UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JOÃO LUIZ GALVÃO DE CARVALHO

IDENTIFICAÇÃO E BUSCA DE SUPERAÇÃO DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E DIDÁTICOS NO CONTEXTO DO USO DE LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

CAMPINA GRANDE – PB
2021

JOÃO LUIZ GALVÃO DE CARVALHO

IDENTIFICAÇÃO E BUSCA DE SUPERAÇÃO DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E DIDÁTICOS NO CONTEXTO DO USO DE LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel.

CAMPINA GRANDE - PB
2021

C331i Carvalho, João Luiz Galvão de.
Identificação e busca de superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no contexto do uso de laboratório de ensino de matemática [manuscrito] / João Luiz Galvão de Carvalho. - 2021.
165 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.
"Orientação : Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel. , Departamento de Matemática - CCT."

1. Educação matemática. 2. Didática. 3. Laboratório de Ensino de Matemática. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Lucas H. A. da Silva - CRB - 15/898 BC/UEPB

JOÃO LUIZ GALVÃO DE CARVALHO

IDENTIFICAÇÃO E BUSCA DE SUPERAÇÃO DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E DIDÁTICOS NO CONTEXTO DO USO DE LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 04-08-2021

BANCA EXAMINADORA

Aníbal de Menezes Maciel

____
Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Pedro Lúcio Barboza

____
Prof. Dr. Pedro Lúcio Barboza
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Rômulo Alexandre Silva

____
Prof. Dr. Rômulo Alexandre Silva
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Dedico este trabalho aos meus pais, Luiz Fernandes de Carvalho e Maria das Graças Galvão de Carvalho, com todo meu amor e gratidão por tudo que fizeram por mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, a quem pertence toda honra e glória, por ter me abençoado e me guiado em todos os momentos de minha vida e por me conceder a realização deste grande sonho.

Aos meus pais, Luiz Fernandes de Carvalho e Maria das Graças Galvão de Carvalho, por todo esforço e dedicação que tiveram para que eu tivesse a oportunidade de estudar e seguir caminhos do bem. Agradeço por todo amor e apoio dado a mim em toda minha vida. Obrigado pelo exemplo recebido e pelo incentivo incondicional.

A minha esposa Janaína Teodoro dos Santos Galvão, pelo incentivo e amor dado a mim durante toda essa longa caminhada. Agradeço por você estar sempre ao meu lado e por toda paciência e por sempre acreditar e torcer por mim.

Ao meu orientador Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel, pela paciência para comigo, se disponibilizando constantemente para que este trabalho se realizasse. Obrigado por todo o conhecimento compartilhado, pelo apoio, incentivo, pela compreensão, dedicação e orientações recebidas. Agradeço pelo profissionalismo demonstrado e pela relação de amizade que foi estabelecida.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Pedro Lúcio Barboza e Prof. Dr. Rômulo Alexandre Silva, pelas devidas colaborações que foram de súmula importância para a continuidade e melhor direcionamento deste trabalho.

Ao meu amigo Adriano Alves da Silveira, que me incentivou a fazer a inscrição na seleção do mestrado e contribuiu de forma fundamental para que eu conseguisse ingressar no mesmo. Obrigado pelas orientações valorosas em todo momento e por sempre se disponibilizar a me ajudar.

A minha amiga Jessica Almeida Araújo, pelo grande incentivo a realizar a inscrição na seleção do mestrado e por contribuir para que eu ingressasse no mesmo. Agradeço por todos os momentos de companhia nas árduas viagens, sempre um dando força e apoio ao outro, principalmente quando algum dos dois pensava em desistir. Obrigado por toda(o) companhia, ajuda, apoio, incentivo, colaboração e parceria em todo esse duro percurso realizado.

A todos os professores que participaram dessa pesquisa.

Aos meus colegas de turma, por todas as palavras de incentivo e apoio, por me ajudarem diante dos obstáculos encontrados durante o mestrado, pela troca de experiências e conhecimentos, pelos ótimos momentos vivenciados e pela companhia essencial.

Aos meus familiares, amigos, colegas e a todos que acreditaram em mim, que incentivaram e colaboraram de alguma forma para a realização deste sonho.

A todos os meus professores que contribuíram para o meu conhecimento, a saber, da Educação Infantil, do Ensino Fundamental, Médio, Superior e do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB.

A todos que compõem o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática de maneira geral e a todos que fazem a UEPB.

Por fim, a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a concretização desse sonho. Agradeço a todos que torceram por mim e que compartilharam comigo as apreensões, realizações e alegrias em todo esse longo percurso de estudos.

“O pensamento científico moderno exige que se resista à primeira reflexão. É, portanto, o uso do cérebro que está em discussão. Doravante o cérebro já não é o instrumento absolutamente adequado do pensamento científico, ou seja, o cérebro é *obstáculo* para o pensamento científico. Obstáculo, no sentido de ser um coordenador de gestos e de apetites. É preciso pensar *contra* o cérebro.” (BACHELARD, 1996, p. 307-308).

RESUMO

A presente pesquisa caracteriza-se como sendo do tipo qualitativa. Em relação aos objetivos, é considerada como exploratória. Os sujeitos da pesquisa são professores da Educação Básica atuantes na região Nordeste da Paraíba. Como foco temos a articulação entre a Didática Francesa e o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM). Nesse contexto, é possível identificarmos alguns obstáculos que dificultam o aprendizado do aluno. Esses empecilhos são difíceis de serem detectados por parte do professor, principalmente quando o mesmo não os conhece. Essas barreiras podem fazer com que o aluno desista de aprender determinado conteúdo. Buscamos responder a seguinte questão norteadora: Como o LEM pode contribuir na superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros? Temos como objetivo geral: Analisar as potencialidades do LEM na contribuição de superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros. A nossa hipótese é a de que, o LEM usado como alternativa metodológica pode contribuir nesse aspecto. Os dados foram levantados através da realização de leituras em literatura especializada e entrevistas com professores. Como resultado, identificamos diversos tipos de obstáculos, especificamente relativos ao conteúdo de Números Inteiros, E em relação às entrevistas, que a maioria dos professores não tinham conhecimento a respeito dessa teoria. Todavia, para eles, o uso do LEM revelou-se significativo na superação de dificuldades no processo ensino aprendizagem. Entendemos pela necessidade de promovermos formação continuada, que não seja apenas em Pós-Graduação para divulgação de tão importante teoria. Portanto, concluímos que essa pesquisa evidencia que o LEM pode contribuir na superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Palavras Chave: Didática da Matemática. Obstáculos Epistemológicos e Didáticos. Laboratório de Ensino de Matemática. Números Inteiros.

ABSTRACT

The current research characterizes as being a qualitative type. In relation to the objectives, it is characterized as exploratory. The research subjects are teachers from Elementary Education acting in Paraíba's Northeast region. As a focus we have the articulation between French Didactics and the Laboratório de Ensino de Matemática – LEM *[Mathematics Teaching Laboratory]*. In this context, it is possible to identify some obstacles that hamper the students' learning. These trammels are difficult to be detected by the teachers, mainly when they do not know them. These barriers may make the student give up on learning determined content. We look forward to answer the following northing question: How the LEM can contribute to the overcoming of epistemological and didactical obstacles in the process of teaching and learning mathematical contents, especially whole numbers? We have as general objective: To analyze the LEM potentialities in the contribution to the overcoming of epistemological and didactical obstacles in the process of teaching and learning mathematical contents, especially whole numbers. Our hypothesis is that, the LEM used as a methodological alternative can contribute in this aspect. The data have been raised through the reading of specialized literature and interviews with teachers. As a result, we have identified various types of obstacles, specifically related to the subject Whole Numbers. And, in relation to the interviews, the majority of the teachers did not have knowledge of this theory. However, for them, the usage of the LEM revealed significative in the overcoming of trammels in the teaching and learning process. We understand the necessity of promoting continued formation, that is not only in post-Graduation for the divulgation of this so important theory. Therefore, we have concluded that this research evidences that the LEM can contribute to the overcoming of epistemological and didactical obstacles in the process of teaching and learning mathematical contents.

Keywords: Mathematics Didactics. Epistemological and Didactical Obstacles. Mathematics Teaching Laboratory. Whole Numbers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CDCC - Centro de Divulgação Científica e Cultural

EJA - Educação de Jovens e Adultos

EM - Educação Matemática

LEM - Laboratório de Ensino de Matemática

MD - Material Didático

PB - Paraíba

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PPGECM - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática

TCC - Trabalho de Conclusão de Curso

TCI - Tecnologia da Comunicação e Informação

UEPB - Universidade Estadual da Paraíba

UFPB - Universidade Federal da Paraíba

ZG - Zero Ganha

SUMÁRIO

1 ASPECTOS GERAIS DA PESQUISA

1.1 Apresentação da Temática

Na atualidade, o processo de ensino nas escolas perpassa por constantes modificações. Estas são associadas às necessidades contemporâneas e emergentes da demanda que a sociedade requer. O ensino da Matemática também acompanha este cenário. Desta forma, debatemos cada vez mais sobre a importância do emprego de abordagens metodológicas que contribuam para a melhoria do ensino, o que consequentemente poderá conduzir os alunos a terem uma compreensão melhor dos conteúdos vistos e da mesma forma estabelecer um maior estímulo para o processo educativo.

Assim, no contexto de refletirmos cada vez mais sobre a necessidade de atualizarmos as metodologias que adotamos nos ambientes escolares, tornam-se necessárias práticas que possibilitem um maior entendimento aos alunos com relação ao conhecimento, diminuindo assim algumas barreiras que aparecem no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Nesse contexto, o professor deve sempre se perguntar: como identificar e contribuir para que os alunos superem os diferentes tipos de impedimentos relacionados ao entendimento de um conceito no processo de ensino-aprendizagem de Matemática?

Na direção oposta, muitos professores ainda trabalham de forma mecânica os conteúdos matemáticos. Apresentam conceitos, exemplos e resolvem exercícios de fixação. Depois solicitam que os alunos repitam. Acreditam que através dessa estrutura a aprendizagem será efetivada com sucesso. Para Bezerra e Rêgo (2009), esta, é uma forma de ensino que vem sendo adotada pelos professores a muito tempo e que continua sendo aplicada. Através desta prática, os professores acomodam-se e consequentemente terminam por não buscar alguma alternativa metodológica para apresentar determinado conteúdo em sala de aula. Limitam-se ao livro didático como ferramenta de trabalho, quando este existe. O que em termos, pode tornar a aula enfadonha, e consequentemente colaborar para uma maior rejeição, por parte do aluno, em aprender Matemática.

Sabemos que o conhecimento matemático, apesar de ser abstrato, tem uma aplicabilidade muito grande, conectada à realidade. Em particular, seus conceitos e resultados são aplicados a fatos práticos da vida cotidiana, como no comércio, na indústria, entre muitos outros. Nesse cenário, é necessário que o professor esteja preparado, não apenas em relação ao conhecimento próprio da matemática, mas também em relação aos pedagógicos. Para que desta forma, exerça com competência a função de contribuir para que os alunos construam e valorizem o conhecimento matemático.

No âmbito de dificuldades do processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, deparamo-nos com um conteúdo que é central nos anos finais do Ensino Fundamental, cujo estudo é iniciado no 7º ano, a saber, os Números Inteiros. Este é apresentado, em regra geral, de tal forma que o aluno se detenha às regras de sinais, se distanciando cada vez mais de um aprendizado com compreensão, principalmente no que diz respeito às operações básicas com inteiros. Assim, como outros conteúdos matemáticos, os Números Inteiros compreendem fonte de grandes dificuldades de aprendizagem e também trazem por si só alguns obstáculos que muitas vezes são inevitáveis pelo fato de serem próprios a esse conceito.

Naturalmente, os alunos cotidianamente se deparam com alguns casos que necessitam da aplicação de noções do conteúdo de Números Inteiros. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)[1], o referido assunto e suas operações, por exemplo, é experienciado cotidianamente nesses contextos (BRASIL, 1997). No entanto, muitos professores não atentam para esse aspecto no momento de elaborar suas aulas. Logo, abordam o conteúdo de maneira desconectada em relação a realidade, ou seja, descontextualizado, distante da realidade do aluno e menos atrativo para o mesmo. Consequentemente, passível de gerar alunos apáticos.

Sabemos que as operações básicas com Números Inteiros é um dos conteúdos matemáticos de difícil compreensão para os alunos do 7º ano, pois em anos anteriores os mesmos estão diante apenas de números naturais e a ideia de existência de números negativos ainda não foi construída formalmente, o que causa alguns entraves na construção desse conhecimento. Esse fato desencadeou a necessidade de pesquisadores da área de Educação Matemática desenvolverem trabalhos que pudessem dar uma resposta as referidas dificuldades.

Em algumas situações no ensino de Números Inteiros e também de muitos outros conceitos matemáticos, é possível enxergar alguns obstáculos que dificultam o aprendizado do aluno, os quais são chamados de obstáculos epistemológicos, uns mais fáceis de serem identificados, já outros nem tanto. Esses empecilhos são difíceis de serem detectados por parte do professor, principalmente quando o mesmo não possuí conhecimento de tais obstáculos,

[1] Resolvemos citar os PCN em várias partes do nosso texto, pelo fato desse documento trazer uma contribuição efetiva para as temáticas abordadas em nosso trabalho. Desta forma, resolvemos trazer as reflexões desse documento, pois fizemos uma comparação do mesmo com a BNCC e percebemos que os PCN abordavam as temáticas de nosso estudo de maneira mais significativa que a mesma.

essas barreiras podem fazer com que o aluno desista de aprender certo conteúdo pelo fato de não conseguir visualizar uma saída para superar essas dificuldades.

Assim, na perspectiva de desenvolver um trabalho que possa contribuir com o ensino de alguns conteúdos matemáticos, entre eles, principalmente, os Números Inteiros, podemos utilizar diversas estratégias metodológicas, tais como: Modelagem Matemática, Etnomatemática, História da Matemática, Novas Tecnologias, Resolução de Problemas e o uso de Jogos Matemáticos e Materiais Manipuláveis, no contexto do uso do Laboratório de Matemática. Para tal, optamos pelo Laboratório de Matemática. Desta forma, a temática abordada nesse trabalho de pesquisa trata do ensino de conteúdos matemáticos, especificamente de Números Inteiros, mais precisamente sobre os obstáculos epistemológicos para sua aprendizagem e a relação com o Laboratório de Ensino de Matemática.

1.2 Justificativa

A escolha de trabalharmos com o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) justifica-se importante do ponto de vista pessoal, pelo fato de quando estávamos no Ensino Fundamental e Médio não tivemos contato com jogos e nem materiais manipulativos, até mesmo por que a escola não possuía um LEM e também pelo fato dos professores não trabalharem com esses recursos em sala de aula.

Posteriormente, na graduação, no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), campus de Rio Tinto-PB, despertamos para essa proposta. Passamos a nos questionar a respeito dos possíveis impactos que essa metodologia poderia causar no entendimento dos conteúdos. Assim, através da disciplina de Laboratório I e do trabalho como monitor da mesma, durante dois períodos, tivemos nossas primeiras oportunidades de estar no espaço conhecido como LEM e ter contato com alguns materiais que faziam parte dele. Passamos, assim, a observar esse tipo de recurso como uma alternativa metodológica de fato viável para abordar vários conteúdos matemáticos, seja na perspectiva de eliminar algumas barreiras que apareciam no ensino-aprendizagem dos mesmos ou na construção de conceitos novos.

Nas disciplinas de Estágio Supervisionado III e IV pudemos utilizar alguns dos recursos contidos no LEM (jogos e materiais concretos) em atividades de docência na educação básica. Como resultado, percebemos as várias potencialidades para o ensino de conteúdos matemáticos, entre tais, o de despertar o aluno e envolvê-lo no conteúdo matemático trabalhado.

Através do LEM e consequentemente do contato que tivemos com alguns materiais pertencentes ao mesmo, decidimos novamente fazer uso do trabalho com jogos e utilizar esse recurso por meio de uma pesquisa para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Pudemos vivenciar novamente experiências significativas, provindas dessa metodologia de ensino-aprendizagem.

Porém, somente viemos conhecer a perspectiva teórica denominada de obstáculos epistemológicos, a partir do ingresso na Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), a partir da qual nos familiarizamos com alguns dos principais conceitos de uma das tendências da grande área da Educação Matemática conhecida como Didática da Matemática. Sendo assim, notamos a grande importância dessas ideias para uma melhor compreensão dos problemas de ensino-aprendizagem da matemática.

A partir de então, percebemos que poderia existir outro tipo de impedimento, além dos decorrentes das limitações do aluno em função das suas condições de existência e do que dependia da forma como o professor trabalhava o conteúdo em sala. Trata-se de algo mais específico, pois é relativo a uma dificuldade própria que um determinado conceito matemático trás, considerado como obstáculo de natureza epistemológica. Logo, pudemos entender que por trás das dificuldades encontradas pelos alunos em relação aos números inteiros e a vários outros conceitos matemáticos existem mais fatores a considerar do que imaginávamos.

Desta forma, ao iniciarmos a Pós-Graduação, já tínhamos a intenção de realizar uma pesquisa que de certa forma envolvesse o LEM, a partir do qual apresentamos o nosso pré-projeto nessa perspectiva, passando a ser possível o entrelaçamento com a Didática da Matemática após participarmos das disciplinas Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental e Médio e Laboratório de Matemática na Formação de Professores, ambas ministradas pelo professor orientador desse trabalho, possibilitando contribuir com a identificação e superação de alguns obstáculos que impedem que os alunos tenham um melhor aprendizado em relação a alguns conceitos, em particular, em relação aos números inteiros.

Desse modo, surge o interesse e a perspectiva de entrelaçar o uso do Laboratório de Ensino de Matemática como sendo uma alternativa metodológica facilitadora que possa servir como apoio no ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros, através de jogos e materiais manipuláveis, com o conceito de obstáculos epistemológicos.

Por outro lado, também é relevante trabalharmos com o LEM considerando aspectos sócio-políticos. Sabemos que o ensino de matemática pode promover a formação para cidadania. Segundo os PCN, isso é possibilitado quando desenvolvemos metodologias que enfatizem a elaboração de estratégias, a confirmação e justificativa de resultados, a criatividade, a ação pessoal, o trabalho grupal e a autonomia advinda da confiança na própria habilidade para confrontar desafios (BRASIL, 1998).

Entendemos que essas habilidades podem ser contempladas por meio do desenvolvimento de atividades através do uso de recursos metodológicos contidos no LEM como jogos e materiais manipulativos. Pois, participando de atividades dessa natureza, o aluno poderá aprender a envolver-se em situações da vida, por exemplo, na obediência de regras e na observação de limites, ajudando-o a formar a ideia de direitos e deveres, como também contribuir no desenvolvimento do aspecto crítico e de sua autonomia colaborando para uma maior participação perante a sociedade.

O trabalho com jogos, quando bem planejado, por exemplo, pode contribuir para que o aluno seja preparado na prática da cidadania. Nesse sentido, Lara (2011, p. 27) afirma "Para que o/a nosso/a aluno/a seja preparado/a para exercer a cidadania dentro de um contexto democrático, é imprescindível que ele/a desenvolva determinadas competências que certamente podem ser oferecidas pelos jogos".

Nessa perspectiva, a boa convivência é uma dessas condições que permite o indivíduo viver em sociedade, exercendo os seus direitos e deveres. Essa autora cita os Parâmetros Curriculares Nacionais para argumentar em relação aos benefícios que a atividade com jogos permite gerar em favor de um relacionamento saudável em grupo, ou seja, depende do "Desenvolvimento de pensamento divergente, da capacidade de trabalhar em equipe, da disposição para procurar e aceitar críticas, da disposição do risco, do desenvolvimento do pensamento crítico, do saber comunicar-se, (...)" (BRASIL, 1999, apud LARA, 2011, p. 24).

Ela ainda ressalta que é importante que se invista em jogos que visem atingir esses objetivos, pois acredita que tais capacidades dificilmente seriam desenvolvidas num ensino tradicional. Nesse sentido, o jogo passa a ser visto como um agente cognitivo que ajuda o aluno a proceder livremente sobre suas atitudes e decisões, fazendo com que ele desenvolva, além do próprio conhecimento matemático, também a linguagem, pois em alguns momentos será provocado a assumir sua opinião crítica perante algumas situações (LARA, 2011).

Admitimos que quando o professor não consegue desenvolver metodologias que possam aumentar a possibilidade de efetivação das referidas competências através da participação dos alunos, dificilmente o aluno construirá conhecimento matemático dando significado aquilo que está aprendendo, e consequentemente as chances de ser um indivíduo passivo e pouco participativo do ponto de vista da sociedade será maior.

Nesse âmbito, a compreensão de conceitos matemáticos contextualizado na vida e a tomada de decisão diante de questões políticas e sociais são competências de alunos advogadas como essenciais pelos documentos oficiais de educação como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O primeiro diz que o papel da educação no desenvolvimento das pessoas e das sociedades aponta para a necessidade de se construir uma escola dirigida para formar cidadãos e o segundo traz como direcionamento a ser observado no processo de ensino que a aprendizagem da matemática está inteiramente relacionada à compreensão de significados dos objetos matemáticos.

Do ponto de vista pedagógico, destacamos a relevância de nossa pesquisa em relação a colaboração para a melhoria e maior compreensão das dificuldades do ensino da matemática, haja vista, o fato da matemática ser abstrata, e a proposta adotada parte do concreto para o abstrato, possibilitando uma melhor compreensão por parte dos alunos, cujos procedimentos já são bastante aceitos pela comunidade acadêmica e professores. Além do mais, é uma metodologia que favorece a interação professor-aluno e aluno-aluno.

Quanto ao aspecto matemático, em relação à relevância da pesquisa nessa disciplina, além de sugerir o uso do LEM como alternativa metodológica para tornar a matemática mais compreensível aos alunos e diminuir os problemas de aprendizagem relacionados aos conteúdos matemáticos, essa pesquisa busca destacar um dos conteúdos matemáticos que possui papel importante no ensino básico e também no ponto de vista do desenvolvimento da estrutura matemática, pois se trata de um dos conceitos centrais da segunda fase do ensino fundamental, pertencente ao programa curricular, os Números Inteiros.

O referido conteúdo tem grande importância na contextualização interna da matemática e compreendê-lo torna-se indispensável para o aluno do 7º ano, pois esse conteúdo é essencial dentro da disciplina para seu desenvolvimento contínuo não só dentro do 7º ano como também em outros graus de escolaridade. Ele precede muitos outros conteúdos, por exemplo, no próprio 7º ano a compreensão do conjunto dos números racionais, da linguagem algébrica e de equações dependerá da compreensão do conjunto dos números inteiros. Logo após, em outros graus de escolaridade subsequente ao 7º ano, o aprendizado dos números irracionais e reais, de potências e radicais, de produtos notáveis, fatoração e função entre outros, dependerá decisivamente da compreensão do conjunto dos números inteiros. A ausência de compreensão pode atrapalhar o aluno no entendimento de todos esses conteúdos e consequentemente no prosseguimento de seus estudos dentro da disciplina, colaborando para que o mesmo acabe se afastando cada vez mais de querer aprender matemática.

Com relação à relevância científica, do ponto de vista da temática escolhida em relação à produção de pesquisas nos repositórios da CAPES, buscamos informações no banco de dados CAPES (plataforma sucupira), sobre o atual contexto das pesquisas que discutem temas que se aproximem da linha de pesquisa que escolhemos.

A pesquisa se iniciou no dia 22 de abril de 2020. Todas as buscas feitas por nós, nesse dia, consideraram como filtro os anos de 2015 a 2019 (últimos 5 anos), Ensino de Ciências e Matemática como área do conhecimento e Educação Matemática como área de concentração.

Ao colocarmos na plataforma *Números inteiros*, apareceram 22 pesquisas, sendo que apenas duas envolviam realmente esse conteúdo, as mesmas tem temas que falam sobre Teoria antropológica do didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas e sobre Tecnologia da informação e comunicação. Mudamos a expressão de busca para *Conjunto dos números inteiros*, apareceram 320 pesquisas, porém ao analisar as mesmas, percebemos que envolvendo números inteiros existem apenas as duas pesquisas trazidas anteriormente. Ao mudarmos a expressão de busca para *Obstáculos epistemológicos e didáticos*, *Laboratório de ensino de matemática, Obstáculos epistemológicos e didáticos na aprendizagem de números inteiros, O Laboratório de ensino de matemática e os obstáculos epistemológicos e didáticos e O Laboratório de ensino de matemática e o ensino de números inteiros*, apareceram sempre a mesma quantidade de trabalhos, ou seja, 353 pesquisas distribuídas em 20 páginas.

Resolvemos primeiramente fazer uma análise mais detalhada dos títulos das pesquisas e das palavras-chaves, para, a partir daí, se houvesse proximidade com a nossa temática, aprofundarmo-nos na leitura do resumo e, se caso não fosse suficiente, da pesquisa em foco.

Nesse processo de verificação das pesquisas que discutem os temas já mencionados, encontramos diferentes temas, tais como: investigação sobre o ensino da matemática; currículo; EJA; educação especial; concepção de professores e alunos quanto a Matemática; análises de livros didáticos; ensino de geometria, álgebra e estatística; formação continuada de professores; TCI nas aulas de matemática; história da matemática; interdisciplinaridade; aprendizagem móvel; lousas digital; educação inclusiva; representações semióticas; modelagem matemática; alfabetização matemática; resolução de problemas; letramento matemático; gamificação; estado da arte; materiais manipuláveis e didáticos; gêneros do discurso; didática da Matemática; o estudo do erro no ensino de Matemática; metacognição, entre outros.

A pesquisa que mais se aproximou do universo do Laboratório de Ensino de Matemática é intitulada como *Laboratório de Matemática no museu: usos e perspectivas*. Em relação ao universo dos Obstáculos epistemológicos e didáticos, não encontramos pesquisas que se aproximam desse tema.

Observando as dissertações que mais se aproximaram da nossa linha de pesquisa, apenas o trabalho sobre Laboratório de Matemática no museu, se utilizou do mesmo propósito de estudo, o Laboratório de Ensino de Matemática. Entretanto, esse trabalho não se especificou em números inteiros, nem tão pouco em obstáculos epistemológicos e didáticos.

Deste modo, após a realização dessa análise, observando os filtros considerados, podemos atingir uma justificativa científica relevante, pois percebemos a falta de existência de pesquisas que envolvessem o uso do LEM, como também o conceito de obstáculos epistemológicos. Sendo assim, acreditamos que trabalhar conteúdos matemáticos, especificamente números inteiros, através do LEM, mais precisamente dando foco aos obstáculos epistemológicos e didáticos para a aprendizagem desses conteúdos, trata-se de uma área ampla de grande potencial que precisa ainda ser explorada e que pode contribuir para o cenário científico relacionado à educação matemática.

1.3 Questão norteadora, objetivos e hipótese

1.3.1 Questão norteadora

Diante do que foi exposto até o momento, elegemos, como problemática de estudo de investigação, o seguinte problema de pesquisa: *Como o Laboratório de Ensino de Matemática pode contribuir na superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros?*

1.3.2 Objetivo Geral

Como objetivo geral, temos: Apresentar as potencialidades do Laboratório de Ensino de Matemática para a superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros, já identificados na literatura. Para dar condições ao objetivo geral acontecer traçamos os seguintes objetivos específicos a serem cumpridos:

1.3.3 Objetivos Específicos

- Identificar obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, já registrados na literatura;
- Conhecer concepção de professores sobre noções de obstáculos epistemológicos e didáticos;
- Apresentar materiais manipuláveis e jogos matemáticos para contribuir na superação de obstáculos epistemológicos e didáticos existentes no processo de ensino aprendizagem do conteúdo de Números Inteiros.

1.3.4 Hipótese

Como hipótese dessa pesquisa, temos: o Laboratório de Ensino de Matemática usado como alternativa metodológica pode contribuir para a superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros.

1.4 Metodologia

Identificamos que a metodologia utilizada na construção deste trabalho pode ser classificada, a partir do ponto de vista sobre a forma de abordagem do problema, como qualitativa, pois considera que existe uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, ocorrendo uma interpretação dos fenômenos e a atribuição de seus significados.

Para D'Ambrósio (2006), a pesquisa qualitativa é o caminho que leva a escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discurso e narrativas que estariam silenciosas.

Já em relação aos objetivos, a presente pesquisa é considerada como exploratória, por procurar uma proximidade com o problema que está sendo examinado, buscando entendê-lo de maneira mais consistente. Para Fiorentini e Lorenzato (2006), uma pesquisa é dita exploratória quando o pesquisador diante de uma problemática ou temática ainda pouco estabelecida e conhecida define realizar um estudo com o objetivo de conquistar informações mais esclarecedoras e rígidas sobre ela.

