses dois fatores, o processo consistirá (nesta pesquisa) não apenas em resolver problemas, mas em compreender a Matemática e, mais precisamente, as Derivadas por meio da Resolução de Problemas com a utilização de uma ferramenta computacional, o GeoGebra. Nesse sentido, o principal foco desse trabalho está ligado às **potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra para a compreensão dos conceitos da Derivada.**

Assim, pretende-se com esta pesquisa identificar as possibilidades de aprendizagem do Cálculo utilizando a Resolução de Problemas como metodologia, associada ao uso do software GeoGebra. Ademais, pretende-se reconstruir conceitos, propiciando uma visão mais rigorosa, detalhada e consciente de técnicas e procedimentos que abordem o Cálculo com atividades do mundo real, possibilitando aos discentes (futuros docentes ou já professores) terem uma melhor compreensão da relação entre as fórmulas e seus significados através de problemas cotidianos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa é investigar as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização.

1.3.2 Objetivos Específicos

A partir de uma revisão de literatura sobre a importância e a maneira como os conteúdos do Cálculo são abordados, tentar-se-á, através da aplicação de alguns problemas sobre o Cálculo, analisar as dificuldades e possibilidades da metodologia de ensino através da Resolução de Problemas mediada pelo GeoGebra.

Assim sendo, pretende-se:

- Identificar posicionamentos de diferentes autores sobre Resolução de Problemas, Cálculo Diferencial e GeoGebra.

- Preparar e aplicar alguns problemas sobre Cálculo, adaptando-os à resolução com o GeoGebra.
- Investigar as formas como os alunos atuam no contexto da Resolução de Problemas.
- Analisar quais as estratégias que os alunos utilizaram para solucionar certos problemas e quais as dificuldades apresentadas diante das Derivadas.

1.4 Estrutura da Dissertação

O Capítulo 1 é dedicado à apresentação da minha trajetória acadêmica, da justificativa, da problemática e dos objetivos da pesquisa. Baseados na motivação e no interesse em se trabalhar com o Ensino Superior e, principalmente, com a aprendizagem do Cálculo foram explanados todos os parâmetros que impulsionaram a realização desta pesquisa.

No Capítulo 2, será abordada a Metodologia da pesquisa no contexto de Romberg e com as colaborações de Onuchic e Noguti; haverá, também, a identificação do fenômeno de interesse e a elaboração do Modelo Preliminar.

No Capítulo 3, abordar-se-á, a Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais. Com relação à Resolução de Problemas, destacaremos o contexto histórico em que está situada, sua utilização como metodologia bem como sua importância no ensino da Matemática. A última parte do capítulo será dedicada às reflexões acerca do uso das Tecnologias Digitais na Educação Matemática, de sua importância devido à visualização e finalizando com uma breve abordagem sobre o GeoGebra.

No Capítulo 4, o texto permitirá ao leitor uma análise do Cálculo Diferencial. Nele serão explorados os aspectos históricos, as reflexões acerca do seu ensino a partir das pesquisas existentes na literatura, o conceito da Derivada, e a análise sobre alguns livros de Cálculo existentes na Biblioteca Central da UEPB.

No Capítulo 5, será apresentada a pesquisa em seu contexto, com detalhes necessários para a descrição do trabalho após a fundamentação teórica, partindo do modelo modificado e da pergunta da pesquisa até as estratégias e procedimentos utilizados para a coleta de dados.

No Capítulo 6, serão analisados os encontros realizados na pesquisa de campo a partir da descrição pormenorizada a respeito da resolução das atividades propostas, bem como a caracterização do ambiente e dos sujeitos da pesquisa.

No Capítulo 7, serão apresentadas as considerações finais, trazendo à tona a pergunta da pesquisa, mostrando as respostas encontradas concernentes com nossos objetivos.

Por fim, ter-se-á as referências bibliográficas, os anexos e o apêndice da pesquisa.

2 METODOLOGIA PARA A PESQUISA

Toda pesquisa científica necessita de um planejamento que norteie o andamento das atividades, direcionando para a obtenção das respostas diante da problemática a ser pesquisada. Para isso, se faz necessário um caminhar na literatura a fim de se encontrar parâmetros metodológicos que mais se enquadrem na atividade pesquisada. Neste sentido, Santos (2007) em seu livro intitulado *Metodologia Científica - a construção do conhecimento* traz algumas inquietações quando questiona se a metodologia científica, metodologia da pesquisa científica, metodologia do trabalho científico e metodologia da construção do conhecimento são tudo a mesma coisa. Para ele, parte sim, parte não.

De acordo com Santos (2007), embora ainda exista o interesse na forma correta de apresentar um texto técnico-científico (quanto às medidas das margens, encadernação bem feita, paginação adequada), o foco atual está voltado para a geração de autonomia intelectual, na capacidade de pensar por conta própria, a ser possibilitada aos estudantes e profissionais, especialmente àqueles em formação ou formados em nível superior (o mais alto grau de formação em uma comunidade), fazendo com que se tornem membros de uma elite intelectual, convidada a ser um grupo de "pensadores profissionais". Para ele, se o médico não puder pensar Medicina, quem o fará? Se o pedagogo não pensar Pedagogia, quem pensará? Se o engenheiro não for preparado para pensar Engenharia, quem o fará?

Ainda segundo Santos (2007), se faz urgente a geração da sabedoria científica, em que não basta armazenar dados, é necessário saber o que fazer com eles. De fato, a obtenção dos dados é motivada por um determinado objetivo e todo objetivo pretende uma finalidade além do armazenamento de informações, que culmine com interpretações e uso eficaz destas informações. Desenvolver um trabalho ou uma pesquisa científica é, portanto, uma maneira de produzir conhecimentos para o pesquisador e, em seguida, produzir um texto escrito para um leitor, o que vai exigir tanto a habilidade de produzir conhecimentos quanto a habilidade de apresentar esses conhecimentos por escrito.

Esse leitor, preferencialmente, é alguém que entende ou quer entender o assunto em profundidade e, para isso, a apresentação do trabalho final tem que convencê-lo diante dos resultados adquiridos. Yin (2016) vem reforçar essa ideia:

> Quer em forma escrita ou em forma oral, uma composição de pesquisa final deve descrever com precisão os resultados e conclusões de um estudo, mas também de uma maneira convincente e atrativa. O objetivo não é apenas apresentar um estudo, mas comunicá-lo a audiências específicas. (YIN, 2016, p. 229).

Assim sendo, a maioria das pessoas a quem direciona-se uma determinada pesquisa está interessada nos dados, nos resultados e nas conclusões, os quais devem ser apresentados da melhor maneira possível, seja em forma de narrativas, tabelas, diagramas, entre outros. Esses tipos de representações, se não bem escolhidos, podem se tornar prolixos, tediosos e, até mesmo, vagos ou insignificantes.

2.1 Metodologia da pesquisa baseada em Romberg

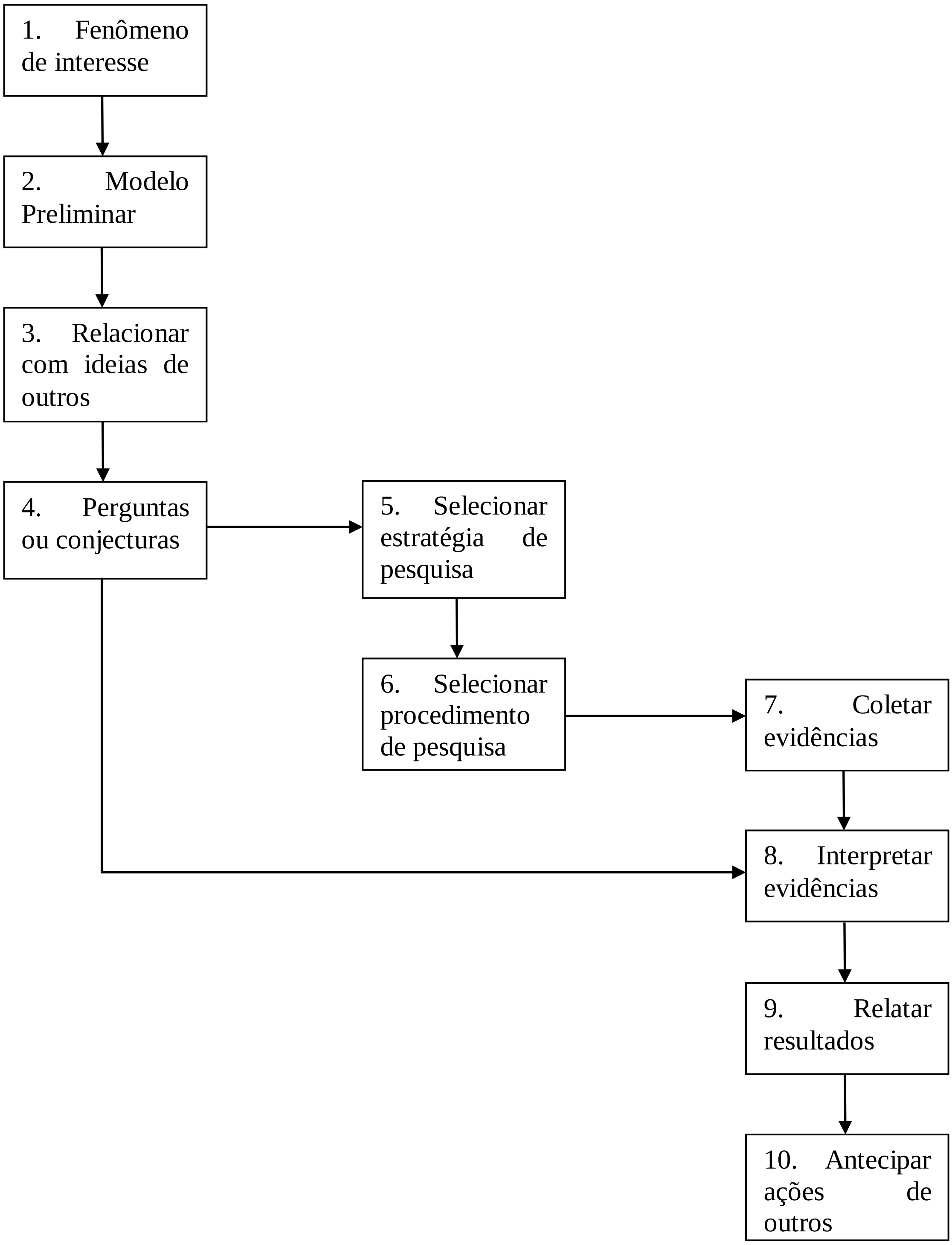
Para este trabalho, utilizei como apoio a Metodologia de Pesquisa de Thomas A. Romberg, em que fica exposto um conjunto de passos que podem ser seguidos por qualquer pesquisador em qualquer atividade científica. Esses passos podem ser verificados num artigo publicado em 1992 intitulado *Perspectives on Scholarship and Research Methods* (Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa) de Thomas A. Romberg, no qual existe uma procura que busca identificar nas ciências sociais as amplas tendências de pesquisa relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares e determinar como essas tendências têm influenciado o estudo da Matemática nas escolas. Um fato curioso é que Romberg é matemático e educador, além de professor da Universidade de Wisconsin - USA.

Segundo Romberg (1992, 2007):

> Fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. Como em todas as artes, há um consenso em um sentido amplo sobre que procedimentos devem ser seguidos e o que é considerado como um trabalho aceitável. (ROMBERG, 1992 – tradução ONUCHIC e BOERO, 2007, p. 51).

Portanto, baseado nos procedimentos ou mecanismos que podem ser seguidos para o desenvolvimento de um trabalho científico, Romberg (1992) descreve dez atividades sintetizadas no modelo apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Fluxograma das atividades dos pesquisadores segundo Romberg



Fonte: Romberg (1992).

A princípio, neste fluxograma não há nada de diferente em relação a outros métodos de pesquisa, porém, ele foi elaborado de modo a familiarizar pessoas não acostumadas com o processo de pesquisa científica. Embora a sequência das atividades expostas não seja obrigatória, há de se atentar à importância desse fluxograma, analisando-o por coluna: a primeira coluna ou primeiro bloco parte do fenômeno de interesse até as perguntas ou conjecturas, a fim de formular ideias a partir de trabalhos desenvolvidos por outros pesquisadores; a segunda coluna ou bloco diz respeito ao planejamento da pesquisa, sobre quais estratégias devem ser adotadas e o que fazer a partir de então; já a terceira coluna ou bloco é crucial, pois nele deve-se coletar os dados, interpretá-los e relatá-los, além de antecipar ações de outros. Abaixo segue a síntese do que cada uma dessas atividades propostas quer mostrar:

1. <u>Fenômeno de interesse</u> - os seres humanos são capazes de questionar determinado acontecimento, levantando discussões e questionamentos que irão requerer investigações e soluções. Portanto, o estudo de uma temática deve partir da curiosidade do pesquisador e no âmbito da Educação Matemática esse interesse relaciona-se com o fato de como os alunos aprendem a Matemática e como os professores a ensinam;

2. <u>Modelo Preliminar</u> - a partir do fenômeno de interesse a ser investigado, o pesquisador enumera parâmetros para o desenrolar do trabalho, permitindo que a organização das ideias fique mais clara e que o percurso seja a princípio definido. Esses parâmetros são na verdade variáveis-chaves que se relacionam formando um modelo (seja ele simples ou complexo). No entanto, por se tratar de um modelo preliminar, ele pode sofrer modificações ao longo da pesquisa, afinal de contas o modelo é uma simplificação que traz aspectos relevantes e irrelevantes, os quais serão incrementados, mudados ou até mesmo eliminados no decorrer de uma pesquisa científica;

3. <u>Relacionar com ideias de outros</u> - nessa atividade, o pesquisador tem a tarefa de buscar na literatura trabalhos que envolvam o mesmo fenômeno de interesse, a fim de complementar as ideias do modelo proposto. É necessário mergulhar na busca de trabalhos semelhantes com a temática proposta e analisar o que a comunidade científica pensa ou já pensou sobre o fenômeno investigado; isso ajudará o pesquisador no percurso do seu trabalho, fazendo com que alguns aspectos sejam aprofundados ou eliminados, ou até mesmo que novos aspectos surjam.

A essência da pesquisa bibliográfica é fundamental:

> Entende-se que a pesquisa bibliográfica merece tratamento destacado. Primeiro, porque estará presente em qualquer processo de pesquisa. Com efeito, a respeito de quase tudo que se deseje pesquisar, algo já foi pesquisado de forma mais básica, ou idêntica ou correlata. Há, portanto, outras percepções e posições que podem servir, seja para embasamento, seja para comparações ou mesmo para o conhecimento daquilo que se pretendia pesquisar por conta própria. Segundo, porque a pesquisa bibliográfica é mais simples e confortável, pois dispensa todo o trabalho de montagem/escolha/testagem/relato de dados. Os dados já estão prontos, organizados, publicados. (SANTOS, 2017, p. 104).

4. <u>Perguntas ou conjecturas</u> - as indagações que surgem a partir do fenômeno de interesse requerem a prudência do pesquisador na escolha das perguntas a serem investigadas e respondidas. De fato, no decorrer de uma pesquisa, inúmeras perguntas podem surgir e, se a partir de então, ocorrer a seleção das questões menos significativas, provavelmente a pesquisa pouco contribuirá para a comunidade científica ou para uma sociedade;

5. <u>Selecionar estratégia de pesquisa</u> - diante das questões selecionadas, o pesquisador terá a tarefa de traçar o melhor procedimento para se chegar às respostas. A estratégia culminará na coleta das evidências e, para isso, vai depender das questões selecionadas, do modelo preliminar construído para o fenômeno de interesse, além das relações com trabalhos de outrem;

6. <u>Selecionar procedimentos específicos</u> - a atividade anterior diz respeito ao procedimento geral adotado, já essa atividade refere-se aos procedimentos específicos bastante discutidos em cursos de métodos de pesquisa, tais como: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (questionários, entrevistas, observação, experimentos, etc.), como organizar essa informação, entre outros;

7. <u>Coletar evidências</u> - significa reunir todas as informações adquiridas para responder às indagações selecionadas para a pesquisa. Nesta atividade, o pesquisador terá uma espécie de banco de dados com informações necessárias para uma devida interpretação e construção de argumentos;

8. <u>Interpretar evidências</u> - analisar as informações coletadas requer atenção por parte dos pesquisadores, já que muitos dos dados adquiridos podem se tornar desnecessários ou até mesmo incompreensíveis num primeiro momento. A partir de então, pode-se usar métodos quantitativos ou qualitativos para interpretar os dados. Por outro lado, Romberg (1992) afirma que em cada investigação existe uma coleta maior de informação do que a necessária para responder a questão. Assim, parte disso é relevante, parte é irrelevante e parte não é compreensível;

9. Relatar os resultados - neste momento os pesquisadores transmitem para outras pessoas as descobertas realizadas a partir dos dados adquiridos e interpretados. Ou seja, sendo o pesquisador integrante de uma comunidade de pesquisa, cabe-lhe a responsabilidade de apresentar aos outros membros dessa comunidade os resultados de sua pesquisa, além da aptidão de buscar comentários e críticas;

10. Antecipar ações de outros - obtidos os resultados de uma pesquisa, haverá o interesse no que acontecerá depois e, com isso, cada pesquisador poderá ou deverá antecipar ações posteriores, sugerindo novos passos, modificações de estudos anteriores e assim por diante;

Fica evidente, portanto, que na metodologia de Romberg existe uma estratégia muito importante para se investigar temáticas no âmbito da Educação Matemática. Vale salientar que, de acordo com Romberg (1992), as quatro primeiras atividades são as mais importantes, pois elas têm a pretensão de situar as ideias de alguém sobre um problema particular no trabalho de outros pesquisadores a fim de decidir o que investigar. Já as atividades cinco e seis dizem respeito às estratégias adotadas e envolvem a tomada de decisões sobre que tipo de evidência coletar e como aquilo deve ser feito. Após a coleta das evidências ou dos dados, os três passos seguintes são caracterizados como aqueles que darão sentido às informações coletadas, além de relatar os resultados para outros e antecipar trabalhos futuros.

2.2 Colaborações de Onuchic e Noguti na metodologia de Romberg

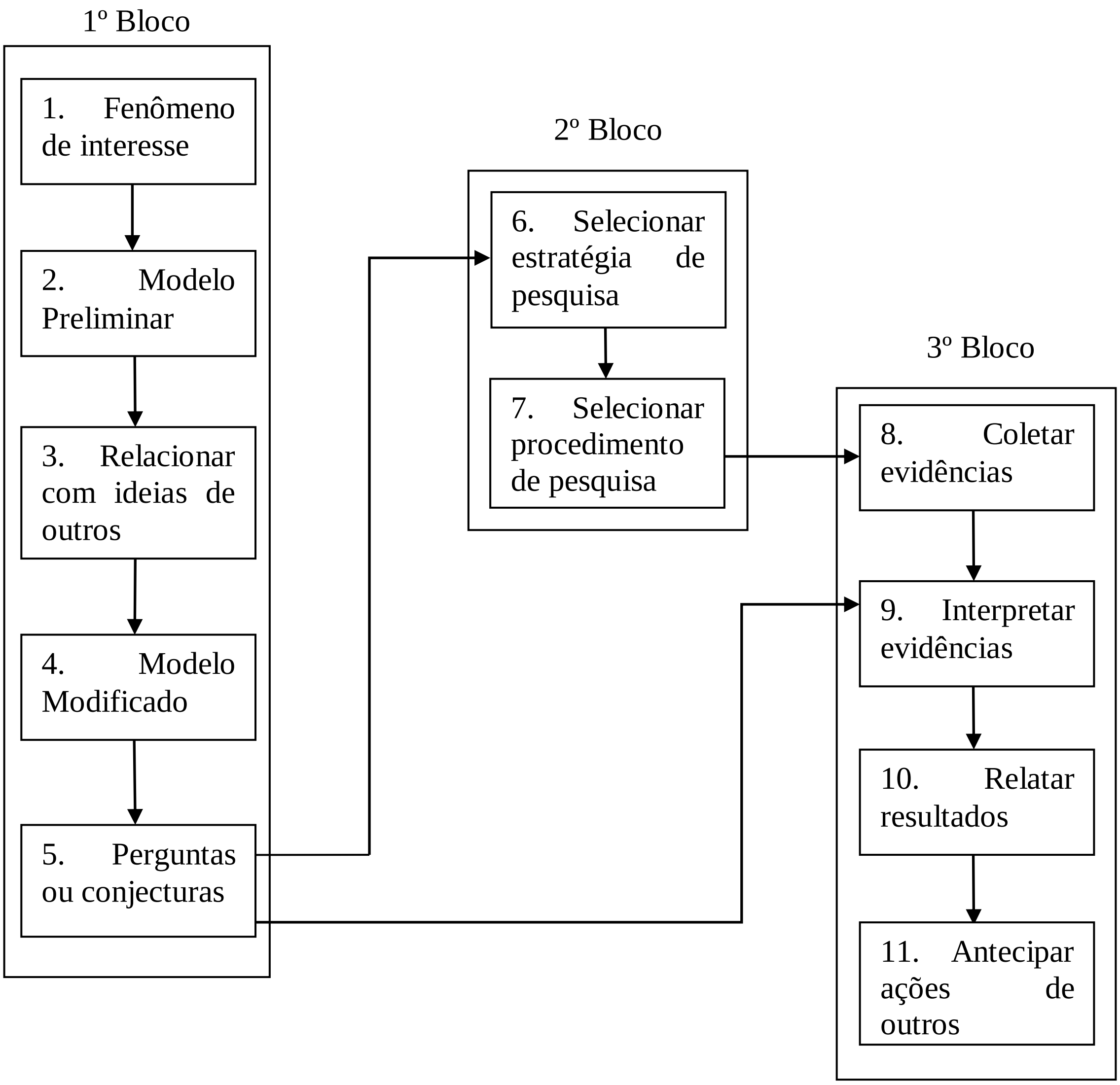
Uma vez definido o modelo preliminar, novos incrementos ou modificações podem surgir haja vista as relações que se iniciam com as ideias de outros pesquisadores. Pensando nisso, Onuchic e Noguti (2014) afirmam que os membros do GTERP[2] que utilizaram e utilizam o modelo de Romberg "perceberam que alguns passos poderiam ser alterados a fim de estabelecer um modelo mais completo para a realidade e objetivos do grupo".

---

[2] Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas da UNESP - Rio Claro/SP, coordenado pela Profª Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic.

Assim sendo, Onuchic e Noguti (2014) acrescentaram mais uma atividade no fluxograma de Romberg chamada de *Modelo Modificado*, conforme pode ser verificado na Figura 2.

Figura 2 – Fluxograma de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic e Noguti (2014, p. 59).

Ainda segundo Onuchic e Noguti (2014), a inserção da nova atividade (*Modelo Modificado*) no fluxograma de Romberg acontece devido ao fato de que o pesquisador percebe que seu modelo preliminar está defasado. Fato este que acontece a partir do momento em que o pesquisador relaciona seu trabalho com trabalhos de outros e percebe que deve haver uma modificação que permita a elaboração de um modelo mais completo. Feito isso, cabe ao pesquisador conduzir sua pesquisa à elaboração das perguntas ou conjecturas.

2.3 Pesquisa alicerçada na metodologia de Romberg

2.3.1 Produção do primeiro bloco

A elaboração desse primeiro bloco é essencial, pois nele se definirá qual a problemática a ser investigada. Para isso, se faz necessário esboçar um modelo utilizado para estruturar a pesquisa, além de pesquisar trabalhos de outros autores que tratem sobre a mesma temática para, só assim, ter condições para se chegar à pergunta da pesquisa.

2.3.1.1 Identificando o Fenômeno de interesse

Romberg (1992) frisou bem quando disse que toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real, afinal de contas, tudo que chama a atenção merece uma análise investigativa. Na Educação Matemática, essa curiosidade envolve temáticas que vão desde características relacionadas à Educação Infantil até o Ensino Superior. Além disso,

> A essência do fenômeno é mostrada pela realização de uma pesquisa rigorosa que busca as raízes, os fundamentos primeiros do que é visto (compreendido) e o cuidado com cada passo dado na direção da verdade (“mostração” da essência). (BICUDO, 1994, p. 20).

Daí a necessidade de se elaborar boas perguntas diante do fenômeno investigado, no intuito de se obter importantes informações:

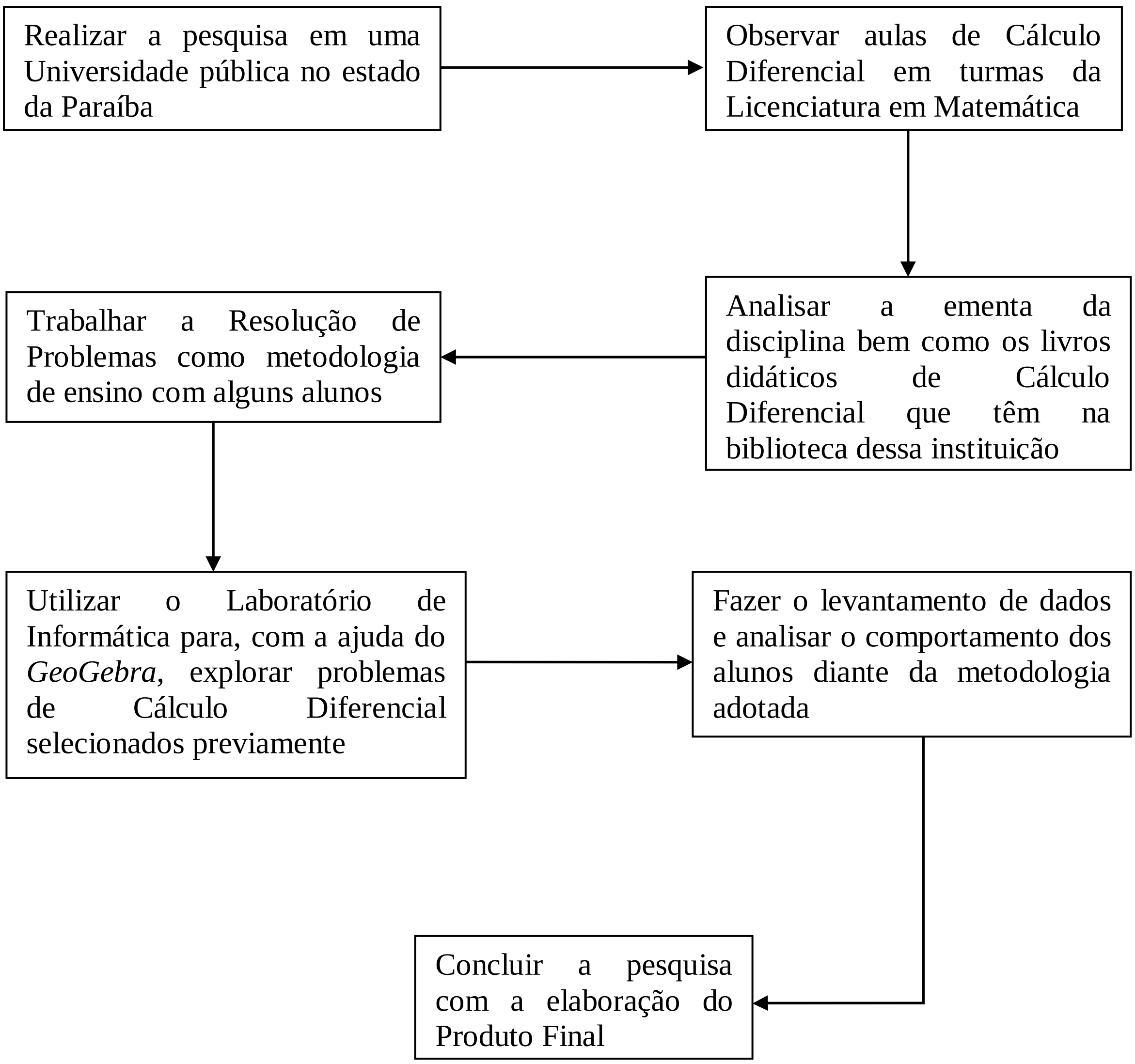
> Embora muitos dados de pesquisa virão da escuta, muitos também virão como consequência de fazer boas perguntas. Sem boas perguntas, você corre o risco de coletar muitas informações irrelevantes e ao mesmo tempo não coletar informações cruciais. Assim, ainda que seja desejável ser um bom ouvinte, isso não significa se apresentar como uma pessoa totalmente passiva em qualquer ambiente. Isso tampouco significa que você deve esperar não dizer nada além de um repetido "um-hum" em uma entrevista. Você também precisa fazer boas perguntas. (YIN, 2016, p. 24).

Desta forma, nosso fenômeno de interesse é a **Aprendizagem do Cálculo Diferencial**. Motivação esta advinda primeiro do fato pelo qual a disciplina representa para a continuidade do curso de Matemática (bem como dos cursos de Ciências Exatas), e segundo por eu trabalhar no acervo da Biblioteca Central dessa instituição e perceber que os alunos sempre buscavam (e ainda buscam) livros específicos ou livros de Pré-Cálculo.

2.3.1.2 Elaborando o Modelo Preliminar

Tomando como referência a metodologia de Romberg (1992) a fim de filtrar as ideias que foram surgindo, estruturando-as e norteando o que viria a ser feito, construí de forma preliminar o modelo para esta pesquisa (Figura 3). Os parâmetros chaves foram colocados conforme fluxograma abaixo:

Figura 3 – Modelo Preliminar desta pesquisa



Fonte: Próprio autor, 2018.

Vale destacar que, assim como um viajante que, com a ajuda de um mapa ou GPS estabelece a melhor rota para chegar ao seu destino final, sendo submetido a mudanças no percurso causadas por adversidades que podem surgir no seu caminho, assim também foi a minha tarefa como pesquisador deste trabalho. Portanto, o modelo apresentado na Figura 3 será uma espécie de mapa que me situará num complexo mundo científico que precisa ser conquistado. Além disso, com o Modelo Preliminar construído, fica evidente que a presente pesquisa será delimitada por três grandes temas (ou três pontos chaves): *O Cálculo, A Resolução de Problemas e O GeoGebra.*

2.3.1.3 Relacionar a pesquisa com ideia de outros pesquisadores

De acordo com Santos (2007, p. 47), o inédito apresentado em uma tese pode ser tanto algo completamente novo quanto aspectos novos de algo já discutido e explorado. O que se pode refletir a respeito disso é o fato de que na comunidade científica muitas ideias surgem em consequência de outras ideias, sempre existirá uma dependência do porque de se trabalhar determinadas temáticas. Dessa forma, com o fenômeno de interesse já identificado e com a construção preliminar do modelo que direcionará o trabalho, será abordada agora a terceira atividade descrita por Romberg (Figura 1) que é o relacionamento com outros trabalhos que abordem o mesmo fenômeno de interesse.

Segundo Huanca (2014), a importância desta etapa se reflete na possibilidade de esclarecer, ampliar ou até mesmo alterar o Modelo Preliminar construído. Ou seja, só a partir de uma análise de trabalhos de outros pesquisadores, será possível esclarecer algumas dúvidas, modificar algumas variáveis antes definidas ou até mesmo acrescentar pontos chaves que merecem atenção.

Corroborando com tal posicionamento, Allevato (2005) destaca que buscar referências em outros trabalhos é algo que acompanha toda a pesquisa:

> Trata-se de conhecer "o estado da arte" e localizar sua pesquisa dentro do espectro daquelas já realizadas no campo de estudo em que ela se insere. Deste modo, o pesquisador irá, também, identificar-se com um grupo científico particular e esta identificação criará referências teóricas e metodológicas importantes à orientação da investigação. O trabalho de buscar referências em outros trabalhos acompanha toda a pesquisa. Um vasto conhecimento de estudos relacionados ao seu tema de investigação permitirá ao pesquisador ter parâmetros para o estudo do fenômeno, particularmente para a interpretação das evidências. (ALLEVATO, 2005, p. 22).

Para relacionar uma pesquisa com trabalhos de outros é necessário, portanto, uma revisão de literatura. Neste sentido, Yin (2016) chama a atenção ao fato de que a revisão de literatura necessária ao iniciar um estudo é uma revisão seletiva, e não abrangente, da literatura:

> O principal propósito da revisão seletiva é aguçar suas considerações preliminares sobre o seu tema de estudo, método e fonte de dados. Em vez de assumir uma perspectiva mais ampla e relatar o que se sabe sobre um tema (o que seria o objeto de uma revisão abrangente), seu objetivo é revisar e relatar em maior detalhe um leque específico de estudos anteriores, diretamente dirigidos a seu provável tema de estudo, método e fonte de dados. (YIN, 2016, p. 55).

A partir de então, mergulhei na literatura buscando (nos livros, artigos científicos, dissertações e teses) os trabalhos desenvolvidos sobre Resolução de Problemas, sobre o Cálculo, bem como sobre as tecnologias digitais e a utilização do GeoGebra nas aulas de Cálculo. Tendo o Modelo Preliminar como referencial, se faz necessário, também, um olhar crítico diante da literatura investigada, pois, por exemplo, Resolução de Problemas ou Ensino do Cálculo são temas bastante amplos, sendo necessário filtrar aqueles trabalhos que mais se aproximem com o fenômeno de interesse previamente identificado.

Dessa forma, os capítulos que se seguem (Capítulo 3 - Resolução de Problemas e Tecnologias Digirais; e Capítulo 4 - Cálculo Diferencial) serão de extrema importância para a construção do nosso Modelo Modificado e da Pergunta da Pesquisa.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E TECNOLOGIAS DIGITAIS

No âmbito da sala de aula, quando se fala em resolver problemas, rapidamente surge a ideia de que uma situação-problema seja resolvida muitas vezes acompanhada de um exemplo similar a partir do qual servirá de modelo. A partir desse modelo, é lançada uma série de exercícios semelhantes que seguirão as mesmas estratégias de solução, seguidos de resultados também semelhantes. Cria-se, portanto, uma dependência em se ter um modelo a ser seguido, gerando uma acomodação por parte dos estudantes que não se sentem motivados a liberarem a disposição para uma investigação.

Nas aulas de Matemática, esse fato faz com que prevaleça a mecanização de processos, a repetição exacerbada e uma formalização precipitada de conceitos sem sua devida compreensão. É bem verdade que o ensino da Matemática sempre foi caracterizado pela repetição, desde a memorização da tabuada até à resolução de extensas listas de exercícios, em que o professor lançava as informações e ordenava aos alunos a tarefa de decorar, memorizar e repetir o que tinha sido mostrado em sala de aula; por conseguinte, os alunos teriam que cumprir tais tarefas e ficarem preparados para os testes e provas.

Vieira (2013) afirma que:

> Não se trata do descarte do processo de memorização, visto que o utilizamos, por exemplo, para a lembrança de regras ortográficas e gramaticais, dos elementos da tabela periódica, ou mesmo, da tabuada de multiplicação. Além disso, a mecanização de certos algoritmos não é inteiramente ruim, e pode ser aplicada ao se deparar com a divisão entre dois inteiros, ou ainda, frente a uma equação do 2º grau. (VIEIRA, 2013, p. 25).

A repetição em si é um ato importante em algumas atividades: quando os jogadores de futebol treinam diariamente, garantindo entrosamento, ensaiando jogadas e treinando pênaltis ou quando os músicos se preparam durante vários ensaios para garantir uma boa apresentação, por exemplo. Na sala de aula, esse excesso de treino ainda existe e faz com que muitos alunos esqueçam em pouco tempo aquilo que havia sido memorizado, embora muitos outros alunos compreendam e consigam fixar aquilo que haviam feito.

3.1 Situando a Resolução de Problemas na história

Lambdin e Walcott (2007, apud ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p. 76) destacam que durante o século XX e até atualmente, o ensino da matemática "experienciou seis fases identificáveis com diferentes ênfases: (1) Exercício e Prática; (2) Aritmética Significativa; (3) Matemática Moderna; (4) Volta às bases; (5) Resolução de Problemas; e, atualmente, (6) Padrões e responsabilidade". A fim de melhor compreender essas fases da Educação Matemática e as Teorias da Aprendizagem, segue o quadro 1 elaborado por Lambdin e Walcott.

Quadro 1 - Relações entre as Fases da Educação Matemática e as Teorias de Aprendizagem

Fases	**Principais Teorias e Teóricos**	**Foco**	**Como atingir**
Exercício e prática (aprox. 1920 - 1930)	Coneccionismo e Associacionismo (Thorndike)	Facilidade com cálculo	• Rotina, memorização de fatos e algoritmos. • Quebrar todo o trabalho em série de pequenos passos
Aritmética significativa (aprox. 1930 - 1950s)	Teoria da Gestalt (Brownell, Wertheimer, van Engen, Fehr)	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas. Aplicações da matemática em problemas do mundo real	• Ênfase nas relações matemáticas. • Aprendizagem incidental. • Abordagem de atividade orientada.
Matemática Moderna (aprox. 1960 - 1970s)	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural (ex. Brunner, Piaget, Dienes)	Compreensão da estrutura da disciplina.	• Estudo das estruturas matemáticas. • Currículo em espiral. • Aprendizagem por descoberta.
Volta às bases (aprox. 1970s)	(Retorno ao) coneccionismo	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades.	• (Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e prática.
Resolução de problemas (aprox. 1980s)	Construtivismo, psicologia cognitiva e teoria sociocultural (Vygotsky)	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático.	• Retorno à aprendizagem por descoberta. • Aprendizagem através da resolução de problemas
Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1990 até o presente)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural vs renovada ênfase na psicologia experimental. (NCBL)	Guerras matemáticas: preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos vs preocupação com a gestão dos sistemas educacionais.	• NSF - desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados ao estudante vs foco na preparação para os testes com expectativas específicas.

Fonte: Traduzido de Lambdin e Walcott (2007, p. 5, apud Onuchic e Allevato, 2011, p.77).

Ainda para Lambdin e Walcott (2007, apud ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p. 77) essas fases merecem atenção devido ao fato de que cada uma delas corresponde a um período em que a educação, em geral, estava caminhando através de mudanças radicais e fundamentais e cada uma introduzia práticas novas e inovadoras para a Educação Matemática. Além disso, acrescenta-se a essas razões o fato de que algumas das fases apontadas também foram vivenciadas em outros lugares do mundo, exercendo forte influência nos rumos que o trabalho com a matemática escolar tomou a partir de então.