Além disso, os autores acrescentam que: "Essa modalidade de pesquisa também é frequentemente utilizada como primeira entrada em campo, tendo em vista o levantamento de hipóteses ou a busca de subsídios que permitam um melhor redirecionamento da pesquisa" (FIORENTINI, LORENZATO, 2006, p. 70).

Para podermos alcançar os objetivos assinalados adotamos como sujeitos de pesquisa alguns professores de Matemática que lecionam no Ensino Fundamental II e que atuam em municípios que compõem a Região Metropolitana do Vale do Mamanguape[2] e alguns professores que atuam no município de Rio Tinto - PB[3].

A pesquisa será constituída de duas fases: primeira, de entrevista-semiestruturada com onze professores de matemática, estes atuam no município de Rio Tinto-PB e em municípios que compõem a Região Metropolitana do Vale do Mamanguape, estes professores lecionam em turmas do Ensino Fundamental II. Através da entrevista esperamos levantar informações sobre as concepções desses professores a respeito dos obstáculos epistemológicos e didáticos, do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) e a respeito do ensino-aprendizagem de números inteiros, entre outros conteúdos matemáticos, considerando obstáculos envolvidos nesse processo. Em relação a esse último, a entrevista proporcionará reflexões acerca do ensino destes, de como são trabalhados em sala, quais metodologias são usadas, quais as principais dificuldades, entre outras questões. As entrevistas serão gravadas através do Google Meet. Será feita a transcrição dos discursos dos professores e a análise das falas dos mesmos será apresentada no capítulo 3 desse trabalho.

As perguntas da entrevista foram as seguintes:

1- Que tipos de dificuldades você identifica apresentadas por seus alunos para aprender Matemática? Fale um pouco sobre elas. E a que elas poderiam estar ligadas?

2- Qual sua compreensão sobre os erros dos seus alunos ao longo do desenvolvimento de um novo conhecimento? E quais suas atitudes quando um aluno seu comete um erro?

3- Você sabia que as dificuldades apresentadas pelos alunos e os erros cometidos pelos mesmos podem estar relacionadas(os) à existência de obstáculos epistemológicos e/ou didáticos? Se sim. O que você tem a dizer sobre esse conceito?

4- De acordo com Bachelard, os obstáculos epistemológicos podem ser acomodações de um novo conhecimento em relação ao já conhecido. Para ele, o conhecimento comum pode se tornar um obstáculo ao conhecimento científico, ou ainda, o conhecimento estabelecido inicialmente pode ser impedimento para o novo. Anos depois, Brousseau transferiu essa noção para a matemática, nomeando-a de obstáculos didáticos, distinguindo-os em três origens, a saber:

---

[2] A Região Metropolitana do Vale do Mamanguape é uma região metropolitana brasileira localizada no estado da Paraíba, constituída por 9 municípios (Baía da Traição, Cuité de Mamanguape, Curral de Cima, Itapororoca, Jacaraú, Mamanguape, Marcação, Mataraca e Pedro Régis).

[3] Rio Tinto é um município brasileiro localizado na Região Metropolitana de João Pessoa, estado da Paraíba. Sua população é de 24.176 habitantes, conforme estimativa do IBGE em 2019, distribuídos em 466,984 km² de área.

- origem ontogenética: São aqueles que ocorrem em virtude de limitações (neurofisiológicas entre outras) no desenvolvimento do próprio aluno envolvido no processo de ensino, ou seja, são obstáculos que se desenvolvem em consequência do desenvolvimento cognitivo do aluno.
- origem didática: São aqueles que parecem estar na dependência "de uma escolha ou projeto do sistema de ensino" (BROUSSEAU, 1976, p. 108). Estes obstáculos são consequências de seleções e ações educativas, didáticas ou do sistema educativo.
- origem epistemológica: Encontram-se "[...] na história dos próprios conceitos" (BROUSSEAU, 1976, p. 108), são inevitáveis por serem inerentes ao mesmo e possuírem papel constitutivo no conhecimento almejado.

Com base nisso, você lembra na sua experiência de magistério de alguma(s) situação(ões) que se enquadre nesses conceitos? Se sim. Relate-a(as).

5- Em caso afirmativo, quais foram as atividades trabalhadas com o intuito de superá-los?

6- Em sua opinião, é importante que o professor conheça esses conceitos (obstáculos epistemológicos e didáticos)? Por quê? Como eles se refletem em sua prática docente?

7- Você já identificou alguma abordagem de conteúdo ou atividade em livro didático que poderia gerar um obstáculo à aprendizagem? Se sim. Qual?

8- De acordo com sua experiência como professor do Ensino Fundamental II, em relação especificamente ao ensino de números inteiros, quais possíveis obstáculos que aparecem no ensino deste conteúdo? Como você faz para superá-los? Como você trabalha números inteiros em sala?

9- Qual é a sua opinião sobre o uso do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) como alternativa metodológica no ensino da Matemática? Você acha que o LEM pode contribuir na identificação e superação de obstáculos epistemológicos e didáticos? Por quê?

10- Em relação aos números inteiros, que atividades podem ser promovidas através do LEM que ajudaria a identificar e superar obstáculos epistemológicos e didáticos?

Segunda, da apresentação de um conjunto de propostas/situações com orientações de suas aplicações, que entendemos que podem promover a identificação e superação dos obstáculos epistemológicos e didáticos no ensino de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros, ou seja, apresentar o LEM (jogos e materiais manipuláveis) como alternativa metodológica para identificar e possivelmente superar esses obstáculos. Nesta etapa iremos apresentar jogos e materiais didáticos manipuláveis (já existentes, adaptados e elaborados por nós), mostrando algumas atividades e variações que podem ser exploradas a partir dos mesmos.

Defendemos, nessa pesquisa, a importância de se trabalhar com o LEM de tal modo que essa alternativa metodológica possibilite ao professor fazer a identificação e possível superação dos obstáculos epistemológicos e didáticos ocorridos no processo de ensino-aprendizagem.

1.5 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está estruturado em quatro capítulos:

No primeiro capítulo, denominado de *Aspectos Gerais da Pesquisa*, apresentamos a nossa temática, assim como também nossa justificativa do ponto de vista pessoal em relação a escolha dos temas da pesquisa, em seguida, justificamos a partir de outros ponto de vista a necessidade de fazer a pesquisa onde para isso estabelecemos alguns aspectos que usamos como parâmetros para abordar a relevância do trabalho, a saber: social, político, pedagógico, matemático e científico. Logo após, trazemos a questão norteadora, objetivos e a hipótese de nossa pesquisa, assim como a metodologia e este tópico que se refere a apresentação de todos os capítulos.

No segundo, apresentamos uma breve consideração acerca do ensino da matemática, depois mostramos a representatividade do LEM como alternativa metodológica para o ensino da matemática, dentro desse tópico trazemos uma breve introdução teórica acerca da importância de materiais didáticos e jogos no processo de ensino-aprendizagem da matemática, em seguida apresentamos em termos gerais a proposta Didática da Matemática enquanto tendência teórica da grande área da Educação Matemática, no qual apresentamos os obstáculos epistemológicos e didáticos, que se trata de uma noção que é de grande interesse para a didática, antes disso abordamos algumas noções que entendemos ser convenientes para uma melhor sustentabilidade do conceito de obstáculos: epistemologia, epistemologia da matemática e epistemologia do professor. Abordamos também nesse capítulo um estudo de aspectos epistemológicos, historiográficos e socioculturais do desenvolvimento conceitual dos Números Inteiros.

No terceiro capítulo, trazemos a análise da entrevista realizada com os professores de matemática.

No quarto capítulo, apresentamos o conjunto de propostas com orientações para suas aplicações.

Finalmente, temos as considerações finais sobre o presente estudo. Deste modo, retornaremos a questão investigada, buscando elementos presentes em nossa exploração, que possa está dando conta do que nos propusemos a responder, além de apontarmos caminhos futuros para novas pesquisas.

2 DIDÁTICA FRANCESA E O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA ARTICULAÇÃO POSSÍVEL

2.1 Reflexões sobre o ensino de Matemática

De uma maneira geral, a concepção de educação, é a do processo que visa desenvolver as capacidades humanas. A tônica atual é a de que esse propósito se dê através dos interesses e necessidades do aluno. É preciso estimulá-lo para que ele possa potencializar as etapas de construção de valores e conhecimento. Desta forma, esse seguimento vem adotando novos aspectos e acepções, dentro de um espírito mais participativo. Um dos novos caminhos adotados, por exemplo, são as atividades lúdicas, as quais incentiva as relações cognitivas, afetivas, sociais, além de possibilitar também atos de crítica e criação nos alunos que se envolvem nesse processo (ALVES, 2001).

Todavia, contraditoriamente, décadas atrás, o professor era visto como centro das atenções, o principal agente de transmissão do conhecimento, enquanto o aluno, como indivíduo receptor dos conhecimentos. Desta forma, a interação professor-aluno em sala de aula não existia na educação. Sendo assim, o papel do aluno era apenas de ser o destinatário de mensagem que era emitida pelo professor, ou seja, ele não tinha oportunidade de se expressar, dialogar, retirar dúvidas, entre outras liberdades. Nesse modelo, o professor depositava o conhecimento *na mente vazia* do aluno, o qual era chamado por Freire (2005) de *educação bancária*.

Posteriormente, mudanças aconteceram tanto no papel do professor como também no do aluno. Na busca por mais qualidade no processo de ensino-aprendizagem, o professor deixa de ser exclusivamente o possuidor do conhecimento para, ao contrário disso, adotar o papel de mediador e o aluno passa a ter uma função ativa. Nesse sentido, Santos (2014, p. 35) relata: “Foi-se o tempo onde o saber era domínio exclusivo do professor e o aluno mero ouvinte, um receptor de todo o conhecimento de forma passiva”.

A educação começou a se configurar numa relação dialógica. Todavia, mesmo no vigor desses parâmetros, ainda existem hoje professores que de certa forma continuam fazendo uso da *educação bancária*. Tal atitude acarreta a dicotomia entre o conhecimento e o desejo de se aprender. Muitos docentes atualmente acabam não procurando executar mudanças em suas metodologias de ensino visando um aprendizado com mais significado, fazendo com que o conhecimento se transforme para o aluno em algo de difícil acesso.

Especificamente, tratando-se do ensino da matemática, isso não é diferente. Sabemos que em relação ao ensino desta disciplina existem vários desafios a serem superados. Na busca de respostas, há um entendimento geral de que é preciso elevar o nível da educação. É nesse cenário que aparecem muitas perguntas, preocupações e iniciativas por partes dos pesquisadores em educação matemática. Neste contexto, com intenção de melhorar a qualidade do ensino-aprendizagem da matemática, possibilitar um aprendizado com maior compreensão e como resultado diminuir a antipatia e a imagem ruim em volta da matemática, o ensino dessa disciplina, nos últimos anos, vem sendo alvo de muitas reflexões. Neste sentido, Maciel (2002) afirma que com o objetivo de diminuir os preconceitos criados em volta da disciplina de matemática, o ensino da mesma tem sido razão para vários estudos e discussões.

A matemática é essencial para o desenvolvimento da humanidade e é aplicada constantemente no dia a dia das pessoas. Ela desempenha um papel fundamental, pois se trata de uma área de conhecimento que permite a resolução de problemas que possam acontecer na vida cotidiana, possuindo várias funções tanto no espaço profissional como na construção de conhecimentos acerca de outras áreas curriculares. Para diminuir os obstáculos na aprendizagem da matemática, precisamos apresentá-la como ferramenta importante para entender o mundo. Nessa direção, é preciso melhorar no aluno sua atitude reflexiva e exploradora, fazendo com que o mesmo possa interagir e socializar seus aprendizados, contribuindo na construção do conhecimento, produzindo maior autonomia no processo educacional. Tal aspecto pode acontecer quando o professor muda a maneira de pensar e principalmente sua prática docente, oferecendo a chance ao aluno de deixar de ser apenas receptor ou escrevente em sala de aula.

Entretanto, não existe um percurso que possa ser apontado como único e melhor para o ensino da matemática, porém torna-se fundamental que o professor tenha conhecimento específico e pedagógico que o faça possuir entendimento de várias possibilidades de trabalho em sala de aula, permitindo ao mesmo planejar adequadamente sua prática docente e consequentemente facilitar o caminho para a abstração matemática. Nesse pensamento, o professor precisa promover atividades significativas, instigantes e atrativas para o aluno, através de algum recurso, método ou ferramenta que faça com que o mesmo goste, pois será a partir daí que o professor terá o caminho facilitado para ensinar essa disciplina.

Neste contexto, com o intuito de desenvolver a qualidade do ensino da matemática, percebemos que as pesquisas acadêmicas, em específico as produções de dissertações e teses no ramo citado, como também a publicação de artigos em revistas especializadas vem avançando constantemente e ganhando cada vez mais importância. A Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) é um exemplo de progresso nessa área. Criada por associações de professores e pesquisadores a SBEM tem ações que visam o melhoramento do ensino da matemática. Temos hoje uma diversidade de trabalhos que abordam temas diferentes, associados com as tendências atuais em educação matemática, discutidas por distintos autores, que procuram colaborar para a construção de práticas pedagógicas de ensino de matemática que podem servir como apoio aos professores ao planejarem as suas aulas.

Assim, com o intuito de diminuir as dificuldades em torno do ensino-aprendizagem de Matemática, as instituições de ensino superior já contemplam na sua grade curricular disciplinas que abordam essas possibilidades metodológicas. Muitos professores já estão reavaliando e renovando suas práticas pedagógicas, na intenção de apresentar os conceitos matemáticos de maneira significativa e de envolver os alunos de forma participativa no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Antigamente se os professores eram apenas transmissores da mensagem e os alunos recebedores, hoje em dia, isso não cabe mais no cenário educacional, novos modelos de educação aparecem e o papel do professor e do aluno precisam ser ressignificados. Segundo D'Ambrósio (1989), o saber matemático se constitui através das interpretações dos alunos. As linhas de pesquisas e as propostas de trabalho em volta do processo educacional dos mesmos vêm obtendo espaço progressivamente, buscando responder a seguinte pergunta: como ensinar matemática hoje? Para esta pesquisadora, devemos optar pelas propostas que colocam o aluno como o centro do processo educacional, enfatizando o mesmo como um ser ativo no processo de construção de seu conhecimento. Propostas estas que possibilitem que o professor passe a ter um papel de orientador e monitor das atividades apresentadas aos alunos e por eles realizadas.

Santos (2011), por sua vez, recomenda que os professores utilizem recursos que possam estimular os alunos na capacidade de descoberta de uma maneira mais simples, eficiente, dinâmica e divertida de aprender a aprender. Esta autora entende ainda, que atividades lúdicas podem permitir que o professor consiga organizar os conteúdos e ainda atingir os objetivos educacionais elaborados.

Além dos mais, com a mudança da sociedade, o ensino precisa também acompanhar essa alteração, existindo a necessidade de regular o trabalho escolar a uma nova realidade. É necessário repensar o currículo nas escolas, pois torna-se fundamental que ele atenda às necessidades fundamentais do aluno enquanto pessoa introduzida em uma sociedade moderna. Segundo Rêgo e Rêgo (2006, p. 40):

> As novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica pelo aluno. Para tanto, faz-se necessário a introdução da aprendizagem de novos conteúdos de conhecimentos e de metodologias que, baseadas na concepção de que o aluno deve ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, reconheça, identifique e considere seus conhecimentos prévios como ponto de partida e o prepare para realizar-se como cidadão em uma sociedade submetida a constantes mudanças.

As discussões que acontecem no campo da educação matemática apontam nesse sentido, buscam cada vez mais que o aluno seja personagem principal, na atuação como agente de construção de seu conhecimento e de transformação da sociedade. Sinalizam também para atividades que possibilitem uma maior interação em sala de aula, procurando ligar a aprendizagem matemática à compreensão. Segundo os PCN, "a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos" (BRASIL, 1998, p. 57). Nessa perspectiva, cabe ao professor o papel de estimular a participação dos alunos, através da mediação da aprendizagem.

Nesse contexto, muitos são os profissionais da educação que tem procurado realizar um trabalho pedagógico mais efetivo, com melhoramentos para o ensino, através de propostas que o tornem mais interessante e que permitam uma aprendizagem mais significativa. (SANTOS, 2011). No entanto, apesar dessas mudanças e de alguns esforços por parte dos professores de matemática observa-se que a disciplina de Matemática ainda é enxergada pela grande parcela dos alunos, como uma matéria enfadonha e de difícil assimilação. (SANTOS, 2009). Para Santos (2014), um dos fatores que colaboram para isso é a forma na qual os conteúdos são apresentados pelos professores onde muitas das vezes não despertam ou realçam no aluno o desejo de estar na sala de aula para realmente aprender. Existe uma ideia que colabora para que isso venha acontecer, uma ideia que por sinal precisa ser rapidamente desfeita, a saber, a ideia que para se ensinar matemática basta conhecer matemática. Neste sentido, D'Amore (2007, p. 33), "[...] [N]ão pode ser assim; nunca foi assim: já no século XVIII se havia entendido que não é assim".

Apesar do avanço verificado, o ensino tradicional ainda está presente nas escolas, ou seja, uma maneira formal de se trabalhar a matemática, na qual o livro e exercícios padronizados são os principais recursos didáticos. Nessa forma de ensino, o professor não procura trabalhar o conteúdo a partir da construção do pensamento do aluno.

Um método de trabalho baseado na memorização que consiste na apresentação do conteúdo escrito através de definições ou oralmente, dando continuidade através de exemplos e por fim utilizando exercícios de fixação da aprendizagem. Esse modelo de ensino faz o professor ter um falso entendimento que a partir do momento em que os exercícios são concluídos, o aluno compreendeu o conteúdo, pressupondo que o mesmo aprendeu pela reprodução. Essa prática tem se mostrado ineficiente, pois a simples reprodução não indica que o aluno precisamente obteve um aprendizado com compreensão do conteúdo apresentado, sem contar que pode também causar um desestímulo e distanciamento do aluno em querer aprender matemática. Nesse cenário, (Bezerra e Rêgo, 2009, p. 33 - 34) destacam que:

> As formas de ensino adotadas há muito tempo pelas escolas e ainda predominantes em muitas de nossas salas de aula, baseadas na memorização de informações, aliadas a outros aspectos, durante muito tempo segregaram (e ainda segregam), sobretudo, aqueles que sentem dificuldades para aprender.

A persistência do professor de matemática diante desses métodos tradicionais de ensino farão com que o mesmo caminhe a passos largos em direção oposta ao objetivo da educação matemática. Segundo Pais (2001), um dos objetivos da educação matemática é valorizar o raciocínio lógico e argumentativo do aluno, procurando despertar no mesmo essa prática.

Logo, é importante que atividades inovadoras estejam sendo usadas no processo de ensino-aprendizagem de matemática, pois para conseguir fazer a diferença na vida dos alunos, torna-se preciso construir uma prática pedagógica com base em um novo paradigma: implementar mudanças nas metodologias de ensino, pois para Rêgo & Rêgo (2009) é fundamental que o professor exerça a inserção de novas metodologias de ensino nas quais o aluno seja sujeito da aprendizagem; promova uma aprendizagem com compreensão, que possua significado para o aluno e o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno; incentive o pensamento autônomo, a criatividade; e problematize situações reais. Para que isso aconteça é necessário que o professor tenha clareza de suas próprias concepções sobre a matemática coerentes com esse modelo de ensino. Para os PCN, isso ganha importância uma vez que a prática em sala, os métodos, o estabelecimento de objetivos e conteúdo de ensino e as maneiras de avaliação estão profundamente ligadas a essas convicções (BRASIL, 1998).

Segundo Lara (2011), essas competências só poderão ser desenvolvidas através do ensino da matemática se o professor preconizar um trabalho que vá ao encontro da realidade do aluno, através do uso de distintos recursos, do impulsionamento de um ambiente de construção do conhecimento.

Diante de todas as reflexões trazidas anteriormente com respeito ao ensino da matemática, entendemos que o LEM pode assumir um papel pertinente em torno do mesmo, principalmente no sentido de torná-lo mais compreensível e dinâmico, contribuindo para um aprendizado significativo e integrado, tornando a matemática mais compreensível aos alunos e diminuindo os problemas de aprendizagem. Nessa direção, apresentamos nessa próxima sessão, o LEM como alternativa metodológica para o ensino da matemática, trazemos uma introdução teórica acerca do mesmo. Onde nela mostramos sua representatividade para o ensino da matemática e como o mesmo pode ser um local de aprendizagem em potencial. Nessa sessão também nos debruçamos a mostrar uma breve introdução teórica acerca de materiais didáticos e jogos.

2.2 Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)

Não é de hoje que, nossa sociedade presume e, até mesmo, demanda que muitos profissionais possuam seus locais adequados para trabalhar de forma mais significante. É dessa forma para vários profissionais, como médico, cozinheiro, veterinário, entre outros. Mas, por que ter local adequado para trabalhar? Lorenzato (2006) responde a esse questionamento da seguinte forma:

> [...] Porque o bom desempenho de todo profissional depende também dos ambientes e dos instrumentos disponíveis. Em muitas profissões, a prática difere pouco do planejamento; não é o caso do magistério, devido à criatividade dos alunos, que torna o LEM simplesmente indispensável à escola. Assim como nossas casas se compõem de partes essenciais, cada uma com uma função específica, nossas escolas também devem ter seus componentes, e um deles deve ser o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM). (LORENZATO, 2006. p. 5-6).

Um LEM simplesmente poderia ser um espaço para armazenar materiais que nas aulas de matemática seriam usados, por exemplo, livros, filmes, revistas, jogos, materiais manipuláveis, dentre muitos outros. Todavia, a alegação de Lorenzato (2006) vai além desse pensamento. O mesmo sugere que o Laboratório de Ensino de Matemática seja um local reservado não apenas para aulas regulares de matemática, mas também indo além disso, servindo para esclarecer dúvidas dos alunos; para os professores de matemática planejarem suas aulas, criarem suas atividades e materiais didáticos, deve ser também um ambiente para alunos e, principalmente, professores desfrutarem. O LEM deve servir como um facilitador para a realização de experimentos e a prática do ensino-aprendizagem da matemática. Desta forma, o “[...] LEM deve ser o centro da vida matemática da escola; mais que um depósito de materiais, sala de aula, biblioteca ou museu de matemática, o LEM é o lugar da escola onde os professores estão empenhados em tornar a matemática mais compreensível aos alunos.” (LORENZATO, 2006, p. 6-7).

Para melhor entendimento do que seria o LEM, reportamo-nos a Lorenzato (2006), Perez (1993), Miskulin (2006), Silva e Silva (2004), Turrioni (2004), Oliveira (2003), Vieira (2012), Gonçalves (2003), Rêgo e Rêgo (2006) e Passos (2006). De acordo com Perez (1993), o laboratório tradicionalmente é um local onde se realiza experiências com materiais didáticos. São mais comuns nas escolas de Ensino Fundamental e Médio laboratórios de Física, Química e Biologia. Esse autor concorda com Lorenzato no sentido que o laboratório deve ir além de um espaço físico destinado a guardar materiais, devendo ser um ambiente agradável, onde os alunos possam se sentir à vontade para pensar, criar, construir e descobrir estratégias de Educação Matemática.

Coerente com essa linha de pensamento, Miskulin (2006, p. 163) afirma que o laboratório deve ser constituir como “um cenário interativo de aprendizagem colaborativa e conhecimento compartilhado, um espaço de formação, apoiado por uma abordagem teórico-metodológica e conduzido pela mediação do professor/pesquisador”.

Por sua vez, Silva e Silva (2004), é no LEM que os conceitos matemáticos são construídos, nele, ganham vida recursos didáticos, materiais e propostas pedagógicas que fazem com que a criatividade e o dinamismo se desenvolva colaborando para um trabalho mais efetivo e prazeroso.

E Turrioni (2004) defende que o LEM deve sempre apresentar materiais que contribuam para que o interesse do aluno seja despertado e incentivado, auxiliando e provocando o mesmo para a aprendizagem Matemática.

Desta maneira, o LEM se apresenta como mais amplo do que: um simples lugar, um processo ou um procedimento. A dimensão conceitual, segundo Lorenzato (2006), tende à compreensão do LEM como algo mais do que um espaço físico, nessa perspectiva, configura-se como um espaço voltado para o desenvolvimento de atitudes ativas ao redor do ensino-aprendizagem da matemática. Nessa direção, esse autor afirma que:

> [...] o LEM [...] é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender" (LORENZATO, 2006, p. 7).

Para Oliveira (1983, p. 82), o LEM é um "espaço onde se criam situações e condições para levantar problemas, elaborar hipóteses, analisar resultados e propor novas situações ou soluções para questões detectadas."

Na concepção de Vieira (2012), o LEM é um espaço onde os alunos podem aprender e consequentemente renovar seus conhecimentos em matemática. Logo, o LEM trata-se de um lugar para discussão, aperfeiçoamento e socialização de conhecimentos.

Passos (2006, p. 90-91) reforça essas visões ao afirmar que,

> O LEM é mais que um lugar. É um ambiente que propicia [...] um conjunto de explorações e investigações matemáticas com o propósito de descobrir alguns princípios matemáticos, padrões, regularidades. Assim sendo, o LEM pode ser entendido como um ambiente onde ocorre um *processo*, devendo incluir *atitude*. Certamente, uma de suas propostas é levar os estudantes a pensar por eles mesmos, a questionar, observar padrões – resumindo, desenvolver uma atitude de investigação matemática.

Para Lorenzato (2006), existe uma ilusão de grande parte dos professores que acaba colaborando para o enfraquecimento da concepção possível e concretizável do LEM. Essa ilusão pode impulsionar a não tentativa de construção de um LEM na escola, a saber, a utopia que o professor possui que todas as salas de aula e todas as suas aulas precisam ser um Laboratório onde irá ocorrer a aprendizagem da matemática.

Na concepção do autor, o LEM, mesmo não estando em condições favoráveis, pode contribuir para que o trabalho seja mais gratificante para o professor, assim como a aprendizagem seja mais compreensível e agradável para o aluno. Porém, isso somente será possível se o professor possuir três virtudes, a saber, a virtude do conhecimento, da crença e da engenhosidade. Conhecimento porque, o professor precisa ter uma boa formação matemática e pedagógica; crença por que, pois é necessário acreditar em tudo o que se deseja realizar, modificar ou construir; e engenhosidade por que, a criatividade é muito necessária em todo momento no papel do professor.

Para Lorenzato (2006), é importante que a construção do LEM parta de um interesse grupal, ou seja, que professores de todas as disciplinas, administradores e alunos sejam elemento importante nessa conquista. Segundo o autor, essa união de todos esses integrantes da escola com o objetivo de construir o LEM é muito importante, pois pode garantir ao mesmo uma diferenciada composição.

Esse autor destaca que além da importância de se ter professores que acreditem no LEM e que reconheçam que a escola necessite do mesmo, existe outros detalhes bastante importantes que devem ser analisados antes de iniciar a construção de um Laboratório, a saber, I) é preciso ter em mente que o LEM não é objetivo para ser alcançado em um período de tempo curto; II) quais os objetivos a serem alcançados; III) questionar-se: para quem o LEM se destina?, ou seja, se o mesmo se destina a crianças de educação infantil, ao ensino fundamental I, ao ensino fundamental II ou ao ensino médio, pois cada modalidade possuem suas especificidades em relação ao ensino-aprendizagem da matemática, e estas, precisam ser contempladas pelo LEM; IV) como ele será estruturado. Já com relação ao LEM para cursos de formação de professores, o autor cita que o mesmo torna-se indispensável, argumentando o seguinte:

> Se lembrarmos que mais importante do que ter acesso aos materiais é saber utilizá-los corretamente, então não há argumento que justifique a ausência do LEM nas instituições responsáveis pela formação de professores, pois é nelas que os professores devem aprender a utilizar os materiais de ensino; é inconcebível um bom curso de formação de professores de matemática sem LEM. (LORENZATO, 2006, p. 10).

Em relação aos tipos de LEM, o autor cita que existe diversos, isso se justifica pelos seus distintos objetivos e concepções. Mesmo com toda essa diversificação, ele menciona que o que necessariamente compõe um Laboratório de Ensino de Matemática deve estar direcionado às concepções e às particularidades de cada escola. Nesse sentido, o autor apresenta uma lista de sugestões de itens que pode ser a base para a composição de muitos LEM, a saber: livros didáticos, paradidáticos e sobre temas matemáticos; artigos de jornais e revistas; problemas interessantes; questões de vestibulares; registros de episódios da história da matemática; ilusões de ótica, falácias, sofismas e paradoxos; jogos; quebra-cabeças; sólidos; figuras; modelos estáticos ou dinâmicos; quadros murais ou pôsteres; materiais didáticos industrializados; materiais didáticos produzidos pelos alunos e professores; instrumentos de medida; transparências, fitas, filmes, softwares; computadores; calculadoras; materiais e instrumentos necessários à produção de materiais didáticos.