Conforme está mostrado no quadro acima, na fase da Resolução de Problemas o foco ou objetivo estava não somente na resolução de problemas propriamente dita, mas também nos processos de pensamento matemático; e para atingir esses objetivos, sugeria-se como caminho o retorno à aprendizagem por descoberta e à aprendizagem através da resolução de problemas. Todas essas ideias estavam sustentadas no construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico.

Segundo Polya (1995), a primeira tarefa deveria ser resolver problemas para se fazer matemática e para ensinar o aluno a pensar. Porém, Polya insistia que se deveria ter cuidado nos esforços feitos para se ensinar a como pensar e que não se transformasse em ensinar o que pensar ou o que fazer.

Mas foi no fim dos anos 70 que a Resolução de Problemas ganhou proporção no mundo inteiro e em 1980 foi editada, nos Estados Unidos, uma publicação do NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics - An Agenda for Action: Recommendations for Scholl Mathematics of the 1980's* (Conselho Nacional de Professores de Matemática - Uma Agenda de Ação: Recomendações para a Matemática Escolar dos anos 80), cuja intenção era chamar todos os interessados para buscarem uma melhor educação matemática para todos. As ações recomendadas por esse documento destacavam que:

- o currículo matemático deveria ser organizado ao redor da resolução de problemas;
- a definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática deveria ser desenvolvida e expandida a partir de estratégias que destacassem o potencial das aplicações matemáticas;
- aos professores de matemática caberia a função de criar ambientes com ênfase na resolução de problemas (para que elas pudessem prosperar);
- materiais adequados ao ensino de resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade;
- para todos os níveis, os programas de matemática dos anos 80 deveriam envolver estudantes com resolução de problemas;
- pesquisadores e agências de fomento à pesquisa deveriam priorizar, nos anos 80, investigações em resolução de problemas.

Segundo Onuchic (1999), no final da década de 1980, a Resolução de Problemas como uma arte e como um objetivo é questionada por pesquisadores do mundo inteiro. Ainda de acordo com esta autora, foi durante esta década que muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos visando o trabalho em sala de aula, tanto na forma de coleções de problemas e listas de estratégias, quanto sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas.

Schroeder & Lester (1989) apresentam três modos diferentes de se abordar Resolução de Problemas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas. Estes três modos são caracterizados da seguinte forma:

- ***ensinar sobre resolução de problemas:*** em que o professor ressalta o modelo de resolução de problemas de Polya ou alguma variação dele. Ademais, para resolver problemas matemáticos é necessário compreender o problema, criar um plano, levar avante esse plano e olhar de volta o problema;

- ***ensinar a resolver problemas:*** o professor se concentra na forma como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na solução de problemas, dando aos alunos muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas. Assim, o que interessa é a capacidade do aluno transferir o que aprendeu num contexto para problemas em outros contextos, ou seja, após o desenvolvimento da parte teórica, haverá a aplicação de problemas;

- ***ensinar matemática através da resolução de problemas:*** os problemas são caracterizados como o primeiro passo para se aprender matemática. Esta abordagem é a mais consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto de resolução de problemas.

Neste último ponto, ensinar matemática através da resolução de problemas implica no desenvolvimento matemático dos alunos a partir das questões ou problemas propostos. E essas questões, para serem caracterizadas como problemas, não devem vir acompanhadas de métodos ou estratégias para a obtenção das soluções, pois se assim vierem e se o aluno já tiver algumas regras memorizadas, então não será para ele um problema. Aliás, o problema deve ser visto como um ponto de partida para a assimilação de novos conteúdos e para a construção e fixação de novos conceitos.

Para Onuchic (1999):

> Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática mas, também, como um passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Ainda neste sentido, Huanca e Almeida (2018) vão mais além quando dizem que a utilização da *Metodologia de Ensino e de Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas* faz com que o professor possa construir a avaliação do processo de ensino e de aprendizagem na sala de aula, tornando-a parte integrante desse processo. Assim sendo, a avaliação além de ajudar os professores a identificarem as limitações dos seus alunos, também contribui para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

3.2 A Resolução de Problemas como uma metodologia

Para Onuchic e Allevato (2011), não existem formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula de Matemática. Mas, em 1998, no intuito de ajudar os professores a empregar essa metodologia em suas aulas, foi criado um *Roteiro de Atividades* que permitia fazer uso dessa metodologia, promover entusiasmo em suas salas de aula e fazer com que os alunos vissem a Matemática com um olhar mais confiante (a criação desse Roteiro teve a participação de 45 professores participantes de um Programa de Educação Continuada). Este roteiro, em sua primeira versão, foi subdividido nas seguintes etapas: formar grupos e entregar uma atividade, o papel do professor, registrar os resultados na lousa, realizar uma plenária, analisar os resultados, buscar um consenso e fazer a formalização.

Entretanto, várias pesquisas e experiências em formação de professores revelaram que os alunos ainda continuavam com muitas dificuldades diante da matemática e, pensando nisso, Onuchic e Allevato (2011) reiteraram esse Primeiro Roteiro e incluíram algumas mudanças para a criação de um Segundo Roteiro que provesse aos alunos os conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia, ficando assim caracterizado:

- ***Preparação do problema:*** Selecionar um problema, visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

- ***Leitura individual:*** Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

- ***Leitura em conjunto:*** Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

  - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

  - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

- ***Resolução do problema:*** A partir da compreensão do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que ao longo de sua resolução conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- ***Observar e incentivar:*** Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor atua como mediador e leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

  - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e as ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

- ***Registro de resoluções na lousa:*** Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- ***Plenária:*** Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- ***Busca do consenso:*** Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta com toda a classe chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- ***Formalização do conteúdo:*** Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Porém, Onuchic e Andrade (2017), afirmam que em 2015, Onuchic e Allevato propuseram mais uma etapa para este roteiro intitulada como *Proposição de problemas.* Esta etapa pode ser analisada de acordo com dois pontos de vista: de um lado, para os professores, propor problemas é fundamental para ensinar matemática através da resolução de problemas, pois favorece e enriquece a aprendizagem dos alunos; por outro lado, para os alunos, propor seus próprios problemas recairia no fato de que a capacidade de resolver problemas e, assim, compreender ideias matemáticas, seria enriquecida.

3.3 A importância da Resolução de Problemas no Ensino da Matemática

O problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81). Nesta perspectiva, os problemas, atividades ou tarefas devem ser veículos pelo qual um currículo seja desenvolvido, em que a Matemática seja evidenciada através da resolução de problemas e a aprendizagem seja uma consequência desse processo. Dessa forma, as atividades devem ser planejadas e selecionadas de acordo com o andamento do conteúdo e com a compreensão dos alunos.

Esse procedimento ou planejamento pode ser justificado pelo fato da Resolução de Problemas colocar o foco nos alunos, fazendo com que os problemas remetam a uma reflexão de ideias que desenvolvam o poder matemático, além de levar os alunos a uma compreensão que vá mais adiante daquilo que havia sido pedido no problema (devido ao surgimento de problemas secundários). Além do mais, ao resolver problemas em sala de aula, os alunos se engajam em todos os cinco padrões de procedimento descritos nos Standards 2000: Resolução de Problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação, que são os processos de fazer Matemática.

De fato, o ensino da matemática é um processo bastante complexo e que exige muito esforço do professor, o qual é incumbido em promover uma aula que envolva os alunos no desenvolvimento do raciocínio matemático. Essa ideia pode ser reforçada a partir da afirmação de Vale (2017):

> No mundo de hoje, não é suficiente ser proficiente em computação, em memorização de fatos, na fluência de procedimentos ou na resolução de problemas de rotina. Estas capacidades são importantes, mas são necessárias outras, as que permitam resolver problemas não rotineiros, gerar múltiplas resoluções, ou caminhos, buscando pelo mais elegante, simples e eficiente, justificar conclusões e comunicar resultados. Estas capacidades podem ser cultivadas e alimentadas se os professores proporcionarem oportunidades de aprendizagem apropriadas para desvendar o potencial criativo, inovador e crítico de todos os alunos. (VALE, 2017, p. 134).

Segundo Onuchic (1999), quando considerada como metodologia de ensino, a Resolução de Problemas faz da compreensão seu foco central e seu objetivo, ampliando seu papel no currículo. Com isso, a pretensão é engajar os alunos na aplicação de conhecimento depois da aquisição de certos conceitos e determinadas técnicas, passando a ser tanto um meio de aplicar conhecimentos já construídos como um processo para se adquirir novos conhecimentos. A mesma autora ainda destaca que:

> É importante ter a visão de que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado de matemática, pelos alunos, é mais forte quando é autogerado do que quando lhes é imposto por um professor ou por um livro-texto. Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta. (ONUCHIC, 1999, p. 208).

Em sua pesquisa de doutorado, Reis (2001) realizou entrevistas com alguns professores-pesquisadores, objetivando compreender como acontece a relação tensional entre rigor e intuição no ensino do Cálculo e da Análise. Um dos professores entrevistados foi Geraldo Ávila, o qual destacou em uma de suas falas que aprender matemática se faz através de resolver problemas, pois quanto mais o aluno resolve problemas mais ele aprende, buscando teoria na medida em que ele encontra dificuldade nos problemas e, neste caso, a resolução de problemas pode contribuir para um redirecionamento do ensino do Cálculo

Uma importante afirmação pode ser verificada em Gomes et al. (2017) quando afirmaram que:

> A resolução de problemas é uma metodologia que oportuniza aos estudantes a possibilidade de fazer Matemática, isto é, ao buscarem uma solução para o problema proposto, eles são levados a exercitar as suas habilidades intelectuais, criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, experimentação, capacidade de fazer analogias, interpretação dos resultados, etc. Desse modo, a resolução de problemas estreita a distância entre uma Matemática mais intuitiva, mais experimental e uma Matemática formal. (GOMES et al., 2017, p. 111).

Para Borrões (1998), os três tipos que mais favorecem a aprendizagem significativa da Matemática são: a aprendizagem por descoberta, a resolução de problemas e a modelação. Para o citado autor, na Resolução de Problemas é fundamental que o aluno adote uma atitude de curiosidade e exploração, tenha disposição de experimentar, de construir hipóteses e de demonstrar. Tais fatores estão ligados às potencialidades do computador, pois permitem explorar situações, modelar fenômenos, testar conjecturas e, até mesmo, inventar e reinventar a Matemática.

Assim sendo, Farias e Rêgo (2016) sintetizam bem ao destacar que a Resolução de Problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas, as quais exigem dos alunos tanto uma atitude ativa quanto um esforço na busca de suas próprias respostas e, consequentemente, seu próprio conhecimento. Para isso, pressupõe-se promover nos alunos o domínio de procedimentos e a utilização dos conhecimentos disponíveis a fim de dar respostas a situações variáveis e diferentes.

3.4 A Resolução de Problemas em alguns países

No Campus VI da UEPB, localizado na cidade de Monteiro/PB, existe o GPRPEM[3] que vem promovendo a geração de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produção científica sobre a Resolução de Problemas. Um dos objetivos desse grupo, ao qual faço parte, está relacionado com o desenvolvimento de estudos que estejam focados no ensino e na aprendizagem e, sendo assim, que sejam voltados para o professor e para o aluno.

Em 2012, a Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC) criou a disciplina *Resolução de Problemas Matemáticos (RPM)* que começou a ser lecionada no início do ano letivo de 2013, cujo objetivo foi desenvolver nos alunos a capacidade em resolver situações-problema relacionadas ao seu nível escolar. A disciplina RPM passou a ser oferecida no Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e no Ensino Médio (2º ano).

Segundo Gomes et al. (2017), a criação da disciplina RPM pode ser justificada pelo fato de ser um importante recurso para o ensino da matemática (reconhecido inclusive nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs), e tendo em vista o baixo desempenho dos alunos do Ensino Médio da rede pública estadual daquele estado em avaliações internacionais, nacionais e estaduais na disciplina Matemática; além disso, trata-se de uma disciplina com planejamento próprio e que não pretende introduzir conceitos, mas retomá-los.

Em 2016, a matriz curricular publicada no Diário Oficial do Estado do Rio de Janeiro não trazia a manutenção da disciplina RPM para o ano letivo seguinte. No entanto, Gomes et al. (2017) acreditam que seja necessário tomar algumas medidas para que as propostas definidas pela SEEDUC à RPM não tenham sido em vão, tais como: inserir a metodologia de resolução de problemas nas aulas de matemática a partir do 6º ano do Ensino Fundamental; oferecer, num ambiente virtual de aprendizagem, capacitações sobre as perspectivas da resolução de problemas; criar um canal eficaz de comunicação entre os diversos professores de matemática pertencentes aos quadros da SEEDUC com grupos de pesquisas sobre a resolução de problemas (como o GTERP da UNESP de Rio claro que, aliás, a própria secretaria recomendava aos professores que procurassem estudar trabalhos apresentados nos Seminários realizados nesse grupo); e, realizar seminários sobre o tema em questão.

Criado em 1992, o GTERP é um grupo formado por alunos e ex-alunos do PGEM (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) da UNESP. O objetivo do grupo é desenvolver estudos que atinjam a sala de aula e se relacionem com questões de ensino-

[3] Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática, coordenado pelo Professor Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

aprendizagem-avaliação em todos os níveis de escolaridade através da Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

Ao analisar o artigo *Resolver Problemas - Criando Soluções, Vendo* das autoras portuguesas Isabel Vale e Tereza Pimentel, foi evidenciado que para elas, a resolução de problemas continua atual como objetivo central da aprendizagem matemática do século XXI, sendo necessário repensar sua abordagem em sala de aula, em que a valorização da visualização vem a ser uma boa estratégia. Isso remete ao fato de que um ensino pautado na visualização tende a desenvolver reflexões e talvez habilidades sobre um determinado conteúdo, ajudando na fixação de ideias e conceitos. O objetivo é facilitar a resolução de problemas e proporcionar aos alunos um maior envolvimento com determinados conteúdos matemáticos.

Assim sendo, Vale e Pimentel (2016) reforça esta ideia quando afirmam que:

> A recente investigação na área de cognição, em particular nos processos de resolução de problemas, conclui que o uso de representações visuais, para certos tipos de tarefas, pode ter vantagens sobre o uso de outras representações, facilitando a resolução de problemas. Em linha com essa ideia, defendemos a estratégia *procurar ver* como estratégia complementar poderosa para resolver problemas, e ainda para impulsionar a criatividade, dando a todos os alunos a oportunidade de a experienciar numa aula de matemática. (VALE; PIMENTEL, 2016, p. 9).

Neste ponto, é possível destacar que muitos professores de matemática se valem não apenas de palavras durante suas aulas, mas de notações algébricas e também de figuras. Segundo Polya (1995), na segunda reimpressão e tradução de Heitor Lisboa de Araújo (*A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*), para a resolução de um problema é necessário um plano, e só se tem um plano quando são conhecidos, de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisam ser executados para a obtenção da incógnita.

Ainda de acordo com Vale e Pimentel (2016), os alunos, após uma maior análise e reflexão diante de um problema, utilizam estratégias visuais, servindo em alguns casos como uma segunda via de resolução, o que pode impulsionar a criatividade matemática e contribuir para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. Vale (2017) diz que:

> Na resolução de problemas complexos a relação com o *ver* é tão importante como as capacidades relacionadas com o *fazer*, verificando-se que a maior parte das vezes os alunos selecionam os métodos a utilizar na resolução de um problema baseados no que *veem* no seu enunciado. (VALE, 2017, p. 139).

Através de dados obtidos em pesquisas realizadas em Portugal, Serrazina (2017) fez uma análise sobre o papel da resolução de problemas na formação inicial e continuada de professores. Assim sendo, essa autora inicia sua análise destacando desde a resolução e formulação de problemas, o significado de problema e diferentes estratégias de resolução, até a resolução de problemas no currículo e na formação de professores.

Para Serrazina (2017):

> A definição de problema tem sido associada a tarefas para as quais aquele que as procura resolver não conhece à partida uma forma de obter a solução. Kantowski (1980) considera que um problema é uma situação com que uma pessoa se depara e para a realização da qual não tem um procedimento ou algoritmo que conduza à sua solução. Refere ainda que o que é problema para um indivíduo poderá ser exercício para outro ou ainda uma frustração para um terceiro. (SERRAZINA, 2017, p. 58).

Isso mostra que uma tarefa ou problema terá sua devida importância quando direcionada a públicos específicos; ou seja, uma atividade que, por exemplo, exija utilização da *regra da cadeia* pode ser um problema ou simplesmente um exercício para alunos que já estejam estudando *integrais*, porém pode causar descontentamento naqueles alunos que ainda estejam estudando o conteúdo das *derivadas*.

Ainda para Serrazina (2017):

> Desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas é, desde 1990, um dos objetivos da Matemática no ensino básico em Portugal, reforçado no Programa de Matemática para o Ensino Básico de 2007 (PONTE et al., 2007), que propunha trabalhar diferentes estratégias de resolução de problemas ao longo dos vários ciclos do ensino básico. (SERRAZINA, 2017, p. 60).

A publicação da *Agenda for Action* do NCTM, conforme já mencionado anteriormente, influenciou sobremaneira a educação matemática em Portugal nos anos 80, destacando recomendações a respeito da organização dos currículos de Matemática, do papel do professor e do ambiente de sala de aula, ambos em torno da resolução de problemas. Além disso, houve forte influência também no âmbito da APM (Associação de Professores de Matemática) portuguesa, que em 1988 promoveu um seminário direcionado à renovação do currículo de Matemática. Neste seminário afirmou-se que a resolução de problemas é vista como metodologia de ensino e como conteúdo a ensinar.

Em Portugal, a preocupação com o papel da resolução de problemas na formação de professores e a preocupação curricular com o tema andam juntas. Serrazina et al. (2002) realizaram uma revisão de diversos trabalhos relacionados ao papel da resolução de problemas na formação inicial de professores e concluíram que:

> (...) (i) pode-se ensinar a resolver problemas aos futuros professores e estes desenvolvem uma atitude positiva em relação à resolução de problemas; (ii) são sentidas dificuldades nalguns aspectos das tarefas de resolução de problemas como de compreensão, de generalização e de argumentação; (iii) a capacidade de resolução de problemas pode ser afetada pela pouca qualidade do conhecimento matemático dos futuros professores; e (iv) apesar de terem sido implementados módulos de ensino de resolução de problemas, isso parece não ter sido suficiente para os futuros professores alterarem as suas conceções sobre a natureza da matemática e do seu ensino e, nomeadamente, terem vontade ou capacidade para alterar as suas práticas relativamente aos modelos de ensino tradicionais, que lhe foram veiculados pelos seus professores ao longo da escolaridade. (SERRAZINA et al., 2002, p. 48).

O pesquisador peruano Uldarico Malaspina Jurado em seu artigo intitulado *Creación de Problemas. Avances y Desafíos en la Educación Matematica (Formulação de Problemas. Avanços e Desafios na Educação Matemática)* sintetiza algumas pesquisas que tratam da formulação de problemas no ensino de Matemática, indo desde trabalhos de Kilpatrick (1987), passando pelas publicações na edição especial do periódico Educational Studies in Mathematics (2013) e pelos livros sobre essa temática editados por F. Singer, N. Ellerton e J. Cai (2015) e por P. Felmer, E. Pehkonen e J. Kilpatrick (2016), até alguns trabalhos realizados na América Latina e em seu grupo de pesquisa na Pontifícia Universidade Católica do Peru.

De acordo com Jurado (2016), o grande desafio para o professor está na criação de problemas que estejam relacionados ao contexto educacional, afinal de contas cada grupo de alunos tem suas particularidades, dificuldades, experiências e ambiente sociocultural. Nessa perspectiva, para o professor recai não só a tarefa da escolha de problemas adequados às particularidades de cada grupo de alunos, mas também a necessidade de incentivá-los para a criação de problemas, o que estimulará a criatividade, a busca de conhecimento e, consequentemente, a aprendizagem.

Juntamente com outros pesquisadores, Jurado (2016) desenvolveu oficinas de treinamento para professores do ensino primário e secundário a fim de estimular a capacidade criadora de problemas dos professores em treinamento e em exercício, desenvolvendo a competência didática. Assim sendo, ele propôs criar problemas chamados *Episódio, Pré Problema* e *Pós Problema* (Estratégia EPP), em que o *Pré Problema* é aquele criado por professores e cujas soluções visam a melhor compreensão e solução do problema considerado no episódio de aula que lhes é apresentado nas oficinas. Em seguida, foi dado início a uma pesquisa sobre a inclusão de outra fase na EPP chamada *Reflexão Didática*, colocando mais ênfase nas considerações didáticas do que nos conteúdos para elaborar os chamados *Pré-Problemas*.

Portanto, a utilização da metodologia da Resolução de Problemas refletida em alguns países, bem como sua importância para o Ensino da Matemática, despertaram o nosso interesse para a utilizarmos na nossa pesquisa de campo. Porém, ainda é preciso trabalhar algumas temáticas que envolvam as Tecnologias Digitais; só assim, teremos parâmetros suficientes para a construção da pergunta da pesquisa e para a investigação de campo.

3.5 Reflexões acerca da Tecnologia na Educação

3.5.1 O uso das Tecnologias na Educação Matemática

A tecnologia exerce forte influência na vivência societária. Sua aplicabilidade no mundo moderno abrange as indústrias, o comércio, os transportes, os meios de comunicações e, também, a educação, destacando-se no âmbito do ensino e da aprendizagem.

No que diz respeito à Educação Matemática, a tecnologia assumiu diferentes nomes em épocas distintas. Nesse sentido, Borba, Silva e Gadanidis (2014) refletiram a partir de várias pesquisas desenvolvidas no Brasil e consideraram que o uso das tecnologias digitais na Educação Matemática no Brasil pode ser estruturado em quatro fases:

> A primeira fase é caracterizada pelo uso do software LOGO, a segunda pelo uso de softwares de geometria dinâmica e sistemas de computação algébrica, a terceira pelo uso da internet em cursos a distância e a quarta pelo uso da internet rápida que democratiza a publicação de material digital na grande rede. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 13).

No quadro 2, é apresentado, de maneira resumida, os aspectos e elementos que caracterizam cada uma dessas fases.

Quadro 2 – As quatro fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática

	Tecnologias	Natureza ou base tecnológica das atividades	Perspectivas ou noções teóricas	Terminologia
Primeira fase (1985)	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação	Construcionismo; micromundo.	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda fase (início dos anos 1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; fórum; google.	Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC).
Quarta fase (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

Fonte: Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 39).

Porém, Borba, Silva e Gadanidis (2014) destacam que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a fase anterior, já que elas vão se integrando de tal maneira que aspectos que surgiram nas três primeiras fases ainda são fundamentais dentro da quarta fase.

Com o quadro 2, é possível inferir que as fases podem ser caracterizadas por terminologias diferentes: a expressão TI (Tecnologias Informáticas ou Tecnologias da Informação), que é utilizada nas duas primeiras fases, se refere aos computadores, calculadoras gráficas e softwares; já o termo TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) é utilizada na terceira fase, caracterizando-se pelo uso dos computadores e da internet; por sua vez, a expressão TD (Tecnologias Digitais) passa a designar o uso dos computadores, tablets, telefones celulares e internet rápida.

Percebe-se que o intenso desenvolvimento das tecnologias vem promovendo, com o passar do tempo, novos cenários para a sala de aula e novos procedimentos metodológicos. Como bem destaca Richit et al. (2012), a inserção da tecnologia faz com que os processos de ensino e aprendizagem possam ser mais significativos e produtivos para o aluno, mas não é trivial para o professor, demandando tempo para sua incorporação nas aulas.

A utilização das Tecnologias Digitais em sala de aula, em especial o computador, é uma tendência muito discutida na atualidade devido à importância que representam. Essas ferramentas possuem um amplo potencial pedagógico, podendo auxiliar o professor em relação a diversos conteúdos e, no ensino da Matemática, podem contribuir para o entendimento de um determinado conceito.

Por sua vez, a internet passou a oferecer aos professores e alunos um mundo de possibilidades no que tange à troca de informações e comunicação de ideias, além de sites dedicados ao uso da informática na educação, inclusive com sugestões de atividades. Para Borba e Penteado (2007), o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que inclua uma "alfabetização tecnológica". Segundo os mesmos autores, essa tal alfabetização deve ser vista como uma maneira de aprender a ler essa nova mídia a partir da inserção dos computadores em atividades essenciais como ler, escrever, entender gráficos, entre outros, em que a informática na escola se constitui em parte da resposta a questões ligadas à cidadania.

Segundo Onuchic e Allevato (2005):

> Ademais, o computador permite relacionar a descoberta empírica com as representações Matemáticas algébricas e, ainda, confirmar numericamente modelos algébricos por meio da possibilidade de infindáveis simulações. Estas características o tornam um poderoso recurso quando associado à Resolução de Problemas. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 225).

O uso dos softwares possibilita, por meio de construções e manipulações, a exploração dos conceitos matemáticos, permitindo que os resultados adquiridos analiticamente de um problema possam ser verificados por meio de visualizações em 2D ou 3D. Na disciplina de Cálculo, por exemplo, que apresenta certo grau de abstração, seria interessante o uso de softwares para facilitar o entendimento das representações gráficas e algébricas. Mas, para que as tecnologias contribuam de maneira eficaz no processo de aprendizagem, é necessário que os professores adotem metodologias que explorem, juntamente com os alunos, todo o conceito matemático envolvido.

Nesse sentido, Gravina e Santarosa (1999) alertam que para haver a mudança de paradigmas na educação, é necessário ser crítico e cuidadoso no processo de uso da informática:

> A informática por si só não garante esta mudança, e muitas vezes engana pelo visual atrativo dos recursos tecnológicos que são oferecidos, os quais simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento. (GRAVINA; SANTAROSA, 1999, p. 74).

De nada adiantaria o uso da informática ou de outras ferramentas computacionais sem um devido planejamento, no qual o professor deve aliar as atividades e conteúdos objetivando o desenvolvimento de habilidades nos alunos que garantam uma aprendizagem efetiva. Se, por um lado, essas ferramentas podem auxiliar os professores, por outro lado, as mesmas possibilitam aos alunos um conhecimento dinâmico, já que é possível modelar e simular problemas, visualizando situações dificilmente obtidas de maneira manual. Assim sendo, Bittar (2010) reforça esse ponto quando diz que:

> Não podemos correr o risco de usar a informática como um "apêndice" do curso habitual, ou seja, o professor dá a aula da maneira como está habituado, na maioria das vezes somente no ambiente papel e lápis, e, quando leva os alunos ao laboratório, as atividades realizadas não contribuem com a compreensão dos conceitos estudados. (...) Ora, nesse caso o computador foi usado de forma artificial e não foi explorado em sua potencialidade máxima como um meio que pode oportunizar mudanças no processo de ensino e aprendizagem que sejam de ordem do conhecimento (BITTAR, 2010, p. 239 - 240).

A princípio, tanto o aluno quanto o professor devem ter compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos para, só assim, tirar o melhor proveito do computador, conforme destaca Allevato (2005):

> (...) para utilizar eficientemente o computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (ou o professor) precisam ter conhecimento do que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Eles precisam saber Matemática embora, muitas vezes, uma Matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino. (ALLEVATO, 2005, p. 79).

A presença das tecnologias redefine o papel do professor e do aluno, pois implica nas formas de transmitir e armazenar informações e nos modos de construção do conhecimento. De acordo com Marin e Penteado (2011), a presença das tecnologias no cenário educacional faz com que o professor enfrente novas situações, sendo desafiado a rever e ampliar seus conhecimentos, já que as tecnologias provocam demandas que vão além da sala de aula. Para

Borba (2011), as tecnologias podem levar os alunos a desenvolverem suas ideias, criarem conjecturas, validando-as e levantando subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática, devido às possibilidades de investigação e experimentação que essas mídias propiciam.

Em outras palavras, o professor precisa repensar sua prática docente, estando preparado para os diversos desafios e situações que as tecnologias proporcionam, ao mesmo tempo em que motiva os alunos à exploração de ideias, à criatividade e ao enfrentamento de desafios que permitam aos estudantes fazerem suas próprias descobertas. Assim, Borba e Penteado (2007) reforça esse pensamento quando dizem que:

> Entendemos que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento. (BORBA e PENTEADO, 2007, p. 45).

De maneira geral, as tecnologias promoveram e ainda promovem diversas tendências no ensino como um todo, e isso sugerem mudanças na ação dos docentes.

Para Richit (2016), o uso das tecnologias digitais para a realização de cálculos, a representação de conceitos geométricos e funções é importante na resolução de problemas e na experimentação matemática, pois nessas situações os processos algoritmizados não se constituem no objetivo-fim dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Ademais,

> Verifica-se que o entendimento acerca do papel das tecnologias digitais nos processos de ensino e aprendizagem presente nas diretrizes político-pedagógicas dos PCN evidencia aspectos como a visualização, a otimização de cálculos e operações algébricas, ampliação das possibilidades de representação gráfica e, sobretudo, a realização de atividades de investigação e experimentação matemática. Além disso, destaca a possibilidade de promover uma visão ampliada sobre a matemática, uma vez que o desenvolvimento de atividades matemáticas, associadas às situações sociais ou naturais da realidade e pautadas no uso de tecnologias ampliam os modos de ver e aprender a própria matemática. Os aspectos aqui destacados sinalizam a sinergia entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas. (RICHIT, 2016, p. 115).

Assim, nessa dissertação temos o interesse em trabalhar a metodologia da Resolução de Problemas juntamente com a tecnologia, mais precisamente o software GeoGebra.

3.5.2 A compreensão sob a ótica da visualização e das múltiplas representações

De modo geral, no âmbito da Matemática, os alunos pensam de maneira analítica e não geométrica (ou visual). No ensino do Cálculo, tanto professores quanto estudantes têm a ideia de que é necessário manipular, com habilidade, números e símbolos para se conseguir um entendimento; porém, alguns conceitos podem ser explorados sem o computador para, em seguida, serem aprofundados com ele a fim de que os alunos compreendam as respostas obtidas. Nesse ponto, insere-se as chamadas representações múltiplas (gráficas, numéricas e algébricas) que são favorecidas pelo uso do computador, responsável por oferecer oportunidades para observar e experimentar alguns fenômenos que estejam acontecendo.

Segundo Aspinwall e Shaw (2002a, apud ALLEVATO, 2005, p. 85), as representações múltiplas merecem discussões sob o ponto de vista de um processo geométrico e um processo analítico, considerados como contrastantes. Para os autores, um processo não é superior ao outro, mas os estudantes constroem representações diferentes e idiossincráticas, as quais conduzem a diferentes compreensões de um conceito. Assim, deve-se desenvolver nos alunos a habilidade para selecionar, aplicar e transladar entre diversas representações a fim de resolver um problema matemático.

O potencial das múltiplas representações é ressaltado por Gravina e Santarosa (1999). Segundo essas autoras, considerando que um mesmo objeto matemático possa ter diferentes representações, é relevante no processo de construção do conhecimento uma exploração que transite em diferentes sistemas:

> Por exemplo, a uma função pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, ou uma representação matricial numérica que evidencia variações quantitativas, ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados. (GRAVINA e SANTAROSA, 1999, p. 79 - 80).

Para Barbosa (2009), a abordagem visual de um conceito matemático pode ser considerada um dos elementos que caracterizam novos modos ou estilos de produção do conhecimento. Porém, nem sempre foi assim:

> As imagens foram, muitas vezes, consideradas apenas um apoio para imaginar o gráfico de uma função, dada por sua expressão algébrica. Pautada na escrita estática, as imagens nem sempre foram consideradas parte integrante na produção do conhecimento matemático. Com o advento das TIC, a imagem passou a ser um recurso fundamental, devido ao fato de se poder manipulá-la de forma dinâmica. (BARBOSA, 2009, p. 59 – 60).

Segundo Barbosa (2009), a visualização pode ser entendida como a habilidade de interpretar e entender a informação figural e, também, a capacidade de conceitualizar e transladar relações abstratas e informações não figurais (representações) em termos visuais. Ainda de acordo com o autor, a visualização também é compreendida como uma linguagem que pode comunicar a matemática quando a abordagem algébrica não consegue ser expressa.

Nesse ponto, as tecnologias digitais têm um relevante papel:

> Muitos conceitos e processos matemáticos podem ser visualizados através de diagramas ou gráficos. A visualização na Matemática é um processo de formação de imagens (mental ou com papel e lápis, material concreto, ou com ajuda das TIC) de conceitos abstratos, para usá-las com o intuito de se obter um melhor entendimento e de estimular a descoberta matemática. É um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais para resolver problemas ou provar propriedades. É um ato no qual é estabelecida uma conexão entre a construção interna (o que está na mente) e alguma coisa acessada dos sentidos (está fora: papel, computador, etc.). (BARBOSA, 2009, p. 60).

Dessa forma, a visualização é um procedimento utilizado pelas tecnologias digitais que permite interpretações através das imagens com característica dinâmica. No entanto, conforme bem destaca Escher (2011), introduzir as tecnologias na educação requer uma análise cuidadosa sobre a escolha da tecnologia e do software a ser utilizado na sala de aula, de maneira que tal escolha atenda e contemple os objetivos projetados pelo professor ao mediar o processo educativo.

Assim, a princípio, foram pesquisados vários softwares matemáticos que contribuem para o processo de visualização, como o GeoGebra, Matlab, Maple, Winplot a fim de utilizá-lo para o desenvolvimento desta pesquisa. Embora todos apresentem grande importância, optou-se pelo GeoGebra devido ao fato do mesmo possuir uma interface simples com vários recursos didáticos e algébricos, além de ser gratuito, disponível em português e apresentar comandos específicos para o conteúdo abordado nesta pesquisa.

3.5.3 O Software GeoGebra

Desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software com alto potencial didático e pedagógico que reúne ferramentas para Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, podendo ser utilizado nos sistemas operacionais *Windows*, *Linux* ou *Mac OS*, abrangendo desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Sua interface dispõe de um campo de entrada, de uma janela de Álgebra e outra de Geometria, em que cada objeto geométrico criado possui uma correspondência algébrica, de modo que tudo que é construído na zona gráfica o próprio software algebriza mostrando uma expressão algébrica que represente tal figura construída; a partir de então, é possível manipular objetos construídos e movê-los sem alterar suas propriedades. Por isso, o GeoGebra é conhecido como um software de geometria dinâmica, em que o usuário assume o controle das representações a partir da execução de cada uma das etapas necessárias para uma determinada construção geométrica.

Para Farias e Rêgo (2016), o manuseio do GeoGebra possibilita ao estudante a apresentação de diversos conteúdos da Matemática e permite a construção dinâmica de diversas formas geométricas em ambientes 2D e 3D, das mais simples às mais sofisticadas, além de várias representações gráficas de diversos tipos de funções. Para essas autoras, outra vantagem desse software é a possibilidade de construção de atividades que podem ser salvas como arquivos, ou de figuras que poderão ser utilizadas em outras atividades. De acordo com as autoras:

> Uma das principais características dos desenhos dinâmicos é a sua manipulação. A capacidade de modificarmos representações através de um conjunto de procedimentos orientados de seus componentes assegura que as propriedades geométricas desses objetos sejam preservadas, o que pode auxiliar o estudante em relação às características invariantes das figuras. Deste modo, as propriedades geométricas podem ser traduzidas como um fenômeno visual que se produz ao arrastar objetos, de maneira que, ao arrastá-los, os elementos se convertem em um meio de reconhecimento e de verificação das propriedades através do desenho dinâmico. (FARIAS e RÊGO, 2016, p. 115 - 116).

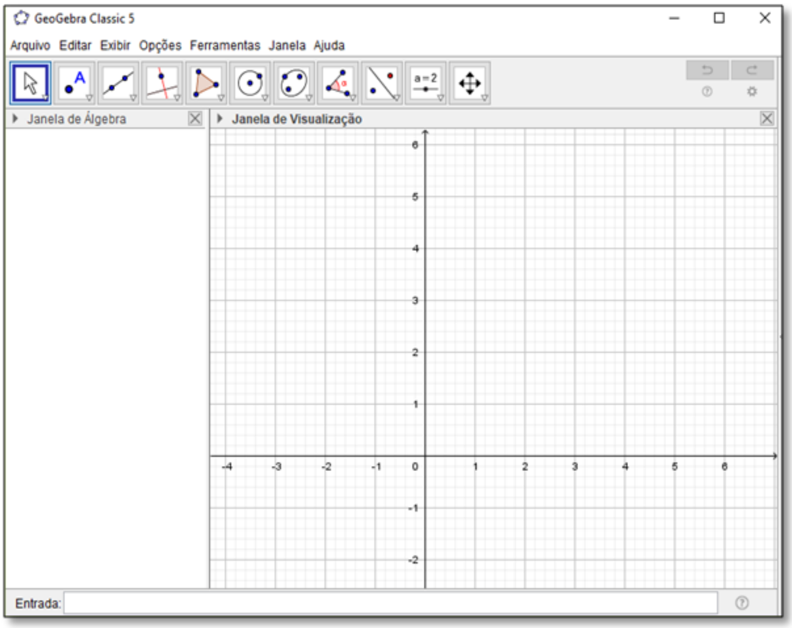
Além do mais, o GeoGebra facilita a investigação dos alunos, que podem movimentar os objetos e acompanhar as variações ocorridas, relacionando os conteúdos algébricos e geométricos, o que torna algo extremamente valioso no ensino de Cálculo.

Ainda de acordo com Farias e Rêgo (2016):

> (...) trabalhar o conhecimento geométrico a partir de um *software* dinâmico abre um grande leque de possibilidades didáticas, na medida em que suas ferramentas potencializam a geração de situações que podem se configurar como ponto de partida para a investigação, inclusive de pontos de vista distintos do originalmente proposto, ampliando a aprendizagem matemática. (FARIAS e RÊGO, 2016, p. 123).

A janela inicial do GeoGebra é formada por uma barra de menus, uma barra de ferramentas, uma janela de álgebra, uma janela de visualização, o campo de entrada de texto, um menu de comandos e um menu de símbolos, conforme figura 7.

Figura 4 - Interface do GeoGebra



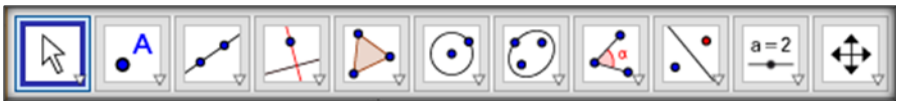
Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

Na parte superior da figura 4, encontra-se a barra de menus, em que o primeiro dele é o menu *Arquivo* por meio do qual é possível abrir novas janelas e documentos já salvos no formato do programa, além de gravar documentos, visualizar impressão, exportar, entre outros. O menu seguinte é o *Editar*, responsável por refazer ou desfazer ações, copiar, colar e inserir figuras. A partir do menu *Exibir* é possível tanto mostrar quanto ocultar várias opções da área de trabalho. No menu *Opções* pode-se escolher arredondamentos, tamanho de fonte, idiomas, dentre outras funções. No menu *Ferramentas* é possível configurar, gerenciar e até mesmo criar uma nova barra de ferramentas. O menu *Janela* serve para criar uma nova janela (opção presente no primeiro menu) e o menu *Ajuda* contém informações sobre o software, tutorial, manual, licença, etc.

De maneira geral, a tela inicial do GeoGebra é dividida em três partes: *a janela algébrica*, que é responsável pela edição, mostrando informações como valores, coordenadas, funções, além de equações; *a janela gráfica*, que é responsável pela visualização dos gráficos, pontos, vetores, segmentos, polígonos, que podem ser introduzidos a partir da entrada de texto; e *o campo de entrada*, que, por sua vez, é responsável por criar funções ou equações, sendo usada para inserir comandos.

Logo abaixo do menu, encontra-se a barra de ferramentas que permite um acesso rápido a varias funções:

Figura 5 - Barra de ferramentas



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

Essa barra de ferramentas ou barra de comandos permite que o usuário, através de um acesso rápido, tenha à disposição uma gama de opções que pode ser usada de acordo com a atividade proposta a ser desenvolvida. Tais comandos podem ser facilmente utilizados devido à clareza com o qual os mesmos são mostrados; ou seja, com uma rápida inspeção visual, o usuário já tem uma ideia do que cada qual significa. Por outro lado, há de se destacar que a disposição de alguns comandos pode variar de acordo com a versão instalada do GeoGebra. Aqui, foi utilizada a versão 5 (*GeoGebra Classic 5*).

Maiores detalhes sobre o GeoGebra podem ser verificados no apêndice A em que se encontra o Produto Educacional exigido no Mestrado Profissional do PPGECM/UEPB.

4 CÁLCULO DIFERENCIAL

4.1 Algumas reflexões acerca do ensino do Cálculo

Refletir sobre o que será ensinado e qual o objetivo do conteúdo a ser explanado são fatores que merecem constante atenção e, nesse sentido, encontra-se em Onuchic e Huanca (2013) uma reflexão sobre o desenvolvimento profissional do professor de Matemática no Brasil, e quando a primeira autora é submetida à pergunta "Como você entende a afirmação de que o professor de Matemática, egresso de um curso de Licenciatura em Matemática, deve ter uma sólida formação de Matemática?", responde sempre assim: "Esse professor deve sim ter uma formação sólida em Matemática, e vejo essa afirmação refletida nas seguintes palavras: *ele deve conhecer bem o que ensina e deve saber justificar o que faz*". Ainda de acordo com esses autores:

> (...) essa pergunta está relacionada à formação inicial do professor desenvolvida na licenciatura, nas disciplinas oferecidas aos alunos na graduação, as quais, muitas vezes, são vistas como desligadas daquelas disciplinas que eles, professores, vão trabalhar em suas salas de aula. (ONUCHIC; HUANCA, 2013, p. 310).

Vieira (2013) diz que, nos dias atuais, o ensino da Matemática parece estar dividido entre a conceituação, manipulação e aplicação. Para ele, na conceituação, o professor apresenta as definições, os Axiomas, os Teoremas e seus Corolários por meio de fórmulas; na manipulação, tais conceitos são utilizados nos exercícios; e na aplicação, se pratica o conhecimento teórico em algumas situações concretas. Todavia, o que irá ser trabalhado em cada um destes pontos (conceituação, manipulação e aplicação) dependerá do professor, do livro adotado, da instituição, dentre outros fatores.

No âmbito do ensino do Cálculo, refletir sobre a prática da abordagem dos conteúdos em sala de aula requer do professor uma reflexão, também, das principais dificuldades existentes na disciplina e do público alvo a ser direcionado.

Segundo Pagani e Allevato (2014), as dificuldades observadas nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral podem ser traduzidas nos altos índices de reprovação dessas disciplinas e, por isso, propostas pedagógicas têm surgido na tentativa de minimizar as dificuldades encontradas nesse processo de ensino e aprendizagem, tais como a utilização de softwares, o ensino na perspectiva da Modelagem Matemática, o ensino através da Resolução de Problemas, dentre outros.

De acordo com Rezende (2003), houve, na década de 80, um movimento internacional em prol da reforma do ensino de Cálculo conhecido como "*Calculus Reform*" (Cálculo Reformado), cujo elemento deflagrador foi um documento do matemático Peter Lax, que atacava os cursos de Cálculo da época. As características básicas do "*Calculus Reform*", segundo seus precursores, são: o uso de tecnologia, o ensino via a "*Regra dos Três*", mostrar a aplicabilidade do Cálculo através de exemplos reais e com dados referenciados, exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos (suprindo essa falta com o uso do CAS - Sistemas de Computação Algébrica).

Para Barufi (1999), existem dois modelos principais que norteiam as várias propostas didáticas, visando uma maior ou menor proximidade de cada texto em relação a esses paradigmas; o primeiro modelo se constitui na apresentação do Cálculo de forma sistematizada, formal e logicamente organizada, como resultado do trabalho de pensadores, filósofos e matemáticos durante mais de vinte séculos e, neste caso, a sequência temática basicamente é: Números Reais, Funções, Limites, Derivadas e Integrais. Já o segundo modelo é caracterizado por apresentar o Cálculo com uma sequência temática que não obedeça necessariamente à estruturação lógica, mas muito mais ao desenvolvimento do Cálculo, no qual se destaca uma metodologia baseada em problemas importantes e motivadores.

Certamente os livros que se estruturem de acordo com o segundo modelo antes relatado podem contribuir para que ocorra um aprendizado focado na compreensão dos conceitos.

Muitos alunos se questionam sobre o teor do Cálculo, qual a sua utilidade no dia-a-dia, qual a sua importância e se o mesmo contribui para outras áreas de conhecimento. Tentando responder a estas indagações, evidenciou-se que o Cálculo, de uma maneira geral, possui aplicações nas Engenharias, Física, Química, Biologia, Economia, Administração, Medicina, entre outras áreas. As Derivadas, por exemplo, possuem aplicações que visam analisar vibrações de sistemas mecânicos, comportamento de partículas atômicas, crescimento de bactérias, maximização dos lucros de uma empresa, entre outras aplicações. Assim sendo, Vieira (2013) vem reforçar tal fato ao dizer que um dos grandes objetivos dos cursos iniciais de Cálculo é o de oferecer condições de base ao estudo de Equações Diferenciais, as quais servirão de modelos para a resolução de problemas relevantes às áreas de conhecimento supracitadas.

Escher (2011) destaca que inicialmente o Cálculo era introduzido nos cursos de graduação como parte dos conhecimentos básicos para a formação dos engenheiros e, mais tarde, para a formação dos matemáticos. Por outro lado, de acordo com Rezende (2003), o

Cálculo possui características que o torna um elemento de organização, sustentação e criação essencial para a formação do próprio conhecimento matemático e científico:

> Com efeito, sem a construção das ideias básicas do Cálculo, a geometria não passaria do cálculo de áreas e perímetros de regiões poligonais, e de volumes de figuras poliédricas, e a teoria dos números se restringiria ao domínio dos racionais. O Cálculo, historicamente, tomou emprestado da geometria e da aritmética, e também da física, alguns conceitos e problemas fundamentais, e desenvolveu novos instrumentos para solucioná-los, retornando sempre aos "conceitos envolvidos", em nível superior de significação. O conjunto dos números reais e o conceito de função, junto com a geometria analítica, foram, sem dúvida, algumas das maiores reinvenções do Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 70).

Embora a importância de tais conteúdos seja notável, o que ainda acontece na prática é um ensino pautado na mecanização, em que os assuntos são abordados por meio de técnicas e não por meio de contextualizações que priorizem um aprendizado consistente. Assim, é factível que a preocupação recai sobre o ensino do Cálculo e sobre a prática pedagógica do professor e, neste sentido, Reis (2001) reforça que:

> (...) a prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver. (REIS, 2001, p. 23).

É bem verdade que o procedimento de repetição tem sua importância no processo de ensino-aprendizagem, porém, uma pequena parcela de alunos é que consegue absorver a essência dos conteúdos abordados. A fim de minimizar tal quadro, faz-se necessário que o professor primeiro identifique qual grupo irá atingir (alunos de Matemática, Biologia, Física, Administração, Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, entre outros) para que haja uma relação entre as aplicações do Cálculo com a atuação profissional futura daquele aluno, pois assim fica mais provável que o interesse do mesmo aumente e que dúvidas ou questionamentos que possam surgir sobre o uso de tal conteúdo sejam mais facilmente compreendidos.

No intuito de procurar meios para trabalhar conteúdos em pessoas sem segurança cognitiva, Vieira (2013) reflete sobre como esses meios poderiam afetar o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, encontrando os seguintes raciocínios:

> (...) "se eu não sei trigonometria, fujo da trigonometria, não ensino trigonometria ou, se ensino, não sei o que é relevante e o que deve ser aprofundado; se apenas entendo

> a divisão de dois valores como um número Racional, não chamo atenção sobre taxas de variação, e meus alunos não enxergam uma razão entre duas grandezas como uma relação variacional entre elas; se não tenho uma visão sólida da Matemática e de suas aplicações, não sei como contextualizar um tópico e, por outro lado, evito alguns assuntos que não admitem contextualização, como alguns aspectos da álgebra, mesmo sendo fundamentais na resolução de problemas". (VIEIRA, 2013, p. 28).

Vários são os questionamentos que surgem acerca dos fatores que influenciam na compreensão dos conceitos de Limite, Derivada e Integral, fatores esses que vão desde as deficiências em conteúdos da matemática básica até as metodologias utilizadas nas aulas de Cálculo. Mas, para que o aluno consiga apreender o significado e atribuir sentido aos conceitos ou ideias matemáticas é necessária uma metodologia ou estratégia para fixar um conceito de maneira mais coerente com a definição formal, substituindo (ou evitando) o caminho tradicional, em que as definições precedem exemplos e problemas, por um caminho no qual situações-problemas fossem lançadas antes das definições, de modo que a aplicabilidade dos conceitos fosse evidenciada. Com relação à Derivada, objeto de estudo para este trabalho, uma das dificuldades está em relacionar a parte algébrica com a gráfica.

Nas aulas de Cálculo, muitas vezes a compreensão conceitual é colocada em um segundo plano já que a prioridade será o cálculo de limites complicados, as regras de derivação e as técnicas de integração em cursos introdutórios. Por outro lado, há de se questionar sobre a escolha e a utilização de um livro que, na maioria das vezes, obedecem aos seguintes critérios: a formação acadêmica daquele professor, a ementa da disciplina ministrada, o tempo disponível, o público alvo do curso, as exigências institucionais, entre outros. Além disso, muitos professores utilizam mais de um livro e textos de apoio.

Rezende (2003) acredita que o uso de regras não permite uma construção significativa do conteúdo de Derivada:

> Calcular exaustivamente derivadas de funções através das regras usuais de derivação não leva o aluno a construir efetivamente o significado desta operação. Interpretá-la tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza – esse foi inclusive, o grande problema perseguido inicialmente pelos filósofos escolásticos. (REZENDE, 2003, p. 350).

Durante a realização deste trabalho, constatamos que várias pesquisas se direcionam ao ensino do Cálculo e muitas delas mostram que o modo como esta disciplina é ensinada apresenta sérias inadequações que não garantem um aprendizado significativo. Portanto, existe uma grande necessidade de mudanças tanto naquele ensino tradicional que prioriza repetições quanto na elaboração de propostas metodológicas que modifiquem a prática em sala de aula. É preciso relacionar os conceitos de Cálculo com situações da realidade, para que esses conceitos sejam percebidos e interpretados de uma forma melhor. É preciso que o aluno tenha o principal papel no processo de ensino e aprendizagem, presenciando todas as etapas do processo e compreendendo a construção dos conceitos, em que a utilização de softwares surge como importante aliado.

Assim sendo, uma das maiores preocupações em trabalhos dessa natureza está associada às contribuições para a formação de um professor que reformule ou repense sua prática pedagógica, sendo flexível às novas abordagens e assumindo a posição de mediador em sala de aula.

4.2 A abordagem do conceito de Derivada em alguns livros

O livro foi e ainda continua sendo um importante instrumento que auxilia na condução de um determinado conteúdo, pois serve para nortear o andamento das aulas seja no ensino básico ou no ensino superior. Porém, uma preocupação surge quando alguns professores os utilizam como ferramentas únicas para suas aulas, pois cria-se uma dependência daquele livro que, muitas vezes, apresenta uma abordagem técnica e rigorosa que pode dificultar o aprendizado do aluno. Assim sendo, para este trabalho se faz necessário uma breve análise acerca de alguns livros (os mais procurados) de Cálculo que existem na Biblioteca Central da UEPB:

1. **Cálculo, Volume I (James Stewart, 2010) -** Este livro possui uma estrutura baseada em gráficos e cores, utiliza ícones para indicar a utilização de softwares (CAS - Sistema Algébrico Computacional) ou calculadoras em determinados exercícios, além de apresentar aplicações em outras áreas de conhecimento. O CAS (*computer algebra system*) ou Sistemas de Computação Algébrica são programas que permitem cálculos matemáticos com expressões algébricas ou simbólicas.

No âmbito das Derivadas, o livro apresenta exemplos e exercícios que exploram o significado da derivada em vários contextos, como em problemas de Otimização. No capítulo 3, intitulado *Regras de Derivação*, o autor solicita que os alunos expliquem o significado de algumas derivadas calculadas em situações aplicadas e, no capítulo 4 (*Aplicações da Derivação*), o uso das tecnologias gráficas se faz presente para ressaltar a interação entre o cálculo e as calculadoras, e a análise das famílias de curvas.

Em síntese, é um livro que apresenta exercícios com dificuldade progressiva, em que é exigido primeiro o treinamento diante de técnicas até se chegar a problemas desafiadores (*Problemas Quentes*, conforme designado pelo próprio autor) envolvendo demonstrações e aplicações.

2. **O Cálculo com Geometria Analítica, Volume I (Louis Leithold, 1994) -** No capítulo 3 intitulado *A Derivada e a Derivação*, o autor introduz o conteúdo a partir de uma interpretação geométrica sobre a inclinação de uma reta tangente a uma curva; adiante, o autor interpreta a derivada como uma taxa de variação, mostrando sua importância em outras áreas de conhecimento. Num primeiro momento, percebeu-se que a abordagem feita pelo autor, primando um enfoque geométrico seguido de exemplos simples e bastante didáticos, revela uma forma que estimula o aluno até chegar na definição formal.

Após destacar algumas regras de derivação (ou *Teoremas sobre derivação de funções algébricas*, conforme se intitula a seção 3.3), o livro segue com a interpretação da Derivada dentro do contexto da Física, com relação à *taxa de variação instantânea de f em x*. A partir de então, segue outros exemplos no âmbito da Engenharia Elétrica e da Economia, seguidos de exercícios contextualizados.

Já o capítulo 4 dedica-se às aplicações de derivadas e intitula-se *Valores extremos das funções, técnicas de construção de gráficos e a diferencial*. Nele, o autor explora problemas relacionados a máximos e mínimos, e esboços de curvas.

Em síntese, trata-se de um livro com uma linguagem simples e que apresenta, como uma das principais características, uma estrutura com muitos exemplos e bastantes exercícios nos finais das seções e capítulos.

3. **Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1 (Earl W. Swokowski, 1994) -** Algo que merece atenção nesse livro é o primeiro capítulo intitulado *Revisão Pré-Cálculo*, subdividido nas seções sobre *Álgebra*, *Funções* e *Trigonometria.* No capítulo 3 (*A Derivada*), as derivadas são apresentadas simultaneamente a partir de interpretações como coeficiente angular da tangente e como taxa de variação de uma função; já no capítulo 4 (*Aplicações da Derivada*), há uma importante seção chamada de *Resumo dos Métodos Gráficos,* a qual inclui uma lista de passos para esboçar o gráfico de uma função.

4. **Cálculo A - Funções, limite, derivação e integração (Flemming e Gonçalves, 2006) -** Esse livro é de autoria brasileira e tem sido muito procurado pelos alunos da UEPB.

Trazendo uma abordagem teórica resumida, com uma linguagem mais clara, seguida de exemplos e simples exercícios, o livro *Cálculo A* tem como principal objetivo abordar os conteúdos de maneira mais direta.

No capítulo 4, intitulado *Derivada*, as autoras iniciam com uma abordagem geométrica (em que explora a reta tangente) e outra abordagem no contexto da Física (explorando os temas sobre velocidade e aceleração); já no capítulo 5, intitulado *Aplicações da Derivada*, há um destaque para a Derivada como taxa de variação, a partir da qual alguns problemas de diversas áreas podem ser resolvidos. De maneira geral, as definições, propriedades e teoremas são apresentados de maneira clara e, muitas vezes, seguidos de representações geométricas.

5. **Um Curso de Cálculo, Volume 1 (Hamilton Luiz Guidorizzi, 2008) -** Esse livro, assim como o livro de *Cálculo A*, também é de autoria brasileira. Nele, os conteúdos abordados tendem a vir acompanhados por uma motivação ou por análises geométricas ou físicas, em que as demonstrações de alguns teoremas se encontram nos apêndices ou no final das seções. Apresenta uma grande quantidade de exemplos e exercícios, com pouca ênfase em problemas contextualizados, fazendo com que, muito provavelmente, seja um dos motivos pelo qual o mesmo seja pouco procurado.

6. **Cálculo, Volume 1 (George B. Thomas Jr., 2009) -** Nessa edição, foram reelaborados exercícios presentes em edições anteriores relativos a tópicos mais complexos. No final das seções, os exercícios foram agrupados por tópicos, indo de problemas focados em repetição até situações aplicadas. No início do capítulo 3, intitulado *Derivação,* existe um pequeno resumo que motiva os estudantes para o novo conteúdo a ser abordado, em que destaca que a derivada é usada para calcular velocidade e aceleração, para estimar a taxa de disseminação de uma doença, para estabelecer níveis de produção mais eficientes, entre outras aplicações; já o capítulo 4 versa sobre *Aplicação das Derivadas.*

Em resumo, esse livro apresenta uma linguagem fácil com exemplos fáceis num primeiro momento, em que todas as seções trazem exercícios que exigem o uso de tecnologia, e sendo reforçado com aplicações em problemas do mundo real.

Após essa breve análise de alguns livros, podemos afirmar que os conteúdos são normalmente abordados de maneira algébrica e poucas vezes os autores procuram uma contextualização para que esses conteúdos sejam explorados. Além disso, a definição de

Derivada como o limite da razão incremental se mostra muito importante nos livros, já que são utilizadas para o desenvolvimento de muitas propriedades da Derivada.

Contudo, a proposta desta pesquisa não é classificar os livros como bons ou ruins e nem induzir o leitor à escolha do livro "x" ou "y". Trata-se de um trabalho que busca refletir e compreender quais os fatores que podem influenciar nos problemas enfrentados na compreensão do Cálculo e se esses fatores podem estar ligados ou não à escolha do livro.

4.3 As origens do Cálculo

A maior realização da matemática do século XVII foi a invenção do Cálculo e isso deve-se a Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Ao contrário do que se imagina, o surgimento do Cálculo Integral antecedeu o do Cálculo Diferencial: enquanto a integração originou-se em processos somatórios ligados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos, a diferenciação (criada mais tarde) originou-se a partir de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Porém, com o passar do tempo, verificou-se que ambas, integração e diferenciação, relacionam-se entre si, e que uma é inversa da outra.

Segundo Eves (2011), a diferenciação surgiu a partir de problemas relativos ao traçado a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos e mínimos de funções, considerações essas que remontam aos gregos antigos. No entanto, a primeira manifestação realmente clara do método diferencial foi exposta no ano de 1629 em algumas ideias de Fermat.

Os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo comum, fato esse observado por Kepler, o qual Fermat (1601 - 1665) transformou num processo para determinar esses pontos de máximo ou de mínimo:

> Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se e é muito pequeno, então o valor de $f(x - e)$ é quase igual ao de $f(x)$. Portanto, pode-se experimentar fazer $f(x - e) = f(x)$ e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo ou um mínimo. (EVES, 2011, p. 429).

Note que o processo de Fermat equivale a impor que a derivada de $f(x)$ em x seja nula:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

Normalmente, esse é o método de se acharem máximos e mínimos de uma função *f(x)*, às vezes referidos nos textos elementares de cálculo como *método de Fermat.* No entanto, o método de Fermat não distinguia entre valor máximo e mínimo; ademais, Fermat ignorava que a condição de a derivada de uma função se anular não seria suficiente para se ter um máximo ou mínimo comum, mas seria apenas necessária.

Ainda de acordo com Eves (2011), os predecessores imediatos de Isaac Newton na Inglaterra foram Isaac Barrow (1630 - 1677) e John Wallis (1616 - 1703). Para esse, as contribuições ao Cálculo situam-se na teoria da integração; já para aquele, as contribuições mais importantes talvez sejam aquelas ligadas à diferenciação - de maneira geral, acredita-se que Barrow foi o primeiro a perceber que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra (Teorema Fundamental do Cálculo). No entanto, as contribuições de Newton e Leibniz (que trabalharam de maneira independente) ao Cálculo dizem respeito à criação de um simbolismo com um conjunto sistemático de regras analíticas formais, ou seja, à criação de um cálculo manipulável. Por isso, a criação do Cálculo, em geral, é atribuída a eles.

À Isaac Newton é creditado o fato de ter inventado o <u>método dos fluxos</u>, como ele chamava o atual <u>Cálculo Diferencial</u>:

> Seu *Method of Fluxions*, embora escrito em 1671, só foi publicado em 1736. Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de *fluente* (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de *fluxo* do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por *y*, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. Em notação moderna esse fluxo equivale a *dy/dt*, onde *t* representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. (EVES, 2011, p. 439).

A partir do método dos fluxos, Newton determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade de curvas, além de aplicações em quadraturas e retificações de curvas.

Ainda segundo Eves (2011), foi Leibniz quem usou pela primeira vez, em 1675, o símbolo de integral (*S* alongado) derivado da primeira letra da palavra latina *summa*, que quer dizer soma (para indicar uma soma de indivisíveis). Em seguida, Leibniz já escrevia diferenciais e derivadas da mesma forma como hoje são concebidas, além de escrever $\int x\, dy$ e $\int y\, dx$ para representar as integrais:

> Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial só apareceu em 1684. Nele se define *dx* como um intervalo finito arbitrário e *dy* pela proporção $dy : dx = y$: subtangente. (EVES, 2011, p. 440).

De acordo com Boyer (1974), houve no ano de 1684 a primeira exposição do Cálculo Diferencial publicada por Leibniz, que se intitulava *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais):

> Aqui Leibniz deu as fórmulas $dxy = x\,dy + y\,dx$, $d(x / y) = (y\,dx - x\,dy)/y^2$ e $dx^n = nx^{n-1}\,dx$ para produtos, quocientes e potências (ou raízes) juntamente com aplicações geométricas. Essas fórmulas eram obtidas desprezando infinitésimos de ordem superior. Se por exemplo as menores diferenças em x e y são dx e dy respectivamente, então dxy ou a menor diferença em xy é $(x + dx)\,(y + dy) - xy$. Como dx e dy são infinitamente pequenos o termo $dxdy$ é infinitamente pequeno e pode ser desprezado, dando o resultado $dxy = xdy + ydx$. (BOYER, 1974, p. 296).

Segundo Brandemberg (2017), embora caibam a Newton e Leibniz a invenção do Cálculo, suas abordagens são bem diferentes tanto quanto à forma quanto às principais influências: Newton apresenta uma visão cinemática do Cálculo em que a derivada (fluxão) é analisada como uma taxa de variação em função do tempo; já Leibniz considerava a variação muito pequena e em sequência de x e y, em que dx e dy seriam as variações entre valores consecutivos dessa sequência.

Para Reis (2001), houve uma contribuição fundamental de Fermat para o desenvolvimento do Cálculo e, por isso, o mesmo foi saudado por Laplace (1749 - 1827) como o verdadeiro inventor do Cálculo; além da contribuição de Barrow. No entanto, Newton e Leibniz são considerados os maiores responsáveis pelo desenvolvimento do Cálculo devido aos métodos de derivação e, principalmente, devido aos resultados (como o Teorema Fundamental do Cálculo).

Neste sentido, Grattan-Guiness (1997, apud REIS, 2001) considera que :

> Estes dois matemáticos primeiramente perceberam que a finalidade do Cálculo era encontrar novas funções ou relações das variáveis de uma dada função ou relação: $df(x) / dx$, ou algo análogo, para diferenciação e a função integral $\int f(x)\,dx$, *para integração*. (Grattan-Guiness 1997, p. 70 apud REIS, 2001, p. 54).

Neste ponto, há de se destacar o que diz Rezende (2003) a respeito dos inventores do Cálculo:

> Em verdade, não há quem mereça esse título - o de inventor do Cálculo Diferencial e Integral. Nem Newton, nem Leibniz, e muito menos qualquer outro matemático anterior ou posterior a esses dois grandes matemáticos. Nem mesmo Torricelli, Fermat e Barrow que anteciparam muitos procedimentos e resultados do Cálculo, ou mesmo Cauchy, que foi o primeiro a tornar efetivamente os conceitos de derivada e de integral conceitos básicos do Cálculo, fundamentando estes apenas no conceito de limite e de número real, mereceriam tal título. O Cálculo Diferencial e Integral foi uma construção coletiva em que cada um deles deu sua valiosa contribuição, sendo Newton e Leibniz, certamente, uns de seus maiores contribuidores. (REZENDE, 2003, p. 187 - 188).

Assim sendo, um dos propósitos deste trabalho é, também, dar uma contribuição para as diversas maneiras como o Cálculo é abordado em sala de aula, objetivando uma aprendizagem significativa nos alunos.

Grattan-Guiness (1970, apud REIS, 2001) diz que o principal motivo pelo sucesso da "tradição leibniziana" deve-se à qualidade de seus sucessores: Jacques Bernoulli (1654 - 1705), Jean Bernoulli (1667 - 1748) e, principalmente, por Euler (1707 - 1783).

Corroborando com este fato, assim diz Boyer (1974):

> Pode ser dito com justiça que Euler fez pela análise infinita de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela geometria de Eudoxo e Teaetetus, ou que Viète fizera pela álgebra de al-Khowarizmi e Cardano. Euler tomou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da matemática que a partir daí é chamado "análise" - o estudo de processos infinitos. (BOYER, 1974, p. 326 - 327).

De acordo com Reis (2001), foi no final do século XVIII que Lagrange (1736 - 1813) tentou oferecer uma abordagem rigorosa ao Cálculo; assim, sendo responsável pela "tradição" das séries de Taylor e as "tradições" de limites e diferenciais, as quais dividiam a preferência entre os autores de livros da época, tais como: Lacroix (1765 - 1843) e Carnot (1753 - 1823).

Por outro lado, Escher (2011) diz que embora haja um maior conjunto de resultados propostos em relação ao Cálculo durante o século XVII, existe também influências de outros matemáticos do século XIX, como Dedekind (1831 - 1916), e do século XX, como Shannon (1916 - 2001). Porém, o foco deste trabalho não é aprofundar o leitor no âmbito histórico do desenvolvimento do Cálculo, mas apenas situá-lo nas principais evidências históricas que marcaram esse processo de desenvolvimento.

4.4 Diferenciação

De acordo com Ryan (2011), a diferenciação é o processo de encontrar a Derivada de uma função; já a Derivada é um termo do Cálculo que serve para dar uma ideia de algo da álgebra, ou seja, a inclinação. Em outras palavras, fazer a diferenciação significa encontrar a inclinação.

A sequência didática da maioria dos cursos de Cálculo é baseada no ensino da Derivada após a abordagem do conceito de Limite. Ou seja, é utilizada a ideia de reta tangente ao gráfico de uma função para introduzir a Derivada e, em seguida, o cálculo de Derivadas a partir da sua definição como um Limite, as regras de derivação, algumas aplicações de derivada tais como: velocidade, aceleração, taxas de variação, comportamento de funções, entre outros.

Em outras palavras, o conceito de Derivada pode ser abordado por meio de três vertentes: a *Derivada como inclinação da reta tangente a uma dada curva em um ponto*, a *Derivada como limite*, e a *Derivada como taxa de variação*.

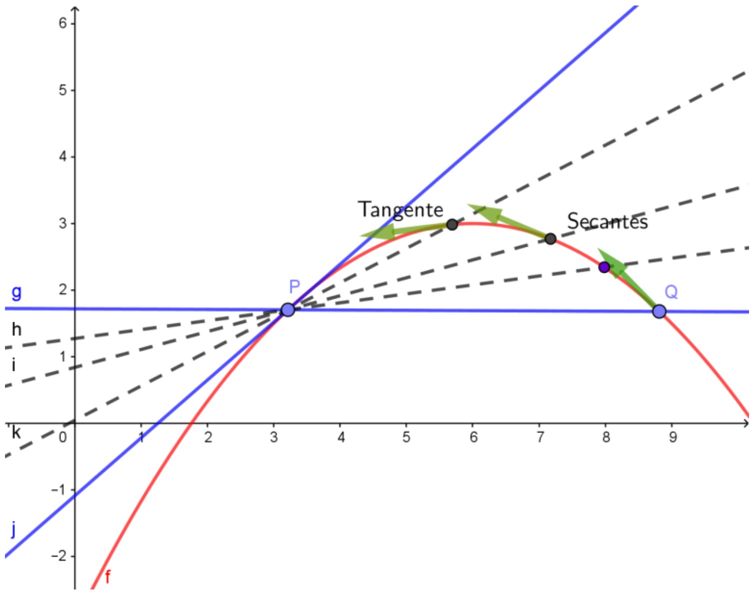
A importância da derivação está ligada ao processo que se destina a analisar as variações no comportamento de um conjunto de números; no entanto, as funções também permitem analisar tais comportamentos, pois elas foram criadas para refletir o comportamento de fenômenos físicos ou estado de valores. A diferenciação é o processo de encontrar a Derivada que, por sua vez, é o resultado da aplicação do operador derivada na função derivável.

A síntese que se seguirá adiante acerca do conceito da Derivada foi elaborada com base em alguns livros de Cálculo de autores renomados no âmbito do Cálculo e bastante utilizados no ensino superior, a saber: Ávila (2012), Flemming (2006), Thomas (2010) e Stewart (2011).

4.3.1 Retas Tangentes

Para definir "tangência" para curvas em geral, é preciso um método dinâmico, levando em conta o comportamento das secantes que passam por um ponto P qualquer e pontos próximos (ponto Q, por exemplo), de modo que este ponto próximo se mova em direção a P ao longo da curva, conforme mostrado na Figura 6.

Figura 6 - Método dinâmico para a tangência



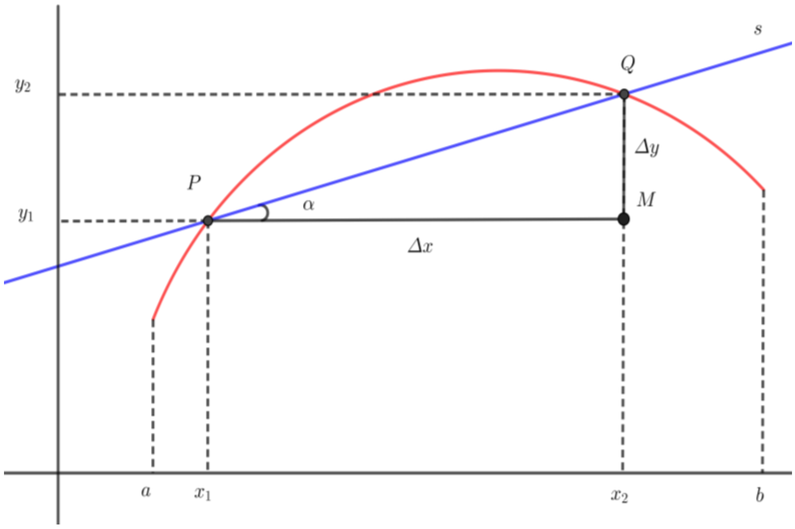
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A partir da figura acima, fica evidenciado que a tangente a uma curva no ponto *P* é a reta através de *P* cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando *Q* tende a *P*. Perceba que mantendo *P* fixo e movendo *Q* sobre a curva em direção a *P*, a inclinação da reta secante irá variar, de modo que, à medida que *Q* vai se aproximando cada vez mais de *P*, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante.

Outra maneira de se analisar a reta tangente é a seguinte: seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a,b) e suponha que os pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pertençam à curva $y = f(x)$. Agora, considerando *s* uma reta secante que passa por *P* e *Q*, e considerando o triângulo retângulo *PMQ* definido de acordo com a Figura 7, tem-se a inclinação da reta *s* (ou coeficiente angular de *s*) dada por:

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Figura 7 - Inclinação da reta secante *s*



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Definição 1: *Chama-se reta tangente a curva no ponto P(x_1, y_1) à reta que passa por P e cujo coeficiente angular é o número m, também chamado declive da curva no ponto P, dado por:*

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$, pode-se escrever o limite da seguinte forma:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

A partir de então, conhecendo-se a inclinação *m* da reta tangente à curva no ponto *P*, é possível encontrar a equação da reta tangente à curva em *P*, já que a equação da reta é dada na forma:

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

4.3.2 Derivada de uma função em um ponto

A expressão

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

é chamada, de acordo com o Thomas (2010), de *razão incremental ou diferenças dividida de f em* x_0 *com incremento h*. Se esta razão incremental possuir um limite quando *h* tende a zero, então esse limite é denominado *derivada de f em* x_0. Essa razão incremental pode ser interpretada como um coeficiente angular da secante e, nesse caso, a derivada dá o coeficiente angular da tangente e da curva no ponto onde $x = x_0$. Se a razão incremental for interpretada como uma taxa média de variação, então a derivada dá a taxa de variação da função em relação a *x* no ponto $x = x_0$.

Definição 2: *A derivada de uma função y = f(x) é a função dada por f'(x), tal que seu valor em qualquer* $x \in D(f)$ *é dado por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

se o limite existir.

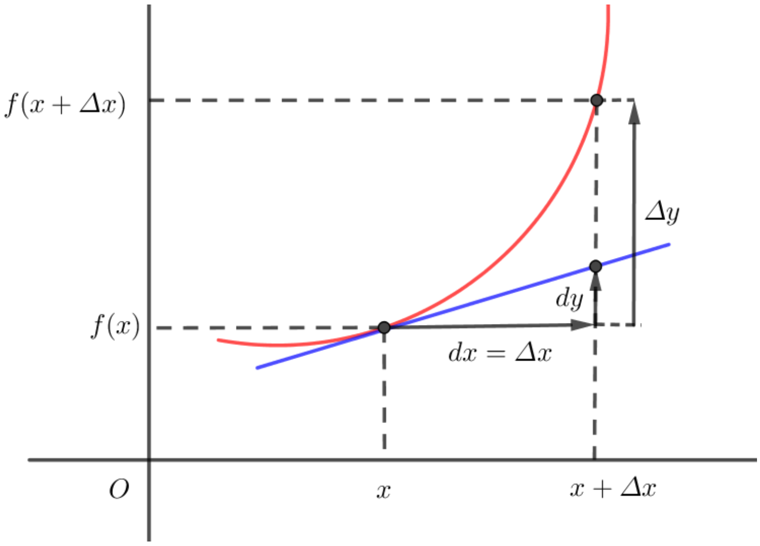
A função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Para indicar a derivada de uma função *y* são usados outros tipos de notação, como por exemplo $\dot{y}$; essa notação é devida ao inglês Isaac Newton (1642 - 1727). Por outro lado, deve-se a Leibniz (1646 - 1716) a seguinte notação *dy/dx*. Para ele, a derivada devia ser vista como o quociente de quantidades infinitamente pequenas *dy* e *dx*. Exemplo:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

Para entender a notação de Leibniz, observe a Figura 8 abaixo, em que a cada variação da variável *x*, ocorrerá a variação de *y*.

Figura 8 - Representação da razão incremental



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Ou seja, incrementando Δx a *x*, a variável *y* também será incrementada, de tal forma que

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

e a razão incremental será dada por:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-(x)} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se $\Delta x \to 0$, então Δy também tenderá a zero, de modo que a razão incremental se aproxime da derivada. Em outras palavras, a derivada de *f'(x)* é o quociente entre *dy* e *dx*.

4.3.3 Derivada como taxa de variação

Existe uma maneira bem comum de analisar a derivada a partir da ideia de velocidade. Para isso, a cinemática vem à tona com o movimento de um ponto material cuja equação horária *s* = *s(t)* descreve a posição de um móvel ao longo de uma trajetória como função do tempo *t*. É sabido que a velocidade média é dada por:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

Porém, para saber a velocidade num dado instante *t*, devem-se considerar intervalos de tempo cada vez menores, de modo que as velocidades médias encontradas nesses intervalos deem informações mais precisas do que acontece no instante *t*. Dessa maneira, surge o conceito de velocidade instantânea, $v = v(t)$ no instante *t* como o limite da razão incremental que dá a velocidade média com $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A velocidade média e a velocidade instantânea são, respectivamente, taxa de variação média e taxa de variação instantânea, ambas da função espacial $s = s(t)$.

O conceito de taxa se aplica às funções de um modo geral. Assim, a *taxa de variação média* da função *f* no intervalo $(x, x + \Delta x)$ é dada por

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

No entanto, a taxa de variação num ponto *x* é a taxa de variação instantânea, ou seja, a derivada dada por $f'(x)$.

Ao final dessa breve abordagem sobre o Cálculo Diferencial, concluimos uma das etapas do fluxograma de Romberg (1992), ou seja, relacionamos nossa pesquisa com o trabalho de outros autores. O próximo passo será a elaboração do Modelo Modificado proposto por Onuchic e Noguti (2014) e a elaboração da Pergunta da Pesquisa para, só assim, iniciarmos o segundo bloco de Romberg.