De maneira similar, Perez (1993), afirma que o LEM pode ser constituído de diferentes tipos de materiais, como: giz, caneta, régua, quadro, caderno, lápis, esquadro, livros, modelos manipuláveis, softwares, figuras geométricas, computador, entre muitos outros. O autor salienta que os materiais industrializados, por exemplo, o material dourado, também inclui-se nesta relação.

Esses autores e muitos outros apresentam os materiais que são necessários para compor um LEM, mas vale ressaltar que não necessariamente para compor um LEM, temos que possuir todos estes materiais. Estes integram apenas um exemplo para termos como alicerce o material necessário para a constituição do LEM.

Já a respeito de algumas contestações ao uso do Laboratório de Ensino de Matemática, Lorenzato afirma que muitas delas se dão pelo fato dos professores não conhecerem o LEM, já outros o rejeitam sem ao menos ter experimentado e alguns o empregam de maneira equivocada. Vale salientar que mesmo se tratando de uma alternativa metodológica extraordinária, o LEM tem algumas limitações didáticas, sofre alguns preconceitos e algumas ilusões o rodeiam, objeto de reflexões de acusações e defesas, tais como: o LEM é caro, exige materiais que a escola não dá ao professor e raríssimas escolas possuem um LEM; o LEM exige do professor uma boa formação; o LEM possibilita o "uso pelo uso"; o LEM não pode ser aplicado a todos os assuntos do programa; o LEM não pode ser usado em classes numerosas; o LEM exige do professor mais tempo para ensinar; é mais difícil lecionar utilizando o LEM; o LEM pode induzir o aluno a aceitar como verdadeiras as propriedades matemáticas que lhes foram propiciadas pelo material manipulável ou gráfico.

A respeito do primeiro preconceito citado anteriormente, Gonçalves (2003), afirma que os materiais que compõem o LEM podem ser de baixo custo e que é possível realizar experimentos de grande utilidade didática com esses materiais. Para esse autor, torna-se importante a utilização de materiais que pertençam ao cotidiano dos alunos. Nesse sentido, materiais como a garrafa pet, canudos, fósforos, tampinhas de garrafas, bolas de gude, palitos de picolé, entre vários outros, são pertinentes para fazer a composição do LEM, pois apresentam baixo custo, pertencem ao cotidiano dos alunos e podem ser usados em diferentes contextos de ensino-aprendizagem.

Nos dias de hoje muitos são os professores que admitem a pouca produtividade da maioria dos estudantes, porém muitos desses professores fazem apenas uso das explicações verbais acompanhada do trabalho com o livro didático como principal ferramenta de trabalho. Isso pode ser um grande fator que está influenciando nessa falta de produtividade dos alunos. Neste sentido, o LEM surge como uma alternativa metodológica potencializadora, pois as experiências realizáveis em um LEM podem fazer com que o professor obtenha êxito nos processos de ensino e de aprendizagem, pois é a partir do LEM que o professor pode realizar atividades que atraiam a atenção do aluno, tornando a aula mais produtiva.

Essa pouca produtividade dos alunos pode estar vinculada a um outro problema do ensino da matemática atualmente, a saber, a distância existente entre teoria e prática. Muitas ações que são realizadas pelo professor em sala de aula possibilitam esse distanciamento entre esses elementos. Porém, estes precisam se complementar, é fundamental que a matemática se estabeleça pela via da compreensão e isso passa por essa complementação, esta, pode fazer com que o aluno desenvolva as habilidades e as competências necessárias. Nesse sentido, o LEM sortido de materiais que podem servir como auxiliadores no processo de ensino-aprendizagem pode auxiliar nesse aspecto. Segundo Lorenzato (2006, p. 6),

> [...] para aqueles que possuem uma visão atualizada de educação matemática, o laboratório de ensino é uma grata alternativa metodológica porque, mais do que nunca, o ensino da matemática se apresenta com necessidades especiais e o LEM pode e deve prover a escola para atender essas necessidades.

Nesse contexto, as novas propostas de ensino criadas com suporte em bases científicas apontam para perfis de alunos participativos e ativos do processo de aprendizagem. De acordo com Santos (2011, p. 21),

> [A]s práticas pedagógicas atuais têm por tarefa construir competências, buscar novos conhecimentos, procurar métodos ativos, tornar as disciplinas menos rígidas, respeitar os alunos, utilizar didáticas mais flexíveis, buscar avaliações mais formativas, usar novas tecnologias e tratar os alunos através de técnicas reflexivas.

Entendemos assim que o LEM pode colaborar nesse aspecto. O uso adequado de materiais pode proporcionar a dinamização de aulas, possibilitando uma melhor aprendizagem. As experiências que podem ser realizadas a partir da utilização de jogos e materiais manipulativos podem colaborar para atrair a atenção dos alunos e tornar as aulas de matemática bem mais produtiva. Nessa direção, os materiais contidos no LEM proporcionam que os alunos estruturem os conceitos de maneira ativa e mais significativa, pois propiciam condições agradáveis e pertinentes para o ensino da matemática, dado que a partir da utilização desse material, o aluno poderá ser estimulado para trabalhar e refletir tendo por alicerce o recurso didático. Diante desse cenário, o aluno passa a ter um novo papel, desvendando, refazendo e não só recebendo informações. Alves (2001) baseado em Dienes (1986) aponta que é necessário que o aluno conviva em um ambiente abundante de materiais e possibilidades, de maneira que consiga construir, produzir seus conhecimentos (DIENES, 1986 apud ALVES, 2001).

O ensino apoiado no LEM pode contribuir para que aconteça o ato mental, isso por que acaba provocando a observação, a experimentação, a reflexão, a análise, a motivação, e consequentemente a aprendizagem. Nessa direção, Rêgo e Rêgo (2006) cita que as atividades que são realizadas em um Laboratório de Ensino de Matemática estão direcionadas para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e a formação geral do aluno, auxiliando-o a:

> i) ampliar sua linguagem e promover a comunicação de idéias matemáticas;
> ii) adquirir estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações;
> iii) desenvolver sua capacidade de fazer estimativas e cálculos mentais;
> iv) iniciar-se nos métodos de investigação científica e na notação matemática;
> v) estimular sua concentração, perseverança, raciocínio e criatividade;
> vi) promover a troca de idéias através de atividades em grupo;
> vii) estimular sua compreensão de regras, sua percepção espacial, discriminação visual e a formação de conceitos. (RÊGO; RÊGO, 2006, p. 43-44).

Esses autores citam alguns argumentos que fazem com que eles defendam a importância de um LEM em escolas de educação básica e em instituições superiores envolvidas em cursos de formação de professores, a saber: o distanciamento existente entre teoria e prática; a baixa conexão entre os conteúdos e destes com as aplicações práticas do cotidiano; e a necessidade de promover nos alunos o desenvolvimento da criatividade, da agilidade e da capacidade de organização do pensamento e comunicação.

Para Gonçalves (2003), o LEM é um espaço propício para estimular atitudes consideradas positivas em relação à matemática, tais como: o gosto pela mesma, perseverança na busca de soluções, confiança em sua própria capacidade de aprender e fazer matemática. Para esse autor, o LEM pode contribuir para que o aluno construa, com compreensão, conceitos, habilidades e procedimentos matemáticos, fazendo com que o mesmo vá em busca de relações, propriedades e regularidades, desenvolvendo o espírito investigativo e a autonomia.

Para Rêgo e Rêgo (2006), alguns fundamentos a serem desenvolvidos em sala de aula podem ser facilitados no espaço de um LEM, entre eles: um mesmo conteúdo matemático pode ser trabalhado a partir de variadas experiências de ensino; a aprendizagem ganha um real significado; fazer com que os alunos possam redescobrir padrões, regras e relações através de situações elaboradas e estabelecer uma mudança no ambiente que gira em torno do ensino da matemática, tornando esse ambiente mais agradável, promovendo o sucesso e impedindo a frustação. Esses autores acrescentam que o LEM constitui em uma escola "[...] um importante espaço de experimentação para o aluno e, em especial, para o professor, que tem a oportunidade de avaliar na prática [...] novos materiais e metodologias" (RÊGO; RÊGO, 2006, p. 41).

Embora a proposta de LEM não apareça de maneira evidente em algumas diretrizes trazidas pelos documentos oficiais da educação como os PCN e a BNCC, em algumas partes destes é notório a defesa por algumas concepções e desenvolvimento de habilidades que de uma certa forma estão ligadas a utilização do LEM como alternativa metodológica no ensino de matemática, tais como: a construção de cidadãos críticos e conscientes de sua responsabilidade social e política; desenvolvimento da tomada de decisão, do pensamento crítico e da autonomia; aprendizado com compreensão; aprendizagem significativa; alunos reconhecedores dos seus direitos e deveres; do auxílio a alunos com necessidades especiais; busca por alternativas metodológicas de ensino que contribuam para uma maior interação, participação, socialização, cooperação, respeito mútuo, complementação entre teoria e prática, desenvolvimento da relação professor-aluno e aluno-aluno em sala de aula. Acreditamos que o LEM sortido de materiais pode contribuir amplamente na construção destas competências e na concretização desses aspectos.

Como mencionado anteriormente, a escola apoiada pelo Laboratório de Ensino de Matemática colabora com o professor na sua função de ensinar e no desenvolvimento da relação com os alunos e entre eles mesmo. Segundo os PCN, "Além da interação professor-aluno, a interação entre alunos desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social". (BRASIL, p. 38).

Ainda sobre essa relação aluno-aluno, os PCN (1998) acrescentam que o professor deve estimular a cooperação entre os alunos, esta pode ser até mais importante que a interação professor-aluno, pois uma aprendizagem significativa pode surgir a partir do enfrentamento entre o que o aluno pensa e o que seus colegas, professor e as outras pessoas com quem convive pensam, isso acontece especialmente por presumir a necessidade de formulação e validação de argumentos. Nesse sentido, o LEM é um espaço privilegiado para estabelecer esses vínculos, melhorar a dinâmica no ensino, a motivação e a participação, colaborando para tornar as aulas de matemática bem mais prazerosas. (VIEIRA, 2012).

Isso somente será possível quando o professor conseguir proporcionar um ambiente de trabalho coletivo, permitindo o aluno criar, comparar, debater, rever, questionar e ampliar ideias. Julgamos assim, que o ato de usar materiais existentes no LEM através de planejamento pode contemplar o desenvolvimento dessas capacidades, representando uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o aluno, e consequentemente melhorar a abordagem de conteúdos matemáticos em sala de aula.

Diante de tudo que já foi exposto, foi possível observar como o LEM contribui, tanto para o professor como para o aluno, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem da Matemática. O LEM, portanto, é um espaço favorável e indispensável ao cenário escolar, em virtude de possibilitar à aproximação da teoria com a prática. Nesse sentido, é um ambiente propício para que o aluno desperte o gosto pela matemática, a persistência na busca de soluções e a convicção em sua capacidade de aprender matemática. Além de favorecer a construção de conceitos, estratégias e habilidades matemáticas, pode também promover a procura de relações, propriedades e regularidades, incentivando o espírito investigativo. Por esse motivo e por muitos outros já mencionados anteriormente, o LEM deve ser um espaço pertencente a escola, onde se viva matemática constantemente, tornando-se um ambiente contínuo de busca e experimentação.

Ademais, sabemos que não basta que o professor tenha disponível um LEM para que o aprendizado do aluno seja concretizado com significado. Na concepção de Lorenzato, bem mais importante que o professor dispor de um LEM é ele desempenhar um papel de mediador, sabendo como fazer a utilização correta do Material Didático (MD) contido no mesmo, pois este exige conhecimentos específicos de quem o utiliza, assim como outros instrumentos bastante conhecidos, como: o batom, a enxada, a bola, entre outros. Desta forma, o papel do professor como mediador acaba sendo central na busca por um aprendizado com maior significado para o aluno.

Nesse sentido, ao fazer o planejamento de sua aula, o professor deve questionar-se: a aprendizagem desse conteúdo poderá ser facilitada através da utilização de algum MD? Se sim. Com qual MD? E ainda. Como irei utilizar esse MD? Segundo Lorenzato, ao fazer essa reflexão o professor está encontrando respostas a questões do tipo: Por que MD? Qual é o MD? e Quando utilizá-lo? Na concepção do autor, essas indagações são fundamentais, porém são insuficientes para ocorrer uma aprendizagem significativa, pois esta dependerá do modo de utilizar os materiais e este, por sinal, dependerá grandemente da concepção do professor em torno não só da matemática como também da arte de ensinar.

2.2.1 Material didático (MD)

De maneira amplificada, o MD pode ser estabelecido como objetos pedagógicos que são usados na educação e, exclusivamente, como o material que pode estar relacionado ao ensino e que se produz com destinação didática. Qualquer ferramenta utilizável ao processo de ensino-aprendizagem pode ser considerada como um material didático (MD). Neste caso, um MD pode ser um jogo, um simples giz, uma régua, uma calculadora, um livro, uma caixa qualquer, um quebra-cabeça, um dominó, entre vários outros. Porém, mesmo existindo esse grande conjunto de alternativas, Lorenzato (2006) aponta que os MD de uma maneira geral constituem apenas um dos inúmeros elementos que acabam interferindo na eficiência de produção escolar do aluno.

Quando o professor tem o intuito de utilizar um MD como ferramenta de ensino-aprendizagem, além de refletir sobre os objetivos que pretende alcançar ele também deve pensar de modo muito específico, atentando para as particularidades de cada turma de alunos. Conforme o objetivo a que se exercem, os MD podem realizar várias funções e é por esse motivo que Lorenzato (2006, p. 18) alerta que o professor precisa "perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD: para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD mais conveniente à aula." Tendo tais questionamentos em pauta, percebe-se, que o professor precisa estar preparado a trabalhar com o MD não somente na sua apresentação original, mas também necessita perceber quando o MD precisará passar por ajustes.

Vale lembrar que o MD não substitui o professor, assim como também não se apresenta como uma garantia de um adequado ensino. Desta forma, o professor deve sempre ter em mente que o MD nunca irá extrapolar a esfera de meio auxiliador de ensino, de possibilidade metodológica à disposição do professor e do aluno (LORENZATO, 2006).

Reiteramos que vários são os tipos de MD existentes. Uns não permitem modificações em suas estruturas, já outros possibilitam que o aluno participe com uma maior intensidade. Para ilustrar bem essa diferença, Lorenzato (2006) cita exemplos, a saber, os sólidos geométricos construídos em madeira, papelão ou cartolina representam MD que não possibilita modificações em suas formas e o ábaco e os jogos já permitem uma maior participação do aluno. Dentre esses, existe um tipo de MD que possibilita transformações por continuidade, estudo de vários conceitos, operações além das simplesmente manipulativas, redescobertas, percepção de propriedades e a construção de uma aprendizagem mais eficaz, a saber, os MD dinâmicos.

Todavia, mesmo diante de tudo isso, o autor chama atenção para o fato do professor ter em mente que a aprendizagem não é garantida em virtude da realização em si de atividades manipuláveis ou visuais. Na concepção de Lorenzato (2006) é necessária um outro tipo de atividade para que a aprendizagem aconteça de maneira efetiva, a saber, a atividade mental do aluno. Diante disso, o MD pode desempenhar um papel importante no processo de construção do saber matemático por parte do aluno, a saber, o papel de excelente catalisador.

Fiorentini e Miorim (1990) reforçam a ideia de que a aprendizagem matemática não é garantida em virtude do uso de materiais didáticos de maneira isolada. Para os autores, o professor deve ter responsabilidade na escolha e preparação das atividades envolvendo os MD. Nesse sentido, o professor não deve utilizar os MD de qualquer modo, torna-se preciso um planejamento por parte do mesmo, que necessita saber como utilizá-lo para conseguir alcançar o objetivo almejado na disciplina.

Nesse sentido, no que diz respeito à utilização dos MD, podemos afirmar que o professor exerce um importante papel, pois o mesmo será o encarregado pela definição do momento e do motivo da utilização de um material didático. Logo, o professor precisa ter convicção da utilização dos MD e de sua relação com o ensino.

Lorenzato (2006) observa que se o MD não for corretamente utilizado, o mesmo pode ser ineficaz ou até mesmo prejudicar a aprendizagem. Segundo o autor, o professor precisa acreditar que o MD pode trazer bons resultados desempenhando um papel de auxiliar do processo de ensino-aprendizagem. Nacarato (2004-2005) concorda com Lorenzato e reforça que quando um MD é usado inadequadamente, o mesmo, pouco ou nada contribuíra para a aprendizagem do aluno.

Corroborando com as ideias de Lorenzato, Turrioni (2004) relata que cabe ao professor acreditar no MD como um auxiliador do processo ensino-aprendizagem da matemática. Para a autora, é preciso conhecer o porquê, o como e o quando colocar o MD em ação, ou seja, é preciso que o professor saiba corretamente empregá-lo.

Portanto, da mesma maneira como Fiorentini e Miorim, Lorenzato e Turrioni, Rêgo e Rêgo (2006), ressaltam a responsabilidade do professor quando se trata da utilização de algum material didático, os autores alertam para alguns cuidados que precisam ser tomados pelo professor, a saber, dar tempo para que os alunos conheçam o material, incentivar a comunicação e troca de ideias, fazer o papel de mediador sempre que preciso, ter responsabilidade na escolha do material, planejar com antecedência as atividades e estimular a participação do aluno na confecção do material.

Lorenzato (2006) realça a importância de MD quando afirma que é necessário partir do concreto para se chegar no abstrato. Para o autor, a evolução dos conceitos se dá com o processo de abstração que por sua vez se apoia nos sentidos. Nessa direção, ele relata que caracterizar um objeto sem antes tê-lo visto, tocado ou utilizado não é tarefa fácil, ou seja, quando um objeto é conceituado por um ser humano, quando este ouve o nome do objeto, flui rapidamente em sua mente a ideia desse respectivo objeto, sem necessidade dos apoios primários que tiveram anteriormente do mesmo. Na concepção de Lorenzato, existe uma semelhança desse processo com o que se deve ser feito para alcançar o rigor matemático, pois para conseguir este é necessário partir do conhecimento dos alunos que por sua vez é baseado no concreto e consequentemente bastante distante do rigor matemático. Para o autor, o concreto pode ter duas interpretações, a saber, uma delas refere-se ao palpável, manipulável, e a outra, com a inclusão das imagens gráficas, esta, sendo mais ampla.

Reiteramos que mesmo o professor tendo um MD disponível, ele pode apenas apresentar um resultado/definição aos alunos, por exemplo, mostrar que a "soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo (Se) é igual a 360°", desta maneira o professor está apenas reforçando uma mera memorização de uma definição matemática facilmente encontrada nos livros didáticos. Já em outra ocasião o professor pode propiciar que o aluno participe efetivamente, explorando o material, individualmente ou de uma forma interativa. Desta maneira, o aluno iria obter uma circunferência com 360º, validando assim a definição da (Se) de maneira mais significativa interagindo com o colega mostrando suas observações, descobertas e conclusões, esta seria por sua vez uma forma mais ampla e positiva de se utilizar o MD e consequentemente trabalhar esse conceito em sala de aula. Desta forma, existe duas maneiras diferentes de se utilizar um MD, ou seja, a "[...] eficiência do MD depende mais do professor do que do próprio MD" (LORENZATO, 2006, p. 25). Desta maneira, o problema não está na utilização do MD, mas na forma que é utilizado. Logo, a forma de se utilizar um MD "[...] depende fortemente da concepção do professor a respeito da matemática e da arte de ensinar." (LORENZATO, 2006, p. 25).

Para esse autor, essa segunda maneira de utilização do MD, pode fazer com que o aluno obtenha a alegria da "descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da auto-imagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber onde ele, aluno, pode navegar." (LORENZATO, 2006, p. 25).

Na concepção desse autor é necessário que o professor estabeleça um tempo para que os alunos realizem uma livre exploração do MD, quando este for novidade, pois através dessa observação o aluno poderá conhecer superficialmente o mesmo, ou seja, conhecer suas partes e cores, modelos de peças e chance de dobra ou decomposição. E são estes conhecimentos que junto com o auxílio ou não do professor possibilitarão que o aluno procure e descubra novos conhecimentos. Esse tempo para uma livre observação se torna importante por que a primeira manipulação do MD pode gerar alguma estranhez ou dificuldade e oportunizar noções superficiais, ideias não completas e percepções equivocadas.

Existe um outro fator importante para a formação do aluno e que através dele o professor pode avaliar como e o que os alunos aprenderam. Esse fator deve ser estimulado pelo professor, pois através dele acontece a comunicação das ideias, raciocínios, ações, e conclusões, dos alunos, a saber, a verbalização dos pensamentos. Para Lorenzato (2006) o professor deve estimular que os alunos registrem em seu caderno após a verbalização, esse registro deve ser efetuado segundo suas possibilidades, dando ênfase as suas novas conquistas decorrentes das atividades, concretas e abstratas, que foram realizadas.

Diante do que já foi exposto, percebemos que a ação pedagógica pode ser estendida através da utilização de materiais didáticos nas aulas de matemática, pois estes proporcionam aos alunos habilidade de coordenar seus pontos de vista, deixando o mesmo mais ativo e levando naturalmente o gosto e o prazer pelo estudo. Segundo Moura (2009, p. 84), "[...] todo e qualquer material utilizado para o ensino é ferramenta para ampliar a ação pedagógica."

Com o auxílio do MD, o professor pode, através de um planejamento correto, conseguir uma aprendizagem com compreensão, que possua mais significado para o aluno, reduzindo assim, a ameaça de serem produzidas ou fortalecidas crenças falsas relacionadas a matemática (LORENZATO, 2006). Para a BNCC, materiais didáticos tem um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas (BRASIL, 2018).

Os PCN (1998), também recomendam o uso do MD, ao afirmar que os alunos precisam do apoio de materiais de contagem (fichas, palitos, reprodução de cédulas e moedas), instrumentos de medidas, embalagens, calendários, figuras tridimensionais e bidimencionais, entre outros.

Na concepção de Turrioni (2004, p. 66), o MD "exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar ao aluno na construção de seus conhecimentos."

De acordo com Rêgo e Rêgo (2006, p. 43).

> [...] o material concreto tem fundamental importância pois, a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos. Assim, as atividades em um LEM estão voltadas para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e a formação geral do aluno.

Souza (2007, p. 112-113) destaca que:

> Utilizar recursos didáticos no processo de ensino - aprendizagem é importante para que o aluno assimile o conteúdo trabalhado desenvolvendo sua criatividade, coordenação motora e habilidade ao manusear objetos diversos que poderão ser usados pelo professor na aplicação de suas aulas. [...] Manipulando materiais concretos o aluno envolve-se fisicamente em uma situação de aprendizagem ativa. O caráter motivador é uma das funções do uso de tais recursos pois se sabe que o conhecimento na criança, parte do concreto para o abstrato [...] (SOUZA, 2007, p. 112-113).

Lorenzato (2006) afirma que embora as palavras auxiliem no processo de ensinar, elas não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticas ou em movimento. Logo, as palavras podem auxiliar, mas não são suficientes para ensinar. Para esse autor o fazer é mais forte que o ver ou ouvir.

A afirmação desse autor coincide com a ideia de MD considerada nessa proposta de pesquisa, pois entendemos que através do uso de MD a existência de limites para aprender é minimizada.

2.2.2 Concepções sobre Jogos Matemáticos

O envolvimento do ser humano com jogos acontece desde muito cedo, ou seja, os jogos ocupam um lugar especial no planeta das crianças. À medida que se envolvem em atividades lúdicas, elas envolvem-se e entregam-se ao mundo imaginário do jogar. Nessa direção, Ribeiro (2008, p. 18) afirma que "[...] atividades lúdicas são inerentes ao ser humano, não somente no universo infantil, mas também nas vivências dos adultos."

Quando a criança realiza algum tipo de atividade lúdica como o jogo, ela demonstra naturalmente algumas reações: participação ativa, motivação, envolvimento, concentração, atenção, elaboração de hipóteses, interação, estabelecimento de soluções, comunicação, socialização, elaboração de estratégias, ética e obediência. Para Grando (2000), essas posturas, atitudes e emoções demonstradas pelas crianças quando jogam são as mesmas almejadas na aquisição do conhecimento escolar.

Desta forma, a utilização dos jogos com intenção educativa parte da ideia que a educação precisa ser integral e dessa forma a mesma precisa partir da aprendizagem significativa e do desenvolvimento das capacidades, habilidades, competências e inteligências. (SANTOS, 2011). Portanto, o professor precisa refletir sobre a utilização desse recurso didático no ensino da Matemática, pois o mesmo pode contribuir para que os alunos gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da sala e ajudando para que haja um maior interesse em aprender por parte do aluno. Nesse contexto, o jogo apresenta-se como um recurso dinâmico que colabora para o desenvolvimento do aluno e proporciona um ambiente favorável ao processo ensino-aprendizagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apontam que a inserção de jogos no contexto escolar aparece como uma possibilidade significativa no processo de ensino aprendizagem.

> Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes-enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório e necessário para aprendizagem da matemática (BRASIL, 1998, p. 47).

Nesse sentido, muitas são as habilidades que podem ser desenvolvidas a partir do trabalho bem planejado com jogo. Para os PCN (1998), um aprendizado é significativo a partir do momento que forem trabalhadas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação de hipóteses, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, o trabalho em equipe, a tomada de decisão, a criatividade, a iniciativa pessoal e a autonomia para enfrentar desafios. Defendemos que o jogo quando bem escolhido, tendo todo um planejamento, com objetivos bem estabelecidos pode colaborar grandemente para o desenvolvimento dessas capacidades/habilidades, e consequentemente colaborar para um aprendizado significativo.

Ainda conforme os PCN (1998), as atividades com jogos permitem ao professor analisar e avaliar os seguintes aspectos: compreensão (entender o processo do jogo facilmente, assim como o autocontrole e o respeito a si próprio), facilidade (construção de uma estratégia campeã), possibilidade de descrição (capacidade de comunicar o método seguido e da maneira de atuação) e estratégia usada (capacidade de fazer a comparação com as previsões realizadas).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a importância dos jogos na aprendizagem da matemática, afirmando que:

> [...] a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, [...] têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p. 276).

Portanto, como podemos perceber, os jogos vão muito além do simples fato do brincar. Trata-se de razões lógicas, regras, muita dinâmica, bastante movimento e interação para se chegar ao objetivo desejado e específico no jogo. Através do jogo é possível a maior integração da turma, notoriamente a comunicação entre os alunos e dos alunos com o professor aumentam. Para Texeira e Apresentação (2014), a aprendizagem significativa é ativada através da observação, da criatividade, do pensamento lógico, da resolução de problemas, da articulação com conhecimentos diferentes e da relação com os colegas de turma, que por sua vez são frutos de um ambiente descontraído proporcionado pelo uso de jogos como recurso didático no ambiente escolar.

Alguns dos objetivos do ensino podem ser alcançados quando o jogo é bem escolhido e explorado em sala de aula, a saber, o desenvolvimento das potencialidades, tanto intelectuais quanto afetivas e físicas do aluno (RÊGO E RÊGO, 2009).

De acordo com Baumgartel (2016, p. 4) “o jogo pode ser utilizado como um facilitador para a aprendizagem, com diversas possibilidades, como a construção de conceitos e a memorização de processos, pois a sua repetição pode ser mais agradável do que a resolução de uma extensa lista de exercícios.” De acordo com Santos (2014), temos nas atividades com jogos mais uma alternativa para organizar os conteúdos e abranger objetivos que superam o que está posto.

Ainda de acordo com esse autor, “A partir de uma concepção de que a escola é um lugar privilegiado para novas descobertas, conhecimentos e atitudes, podemos dizer que propostas onde os jogos estão incluídos podem atingir a objetivos diversos.” (SANTOS, 2014, p. 26).

O potencial dos jogos é conhecido e de grande importância para o ensino-aprendizagem, a partir do momento que o professor faz um trabalho adequado com jogos, ele está ajudando o aluno a desenvolver algumas habilidades, como: observação, análise, reflexão, argumentação, entre outros fatores que possibilita ao aluno a oportunidade de resolver problemas, levando a uma situação de prazer, contentamento e aprendizagem significativa nas aulas de matemática. Mas por que essas habilidades podem ser desenvolvidas? Smole, Diniz e Milani (2007) respondem a esse questionamento, relatando que:

> As habilidades desenvolvem-se porque, ao jogar, os alunos têm a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada; refletir e analisar as regras, estabelecendo relações entre os elementos do

> jogo e os conceitos matemáticos. Podemos dizer que o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática. (SMOLE, DINIZ, MILANI, 2007, p.09).