5 A PESQUISA EM SEU CONTEXTO: DESCRIÇÃO

5.1. O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa

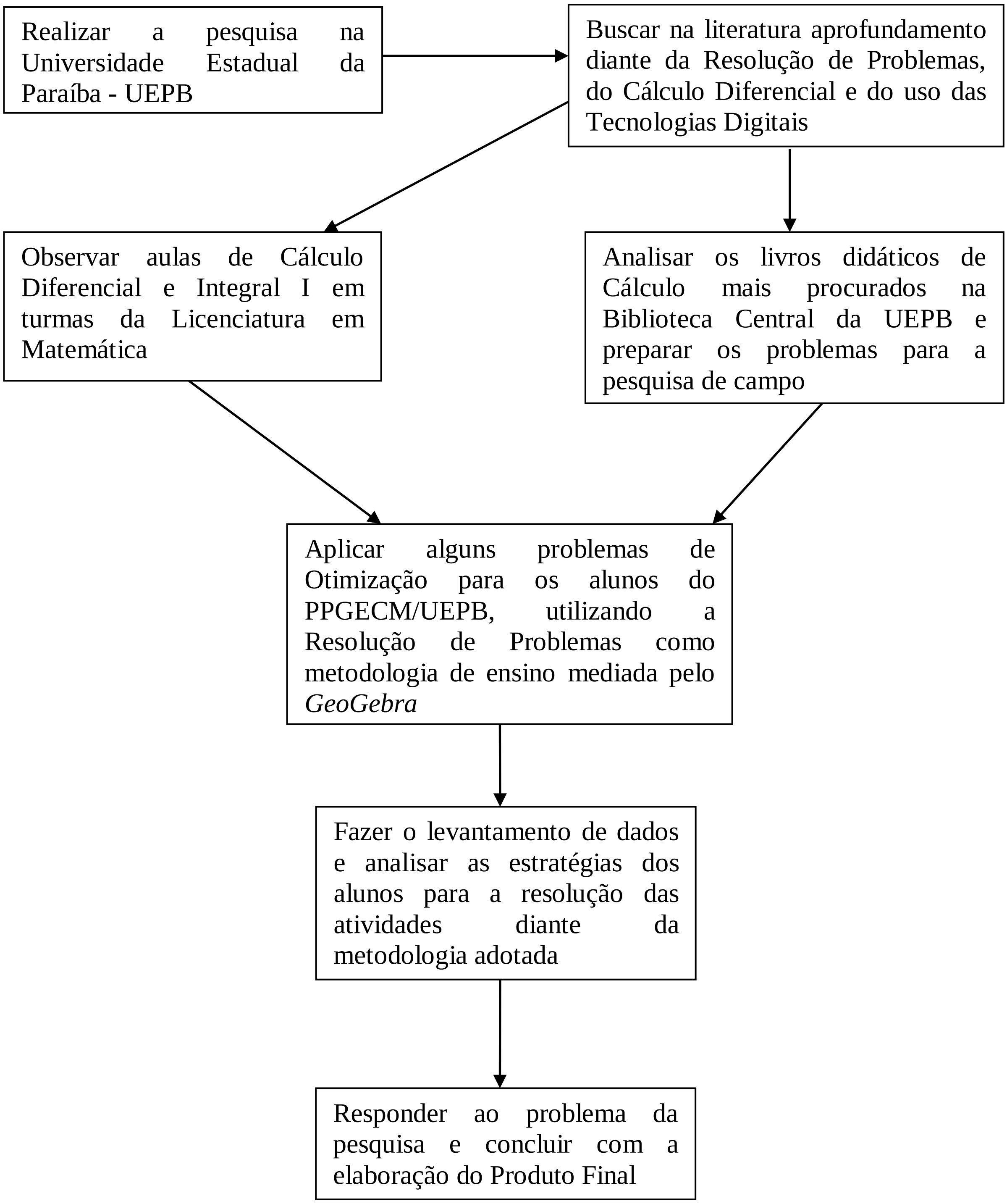
No capítulo 2, dei início à produção do primeiro bloco de Romberg. Primeiramente, foi identificado o fenômeno de interesse diante da aprendizagem do Cálculo. Em seguida, elaborei o Modelo Preliminar que serviu de mapa para o andamento da pesquisa, estando sujeito às modificações que, de fato, ocorreram. Feito isso, adentrei na literatura para relacionar a pesquisa com a ideia de outros pesquisadores, o que permitiu esclarecer dúvidas, modificar algumas variáveis e acrescentar novos parâmetros, finalizando, assim, o primeiro bloco de Romberg.

A busca de referência em outros trabalhos nos permitiu delinear as temáticas desenvolvidas nos capítulos 3 e 4, sintetizando os principais pontos que tratassem da Resolução de Problemas, do Ensino do Cálculo e do uso das Tecnologias Digitais (em especial o uso dos computadores e do software GeoGebra), os quais ajudaram na elaboração de um modelo mais aprimorado com relação ao modelo preliminar. Percebemos que há uma quantidade extremamente grande de trabalhos envolvendo, em especial, a informática e o Cálculo, tanto no ensino quanto na aprendizagem, o que fica evidente na abordagem de Barbosa (2009):

> Apesar da quantidade de pesquisas envolvendo a informática no ensino e na aprendizagem do Cálculo, com orientações próprias em boa parte de suas características, tais como, referenciais teóricos, objetivos, metodologias, perfil da população pesquisada, conteúdos específicos abordados e tipos de TIC utilizadas, ainda existem lacunas a serem preenchidas. A utilização das TIC, na sala de aula, foi impulsionada a partir da década de 90, com a popularização de plataformas amigáveis e com aplicações nas diversas áreas do conhecimento e em outros setores da sociedade de modo geral. Atualmente, com a utilização de softwares gratuitos, o acesso a essas tecnologias tem sido menos dispendioso. (BARBOSA, 2009, p. 56).

Assim sendo, com base em questões selecionadas e adaptadas de alguns livros analisados, pretendo trabalhar as Derivadas com alunos da pós-graduação em Matemática, através da Resolução de Problemas mediada pelo GeoGebra. Logo abaixo, segue o Modelo Modificado elaborado:

Figura 9 – Modelo Modificado desta pesquisa



Fonte: Próprio autor, 2019.

Após a realização das três atividades designadas por Romberg (1992) - *a identificação do fenômeno de interesse, a elaboração do modelo preliminar* e *a comparação com os trabalhos de outros pesquisadores* - e da atividade acrescentada por Onuchic e Noguti (2014) - *o modelo modificado* - chegamos, finalmente, à pergunta condutora da presente pesquisa:

Quais as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização?

Sendo assim, é preciso investigar as estratégias dos alunos para a resolução das atividades no contexto da metodologia da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra. Isso vai ao encontro do que destaca Almeida, Borba e Gracias (2018), quando dizem que o professor-pesquisador deve buscar compreensão no processo de desenvolvimento das atividades didáticas e não apenas no resultado:

> Podemos, então, dizer que, nesse tipo de pesquisa, atividades pedagógicas são propostas a estudantes de forma que o professor-pesquisador possa "ouvir" de forma detalhada a Matemática desenvolvida por estudantes e, a partir desse "ouvir", elaborar modelos acerca do seu modo de pensar a respeito e lidar com certos conteúdos matemáticos. Tal abordagem metodológica tem sido considerada também em contextos mais específicos onde conteúdos matemáticos são abordados com o uso de tecnologias digitais. (ALMEIDA; BORBA; GRACIAS, 2018, p. 44).

Nesse sentido, o processo da observação se torna essencial para a análise e interpretação das atividades propostas.

5.2 Segundo bloco de Romberg: estratégias e procedimentos da pesquisa

No segundo bloco de Romberg (2007), já é possível traçar os procedimentos metodológicos que darão andamento à pesquisa e, para isso, é preciso ter um olhar crítico diante da pergunta norteadora a fim de elaborar as melhores estratégias para a coleta das evidências. Em outras palavras, a preocupação recai sobre *o que fazer* e *como fazer*, colocando em prática as partes constituintes do modelo modificado para, em seguida, ter um bom embasamento que culmine com a(s) resposta(s) perante a pergunta antes elaborada.

A pesquisa de campo aconteceu com alunos da Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB, campus I, durante dois encontros com duração de quatro horas cada, através de sequências didáticas constituídas de atividades que versavam sobre Derivadas de funções reais com uma variável real, utilizando a Resolução de Problemas mediada pelo GeoGebra para suas soluções. A coleta de dados aconteceu mediante a preparação do pesquisador, registro das atividades feitas pelos alunos, anotações feitas pelo pesquisador, gravações de áudios e um questionário aplicado para a avaliação dos alunos diante da metodologia aplicada.

Em outras palavras, a estratégia geral (*o que fazer*) diz respeito à preparação de alguns problemas sobre Cálculo, adaptando-os à resolução com o GeoGebra. Já o procedimento geral (*como fazer*) refere-se à aplicação desses problemas. Todavia, tanto a estratégia geral quanto o procedimento geral, precisam ser desdobrados em estratégias auxiliares e procedimentos auxiliares sem perder de vista a pergunta da pesquisa, conforme abordados abaixo.

Quadro 3 – Estratégias e Procedimentos auxiliares.

ESTRATÉGIAS AUXILIARES	PROCEDIMENTOS AUXILIARES
E1: Preparar o pesquisador através da observação de algumas aulas de Cálculo;	**P1:** A **preparação** do pesquisador via observação de algumas aulas de Cálculo na UEPB, campus I;
E2: Adaptar e aplicar alguns problemas de Cálculo retirados dos livros	**P2:** Após a **adaptação** de alguns problemas encontrados em livros para resolução no GeoGebra, **aplicá-los** aos participantes da pesquisa;
E3: Registrar as resoluções feitas pelos alunos;	**P3:** O **registro** das resoluções feitas pelos alunos através da cópia de suas soluções;
E4: Registrar as construções feitas no GeoGebra e as soluções analíticas;	**P4:** O **registro** das construções no GeoGebra e das soluções analíticas através de fotografias;
E5: Anotar os principais pontos durante a realização das atividades;	**P5: Anotações** dos pontos mais importantes percebidos pelo pesquisador durante a realização das atividades;
E6: Gravar áudios durante as atividades;	**P6: Gravações** de áudios que permitam uma análise maior dos dados obtidos;
E7: Aplicar um questionário para avaliação dos alunos;	**P7: Aplicação** de um questionário visando a avaliação dos alunos;

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

P1 em ação – Preparação do pesquisador

Foram necessários registros a partir da observação de algumas aulas de Cálculo para a minha preparação. Primeiramente, observei algumas aulas de Cálculo na UEPB, campus I, durante um semestre (2018.1) em duas turmas diferentes da Licenciatura em Matemática, ministradas por professores diferentes nos turnos da manhã e da noite, o que permitiu fazer algumas análises importantes. Vale destacar que ambos se mostraram bastante solícitos e, prontamente, permitiram que suas aulas fossem observadas por mim, que utilizei apenas caneta e caderno de anotações para os devidos registros.

O professor da turma da manhã, relatou que aconselha os alunos a usarem o livro *Cálculo A - Funções, limite, derivação e integração (Flemming e Gonçalves, 2006),* deixando os alunos livres para a escolha de outros autores. Nas aulas observadas, ele ministrou conteúdos do âmbito das *Aplicações de Derivadas (Máximos e Mínimos, extremos, pontos críticos, Teorema do Valor Médio)*, expondo na lousa definições e vários exemplos simples e bastante didáticos; no entanto, os alunos pouco interagiam e se preocupavam apenas em copiar o que estava exposto no quadro.

Nas aulas seguintes, o professor da manhã sempre recapitulava os conteúdos ministrados anteriormente antes de adentrar nos novos conteúdos *(Critério da derivada 1ª e 2ª para determinação de extremos, ponto de inflexão)*, donde os alunos já estavam mais participativos e interessados, afinal de contas muitas coisas das aulas passadas estavam sendo utilizadas. Além disso, a quantidade de exemplos facilitava o entendimento por parte dos alunos.

Já o professor da turma da noite, que também aconselhava a utilização do *Cálculo A*, relatou que estava alternando entre os conteúdos sobre *Aplicações de Derivadas* e *Técnicas de Integração*, no sentido de ir apresentando a necessidade e interligação que existem entre os assuntos. Em suas aulas, ele utilizou uma quantidade bastante significativa de bons exemplos de fixação seguidos de exercícios propostos, nos quais os alunos (que, também, pouco interagiam) começavam a resolvê-los individualmente.

P2 em ação - Atividades a serem Aplicadas

Após adentrar na fundamentação teórica e depois da análise de alguns livros selecionados (os mais procurados na Biblioteca Central da UEPB), foram definidos alguns problemas a fim de se verificar as dificuldades e possibilidades da metodologia de ensino através da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra.

No entanto, tais atividades foram subdivididas em duas categorias: *atividades 1, 2 e 3,* elaboradas pelo pesquisador e cujo foco está na familiarização dos alunos no ambiente do GeoGebra; e *atividades 4, 5, 6 e 7,* objetivando a compreensão do Cálculo diante da Resolução de Problemas e do GeoGebra, cujos problemas propostos foram adaptados de dois livros bastante conhecidos no currículo do Cálculo dos cursos de Ciências Exatas:

- ***Cálculo – Volume 1*** de James Stewart (2011);
- ***Cálculo – Volume 1*** de George B. Thomas (2010);

Com relação à última categoria (atividades 4, 5, 6 e 7), analisei, a princípio, as características dos exercícios propostos por cada autor relacionados às aplicações das Derivadas, o que permitiu a seleção de alguns problemas essenciais para a investigação. Em seguida, foram inseridas algumas orientações para a utilização do GeoGebra diante dos problemas selecionados, adaptando os exercícios em atividades investigativas condizentes com a perspectiva adotada neste trabalho, conforme poderá ser verificado nas atividades adiante.

Nas duas primeiras atividades, os objetivos relacionam-se com a construção da ideia de Derivadas a partir da reta tangente num ponto, bem como a partir de uma função dada; além disso, pretende-se visualizar a reta tangente sobre a curva a partir da alteração angular da reta. Já na atividade 3, embora um pouco mais trabalhosa, pretende-se construir uma ilustração que permita visualizar o Teorema do Valor Médio.

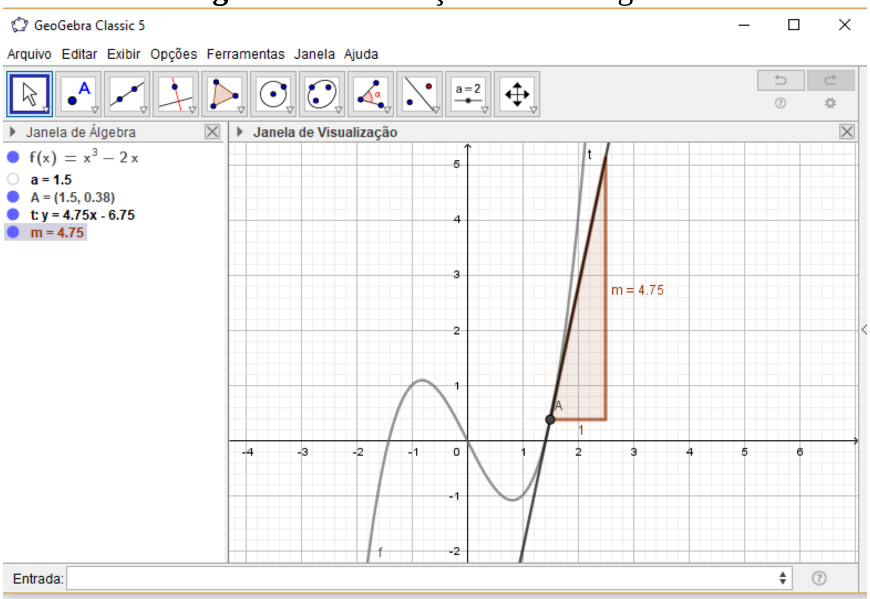
Após destacar os objetivos das atividades propostas, há um roteiro bastante didático para a concretização das atividades, permitindo que os alunos participantes inserissem as funções dadas e todos os parâmetros necessários para a visualização da inclinação da reta tangente e para visualizar o Teorema do Valor Médio. No final de cada atividade, existem figuras para permitir aos alunos o comparativo com os resultados encontrados por eles próprios.

- **<u>Atividade 1</u>: Retas tangentes**

✓ **Roteiro:**

1) Insira a função $f(x) = x^3 - 2x$ e aperte *Enter;*
2) Entre com a abscissa do ponto em $a = 3/2$;
3) Digite agora o ponto sobre o gráfico de f com a abscissa a: $A = (a, f(a))$;
4) Insira t = *Tangente [A,f]* que é a reta tangente de f no ponto a;
5) Por fim, digite m = *Inclinação[t]* que é a inclinação da reta tangente e confira o resultado com a figura abaixo.

Figura 10 - Inclinação da reta tangente



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- <u>**Atividade 2**</u>**: Retas tangentes**

✓ **Roteiro:**

1) Na barra de menu, na 3ª janela (*Exibir*) selecione a opção *Cálculo Simbólico (CAS)* ou pressione *Ctrl+Shift+K*;

2) Insira a função $f(x) = (-x^2/10) + x$ na caixa de entrada. Em seguida, na 1ª linha da janela CAS, digite *f(x)* e perceba que a função aparecerá no campo desta janela;

3) Na próxima linha da janela CAS, digite *f(x)* e em seguida clique na opção 9, para derivar a função; ou, simplesmente, digite a função *f'(x)*;

4) Na caixa de entrada, insira a variável *a = 1* e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-1, 11] com incremento 1;

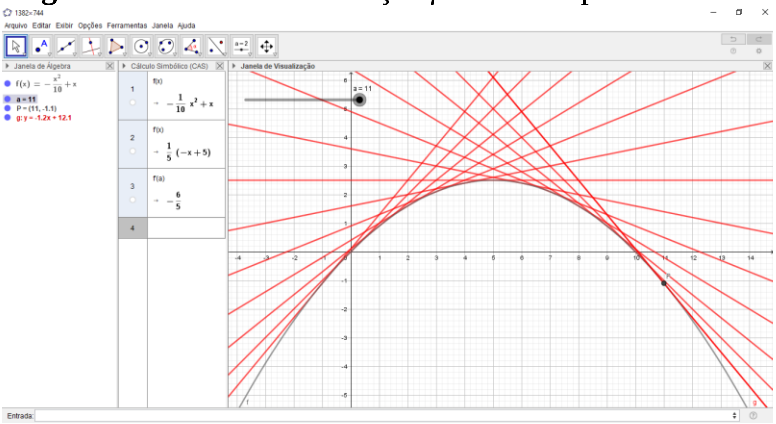
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto *P = (a, f(a))*, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de *f* e clique sobre o ponto *P;*

7) Na terceira linha da janela CAS, insira *f'(a)* para visualizar o valor da derivada no ponto *a;*

8) Clique com o botão direito do mouse sobre a reta tangente e selecione *Habilitar Rastro*. Em seguida, varie o valor de *a* através do controle deslizante e verifique se o resultado obtido coincide com a figura abaixo:

Figura 11 - Derivada da função *f* em vários pontos



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

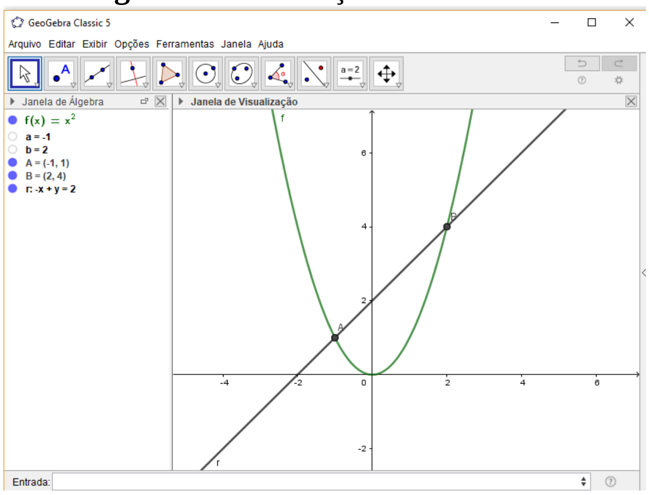
Com isso, percebe-se que com a variação de *a*, ocorre também a variação do coeficiente angular da reta tangente à curva *f* no ponto *P*. Ao mesmo tempo, é possível verificar a variação da reta tangente na janela de álgebra e a variação da derivada na janela CAS.

- **<u>Atividade 3</u>: Teorema do Valor Médio**

✓ **Roteiro:**

1) No campo de entrada, insira a função *f(x) = x^2* e tecle *Enter;*
2) Insira *a = -1* (tecle *Enter*) e *b = 2* (tecle *Enter*);
3) Entre, agora com os seguintes pontos: *A = (a, f(a))* e *B = (b, f(b));*
4) O próximo comando é: *r = Reta[A, B]*. Feito isso, verifique se seu gráfico encontra-se em conformidade com a figura abaixo:

Figura 12 – Ilustração da atividade 3



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

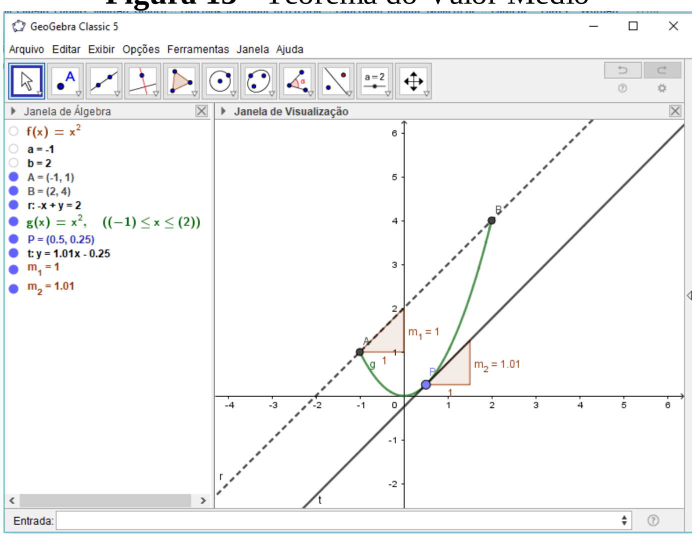
5) Agora, clique com o botão direito do mouse sobre a parábola e desmarque a opção *Exibir Objeto*;

6) Pressione o botão direito do mouse sobre a reta que intercepta A e B, selecione a opção *Propriedades* e escolha (na guia *Estilo*) um tipo de *linha;*

7) No campo de entrada insira: *Função[f,a,b]* (tecle *Enter*), *P=Ponto[f]* (tecle *Enter*), *t=Tangente[P,f]* (tecle *Enter*), *m_1 = Inclinação[r]* (tecle *Enter*), *m_2 = Inclinação[t]* (tecle *Enter*).

8) Arraste o ponto P, confira o resultado obtido com a figura abaixo para as devidas análises:

Figura 13 - Teorema do Valor Médio



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

A partir de então, todas as atividades têm como objetivo construir uma ilustração que permita visualizar a aplicação das Derivadas. Agora, recai a maior preocupação e interesse desta pesquisa, pois a partir dos problemas propostos sobre o Cálculo, pretende-se investigar as formas como os alunos atuam no contexto da Resolução de Problemas, analisando quais as estratégias que os mesmos utilizaram para solucionar os problemas e quais as dificuldades apresentadas diante das Derivadas. De maneira geral, o objetivo é investigar as potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada.

- **Atividade 4: Se 1200cm² de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa (STEWART, 2011, p. 307).**

✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas o material disponível*;*
2) Escreva uma fórmula *V(x)* para o volume da caixa em função da medida *x*;
3) Construa o gráfico no GeoGebra;
4) Na caixa de entrada, insira a variável *a = 1* e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-30, 30] com incremento 5;
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto *P = (a, V(a))*, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;
6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de *V* e clique sobre o ponto *P;*
7) Na terceira linha da janela CAS, insira *V'(a)* para visualizar o valor da derivada no ponto *a;*
8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a ilustração no GeoGebra e relate suas conclusões;

- **Atividade 5: Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 12 x 12cm e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima? (THOMAS, 2010, p. 303).**

✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados*;*

2) Escreva uma fórmula *V(x)* para o volume da caixa em função da medida *x* da aresta da base;

3) Construa o gráfico no GeoGebra;

4) Na caixa de entrada, insira a variável *a = 1* e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-10, 10] com incremento 0.1;

5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto *P = (a, V(a))*, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de *V* e clique sobre o ponto *P;*

7) Na terceira linha da janela CAS, insira *V'(a)* para visualizar o valor da derivada no ponto *a;*

8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a ilustração no GeoGebra e relate suas conclusões;

- **<u>Atividade 6</u>: Um fazendeiro tem 1200m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área? (STEWART, 2011, p. 302).**

  - ✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados. Verifique, também, a possibilidade de obter diferentes áreas do campo retangular;

2) Obtenha a expressão para a área em função de *x*. Para isso, obtenha a expressão para o perímetro em função dos comprimentos *x* e *y*;

3) Construa o gráfico no GeoGebra;

4) Na caixa de entrada, insira a variável *a = 1* e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-50, 1000] com incremento 50;

5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto *P = (a, A(a))*, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de *A* e clique sobre o ponto *P;*

7) Na terceira linha da janela CAS, insira *A'(a)* para visualizar o valor da derivada no ponto *a;*

8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a ilustração no Geogebra e relate suas conclusões;

- **Atividade 7: Sua metalúrgica foi contratada por uma fábrica de papel para projetar e construir um tanque retangular de aço, com base quadrada, sem tampa e com 500cm^3 de capacidade. O tanque será construído soldando-se chapas de aço umas às outras ao longo das bordas. Quais as dimensões para a base e a altura que farão o tanque pesar o mínimo possível? (THOMAS 2010, p. 311 adaptado).**

✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados;
2) Obtenha a expressão para a área em função de x;
3) Construa o gráfico no GeoGebra;
4) Na caixa de entrada, insira a variável $a = 1$ e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-15, 15] com incremento 1;
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto $P = (a, A(a))$, em que a cada variação de a ocorre variação na posição de P sobre a curva;
6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de A e clique sobre o ponto P;
7) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a ilustração no GeoGebra e relate suas conclusões;

P3 em ação - Registro das resoluções feitas pelos alunos

Para a realização da pesquisa de campo, elaborei atividades que foram impressas e entregues aos alunos participantes contendo orientações para sua resolução. Nessas impressões havia espaço para os alunos descreverem como resolveriam os problemas e registrarem seus cálculos, observações e conclusões. Ao término de cada encontro, eu recolhia as atividades e fazia as cópias (para as devidas análises) e devolvendo, em seguida, as atividades aos alunos participantes.

P4 em ação - Registros das construções feitas no GeoGebra e das soluções analíticas

Umas das partes constituintes da pesquisa de campo diz respeito aos registros das soluções e das construções realizadas no GeoGebra. Com a utilização da câmera fotográfica do celular, foram tiradas muitas fotos dos alunos em ação, das construções gráficas realizadas no software e de suas explanações na lousa (momento da plenária), com a finalidade de contribuir para a análise dos dados.

P5 em ação - Anotações feitas pelo pesquisador

No decorrer da pesquisa de campo, os principais pontos percebidos durante a realização das atividades foram devidamente observados e anotados, a fim de facilitar a análise futura. Desde as dúvidas diante da interpretação dos problemas, das dúvidas diante de algumas funcionalidades no GeoGebra (como a necessidade de mudança de escala) até às estratégias adotadas para as resoluções.

P6 em ação - Gravações de áudios

Com a ajuda de um gravador de voz, algumas das falas dos participantes da pesquisa foram registradas na íntegra, o que permitiu um leque maior de dados para a análise, donde algumas transcrições completas constam neste trabalho.

P7 em ação - Questionário para a avaliação dos alunos

No final das atividades realizadas durante o último encontro, foi aplicado um questionário de maneira individual, o que propiciou coletar mais dados para a análise que será feita e apresentada mais adiante. O questionário é constituído das seguintes questões:

1. Em qual instituição você estudou ou estuda a graduação? E em que ano você concluiu (ou concluirá) o curso?
2. O que você considerou mais interessante durante a aplicação das atividades?
3. O que você achou da Metodologia da Resolução de Problemas? Utilizaria em suas aulas?
4. O que você achou do GeoGebra? Utilizaria em suas aulas?
5. Em resumo, relate o que você aprendeu durante as atividades abordadas.
6. Houve pontos negativos durante as atividades? Se sim, qual(is)?

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES: TERCEIRO BLOCO DE ROMBERG

Neste momento será feita a análise dos dados obtidos, ou mais precisamente, será detalhado o terceiro bloco de Romberg. A partir da coleta de evidências obtidas durante a realização da pesquisa de campo, foi possível criar uma espécie de banco de dados com as informações necessárias e suficientes para uma eficaz interpretação.

Como nossa pesquisa é uma investigação qualitativa, estamos impulsionados para compreender nosso objeto de estudo. Para Yin (2016), a pesquisa qualitativa permite realizar estudos aprofundados sobre uma ampla variedade de tópicos, oferecendo maior liberdade na seleção de temas de interesse. Além disso, os dados coletados serão descritivos e a fonte dos dados é o ambiente natural.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), como a investigação qualitativa é descritiva, os dados são em forma de palavras ou imagens e não de números:

> Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

Dessa forma, na segunda quinzena de maio de 2019, deu-se início à aplicação das atividades em busca do levantamento de dados para a continuidade da pesquisa. Para isso, foram selecionadas atividades que se subdividiram em duas partes: a primeira, que generalizava algumas funções bastante utilizadas para a familiarização com o ambiente GeoGebra; e a segunda, que abordava problemas adaptados retirados dos livros de Cálculo do Thomas (2010) e do Stewart (2011). As atividades foram aplicadas durante dois encontros com duração de 4 horas cada, com alunos do mestrado do PPGECM/UEPB que cursavam a disciplina de Fundamentos de Álgebra, ministrada pelo orientador desta pesquisa, Professor Dr. Roger Huanca que esteve presente durante os encontros.

A pesquisa de campo contou com a participação de 4 alunos, todos possuindo graduação em Licenciatura em Matemática, tendo concluído seus cursos na UEPB (dois concluíram em 2014 e um concluiu em 2017) e na UFCG (concluinte em 2018), sendo três do sexo masculino e um do sexo feminino.

No final das atividades, foi aplicado um questionário que serviu como um diagnóstico do que havia sido explorado.

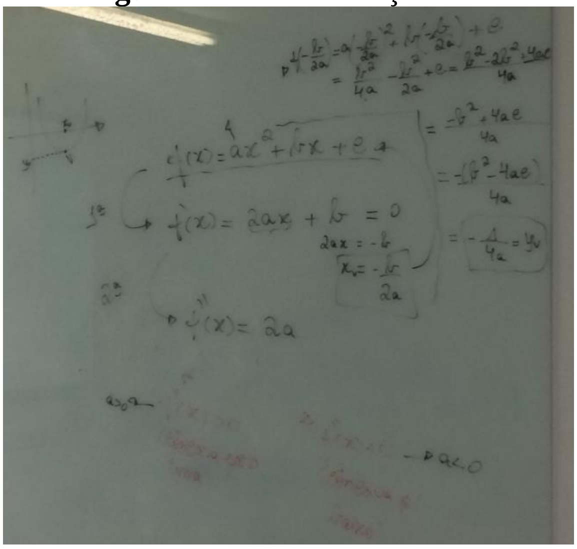
6.1 Análises do primeiro encontro: atividades 1, 2, 3 e 4

Após falar um pouco sobre o objeto de estudo da pesquisa de mestrado e sobre a metodologia do trabalho, foi apresentado para os participantes um termo de compromisso esclarecendo que os encontros seriam gravados para a devida utilização na análise dos dados. A princípio, apresentei o objetivo do meu trabalho e fiz uma breve apresentação do GeoGebra no datashow seguida de algumas funcionalidades, ferramentas, Janela de Álgebra, Janela Gráfica e Janela Simbólica CAS. Em seguida, fui até a lousa (Figuras 14 e 15) e mostrei analiticamente como encontrar os pontos de máximo e mínimo a partir de uma função genérica de 2º grau, utilizando a derivada primeira e a derivada segunda, e remetendo ao ponto de vértice visto no Ensino Básico.

Figura 14 - Encontrando os extremos da função de 2º grau

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 15 - Demonstração obtida



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

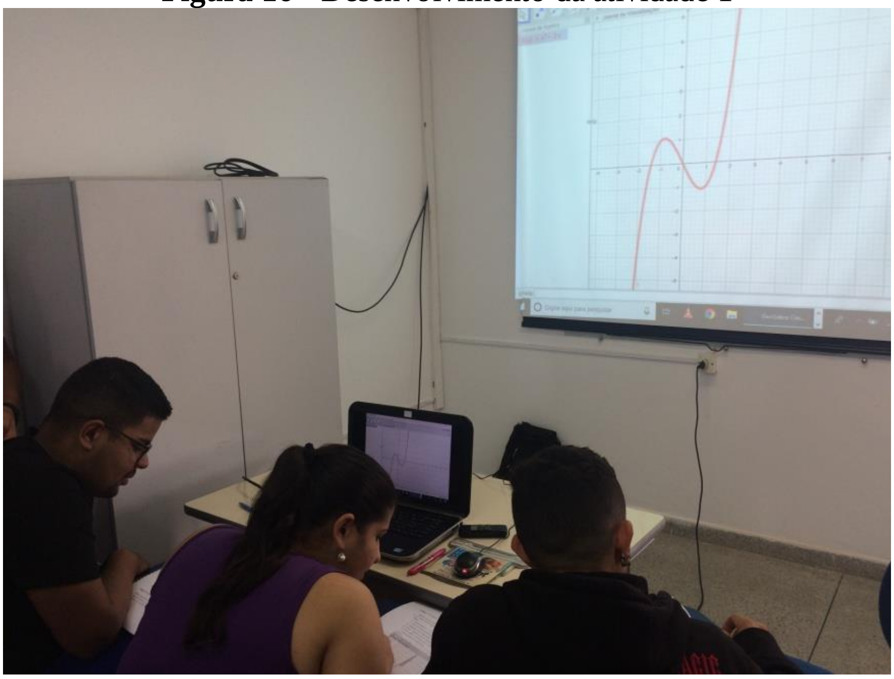
O interesse, nesse momento, foi de estimular os participantes (todos graduados em Licenciatura em Matemática) a relembrarem tópicos já vistos durante a graduação. Vale destacar que todos já conheciam, superficialmente, o software que seria utilizado para as atividades seguintes.

No primeiro encontro, só havia três alunos (A1, A2 e A3) aos quais foi incumbida a tarefa de realizar as três atividades iniciais de cunho didático, visando a familiarização com o software, e a atividade 4. Assim sendo, na atividade 1 percebeu-se um pouco de dificuldade no manuseio, porém as atividades 2 e 3 fluíram mais rapidamente devido à boa interação entre os alunos e à familiarização com o GeoGebra. Enquanto isso, o pesquisador supervisionava e tirava algumas dúvidas.

Nesse momento, corroborando com Allevato (2005), vale destacar que para a utilização eficiente do computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (ou professor) precisam saber o que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Afinal, novos estilos de pensar são condicionados pela presença do computador, embora nem sempre naturalmente, donde é preciso saber uma Matemática, muitas vezes, diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino. Ou seja, é importante que os envolvidos compreendam os fundamentos tecnológicos utilizados para uma eficaz associação com a Matemática.

A figura 16 mostra os três participantes interagindo e construindo o gráfico referente à primeira atividade.

Figura 16 - Desenvolvimento da atividade 1



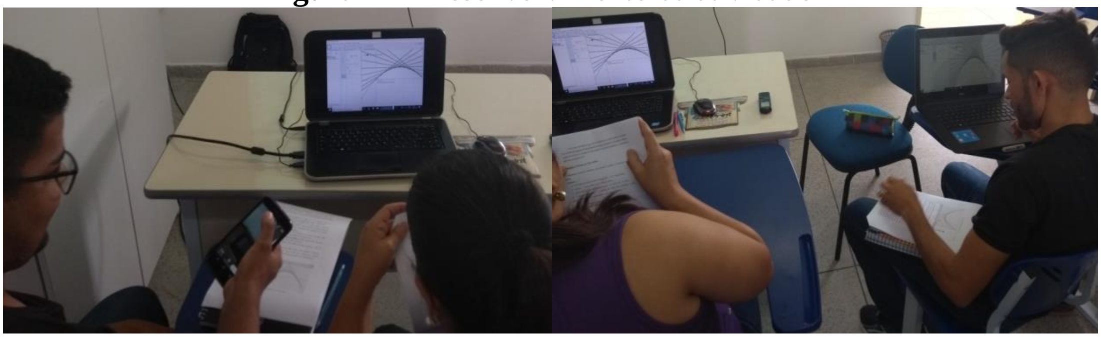
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Em um determinado momento, o aluno A3 faz uma importante declaração:

> Eu notei que quando a gente deriva essa função aqui, aí traça uma reta tangente nessa função que a gente calculou no GeoGebra, e na medida que for manipulando, nós vemos que essa reta tangente percorre todo esse gráfico de *f(x)* (Aluno A3).

Com isso, percebe-se a importância do processo de visualização para a assimilação de conteúdos e para a formalização de conceitos e, com isso, os objetivos para tal atividade foram alcançados. Assim, deu-se continuidade para a execução da próxima tarefa, conforme figura 17.