Logo, de acordo com esses autores, ao jogar, os alunos tem a chance de resolver problemas. Ribeiro (2008) concorda e afirma que a exploração de jogos no ambiente educativo das aulas de matemática apresenta-se como uma das alternativas para o desenvolvimento de atividades de resolução de problemas. Esta é tratada como uma das competências apontadas pela BNCC que precisam ser desenvolvidas no ensino da matemática. Neste documento, a capacidade de resolver e elaborar problemas é relacionada em seus objetivos gerais para a matemática e nos diferentes níveis e conteúdos.

Nesse contexto, Baumgartel (2016) considera o jogo como uma estratégia de apresentar situações problemas, pois de acordo com o andamento da partida as situações mudam frequentemente, ou seja, uma nova avaliação da situação e uma busca pela estratégia mais adequada é necessária a cada nova etapa do jogo.

Desta maneira, trabalhar com jogos matemáticos favorece a aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos. E além do mais como já foi dito anteriormente, atividades que envolvam jogos podem ser entendidas como atividades que envolvam a resolução de problemas, pois ao jogar os alunos estão de certa maneira resolvendo problemas. Como diz os PCN:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46).

Para Baumgartel (2016, p. 5):

> No jogo, a resolução de problemas é envolvida pelas própria necessidade de sua execução, onde é necessário elaborar e testar estratégias, levantar hipóteses e refletir sobre as ações do jogador e do seu oponente e, como processo de aprendizagem, que pode ocorrer com a mediação do professor, há também o registro e análise das etapas do jogo. Esses princípios são os mesmos da resolução de problema.

Nessa perspectiva, trabalhar com jogos pode representar uma mudança para uma nova configuração escolar, proporcionando ao aluno uma aprendizagem de maneira divertida e prazerosa, favorecendo a interação social entre os integrantes do grupo, a troca de experiências, do respeito e diálogo e a capacidade de colaboração, fazendo com que o aluno desenvolva seu potencial de participação, cooperação, respeito mútuo e crítica. É no ato de jogar que o aluno potencializa habilidades, como: levantamento de hipóteses, análise, realização de conjecturas, estabelecimento de relações, formulação de diferentes soluções e estratégias.

Lins (2019, p. 16) acredita que o jogo "pode contribuir como metodologia para desenvolver os conteúdos matemáticos de forma dinâmica, sendo este, trabalhado de forma coerente em seus contextos pedagógicos, possibilita ao aluno o desenvolvimento de habilidades cognitivas."

De acordo com Santos (2014) o uso de jogos pode despertar o interesse do aluno pelas atividades propostas, e consequentemente facilitar o trabalho do profissional da educação. Muniz (2010) concorda com esse autor e acrescenta que por intermédio do jogo, existe a possibilidade de que todos os alunos participem e se envolvam de forma maior na realização das atividades propostas.

Nessa perspectiva, Ribeiro (2008, p. 19) afirma que:

> [...] a inserção dos jogos no contexto escolar aparece como uma possibilidade altamente significante no processo de ensino aprendizagem, por meio da qual, ao mesmo tempo em que se aplica a idéia de aprender brincando, gerando interesse e prazer, contribui-se para o desenvolvimento cognitivo, afetivo e social dos alunos.

Desta forma, todos esses aspectos devem ser considerados atentamente pelo professor ao planejar suas aulas, procurando prezar pela qualidade do ensino e o desenvolvimento da dignidade humana. Refletindo cada vez mais a respeito da utilização de recursos metodológicos, o professor expande cenários propícios para o melhoramento da aprendizagem do aluno, e consequentemente das aulas de matemática.

Além de todas essas questões apresentadas, existe outra de ordem da natureza do próprio conhecimento matemático, a qual abordamos superficialmente na introdução e aprofundamos no próximo item, para tal propósito, tecemos considerações sobre a grande área de pesquisa educacional chamada Educação Matemática, onde para abordarmos sobre a mesma trouxemos alguns autores. A partir daí nos propusemos a tecer nossas considerações em relação a uma das tendências teóricas pertencentes a Educação Matemática, a saber, a Didática da Matemática, e somente assim que dentro das importantes noções pertencentes a mesma, chegamos aos obstáculos epistemológicos, onde tecemos considerações sobre esse importante conceito.

2.3 Noções sobre a Didática Francesa

Nesse tópico, apresentamos fragmentos sobre a grande área de pesquisa educacional denominada Educação Matemática. Para isso, dialogamos com os seguintes autores: Pais (2001); Carvalho (1991); Fiorentini e Lorenzato (2006); e Igliori (2008) com o intuito de defini-la. Logo depois, iniciamos um estudo sobre uma das tendências teóricas originadas por essa grande área, a saber, a Didática da Matemática, apresentando seu principal foco de estudo. Mais adiante, dialogamos com Pais, Igliori, Fiorentini e Lorenzato, e D'Amore para apresentarmos a diferenciação entre Educação Matemática e Didática da Matemática. Expomos também os principais conceitos da Didática da Matemática, no qual focamos no nosso objeto de estudo, os obstáculos epistemológicos. Diante disso, abordamos algumas noções que entendemos como convenientes para uma melhor sustentabilidade desse conceito, a saber: epistemologia, epistemologia da matemática e epistemologia do professor.

Mesmo tendo seu firmamento como área de pesquisa ainda recentemente, quando comparada à história milenária da matemática,

> A *educação matemática* é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática. Além dessa definição ampla, a expressão *educação matemática* pode ser ainda entendida no plano da prática pedagógica, conduzida pelos desafios do cotidiano escolar (PAIS, 2001, p. 10).

Em uma tentativa de definir Educação Matemática de maneira geral, Carvalho (1991) informa que Educação Matemática é o estudo de todos os elementos que atuam diretamente e indiretamente sobre todos os processos de ensino e aprendizagem em matemática e na atuação sobre esses elementos.

Já para Fiorentini e Lorenzato (2006), a Educação Matemática, diferentemente da Matemática, estruturada em bases lógicas bem determinadas, é uma área emergente de estudos, recente, não possuindo ainda uma metodologia única de investigação nem uma teoria evidentemente retratada. De acordo com esses autores, "a EM é uma área de conhecimento das ciências sociais ou humanas, que estuda o ensino e aprendizagem em Matemática"

(FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 5) e que pode ser especificada como uma ação que envolve o controle do conteúdo especifico (a matemática) e o controle de ideias e métodos pedagógicos referentes a transmissão/assimilação e/ou a apropriação/construção do saber matemático.

Dessa forma, segundo Igliori (2008, p. 113) “A Educação Matemática congrega, como área de saber, temáticas da Educação, Matemática, Psicologia, Filosofia, Epistemologia, História, Antropologia entre outras”. Ela cita ainda que a Educação Matemática possui apenas algumas décadas de existência e está em fase de constituição e, por esse motivo, seus fundamentos estão sendo frequentemente revistos.

Assim sendo, com base nas definições descritas por Pais (2001), Carvalho (1991), Fiorentini e Lorenzato (2006) e Igliori (2008), percebemos que mesmo os autores usando denominações diferentes, o que mais se destaca nesses termos é uma preocupação com o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos, além de uma grande procura pelo entender e o realizar matemático, como também as significações sociais, culturais e históricas da matemática.

Logo, existem dois objetivos básicos para a pesquisa em Educação Matemática: o primeiro de característica pragmática, cujo principal objetivo encontra-se na busca pela melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática e outro de características científicas, que visa o desenvolvimento dessa área nos âmbitos da investigação e da produção de conhecimentos (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Para esses autores quando se refere a esses dois objetivos, no âmbito das pesquisas desenvolvidas no campo da Educação Matemática, é possível buscar respostas para alguns questionamentos frequentes.

Em relação à primeira situação, relacionam as seguintes questões: por quê os alunos têm tantas dificuldades em aprender determinados conteúdos matemáticos, tais como fração, função, números inteiros? por quê, de uma maneira geral, não gostam de resolver problemas? o uso de recursos didáticos e a resolução de situações problemas significativos contribuem ou não para melhoria do processo de ensino aprendizagem? entre outros. Quanto ao segundo ponto, elaboram os questionamentos: o que dizem as pesquisas brasileiras ou os autores do porquê dos alunos não aprenderem determinados conteúdos matemáticos? o que os estudos e a literatura em Educação Matemática dizem a respeito da utilização de alternativas metodológicas em sala de aula no ensino de matemática? (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

As respostas encontradas para questionamentos desse caráter e de muitos outros, gradualmente tem colaborado para que os professores de Matemática obtenham uma melhor compreensão sobre os obstáculos e as alternativas de superação dos mesmos no espaço escolar. Por esse motivo, a Educação Matemática segundo Fiorentini e Lorezanto (2006) não trata apenas de um campo profissional, mas também um ramo de conhecimento, que é tanto um ramo de pesquisa teórica quanto um ramo de execução prática, além de ser também ao mesmo tempo ciência, arte e prática social.

Nas últimas décadas o desenvolvimento da Educação Matemática ganhou grande impulso e essa grande área de pesquisa educacional deu origem a várias tendências teóricas, como por exemplo: Etnomatemática, Psicologia Cognitiva da Matemática, Modelagem Matemática, História da Matemática e Didática da Matemática, entre várias outras, em que cada uma aprofunda determinadas temáticas educacionais do ensino da matemática. Estas tendências podem contribuir para que o professor proporcione situações favoráveis a novas maneiras de compreensão, que promovam um conhecimento mais significativo para os alunos.

Dentre as tendências, a Didática da Matemática se caracteriza pela influência de autores franceses e ganha lugar especial diante da grande área de Educação Matemática, Luiz Carlos Pais, um dos maiores especialistas desta tendência no Brasil, relata que:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2001, p.11).

Ainda de acordo com Pais (2001, p. 11), essa concepção visa:

> [...] compreender as condições de produção, registro e comunicação do conteúdo escolar da matemática e de suas consequências didáticas. Dessa forma, todos os conceitos didáticos se destinam favorecer a compreensão das múltiplas conexões entre a teoria e a prática e esta condição é um dos princípios dessa área de estudo.

A dimensão teórica é entendida por esse autor como sendo o ideário resultante da pesquisa e a prática como sendo a condução do fazer pedagógico. Isso indica que os elementos do sistema didático (professor, aluno, conhecimento, planejamento, objetivos, recursos didáticos, instrumentos de avaliação, uma concepção de aprendizagem e metodologia de ensino) devem ser vigorosamente integrados entre si, sendo impossível separá-los das relações entre professor, aluno e o saber. O autor exemplifica, dizendo que como o rigor e o formalismo são características do pensamento matemático, na prática educativa da matemática a relação pedagógica entre o professor e os alunos, pode ser condicionada por métodos influenciados por essas concepções relativas ao próprio saber, os quais, na realidade, não pertencem à categoria do trabalho didático (PAIS, 2001).

Isso só fortalece a importância dessa tendência teórica na área da Educação Matemática, a qual se caracteriza pela influência de autores franceses. Por esse motivo, no Brasil, é mais conhecida como linha francesa da Didática da Matemática, já que seus principais conceitos foram desenvolvidos na França. Segundo Pais (2001), uma de suas características principais é a formalização conceitual de suas constatações práticas e teóricas. Para esse autor, a referida linha de pesquisa prioriza duplamente o estudo da didática através de conceitos, pois, se por um lado, está o problema da formação dos conceitos matemáticos, por outro, tem também o problema da formação dos conceitos didáticos referentes ao fenômeno da aprendizagem matemática.

De uma maneira geral, Douady (1984 apud D'Amore (2007, p. 32) afirma que a Didática da Matemática é:

> [O] estudo dos processos de transmissão e de aquisição dos diferentes conteúdos dessa ciência (a Matemática) [e] se propõe a descrever e explicar os fenômenos relativos às relações entre seu ensino e sua aprendizagem. Ela não se reduz a buscar uma boa maneira de ensinar uma determinada noção.

Dessa forma, D' Amore (2007, p. 84) argumenta que o principal foco de estudo da Didática da Matemática "(...) encontra-se constituído pelos diferentes tipos de sistemas didáticos (formados pelos possíveis subsistemas que contêm esses elementos: professor, estudante, saber), que já existem ou que podem ser criados (por exemplo, ativando particulares maneiras de ensino)".

Para Pais (2001), é fundamental a diferenciação entre *Educação Matemática* e *Didática da Matemática*, pois, para ele, não se trata de apenas um problema de tradução, visto que, na França, a *Didática da Matemática* é usada para representar a própria área de pesquisa educacional da matemática. Em relação ao contexto educacional brasileiro o autor destaca que existe uma preocupação em clarificar o significado da nomenclatura, onde além do mais, a expressão *Didática da Matemática* pode ser confundida como disciplina pedagógica de didática usada ao ensino da matemática.

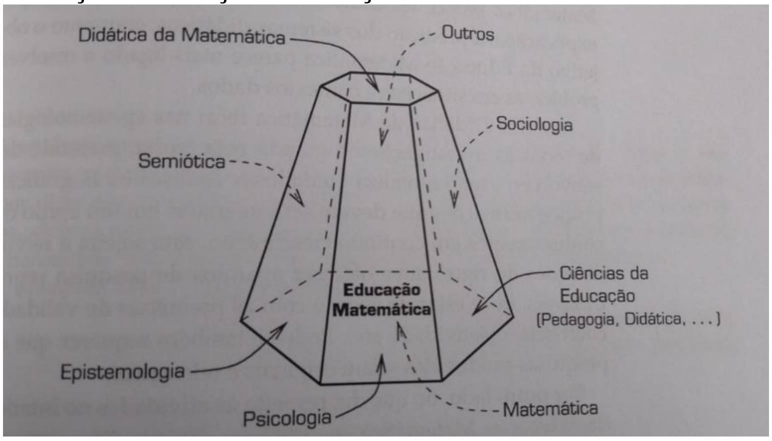
Nesses termos, Igliori (2008, p. 114-115) esclarece que, "[N]a França, o ramo do conhecimento voltado ao processo do ensino e da aprendizagem da Matemática é denominado

Didática da Matemática; em outros países e no Brasil, em geral, é denominado Educação Matemática”.

Fiorentini & Lorenzato (2006) destacam que em outros países a Educação Matemática recebe outras denominações, exemplificando que na Holanda o nome é “Metodologia do Ensino de Matemática” e na França e na Alemanha o nome é “Didática da Matemática”. Os autores mencionam que a escolha pelo termo Educação Matemática deve-se ao caso que ele tem uma significação mais extensiva e pode ter o significado tanto de uma atividade educacional quanto de um ramo multidisciplinar de conhecimento.

Nesses termos, D’Amore (2007) distingue as dicções *Educação Matemática* e *Didática da Matemática*. A Didática da Matemática seria, então, a disciplina científica ligada a “*pesquisa para o conhecimento*” (pesquisa científica). No caso, estaria vinculado a ela o estudo da tentativa de adaptar e articular as contribuições das outras disciplinas interessadas no ensino e na aprendizagem da Matemática. A Educação Matemática estaria, por outro lado, interessada na “*pesquisa para ação*” (teoria, desenvolvimento e prática). O autor ainda apresenta uma imagem e duas definições, que ilustram bem a situação da distinção entre as duas dicções, replicada na figura 1.

Figura 1 - Distinção das dicções *Educação Matemática e Didática da Matemática.*



Fonte: D’ Amore (2007, p. 97).

Didática da Matemática: é a disciplina científica e o campo de pesquisa cujo objetivo é o de identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e os processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Educação Matemática: é o sistema social complexo e heterogêneo que inclui teoria, desenvolvimento e prática relativo ao ensino e aprendizagem da Matemática. Inclui a Didática da Matemática como subsistema.

O autor continua a fazer reflexões acerca da distinção dessas dicções, dando ideia sobre esse desenvolvimento recente:

> O aparato de pesquisa que informa e constrói a Didática da Matemática parece ter como objetivo principal a descrição, a explicação e a predição dos sistemas didáticos; enquanto o objetivo da Educação Matemática parece mais ligado a resolver problemas em situações e contextos dados.
> Assim, a Didática da Matemática recai nas epistemologias de todas as investigações: é guiada pela teoria, pretende desenvolver a teoria, realiza cuidadosas análises bibliográficas, propõe afirmações que devem ser integradas em um corpo de conhecimentos em contínuo crescimento, está sujeita a reivindicações de rigor, deve oferecer aparatos de pesquisa reproduzíveis, deve estar de acordo com as premissas de validade, coerência, objetividade etc.. Pode-se também requerer que as pesquisas produzidas sejam originais e relevantes.
> Por outro lado, no que diz respeito às atividades no interior da Educação Matemática, os critérios seriam diferentes: as características mais desejáveis são a utilidade, a facilidade de se alcançar o resultado, o baixo custo (em todos os sentidos), a rapidez, a eficácia, o rendimento etc..
> Todavia, é óbvio que os dois setores estão mutuamente ligados, tanto mais se se misturam as instituições em que as pesquisas são conduzidas (D'AMORE, 2007, p. 98).

Os principais conceitos de Didática da Matemática foram desenvolvidos na França, muitos desses conceitos já mostraram suas capacidades como base teórica e metodológica de análise do processo de ensino-aprendizagem da matemática em várias pesquisas que aconteceram em diversos países ao redor do mundo e, principalmente no Brasil (MACHADO, 2008). Neste contexto, Pais (2001) aborda alguns dos principais conceitos da Didática Francesa, quais sejam: Transposição Didática; Formação de Conceitos e os Campos Conceituais; Situações Didáticas; Contrato Didático; Engenharia Didática; Obstáculos Epistemológicos e Didáticos, entre outros. Como já explicitamos anteriormente, tratamos aqui mais especificamente deste último, por ser objeto de estudo do nosso trabalho.

Entretanto, antes de iniciarmos essa tarefa, discorremos, mesmo que superficialmente, sobre a epistemologia do professor, em função do papel que este executa no sistema didático.

Neste contexto, existem conceitos/noções na Didática da Matemática que o professor deve ter conhecimento, possibilitando-o desempenhar um trabalho tendo maior compreensão dos problemas de ensino-aprendizagem da matemática e das relações entre professor, aluno e saber, encontrando desta maneira a explicação para termos que surgem de vários lados e que mesmo sem conhecê-los acabam percebendo-os e utilizando-os no ambiente escolar.

Conhecer esses conceitos/noções da Didática da Matemática podem deixar o professor mais preparado e sensível a percepção de detalhes referentes ao ensino aprendizagem da matemática tanto em relação à área teórica quanto a prática. Possuindo esse conhecimento o professor pode ter entendimento que além de conceitos matemáticos, existem conceitos pedagógicos que também são importantes para esse processo.

"Na didática da matemática, Brousseau (1986) propõe uma análise do saber matemático, bem como do trabalho do matemático, do trabalho do professor de matemática e da atividade intelectual do aluno." (PAIS, 2001, p. 29).

Nesses termos, precisamos compreender, inicialmente, a natureza da matemática, a qual se traduz pelo trabalho desenvolvido pelo matemático, na formação de conceitos, descoberta de teoremas e demonstrações, sistematizados por uma redação validada pela comunidade específica (PAIS, 2001). Esse objeto, além de guiar o trabalho do matemático, condiciona uma parte relevante da ação pedagógica e das próprias tarefas praticadas pelos alunos. Para tanto, esse autor sugere que é necessário estabelecer relações entre o trabalho do professor com o trabalho do matemático, apesar de existir a possibilidade de conciliar essas duas atividades. Porém, a prática pedagógica é influenciada consideravelmente pelo tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático. Entretanto, em relação ao que compete a cada um, o trabalho do professor abrange o desafio que equivale em realizar uma atividade que, em um certo sentido, é inverso daquela do pesquisador. Nesse sentido, ele menciona que:

> [...] enquanto o matemático tenta eliminar as condições contextuais de sua pesquisa, buscando níveis mais amplos de generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais compreensível para o aluno. Todavia, o contexto reconstituído não é o mesmo daquele em que o saber foi inicialmente elaborado. Enquanto para o pesquisador, o saber matemático é o seu principal objeto de estudo, na prática pedagógica, o saber escolar é um instrumento educacional para a promoção existencial do aluno. (PAIS, 2001, p. 32-33).

Dessa maneira, necessário se faz destacarmos a ideia de epistemologia do professor de matemática para caracterizarmos o trabalho docente. Porém, o que é epistemologia?

> A epistemologia é o estudo da evolução das ideias essenciais de uma determinada ciência, considerando os grandes problemas concernentes à metodologia, aos valores e ao objeto desse saber, sem vincular necessariamente ao contexto histórico desse desenvolvimento. Trata-se de uma disciplina relacionada à teoria do conhecimento. (PAIS, 2001, p. 33).

Para Igliori (2008), a Epistemologia tem muitas facetas: histórica, filosófica, social ou psicológica. A autora destaca que a Epistemologia de maneira sintetizada, é o campo do saber que se interessa por questões tais como:

> - O que é conhecimento?
> - Como se processa o conhecimento?
> - Qual a natureza dos objetos que compõem uma determinada ciência (a Matemática, por exemplo)?
> - Em que sentido a Matemática é, ao mesmo tempo, um conjunto de ferramentas e um conjunto de objetos?
> - Qual a natureza e a função de um novo conceito, um novo procedimento, um novo tipo de raciocínio, uma nova representação da história da Matemática?
> - Qual deve ser o relacionamento entre novas competências e concepções matemáticas e os problemas práticos ou teóricos, de modo a torná-los úteis e significativos? (IGLIORI, 2008, p. 115).

Sendo assim, "[A] epistemologia da matemática é constituída pelo estudo da evolução de seus conceitos" (PAIS, 2001, p. 33). Para este autor, por exemplo, quanto à formação do conceito de número real, considerando o aspecto analítico, passaram-se mais de dois mil anos para termos a estrutura que conhecemos hoje. O desenvolvimento desse conceito exprime o que chamamos de problema epistemológico.

Dessa maneira, (Pais, 2001, p. 33 - 34) esclarece que,

> [T]oda epistemologia está associada a uma determinada ciência e não faz sentido considerá-la genericamente, sem pontuar a evolução de um determinado conceito. Dessa forma, percebe-se que a epistemologia está associada à evolução das ideias centrais de uma disciplina científica, o que não deve ser confundido com a compreensão de quem trabalha com esta disciplina. A partir dessa visão, entendemos a *epistemologia do professor* como sendo as concepções referentes à disciplina com que trabalha esse professor, oriundas do plano estrito de sua compreensão e que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados aos alunos. (PAIS, 2001, p. 33-34).

De maneira semelhante, a epistemologia de uma determinada ciência pode ser diferenciada da compreensão que o cientista tem quanto aos seus métodos, valores e objeto dessa ciência. Nesse sentido, podem aparecer crenças endurecidas pelo tempo quando se examina a epistemologia do professor, essas crenças enrijecidas pelo tempo podem dar existência a uma visão apenas pessoal sobre a ciência ensinada. Refere-se ao conflito entre a visão abstrata e a ideia de objetividade que deve caracterizar a aprendizagem escolar. (PAIS, 2001).

Logo, de maneira geral, a noção de obstáculo epistemológico, inerente à Didática da Matemática, está inteiramente ligada a epistemologia do professor (as concepções que o professor possui referente a disciplina com qual trabalha), onde estas concepções são oriundas do plano absoluto de sua compreensão e que estas conduzem parte de sua postura pedagógica, pois estão literalmente ligadas ao entendimento dos conceitos que são ensinados aos alunos. Pelo fato de ter associação com as concepções que o professor possui em relação a disciplina que ensina, essa noção é bastante importante para que o professor possa desempenhar um bom trabalho, a partir de maior compreensão dos problemas de ensino-aprendizagem e das relações entre professor, aluno e saber. A importância dessa noção também aparece pelo fato da mesma está inteiramente conectada com a epistemologia, a qual por sua vez, trata do estudo da evolução das ideias centrais de uma disciplina científica.

Dessa maneira, a seguir, considerando que a tendência teórica Didática da Matemática visa colocar o aluno como centro do processo de ensino e aprendizagem desenvolvemos o conceito de obstáculos epistemológicos, como uma referência para o ensino da matemática. Apresentamos assim a sua potencialidade como suporte teórico e metodológico de análise do processo do ensino-aprendizagem da matemática, como também sua importância pedagógica no processo de construção dos saberes do aluno, e principalmente na criação de métodos de intervenções didáticas.

2.4 Noções sobre Obstáculos Epistemológicos e Didáticos

2.4.1 Obstáculos Epistemológicos

No contexto dos conceitos/noções da Didática da Matemática, os obstáculos epistemológicos se constituem como uma referência pra o ensino da matemática. A sua potencialidade como base teórica e metodológica de análise do processo do ensino-aprendizagem da matemática desencadeia um grande interesse na atualidade por pesquisadores/professores, em particular do Brasil. De acordo com D'Amore (2007) tal conceito/noção converteu-se ligeiramente em um dos fundamentos da pesquisa mundial, aparecendo-se tão frutífero a ponto de encontrar-se entre as *palavras* mais usadas pela comunidade internacional de pesquisadores em Didática da Matemática no momento.

Segundo Bittencourt (1998), a repercussão que a ideia de obstáculos epistemológicos carregou nas pesquisas em didática em geral, e em especial em didática da matemática foi bastante relevante.

Nesse sentido, Schubring (2018) afirma que o conceito de obstáculo epistemológico estabelece um desafio para o professor de matemática, no que se refere à reflexão sobre a natureza da matemática e também sobre as maneiras como seus conceitos se manifestaram. Esse autor acrescenta que “[T]ais reflexões deveriam fazer parte do ‘meta-knowledge’ do professor, um tipo de saber que organiza e guia o professor na sua prática em sala de aula” (SCHUBRING, 2018, p. 09). Nessa concepção, o professor somente será capaz de contribuir para que seus alunos construam conceitos matemáticos apropriados se o mesmo possuir uma visão da natureza e do desenvolvimento da matemática.

Ao abordarmos os obstáculos epistemológicos, é imediato mencionarmos o responsável pelo desenvolvimento desta importante ideia, a saber, o filósofo francês Gaston Bachelard, que em meio a um período de construções revolucionárias elaborou a referida ideia na sua obra *A formação do Espírito Científico*, publicada em 1938. Esta produção trata de uma das muitas contribuições desse autor para a ciência, nela, o mesmo se propõe a mostrar a contribuição do pensamento científico abstrato. Para tal objetivo, o autor menciona que se torna preciso provar que a abstração desentrava o espírito. Para isso, ele faz um estudo mais próximo voltado às dificuldades das abstrações precisas. Já para mostrar que o método de abstração é não análogo e incontínuo, reprimenda a persistir a respeito do caráter de obstáculo, dado que a abstração motivada pelas objeções da razão é encontrada na evolução científica, estas objeções são tidas como obstáculos.

Nessa obra, escrita a partir de conclusões recolhidas da sua própria vivência, Bachelard faz uma análise do espírito científico dos séculos XVIII e XIX, verificando as condições em que a ciência evolui. Desta forma, ele afirma que a tarefa principal em que se confirma o espírito científico é a de “delinear os fenômenos e ordenar em série os acontecimentos decisivos de uma experiência [...]” (BACHELARD, 1996, p. 7). Para isso, “[...] ao examinar a evolução do espírito científico, logo se percebe um movimento que vai do geométrico mais ou menos visual para a abstração completa.” (BACHELARD, 1996, p. 8). Assim, pontua que “todo saber científico deve ser reconstruído a cada momento [...]”. (BACHELARD, 1996, p. 10). Bachelard menciona, dessa maneira, que sobre seja qual for à questão ou o fenômeno, torna-se preciso deslocar-se primeiro da imagem para a forma geométrica e, depois, deslocar-se da forma geométrica para a forma abstrata (BACHELARD, 1996).

Ainda nessa obra, Bachelard (1996) caracteriza que o espírito científico em sua formação individual passaria de modo necessário por três estados: I) o estado concreto, que compreende o primeiro período (estado pré-científico) nos séculos XVI, XVII até XVIII, no qual o espírito científico se distrai com as iniciais imagens do fenômeno e se constitui em uma literatura filosófica que enaltece a natureza, exaltando curiosamente de modo simultâneo a unidade do mundo e sua imensa diversidade. II) o estado concreto-abstrato, que compreende o segundo período (estado científico) ocorrido no fim do século XVIII, que se estendeu por todo o século XIX e início do século XX, em que o espírito agrega à experiência física conjunto de métodos e procedimentos geométricos e se apoia em uma filosofia da simplicidade. III) o estado abstrato, que compreende o novo espírito científico, que teve seu início em 1905, com a deformação de conceitos primordiais através da Relatividade de Einstein, é nesse estado que o espírito científico desempenha informações de modo facultativo subtraídas a intuição do espaço real, voluntariamente isenta da experiência imediata e até em polêmica declarada com a realidade inicial, sempre impura e informe (BACHELARD, 1996).

Nesse contexto, o saber científico é reconstruído e reconsiderado para cada período novo. Assim, a contradição faz parte do método de construção do conhecimento científico, pois a partir do momento em que uma hipótese científica não se esbarra em nenhuma discordância, a mesma tem tudo para ser considerada uma hipótese científica inútil. “Do mesmo modo, a experiência que não retifica nenhum erro, que é monotonamente verdadeira, sem discussão, para que serve?” (BACHELARD, 1996, p. 14). Logo, a experiência científica é desta maneira uma experiência que refuta a experiência comum.

Dessa forma, em sua obra, o autor evidencia a noção de obstáculo epistemológico de maneira básica e fundamental, dado que abrange elementos do desenvolvimento histórico do pensamento científico. Na convicção de Bachelard, para que um conhecimento pré-científico evolua para um nível de reconhecimento científico passa geralmente por uma recusa de conhecimentos anteriores e se confronta com um determinado número de obstáculos, ou seja, segundo o autor o desenvolvimento do espírito científico acontece precisamente através da superação de obstáculos. Assim sendo, analisar o problema do obstáculo epistemológico é na verdade compreender a evolução do espírito científico. Logo, o autor define obstáculos epistemológicos, argumentando que:

> [Q]uando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que *é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado*. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano; é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (BACHELARD, 1996, p. 17).

Bachelard acreditava que “o conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno” (BACHELARD, 1996, p. 16). Para ele, a existência do real sempre seria um sinal de perigo e desorganização do pensamento e que “Diante do real, aquilo que cremos saber com clareza ofusca o que deveríamos saber.” (BACHELARD, 1996, p. 18). Bachelard se tornou um dos primeiros filósofos a criticar a visão empírico-indutivista. “Quando o conhecimento empírico se racionaliza, nunca se pode garantir que valores sensíveis primitivos não interfiram nos argumentos.” (BACHELARD, 1996, p. 19).

Assim sendo, o conhecimento empírico acaba se tornando a razão de diversos erros, e a frequente correção destes é fundamental à formação do espírito científico. Diante disso, os erros retratam os intervalos de não progressão e até retrocesso com que se depara o espírito científico, por esse motivo os erros são essenciais e deles não se pode e nem se deve fugir. Nesse pensamento, todas as dificuldades encontradas nesse caminho são consideradas obstáculos epistemológicos. Para o filósofo francês, os obstáculos epistemológicos aparecem na aprendizagem de um novo conceito, onde se é instalado conclusões equivocadas por causa do empirismo assimilado antes, tornando-se um conhecimento mal elaborado e em contradição ao conhecimento científico.

Desta maneira, Bachelard (1996, p. 19) destaca que “Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado. Hábitos intelectuais que foram úteis e sadios podem, com o tempo, entravar a pesquisa.” Nesse contexto, “chega o momento em que o espírito prefere o que confirma seu saber àquilo que o contradiz, em que gosta mais de respostas do que de perguntas”. (BACHELARD, 1996, p. 19). Assim, quando não existe indagações, logo não existe questionamentos e um obstáculo epistemológico se crava no conhecimento não indagado. Nessa linha de pensamento, os novos conhecimentos produzem divergências quando são aplicados em funcionamento, num cenário no qual os conhecimentos antecedentes se firmavam de modo satisfatório.

Nessa perspectiva, a opinião é o primeiro obstáculo que precisa ser superado, pois para fundamentar e ampliar o próprio acúmulo de conhecimento torna-se impossível a ideia de partir de zero, isso se deve pelo fato que não é possível cancelar de uma vez só todos os conhecimentos habituais já existentes. Assim, “Não se pode basear nada na opinião: antes de tudo, é preciso destruí-la.” (BACHELARD, 1996, p. 18). Caso contrário. O obstáculo da opinião pode camuflar a compreensão do saber científico, através da visão do mundo exterior do qual é oposto. Em relação a esse obstáculo epistemológico, Bachelard (1996, p. 18) menciona que:

> [E]la é o primeiro obstáculo a ser superado. Não basta, por exemplo, corrigi-la em determinados pontos, mantendo, como uma espécie de moral provisória, um conhecimento vulgar provisório. O espírito científico proíbe que tenhamos uma opinião sobre questões que não compreendemos, sobre questões que não sabemos formular com clareza.

Dessa forma, o autor dá ênfase a caracterização do verdadeiro espírito científico, o que passa primeiramente pela formulação de problemas, os quais não devem ser formulados de maneira espontânea. Neste caso, para se passar a ter e para se passar a compartilhar conhecimento, torna-se essencial que se tenha perguntas, para que, consequentemente, se tenha respostas.

> E, digam o que disserem, na vida científica os problemas não se formulam de modo espontâneo. É justamente esse *sentido do problema* que caracteriza o verdadeiro espírito cientifico. Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído. (BACHELARD, 1996, p. 18).

Portanto, o surgimento de um obstáculo epistemológico no conhecimento científico se configura como sendo um acontecimento determinado durante o espaço íntimo da relação entre o sujeito e o objeto do conhecimento.

As ideias que costumam ser usadas constantemente são consideradas com mais clareza pelo espírito científico. A partir do momento em que são usadas, as ideias ganham uma clareza intrínseca abusiva e assim acabam se valorizando indevidamente. Às vezes, um fator de inércia para o espírito podem acontecer quando uma ideia que domina e prevalece acaba polarizando todo o espírito científico. Isso se dá por que um único valor acaba se opondo a circulação dos valores (BACHELARD, 1996).

De acordo com o filósofo da Ciência e epistemólogo Gaston Bachelard (1996), o estudo do conceito de obstáculo epistemológico pode ser abordado em dois casos, a saber, tanto no desenvolvimento histórico do pensamento científico quanto na prática da educação, o autor destaca que esse estudo não é tarefa fácil em ambos os casos. Em relação a essa noção ser estudada na história, por necessitar da validade de um acontecimento, o epistemólogo deve fazer uma escolha a partir dos documentos pertencentes ao historiador. Desta forma, é necessário que o epistemólogo julgue esses documentos em uma perspectiva razão, sendo até essencial na perspectiva também da razão evoluída. Sendo assim, a atenção do epistemólogo deve estar retida ao esforço de racionalidade e de construção. Nesse contexto, o autor estabelece a diferença entre a função do epistemólogo e do historiador da ciência:

> O historiador da ciência deve tomar as idéias como se fossem fatos. O epistemólogo deve tomar os fatos como se fossem idéias, inserindo-as num sistema de pensamento. Um fato mal interpretado por uma época permanece, para o historiador, um *fato*. Para o epistemólogo, é um *obstáculo*, um contra-pensamento. (BACHELARD, 1996, p. 22).

Na prática educacional, o autor critica a falta de conhecimento dos professores da sua época em relação à noção de obstáculos epistemológicos na educação, citando a importância dos mesmos para a construção do pensamento científico. Para o autor essa noção não deve ser ignorada na prática educativa e o desconhecimento da mesma acaba influenciando para que os professores não entendam como o aluno não compreende. Desta forma, os obstáculos constituídos pelo conhecimento empírico dos alunos, ou seja, pelas convicções que os alunos já possuem acerca de um conceito, se configuram como impedimentos a apropriação do conhecimento científico, isso pelo fato que bloqueiam a atividade racional do aluno. Destaca que é difícil um educador mudar seu método pedagógico, porém torna-se necessário modificá-lo, substituindo um saber fechado e estático por um saber aberto e dinâmico, derrubando a resistência de mudança e abandonando a convicção construída de que o aluno aprende por um processo de repetição de exercícios, que ao repetir várias vezes uma demonstração pode fazer com que o aluno compreenda a mesma.

De maneira geral, Bachelard categoriza os tipos de obstáculos epistemológicos, quais sejam: a experiência primeira, o conhecimento geral, o conhecimento verbal, o conhecimento unitário e pragmático, o conhecimento substancialista, o conhecimento animista e o conhecimento quantitativo. Seguidamente, apresenta-se no quadro 1 as características dos obstáculos epistemológicos de forma sintetizada.

Quadro 1 - Características dos obstáculos epistemológicos de forma sintetizada.

Obstáculos epistemológicos	**Características principais**
Experiência primeira	A satisfação imediata pela observação primeira (resultados imediatos) provoca uma compreensão falsa e limitada do fenômeno.
Conhecimento geral	O desejo apressado por uma explicação generalizada, ou seja, por resumos muito gerais de um fenômeno, leva as vezes a generalidades mal colocadas, sem ligação com as funções matemáticas essenciais do fenômeno que acabam por sua vez abandonando indagações científicas.
Obstáculo verbal	A utilização inapropriada de distintos tipos de linguagem terminam ocasionando explicações e compreensões errôneas de uma determinada situação.

Conhecimento unitário e pragmático	Necessidade de que todo princípio geral da natureza tenha sua utilidade humana para desta forma ser bem explicitado, ou seja, encontrar uma utilidade é encontrar uma razão. Portanto, o verdadeiro precisava da companhia do útil.
Substancialista	Esse obstáculo é conectado ao obstáculo Realista. A convicção em um conhecimento assimilado por uma experiência externa ao fenômeno acaba atrapalhando a investigação mais excessiva desse fenômeno. A substancialização de uma qualidade imediata percebida numa intuição direta pode entravar os futuros progressos do pensamento científico tanto quanto a afirmação de uma qualidade oculta ou íntima.
Realista	O que é cientificamente aceito pelo fato de se apoiar em um fenômeno imediato não é questionado. Esse obstáculo susta a investigação, em vez de provocá-la.
Animista	Na busca de compreensão de um fenômeno acontece uma valorização primordial à atribuição de qualidades e intervenções a seres inanimados, que por sua vez são associados aos termos vitais.
Conhecimento quantitativo	Nesse obstáculo epistemológico dar-se preferência do quantitativo ao qualitativo. O resultado final encontrado a partir da rigidez matemática já é o necessário para a compreensão de um determinado fenômeno.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

De maneira geral, Bachelard por mais que estudou as situações da construção do conhecimento científico, ao longo de sua grande produção literária se preocupou também com os problemas de ensino-aprendizagem desse conhecimento. Como já foi citado anteriormente, os obstáculos epistemológicos não são identificados apenas na pré-ciência ou no desenvolvimento histórico da ciência, esses obstáculos estão localizados também na prática educacional, pois eles se unem ao conceito tornando-se verdadeiros empecilhos à apropriação do novo conhecimento científico, isso por que bloqueiam a atividade racional do aluno, impedindo a objetivação.

Para Bachelard, o aluno chega à escola com um conjunto de experiências provindas da sua vivência diária, ou seja, com conhecimentos já construídos. Assim expõe que a superação desses obstáculos epistemológicos presume uma psicanálise do erro inicial, que são erros epistemológicos (convicções que os alunos possuem a respeito de uma determinada ideia em estudo), tal como as novas convicções que surgem durante o aprendizado da ciência. O autor entende que para compreender a ciência é necessário uma verdadeira catarse intelectual e afetiva, sendo que para isso é preciso superar os obstáculos epistemológicos oriundos do cotidiano do aluno. Nesse sentido, o autor menciona que:

> Logo, toda cultura científica deve começar [...] por uma catarse intelectual e afetiva. Resta, então, a tarefa mais difícil: colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis

> experimentais, oferecer enfim à razão razões para evoluir. (BACHELARD, 1996, p. 24).

Para o autor não existe verdade sem erro retificado, ou seja, o método de retificação é o processo fundamental do conhecimento científico, neste caso, o processo é caracterizado por rupturas, sendo que a ciência se contrapõe a opinião. Existe então uma ruptura entre o conhecimento sensível que é um conhecimento falho cercado de pragmatismo que ainda não foram corrigidos pelas repreensões do objeto e o conhecimento científico que se espera objetivo. Para Bachelard não se deve impedir o erro e sim se conscientizar do mesmo, é nisso que se revela o verdadeiro intuito da objetivação. Nesse contexto, o erro muda de patamar se configurando como o oposto da pedagogia tradicional que tratava e ainda trata o erro como um acaso no caminho, um defeito, uma incompetência, um desconhecimento de um saber.

Neste sentido, Bittencourt (1998) aponta que Bachelard foi o responsável por abrir passagens para que a noção de obstáculo epistemológico fosse usada em didática da ciência, pois do panorama pedagógico, a visão epistemológica desse autor acarretou na análise crítica do processo de aprendizagem, onde as dificuldades, os erros e as falhas eram parte integrante desse processo. Nessa direção, Bachelard defende que o processo histórico de construção de um determinado conhecimento, as experiências iniciais que o aluno possui e as dificuldades que este aluno enfrentaria na aprendizagem de um conhecimento precisam ser consideradas pelo professor ao ensinar.

2.4.2 Obstáculos Didáticos

Como já nos referenciamos anteriormente, a noção de obstáculo epistemológico foi descrita inicialmente por Gaston Bachelard em 1938, o autor reservou essa noção somente para as ciências experimentais, defendeu que esse tipo de obstáculo era impossível acontecer na matemática. Porém, em 1976, Guy Brousseau pensou o oposto, contradizendo essa concepção (de falta de obstáculos epistemológicos nessa ciência). Especificamente em pesquisas em Educação Matemática, com o objetivo de determinar uma diferença entre dificuldades de aprendizagem e obstáculos no ensino, transferiu essa noção para a matemática, nomeando-a de obstáculos didáticos. Desta forma, ele fundamentou-se na noção de obstáculos epistemológicos para tratar de obstáculos didáticos na Matemática.

Assim, nos anos 70, a partir das concepções de Brousseau, surge uma tentativa de compreender melhor as dificuldades apresentadas pelos alunos, assim como também a produção de ferramentas didáticas que possibilitassem facilitar as rupturas necessárias durante a aprendizagem. Portanto, a ideia de obstáculos epistemológicos começa a ser usada nas pesquisas em didática da matemática (BITTENCOURT, 1998).

Nesse contexto, a noção de obstáculo descrita por Bachelard colaborou muito para o erro ser encarado de outra maneira. Assim, Brousseau assimilou essa ideia e relacionou-a à nova visão para esse acontecimento pedagógico. Desta forma, colaborou para que o erro fosse enxergado de outra forma no processo de ensino-aprendizagem.

Diante disso, enfatizou que muitas vezes de maneira equivocada atribui-se uma função simplificada do erro à falta de sucesso. Esse não pode ser visto apenas como consequência de um desconhecimento, da incerteza e do inesperado, mas também como consequência do conhecimento anterior. Assim, passaria a ser um fator estimulante no processo de aprendizagem. Pode ser considerado como obstáculo que pertence à construção da definição do conhecimento adquirido no processo de ensino-aprendizagem, tanto em relação ao professor quanto ao aluno. Portanto, esse tipo de impedimento à aprendizagem é o resultado de um conhecimento precedente que levava ao acerto, ou seja, que tinha êxito, mas que agora se apresenta como falho e impróprio. Os erros dessa categoria podem ser previstos e não dependem do acaso, constituindo-se em obstáculos (BROUSSEAU, 1976).

Esse autor considera que a noção de obstáculo epistemológico se amplia para além do sentido restrito da epistemologia e acredita que essa noção é essencial para colocar o problema do conhecimento científico. A aprendizagem apresenta rupturas constantes que podem ter razões e modelos diferentes. É nessas circunstâncias que alguns conhecimentos anteriores podem aparecer e resistirem, provocando erros, que na verdade tornam-se obstáculos. (BROUSSEAU, 2008). Logo, “[Um obstáculo, portanto, se manifesta em erros, mas esses erros não se devem ao acaso. Fugazes, erráticos, eles são reproduzíveis, persistentes” (BROUSSEAU, 1976, p. 105).

Esses erros não são evidentes e mesmo sendo rejeitados, eles as vezes não desaparecem completamente, persistem e depois podem aparecer (BROUSSEAU, 1976). Assim, o erro deve ser enxergado como fundamental pelo fato de ser elemento complementar do processo de ensino-aprendizagem, além do mais, o aparecimento dos obstáculos está continuamente ligado ao acontecimento dos erros não aleatórios e imprevisíveis.

Consequentemente, para que o ensino ganhe um real prosseguimento, torna-se preciso a identificação desses obstáculos, pois será através dessa localização que o professor conseguirá intervir e apresentar condições para uma necessária superação dos mesmos. Nestes termos, Brousseau (1989) estabelece o trabalho do pesquisador, fundamentado em: i) encontrar os erros que aparecem com frequência, expor que eles se concentram em volta de convicções. ii) achar os obstáculos na história da matemática. iii) confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos de aprendizado, estabelecendo assim sua característica epistemológica.

Nessa perspectiva, o citado teórico fez uma profunda análise das condições de aproximação dos obstáculos em didática da matemática, adentrando-se em situações de ensino a respeito dos mesmos. Através da modelagem das situações didáticas, Brousseau refletiu sobre o que considerava mais adequada dentro da matemática para a noção de obstáculos epistemológicos com a intenção de torná-la utilizável na análise didática:

> - Um obstáculo é um "conhecimento" no sentido que lhe demos de "forma regular de considerar um conjunto de situações".
> - Tal conhecimento dá resultados corretos ou vantagens observáveis em um determinado contexto, mas revela-se falso ou totalmente inadequado em um contexto novo ou mais amplo.
> - O conhecimento novo, verdadeiro ou válido sobre um contexto mais amplo não é determinado "de acordo com" o conhecimento anterior, mas em oposição a ele: utiliza outros pontos de vista, outros métodos etc. Entre eles não existem relações "lógicas" evidentes que permitam desacreditar facilmente o erro antigo por meio do conhecimento novo. Ao contrário, a competição entre eles acontece no primeiro contexto.
> - Os conhecimentos aqui considerados não são construções pessoais variáveis, mas, sim, respostas "universais" em contextos precisos. Portanto, surgem quase necessariamente na origem de um saber, seja ela histórica ou didática (BROUSSEAU, 2008, p. 49).

Dessa forma, ele afirma que existem obstáculos, porém “[...] distingui-los, reconhecê-los, listá-los e examinar seus relacionamentos e suas causas ainda requer muita discussão e pesquisa”. (BROUSSEAU, 1989, p. 45). E mais, acrescenta que não é apenas através de erros que um obstáculo se revela, mas também pela incapacidade de encarar determinados problemas ou de conseguir resolvê-los de forma suficiente (BROUSSEAU, 1976).

Assim, expõe que esses obstáculos podem ser devidos a muitas causas, podem aparecer quando o aluno está se apoderando de uma determinada ideia, podem se desenvolver por dificuldades próprias do conhecimento, por formas equivocadas de como se trabalha um determinado conceito e também pelas próprias limitações no desenvolvimento do sujeito. Por esse motivo, torna-se bastante dificultada a tarefa de se estabelecer as razões desses obstáculos no cenário pedagógico.

Logo, o autor caracteriza-os como obstáculos didáticos, dizendo que eles surgem no sistema didático, distinguindo-os em três origens, a saber: origem ontogenética, origem didática e origem epistemológica.

2.4.2.1 Obstáculos Didáticos de Origem Ontogenética:

São aqueles que ocorrem em virtude de limitações (neurofisiológicas entre outras) no desenvolvimento do próprio aluno envolvido no processo de ensino, ou seja, são obstáculos que se desenvolvem em consequência do desenvolvimento cognitivo do aluno. Segundo D'Amore (2007, p, 212-213), "[...] são aqueles mais ligados ao desenvolvimento da inteligência, dos sentidos e dos sistemas perceptivos."

2.4.2.2 Obstáculos Didáticos de Origem Didática:

São aqueles que parecem estar na dependência "de uma escolha ou projeto do sistema de ensino" (BROUSSEAU, 1976, p. 108). Estes obstáculos são consequências de seleções e ações educativas, didáticas ou do sistema educativo. Neste caso, são obstáculos ligados à escolha da maneira como se trabalha o conteúdo, do ponto de vista educativo que possibilita um conceito equivocado. Trata-se de conceitos inadequadamente elaborados e não completos que tem uma tendência de ser transmitido pelo professor.

D'Amore (2007, p. 213) explica bem esse obstáculo:

> Cada docente escolhe um projeto, um currículo, um método, interpreta de maneira pessoal a transposição didática, de acordo com as suas convicções científicas e didáticas: ele acredita nessa escolha e a propõe à classe porque a considera eficaz; mas aquilo que é verdadeiramente eficaz para determinado estudante não é dito que o seja para os outros. Para esses *outros*, a escolha *daquele* projeto revela-se um *obstáculo didático*.

2.4.2.3 Obstáculos Didáticos de Origem Epistemológica:

Encontram-se "[...] na história dos próprios conceitos" (BROUSSEAU, 1976, p. 108), são inevitáveis por serem inerentes ao mesmo e possuírem papel constitutivo no conhecimento almejado. Deles, "[...] não podemos e nem devemos fugir" (BROUSSEAU, 1976, p. 108), quando deparados na aprendizagem de um determinado conceito, torna-se preciso superá-los. Esses obstáculos são os que Bachelard mencionou, ou seja, obstáculos ligados à resistência de um conhecimento mal habituado, eles devem ser conhecidos e utilizados para melhorar o desenvolvimento do aluno.

Em relação à manifestação desses obstáculos, Brousseau (2008, p. 49-50) relata que:

> Um obstáculo se manifesta pelos erros, os quais, em um sujeito, estão unidos por uma fonte comum: uma maneira de conhecer; uma concepção característica correta, um conhecimento anterior, porém equivocada, coerente, embora incorreta; um "conhecimento" anterior bem-sucedido na totalidade de um domínio de ações. "Não se trata de considerar os obstáculos externos, como a complexidade ou fugacidade dos fenômenos, nem de culpar a vulnerabilidade dos sentidos ou do espírito humano: é no próprio ato de conhecer, intimamente, que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, as dificuldades e as confusões. [...] Conhecemos *em oposição* a um conhecimento anterior".

Os obstáculos devem ser considerados e integrados nas situações de ensino-aprendizagem, sendo utilizado de uma maneira que seja favorável nesse processo. Para isso, torna-se preciso combater um obstáculo, pois mesmo com a aprendizagem de um conhecimento novo, o mesmo não desaparece. Ele se contrapõe a adquirição e compreensão desse novo conhecimento, adia sua aplicação, permanece em estado não aparente e depois reaparece de maneira inesperada, em especial no cenário antecedente, quando as condições o permitem (BROUSSEAU, 2008). Deste modo, é desnecessário rejeitar um obstáculo, pois o mesmo é um conhecimento legítimo e inevitável de forma perfeita. Para o autor, deve-se "rechaçá-lo de maneira explícita, integrar sua negação à aprendizagem de um conhecimento novo, em particular na forma de contraexemplos. Neste sentido, é um constitutivo do saber." (BROUSSEAU, 2008, p. 50).

No pensamento do autor, um aluno estabelece suas próprias convicções acerca de um determinado conceito a partir do momento que busca se apropriar do mesmo, por exemplo, em uma tentativa de explicar esse conceito, ele pode construir suas próprias concepções a respeito do mesmo. Brousseau define concepção da seguinte forma: "Cada maneira organizada, mas particular, de considerar uma noção matemática constitui o que chamamos de *concepção*. Por exemplo: distinguimos várias concepções diferentes da divisão." (BROUSSEAU, 2008, p. 47).

Estas concepções estabelecidas pelo aluno, podem entrar em desacordo com o novo conceito, produzindo dúvidas que precisam ser conferidas pelo professor, pois em caso contrário, a aprendizagem não irá ocorrer, isso por que o aluno não conseguirá ultrapassar o conhecimento imediato pelo novo conceito, é nesse momento que o professor precisa intervir. Desta forma, é fundamental identificar estes conhecimentos anteriores e introduzir o processo de negação ao novo conhecimento, uma vez que o erro continua se apresentando. A ideia de Brousseau em relação aos obstáculos dentro da matemática, não diverge da definição de obstáculos epistemológicos de Bachelard, pois ele acredita na ideia que muitas vezes o obstáculo trata-se de um conhecimento e não a falta dele, ou seja, que um conhecimento aparece com base em uma suspensão de um conhecimento antigo. Para o autor um conhecimento novo é determinado em contradição a um conhecimento antigo, onde este será usado como ferramenta ocorrendo assim uma soberania de conhecimentos (BROUSSEAU, 1989).

Neste sentido, uma concepção anterior não desaparece a partir de uma nova concepção, ela na verdade se torna ainda mais resistente, causando erros e transformando-se em obstáculos. Como já foi dito anteriormente, Bachelard (1996) descreve que os obstáculos podem gerar limitações que vão em oposição a um conhecimento antigo, estes estão existentes no próprio ato de conhecer. Brousseau (2008, p. 47-48) explica que isso acontece pelo fato de:

> A passagem de um conhecimento a outro, dentro de uma mesma concepção, não é difícil. O mesmo vale para a aprendizagem, visto que corresponde ao que Piaget identifica como assimilação. Já a passagem de uma concepção para a outra é mais difícil, pois corresponde a uma mudança significativa de repertório (BROUSSEAU, 2008, p. 47-48).

Isso se dá pelo fato que a aprendizagem não se trata de uma simples assimilação dos conhecimentos que são repassados pelo professor, mas uma reconstrução das concepções alternativas dos alunos. Mas essas convicções que os alunos trazem consigo são diferentes do conhecimento científico, elas são incompletas e sua generalização acontece de modo gradativo. Estas poderão ser modificadas pelos alunos, podendo significar uma substituição das mesmas, mas sem desconsiderá-las por inteiro, elas precisam ser polidas, essa é uma tarefa que deve ser realizada a partir da intervenção do professor, com suporte firme de conhecimento, essa ação do professor pode modificar formulações erradas que foram adquiridas pelos alunos quando os mesmos fizeram uma interação entre seus conhecimentos prévios e os conceitos científicos trabalhados pelo professor. Será a partir desse momento que o aluno usará o objeto concreto para que possa agir no campo do pensamento relacional e não apenas por meio de sua representação visual. Para Brousseau (1976, p. 107) “Conhecimento, homem e meio ambiente sendo o que são, é inevitável que essa interação leve a conceitos errôneos. No entanto, essas concepções são governadas pelas condições da interação que podem ser mais ou menos modificadas. Esse é o objeto da didática.”

Caso a intervenção não ocorra por parte do professor, ou seja, se esses conhecimentos incompletos não forem trabalhados, acabam por ser um entrave à aprendizagem, quando se tornam obstáculos, ou seja, essas concepções espontâneas que os alunos possuem podem influenciar negativamente na aquisição do novo saber. Neste caso, o desenvolvimento do conhecimento fica paralisado, "O conhecimento antigo atua como uma força contrária à realização de uma nova aprendizagem." (PAIS, 2001, p. 45).

Para que ocorra a aprendizagem é necessário que aconteça rupturas com o conhecimento cotidiano. Em relação a isso Pais (2001, p. 43) afirma que:

> Durante a aprendizagem, ao iniciar o contato com um conceito inovador, pode ocorrer uma revolução interna entre o equilíbrio aparente do velho conhecimento e o saber que se encontra em fase de elaboração. [...] para a aprendizagem escolar, por vezes, é preciso que haja fortes rupturas com o saber cotidiano, caracterizando a ocorrência de uma revolução interna, o que leva o sujeito vivenciar a passagem do seu mundo particular a um quadro mais vasto de idéias, às vezes, incomensuráveis através do antigo conhecimento.

Segundo Pais (2001), esses obstáculos não se formam na ausência de conhecimento, mas, diferente disso, são antigos conhecimentos, que em relação ao tempo foram cristalizados, que resistem à colocação de novas noções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem possui esse pensamento.

Segundo esse autor, os obstáculos se revelam a partir do momento que acontece a reorganização intelectual de maneira que o conhecimento novo entre em harmonia com o conhecimento anterior, logo, é necessário entender como ocorre essa reestruturação.

Como já dissemos anteriormente, os obstáculos epistemológicos podem ser encontrados na construção histórica, alguns desses demoraram décadas e até mesmo séculos para serem superados. Para Brousseau, essas barreiras (formas limitadas do conhecimento de um referente conceito) na disciplina de matemática seguem se revelando no processo de aprendizagem do aluno. A análise histórica dessas barreiras (obstáculos) no decorrer da história da matemática pode ajudar o professor na localização dos elementos que possibilitam a identificação dos obstáculos dos alunos, e mais, colaborar também na construção das situações de ensino achando meios didáticos que podem oportunizar a superação dos mesmos. Desta maneira, para encontrar formas didáticas que propiciem a superação, torna-se preciso descobrir os obstáculos epistemológicos ligados à matemática que devem ser superados no ambiente escolar. Segundo Bittencourt (1998), o mergulho na história para encontrar obstáculos tem se apresentado essencial em vários estudos já realizados, pois:

> A procura de obstáculos históricos tem sido um dos métodos utilizados pelos pesquisadores, como nos mostram as pesquisas sobre decimais, frações, números inteiros ou limites. Em todos esses estudos, o mergulho histórico tem se mostrado fundamental na análise epistemológica dos conhecimentos envolvidos, compreendendo um obstáculo como um conhecimento com determinado domínio de validade e significado social. (BITTENCOURT, 1998, p. 14).