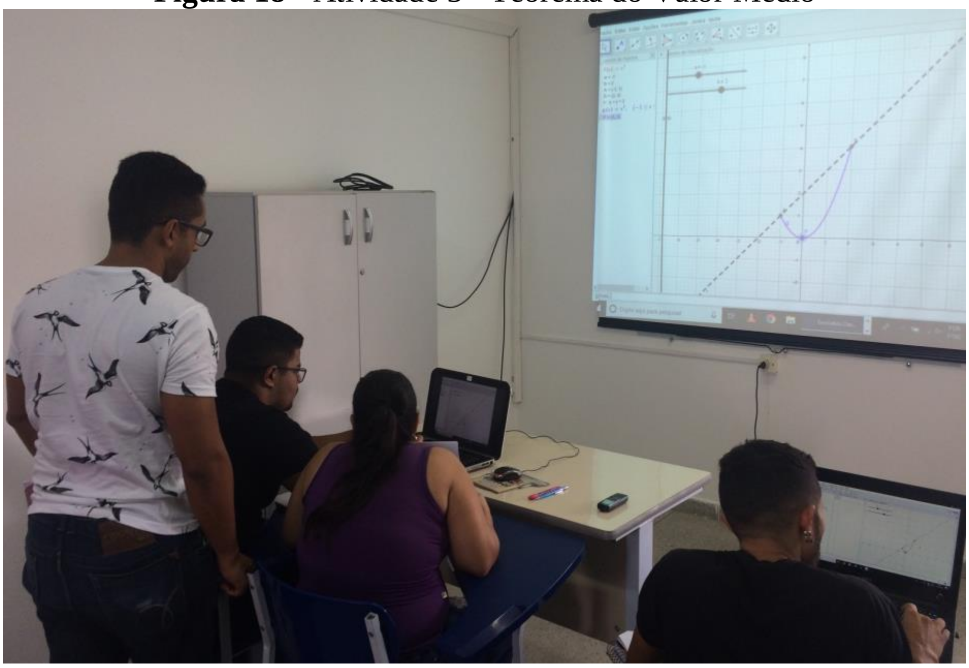
Figura 17 - Desenvolvimento da atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Já a atividade 3 objetivava construir uma ilustração que permitisse visualizar o Teorema do Valor Médio; assim, os alunos continuaram suas tarefas seguindo o roteiro entregue no começo do encontro, conforme figura 18.

Figura 18 - Atividade 3 - Teorema do Valor Médio



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Na atividade 4, iniciou-se a tarefa que envolvia o Cálculo a partir de um problema de Otimização retirado do livro do Stewart (2011):

<u>Atividade 4</u>: Se 1200cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa (STEWART, 2011, p. 307).

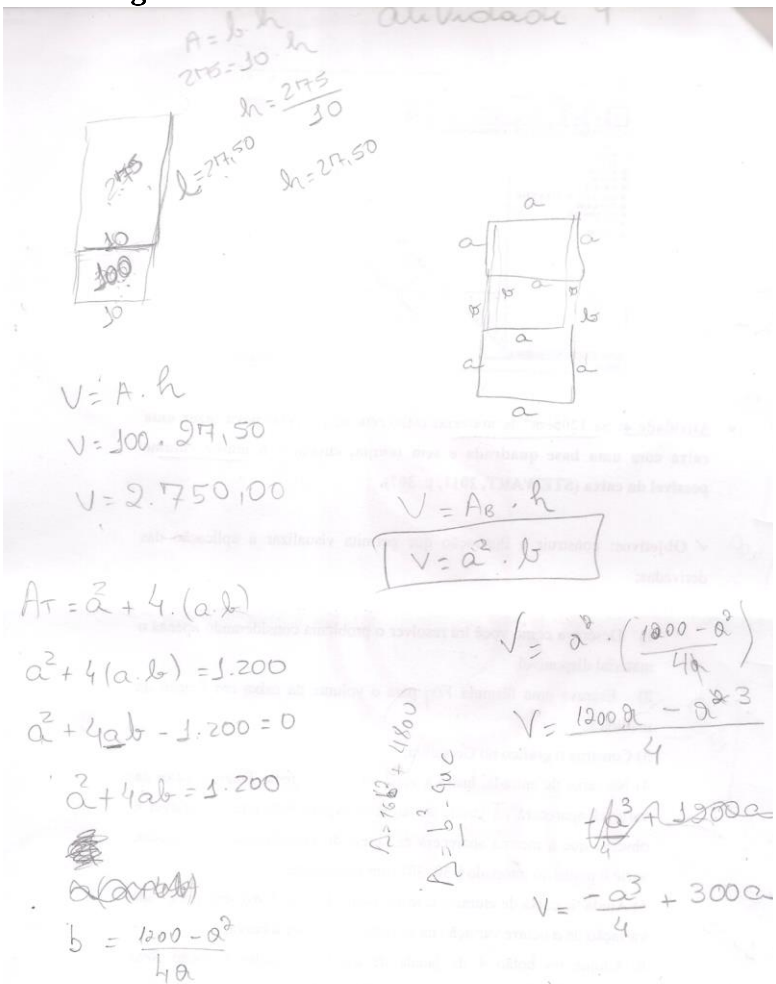
Esse exercício teve como finalidade obter uma ilustração que permitisse visualizar a aplicação das Derivadas. Primeiramente, foi pedido que os alunos descrevessem como iriam resolver o problema considerando apenas o material disponível; no entanto, ansiosos pela solução do problema, os alunos não descreveram como resolveriam a questão.

Os participantes A1 e A2 começaram a interagir em busca da resolução analítica, tendo como primeira ideia arbitrar valores para se chegar ao resultado pedido e, assim, pensaram em dividir a área total dada na questão em cinco áreas iguais, pois teriam um cubo de quatro faces quadradas e uma base quadrada; dessa maneira, obtiveram a área para uma face, a altura e, consequentemente, o volume:

> A gente imaginou que a caixa fosse exatamente quadrada. Então, se ela for exatamente quadrada, a gente vai ter 5 lados para construir com esse material. Cada lado, então, a gente vai ter que usar uma área de 240 desse material. No caso, a minha área da base seria 240, onde a gente encontrou o *'a'* valendo 15,49; e esse '*a*', como a gente tá considerando quadrada, seria também a medida da altura, né. Aí a gente fez a área da base vezes a altura pra encontrar o volume e achou 3717. (Aluno A2).

Nesse momento, foi necessária minha intervenção inferindo que a caixa poderia ser um paralelepípedo e, mais uma vez, os alunos A1 e A2 arbitraram valores, sendo 100cm^2 para a área da base e 1100cm^2 para a área lateral total. Assim, cada área lateral media 275cm^2 e a aresta da base (quadrada) media 10cm, o que permitiu chegar a um valor menor para o volume (2750cm^3), conforme verificado na figura 19:

Figura 19 - Desenvolvimento da atividade 4



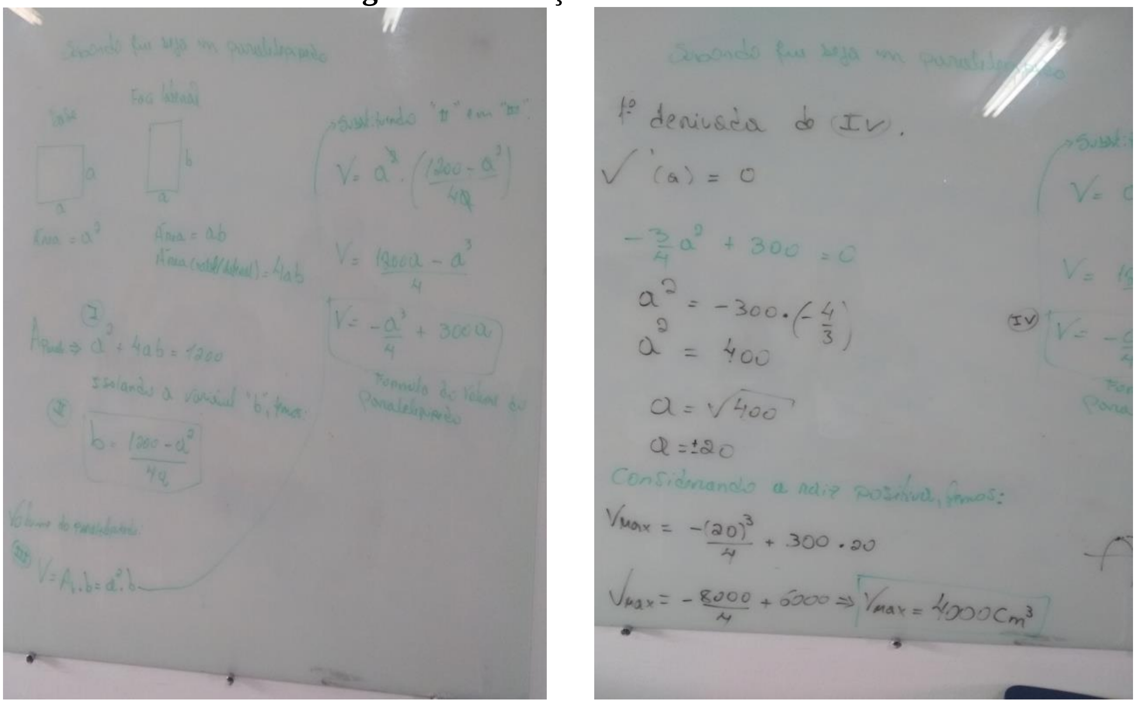
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

De acordo com a figura anterior, percebe-se que a dupla conseguiu, inclusive, chegar na fórmula geral do volume em função da medida da aresta da base, porém, esses alunos não utilizaram até então nenhum conhecimento no âmbito do Cálculo; além disso, o fato de arbitrar valores ocasionaria volumes diferentes sem a certeza de que seria ou não o volume máximo possível para a caixa.

Enquanto o aluno A2 insistia em encontrar o volume máximo no GeoGebra, o aluno A3 tentou encontrar a partir da aplicação da Derivada e conseguiu chegar ao resultado, o qual pôde ser visto em sua *plenária (etapa da metodologia de Resolução de Problemas)* durante a explanação na lousa, mostrando como resolveu a questão:

> Vamos supor que a caixa seja um paralelepípedo. Então, eu tenho a área da base quadrada com *'a^2'* e quatro faces laterais com altura *'b'*, então, *4ab*. Então, somando as duas áreas daria 1200cm^2 do material disponível. (Aluno A3).

Figura 20 - Solução da atividade 4



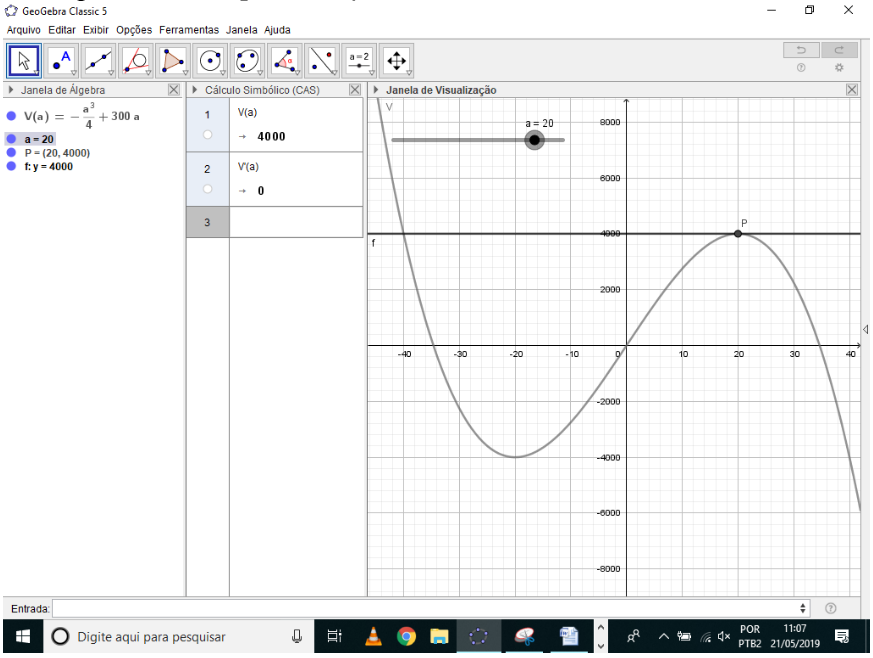
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Com a utilização das Aplicações de Derivadas, A3 usou a derivada primeira para se chegar ao ponto crítico de acordo com a fórmula geral encontrada para o volume. Nesse caso, pode-se realizar a **formalização do conteúdo** da seguinte forma:

- Conforme consta no Thomas (2010), A3 se valeu do <u>*Primeiro teorema da derivada para valores extremos locais*</u>, derivando a função *V(x)* e igualando a zero;
- Em seguida, encontrou-se os dois pontos críticos que foram +20 e -20, donde A3 considerou apenas a raiz positiva;
- Substituindo o ponto crítico de valor positivo na fórmula geral do volume, encontrou-se o volume máximo correto no valor de 4000cm^3 (Figura 20).

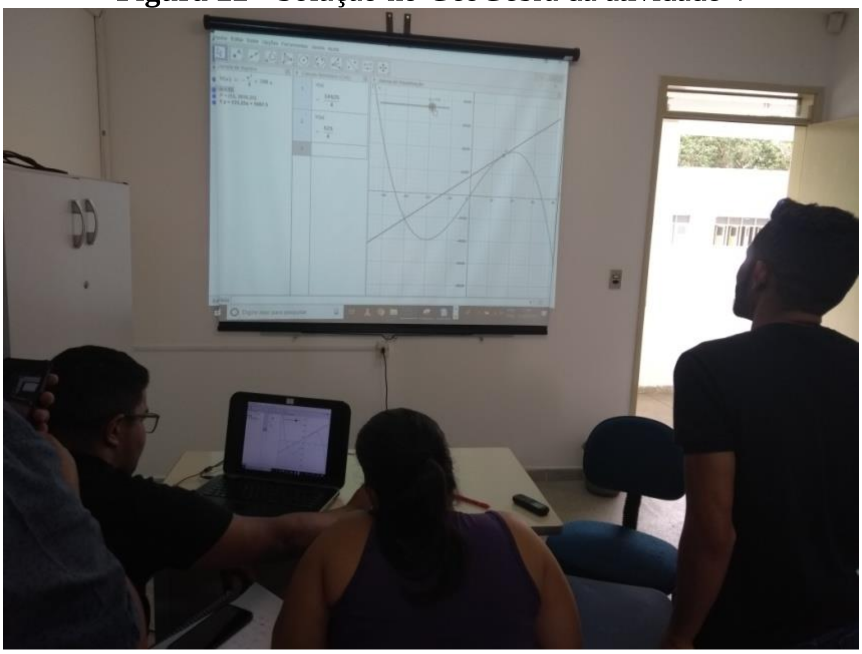
Em seguida, os alunos conferiram a solução analítica com a representação no GeoGebra (Figura 21), sob minha supervisão, principalmente quando foi necessário a mudança de escala, pois o gráfico (Figura 22) não havia sido visualizado.

Figura 21 - Representação do volume máximo no GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 22 - Solução no GeoGebra da atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

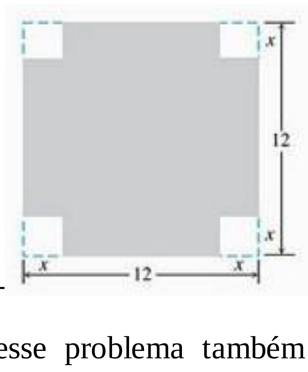
Ao término do primeiro encontro, algumas considerações merecem destaque. Com relação às atividades 1, 2 e 3, percebeu-se certa neutralidade no interesse dos alunos, afinal o roteiro que lá estava descrito exigia apenas que os alunos reproduzissem funções já determinadas, sem exigências de raciocínio. No entanto, o foco daquelas três primeiras tarefas era apenas introduzir os alunos num ambiente virtual, sem cobranças num primeiro momento.

Já na atividade 4, percebeu-se uma forte interação e um grande interesse dos alunos diante do desafio proposto pelo problema e diante da solução encontrada, pois o problema caracterizou-se como uma situação prática que exigiu conhecimentos teóricos já adquiridos durante a graduação (como *Regras de derivação para polinômios*). Além disso, com o software GeoGebra foi possível ampliar a compreensão dos conceitos de máximo e mínimo de funções por meio da visualização obtida.

6.2 Análises do segundo encontro: atividades 5, 6 e 7

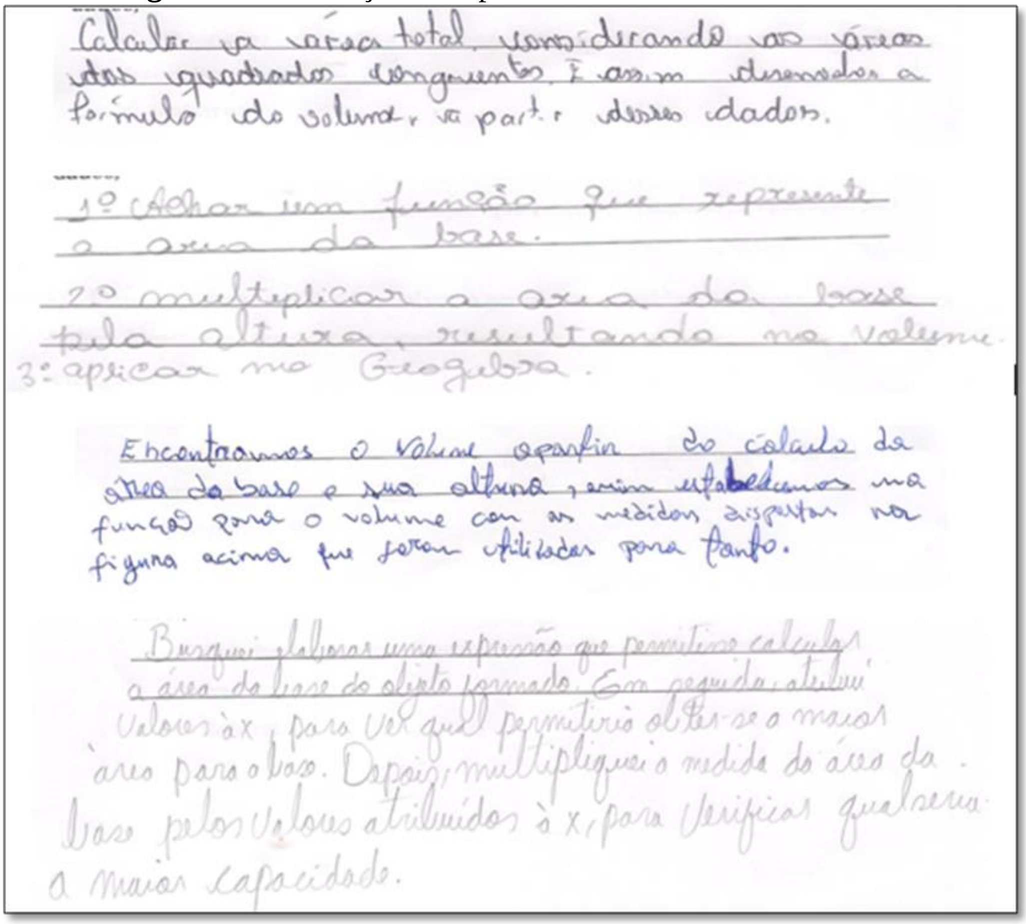
No segundo encontro, realizado na aula seguinte (28/05/2019), deu-se continuidade às resoluções a partir da quinta atividade, continuando com problemas de Otimização. Neste dia, contou-se com a participação do aluno A4, sendo possível a divisão das tarefas em duas duplas (A1-A3 e A2-A4). Na atividade 5, retirada do livro do Thomas (2010), pedia-se para encontrar o tamanho dos quadrados das bordas para que uma caixa obtivesse sua capacidade máxima:

<u>Atividade 5</u>: Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 12 x 12cm e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima? (THOMAS, 2010, p. 303).



Semelhante ao anterior, esse problema também teve como finalidade obter uma ilustração que permitisse visualizar a aplicação das Derivadas. Primeiramente, foi pedido que os alunos descrevessem como iriam resolver o problema (Figura 23) considerando apenas os valores dados:

Figura 23 - Descrição feita pelos alunos acerca da atividade 4


Calcular a área total considerando as áreas dos quadrados congruentes. E assim desenvolver a fórmula do volume, a partir desses dados.

1º Achar uma função que represente a area da base.
2º multiplicar a area da base pela altura, resultando no volume.
3º aplicar no Geogebra.

Encontramos o volume apartir do calculo da area da base e sua altura, assim estabelecemos na função para o volume com as medidas dispostas na figura acima que foram utilizadas para tanto.

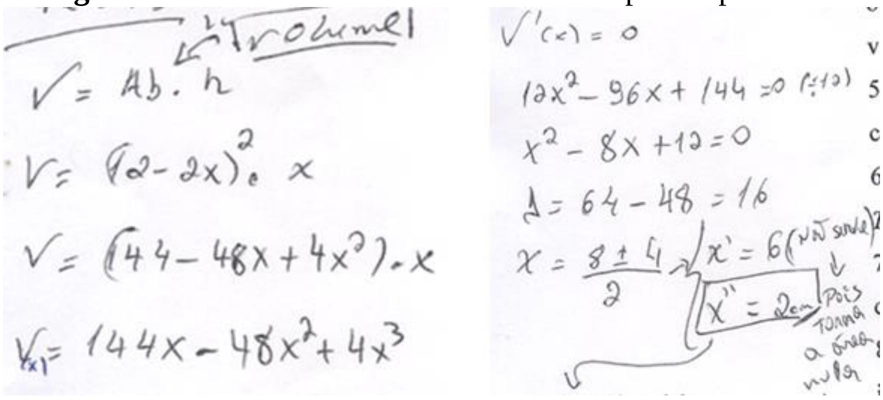
Busquei elaborar uma expressão que permitisse calcular a área da base do objeto formado. Em seguida, atribui valores à x, para ver qual permitiria obter-se a maior área para a base. Depois, multipliquei a medida da área da base pelos valores atribuídos à x, para verificar qual seria a maior capacidade.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A partir das ideias relatadas pelos alunos na descrição acima, percebe-se que um deles pretendia arbitrar valores para *x* de maneira intuitiva, que permitisse obter a maior área para a base, enquanto o restante estava preocupado em encontrar uma fórmula que representasse o volume em função de *x*. Nesse último caso, ficou caracterizado que houve uma maior facilidade na organização das ideias para obter a resolução.

Ambas as duplas conseguiram chegar à fórmula *V(x)* para o volume da caixa em função da aresta da base *x*. No entanto, a dupla A1-A3 foi um pouco além e derivou *V(x)* igualando, em seguida, a zero, a fim de encontrar os pontos críticos, conforme figura 24.

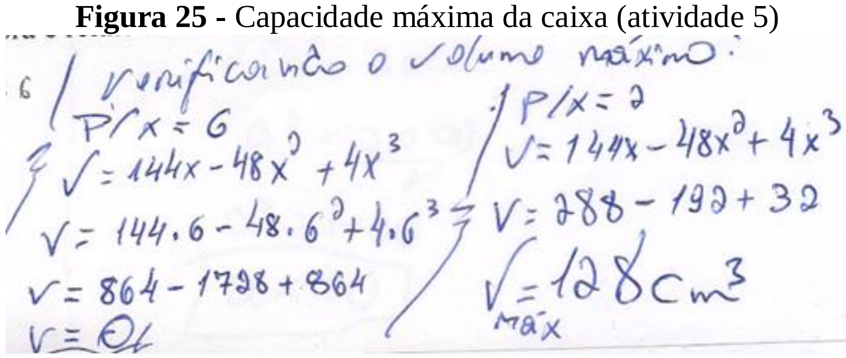
Figura 24 - Desenvolvimento da atividade 5 pela dupla A1-A3



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A dupla A1-A3 percebeu que os valores encontrados para *x* após a derivação seriam 2cm e 6cm, mas este não serviria pois tornaria a área da base e do volume nulos. Já para $x = 2$ o volume máximo ($V_{máx} = 128cm^3$) foi, enfim, encontrado, como pode ser visto na figura 25.

Figura 25 - Capacidade máxima da caixa (atividade 5)



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

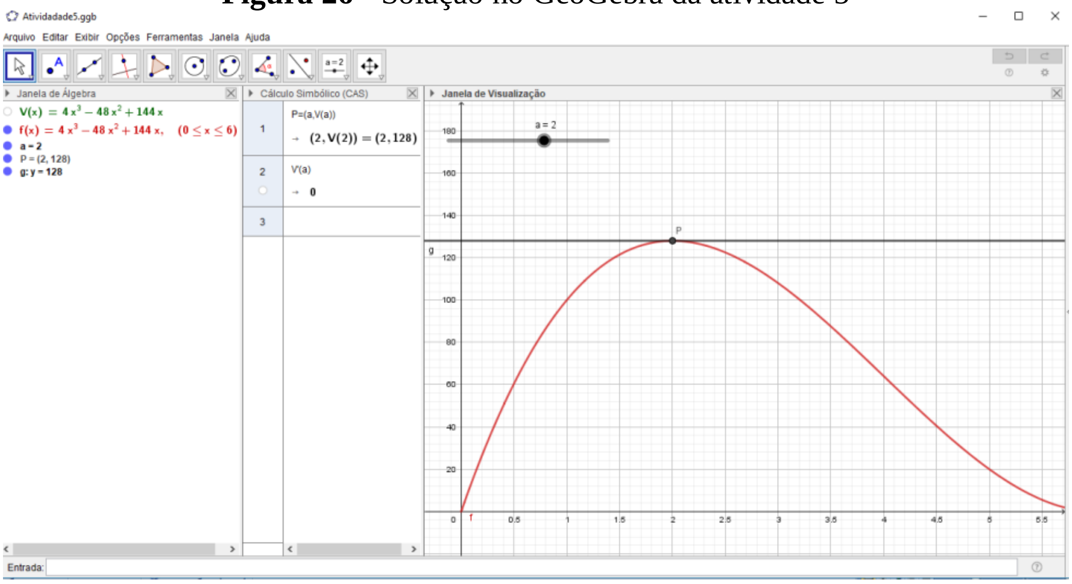
De acordo com a metodologia da Resolução de Problemas, após os **registros das resoluções na lousa** e após a **plenária**, se faz necessário a **busca de consenso** para a **formalização do conteúdo**. Portanto, com relação à atividade 5, um professor já poderia inferir aqui que:

- Como os lados da folha medem *12cm*, então o valor de *x* tem que ser menor ou igual a *6cm*, ou seja, o domínio da função $V(x)$ é o intervalo $0 \leq x \leq 6$;
- O valor em uma extremidade já foi verificado, como pode ser visto na figura 25; o valor de $V(x)$ para a outra extremidade ($x = 0cm$) também vale zero, o que está evidenciado na figura 26. Ou seja, o gráfico da figura 26 mostra um valor mínimo de 0 quando $x = 0$ e $x = 6$ e um valor máximo quando $x = 2$;

- A primeira derivada de *V* em relação a *x* permite encontrar duas raízes, $x = 2$ e $x = 6$. Mas apenas $x = 2$ está contido no domínio da função, fazendo parte da lista de pontos críticos, permitindo encontrar o valor de $V = 128$;
- Concluindo, para o volume máximo de $128cm^3$, os quadrados a serem recortados devem ter um valor de *2cm* para o lado.

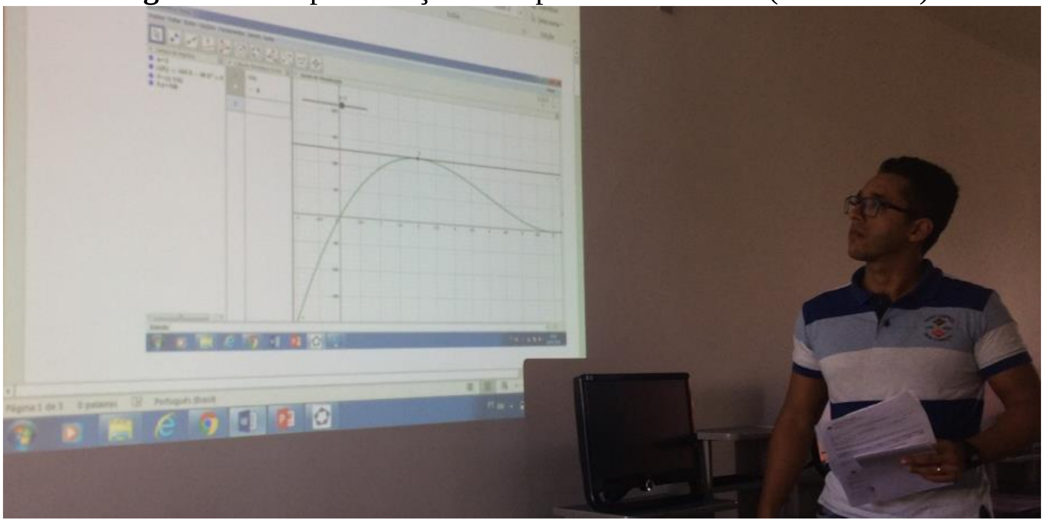
Em seguida, os alunos utilizaram o GeoGebra, refazendo a questão e analisando o gráfico da função *V(x)*, sob minha supervisão (Figura 26 e Figura 27).

Figura 26 - Solução no GeoGebra da atividade 5



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

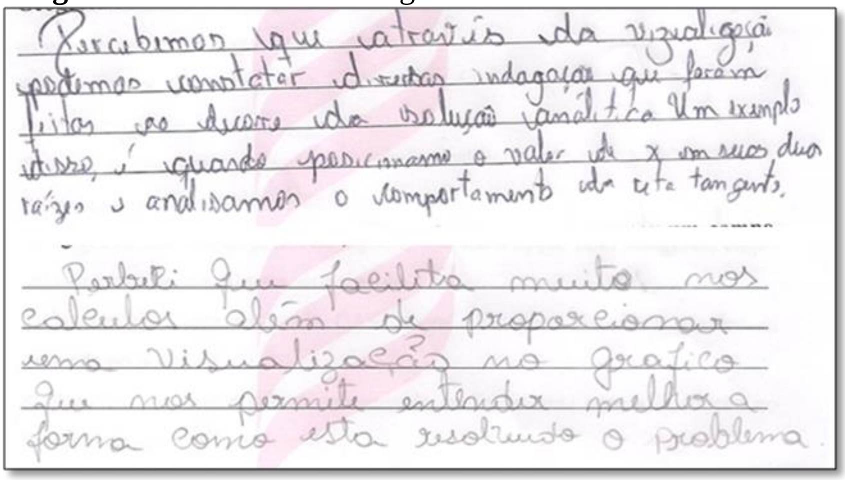
Figura 27 - Representação da capacidade máxima (atividade 5)



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Ao final da atividade, solicitei que os alunos comparassem a solução encontrada analiticamente com a ilustração no GeoGebra e relatassem suas conclusões, o que pode ser verificado na figura 28, quando os alunos trazem à tona a importância do processo de visualização para o entendimento do problema.

Figura 28 - Conclusões de alguns alunos acerca da atividade 5



Percebemos que através da vizualização podemos constatar diversas indagações que foram feitas no decorrer da solução analítica. Um exemplo disso, é quando posicionamos o valor de x em suas duas raízes e analisamos o comportamento da reta tangente.

Percebi que facilita muito nos calculos além de proporcionar uma visualização no grafico que nos permite entender melhor a forma como esta resolvendo o problema.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Outro aluno resumiu bem a importância de se utilizar o GeoGebra, no sentido de complementar a análise algébrica e os cálculos feitos:

> Eu acho que o GeoGebra permite uma representação dinâmica de qual seria o valor máximo para a capacidade da caixa, sem deixar de lado a necessidade do pensamento algébrico, pois exige que uma expressão previamente encontrada seja

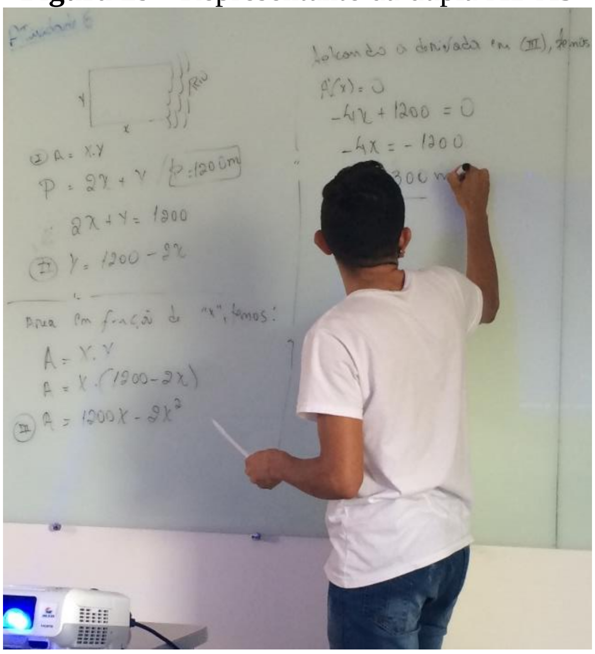
> inserida. Com isso, o software possibilita a realização de trabalhos que valorizam álgebra e visualização, dando sentido ao que está sendo estudado. (Aluno A4).

Aqui se enquadra perfeitamente o que dizem Vale e Pimentel (2016) ao afirmarem que vários matemáticos, muitas vezes, evitam usar palavras ou símbolos algébricos, pois preferem concentrar-se em imagens. Assim, a estratégia de resolução de problemas designadas pelas mesmas autoras por *procurar ver* se torna uma maneira de complementar a abordagem e o desenvolvimento de um problema, sobretudo no que diz respeito à criatividade, em que o aluno explora um raciocínio visual.

Atividade 6: Um fazendeiro tem 1200m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área? (STEWART, 2011, p. 302).

Realizada pela dupla A1-A3, a atividade 6 (bastante comum em problemas de Otimização) foi retirada do Stewart (2011). Nela, a dupla estabeleceu uma expressão para o perímetro em função de *x* e *y*, encontrando, em seguida, uma expressão para a área em função do lado *x* (Figura 29).

Figura 29 - Representante da dupla A1-A3



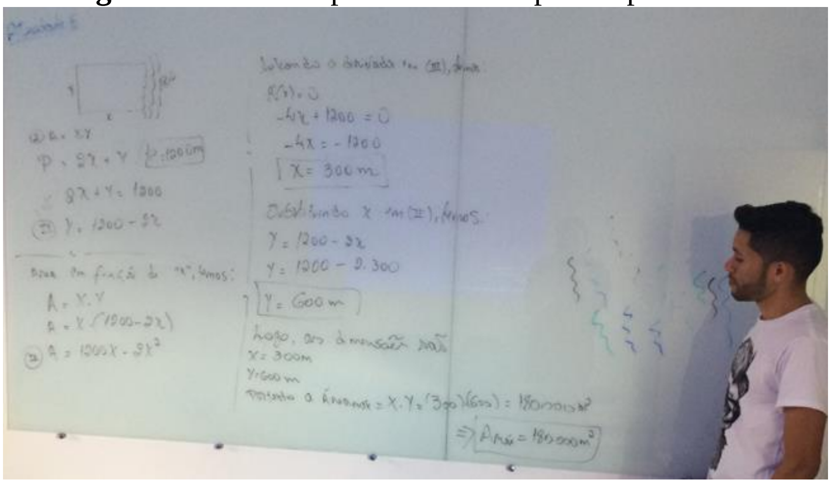
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Durante a plenária, um membro da dupla assim falou:

> Nesse caso, eu desenhei essa figura para ilustrar o rio e os lados da cerca que eu quero fazer. Nesse caso, a área dessa figura é base vezes a altura, dado por *x* vezes *y*. O perímetro seria a soma dos lados que vai ser *2x+y*. Ele diz que tem *1200m* de cerca. Eu isolei a variável *y* aqui e ficou *y = 1200 - 2x*. (Aluno A3).

Em seguida, após encontrar a área em função de *x*, a dupla aplicou a primeira derivada da área *A* em relação a *x*, encontrando o valor de *300m* para *x* e *600m* para *y* e, portanto, a área máxima encontrada foi igual a $180000m^2$ (Figura 30).

Figura 30 - Passo a passo realizado pela dupla A1-A3



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Aqui, já é possível inferir as etapas finais da Resolução de Problemas: após os **registros das resoluções**, o participante relatou em sua **plenária** as etapas utilizadas para a solução do problema. Com minha intermediação, iniciou-se a **busca de consenso** para a **formalização do conteúdo** e percebeu-se que:

- Os dois lados com mesma medida da cerca precisariam ser menores do que *600m*;
- A função encontrada foi $A(x) = 1200x - 2x^2$ que, após a aplicação da *Primeira Derivada*, gerou uma outra função caracterizada pela dupla como $A'(x) = -4x + 1200$ que foi igualada a zero, o que permitiu encontrar o valor de $x = 300m$, o qual foi substituído na equação de 1º grau ($y = 1200 - 2x$) obtida a partir do comprimento da cerca, encontrando o valor $y = 600m$.
- Em seguida, descobriu-se a área através do produto dos lados calculados (Figura 30).
- Porém, ao derivar a função *A(x)* e igualar a zero, é encontrado o *ponto crítico* que, neste caso, foi $x = 300m$. Substituindo-o na função da área, encontra-se o valor máximo $A(300) = 180000m^2$;

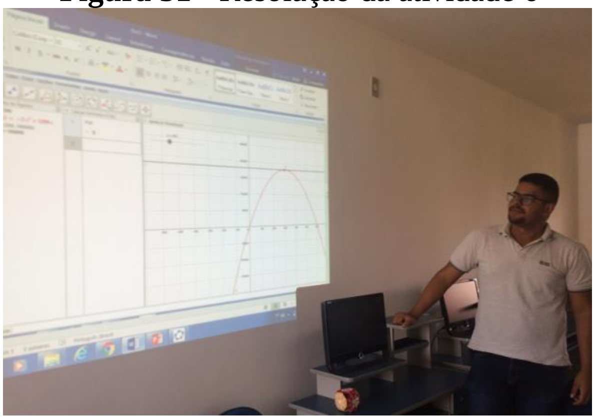
- Além disso, pode-se inferir, também, que a utilização do *Teste da Segunda Derivada para concavidade* mostraria que $A''(x) = -4$, um valor menor do que zero para todo x e, portanto, uma função sempre côncava para baixo, donde o máximo absoluto seria o valor de $x = 300m$.

Depois, o outro membro da dupla apresentou o resultado obtido no GeoGebra:

> Usamos os passos do roteiro, colocamos a função na caixa de entrada e obtivemos essa parábola. Depois encontramos os valores de 300 e 180000 conforme encontramos calculando manualmente. (Aluno A1).

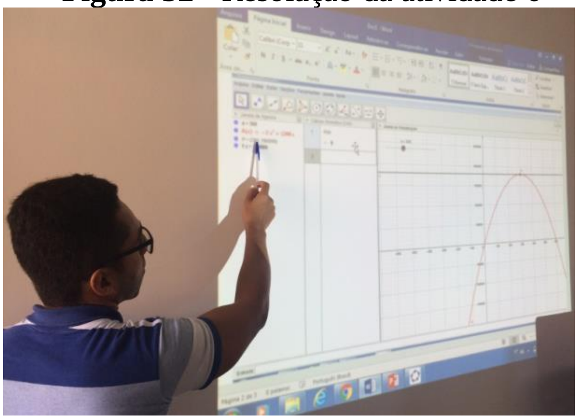
A parábola a qual o participante A1 fez menção pode ser vista na figura 31 quando o mesmo estava apresentando; já os valores obtidos estão apresentados na figura 32, donde o pesquisador reforçava algumas considerações feitas pelo aluno (**busca do consenso**).