Trazer o estudo histórico para a sala de aula pode ser uma maneira de facilitar o aprendizado e diminuir os obstáculos dos alunos, pois eles terão chance de refletir em relação a ideias que eram consideradas historicamente como verdadeiras e a partir daí construir seu conhecimento, entendendo como essas ideias foram construídas na história.

Para Bittencourt (1998), a análise histórica tem se mostrado essencial na compreensão epistemológica da evolução de um determinado conhecimento, se tratando de um método muito importante que pode facilitar na compreensão da estrutura do conhecimento do aluno. Porém, em relação a situação escolar outros elementos entram em questão. Dessa maneira, sobre a relação entre o histórico e o didático a autora alerta que esta

> [...] suscitou inúmeras discussões devido à sua complexidade, pois nem toda dificuldade histórica torna-se necessariamente obstáculo na aprendizagem e, por outro lado, há diversos outros fatores envolvidos na situação didática que podem ser fontes de obstáculos, interferindo, portanto, no processo individual de construção do conhecimento. (BITTENCOURT, 1998, p. 14).

Reiteramos que a revelação de um obstáculo não se encontra somente através de erros, mas além disso, também pela incapacidade de encarar determinados problemas ou de conseguir resolvê-los de forma suficiente. Na história da matemática, por exemplo, podemos verificar isto, onde muitos foram os matemáticos famosos que usavam os números negativos, mesmo sem conseguir uma explicação matemática para eles. Desta forma, os obstáculos na história da matemática foram causados a partir da incapacidade de se resolver determinados problemas de forma suficiente. Assim, certas questões não eram resolvidas de maneira suficiente e isso partia da fixação específica a um determinado ponto de vista, o que pode ser considerado tanto no ensino como na história, um dos métodos fundamentais ao se tratar de obstáculos, porém o ponto de vista não se revela somente através de erros.

Em relação a importância do erro na revelação de obstáculos e também do mesmo como um degrau indispensável na ação de aprender, Bittencourt (1998, p. 15) aponta que:

> [D]o ponto de vista do professor, o erro do aluno revela a maneira como este organiza seus conhecimentos, geralmente agrupados em torno de concepções e valores formando uma rede de significados que muitas vezes torna-se um obstáculo à aquisição de novos conceitos. O erro, manifestado tanto na argumentação quanto nos mecanismos de ação do aluno, é compreendido como um passo necessário no ato de conhecer. Mas não só o erro revela obstáculos.

Na concepção da autora, algumas outras atitudes podem ser consideradas como reveladoras de obstáculos, a saber, o ato de se desconsiderar um problema, a incapacidade de solucioná-lo, a ação de rejeitá-lo ou mesmo de não se considerar seu caráter problemático.

Brousseau alerta que alguns conhecimentos funcionam como obstáculos à compreensão de outros, mesmo esses conhecimentos não tendo seu estatuto de obstáculo de origem histórica atestado. Por exemplo, segundo Igliori (2008), o conceito de número natural no entendimento do autor funciona como obstáculo ao conhecimento dos números decimais, pois as propriedades dos números naturais quando ampliadas para o conjunto dos números decimais podem gerar dificuldades que são firmes. Nessa linha de pensamento, uma perspectiva que precisa ser destacada é a de Artigue (1990), onde a autora faz o seguinte questionamento: "para se conferir o estatuto de obstáculo epistemológico em didática é essencial fornecer a ele o atestado histórico das dificuldades análogas?" (ARTIGUE, 1990 apud IGLIORI, 2008, p. 129).

A autora responde a esse questionamento que ela própria fez, ao analisar um trabalho sobre a epistemologia da noção de limite, expondo a seguinte impressão:

> [...] o que fundamenta, de alguma maneira, o obstáculo epistemológico é mais a aparição e a resistência na história de certos conceitos, bem como a observação de concepções análogas entre os alunos, do que a constatação da resistência a estes conceitos entre os estudantes da atualidade. (ARTIGUE, 1990, apud IGLIORI, 2008, p. 129-130).

Para Igliori (2008), a autora Artigue se posiciona para a busca de identificação de processos produtores de obstáculos presentes no contexto histórico e no didático e não apenas para identificação dos obstáculos na história ou na aprendizagem de tal conceito. Como exemplos, ela aponta: "*a generalização abusiva, a regularização formal abusiva; a fixação sobre uma contextualização ou uma modelização familiares; a aderência exclusiva a um ponto de vista.*" (IGLIORI, 2008, p. 130). Bittencourt (1998) acredita que esses processos não podem ser evitados, e sim apenas controlados, pois eles são característicos do fazer matemática.

Na concepção de Igliori (2008), a noção de obstáculo ainda está em etapa de constituição e diversificação dentro da Educação Matemática e dizer generalidades propícias em relação a ela não é fácil. A autora salienta que é melhor analisar casos, pois através disso que apareceram muitas contribuições trazidas pelos pesquisadores. Existem noções que criaram obstáculos no processo de construção e ainda continuam a criar também no processo de aprendizagem, e por esse ponto tem sido motivo de análise de vários pesquisadores, por exemplo, as noções de números, de função, de limite, de infinito. Nessa direção, Igliori (2008) apresenta a análise de exemplos encontrados na literatura.

A noção de número para a autora enfrentou muitos obstáculos para ser elaborada, por exemplo, a construção dos números negativos foi bastante lenta. Como outro exemplo cita Brousseau (1983), expondo que foram necessários dois séculos para se dar o primeiro passo na construção do conceito de números decimais e que o conjunto dos números naturais é obstáculo para a aprendizagem dos números decimais. Um outro obstáculo epistemológico trazido pela autora é a concepção dos números racionais e dos decimais como razões, ou ainda operadores lineares sobre o conjunto dos racionais. O algoritmo euclidiano da divisão entre os inteiros, difundindo a ideia de que o dividendo deve ser maior que o divisor também gera um obstáculo na concepção da autora. O conceito de limite também gerou grandes obstáculos epistemológicos na história e segundo a autora hoje também ainda acontece vários entraves na construção dessa noção.

A relação “o quadrado de um número natural é sempre maior ou igual a ele” que é tida como certa para o aluno, pode ser transferida para os números decimais. Para a autora, esse tipo de erro tem uma característica que reflete uma maneira de

> [...] conhecer, relaciona-se a uma concepção característica, coerente e mesmo correta, a um conhecimento antigo que teve sucesso em todo um domínio de ação. Esses erros não são forçosamente explicitáveis. É preciso uma ação consciente dos didatas para que eles venham à tona. (IGLIORI, 2008, p. 126).

Ainda discorrendo sobre exemplos de obstáculos, a autora menciona que o problema de ligar os números decimais às medidas, pode levar os alunos a pensarem neles como uma simples alteração de unidades. Por exemplo, a unidade 3,25 m é pensada como 325 cm expressos em metros.

A autora se dirige a uma pesquisa diagnóstica realizada por Igliori e Silva (1998), onde os autores encontraram alguns dos aspectos que tinham sido apontados por Brousseau e reforçados por Duroux, a saber:

> [...] a incapacidade de encontrar um número decimal entre 3,25 e 3,26. O estudante diz nessa pesquisa que "sucessor" de 3,14 é 3,15, numa nítida transposição do conceito de sucessor, conceito esse existente no contexto dos números naturais e transposto para os números decimais. Outro obstáculo cujas características se encaixam nas apresentadas por Duroux é o da "concepção" de que "multiplicar sempre aumenta e dividir sempre diminui." (IGLIORI E SILVA, 1998, apud IGLIORI, 2008, p. 129).

Embora a autora não menciona que alguns desses obstáculos podem aparecer também no campo dos números inteiros, entendemos que isso pode ocorrer. Por exemplo, o aluno pode dizer que o sucessor de -6 é -7 numa nítida transposição do conceito de sucessor, conceito esse contido no contexto dos números naturais e transposto para os números inteiros. Já em relação aos outros obstáculos citados pela autora, o aluno ao multiplicar (-2) por (+3) encontrará -6 como resposta verificando que diminuiu ao invés de aumentar e ao dividir um número inteiro negativo por outro número inteiro negativo encontrará um número positivo, ou seja, irá aumentar ao invés de diminuir. Logo, percebemos que um conceito pertencente aos números naturais pode ser transferido para os números inteiros.

Por sua vez, Pais (2001) também discorre sobre alguns exemplos de obstáculos didáticos, primeiramente o autor se refere a um exemplo de obstáculo, dentro do estudo da aritmética, especificamente relacionado ao caso particular da aprendizagem do produto de dois números inteiros positivos que é sempre maior do que cada uma dos fatores. Porém, essa proposição nem sempre é verdadeira ao se tratar, por exemplo, do caso do produto de duas frações unitárias que é menor do que cada fator. Desta forma, o conhecimento do produto de dois números inteiros positivos pode ser um obstáculo à aprendizagem do produto de dois números racionais.

Um outro exemplo trazido pelo autor em seu texto é ainda no estudo da aritmética, onde pode ser encontrado quando se obtém como resultado de uma divisão de um número inteiro positivo por um número racional que seja menor do que um, o quociente igual a um número maior do que o dividendo. No entanto, se conclui normalmente de maneira intuitiva em um cotidiano não pensado, que o resultado da divisão é sempre menor do que o dividendo, o que acaba contrariando o caso da divisão de um número inteiro positivo por um número racional menor que um. "Nesse caso, o aspecto inerente à estrutura lógica da matemática entra em conflito direto com o conhecimento que o aluno traz de sua vivência não escolar." (PAIS, 2001, p. 46).

Em um terceiro exemplo trazido pelo autor, esse relacionado à aprendizagem da geometria espacial, quando se faz intervir o uso de uma representação através de um ponto de vista. A tarefa de realizar ou fazer a leitura desse desenho não se trata de uma atividade clara. Quando um cubo é representado em uma perspectiva paralela, os ângulos não são retos, isso por que normalmente, ele aparece com a fase superior representada por um paralelogramo não quadrado, sendo assim, quando esses ângulos forem medidos sobre a superfície do papel, porém, eles estão representando os ângulos retos da face superior desse cubo. Desta maneira, o aluno pode ter dificuldade em compreender as propriedades geométricas de um sólido geométrico no qual é representado por meio de uma certa perspectiva, isso por que ele pode acabar firmando sua leitura nas características particulares do desenho em si (PAIS, 2001). Assim, podemos ter obstáculos caracterizados como didáticos, a partir do traçado do desenho, acarretando dificuldades na compreensão de um sólido geométrico, por exemplo.

Lorenzato (2006), concorda com Pais ao relatar que apesar de todas as contribuições da perspectiva, a mesma não retrata as dimensões reais e posições dos lados e faces dos objetos, pois ela acaba camuflando o perpendicularismo e o paralelismo laterais.

Pais (2001) relata que existem alguns trabalhos que foram realizados pelo Grupo de Geometria do IREM de Montpellier onde esses mostram a presença de dificuldades que alunos podem apresentar quando precisam fazer a leitura de um desenho em perspectiva no estudo da geometria espacial, podendo acontecer desordem entre as particularidades dos traços do desenho em si e os elementos geométricos por eles representados. Neste caso, alguns estudos certificam que dificuldades na aprendizagem da geometria podem ser causadas pelo desenho, apontando para a presença de obstáculos de natureza didática.

Brousseau (1976) alerta para o fato da representação fracionária perder o sentido para o aluno a partir do momento em que o professor com o intuito de facilitar a aprendizagem dos números racionais termina associando o conteúdo somente a objetos ou a sistema métrico. Isso pode fazer com que o aluno não compreenda que esse número tem sua representação fracionária e decimal, ou seja, que ele representa bem mais que uma simples medida. Essa tomada de decisão do professor pode causar obstáculos didáticos em anos posteriores.

O tratamento dos obstáculos no campo didático é a principal finalidade de ensino, pois como mencionamos anteriormente a questão da didática dos obstáculos já está colocada. Nesse sentido, Bittencourt (1998) aponta que deve ser feita a análise das prováveis maneiras de intervenção de modo a ajudar os alunos na superação dos obstáculos.

Com relação a isso (VERGNAUD, 1988 apud BITTENCOURT, 1998, p. 15) afirma que “um obstáculo não pode ser saltado, mas sim superado através da análise, exigindo da parte do professor uma vigilância constante dada sua tendência a voltar a se manifestar”. Desta forma, “[E]m geral, um ensino que considera os obstáculos impõe escolhas, seja do obstáculo a ser enfrentado, evitando outros, seja da situação didática adequada nesse enfrentamento.” (BITTENCOURT, 1998, p. 15).

Embora Brousseau (1988b) tenha afirmado que não existe uma solução geral para tratamento dos obstáculos, esse autor cita que o conflito cognitivo trata-se de um método para lidar com estes, apesar de que essa técnica é difícil de ser gerenciada. Ao analisar o papel do conflito, Brousseau (1988b) lista algumas estratégias de conflito que dependendo do tipo de obstáculo podem ser usadas, são elas:

> [...] confrontar repetidamente os modelos implícitos utilizados pelos alunos; exploração explicita da dificuldade num confronto de posições; debate permitindo a troca entre posições com interferência do professor e ainda uma situação específica que prevê o equilíbrio entre papéis do professor e dos alunos”. (BITTENCOURT, 1998, p. 15).

Segundo Bittencourt (1998), muitas questões foram colocadas em lista por causa da noção de obstáculo no contexto didático, a saber: 1) a complexidade de se listar e de se classificar obstáculos, 2) a existência de controvérsias sobre o que seria obstáculos e o que seria dificuldades, 3) a dificuldade de selecionar processos para caracterizar um obstáculo, 4) a dificuldade de se estabelecer um controle nos obstáculos, ou seja, o mesmo conhecimento que em um momento pode funcionar como obstáculo, e em outro momento não, 5) as diferentes naturezas (psicológica, epistemológica e didática) dos obstáculos, 6) a complexidade que se é de analisar a estrutura de um erro (apresentar a rede de concepções ao qual ele está associado, assim como reagrupar essas concepções) para criar boas ferramentas didáticas e 7) a resistência que um obstáculo oferece à mudança e a dificuldade de se estabelecer um controle sobre o mesmo faz com que a superação do obstáculo seja também bastante questionada.

Os resultados trazidos pela utilização da noção de obstáculo epistemológico (reflexão epistemológica) em didática da matemática (no ensino de matemática) foram importantes, a saber, a “[...] noção de obstáculos e os diversos aspectos que ela aborda (o caráter positivo do erro, o tratamento didático dos obstáculos, o mecanismo de funcionamento de um obstáculo, os processos geradores de obstáculos)” (BITTENCOURT, 1998, p. 16) contribuiu para que a visão que se tinha de conhecimento fosse alterada, pois esta acabou perdendo seu caráter de verdade necessária e conhecimento absoluto que era concedido naturalmente ao conhecimento matemático. É daí que ocorre uma alteração de perspectiva epistemológica do professor, além também de transformações metodológicas e curriculares, todas essas implicadas pela mudança do ato de conhecer que passa a ser mais dinâmico e com uma participação maior do aluno (BITTENCOURT, 1998).

Como sabemos, um obstáculo pode ter natureza psicológica, epistemológica e didática, podendo também em algumas vezes ocorrer de um obstáculo reforçar o outro, por exemplo, um obstáculo epistemológico ser reforçado por um didático (BITTENCOURT, 1998). Muitos dos exemplos já citados anteriormente podem ser considerados como obstáculos epistemológicos e didáticos, pois alguns se tratam de conhecimentos que o aluno possui e que entram em divergência a partir do apoderamento de conceitos novos, e outros se tratam de decisões didáticas desastradas tomadas pelo sistema de ensino ou pelo professor com o objetivo de favorecer a aprendizagem. Porém, na maioria das vezes, os professores entendem, de forma equivocada, que as divergências entre o conhecimento antigo e o novo trata apenas de uma dificuldade do aluno na apropriação dos conceitos.

Sabemos que obstáculos como esses mencionados e muitos outros acontecem no ambiente da sala de aula, porém a falta de conhecimento dos professores em relação aos mesmos, fazem com estes não sejam enxergados com a importância necessária no processo de ensino-aprendizagem. E, consequentemente, esses obstáculos passam despercebidos, ou seja, sua existência não é notada, tornando-se impossível de serem identificados, analisados e muito menos superados ou até mesmo não se manifestem de maneira tão clara. Esse é um grande problema, pois pode fragilizar os processos de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, para que aconteça, então, a aprendizagem, é necessário que os professores possuam conhecimento da noção de obstáculo, para que assim possam elaborar ferramentas para fazer com que estes se manifestem, criando a possibilidade de identificá-los, e consequentemente traçar caminhos (a identificação de processos causadores de obstáculos, a análise histórica, o conflito cognitivo, entre outros já mencionados) para fazer uma intervenção, visando guiar os alunos para que ocorra uma possível superação destes obstáculos.

A atuação do professor torna-se ainda mais importante quando do momento que existem dois efeitos que os obstáculos podem causar no aluno, ambos estão ligados a intervenção dele. O primeiro efeito (impulsor), os obstáculos epistemológicos e didáticos podem servir de impulso para o aprendizado a partir do momento que são superados. O segundo (freio), de forma contrária, pode impedir o aprendizado do aluno, isso pelo fato de representarem conceitos contraditórios, naquele momento, de maneira que impedem o mesmo de avançar sem a contribuição do professor atuando como mediador no processo de ensino-aprendizagem. Nessa direção, nos dois casos, o papel do professor torna-se fundamental nesse processo, ou seja, ele precisa ter consciência de todos esses fatos para ter um melhor entendimento dos erros dos alunos, intervir de maneira significativa e consequentemente proporcionar uma melhor aprendizagem analisando e entendendo melhor as dificuldades dos alunos.

Portanto, é imprescindível que o professor possua conhecimento da noção de obstáculo e dos muitos tópicos que ela atinge, pois os obstáculos epistemológicos e didáticos podem estar por trás das diferentes fontes de dificuldades que aparecem nas situações de ensino da matemática, ou seja, não os reconhecer podem levar a aprendizagem à situação de bloqueio. Essa noção serve como uma ferramenta para que o professor reconheça e compreenda a natureza dos diferenciados problemas de aprendizagem que podem aparecer na sala de aula.

Na presente pesquisa, além de tratarmos de alguns obstáculos, de forma específica e mais aprofundada, abordamos obstáculos relacionados aos números negativos. Diante disso, reservamos para esse próximo subtópico uma apresentação resumida da história da constituição do referido conteúdo e nos debruçamos a trazer alguns obstáculos já catalogados ao longo de seu aparecimento e que podem ser vistos também no processo de ensino-aprendizagem de nossos alunos, ainda hoje.

2.5 Números inteiros

O estabelecimento dos números inteiros, através dos séculos de evolução da humanidade, foi lenta e polêmica. Os matemáticos se contradiziam em relação a criação de um novo conjunto, principalmente pelo fato da aplicação e sua representação. Pensar em número negativo nos primórdios era algo incomum para as civilizações antigas. Neste sentido, os PCN (1998) afirmam que: “[...] A análise da evolução histórica dos números negativos mostra que por muito tempo não houve necessidade de pensar em números negativos e por isso a concepção desses números representou para o homem um grande desafio.” (BRASIL, 1998. p. 97).

Isso se deu pelo fato da humanidade no perpassar dos tempos ter suas necessidades socorridas através do uso de um tipo de numeração que já era fundamental nessa respectiva época, essa numeração utilizada era o conjunto referente aos números naturais. Ao passar dos anos, a sociedade foi se desenvolvendo e a humanidade foi evoluindo, tendo a matemática como alicerce encarregado pelas mudanças, pois os matemáticos tiveram que arranjar meios que conseguissem justificar questionamentos que começaram a aparecer entre os matemáticos.

Diante das transformações, a matemática precisou gerar respostas para muitas indagações, por exemplo, uma representação para a diferença entre dois números $(a - b)$ quando $a < b$. Uma subtração como essa durante muito tempo foi considerada como impossível, pois os sistemas de numeração não tinham um símbolo para representar o “nulo” ou “nada”. Essa dificuldade foi superada a partir da criação do zero, porém, esse descobrimento assim como muitos outros apresentou controvérsias até sua compreensão.

Essa descoberta foi responsável por varrer este obstáculo (IFRAH, 1989). E só foi a partir do amadurecimento e da diferenciação entre o conceito do zero significando origem (abaixo dele nada poderia imaginar) e o conceito do zero como zero absoluto (marcado aleatoriamente sobre um eixo orientado) que a extensão dos números naturais até os relativos aconteceu. Segundo Ifrah (1989), a difícil invenção do zero colaborou para o desenvolvimento da álgebra moderna e de todos os ramos da matemática. Porém, para que os números negativos pudessem ser considerados como um conjunto numérico, muitos obstáculos ainda precisavam ser superados.

Embora a matemática tendo sido desenvolvida através das contribuições de algumas civilizações, estas não aceitavam quando se deparavam com cálculos que tinham resultado negativo. Desta forma, segundo Ifrah (1989), a ideia de número negativo acarretou muito tempo para ser realmente estabelecida, a ideia de número negativo que usamos atualmente para exprimir uma variedade de situações do dia a dia não era admitida pelos matemáticos. Os gregos, por exemplo, mesmo tendo colaborado grandiosamente para o desenvolvimento da matemática, de maneira principal na Geometria, acabavam por não considerar os números negativos.

Para Schubring (2018), o entendimento de números negativos, com diferenças formais, deu-se mais para o final do século XIX, pois mesmo depois de o problema conceitual na primeira metade desse século ter sido resolvido, a existência dessa ideia continuou presente e ocupando os pensamentos dos matemáticos, pelo fato da solução encontrada ir em oposição ao senso comum e a visão herdada da matemática tradicional. O autor acrescenta que as soluções negativas eram evitadas até ao menos os tempos modernos, isso por que não se podia confirmar que os números negativos eram usados como ferramentas úteis, mas em uma utilização sem reflexão no início, sendo verdadeiramente sempre suspeitos.

O conceito de grandeza, por exemplo, como método de medida foi a principal noção que os matemáticos encontraram obstáculos para o seu desenvolvimento. Nessa direção, o desenvolvimento das grandezas negativas não ocupou espaço, pois somente os valores positivos poderiam necessariamente ser considerados. Essa confirmação (fato) pode ser enxergada nas grandes civilizações da antiguidade. Por exemplo, na matemática dos babilônios e na matemática do Egito (SCHUBRING, 2018).

A civilização chinesa realizou algumas notáveis antecipações dos métodos matemáticos modernos que poderiam ter modificado o desenvolvimento da matemática atual. Muito antes da notação posicional ser adotada na Índia, na China antiga os numerais em barras originais estavam em uso vários séculos previamente a nossa era atual. Porém, a cultura chinesa foi prejudicada seriamente por quebras repentinas. Isso aconteceu quando o imperador da China, em 213 a.C^7., mandou queimar livros. Mesmo assim, o aprendizado continuou com ênfase, quanto à matemática, em problemas de comércio e calendário, isso devido à persistência de cópias e também pela transmissão oral (BOYER, 2012). Para Eves (2004), a China foi a primeira a reconhecer os números negativos.

Na cultura chinesa a prática clássica foi de operar com bastonetes: as quantidades positivas eram representadas pelos bastonetes vermelhos e as quantidades a serem subtraídas eram representadas pelos bastonetes pretos. Entretanto, esses bastonetes não representaram números e sim operações com quantidades, encontra-se, desta forma, a utilização de grandezas subtrativas. É mantida de maneira persistente a lenda que os chineses estiveram na posse de números negativos desde o terceiro século a.C.. Mas, os chineses ainda não aceitavam a ideia de número negativo como solução de sistemas de equações, pois os valores negativos somente eram permitidos como valores intermediários durante o cálculo. Mesmo assim, alguns historiadores da matemática atribuem aos chineses o conceito de números negativos. A razão para tal afirmação ultrapassada é uma postura de sino-centrismo - a intenção de atribuir aos antigos chineses prioridade quanto aos europeus (SCHUBRING, 2018).

Apesar da amplitude de seus estudos, os gregos não aceitavam os números negativos. Pois, a matemática grega tinha o objetivo de comparar grandezas, e não medi-las, isso por motivo da mesma ser de caráter geométrico e não algébrico. Segundo Schubring (2018), um outro relato sobre números negativos foi em uma obra tardia, um livro de álgebra da época pós-helenista, a saber, *a Aritmética*, do matemático grego Diofanto. Nessa obra, Diofanto postula pela primeira vez a regra dos sinais, aplicando-a em binômios para multiplicar, por exemplo, $(a-b)(c-d)$, tendo como resultado: $ac-bc-ad+$ bd, porém ele não a detalha nem a explica, ou seja, não faz referência aos números negativos.

A obra *Aritmética* foi o trabalho mais importante dos três que Diofanto escreveu, nessa obra o autor propôs muitos problemas, porém em todos estes, ele só admitia respostas entre os números positivos além de se satisfazer apenas com uma resposta para os problemas (EVES, 2004).

Brahmagupta (598 - 668) foi o mais eminente matemático hindu do século VII (EVES, 2004). Ele trabalhou com quantidades negativas, e mais, a aritmética sistematizada dos números negativos e do zero encontra-se pela primeira vez em sua obra (BOYER, 2012). Para Eves (2004), os números negativos eram aceitos pelos hindus, essa civilização procurava encontrar todas as soluções inteiras de uma equação indeterminada, diferentemente de Diofanto que se direcionava a procurar uma qualquer das soluções racionais.

Na civilização árabe, embora operassem com grandezas subtrativas, na álgebra, as soluções dos problemas precisavam ser positivas (SCHUBRING, 2018). Al-Khowârizmî "[...] escreveu um tratado de álgebra e um livro sobre os numerais hindus." (EVES, 2004, p. 261). Ele é tratado do pioneiro no estudo das equações e também não considerava as soluções negativas.

Foi na área da álgebra geométrica que se encontraram as grandes e notáveis contribuições dadas pelos matemáticos mulçumanos, Oma Khayyam é responsável pela mais importante delas. Ele abordou a resolução geométrica de equações cúbicas, encontrando uma de suas raízes, porém assim como outros matemáticos, rejeitava as raízes negativas (EVES, 2004).

De retorno a civilização dos hindus, um outro matemático hindu importante foi Bhaskara, que em 1150 escreveu sua obra *diadema de um sistema astronômico*, mesmo esta sendo cinco séculos mais recente que a obra de Brahmagupta, poucos foram os progressos em relação ao trabalho do mesmo (EVES, 2004). Bhaskara foi o matemático mais eminente do século doze, ele faz uma interpretação de uma solução negativa enquanto rejeitava uma solução de uma equação negativa de segundo grau, efetuando uma reinterpretação: um comprimento negativo é reinterpretado como sendo no sentido oposto o considerado positivo. Essa abordagem feita por Bhaskara iria se generalizar tempos depois (SCHUBRING, 2018).

Com o passar do tempo, houve então um período de transmissão do antigo saber matemático grego e do hindu para a Europa Ocidental, onde os saberes gregos preservados pelos mulçumanos foram passados para os europeus ocidentais de três formas principais, segundo Eves (2004, p. 291): "pelas traduções latinas feitas por intelectuais cristãos que se deslocavam até centros de saber muçulmanos, pelas relações entre o reino normando da Sicília e o Oriente e através do intercâmbio comercial entre a Europa Ocidental e o Levante e o mundo árabe." A ciência árabe foi inserida na Europa tendo como principal via de acesso à Itália, foi Leonardo Fibonacci o matemático mais talentoso da Idade Média, que trouxe para a

Europa os conhecimentos matemáticos árabes. O interesse pela aritmética fez com que Fibonacci fizesse extensas viagens ao Egito, a Sicília, a Grécia e a Síria onde entrou em contato com os procedimentos matemáticos orientais árabes e percebeu a superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo. Em 1202, após voltar a Itália, seguindo a postura árabe, publicou sua obra *Liber abaci*, que trata de aritméticas e álgebras elementares. Nesta, Fibonacci não admitiu as raízes negativas e imaginárias (EVES, 2004). Ele interpretou uma raiz negativa como uma perda através de um problema financeiro presente em uma outra obra de sua autoria, intitulada *Flos* (TODESCO, 2006).

Após a adaptação da matemática árabe na Itália da Idade Média tardia, desenvolveu-se uma extensa prática de resolver sistemas lineares, porém estes eram construídos de uma forma que sempre as soluções fossem positivas. Uma solução negativa foi encontrada pela primeira vez num manuscrito em provençal no ano de 1430. E um cálculo operacional com grandezas positivas e negativas foi exposto no livro de Chuquet de 1484 (SCHUBRING, 2018). Nicolas Chuquet foi o mais brilhante matemático francês do século XV, ele admitia expoentes inteiros, positivos e negativos (EVES, 2004).