Figura 31 - Resolução da atividade 6



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 32 - Resolução da atividade 6



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Atividade 7: Sua metalúrgica foi contratada por uma fábrica de papel para projetar e construir um tanque retangular de aço, com base quadrada, sem tampa e com 500m^3 de capacidade. O tanque será construído soldando-se chapas de aço umas às outras ao longo das bordas. Quais as dimensões para a base e a altura que farão o tanque pesar o mínimo possível? (THOMAS 2010, p. 311 adaptado).

A atividade 7 foi proposta à dupla A2-A4 e foi retirada do livro do Thomas (2010). Logo no início, a dupla ficou sem entender o que o peso tinha a ver com as dimensões para a área e a altura do tanque. Após isso, relacionaram o volume com os dados lançados a fim de encontrar alguma função:

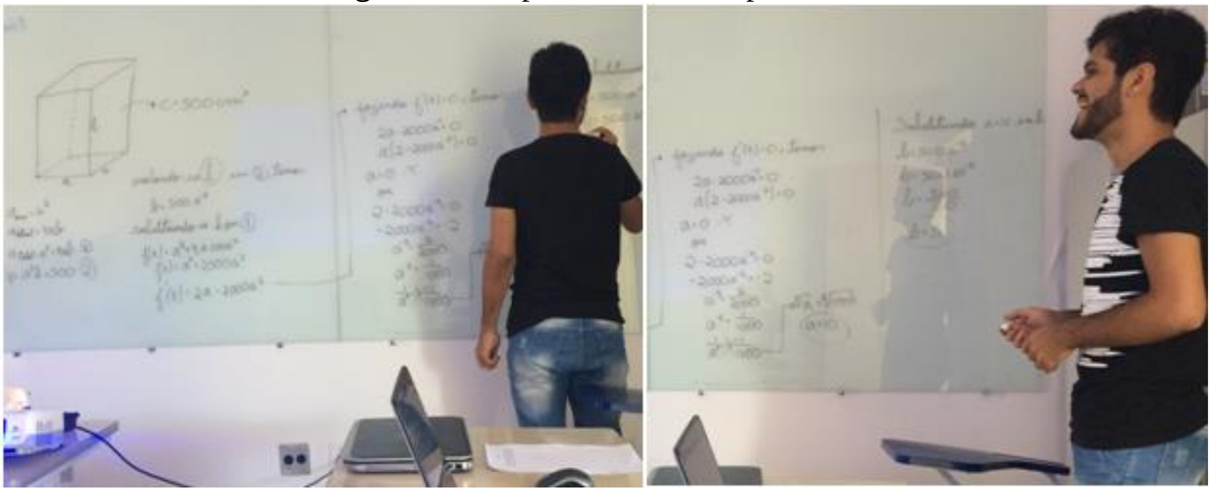
> Inicialmente, a gente ficou martelando para entender o que é que tem a ver a capacidade com o peso, que a princípio parecia não ter muita ligação. Mas depois, a gente percebeu que quanto menos chapas de aço se utilizasse menor seria o peso, e que a capacidade, independente de como a gente mexer nas dimensões, ela se alteraria. Depois que encontrarmos a função, é só jogar no GeoGebra que a gente descobre tudo. (Aluno A2).

Essa fala revela que o membro da dupla tendeu para certa dependência do software, o que pode ser algo preocupante, pois o GeoGebra, neste caso, tem a tarefa de auxiliar na construção do conhecimento e na visualização dos resultados, não podendo ser de uso exclusivo para a resolução da atividade, até porque o intuito maior desta pesquisa é investigar tanto as potencialidades da Resolução de Problemas quanto do GeoGebra diante do Cálculo. Aliás, conforme bem destaca Allevato (2005), a partir do uso dos computadores é possível um aprofundamento nas compreensões matemáticas:

> A partir de *feedbacks* oferecidos pelo computador os alunos iniciam uma troca de experiências, compartilham compreensões, dão sugestões aos colegas e caminham por um jogo de contra-exemplos, novas conjecturas e reformulação de conceitos. E nesse processo de desafios, críticas e revisão das conclusões se aprofundam compreensões matemáticas importantes e surgem novas dúvidas. As dúvidas resultam, por vezes, de informações e/ou ambigüidades apresentadas pela tecnologia que, desse modo, permite criar conexões que talvez não fossem possíveis de serem estabelecidas sem ela e sem o diálogo que se realiza entre os alunos ou entre alunos e o professor. (ALLEVATO, 2005, p. 90-91).

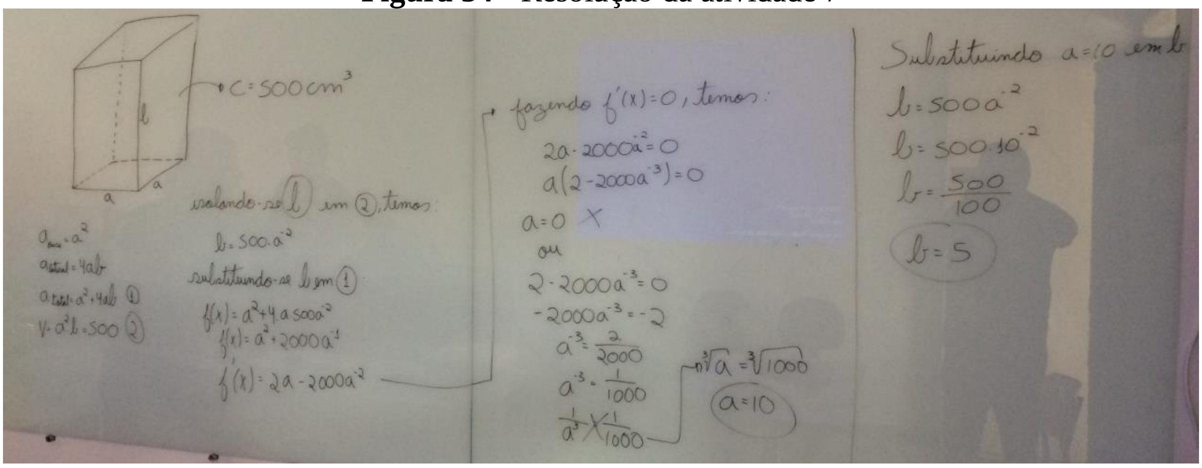
De acordo com os dados contidos no problema, A2-A4 tomaram a área total e o volume do tanque retangular, encontrando uma formalização geral para a área total em função da aresta da base. Em seguida, através da primeira derivada, encontraram o valor de *10m* para a aresta da base e *5m* para a altura (Figura 33 e Figura 34).

Figura 33 - Representante da dupla A2-A4



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 34 - Resolução da atividade 7



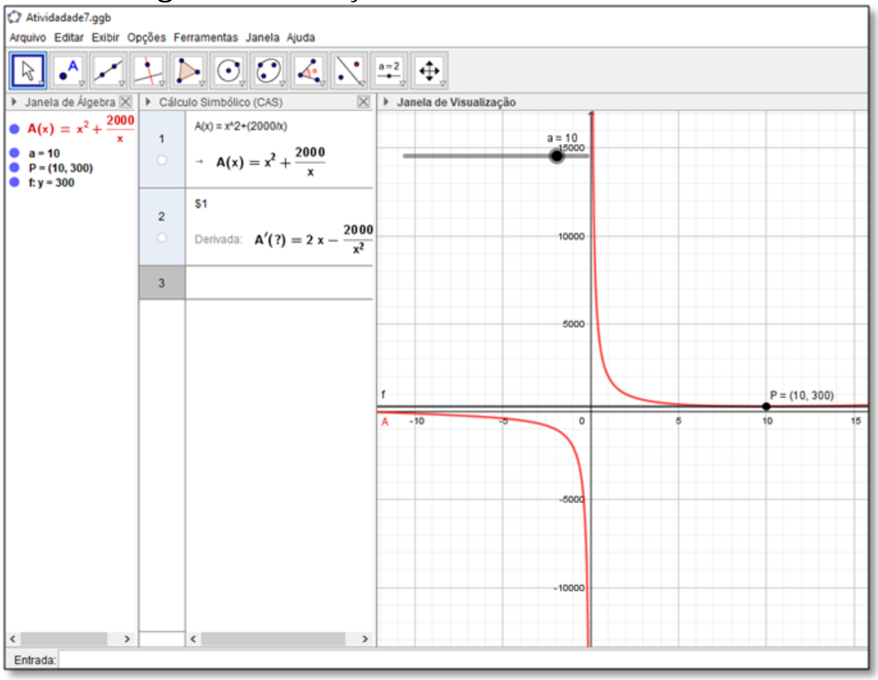
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Na plenária da atividade 7, o participante A4 relatou o seguinte:

> A gente aproveitou o volume e isolamos o *b*, e depois a gente substituiu o *b* na fórmula das áreas totais, e chamamos *f(x)*. Jogamos a equação no GeoGebra e seguimos as instruções que tinha no roteiro. Percebemos que no ponto *a = 10*, é onde se encontra a menor dimensão possível para a área dessa caixa. Depois, substituímos no papel o valor de *b*. (Aluno A4).

A fim de organizar a última parte da fala do participante A4 (**formalização do conteúdo**), pode-se dizer que o ponto *a = 10m*, obtido a partir da primeira derivada, é o *ponto crítico* cuja substituição na função *A(x)* gera a menor área possível *(300m²)*, conforme representado pelo ponto *P = (10,300)* da figura 35, já que minimizar a área da superfície do tanque retangular do problema significa reduzir seu peso para uma dada espessura da parede.

Figura 35 - Solução no GeoGebra da atividade 7



Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

6.3 Contribuições do GeoGebra para a investigação

O objetivo deste trabalho não é apresentar todas as funcionalidades do software GeoGebra nem tampouco criar uma dependência do mesmo perante determinado conteúdo.

Seu uso permitiu que os problemas de otimização fossem refeitos a fim de ampliar a compreensão de alguns conceitos do Cálculo; além disso, o GeoGebra contribuiu na investigação visual, geométrica e algébrica de alguns conceitos das Derivadas. Tudo isso, concorre para que outras situações enriquecedoras surjam e colaborem para um aprendizado eficaz.

No final da atividade realizada no segundo encontro, todos relataram que um dos pontos positivos do GeoGebra foi a utilização das imagens, já que o processo de visualização se caracteriza como forte aliado na aprendizagem, conforme bem destacou um dos alunos:

> O aplicativo facilita muito na questão da visualização e na compreensão, pois não compreendemos direito o que é Derivada e nem os professores fazem questão de mostrar o que é. (Aluno A2).

Além disso, o dinamismo proporcionado pelo GeoGebra, a partir de um problema aplicado ou da movimentação de algum ponto no gráfico, facilita na compreensão:

> Você consegue manipular todos os valores na interface do GeoGebra e ver a variação tanto da reta tangente quanto a construção do gráfico. Durante a graduação não tivemos a oportunidade de manipular uma equação diferencial. (Aluno A3).

Por outro lado, o software não pode ser considerado o "*salvador da pátria*", pois se mal utilizado, ao invés de contribuir na aprendizagem do Cálculo, o mesmo pode se tornar um empecilho. Nesse sentido, há de se destacar uma fala muito importante de um aluno:

> O importante é a questão do híbrido, de trabalhar juntos, porque se a gente não souber o conceito da derivada ou até mesmo todas as anotações, então não adianta trabalhar só com a tecnologia, é bom trabalhar em conjunto. (Aluno A1).

De maneira geral, o GeoGebra é uma ferramenta que colaborou para a investigação no âmbito do Cálculo, pois através de simples manipulações foi possível verificar que o dinamismo proporcionado por ele foi crucial para ampliar a compreensão dos pontos de máximos e mínimos, bastante abordados nas atividades. No entanto, é preciso utilizá-lo na medida certa para não criar uma dependência que afaste os alunos da essência dos conteúdos.

Além disso, as etapas da metodologia da Resolução de Problemas possibilitaram o desenvolvimento de uma aprendizagem colaborativa em sala de aula, tendo a mediação do GeoGebra para a formalização do conteúdo. Corroboramos com Richit (2016), quando diz que as atividades de Resolução de Problemas favorecem a apropriação de conhecimentos em matemática, enquanto que a utilização das Tecnologias Digitais propiciam a investigação e experimentação matemática. Essa autora ainda destaca a interface pedagógica entre essas tendências:

> Isto é, a incorporação das tecnologias digitais nas atividades de resolução de problemas pode ampliar as investigações matemáticas, favorecer a elaboração e verificação de novas conjecturas, facilitar e otimizar o processo de execução das estratégias de solução pré-definidas, bem como promover a verificação dos resultados. Portanto, a articulação entre a resolução de problemas e as tecnologias digitais propicia abordagens/metodologias/pedagogias diferenciadas em Matemática. (RICHIT, 2016, p. 118).

Além disso, a associação entre a Resolução de Problemas e o GeoGebra permitiu uma ampliação do conceitos do Cálculo, principalmente quando os problemas de Otimização foram refeitos no software, o que propiciou uma análise visual, geométrica e algébrica dos conceitos de máximo e mínimo de funções.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A fim de apresentar as compreensões e respostas obtidas, se faz necessário retomarmos a pergunta que nos guiou nesta pesquisa: **Quais as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização?**

Na busca de respostas para tal pergunta, realizamos a pesquisa de campo com quatro alunos da Pós-Graduação do PPGECM da UEPB, campus de Campina Grande, durante dois encontros com duração de 4 horas cada, em que foram aplicadas as atividades previamente elaboradas. O objetivo das atividades (que foram divididas em duas categorias) teve o intuito de familiarizar os participantes no ambiente do GeoGebra (conhecido por alguns) e de construir ilustrações que permitissem visualizar a aplicação das Derivadas a partir de problemas de Otimização.

Se faz necessário, também, retomarmos nossos <u>*objetivos específicos*</u> e mostrar que os mesmos foram atingidos:

- ***Identificar posicionamentos de diferentes autores sobre Resolução de Problemas, Cálculo Diferencial e GeoGebra;***

Buscamos na literatura os vários posicionamentos de autores acerca da Resolução de Problemas, do Cálculo Diferencial e do GeoGebra. Isso fez com que novas ideias fossem surgindo e novos direcionamentos fossem criados, o que permitiu um amadurecimento contínuo diante da temática abordada nesta pesquisa.

- ***Preparar e aplicar alguns problemas sobre Cálculo, adaptando-os à resolução com o GeoGebra;***

Ao analisarmos alguns livros, selecionamos alguns problemas a fim de verificar as dificuldades e possibilidades da metodologia de ensino através da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra. Os problemas propostos foram adaptados de dois livros bastante conhecidos no currículo do Cálculo dos cursos de Ciências Exatas (***Cálculo – Volume 1*** de James Stewart, 2011; e ***Cálculo – Volume 1*** de George B. Thomas, 2010).

Em seguida, inserimos algumas orientações para a utilização do GeoGebra diante dos problemas selecionados, adaptando-os em atividades investigativas condizentes com a perspectiva adotada neste trabalho.

- ***Investigar as formas como os alunos atuam no contexto da Resolução de Problemas;***

As atividades de Otimização que foram aplicadas traziam de imediato a ideia de que seriam utilizados conhecimentos do Ensino Básico, já que os problemas tinham como dados a área, o volume ou diziam que tinham uma superfície quadrada. Porém, aqui cabe a importância da Resolução de Problemas em trazer atividades para se chegar à formalização de um determinado conteúdo, fazendo com que a compreensão seja o foco central.

- ***Analisar quais as estratégias que os alunos utilizaram para solucionar certos problemas e quais as dificuldades apresentadas diante das Derivadas;***

Os alunos participantes da pesquisa tentaram resolver alguns dos problemas arbitrando valores. Coube, nesse momento, a tarefa de observar para depois incentivar ("Observar e incentivar" diz respeito a uma das etapas constituintes do roteiro de Onuchic e Allevato). Observar no sentido de deixar os alunos livres na escolha de seus procedimentos para a resolução das atividades; ou seja, o momento dedicado à experimentação, à criatividade e ao levantamento de hipóteses. Incentivar no que se refere a mostrar aos alunos um caminho mais curto ou mais promissor para se chegar aos resultados (momento em que os alunos foram incentivados a encontrarem uma fórmula geral para um problema proposto, a fim de aplicar os conhecimentos do Cálculo).

A partir de então, as dificuldades dos alunos diante das Derivadas foram surgindo, principalmente no que se refere aos pontos críticos obtidos a partir da primeira derivada. No entanto, os conhecimentos adquiridos pelos alunos, durante a graduação quando cursaram a disciplina de Cálculo, foram vindo à tona.

Tanto a Resolução de Problemas quanto o GeoGebra têm potencial diante da Matemática. Então, sempre focando no firme propósito de refletir, o nosso objetivo geral da pesquisa foi investigar as potencialidades que os dois juntos desempenham para a disciplina de Cálculo Diferencial.

A princípio, a utilização da metodologia de Resolução de Problemas serviu para trabalharmos a partir de atividades adaptadas de alguns livros de Cálculo com os alunos seguindo o esquema proposto por Onuchic e Allevato (2011). Depois de uma escolha cuidadosa das atividades, os alunos trabalharam em conjunto para resolvê-las, enquanto observávamos e incentivávamos na busca de suas soluções. Aqui, coube muita cautela no sentido de tentar aproveitar ao máximo todo o conhecimento utilizado pelos participantes, sendo possível, após a plenária e a busca do consenso diante de determinada atividade, chegarmos às conclusões efetivas através da formalização do conteúdo (se, por exemplo, o aluno arbitrasse um valor para encontrar o maior volume possível para a caixa da atividade 4 e, por coincidência, esse valor realmente levasse ao volume máximo, então, a aplicação das Derivadas não seria necessária para o caso).

Além disso, a Resolução de Problemas permitiu visualizar algumas aplicações das Derivadas no que se refere a problemas práticos de máximos e mínimos, o que pode ampliar as estratégias de resolução das atividades.

Nesta pesquisa, a Resolução de Problemas não surgiu nem como a concepção da Educação Matemática nem como a da Matemática Aplicada, mas sim como aplicação matemática. Ou seja, os problemas de Otimização retirados de livros clássicos de Cálculo foram problemas geradores para (re)construir alguns conceitos do Cálculo Diferencial.

Concomitantemente, o software GeoGebra, que possui uma interface amigável e de fácil manipulação, contribuiu para o desenvolvimento das atividades, possibilitando a investigação dos conceitos do Cálculo de maneira dinâmica, além de facilitar a construção de gráficos dificilmente obtidos manualmente. O fato de refazer os problemas de Otimização no GeoGebra mostrou que quando se alia as soluções analíticas com as representações gráficas obtidas, os alunos se mostraram satisfeitos e impulsionados a realizarem outras atividades, pois o processo de visualização ocorrido proporcionou aos participantes uma melhor compreensão, por exemplo, do significado do *ponto crítico*. Ademais, os aspectos visuais, geométricos e algébricos, proporcionados pela dinamicidade do software, serviram para ampliar a compreensão de alguns conceitos do Cálculo.

Corrobaramos com Richit et al. (2012), quando afirmam que o desenvolvimento de atividades pautadas no GeoGebra abre possibilidades de compreensão de conceitos de Cálculo, sendo possível criar hipóteses e conjecturas. Isto pôde ser percebido já que os gráficos permitiram apreciar algumas características amplas dos dados retirados dos problemas de Otimização.

Por fim, concluímos que as potencialidades da Resolução de Problemas somadas às do GeoGebra permitem intensificar o ensino e a aprendizagem do Cálculo, ampliando a compreensão de alguns conceitos. ***A metodologia da Resolução de Problemas***, que partiu dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos, os quais precisaram de incentivos para se chegar ao insight necessário para as soluções adequadas, contribuiu para o entendimento do conteúdo, pois os problemas de Otimização permitiram visualizar algumas aplicações das Derivadas. Já ***o GeoGebra*** permitiu verificar e ampliar alguns conceitos do Cálculo, despertando um olhar crítico diante dos problemas e estimulando um raciocínio visual, o que pode auxiliar tanto na formulação e validação de conjecturas, quanto na compreensão e fixação de alguns conceitos.

Mas, não foi fácil chegar a estas considerações. Ao ler esta dissertação pode se ter a impressão de um processo linear de pesquisa, o que não aconteceu, pois na coleta e análise de dados surgiram novas ideias e muitas dúvidas, fazendo com que o processo para organizar a estrutura desta dissertação fosse sendo construído visando à questão norteadora da pesquisa. Espero, em trabalhos futuros, estar contribuindo mais um pouco, ou seja, antecipar ações de outros como disse Romberg (2007). Assim sendo, esperamos que este trabalho seja um propulsor para outros pesquisadores que objetivem explorar novas potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra, possibilitando o aumento das estratégias de resolução de alguns problemas e intensificando o uso dinâmico de alguns conceitos do Cálculo.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associado o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosófico-científicos) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ALMEIDA, H. R. F. L.; BORBA, M. C.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula: diferentes vozes em uma investigação.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

AMORIM, F. V.; SOUSA, G. C; SALAZAR, J. V. **Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, Recife, *Anais*... Recife: EDUMATEC, p. 1-12, 2011.

ASSUMPÇÃO, P. G. S. **Introdução ao estudo de derivada: uma sequência didática com o uso do software Geogebra.** Especialização em Educação Matemática). Universidade Federal de Santa Maria: Rio Grande do Sul, 2011.

ÁVILA, G.; ARAÚJO, L. C. L. **Cálculo: ilustrado, prático e descomplicado**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2009.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 195f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BICUDO, M. A. V. **Sobre a Fenomenologia**. In: BICUDO, M.A.V.; ESPOSITO, V.H.C. (Org.). Pesquisa qualitativa em educacao: um enfoque fenomenologico. Piracicaba: UNIMEP, 1994, p. 15-22.

BITTAR, M. **A Escolha do Software Educacional e a Proposta Didática do Professor: estudo de alguns exemplos em matemática**. In: Willian Beline; Nielce Meneguelo Lobo da Costa. (Org.). Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões. Campo Mourão - PR: ed. Fecilcam, 2010, p. 215-243.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C. **Educação Matemática a distância online: balanço e perspectivas**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, Recife, *Anais*... Recife: EDUMATEC, p. 1-9, 2011.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORRÕES, M. L. C. O Computador na Educação Matemática. 1998. Disponível em: . Acesso em: 30 de Outubro de 2019.

BOYER, C. B. **História da Matemática**: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974, p. 287 - 305.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma breve história da integral: de Arquimedes a Lebesgue**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

ESCHER, M. A. **Dimensões teórico-metodológicas do cálculo diferencial e integral: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem**. 2011. 222f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, São Paulo.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas/SP: Editora da Unicamp, 2011.

FARIAS, S. A. D.; RÊGO, R. G. **Matemática e Educação à Distância: Resolução de Problemas no Ensino de Geometria com o uso do Geogebra**. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2016.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GOMES, D. A.; BARBOSA, A. C. C.; CONCORRIDO, C. F. R. **Ensino de matemática através da resolução de problemas: análise da disciplina RPM implantada pela SEEDUC-RJ**. In: EMP - Educação, Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.19, n.1, 105-120, 2017. Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/29552. Acesso em: 25 de setembro de 2018.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. In: Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV, 1999. Anais. Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275. Acesso em: 07 de junho de 2019.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática**. 2014. 315f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Rio Claro, 2014.

HUANCA, R. R. H.; ALMEIDA, Beatriz Rodrigues de. **O Ensino e a Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas na sala de aula: por quê?** Anais do III CONAPESC, Campina Grande/PB, v. 1, 2018.

JURADO, U. M. **Formulação de Problemas. Avanços e desafios da Educação Matemática.** In: REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura/UFRN, ano 11, n. 21, 2016, p. 79-90.

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. **Professores que Utilizam Tecnologia de Informação e Comunicação para Ensinar Cálculo.** Educação Matemática Pesquisa, v. 13, n. 3, 2011.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de derivadas em cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do Geogebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Minas Gerais, 2015.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005, p. 213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; HUANCA, R. R. H. **A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores**. In: Maria Clara Rezende Frota; Bárbara Lutaif Bianchini; Ana Maria F. Tucci de Carvalho. (Org.). Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior. 1 ed. Campinas: Papirus, 2013, v. 1, p. 307-331.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N.S.G.; NOGUTI, F.C.H.; JUSTULIN, A.M. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí, Paco Editoral, 2014.

ONUCHIC, L. R.; ANDRADE, C. P. **Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP**. In: Perspectivas para Resolução de Problemas/ Lourdes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Júnior, Márcio Pironel (orgs) - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

PAGANI, E. M. L; ALLEVATO, N. S. G. **Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil**. Revista VIDYA, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014. Disponível em http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/42/166. Acesso em: 14 de jun. 2018.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p.

__________Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução: ONUCHIC, L.; BOERO, M.L. In: BOLEMA - Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: UNESP, n.27, p.93-139, 2007.

REIS, F.S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 450f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

RICHIT, A. et al. **Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia.** Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 90-99, 2012.

RICHIT, A. **Interfaces entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas na perspectiva da educação matemática.** In: REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática, ano 11, n. 21, 2016, p. 109-122.

ROMBERG, T. A. **Perspectives on Scholarship and Research Methods**. In: Grouws, D. A. (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Lear**ning,** p.49-64. NCTM, New York: Simon & Schuster, 1992.

RYAN, M. **Cálculos para leigos.** Tradução de Márcia Danielle. 2. ed. Rio de Janeiro: Alta Books, 2011.

SANTOS, A. R. **Metodologia científica - a construção do conhecimento**. 7. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SCHROEDER, T. L. LESTER JR., F; K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). New directions for elementary school mathematics. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SERRAZINA, L.; VALE, I.; FONSECA, H.; PIMENTEL, T. **Investigações matemática e profissionais na formação de professores**. In: Encontro de investigação em educação matemática, 11, 2002, Coimbra. In: Ponte, J. P., Costa, C., Rosendo, A. I., Maia, E., Figueiredo, N., Dionísio, A. F. (Org.). Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores, Lisboa: SEM-SPCE. 2002, p. 41-58.

SERRAZINA, L. **Resolução de Problemas e Formação de Professores: um olhar sobre a situação em Portugal**. In: Perspectivas para Resolução de Problemas/ Lourdes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Júnior, Márcio Pironel (orgs) - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

STEWART, J. ***Cálculo***. Volume I. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2011.

THOMAS, G. B. ***Cálculo I***. São Paulo: Addison Wesley, 2010.

VALE, I. **Resolução de Problemas um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais**. In: Perspectivas para Resolução de Problemas/ Lourdes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Júnior, Márcio Pironel (orgs) - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

VALE, I.; PIMENTEL, T. **Resolver Problemas - Criando Soluções, Vendo**. In: REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura/UFRN, ano 11, n. 21, 2016, p. 8-23.

VIEIRA, A. F. **Ensino do Cálculo Diferencial e Integral: das técnicas ao *humans-with-media*.** 2013. 204 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Tradução de Daniel Bueno; Revisão Técnica de Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016.

ANEXO A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, autorizo o pesquisador Edson Américo da Silva a armazenar e exibir minha imagem por meio de fotos, vídeos ou gravações com a finalidade de inserir as informações que serão geradas na pesquisa científica intitulada "As possibilidades de aprendizagem do Cálculo Diferencial no contexto da Resolução de Problemas auxiliadas pelo Geogebra" e em publicações dela decorrentes, como revistas científicas, jornais, congressos, entre outros eventos dessa natureza. As fotos, vídeos e gravações de voz ficarão sob a responsabilidade do pesquisador.

Tendo conhecimento sobre a pesquisa e seus procedimentos metodológicos, autorizo, também, que as informações obtidas possam ser publicadas em aulas, seminários, congressos, palestras ou periódicos científicos. No entanto, os participantes não devem ser identificados por nome em qualquer uma das vias de publicação ou uso.

Campina Grande, 22 de Maio de 2019

____

Assinatura do Pesquisador

ANEXO B - AVALIAÇÃO DOS ALUNOS SOBRE AS ATIVIDADES APLICADAS

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS SOBRE AS ATIVIDADES APLICADAS

1. Em qual instituição você estudou ou estuda a graduação? E em que ano você concluiu (ou concluirá) o curso?

   Graduação - UFCG (campus Cuité). Conclusão em 2018

2. O que você considerou mais interessante durante a aplicação das atividades?

   A resolução em coletivo, a discussão (Plenária) após a resolução. E o uso da tecnologia como facilitadora.

3. O que você achou da Metodologia da Resolução de Problemas? Utilizaria em suas aulas?

   Sim utilizo e continuarei, sempre quando possível, essa metodologia, pois percebe-se que tal metodologia contribui bastante para o desenvolvimento de aulas de Matemática. Um dos pontos que chamou atenção.

4. O que você achou do Geogebra? Utilizaria em suas aulas?

   Sim. Achei bastante eficaz para o uso de cálculos como os que fizemos. Cálculo Diferencial. Principalmente para a visualização gráfica.

5. Em resumo, relate o que você aprendeu durante as atividades abordadas.

   Pode-se citar a rica contribuição dessa intervenção para o esclarecimento conceitual de conteúdos relacionados ao cálculo diferencial, que muitas vezes ficam sem significados vazios.

6. Houve pontos negativos durante as atividades? Se sim, qual(is)?

Data: 28/05/19

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS SOBRE AS ATIVIDADES APLICADAS

1. Em qual instituição você estudou ou estuda a graduação? E em que ano você concluiu (ou concluirá) o curso?
UEPB - 2014

2. O que você considerou mais interessante durante a aplicação das atividades?
→ relembrar alguns conteúdos
→ Utilizar o geogebra (não lembrava +)
→ Possibilidade de construir o raciocínio de forma qualitativa

3. O que você achou da Metodologia da Resolução de Problemas? Utilizaria em suas aulas? Eu acho magnífica, pretendo conhecer mais sobre a metodologia e sem sombra de dúvidas será muito utilizada nas minhas aulas (quando for professora, ainda não estou lecionando)

4. O que você achou do Geogebra? Utilizaria em suas aulas? É uma ferramenta muito útil, com toda certeza facilita muito tanto na questão da correção quanto da visualização. Tendo em vista que o visual sempre ocasiona mais atenção.

5. Em resumo, relate o que você aprendeu durante as atividades abordadas. Eu sempre tive dificuldade em enxergar o calculo no dia-a-dia, essas atividades me deram uma boa base para aplicação das derivadas, sem contar que é sempre bom revisar o grafico cartesiano.

6. Houve pontos negativos durante as atividades? Se sim, qual(is)? Com relação as atividades não encontrei pontos negativos.

Data: 28/05/19

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS SOBRE AS ATIVIDADES APLICADAS

1. Em qual instituição você estudou ou estuda a graduação? E em que ano você concluiu (ou concluirá) o curso?
   Universidade Estadual da Paraíba, Concluido no ano de 2014.

2. O que você considerou mais interessante durante a aplicação das atividades? O mais interessante é poder ter visto o conteúdo abordado sendo trabalhado por meio da metodologia da Resolução de problemas e mais ainda o uso do geogebra para visualização do que estava sendo feito no papel.

3. O que você achou da Metodologia da Resolução de Problemas? Utilizaria em suas aulas? É uma metologia que instiga e proporciona ao aluno um ganho enorme no processo de resolução das atividades que são propostas. A busca de solução para o problema é o que mais chama a atenção porque desafia muito o aluno.

4. O que você achou do Geogebra? Utilizaria em suas aulas?
   É uma ferramenta que é primordial para a questão de visualização de gráficos e sua manipulação e com certeza usaria sim em minhas aulas para que os alunos tivessem uma noção do que estão fazendo normalmente.

5. Em resumo, relate o que você aprendeu durante as atividades abordadas.
   O ganho de conhecimento foi bastante considerável, tanto na manipulação do Geogebra e suas funções, além de aplicação de derivadas em problemas. Então o manuseio do geogebra e o trabalho com derivadas ficaram fixados.

6. Houve pontos negativos durante as atividades? Se sim, qual(is)?
   Um pontos negativos foi no início não compreender muito bem o que as atividades ~~queriam~~ pedia para se fazer, mas que durante o andamento das mesmas foi ficando bem claro.

Data: 28/05/13

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS SOBRE AS ATIVIDADES APLICADAS

1. Em qual instituição você estudou ou estuda a graduação? E em que ano você concluiu (ou concluirá) o curso?
UEPB, 2017 (porque tive greves)

2. O que você considerou mais interessante durante a aplicação das atividades? Pude retornar a conteúdos que já havia visto, e também aprender aplicações que me pareciam extremamente difíceis.

3. O que você achou da Metodologia da Resolução de Problemas? Utilizaria em suas aulas? Super importante, pois dá significado ao que foi estudado e mal compreendido, auxilia a preencher as lacunas deixadas na formação superior.
Sim, eu utilizaria.

4. O que você achou do Geogebra? Utilizaria em suas aulas? Já o conhecia, porém descobri novas funcionalidades, como a janela CAS. Sim, utilizaria.

5. Em resumo, relate o que você aprendeu durante as atividades abordadas. Aprendi a resolver problemas clássicos de maximização e minimização de uma forma prática e significativa.
Aprendi também significados que coisas como a primeira derivada ou a reta tangente em um ponto num gráfico podem representar.

6. Houve pontos negativos durante as atividades? Se sim, qual(is)? Não encontrei pontos negativos, mesmo com minhas dificuldades e lacunas em cálculo, achei as atividades acessíveis.

Data: 28/05/19

APÊNDICE A - PRODUTO EDUCACIONAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EDSON AMÉRICO DA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

CAMPINA GRANDE – PB
2020

EDSON AMÉRICO DA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE – PB
2020

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O produto a seguir foi construído a partir da dissertação de mestrado intitulada **"As potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra em problemas de Otimização do Cálculo Diferencial"**, defendida em 2020. Nosso objetivo geral foi investigar as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do software GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização. Assim, como objetivos específicos, preparamos e aplicamos alguns problemas sobre Cálculo, adaptando-os à resolução com o GeoGebra; investigamos as formas como os alunos atuam no contexto da Resolução de Problemas; analisamos quais as estratégias que os alunos utilizaram para solucionar certos problemas e quais as dificuldades apresentadas diante das Derivadas; e, investigamos as potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra para a disciplina de Cálculo Diferencial.

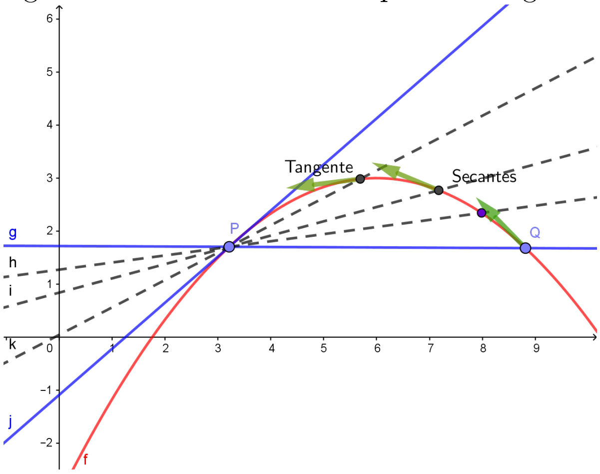
Dessa forma, este Produto Educacional tem a pretensão de servir como um manual para professores de Cálculo que irão trabalhar as Derivadas em problemas de Otimização. Com base nos livros de Ávila (2012), Flemming (2006), Thomas (2010) e Stewart (2011), e a partir de uma apresentação da metodologia de ensino da Resolução de Problemas e do GeoGebra, serão apresentados alguns atividades que podem ajudar o professor durante a abordagem dos conceitos da Derivada.

1 A DERIVADA

1.1 Retas Tangentes

Para definir "tangência"para curvas em geral, é preciso um método dinâmico, levando em conta o comportamento das secantes que passam por um ponto P qualquer e pontos próximos (ponto Q, por exemplo), de modo que este ponto próximo se mova em direção a P ao longo da curva (Figura 5.1).

Figura 1: Método dinâmico para a tangência

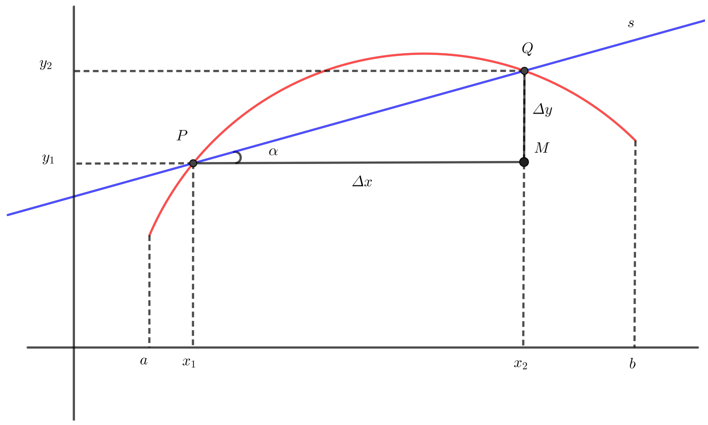


A partir da figura acima, fica evidenciado que a tangente a uma curva no ponto P é a reta através de P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$. Perceba que mantendo-se P fixo e movendo Q sobre a curva em direção a P, a inclinação da reta secante irá variar, de modo que, à medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante.

Uma outra maneira de se analisar a reta tangente é a seguinte: sejam $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a,b), $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pertencentes à curva $y = f(x)$. Agora, considerando s uma reta secante que passar por P e Q, e considerando o triângulo retângulo PMQ (Figura 2), tem-se a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) dado por:

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Figura 2: Inclinação da reta secante s



Definição 1 *Chama-se reta tangente a curva no ponto $P(x_1, y_1)$ à reta que passa por P e cujo coeficiente angular é o número m, também chamado declive da curva no ponto P, dado por:*

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$, pode-se escrever o limite na seguinte forma:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

A partir de então, conhecendo-se a inclinação m da reta tangente à curva no ponto P, é possível encontrar a equação da reta tangente à curva em P, já que a equação da reta é dada na forma:

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

Problema 1 *Encontre a reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ em $x = 1$.*

Solução:

Se $f(x) = x^2$, então $f(x_1) = x_1^2$ e $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 = x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2$.