Segundo Ifrah (1989), os símbolos de + (mais) e - (menos) foram utilizados pela primeira vez na aritmética por Richard Widmann, matemático alemão que em 1489 publicou um livro de Aritmética Comercial. Antes de se chegar a esses sinais bastante conhecidos hoje, o sinal de – durante muito tempo na Idade Média foi expresso pela palavra *minus* (menos) e o signo + por *piu* (mais). Depois, as letras *m* e *p*, coroadas pelo signo ~, substituíram essas palavras.

Foi nas obras do matemático italiano Cardano que se teve início a reflexões sobre a legitimidade de operações com as quantidades negativas e sobre o reconhecimento de raízes (soluções) negativas de uma equação. Este matemático procurou redefinir as regras dos cálculos multiplicativos, afirmando que da mesma forma que a multiplicação de mais por mais resulta mais, a multiplicação de menos por menos deveria resultar menos, essa afirmação gerou uma primeira contestação. Para esse autor italiano, o positivo e o negativo constituíam em dois domínios distantes onde não era possível misturá-los, nem passar de um domínio para o outro (SCHUBRING, 2018). Segundo Eves (2004, p. 307), "[H]á indícios de que Cardano tinha algum conhecimento da regra de sinais de Descartes [...]". Mesmo com essa atenção dada por Cardano as raízes negativas de uma equação, muitos matemáticos da mesma época ou até mesmo de épocas seguintes, admitiam somente raízes positivas para as equações (EVES, 2004).

O matemático alemão Michael Stifel (1487-1567) escreveu o livro *Arithmética Íntegra*, tratado como um dos livros mais importantes do século XV. Ele considerava os números negativos como *números absurdos* e não admitia os negativos como raízes (TODESCO, 2006).

Simon Stevin (1540-1620), em sua *Aritmética* publicada em 1625, mostrou um entrave quando tentou interpretar uma raiz negativa de uma equação (GLAESER, 2010).

O matemático francês François Viète (1541-1603) no século XVI, não admitia que as equações tivessem raízes negativas, insistindo em dar as equações apenas raízes positivas. A partir de Viète o cálculo literal se ampliou sendo possível explicar as regras, porém elas se referiam somente às quantidades positivas, pois as letras não podiam representar quantidades negativas. A utilização de letras foi fundamental para que mais para frente pudesse ocorrer o desenvolvimento do cálculo literal, principalmente quando Hudde em 1659 elaborou a ideia que um número positivo ou negativo poderia ser designado por uma letra sem sinal pré-fixado (TODESCO, 2006). Ao fazer um resumo das realizações matemáticas do século XVI, Eves (2004) fez referência ao início da aceitação dos números negativos.

O francês Albert Girard (1590-1633), aceitou raízes negativas e imaginárias. Esse matemático foi responsável por antecipar a ideia de reta numerada, pois ele percebia que as raízes negativas são orientadas em direção contrária à dos números positivos (BOYER, 2012).

Schubring (2018) relata que em um manuscrito de Descartes (1596-1650), escrito cerca de 1638, no qual ele resumiu ideias do seu livro sobre método e a geometria. Este matemático não tratava os números negativos como verdadeiros. Foi Descartes que associou os números negativos a números menores que nada.

Antoine Arnauld (1612-1694) foi o primeiro a ter consciência que operar com grandezas negativas exigia um novo conceito de multiplicação, segundo Schubring (2018).

Para esse autor, Jean Prestet (1648-1691) foi um propagador do programa de algebrização da matemática. Ele elaborou um manual de matemática com o título: *Elémens des Mathématiques*. Neste livro, Prestet apresenta uma *demonstração* das regras dos sinais algebricamente e não geometricamente. Nessa obra, pela primeira vez ele apresenta "uma noção de números negativos na qual eles têm o mesmo status que os números positivos [...] Já com a introdução do conceito de grandeza, [...] explica que as grandezas compõem-se de dois domínios, um positivo e um negativo, cada um sendo infinitamente grande". (SCHUBRING, 2018, p. 55). Charles-René Reyneau (1656-1728) baseou-se na concepção de Prestet sobre números negativos, no entanto elabora a concepção desses números como quantidades opostas, visualizando quantidades positivas e negativas como retas opostas na geometria (SCHUBRING, 2018).

Bernard le Bouvier de Fontenelle (1657-1757) foi o primeiro autor a determinar a oposição como dois aspectos diferentes, a saber, o qualitativo e o quantitativo, explicando a oposição da seguinte maneira: “Quando duas magnitudes são opostas, a uma exclui ou repudia a outra, e consequentemente é negativa em relação à outra, a que é positiva” (FONTENELLE, 1727, apud SCHUBRING, 2018, p. 66).

O professor de matemática do *Collège de Beauvais* em Paris, Dominique-François Rivard (1697-1778), aceitou e explicou como operar com grandezas negativas isoladas em seu livro *Mathématiques* – publicado em 1732 (SCHUBRING, 2018).

Ainda segundo Schubring (2018), de maneira contrária aos autores que representavam a tendência de algebrização da matemática, da abordagem analítica, autores como Jacques Ozanam (1640-1717), Abbé Deidier (1696-1746), e Bernard Forest de Bélidor (1698-1761), baseando-se em uma visão geométrica de existência dos conceitos matemáticos, propagavam uma abordagem sintética, negando assim a possibilidade de subtrair um número maior de um número menor.

Na Inglaterra, os autores John Wallis (1616-1703) e Isaac Newton (1643-1727), aceitaram as grandezas negativas e as operações com as grandezas positivas e as grandezas negativas (SCHUBRING, 2018).

O filósofo e matemático alemão Christian Wolff (1679-1754), elaborou os primeiros livros textos para o ensino de matemática, ele até aceitou na prática o cálculo com grandezas negativas, porém declarou que grandezas positivas e negativas são heterogêneas, o que gerou uma contradição, pois “[...] sendo heterogêneas, a consequência lógica teria sido de excluir operações incluindo ao mesmo tempo grandezas positivas e negativas!” (SCHUBRING, 2018, p. 68).

Na concepção de Schubring (2018), a obra *Elementa Matheseos* (1734) escrita pelo professor de matemática da universidade de Leipzig, Christian August Hausen (1693-1743), foi uma obra mais produtiva para o desenvolvimento futuro algebrizante na Alemanha, pois nela a noção de grandezas opostas foi mais desenvolvida.

No tratado de álgebra desenvolvido em 1742, MacLaurin (1698-1746), afirma que da mesma maneira que as grandezas positivas, as negativas poderiam ser consideradas como grandezas reais. Em relação à aplicação da concepção de grandezas opostas MacLaurin escreve: “Quando duas quantidades iguais em relação à magnitude, mas daqueles tipos opostos, são unidas entre si, elas destroem o efeito um do outro e sua quantidade não é nada." (MACLAURIN, 1748, apud SCHUBRING, 2018, p. 68).

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), fez importantes descobertas na área da matemática. Em uma obra para principiantes escrita por ele, apresentou uma incompreensão a respeito dos números inteiros negativos, especificamente se tratando da multiplicação de dois números negativos. Euler usou uma acrobacia para tentar explicar a regra dos sinais, porém esta não superou o nível da vulgarização (GLAESER, 2010).

De acordo com Schubring (2018), Aléxis-Claude Clairaut (1713-1765) escreveu em 1746 uma obra destinada a uma marquesa, a saber, o livro texto *Elémens d'Algèbre*, embora Clairaut conseguia operar com grandezas negativas, nessa obra, ele procurou evitar obstáculos que poderiam aparecer, pois para ele, as soluções negativas se tratavam de assuntos que poderiam intimidar iniciantes. Na concepção de Clairaut, em caso de um aparecimento de uma solução negativa, deveria voltar as condições do problema, com a intenção de discutir como deveria ser entendido os valores do resultado de uma forma que os valores satisfizessem as equações dadas.

O matemático e filósofo D'Alembert (1717-1783) identificou o zero como nada, para ele o zero não era uma grandeza relativa e sim uma grandeza absoluta. D'Alembert negava o sentido e a existência de números negativos. Ele fez uma adaptação da concepção de Clairaut, na qual se deveria voltar as condições do problema, porém, desta vez, de uma maneira radical, propôs que seria obrigatório mudar a equação original em caso de uma aparecimento de uma solução negativa, para que consequentemente resultasse em uma solução positiva (SCHUBRING, 2018).

Uma obra que na segunda metade do século XVIII, se tratou de um manual dominante na França, tratou-se do manual escrito por Étienne Bézout (1730-1783). Nessa obra, ao contrário de Clairaut, Bézout afirmou ser necessário realmente mudar as equações originais e não apenas fazer a reinterpretação das equações. Segundo Schubring (2018, p. 75) "Essa ruptura epistemológica convergiu claramente com as abordagens sintéticas na Inglaterra". Podemos identificar essa posição na Inglaterra através da concepção de Francis Maseres (1731-1824) que acreditava que a ideia de uma equação do 2º grau ter soluções negativas era absurda.

O matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827), declarou que a regra dos sinais seria um gerador de dificuldades, em especial, o produto entre dois números negativos. Esse matemático terminou por não avançar nessas ideias (GLAESER, 2010).

Para Schubring (2018), um domínio do método analítico novamente apareceu nos primeiros anos após a Revolução Francesa e desta forma as abordagens algébricas foram aceitas. Um trabalho característico para o conceito de algebrização foi à obra “La langue des calculs” escrita pelo filósofo Condillac (1715-1780). Nessa obra, o autor analisa os números negativos como extensão da noção de subtração que por sua vez já é uma ampliação da adição. Através de sua concepção de Álgebra tenta redefinir todas as operações anunciando sua própria concepção de operacionalidade de números negativos.

A aceitação da recusa dos números negativos e de uma Álgebra poderosa aconteceu na França após uma substituição imposta por Carnot, a saber, ele substituiu a noção de número negativo pela correlação entre linhas *diretas* e *inversas*. Essa recusa foi documentada pelas modificações pertencentes nas edições dos livros didáticos que foram publicados por Lacroix a partir de 1797. Na última edição (desde 1803), Lacroix propaga a concepção de Carnot, onde as quantidades negativas não eram admitidas e soluções negativas eram tidas como absurdo (SCHUBRING, 2018).

Na Alemanha foi sendo elaborada uma abordagem diferente da recusa generalizada da França e da Inglaterra, a saber, se tratou de uma abordagem com base em uma separação de grandezas e números. Desta forma, uma redefinição e ampliação das significações das operações aritméticas seria necessária para operações com um novo tipo de grandezas e isso aconteceu através de publicações desde 1799. A algebrização da noção basicamente geométrica de dimensões opostas dos números positivos e negativos foi um outro elemento inovador. H. D. Wilckens professor de matemática em uma academia florestal propôs em 1800 uma diferenciação entre sinal de operação e de grandeza, na qual, essa diferenciação foi expressa da seguinte maneira: “uma notação segundo a qual a oposta de uma grandeza a é representada por $\bar{a}$ e as grandezas opostas são definidas pela equação $a + \bar{a} = 0$.” (SCHUBRING, 2018, p. 84).

Essa proposta de Wilckens teve uma abordagem definitiva em 1817 através do professor de matemática Wilhelm A. Förstemann (1791-1836). Ele propôs uma substituição da noção de quantidade por dois conceitos: o de grandeza e o de número, afirmando que somente era possível executar as operações algébricas através dos números. Förstemann investigou se existia um oposto na operação da multiplicação deduzindo que o 1 deveria ser o elemento neutro dessa operação. Daí em 1817 ele deduziu que o zero constituía no elemento neutro da adição, logo depois Förstemann conectou as operações de adição e multiplicação pela distributividade explicando que a validade $(a - b) .\ c = ac - bc$ que era conhecida para números positivos e absolutos precisava ser ampliada para valer também para positivos e negativos, e para que isso pudesse acontecer seria necessário formular o princípio de permanência: impôs como um postulado que as regras nos casos originais deveriam corresponder as regras para as operações estendidas (SCHUBRING, 2018).

A abordagem epistemológica de Förstemann foi disseminada por Gauss, onde para esse autor a nova epistemologia da matemática deveria corresponder de relações e não mais de substâncias (SCHUBRING, 2018).

Podemos perceber até o momento que o surgimento dos números negativos resultou em um grande e longo incômodo aos matemáticos, onde as discordâncias cercavam a utilização desses números. Essas discordâncias giravam em torno de sua existência e da validação de algumas regras.

Somente depois de 1867 que os conceitos de Förstemann e as abordagens epistemológicas de Gauss foram realmente mais conhecidas e disseminadas a partir da publicação da obra "Theorie der complexen Zahlensysteme" do matemático alemão Hermann Hankel, nesta obra o autor fez um tratamento bem mais axiomático dos fundamentos da aritmética.

> [...] Ele assumiu as concepções de Förstemann sobre a "oppositeness" nas operações de adição e de multiplicação e elaborou mais explicitamente o "princípio de permanência" – que está com efeito ligado ao seu nome – como base conceitual para estender o significado das operações a novos campos numéricos. E foi Hankel (1867) também quem sublinhou pela primeira vez explicitamente que estas extensões constituem *convenções* e que, portanto, não podem existir *provas* para as definições assim conseguidas. Em particular, não existem demonstrações para as regras dos sinais: pois são convenções. (SCHUBRING, 2018, p. 86-87).

As definições trazidas por Hankel foram necessárias para que os números negativos ganhassem reconhecimento dentro da matemática e fossem inteiramente admitidos, pois até o momento eles serviam apenas como símbolos, onde usava-se leis para que assim fosse possível operar com os mesmos.

Através desse histórico bastante resumido, podemos perceber que assim como muitas outras noções da matemática, a utilização e a prática dos números inteiros, especificamente dos números negativos ocorreram bem antes de sua definição. Essa afirmação é confirmada com o exemplo da civilização chinesa trazido no início desta sessão. Nesse sentido, fica evidente a grande distância de tempo presente do início de sua utilização e prática até sua formalização e representação como ampliação dos números naturais, pois trata-se de um período que vai de 200 anos a.C. até 1867 d.C.

É notório também que em grande parte desse longo percurso, muitos matemáticos manipulavam de maneira fenomenal os números negativos, mesmo possuindo uma compreensão de caráter parcial dos mesmos, porém esse sucesso não era assegurado de forma regular, pelo fato que todos os obstáculos ainda não tinham sido superados causando extensas áreas de incompreensão (GLAESER, 2010).

A resistência em reconhecer a existência dos números negativos se caracterizou de forma ímpar como o empecilho principal ao longo desse grande período de tempo. Isso é notório, pois a necessidade de formalizá-los e representá-los para que ganhassem rigor e clareza nos conceitos era o fator influente para uma grande desconfiança estabelecida pelos matemáticos. Essa resistência constante a aceitação dos números negativos se tratou de um grande obstáculo que somente foi superado a partir do momento que foi combatido, através dessa sessão, podemos perceber vários obstáculos que tiveram que ser enfrentados e somente a partir daí tornou-se possível a ampliação do conjunto dos números naturais.

Diante disso, podemos perceber que assim como na criação dos números, que se tratou de um processo longo e de enfrentamento de obstáculos, o aparecimento dos números negativos e sua conceituação também seguiu esse caminho, ou seja, foi cercado de obstáculos, e estes precisaram ser combatidos e superados. Nesse processo, os matemáticos foram avançando no sentido da aceitação dos números negativos, assim como no entendimento de lacunas causadas por esses números.

Nessa direção, vale ressaltar o estudo de Georges Glaeser (2010), que por meio da análise histórica do trabalho de dez autores (Diofanto, Stevin, Descartes, Mac Laurin, Euler, d'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy e Hankel) fez um estudo dos obstáculos existentes no desenvolvimento dos números negativos, analisando aqueles que foram combatidos pelos matemáticos, especificando quais destes matemáticos conseguiram ou não superá-los, elegendo seis obstáculos epistemológicos que apareceram no decorrer da constituição dos números relativos, são eles:

> 1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
> 2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
> 3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
> 4. A ambiguidade dos dois zeros (v.fls.36)

> 5. Estagnação no estágio das operações concretas (era confronto com estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido “concreto” atribuído aos seres numéricos.
> 6. Desejo de um modelo unificador. (GLAESER, 2010, p. 69).

O autor acrescenta que alguns bons modelos (modelos concretos) que são usados para facilitar a compreensão de determinado conteúdo pode agir como obstáculo na compreensão de um outro “É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante.” (GLAESER, 2010). Igliori (2008) especifica essa concepção de Glaeser mencionando: “o modelo comercial, que facilita a compreensão da adição dos relativos, é um obstáculo para a multiplicação.” (GLAESER, 1981, apud IGLIORI, 2008, p. 134).

Para Igliori (2008, p. 134):

> As análises epistemológicas das dificuldades encontradas na institucionalização dos números negativos, no decorrer dos tempos, e das encontradas por nossos alunos, nos dias de hoje, no processo de aprendizagem, poderiam indicar que tais dificuldades são constitutivas do conhecimento, e assim são os números positivos um obstáculo epistemológico para o aparecimento dos números negativos.

Glaeser (2010) afirma que a prática em sala junto com a experiência de distintos processos de ensino será o segredo para descobrir se realmente esses seis obstáculos epistemológicos (históricos) descritos por ele tem consequências na aprendizagem de alunos.

Com o intuito de auxiliar o professor na escolha de caminhos mais propícios para fazer a abordagem de números inteiros em sala, os PCN (1998) alertam para a importância do professor reconhecer alguns obstáculos que o aluno acaba enfrentando quando entram em contato com números inteiros, a saber:

> - Conferir significado às quantidades negativas;
> - Reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
> - Reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);
> - Perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais – por exemplo, é possível “adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado”, como também é possível “subtrair um número de 2 e obter 9”;
> - Interpretar sentenças do tipo $x = -y$, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo). (BRASIL, 1998, p. 98).

Desta forma, buscando apresentar propostas de situações de LEM que promovam a superação desses obstáculos indicados por Glaeser (2010), pelos PCN (1998) e de outros obstáculos epistemológicos e didáticos já mencionados e decretados na Educação Matemática com respaldo teórico, decidimos fazer uma entrevista com professores de matemática para levantarmos informações a respeito das concepções destes com relação aos obstáculos epistemológicos e didáticos, ao Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) e com relação ao ensino-aprendizagem de números inteiros, entre outros conteúdos matemáticos, considerando obstáculos envolvidos nesse processo. Resolvemos agir dessa forma, pois entendemos que a entrevista poderia nos ajudar na elaboração do conjunto de propostas, promovendo acréscimos e alterações nas mesmas.

3 ANÁLISE DAS ENTREVISTAS REALIZADAS COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Fizemos uma entrevista com alguns professores de Matemática que atuam no município de Rio Tinto-PB e com alguns que atuam em municípios que compõem a Região Metropolitana do Vale do Mamanguape, estes professores lecionam em turmas do Ensino Fundamental II. Procuramos por meio dos dados das entrevistas semiestruturadas analisar os pontos de vista, por nós considerados mais relevantes nas falas dos professores (P), no que se refere ao conhecimento destes a respeito dos obstáculos epistemológicos e didáticos, do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) e do ensino-aprendizagem de números inteiros, entre outros conteúdos matemáticos, considerando obstáculos envolvidos nesse processo (como esses conceitos são trabalhados em sala, quais as principais dificuldades encontradas pelos alunos, entre outras questões).

As entrevistas foram gravadas com a autorização dos participantes (professores), para tal, foi usado o Google Meet, que se trata de um serviço de comunicação por vídeo desenvolvido pelo Google. A entrevista foi do tipo semiestruturada no qual tivemos algumas perguntas que conduziram a entrevista, a saber, dez. No entanto, quando achávamos necessário, fazíamos algumas intervenções com o objetivo de ajudar e entender o discurso dos professores.

Participaram da entrevista onze professores, cujos nomes serão denominados de P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10 e P11. As entrevistas ocorreram no mês de abril de 2021. A seguir trazemos um quadro com o tempo de atuação desses professores na educação básica, assim como também suas respectivas formações.

Quadro 2 – Formação e tempo de atuação dos professores na educação básica.

Professores	**Formação dos professores**	**Tempo de atuação**
P1	Especialização	6 anos
P2	Especialização	12 anos
P3	Especialização	4 anos
P4	Mestrando	9 anos
P5	Especialização	5 anos
P6	Especialização	19 anos
P7	Especialização	12 anos

P8	Especialização	8 anos
P9	Especialização	25 anos
P10	Mestrando	6 anos
P11	Mestrado	9 anos

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Ressaltamos que os professores entrevistados se mostraram motivados com a entrevista e colaboraram com a realização da mesma. Depois de fazermos a transcrição dos discursos dos professores passamos a analisá-las, o que fazemos a seguir.

A partir da investigação das respostas dos professores, evidenciamos ideias relevantes relacionadas aos obstáculos epistemológicos e didáticos, aos números inteiros e outros conteúdos, ao LEM, no contexto de reflexões acerca do ambiente de sala de aula, da própria natureza do conceito, do seu processo de ensino-aprendizagem e das dificuldades de abordá-lo.

Para tal, separamos por questão, ou seja, colocamos a questão e em seguida nossas apreciações das concepções dos professores.

1. Que tipos de dificuldades você identifica apresentadas por seus alunos para aprender Matemática? Fale um pouco sobre elas. E a que elas poderiam estar ligadas?

Para responder a essa questão os professores se espelharam em suas experiências vivenciadas em sala de aula. Notamos que o P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9 e o P10 indicaram que a principal dificuldade apresentada por seus alunos é com respeito ao desconhecimento de conteúdos básicos, ou seja, mais especificamente, os alunos chegam no Ensino Fundamental II (6º ano) sem saber as quatro operações aritméticas básicas. Para estes professores, essa dificuldade está ligada a falta de base sólida para adquirir novos conhecimentos, ou seja, pelo fato deles não terem desenvolvido competências e habilidades em séries anteriores (Ensino Fundamental I).

Selecionamos algumas falas dos professores entrevistados para fundamentarmos essa visão:

> A maior dificuldade que eu identifico... está relacionada as operações básicas, ou seja, aos conteúdos básicos da Matemática (P1).
>
> [...] estão ligadas ao motivo do estudante... não conseguir desenvolver as competências e habilidades em anos anteriores, ou seja, na primeira fase do Ensino Fundamental. Quando chega no 6º ano, o professor de Matemática dessa fase tenta corrigir e as vezes não consegue (P2).

> A base, pois eles não sabem conceitos simples, ou seja, não tiveram uma base sólida, dessa forma... terminam tendo dificuldade para poder aprender novos conhecimentos (P5).
>
> A dificuldade mais apresentada por meus alunos é... relacionada a conceitos básicos que não adquiriram em séries anteriores. Às vezes perco muito tempo tendo que recapitular um conteúdo anterior para dar prosseguimento no novo conteúdo que quero ensinar. Isso atrapalha muito, pois acabo perdendo muito tempo revisando conteúdo (P10).

Apesar de, numa maneira geral, os entrevistados argumentarem na direção de falta de base para justificar o insucesso com a matemática, para o P2, P3 e P11 as dificuldades apresentadas pelos alunos para aprender Matemática poderiam também estar ligadas a própria dificuldade que a Matemática carrega, ou seja, pela própria natureza dos conceitos da Matemática o aluno já pode ter dificuldade. Neste caso, mesmo não trazendo detalhes, é nítido que os professores estavam se referindo que os conceitos matemáticos trazem por si só alguns obstáculos que muitas vezes são inevitáveis pelo fato de serem próprios a esse conceito, apesar de essas afirmações, em função das respostas às outras questões, sejam de natureza empírica. Como observamos nas falas a seguir:

> [...] O outro ponto tem a ver com a própria dificuldade da Matemática (P2).
>
> Além do problema da base que já falei... Eu acho que as dificuldades podem estar relacionadas com a complexidade dos próprios conceitos matemáticos, por que tem conteúdos como por exemplo, números primos, que é difícil do aluno do 6º ano pegar a definição (P3).
>
> Pela natureza da própria Matemática, o aluno já vai ter dificuldade (P11).

Além do mais, esses professores entendem também que a ideia negativa que se cria em torno da disciplina Matemática, como de difícil aprendizagem, disseminada na família e escola é um dos fatores principais que afastam os alunos desse conhecimento. Além de comentarem a respeito da formação deficitária de alguns professores, inclusive do ponto de vista da falta de metodologias diversificadas de ensino.

Enquanto que, os professores 2 e 11 antecipam a próxima questão ao se referirem que o fracasso e o erro podem colaborar psicologicamente para a expansão da antipatia em torno da Matemática. Já os entrevistados P4, P7 e P9 referiram-se também a dificuldade encontrada pelos alunos para interpretar situações problemas, por esse não terem uma boa leitura. E o P6 argumenta que, em geral, os alunos não tem a cultura de estudarem; P10 argumenta ainda sobre a didática do professor. Para o P10, o modo como o professor trabalha o conteúdo em sala de aula também pode gerar dificuldades, ou seja, as dificuldades podem estar ligadas a didática do professor. Essa fala do P10 nos remete aos obstáculos didáticos de origem didática, pois estes segundo D'Amore (2007, p. 215), estão ligados [...] à escolha estratégica do docente".

O P9 foi mais além e afirmou que "Um dos problemas é que a Universidade trabalha a questão acadêmica, ou seja, a matemática em si, como ciência própria e peca em alguns aspectos do ensino da matemática. Acredito que todo o ensino deve ser revisto.", numa clara referência a questão da transposição didática.

Analisando todas as falas dos professores percebemos que nenhum deles ao se referir aos tipos de dificuldades identificadas e a que elas poderiam estar ligadas comentaram a respeito da possibilidade de muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estarem ligadas ao conhecimento anterior, visto que um conhecimento antigo pode se tornar um obstáculo ao novo.

2. Qual sua compreensão sobre os erros dos seus alunos ao longo do desenvolvimento de um novo conhecimento? E quais suas atitudes quando um aluno seu comete um erro?

Em relação ao primeiro quesito, os professores 3, 4, 5, 7, 9 e 10, de uma maneira geral, entendem da importância do erro no processo de ensino aprendizagem da matemática, e concebem que os alunos não erram por causa do novo conhecimento e sim em função das dificuldades que eles possuem acerca do conhecimento antigo que fazem cometer erros ao longo do desenvolvimento de um novo conhecimento. Para esses professores, o aluno precisa ter uma base sólida dos conhecimentos antigos para aprender o novo conhecimento que está sendo abordado. Essa afirmação é deduzida das respostas de P3, P4, P5, P7 e P10, das quais apresentamos a seguir duas:

> Acredito que... o erro na Matemática é muito produtivo, pois é a partir do erro que o professor descobre qual a dificuldade daquele aluno e onde o professor pode intervir (tirar dúvidas, dar exemplos) pra fazer eles entenderem o conteúdo. Tudo é através do erro, por isso ele é importante. Sobre o erro do aluno quando vai aprender um novo conteúdo, pela minha experiência como professor, percebo que os alunos as vezes não tem uma compreensão boa dos conteúdos, por isso que acontecem os erros quando estão aprendendo um novo assunto. A falta de uma boa base fazem eles cometerem erros. Por exemplo, o aluno vai tentar encontrar as raízes de uma equação do 2º grau, ele consegue até substituir a, b e c corretamente na fórmula, porém quando vai para o próximo passo que é calcular, acaba errando, principalmente quando um dos coeficientes é negativo. Então por não ter uma boa base das operações com naturais e com números inteiros ele acaba cometendo erros (P5).

> Quando apresento um novo conteúdo aos alunos e faço uma tarefa relacionada a esse novo conteúdo, percebo... que a maioria dos erros não

> aparecem em virtude do não entendimento do novo conteúdo e sim do não entendimento de conteúdos anteriores, ou seja, os alunos não sabem o conteúdo mais básico e não o novo que está sendo trabalhado.
> Eu considero o erro como indispensável para o processo de ensino-aprendizagem da matemática, pois é através dele que o ensino ganha impulso e que as dificuldades apresentadas pelos alunos podem ser identificadas para que assim o professor saiba por onde começar a intervir com o intuito de ajudar o aluno na construção do seu conhecimento (P10).

Já os professores P1, P2, P6, P8 e P11 externam argumentos, apenas, a favor da importância do erro, dos quais destacamos:

> O erro não deve ser encarado como algo relacionado a falta de êxito. O erro deve ser visto como aprendizado, pois ele faz parte do processo de ensino (P6).

> O erro não pode ser sinônimo de fracasso, o aluno não pode ser excluído do processo de ensino-aprendizagem por causa que errou, os alunos não podem ser selecionados a partir dos erros. [...] Encontrar e corrigir os erros pode melhorar o ensino e colaborar para que o aluno tenha uma compreensão mais sólida do conteúdo que está sendo abordado (P8).

Nesse caso, percebemos que nenhum deles comentou a respeito da possibilidade dos erros aparecerem as vezes como consequência do conhecimento anterior, assim como também não houveram comentários que o conhecimento construído empiricamente pelo aluno pode se tornar um obstáculo ao conhecimento científico (conhecimento apresentado na escola) que é um pensamento mais abstrato ou em função de um obstáculo promovido didaticamente. Neste caso, os entrevistados não refletiram a respeito de que os alunos adentram em sala repletos de experiências próprias e de conhecimentos que foram adquiridos ao longo de suas vidas.