Agora, tomando

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2) - x_1^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$m(x_1) = 2x_1,$$

que é a inclinação da reta tangente à curva $f(x) = x^2$ num ponto $(x_1, f(x_1))$.

Para $x_1 = 1$, tem-se que $m(1) = 2 \cdot 1$, ou seja,

$$m(1) = 2$$

Tomando a equação da reta, tem-se que

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

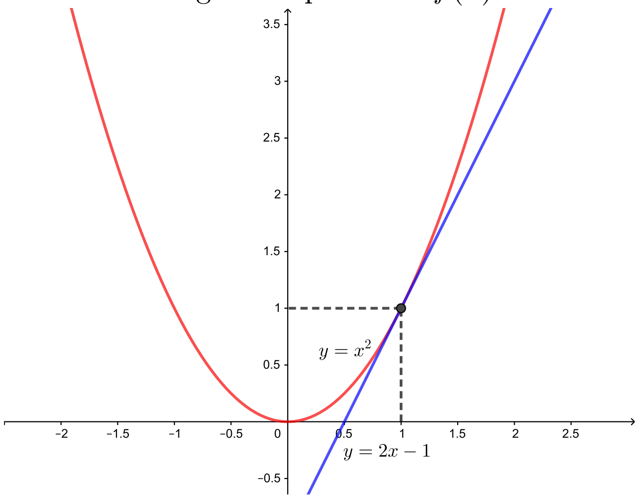
$$y - f(1) = 2(x - 1)$$

$$y - 1^2 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1,$$

que é a equação da reta tangente ilustrada na figura abaixo.

Figura 3: Reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ em $x = 1$



1.2 Derivada de uma função em um ponto

A expressão

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

é chamada, de acordo com o Thomas(2009), *razão incremental ou diferenças dividida de f em x_0 com incremento h.* Se esta razão incremental possuir um limite quando h tende a zero, então esse limite é denominado *derivada de f em x_0*. Essa razão incremental pode ser interpretada como um coeficiente angular da secante e, nesse caso, a derivada dá o coeficiente angular da tangente e da curva no ponto onde $x = x_0$. Se a razão incremental for interpretada como uma taxa média de variação, então a derivada dá a taxa de variação da função em relação a x no ponto $x = x_0$.

Definição 2 *A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função dada por $f'(x)$, tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

se o limite existir.

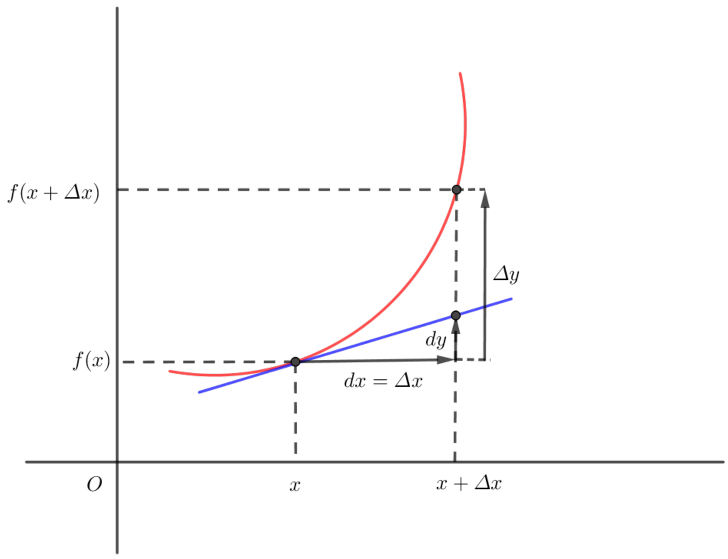
A função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Para indicar a derivada de uma função y são usados outros tipos de notação, como por exemplo $\dot{y}$; essa notação é devida ao inglês Isaac Newton (1642 - 1727). Por outro lado, deve-se a Leibniz (1646 - 1716) a seguinte notação $\frac{dy}{dx}$. Para ele, a derivada devia ser vista como o quociente de quantidades infinitamente pequenas dy e dx. Exemplo:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

Para entender a notação de Leibniz, observe a figura abaixo:

Figura 4: Representação da razão incremental



Ou seja, incremetando Δx a x, a variável y também será incrementada, de tal forma que

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

e a razão incremental será dada por:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - (x)} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se $\Delta x \to 0$, então Δy também tenderá a zero, de modo que a razão incremental se aproxime da derivada. Em outras palavras, a derivada $f'(x)$ é o quociente entre dy e dx.

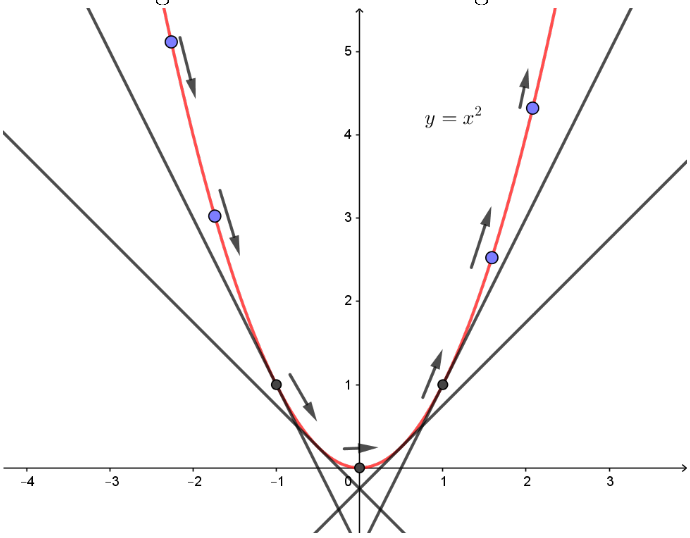
Problema 2 *Dada a função $f(x) = x^2$, encontre $f'(2)$.*

<u>*Solução:*</u>

Usando a definição

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2) - 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} \\
f'(2) &= 4
\end{aligned}
$$

Figura 5: A derivada e o gráfico



A partir da figura acima, é possível fazer algumas análises a respeito da derivada e do gráfico de uma função (que neste caso é a função $y = x^2$): começando em qualquer valor negativo de x, a derivada vai crescendo com o crescer de x, se anula em $x = 0$ (tangente horizontal) e, na parte positiva do eixo Ox, o declive $2x$ é positivo e vai crescendo á medida que x cresce. Ou seja, a reta tangente vai passando de muito vertical na região negativa, se aproximando da horizontal em $x = 0$ e, em seguida, com o crescer da derivada, a tangente vai ficando muito vertical na região positiva. Tudo isso evidencia que a curva tem concavidade voltada para cima.

1.3 Derivada como taxa de variação

Existe uma maneira bem comum de analisar a derivada a partir da ideia de velocidade. Para isso, a cinemática vem à tona com o movimento de um ponto material cuja equação horária $s = s(t)$ descreve a posição de um móvel ao longo de uma trajetória como função do tempo t. É sabido que a velocidade média é dada por:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Porém, para saber a velocidade num dado instante t, deve-se considerar intervalos de tempo cada vez menores, de modo que as velocidades médias encontradas nesses intervalos dêem informações mais precisas do que acontece no instante t. Dessa maneira, surge o conceito de velocidade instantânea, $v = v(t)$ no instante t como o limite da razão incremental que dá a velocidade média com $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A velocidade média e a velocidade instantânea são, respectivamente, taxa de variação média e taxa de variação instantânea, ambas da função espacial $s = s(t)$.

O conceito de taxa se aplica às funções de um modo geral. Assim, a *taxa de variação média* da função f no intervalo $(x, x + \Delta x)$ é dada por

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

No entanto, a taxa de variação num ponto x é a taxa de variação instantânea, ou seja, a derivada dada por $f'(x)$.

2 Regras de Derivação

Para muitas funções, encontrar sua derivada através da sua definição, calculando o limite da razão incremental é um processo simples. Porém, nem sempre esse procedimento é viável em vários outros tipos de funções, sendo necessário o uso de regras que serão destacadas a seguir. A dedução dessas regras fica a critério do leitor, podendo ser verificada em qualquer livro de Cálculo, já que a seguir serão apresentadas as regras com seus resultados finais.

1. **Derivada de uma constante:** seja f dada por $f(x) = c$, onde c é uma constante. Então:
$$f'(x) = 0$$

2. **Derivada de x^n:** seja n um inteiro positivo. Então:
$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

3. **Derivada de uma soma:** sejam f e g duas funções deriváveis de x. Então, a soma dessas duas funções é derivável em qualquer ponto onde ambas sejam deriváveis:
$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

4. **Derivada de um produto:** sejam f e g funções deriváveis em x. Então, o produto entre elas também é derivável e dado por:
$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

5. **Derivada do produto de uma constante por uma função:** sejam f uma função, c uma constante e g uma função dada por $g(x) = c \cdot f(x)$. Então:

$$g'(x) = [c \cdot f(x)]'$$

$$= (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 + c \cdot f'(x)$$

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

6. **Derivada de um quociente:** sejam f e g deriváveis em x e $g(x) \neq 0$. Então, o quociente $\frac{f}{g}$ é derivável em x e

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

3 Derivada de uma função composta

Suponha que para derivar um função $y = (x^3 + 4x)^{10}$ fosse necessário expandir essa potência binomial até obter um polinômio de grau 30. Primeiro, seria um processo analiticamente enfadonho que exigiria muito tempo; e, segundo, as regras de derivação vistas anteriormente não seriam suficientes. Perceba que y é uma função composta, pois tomando $f(u) = u^{10}$ e $g(x) = x^3 + 4x$, tem-se que:

$$f(x^3 + 4x) = (x^3 + 4x)^{10} = y$$

$$f[g(x)] = y$$

Nesse caso, a derivada pode ser encontrada com o uso da *regra da cadeia*, segundo a qual a derivada da composta de duas funções deriváveis é produto de suas derivadas calculadas em pontos adequados.

Definição 3 *A regra da cadeia é uma regra de derivação segundo a qual se $y = f(u)$, $u = g(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então, a função composta $y = f[g(x)]$ tem derivada que é dada por*

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Sugere-se ao leitor verificar nos livros de Cálculo a demonstração da regra da cadeia.

Problema 3 *Calcular a derivada de $y = (x^3 + 4x)^{10}$*

Solução:

Essa função pode ser reescrita da seguinte forma $y = u^{10}$, $u = x^3 + 4x$. Daí:

$$\frac{dy}{du} = 10u^9$$

e

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4$$

Portanto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot (3x^2 + 4)$$
$$y' = 10(x^3 + 4x)^9(3x^2 + 4)$$

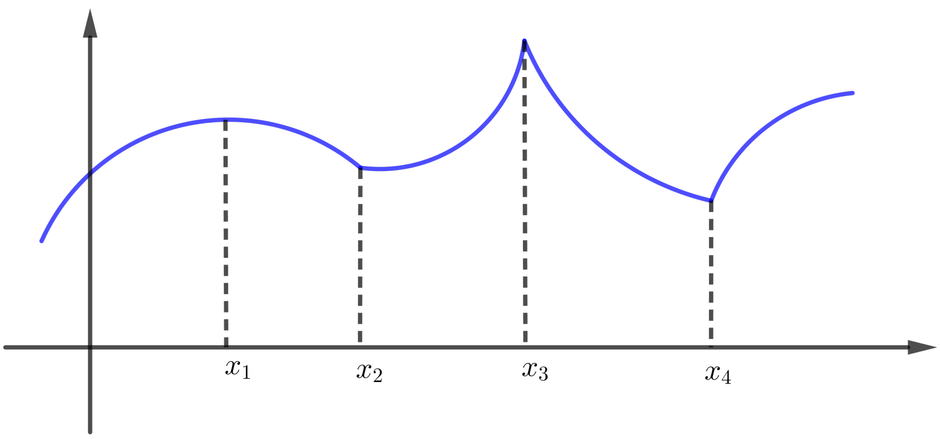
4 Aplicações da Derivada

4.1 Extremos de funções

A partir da derivada é possível obter valores extremos de uma função contínua, que são importantes na resolução de *problemas de otimização* (aqueles que permitem encontrar a solução ótima para um dado problema ou situação).

Seja o gráfico de uma função qualquer $y = f(x)$ mostrado na figura abaixo, onde estão destacados os pontos de abscissas x_1, x_2, x_3, x_4.

Figura 6: Pontos extremos de uma função



Esses pontos são chamados *pontos extremos da função* cujos valores $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são os *máximos relativos* e $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os *mínimos relativos.*

Definição 4 *Uma função f terá um valor* ***máximo relativo*** *em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo x nesse intervalo.*

Definição 5 *Uma função f terá um valor* ***mínimo relativo*** *em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo x nesse intervalo.*

Máximos e mínimos relativos são também chamados de *máximos e mínimos locais* (**extremos locais**), pois se referem a uma domínio restrito da função. Já o máximo e mínimo referentes a todo o domínio da função costumam ser chamados de *máximo e mínimo absolutos* (conhecidos como **extremos absolutos** ou **extremos globais**).

Definição 6 *Seja f uma função de domínio D. Então, f tem um valor* ***máximo absoluto*** *em D em um ponto c, se $c \in D(f)$ e*

$$f(c) \geq f(x),$$

para qualquer x em D.

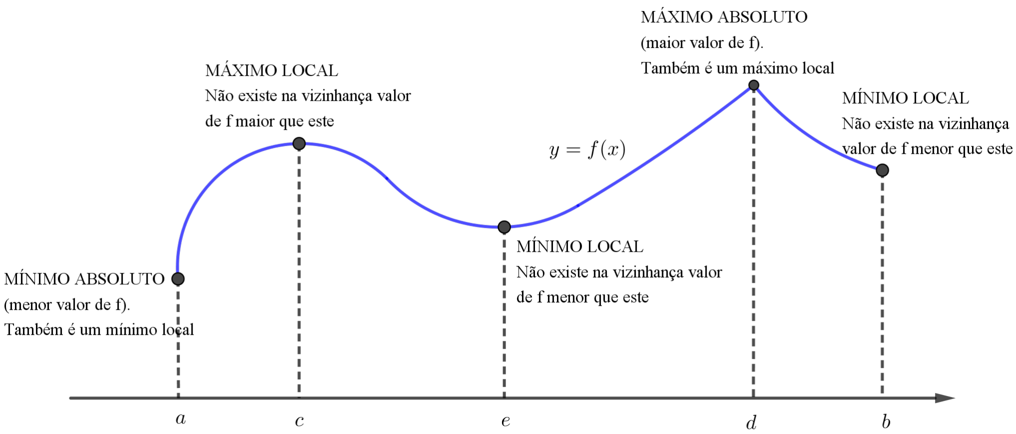
Definição 7 *Seja f uma função de domínio D. Então, f tem um valor* ***mínimo absoluto*** *em D no ponto c, se $c \in D(f)$ e*

$$f(c) \leq f(x),$$

para qualquer x em D.

Afim de simplificar as ideias vistas até agora, a figura abaixo mostra um gráfico com alguns pontos, onde a função tem valores extremos em seu domínio $[a, b]$.

Figura 7: Classificação dos máximos e mínimos



A partir de então, se faz necessário introduzir uma nova definição, a dos *pontos críticos*, muito usada no âmbito de máximos e mínimos.

Definição 8 ***Pontos Críticos*** *ou pontos estacionários de uma função f são pontos onde a derivada da função se anula. Ou seja, é um ponto interior do domínio f em que f' é zero ou indefinida.*

Assim sendo, o primeiro passo a ser feito para encontrar os extremos de uma função será determinar os pontos críticos da mesma (supostos máximos e mínimos locais, ou absolutos). Para saber se tal ponto será máximo ou mínimo, será destacado a seguir o teorema de grande importância que explicará o porquê de investigar apenas alguns valores para determinar o extremo de uma função. Mais uma vez, a demonstração deste teorema pode ser verificada em livros de Cálculo, ficando essa tarefa incubida ao leitor.

Teorema 1 ***Primeiro teorema da derivada para valores de extremos locais***

Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f' é definida em c, então:

$$f'(c) = 0$$

Ou seja, de acordo com o Teorema 1, a primeira derivada de uma função será sempre zero em um ponto interior em que a função tenha um valor extremo local e a derivada seja definida.

4.2 Teorema sobre derivadas

Teorema 2 ***O Teorema de Rolle***
Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se

$$f(a) = f(b),$$

então há pelo menos um número c em (a, b) tal que

$$f'(c) = 0$$

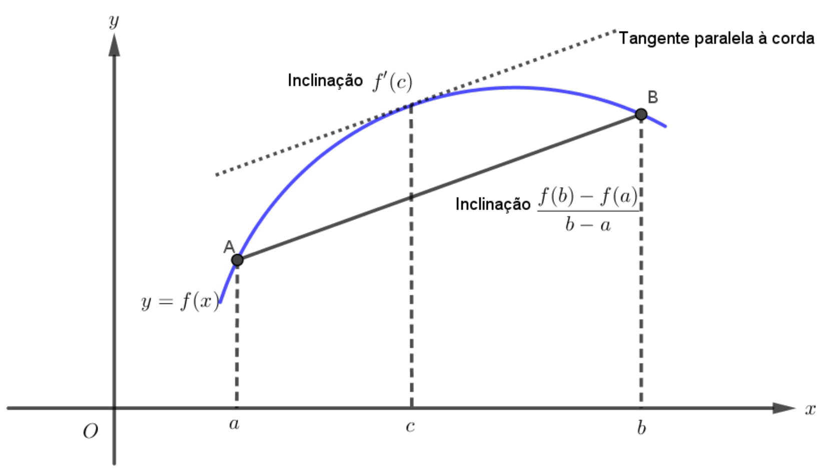
Em outras palavras, segundo o teorema de Rolle, uma curva derivável tem ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva cruza uma reta horizontal, conforme explanado na figura abaixo:

A partir do Teorema de Rolle, é possível chegar ao *Teorema do Valor Médio*, o qual estabelece que, dada uma função f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe pelo menos um ponto c em (a, b) de modo que a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, conforme visualizado na figura abaixo. Em outras palavras, é uma versão inclinada do Teorema de Rolle.

Teorema 3 ***O Teorema do Valor Médio***
Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então, existe pelo menos um ponto c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Figura 8: Teorema do Valor Médio

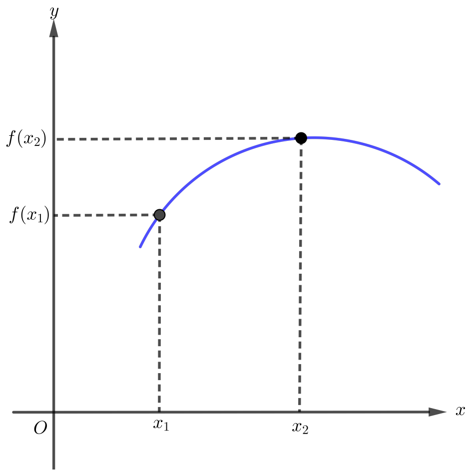


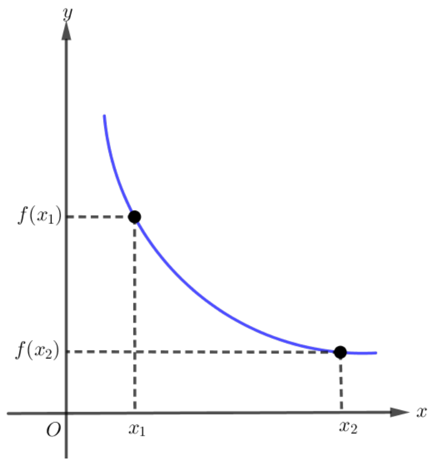
4.3 Testes das derivadas primeira e segunda

O tópico que será visto agora requer uma certa revisitação aos conceitos de função crescente e decrescente. Seja uma função f, definida num intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de I. Então:

- f é **crescente** em I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$;
- f é **decrescente** em I se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$;

Figura 9: Funções crescentes e decrescentes





Se uma função f for crescente ou decrescente num intervalo I, então ela é dita monótona nesse intervalo.

No âmbito do Cálculo Diferencial, a análise geométrica do sinal da derivada de uma função permite determinar os intervalos onde essa função derivável é crescente ou decrescente. Tem-se, então, a seguinte proposição.

Proposição 1 *Seja uma função f contínua num intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a,b).*

(i) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é* ***crescente*** *em $[a, b]$;*

(ii) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é* ***decrescente*** *em $[a, b]$;*

A seguir, serão apresentados teoremas que permitem estabelecer critérios para determinar os extremos de uma função.

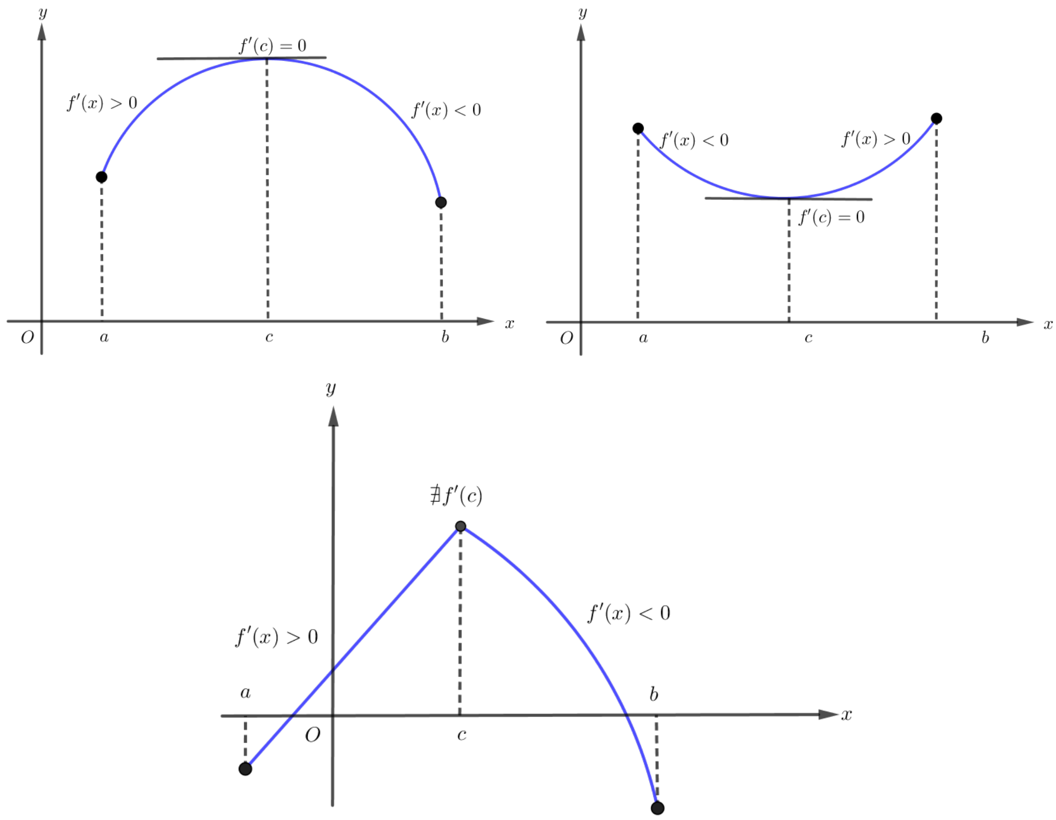
Teorema 4 ***Teste da derivada primeira***

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto crítico c pertencente ao intervalo dado. Então:

(i) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um* ***máximo relativo*** *em c;*

(ii) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um* ***mínimo relativo*** *em c;*

Figura 10: Possibilidades do Teste da derivada primeira



Problema 4 *Dada a função $f(x) = (x^3/3 - 4x + 2)$, encontre os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos.*

Solução:

Primeiro, derive $f(x)$ e iguale a zero para encontrar os pontos críticos da função:

$$f'(x) = 0$$

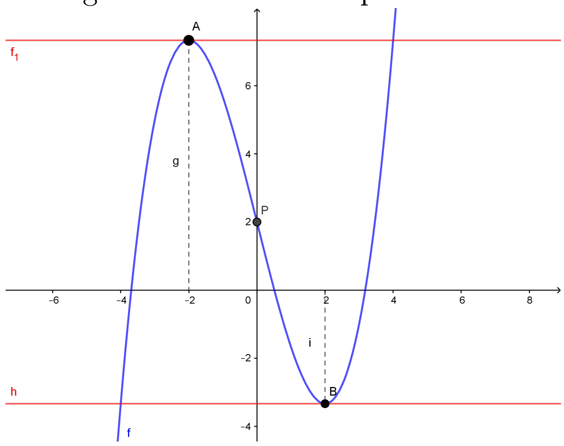
$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

.

Assim, usando o Teste da Derivada Primeira, conclui-se que: $f'(x)$ é positiva para $x < -2$, ou seja, é crescente em $(-\infty, -2)$; $f'(x)$ é negativa para $-2 < x < 2$, ou seja, é decrescente no intervalo $(-2, 2)$; e, $f'(x)$ é positiva para $x > 2$, ou seja, $f'(x)$ é crescente em $(2, +\infty)$. O gráfico da figura abaixo mostra, portanto, que f tem um *máximo relativo* em -2 e um *mínimo relativo* em 2.

Figura 11: Gráfico do problema 4



Teorema 5 ***Teste da derivada segunda***
Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f pertencente ao intervalo dado. Se f for duplamente derivável neste intervalo (f'' em (a, b)), então:

(i) *Se $f''(c) > 0$, o gráfico de f ao longo do intervalo é **côncavo para cima** e f tem um valor mínimo relativo em c;*

(i) *Se $f''(c) < 0$, o gráfico de f ao longo do intervalo é **côncavo para baixo** e f tem um valor máximo relativo em c;*

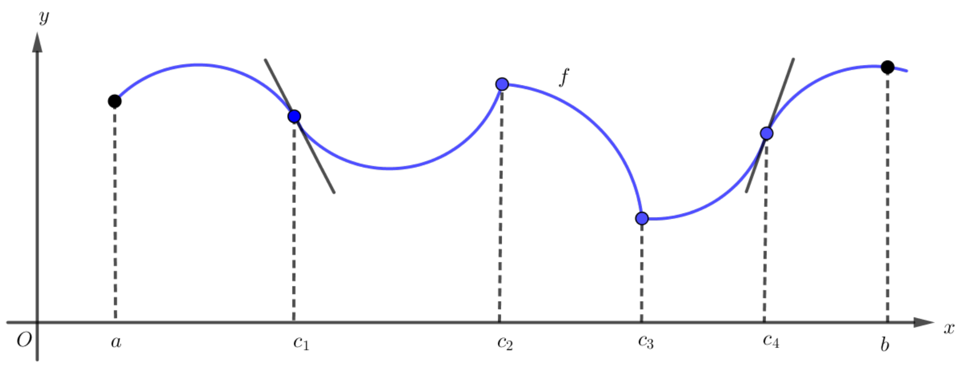
Existem pontos no gráfico de uma função onde a concavidade muda de sentido. Esses pontos recebe um nome especial, o qual será definido a seguir.

Definição 9 *Um ponto de inflexão é aquele dado por $P(c, f(c))$ do gráfico de um função contínua f, desde que exista um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das situações abaixo ocorra:*

(i) *f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b);*

(ii) *f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b);*

Figura 12: Pontos de inflexão



A partir da figura acima, pode-se fazer algumas observações:

1. As abcissas c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão;

2. c_2 e c_3 são pontos de extremos de f, mas f não é derivável nesses pontos;

3. Existem as derivadas de $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$;

4. A reta tangente corta o gráfico de f em $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$;

Problema 5 *Dada a função $f(x) = (x^3/3 - 4x + 2)$ do problema 14, determine os pontos de inflexão e indique os intervalos onde a função tem concavidade voltada para cima ou para baixo.*

Solução:

Sabendo que os pontos críticos da função dada são -2 e 2, e utilizando a derivada segunda de f ($f''(x) = 2x$), conclui-se que: o gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(0, +\infty)$ e tem um mínimo relativo de valor 2; f é côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e tem um máximo relativo em -2; no ponto $c = 0$ a concavidade muda de sentido, ou seja, o ponto $P(c, f(c))$ do gráfico da função é um *ponto de inflexão* ($P(0, 2)$).

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E TECNOLOGIAS DIGITAIS

5.1 A Resolução de Problemas como uma metodologia

Para Onuchic e Allevato (2011), não existem formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula de Matemática. Mas, em 1998, no intuito de ajudar os professores a empregar essa metodologia em suas aulas, foi criado um *Roteiro de Atividades* que permitia fazer uso dessa metodologia, promover entusiasmo em suas salas de aula e fazer com que os alunos vissem a Matemática com um olhar mais confiante (a criação desse Roteiro teve a participação de 45 professores participantes de um Programa de Educação Continuada). Este roteiro, em sua primeira versão, foi subdividido nas seguintes etapas: formar grupos e entregar uma atividade, o papel do professor, registrar os resultados na lousa, realizar uma plenária, analisar os resultados, buscar um consenso e fazer a formalização.

Entretanto, várias pesquisas e experiências em formação de professores revelaram que os alunos ainda continuavam com muitas dificuldades diante da matemática e, pensando nisso, Onuchic e Allevato (2011) reiteraram esse Primeiro Roteiro e incluíram algumas mudanças para a criação de um Segundo Roteiro que provesse aos alunos os conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia, ficando assim caracterizado:

- ***Preparação do problema:*** Selecionar um problema, visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

- ***Leitura individual:*** Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

- ***Leitura em conjunto:*** Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

  - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

- ***Resolução do problema:*** A partir da compreensão do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que ao longo de sua resolução conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- ***Observar e incentivar:*** Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor atua como mediador e leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

  - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e as ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

- ***Registro de resoluções na lousa:*** Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- ***Plenária:*** Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- ***Busca do consenso:*** Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta com toda a classe chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- ***Formalização do conteúdo:*** Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Porém, Onuchic e Andrade (2017), afirmam que em 2015, Onuchic e Allevato propuseram mais uma etapa para este roteiro intitulada como *Proposição de problemas.* Esta etapa pode ser analisada de acordo com dois pontos de vista: de um lado, para os professores, propor problemas é fundamental para ensinar matemática através da resolução de problemas, pois favorece e enriquece a aprendizagem dos alunos; por outro lado, para os alunos, propor seus próprios problemas recairia no fato de que a capacidade de resolver problemas e, assim, compreender ideias matemáticas, seria enriquecida.

5.2 Tecnologias Digitais na Educação Matemática

A tecnologia exerce forte influência na vivência societária. Sua aplicabilidade no mundo moderno abrange as indústrias, o comércio, os transportes, os meios de comunicações e, também, a educação, destacando-se no âmbito do ensino e da aprendizagem.

No que diz respeito à Educação Matemática, a tecnologia assumiu diferentes nomes em épocas distintas. Nesse sentido, Borba, Silva e Gadanidis (2014) refletiram a partir de várias pesquisas desenvolvidas no Brasil e consideraram que o uso das tecnologias digitais na Educação Matemática no Brasil pode ser estruturado em quatro fases:

> A primeira fase é caracterizada pelo uso do software LOGO, a segunda pelo uso de softwares de geometria dinâmica e sistemas de computação algébrica, a terceira pelo uso da internet em cursos a distância e a quarta pelo uso da internet rápida que democratiza a publicação de material digital na grande rede. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 13).

No quadro abaixo, é apresentado, de maneira resumida, os aspectos e elementos que caracterizam cada uma dessas fases.

Quadro 1 – As quatro fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática

	Tecnologias	**Natureza ou base tecnológica das atividades**	**Perspectivas ou noções teóricas**	**Terminologia**
Primeira fase (1985)	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação	Construcionismo; micromundo.	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda fase (início dos anos 1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; fórum; google.	Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC).
Quarta fase (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

Fonte: Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 39).

Porém, Borba, Silva e Gadanidis (2014) destacam que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a fase anterior, já que elas vão se integrando de tal maneira que aspectos que surgiram nas três primeiras fases ainda são fundamentais dentro da quarta fase.

Com o quadro 1, é possível inferir que as fases podem ser caracterizadas por terminologias diferentes: a expressão TI (Tecnologias Informáticas ou Tecnologias da Informação), que é utilizada nas duas primeiras fases, se refere aos computadores, calculadoras gráficas e softwares; já o termo TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) é utilizada na terceira fase, caracterizando-se pelo uso dos computadores e da internet; por sua vez, a expressão TD (Tecnologias Digitais) passa a designar o uso dos computadores, tablets, telefones celulares e internet rápida.

Percebe-se que o intenso desenvolvimento das tecnologias vem promovendo, com o passar do tempo, novos cenários para a sala de aula e novos procedimentos metodológicos. Como bem destaca Richit et al. (2012), a inserção da tecnologia faz com que os processos de ensino e aprendizagem possam ser mais significativos e produtivos para o aluno, mas não é trivial para o professor, demandando tempo para sua incorporação nas aulas.

A utilização das Tecnologias Digitais em sala de aula, em especial o computador, é uma tendência muito discutida na atualidade devido à importância que representam. Essas ferramentas computacionais possuem um amplo potencial pedagógico, podendo auxiliar o professor em relação a diversos conteúdos e, no ensino da Matemática, podem contribuir para o entendimento de um determinado conceito.

Por sua vez, a internet passou a oferecer aos professores e alunos um mundo de possibilidades no que tange à troca de informações e comunicação de ideias, além de sites dedicados ao uso da informática na educação, inclusive com sugestões de atividades. Para Borba e Penteado (2007), o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que inclua uma "alfabetização tecnológica". Segundo os mesmos autores, essa tal alfabetização deve ser vista como uma maneira de aprender a ler essa nova mídia a partir da inserção dos computadores em atividades essenciais como ler, escrever, entender gráficos, entre outros, em que a informática na escola se constitui em parte da resposta a questões ligadas à cidadania.

Segundo Onuchic e Allevato (2005):

> Ademais, o computador permite relacionar a descoberta empírica com as representações Matemáticas algébricas e, ainda, confirmar numericamente modelos

> algébricos por meio da possibilidade de infindáveis simulações. Estas características o tornam um poderoso recurso quando associado à Resolução de Problemas. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 225).

O uso dos softwares possibilita, por meio de construções e manipulações, a exploração dos conceitos matemáticos, permitindo que os resultados adquiridos analiticamente de um problema possam ser verificados por meio de visualizações em 2D ou 3D. Na disciplina de Cálculo, por exemplo, que apresenta certo grau de abstração, seria interessante o uso de softwares para facilitar o entendimento das representações gráficas e algébricas. Mas, para que as tecnologias contribuam de maneira eficaz no processo de aprendizagem, é necessário que os professores adotem metodologias que explorem, juntamente com os alunos, todo o conceito matemático envolvido.

Nesse sentido, Gravina e Santarosa (1999) alertam que para haver a mudança de paradigmas na educação, é necessário ser crítico e cuidadoso no processo de uso da informática:

> A informática por si só não garante esta mudança, e muitas vezes engana pelo visual atrativo dos recursos tecnológicos que são oferecidos, os quais simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento. (GRAVINA; SANTAROSA, 1999, p. 74).

De nada adiantaria o uso da informática ou de outras ferramentas computacionais sem um devido planejamento, no qual o professor deve aliar as atividades e conteúdos objetivando o desenvolvimento de habilidades nos alunos que garantam uma aprendizagem efetiva. Se, por um lado, essas ferramentas podem auxiliar os professores, por outro lado, as mesmas possibilitam aos alunos um conhecimento dinâmico, já que é possível modelar e simular problemas, visualizando situações dificilmente obtidas de maneira manual. Assim sendo, Bittar (2010) reforça esse ponto quando diz que:

> Não podemos correr o risco de usar a informática como um "apêndice" do curso habitual, ou seja, o professor dá a aula da maneira como está habituado, na maioria das vezes somente no ambiente papel e lápis, e, quando leva os alunos ao laboratório, as atividades realizadas não contribuem com a compreensão dos conceitos estudados. (...) Ora, nesse caso o computador foi usado de forma artificial e não foi explorado em sua potencialidade máxima como um meio que pode oportunizar mudanças no processo de ensino e aprendizagem que sejam de ordem do conhecimento (BITTAR, 2010, p. 239 - 240).

A princípio, tanto o aluno quanto o professor devem ter compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos para, só assim, tirar o melhor proveito do computador, conforme destaca Allevato (2005):

> (...) para utilizar eficientemente o computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (ou o professor) precisam ter conhecimento do que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Eles precisam saber Matemática embora, muitas vezes, uma Matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino. (ALLEVATO, 2005, p. 79).

A presença das tecnologias redefine o papel do professor e do aluno, pois implicam nas formas de transmitir e armazenar informações e nos modos de construção do conhecimento. De acordo com Marin e Penteado (2011), a presença das tecnologias no cenário educacional faz com que o professor enfrente novas situações, sendo desafiado a rever e ampliar seus conhecimentos, já que as tecnologias provocam demandas que vão além da sala de aula. Para Borba (2011), as tecnologias podem levar os alunos a desenvolverem suas ideias, criarem conjecturas, validando-as e levantando subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática, devido às possibilidades de investigação e experimentação que essas mídias propiciam.

Em outras palavras, o professor precisa repensar sua prática docente, estando preparado para os diversos desafios e situações que as tecnologias proporcionam, ao mesmo tempo em que motiva os alunos à exploração de ideias, à criatividade e ao enfrentamento de desafios que permitam aos estudantes fazerem suas próprias descobertas. Assim, Borba e Penteado (2007) reforça esse pensamento quando dizem que:

> Entendemos que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento. (BORBA e PENTEADO, 2007, p. 45).

De maneira geral, as tecnologias promoveram e ainda promovem diversas tendências no ensino como um todo, e isso sugerem mudanças na ação dos docentes.

Para Richit (2016), o uso das tecnologias digitais para a realização de cálculos, a representação de conceitos geométricos e funções é importante na resolução de problemas e na experimentação matemática, pois nessas situações os processos algoritmizados não se constituem no objetivo-fim dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Ademais,

> Verifica-se que o entendimento acerca do papel das tecnologias digitais nos processos de ensino e aprendizagem presente nas diretrizes político-pedagógicas dos PCN evidencia aspectos como a visualização, a otimização de cálculos e operações algébricas, ampliação das possibilidades de representação gráfica e, sobretudo, a realização de atividades de investigação e experimentação matemática. Além disso, destaca a possibilidade de promover uma visão ampliada sobre a matemática, uma vez que o desenvolvimento de atividades matemáticas, associadas às situações sociais ou naturais da realidade e pautadas no uso de tecnologias ampliam os modos de ver e aprender a própria matemática. Os aspectos aqui destacados sinalizam a sinergia entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas. (RICHIT, 2016, p. 115).

Assim, nosso interesse é trabalhar a metodologia da Resolução de Problemas juntamente com a tecnologia, mais precisamente o GeoGebra, o qual será abordado a seguir.

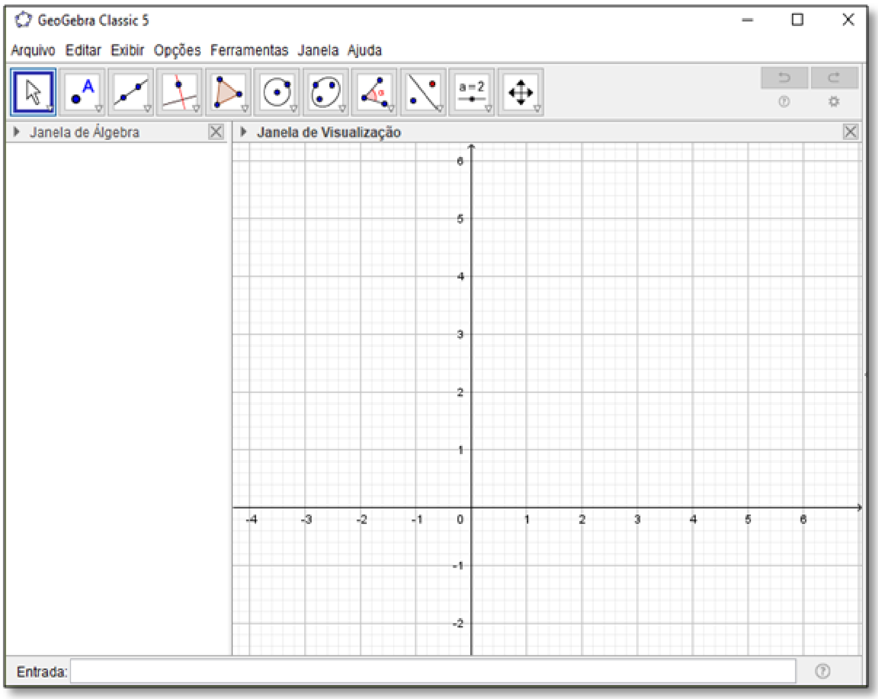
5.3 O Software GeoGebra

Desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software com alto potencial didático e pedagógico que reúne ferramentas para Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, podendo ser utilizado nos sistemas operacionais *Windows*, *Linux* ou *Mac OS*, abrangendo desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Sua interface dispõe de um campo de entrada, de uma janela de Álgebra e outra de Geometria, em que cada objeto geométrico criado possui uma correspondência algébrica, de modo que tudo que é construído na zona gráfica o próprio software algebriza mostrando uma expressão algébrica que represente tal figura construída; a partir de então, é possível manipular objetos construídos e movê-los sem alterar suas propriedades. Por isso, o GeoGebra é conhecido como um software de geometria dinâmica, em que o usuário assume o controle das representações a partir da execução de cada uma das etapas necessárias para uma determinada construção geométrica.

Além do mais, o GeoGebra facilita a investigação dos alunos, que podem movimentar os objetos e acompanhar as variações ocorridas, relacionando os conteúdos algébricos e geométricos, o que torna algo extremamente valioso no ensino de Cálculo Diferencial.

A janela inicial do Geogebra é formada por uma barra de menus, uma barra de ferramentas, uma janela de álgebra, uma janela de visualização, o campo de entrada de texto, um menu de comandos e um menu de símbolos, conforme figura abaixo:

Figura 13 - Interface do GeoGebra

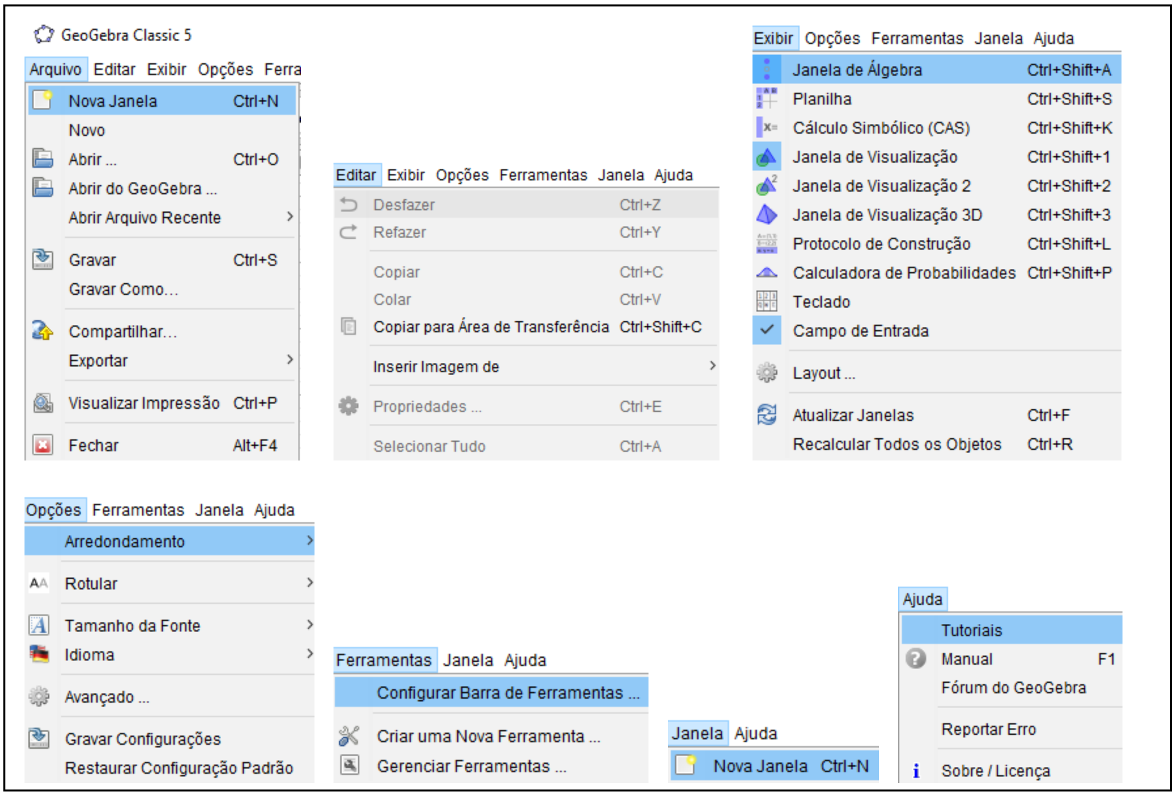


Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

De maneira geral, a tela inicial do GeoGebra é dividida em três partes: *a janela algébrica*, que é responsável pela edição, mostrando informações como valores, coordenadas, funções, além de equações; *a janela gráfica*, que é responsável pela visualização dos gráficos, pontos, vetores, segmentos, polígonos, que podem ser introduzidos a partir da entrada de texto; e *o campo de entrada*, que, por sua vez, é responsável por criar funções ou equações, sendo usada para inserir comandos.

O menu localizado na parte superior da interface do GeoGebra é constituído por várias funções, explanadas da seguinte forma:

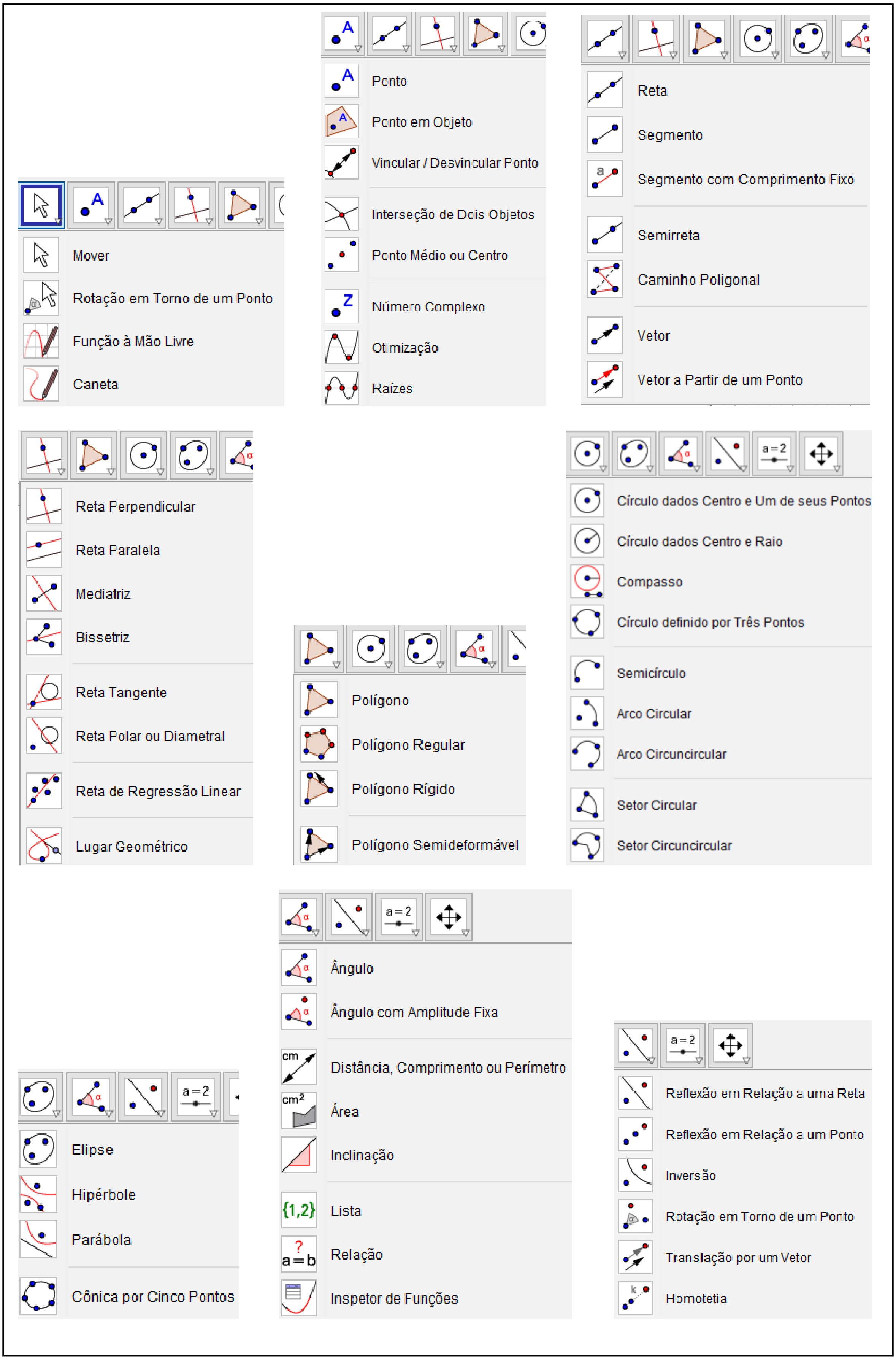
Figura 14 - Barra de menu do GeoGebra



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

Uma barra de ferramentas ou barra de comandos (Figura 15) permite que o usuário, através de um acesso rápido, tenha à disposição uma gama de opções que pode ser usada de acordo com a atividade proposta a ser desenvolvida. Tais comandos podem ser facilmente utilizados devido à clareza com o qual os mesmos são mostrados; ou seja, com uma rápida inspeção visual, o usuário já tem uma ideia do que cada qual significa. Por outro lado, há de se destacar que a disposição de alguns comandos pode variar de acordo com a versão instalada do GeoGebra. Aqui, foi utilizada a versão 5 (*GeoGebra Classic 5*).

Figura 15 - Detalhes da Barra de ferramentas



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

A seguir, serão apresentadas as atividades propostas.

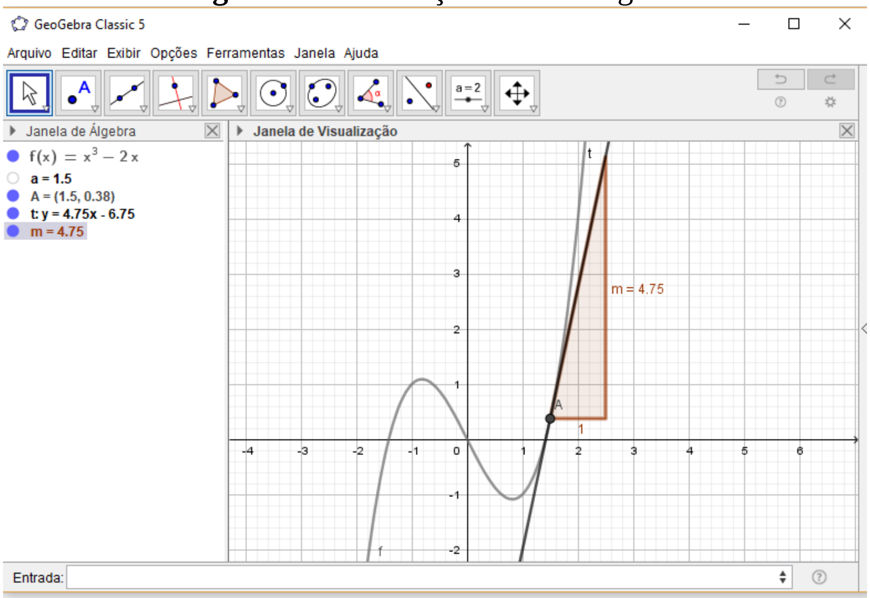
6 ATIVIDADES PROPOSTAS

- **Atividade 1: Retas tangentes**

  - **Objetivos:** construir a ideia de derivadas a partir da reta tangente num ponto; entender a ideia da derivada a partir de uma função dada.
  - **Roteiro:**

1) Insira a função $f(x) = x^3 - 2x$ e aperte *Enter;*
2) Entre com a abscissa do ponto em $a = 3/2$;
3) Digite agora o ponto sobre o gráfico de f com a abscissa a: $A = (a, f(a))$;
4) Insira t = *Tangente [A,f]* que é a reta tangente de f no ponto a;
5) Por fim, digite m = *Inclinação[t]* que é a inclinação da reta tangente e confira o resultado com a figura abaixo.

Figura 16 - Inclinação da reta tangente



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- **Atividade 2: Retas tangentes**

- ✓ **Objetivos:** construir a ideia de derivadas a partir da reta tangente num ponto; entender a ideia da derivada a partir de uma função dada; visualizar a reta tangente sobre a curva a partir da alteração angular da reta.
- ✓ **Roteiro:**

1) Na barra de menu, na 3ª janela (*Exibir*) selecione a opção *Cálculo Simbólico (CAS)* ou pressione *Ctrl+Shift+K*;

2) Insira a função $f(x) = (-x^2/10) + x$ na caixa de entrada. Em seguida, na 1ª linha da janela CAS, digite *f(x)* e perceba que a função aparecerá no campo desta janela;

3) Na próxima linha da janela CAS, digite *f(x)* e em seguida clique na opção 9, para derivar a função; ou, simplesmente, digite a função *f'(x)*;

4) Na caixa de entrada, insira a variável $a = 1$ e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-1, 11] com incremento 1;

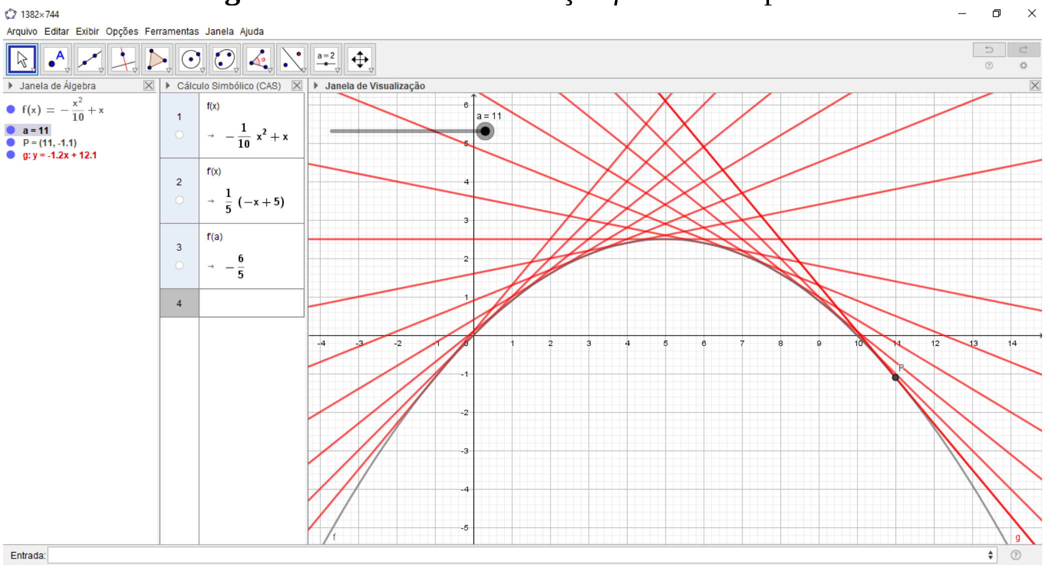
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto $P = (a, f(a))$, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente,* clique sobre a curva de *f* e clique sobre o ponto *P;*

7) Na terceira linha da janela CAS, insira *f'(a)* para visualizar o valor da derivada no ponto *a;*

8) Clique com o botão direito do mouse sobre a reta tangente e selecione *Habilitar Rastro.* Em seguida, varie o valor de *a* através do controle deslizante e verifique se o resultado obtido coincide com a figura abaixo:

Figura 17 - Derivada da função *f* em vários pontos



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

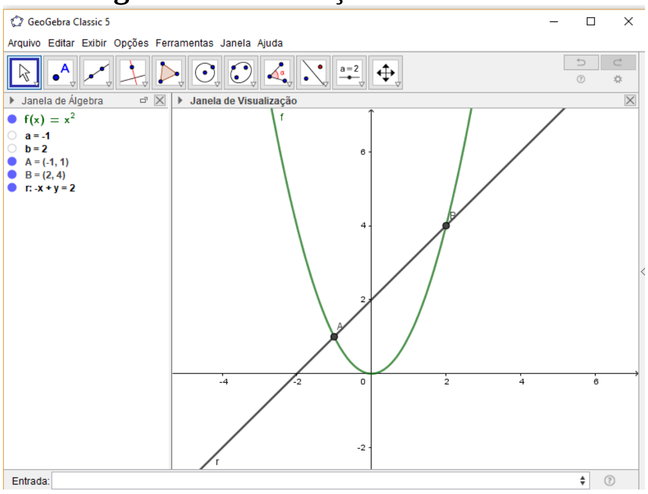
Com isso, percebe-se que com a variação de *a*, ocorre também a variação do coeficiente angular da reta tangente à curva *f* no ponto *P*. Ao mesmo tempo, é possível verificar a variação da reta tangente na janela de álgebra e a variação da derivada na janela CAS.

- **Atividade 3: Teorema do Valor Médio**

  - ✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar o Teorema do Valor Médio.
  - ✓ **Roteiro:**

1) No campo de entrada, insira a função *f(x) = x^2* e tecle *Enter;*
2) Insira *a = -1* (tecle *Enter*) e *b = 2* (tecle *Enter*);
3) Entre, agora com os seguintes pontos: *A = (a, f(a))* e *B = (b, f(b));*
4) O próximo comando é: *r = Reta[A, B]*. Feito isso, verifique se seu gráfico encontra-se em conformidade com a figura abaixo:

Figura 18 – Ilustração da atividade 3



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

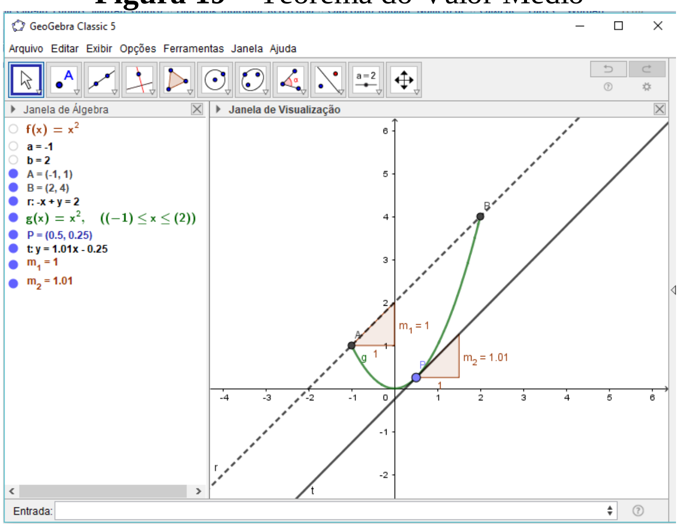
5) Agora, clique com o botão direito do mouse sobre a parábola e desmarque a opção *Exibir Objeto*;

6) Pressione o botão direito do mouse sobre a reta que intercepta A e B, selecione a opção *Propriedades* e escolha (na guia *Estilo*) um tipo de *linha;*

7) No campo de entrada insira: *Função[f,a,b]* (tecle *Enter*), *P=Ponto[f]* (tecle *Enter*), *t=Tangente[P,f]* (tecle *Enter*), *m_1 = Inclinação[r]* (tecle *Enter*), *m_2 = Inclinação[t]* (tecle *Enter*).

8) Arraste o ponto P, confira o resultado obtido com a figura abaixo para as devidas análises:

Figura 19 – Teorema do Valor Médio



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- **<u>Atividade 4</u>: Se 1200cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa (STEWART, 2011, p. 307).**

  - ✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar a aplicação das derivadas;
  - ✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas o material disponível*;*

____

____

____

2) Escreva uma fórmula $V(x)$ para o volume da caixa em função da medida x;

____

____

3) Construa o gráfico no Geogebra;

4) Na caixa de entrada, insira a variável $a = 1$ e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-30, 30] com incremento 5;

5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto $P = (a, V(a))$, em que a cada variação de a ocorre variação na posição de P sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de V e clique sobre o ponto P;

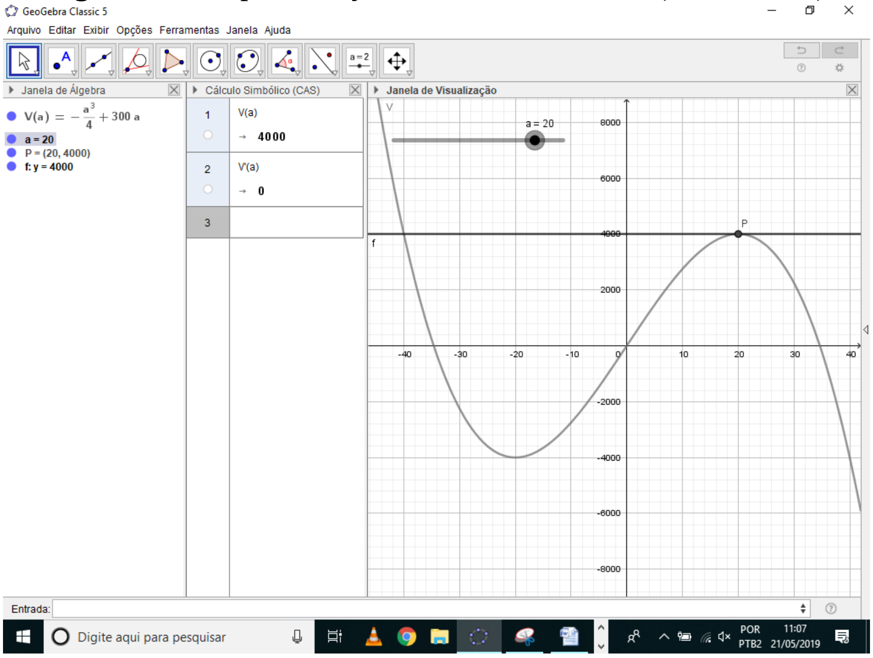
7) Na terceira linha da janela CAS, insira $V'(a)$ para visualizar o valor da derivada no ponto a;

8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a figura abaixo e relate suas conclusões;

____

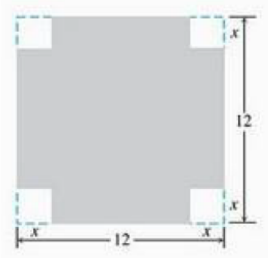
____

Figura 20 - Representação do volume máximo (Atividade 4)



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- <u>Atividade 5</u>: **Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 12 x 12cm e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima? (THOMAS, 2010, p. 303).**



✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar a aplicação das derivadas;

✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados*;*

____

____

2) Escreva uma fórmula *V(x)* para o volume da caixa em função da medida *x* da aresta da base;

3) Construa o gráfico no Geogebra;

4) Na caixa de entrada, insira a variável $a = 1$ e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-10, 10] com incremento 0.1;

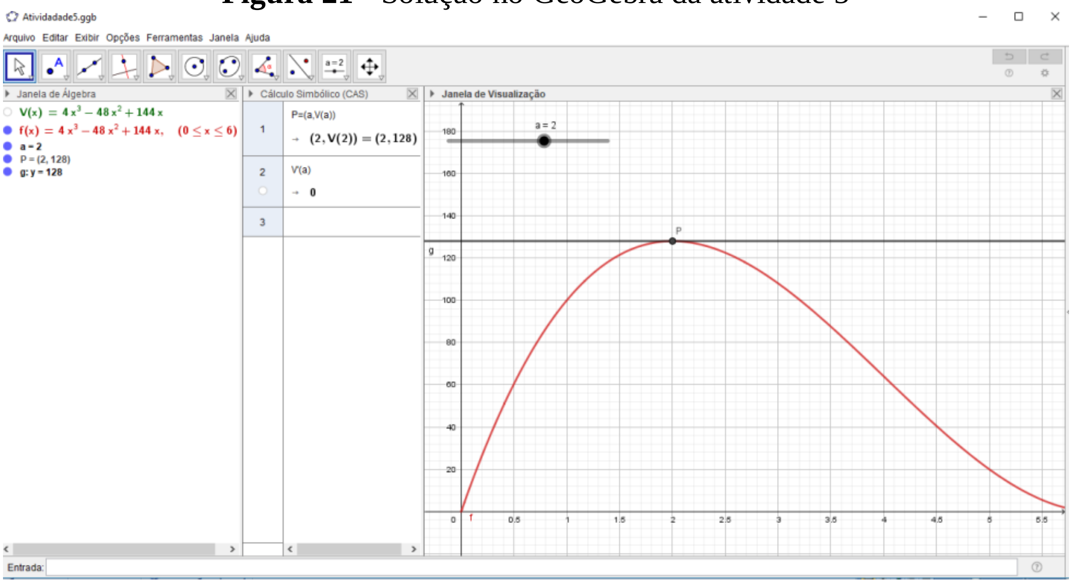
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto $P = (a, V(a))$, em que a cada variação de a ocorre variação na posição de P sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de V e clique sobre o ponto P;

7) Na terceira linha da janela CAS, insira $V'(a)$ para visualizar o valor da derivada no ponto a;

8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a figura abaixo e relate suas conclusões;

Figura 21 - Solução no GeoGebra da atividade 5



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- **<u>Atividade 6</u>: Um fazendeiro tem 1200m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área? (STEWART, 2011, p. 302).**

✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar a aplicação das derivadas;

✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados. Verifique, também, a possibilidade de obter diferentes áreas do campo retangular;

____

____

2) Obtenha a expressão para a área em função de x. Para isso, obtenha a expressão para o perímetro em função dos comprimentos x e y;

____

3) Construa o gráfico no Geogebra;

4) Na caixa de entrada, insira a variável $a = 1$ e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-50, 1000] com incremento 50;

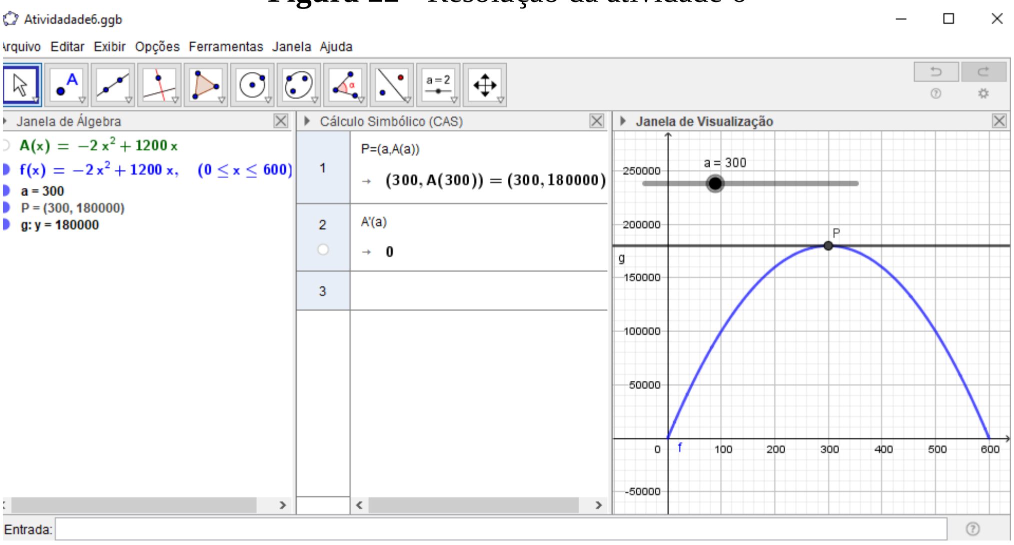
5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto $P = (a, A(a))$, em que a cada variação de a ocorre variação na posição de P sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de A e clique sobre o ponto P;

7) Na terceira linha da janela CAS, insira $A'(a)$ para visualizar o valor da derivada no ponto a;

8) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a figura abaixo e relate suas conclusões;

Figura 22 - Resolução da atividade 6



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

- **<u>Atividade 7</u>: Sua metalúrgica foi contratada por uma fábrica de papel para projetar e construir um tanque retangular de aço, com base quadrada, sem tampa e com $500cm^3$ de capacidade. O tanque será construído soldando-se chapas de aço umas às outras ao longo das bordas. Quais as dimensões para a base e a altura que farão o tanque pesar o mínimo possível? (THOMAS 2010, p. 311 adaptado).**

  - ✓ **Objetivos:** construir a ilustração que permita visualizar a aplicação das derivadas;
  - ✓ **Roteiro:**

1) Descreva como você irá resolver o problema considerando apenas os valores dados;

____

____

____

2) Construa o gráfico no Geogebra;

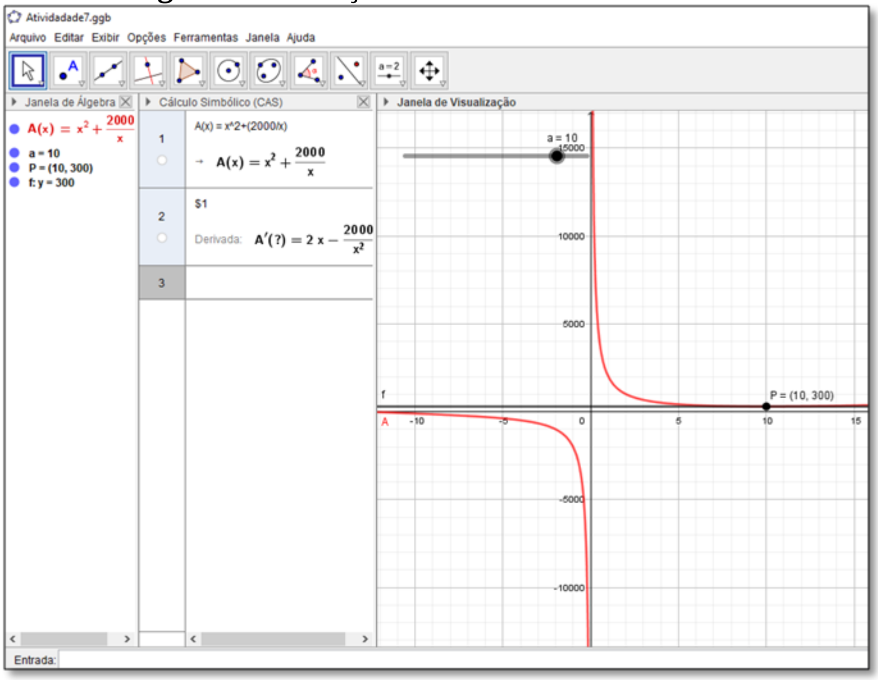
3) Na caixa de entrada, insira a variável *a = 1* e tecle *Enter*, o valor da variável aparecerá na janela de álgebra. Agora selecione a variável e observe que a mesma aparecerá na janela de visualização. Em seguida, varie o ponto no intervalo [-15, 15] com incremento 1;

5) Ainda na caixa de entrada, crie um ponto *P = (a, A(a))*, em que a cada variação de *a* ocorre variação na posição de *P* sobre a curva;

6) Clique no botão 4 da janela de álgebra, escolha a opção *Reta Tangente*, clique sobre a curva de *A* e clique sobre o ponto *P;*

7) Por fim, compare a solução encontrada analiticamente com a figura abaixo e relate suas conclusões;

Figura 23 - Solução no GeoGebra da atividade 7



Fonte: GeoGebra Classic 5, 2019.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do nosso trabalho de dissertação, elaboramos a seguinte pergunta que nos guiou durante a pesquisa: **Quais as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização?**

Na busca de respostas para tal pergunta, realizamos a pesquisa de campo com quatro alunos da Pós-Graduação do PPGECM da UEPB, campus de Campina Grande, durante dois encontros com duração de 4 horas cada, em que foram aplicadas as atividades previamente elaboradas. O objetivo das atividades (que foram divididas em duas categorias) foi de familiarizar os participantes no ambiente do GeoGebra (conhecido por alguns) e de construir ilustrações que permitissem visualizar a aplicação das Derivadas a partir de problemas de Otimização.

A princípio, a utilização da metodologia de Resolução de Problemas serviu para trabalharmos a partir de atividades adaptadas de alguns livros didáticos com os alunos seguindo o esquema proposto por Onuchic e Allevato (2011). Depois de uma escolha cuidadosa das atividades, os alunos trabalharam em conjunto para resolvê-las enquanto observávamos e incentivávamos na busca de suas soluções. Aqui, coube muita cautela no sentido de tentar aproveitar ao máximo todo o conhecimento utilizado pelos participantes, sendo possível, após a plenária e a busca do consenso diante de determinada atividade, se chegar a conclusões efetivas através da formalização do conteúdo (se, por exemplo, o aluno arbitrasse um valor para encontrar o maior volume possível para a caixa da atividade 4 e, por coincidência, esse valor realmente levasse ao volume máximo, então, a aplicação das Derivadas não seria necessária para o caso).

Além disso, a Resolução de Problemas permitiu visualizar algumas aplicações das Derivadas no que se refere a problemas práticos de máximos e mínimos, o que pode ampliar as estratégias de resolução das atividades.

Concomitantemente, o software GeoGebra, que possui uma interface amigável e de fácil manipulação, contribuiu para o desenvolvimento das atividades, possibilitando a investigação dos conceitos do Cálculo de maneira dinâmica, além de facilitar a construção de gráficos dificilmente obtidos manualmente. O fato de refazer os problemas de Otimização no GeoGebra mostrou que quando se alia as soluções analíticas com as representações gráficas obtidas, os alunos se mostraram satisfeitos e impulsionados a realizarem outras atividades, pois o processo de visualização ocorrido proporcionou aos participantes uma melhor compreensão, por exemplo, do significado do *ponto crítico*. Ademais, os aspectos visuais, geométricos e algébricos, proporcionados pela dinamicidade do software, serviram para ampliar a compreensão de alguns conceitos do Cálculo.

Por fim, concluímos que as potencialidades da Resolução de Problemas somadas às do GeoGebra permitem intensificar o ensino e a aprendizagem do Cálculo, ampliando a compreensão de alguns conceitos. ***A metodologia da Resolução de Problemas***, que partiu dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos, os quais precisaram de incentivos para se chegar ao insight necessário para as soluções adequadas, contribuiu para o entendimento do conteúdo, pois os problemas de Otimização permitiram visualizar algumas aplicações das Derivadas. Já ***o GeoGebra*** permitiu verificar e ampliar alguns conceitos do Cálculo, despertando um olhar crítico diante dos problemas e estimulando um raciocínio visual, o que pode auxiliar tanto na formulação e validação de conjecturas, quanto na compreensão e fixação de alguns conceitos.

Assim sendo, espera-se que este trabalho seja um propulsor para outros que objetivem explorar outras potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra, possibilitando o aumento das estratégias de resolução de alguns problemas e intensificando o uso dinâmico de alguns conceitos do Cálculo.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associado o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosófico-científicos) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ASSUMPÇÃO, P. G. S. **Introdução ao estudo de derivada: uma sequência didática com o uso do software Geogebra.** Especialização em Educação Matemática). Universidade Federal de Santa Maria: Rio Grande do Sul, 2011.

ÁVILA, G.; ARAÚJO, L. C. L. **Cálculo: ilustrado, prático e descomplicado**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

BITTAR, M. **A Escolha do Software Educacional e a Proposta Didática do Professor: estudo de alguns exemplos em matemática**. In: Willian Beline; Nielce Meneguelo Lobo da Costa. (Org.). Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões. Campo Mourão - PR: ed. Fecilcam, 2010, p. 215-243.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C. **Educação Matemática a distância online: balanço e perspectivas**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, Recife, *Anais*... Recife: EDUMATEC, p. 1-9, 2011.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. In: Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV, 1999. Anais. Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275. Acesso em: 07 de junho de 2019.

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. **Professores que Utilizam Tecnologia de Informação e Comunicação para Ensinar Cálculo.** Educação Matemática Pesquisa, v. 13, n. 3, 2011.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de derivadas em cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do Geogebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Minas Gerais, 2015.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005, p. 213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; ANDRADE, C. P. **Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP**. In: Perspectivas para Resolução de Problemas/ Lourdes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Júnior, Márcio Pironel (orgs) - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

RICHIT, A. et al. **Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia.** Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 90-99, 2012.

RICHIT, A. **Interfaces entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas na perspectiva da educação matemática.** In: REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática, ano 11, n. 21, 2016, p. 109-122.

STEWART, J. ***Cálculo***. Volume I. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2011.

THOMAS, G. B. ***Cálculo I***. São Paulo: Addison Wesley, 2010.