Em relação ao segundo quesito da mesma pergunta, os professores entrevistados responderam esse questionamento de maneira bastante parecida, porém buscamos identificar os discursos mais paralelos e para isso analisamos cada detalhe do depoimento de cada um.

O P1, P3 e P5 apontam para a mesma direção, primeiramente analisam qual foi o ponto e o por que do erro do aluno e a partir do momento que compreende o ponto e o por que, consegue abordar a metodologia mais apropriada para mostrar ao aluno onde ele errou buscando corrigi-lo. O P4, P2 e P7 afirmam que buscam mostrar outros caminhos para fazer com que o aluno identifique onde errou e consiga concertar o erro. Nessa direção, os professores 8, 9 e 11 também concordam que é necessário fazer com que o aluno reflita sobre o erro, ou seja, sobre o que está fazendo. Para esses professores é importante que os próprios estudantes percebam que tem alguma coisa errada e que precisa corrigir, pois é a partir desse momento que o aluno aprende mais, ou seja, a partir do momento em que o aluno faz esse processo repetidas vezes. O P6 e o P10 buscam analisar as circunstâncias que levaram os alunos a cometerem aquele determinado erro, para depois tentar saná-lo para que o aluno não insista no erro. Os depoimentos dos professores nos remetem a Bachelard (1996), quando este ressalta que as sucessivas retificações de um erro ajudam a conduzir o pensamento a verdade.

De maneira geral, embora os professores apresentem de maneira diferente suas visões a respeito do erro, percebemos diante dos discursos dos mesmos que o erro não é tratado como um acaso no caminho, uma incompetência, um desconhecimento de um saber. Esses professores não enxergam o erro como consequência de um desconhecimento, eles percebem que o erro é parte integrante do processo de aprendizagem além de ser um fator estimulante nesse processo, ou seja, percebem o lado didático do erro.

3. *Você sabia que as dificuldades apresentadas pelos alunos e os erros cometidos pelos mesmos podem estar relacionadas(os) à existência de obstáculos epistemológicos e/ou didáticos? Se sim. O que você tem a dizer sobre esse conceito?*

Diante deste questionamento, a maioria dos professores, especificamente oito dos onze entrevistados responderam que não sabia que podia existir essa relação, e consequentemente não respondendo ao segundo questionamento.

Desta forma, apenas três professores (P4, P10 e P11) responderam que sim, relatando o seguinte:

> Assim... respondi que sim, por que lembro que já ouvi falar desse tema em duas aulas do mestrado, e me recordo que as dificuldades apresentadas pelos alunos podem estar relacionadas com os obstáculos. Salvo me engano, a primeira vez que escutei foi na aula de Metodologia e Didática com o professor Marcus Bessa e a segunda foi na aula de Ensino Aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental e Médio com o professor Aníbal, porém não foi uma aula reservada somente para debater essa teoria e sim bem dizer somente tocou no assunto e deu um exemplo. Por isso vou ser sincera em dizer que não lembro da definição desse conceito (P4).
>
> Eu vi isso no mestrado em Educação Matemática da UEPB em Campina Grande-PB na disciplina de Laboratório de Matemática com o professor Aníbal, eu fazia parte de uma equipe que iria apresentar um artigo para a turma e o tema desse artigo envolvia esse tema, mas eu não estou muito lembrada não, não estou me recordando. O pouco que lembro é que tem alguns tipos de obstáculos pra cada dificuldade se não me engano... ai tem os nomes que se dá para cada dificuldade do aluno. Eu não estou lembrada bem certo qual especificamente se encaixaria melhor nessa sua pergunta (P10).
>
> O que eu tenho a dizer sobre esse conceito é que ele é muito importante assim como outros conceitos existentes na Didática da Matemática, como por exemplo o contrato didático, a transposição didática, entre outros. Foi no mestrado em Educação Matemática que eu ouvi falar pela primeira vez desse

> conceito. Não lembro bem da definição teórica desse conceito, mas lembro de um exemplo na nossa prática... por exemplo, as vezes algumas ideias que o aluno aprende no 6º ano a respeito dos números naturais se ele for aplicar no 7º ano ou em outra série mais avançada em outro conjunto numérico pode acabar causando erros, porque aquela ideia não é mais válida em um outro conjunto numérico mais amplo, um exemplo é quando... eu estou trabalhando a multiplicação... a tendência é que só aumenta né?... A tendência é só aumentar. Então... o aluno vai criando essa ideia que na multiplicação vai só aumentar, mas quando eu pego dois números decimais e multiplico isso pode não acontecer, então a ideia que multiplicar sempre aumenta pode não ser mais válida para outro conjunto. Então na Matemática tem diversas ideias parecidas com essa e o professor tem que tá atento (P11).

Analisando as falas dos professores, percebemos que a maioria não tem conhecimento desse conceito, e consequentemente, não tem noção que as dificuldades apresentadas pelos alunos e os erros cometidos pelos mesmos poderiam estar relacionadas(os) com à existência de obstáculos epistemológicos e/ou didáticos. Isso trata-se de um problema, pois é de extrema importância que o professor tenha conhecimento dessa teoria, pois os obstáculos podem estar por trás de muitas das dificuldades que aparecem nas situações de ensino da matemática. Nessa direção, é fundamental a familiarização com esta teoria.

Ressaltamos que dos três professores que responderam *sim* para o primeiro questionamento, todos não conseguiram apresentar a definição de obstáculos epistemológicos e/ou didáticos, e mais, somente um (P11) dos três conseguiu trazer um exemplo coerente dessa teoria enxergada na prática. Salientamos que dos três que responderam *sim*, todos eles disseram que foram apresentados a essa teoria a partir do ingresso no mestrado, um (P11) já concluiu o mestrado e os outros dois (P4 e P10) estão concluindo. E dos oito que responderam *não*, todos possuem pós-graduação a nível de especialização. Isso nos faz refletir que essa teoria não foi apresentada para esses professores nem no curso de graduação e nem no de especialização.

Portanto, isto nos faz voltar décadas atrás, onde Bachelard tinha criticado a falta de conhecimento em relação à noção de obstáculos epistemológicos dos professores da sua época, citando a importância dos mesmos terem conhecimento dessa noção para que assim pudessem entender como o aluno não aprende. Logo, podemos notar que a falta de conhecimento dessa noção ainda existe atualmente por parte dos professores.

4. De acordo com Bachelard, os obstáculos epistemológicos podem ser acomodações de um novo conhecimento em relação ao já conhecido. Para ele, o conhecimento comum pode se tornar um obstáculo ao conhecimento científico, ou ainda, o conhecimento estabelecido inicialmente pode ser impedimento para o novo. Anos depois, Brousseau transferiu essa *noção para a matemática, nomeando-a de obstáculos didáticos, distinguindo-os em três origens, a saber:*

- *origem ontogenética: São aqueles que ocorrem em virtude de limitações (neurofisiológicas entre outras) no desenvolvimento do próprio aluno envolvido no processo de ensino, ou seja, são obstáculos que se desenvolvem em consequência do desenvolvimento cognitivo do aluno.*
- *origem didática: São aqueles que parecem estar na dependência "de uma escolha ou projeto do sistema de ensino" (BROUSSEAU, 1976, p. 108). Estes obstáculos são consequências de seleções e ações educativas, didáticas ou do sistema educativo.*
- *origem epistemológica: Encontram-se "[...] na história dos próprios conceitos" (BROUSSEAU, 1976, p. 108), são inevitáveis por serem inerentes ao mesmo e possuírem papel constitutivo no conhecimento almejado.*

Com base nisso, você lembra na sua experiência de magistério de alguma(s) situação(ões) que se enquadre nesses conceitos? Se sim. Relate-a(as).

Inicialmente, observamos que para essa questão, sentimos a necessidade de fazer uma breve explanação da citada teoria, em função das respostas coletadas para a questão anterior. Desta forma, expomos a cada um, de maneira resumida, como se deu o desenvolvimento desse conceito, onde surgiu pela primeira vez, como foi transferido para a matemática e como pode se refletir na prática docente. Resolvemos agir dessa forma pelo fato que as outras questões (da quarta em diante) precisava que os professores tivessem conhecimento desse conceito.

Diante deste quarto questionamento, ao analisarmos as falas dos professores, percebemos que algumas situações trazidas pelos mesmos remetem para um mesmo exemplo de obstáculo. Por exemplo, os professores 1 e 3 citaram que no 6º ano, quando vão trabalhar com uma divisão de dois números naturais, a divisão pode ter resto igual a zero (a divisão é exata) ou resto diferente de zero (a divisão não é exata), a divisão não tem continuação, ou seja, é finalizada com resto igual ou diferente de zero. Mas ambos os professores relataram que ainda no 6º ano quando vão apresentar/trabalhar os/com números decimais, a mesma divisão que anteriormente tinha um fim (era finalizada) quando o resto era diferente de zero, agora ela pode ter prosseguimento. Expomos a seguir uma das falas dos professores que ilustra essa situação:

> Lembro de um caso no 6º ano onde a gente fez uma divisão... era 5:2 e aí chegou em um ponto onde o aluno... chegava no final da divisão e sobrava 1... Aí geralmente a gente diz a eles que não tem como continuar... Aí

> quando chega mais na frente que trabalhamos com decimais essa mesma divisão que tinha resto 1 era possível continuar. Por que a gente acrescenta o zero e aí vai ficar 10 dividido por 2, que dá 5, acrescenta a vírgula e aí o resultado será 2,5. Aí o aluno diz assim: professor, mas a gente tinha feito essa divisão antes e não podia. E aí a gente vê que aquilo ali tornou algo meio confuso para o aluno, por que ele já tinha visto lá atrás que a partir do momento que tivesse resto não podia continuar dividindo e lá na frente pode (P1).

Percebemos diante dessa situação trazida pelos professores que o conhecimento que o aluno aprendeu anteriormente se tornou um obstáculo para a compreensão do novo, pois o conhecimento anterior poderá ser um impedimento quando da tentativa de ser superado. Na mente dos alunos a divisão acabava quando era encontrado um resto, este sendo zero ou diferente de zero, porém logo depois, com a apresentação dos números decimais, se tornou possível dar continuidade a divisão. Logo, se o aluno tentar usar esse conhecimento aprendido anteriormente no contexto dos decimais, ele provavelmente fracassará, gerando respostas incorretas.

Uma outra situação citada por três professores (P1, P7 e P11), relaciona-se ao 9º ano, quando trabalhamos com equações do 2º grau. Ocorre quando o discriminante é um número negativo, impossibilitando encontrarmos as raízes reais dessa equação, isso por que a raiz quadrada de um número negativo não existe. Porém, quando chegamos no Ensino Médio esse problema da raiz de um número negativo é resolvido, pois estudamos que as equações agora poderão ser resolvidas com base em um novo conjunto numérico, o conjunto dos números complexos. Logo, uma afirmação que era válida para o conjunto dos números reais (um determinado contexto) agora não é mais válida para esse conjunto mais amplo que se trata do conjunto dos números complexos (um contexto mais amplo). A seguir, trazemos um dos discursos dos professores em relação a essa situação:

> No 9º ano você diz que os conjuntos só vão até os reais, aí no caso, não pode calcular as raízes de uma equação do 2º grau quando delta for menor que zero, por que não existe nenhum número que elevado ao quadrado resulte em um número negativo, aí quando chega no Ensino Médio ele vai ver os números complexos... vai ter outro conjunto e vai ter como encontrar a raiz quadrada de um número negativo. Então eu tenho esse cuidado de dizer que existem outros, que existe mais um que não acaba nos reais, mas que só vai ser estudado mais pra frente (P7).

Já nos discursos dos professores 5, 7, 8, 10 e 11, destacamos, a seguir, algumas falas envolvendo números inteiros:

> No 6º ano a gente diz que não pode tirar 7 de 8, por exemplo, se você tem 8 não pode tirar 10. Aí quando chega no 7º ano já pode... fica devendo... mas

> já pode.. Quando eu estou dando aula no 6º ano tenho muito cuidado com isso aí, por que possa ser que faça um bloqueio para série seguinte. Eu acho que essa situação que falei se encaixa na dos obstáculos. Quando você passou a teoria não entendi tanto, mas quando você colocou exemplos da nossa prática como professor, do nosso cotidiano eu entendi. (P7).

> Você falou do obstáculo epistemológico, eu lembro que acontece muito isso, o aluno ele aprende uma coisa e toma como verdade, como certo e lá na série seguinte aquilo não ta adequado para aquele contexto... eu vejo que o professor ele tem que ter cuidado pra quando tiver por exemplo no 6º ano, já falar mesmo que de maneira não formalizada de números negativos para seus alunos, pra quando chegar no 7º ano não dar um atrito no assunto e possibilitar que o aluno tenha já uma ideia guardada desses números em mente. Teve um aluno que estudou comigo no 6º ano e no 7º ano ele fez uma pergunta da seguinte forma: por que professor a gente não pode diminuir 6 - 7? Ele fazia 7 - 6 nos naturais, ele armava o algoritmo e dava certo, mas quando a gente ia pra números inteiros ai quando ele armava o algoritmo não deu certo, o algoritmo que ele aprendeu no 6º ano não estava servindo para o 7º ano (P8).

> Sim, é o caso dos números inteiros, 8 e - 10, por exemplo, por que não pode tirar um número maior de um menor no 6º ano, já no 7º ano pode, ai gera confusão no aluno. A dificuldade que o professor tem de explicar isso pode gerar uma dificuldade ainda maior para o aluno, por que o assunto por si só já gera. Outra situação é quando a gente tem que comparar números inteiros, por exemplo, 10 e 6, nos naturais no 6º ano temos que 10 > 6 e no 7º ano se for -10 e -6, temos -10 < -6, ou seja, inverte e o aluno não percebe a presença do sinal e acaba dizendo que -10 > -6, levando a ideia de comparação de números naturais para o 7º ano (P10).

Analisando as falas dos professores percebemos que o P7, o P8 e o P10 citaram a mesma situação, a saber, uma subtração que não era possível de ser realizada no 6º ano e passou a ser possível a partir do 7º ano. Neste caso, uma subtração em que o minuendo é maior que o subtraendo seria impossível de encontrar o resto ou a diferença com base no conjunto dos números naturais, porém com base no conjunto dos números inteiros essa subtração passou a ser possível. Para esses professores essa subtração gera muita confusão na cabeça do aluno, o que se trata de um fato bastante normal, pois durante algum tempo essa operação foi entendida como impossível pelos alunos. Sem falar que muito tempo atrás essa noção foi sendo elaborada num processo de enfrentamento de obstáculos. Então por que o aluno irá aceitar a realização da mesma de uma hora pra outra? Essa não é uma tarefa fácil para ele, pois o mesmo terá que se desapegar do concreto, ele terá dificuldade de afastar-se de um sentido concreto que ele atribuía aos seres numéricos, assim como também dar significado e reconhecer a existência das quantidades negativas. Desta forma, o aluno irá insistir em aplicar o que aprendeu nas séries anteriores, ou seja, pegar o número menor e tentar diminuir do maior, numa clara transposição do conceito de subtração aprendido com base no conjunto dos números naturais e transposto para operar com números inteiros.

Portanto, entendemos essa situação descrita pelos professores como um exemplo de obstáculo, pois segundo D'Amore (2007, p. 211) "[...] obstáculo é uma ideia que, no momento da formação do conceito, foi eficaz para enfrentar os problemas anteriores, mas que se revela um fracasso quando se tenta aplicá-la a um novo problema."

Por sua vez, o professor 10, relata que "A dificuldade que o professor tem de explicar isso pode gerar uma dificuldade ainda maior para o aluno, por que o assunto por si só já gera". Nesses termos, segundo Brousseau (1976), isso acontece, pois os obstáculos epistemológicos encontram-se na história dos próprios conceitos, ou seja, são inevitáveis por serem inerentes ao conceito.

Embora o P10 acabou não se referindo em nenhum momento ao obstáculo didático de origem didática caracterizado Brousseau (1976), o mesmo aborda um ponto importante, que nos remete a esse tipo de obstáculo, a saber, a dificuldade que o professor tem de apresentar o conteúdo pode fazer com que este tenha tendência em escolher uma maneira inapropriada para se transmitir esse conceito, possibilitando um conceito equivocado, ou seja, o professor pode transmitir esse conceito de maneira incompleta. Em relação a isso, D'Amore (2007) afirma que são as concepções científicas e didáticas de um professor que o levarão a escolher um currículo ou um método, porém essa escolha pode revela-se um obstáculo didático.

Para o P7 é importante que o professor tenha cuidado quando for explicar para o aluno no 6º ano que é impossível realizar uma subtração em que o subtraendo seja maior que o minuendo, pois pode acontecer de se formar um bloqueio para a série seguinte. O P8 concorda com o posicionamento do P7 e acrescenta que quando o professor estiver trabalhando com essa operação no 6º ano já precisa trabalhar mesmo que de forma informal com a noção de número negativo, para quando o aluno chegar no 7º ano não criar um atrito no conteúdo. Pelo que podemos perceber na fala do P8, o mesmo embora não se referindo em nenhum momento a teoria de Vigotski, que se trata de trabalhar com a zona de desenvolvimento proximal (distância entre o nível de desenvolvimento real e potencial), ou seja, trabalhar um conteúdo sem pronunciá-lo, acha viável utilizar a mesma em sala de aula.

Consideramos essas observações dos professores como favoráveis para o processo de ensino-aprendizagem da matemática, ou seja, a primeira do P7 de explicar para o aluno que mais para frente será possível fazer essa operação. E a segunda do P8 de trabalhar com a noção de número negativo já no 6º ano mesmo sem ter feito o pronunciamento desse conteúdo ainda.

Já com relação a comparação de números inteiros, os professores 5, 10 e 11 afirmaram que os alunos sentem muita dificuldade em perceber a presença do sinal de menos, é como se eles não o considerassem e fizesse a comparação ignorando-o, ou seja, trabalhando apenas como se fossem positivos e dessa forma se equivocando na resposta. Percebemos diante dessa situação citada pelos professores, que o aluno tenta usar o que aprendeu no 6º ano relacionado a comparação de números naturais nessa nova abordagem com números inteiros, pois no exemplo por nós citado, referente ao P10, percebemos que o aluno sabe que 10 > 6, porém quando o professor acrescenta o sinal de menos em ambos os números, ou seja, pedindo para o aluno comparar agora -10 e -6, ele acaba se confundindo e não percebe a mudança.

Diante das situações destacadas pelos entrevistados, percebemos que há resistência de alunos em considerar o sinal de menos acrescentado no número, numa nítida transposição do conceito de comparação, conceito esse existente no contexto dos números naturais e transposto para os números inteiros.

Um outro caso de obstáculo epistemológico identificado e descrito pelo P11 trata-se de:

> Quando vamos ensinar uma multiplicação no 6º ano a tendência é que só aumenta, exemplo: 2 x 5 = 10, 2 x 6 = 12. O aluno vai criando essa ideia que vai só aumentar, mas aí quando eu pego um número negativo e multiplico por um positivo, isso pode não acontecer, por exemplo, (-2) x (+3) = -6 que é menor que -2 e +3. Da mesma forma pode ocorrer se eu pegar dois números escritos na forma decimal ou fracionária. Então de certa forma isso aí você tem que trabalhar com o aluno por que se não vai ocasionar um obstáculo de aprendizagem nele.

Esse exemplo, citado por P11, ilustra o que Pais (2001, p. 46) descreve como obstáculo didático de origem epistemológica, que se refere: “[...] da aprendizagem do produto de dois números inteiros positivos que é sempre maior do que cada fator. Esse conhecimento pode ser um obstáculo à aprendizagem das propriedades do produto de dois números racionais, para os quais tal proposição nem sempre é verdadeira.”.

Enquanto em relação ao obstáculo didático de origem ontogenética surgiu dois exemplos, apresentados pelo P4 e P5:

> Vou tentar trazer um exemplo para cada um. Em relação ao primeiro que é o ontogenético, eu observei que eu trabalhando com uma turma do 9º ano, que assim... de início eu tava ministrando os conteúdos e vi aquele aluno muito quieto, aí pensei: será que ele não está entendendo o que pedi para fazer?, aí

> quando cheguei perto dele, percebi que ele não tava entendendo o conteúdo... eu tive que propor novas propostas didáticas pra poder ta ministrando o conteúdo, porque já era dele, porque eu explicava pra turma e a maioria compreendia e ele não entendia porque ele já tinha alguns problemas... dificuldade intelectual. A direção da escola depois entrou em contato comigo pra dizer que ele era “especial”. Então cabia a nos professores trazer atividades diferenciadas pra passar pra ele por que já era dele, o conteúdo era simples, mas ele não entendia basicamente nada, nem os números ele entendia direito, no 9º ano e não sabia (P4).

> Um exemplo de obstáculo ontogenético é em relação a quantidade... conceito básico... em relação a quantidade... já ensinei a um aluno que não conseguia entender... contar... identificar uma quantidade... por exemplo, 3 e 2 ele não consegue comparar qual o maior... entende?... até também em formas geométricas, se a pessoa pegar dois círculos, um maior, um menor e um médio. Se eu falar: pinte o círculo maior. Muitas vezes ele pinta o médio ou o menor. Em relação a tamanho, grandeza e medida. Uma identificação simples e clara ele não consegue muitas vezes identificar (P5).

Consideramos esses casos relatados pelos professores como exemplos de obstáculos didáticos de origem ontogenética, pois entendemos que eles surgem em virtude de delimitações neurofisiológicas entre outras no desenvolvimento do próprio aluno inserido no processo de ensino-aprendizagem. Para D’Amore (2007), esses obstáculos estão mais precisamente conectados ao desenvolvimento da inteligência, dos sentidos e dos conjuntos perceptivos.

Por sua vez, quanto ao obstáculo didático de origem didática, foram citados mais dois exemplos, um pelo professor P4 e outro pelo professor P5. Vejamos o relato do P5:

> Em relação aos obstáculos didáticos de origem didática que você falou... eu acho que uma situação pode gerar sim esse obstáculo... acho que quando o professor vai trabalhar com sólidos geométricos e se limita somente ao quadro, esse obstáculo pode ter mais chance de aparecer. Às vezes tem professor que não utiliza nem o livro, só faz o desenho do sólido no quadro. Isso é muito comum ainda. Às vezes os professores não trazem exemplos de objetos que lembram os sólidos, não trazem materiais concretos para pedir que os alunos construam os sólidos, não mostra a planificação, utiliza só o quadro e as vezes o aluno não consegue assimilar aquilo que está vendo ali, não consegui assimilar as particularidades do sólido que o professor desenhou no quadro, porque o professor só mostrou características do sólido no quadro. Então eu acho que isso pode gerar um obstáculo para o aluno (P5).

Consideramos essa situação relatada como exemplo de obstáculos didáticos de origem didática, pois de acordo com Brousseau (1976), estes obstáculos são aqueles que aparentam estar na dependência de uma seleção ou projeto do sistema de ensino.

Dessa forma, o P5 traz uma reflexão sobre a preferência estratégica do professor. Na opinião dele, quando o professor se limita ao quadro para apresentar os sólidos geométricos está aumentando a chance de aparecer um obstáculo. Nesses termos, o obstáculo didático de origem didática, de acordo com D'Amore (2007), decorre de escolha estratégica do professor. Sendo assim, concordamos com P5, e neste caso especificamente, essa metodologia se for adotada pode possibilitar a elaboração por parte dos alunos de um conceito equivocado, pois o professor desenha no quadro os sólidos, acreditando que o aluno irá conseguir fazer o desenho do mesmo (registrar em seu caderno), assim como fazer a leitura desse desenho com facilidade, e consequentemente, compreender as propriedades do mesmo. Porém, para Pais, essa não é uma tarefa fácil, pois, como exemplo:

> [...] quando faz intervir a utilização de uma representação por meio de uma perspectiva. A realização ou leitura desse desenho não é uma atividade evidente. Um cubo representado em perspectiva paralela, normalmente, aparece com a face superior representada por um paralelogramo não quadrado, onde os ângulos não são retos, quando medidos sobre a superfície do papel, mas, por outro lado, representam os ângulos retos da face superior do cubo. Se o aluno fixar sua leitura nas particularidades do desenho em si, ele pode ter dificuldades em compreender as propriedades geométricas do sólido representado. (PAIS, 2001, p. 46-47).

Em seu discurso, o P4 traz uma situação a respeito de obstáculo didático de origem epistemológica já decretado na literatura, a saber, o resultado de uma divisão de um número inteiro positivo por um número racional que seja menor do que um, esse resultado (quociente) será um número maior do que o dividendo. No entanto, se conclui normalmente com base no conjunto dos naturais que o resultado da divisão é sempre menor do que o dividendo, o que acaba contrariando esse caso específico da divisão de um número inteiro positivo por um número racional menor que um e de muitos outros casos com base no conjunto dos números racionais. A seguir trazemos a fala desse professor:

> Agora vou tentar lembrar de um exemplo do obstáculo epistemológico. Vou pensar em uma experiência que se encaixa nisso aí... No 6º ano... quando trabalhamos com números naturais... na divisão, por exemplo, dividir 20 por 4 que é igual a 5 e esse 5 é menor que o dividendo que é 20. Isso acontece pra qualquer divisão com os números naturais, o resultado sempre será menor ou igual ao dividendo. Mas, quando passa pra números racionais, por exemplo 20 : 0,5, o resultado seria maior que o dividendo, então esse seria um obstáculo epistemológico. No 6º ano é de um jeito, mas quando passar para o 7º ano que trabalharia com um conjunto mais amplo dos racionais, isso aí não faria mais sentido, o aluno ia ver a diferença no resultado e já não ia ter a mesma percepção dos números naturais. (P4).

Podemos concluir que a maioria dos professores trouxeram exemplos pertinentes no que diz respeito aos obstáculos, demonstrando que entenderam o que foi transmitido por nós em relação ao desenvolvimento dessa teoria e como a mesma pode se refletir na prática docente.

5. *Em caso afirmativo, quais foram as atividades trabalhadas com o intuito de superá-los?*

Para fazermos a análise das respostas dos professores em relação a essa quinta questão fizemos referência aos exemplos de obstáculos que eles mencionaram na quarta pergunta. Desta forma, começamos pelo obstáculo citado pelos professores 1 e 3 (a divisão que antes era finalizada quando encontrasse um resto e que depois poderia ter continuidade a partir do resto obtido com base nos números decimais). Segue a resposta do professor 3 em relação a atividade que fez ou entende que pode ser aplicada com o intuito de superar esse obstáculo, os professores afirmaram que:

> Para superar esse obstáculo... eu trabalhei com um probleminha... eu coloquei uma situação no quadro que pra ele resolver o problema tinha que dividir 7 por 4. Aí todos pararam quando o resto foi 3. Aí disse: e agora como vamos fazer para resolver esse problema pessoal? Os alunos disseram: se tivesse como continuar a divisão professor a gente encontrava um resultado pra esse problema, mas não pode. Perguntei: mas por que não pode. Aí os alunos disseram: não pode professor por que o senhor no começo do ano disse que não podia continuar. Aí eu dei prosseguimento na discussão até chegar no conceito de número decimal e resolver esse problema (P3).

Ao analisarmos essa fala, podemos afirmar que o professor partiu do diálogo para tentar superar esse obstáculo. Entendemos esta atitude como pertinente de uma forma geral no trabalho com esse obstáculo. O P3 especificou como trabalhou com a intenção de superar esse obstáculo, o mesmo mencionou que utilizou uma situação problema que para resolvê-la precisava que o aluno encontrasse a resposta de 7 dividido por 4, e a partir daí de acordo com a discussão em sala conseguiu explicar para os alunos a necessidade de se trabalhar com números decimais. Entendemos essa atitude do professor em trabalhar inicialmente com uma situação problema na qual a resolução da mesma não era possível em números naturais como coerente, pois através dessa atividade o aluno iria enxergar que era necessária a introdução do conceito de números decimais.

Portanto, entendemos que as duas maneiras como os professores trabalharam foram adequadas, porém uma forma bastante dinâmica e didática de se superar esse obstáculo seria a partir do uso do material dourado, pois com o uso desse material didático os alunos poderiam realizar as transformações necessárias em cada passo das divisões.

Em relação ao obstáculo descrito pelos professores 1, 7 e 11 (a raiz quadrada de um número negativo que não era possível de ser calculada no Ensino Fundamental II e que passou a ser possível no Ensino Médio), os três professores disseram que para superar este obstáculo, quando estão trabalhando o conteúdo de equações do 2º grau no 9º ano e se deparam com o discriminante negativo, explicam para os alunos que não é possível encontrar as raízes dessa equação, porém explicam que quando os alunos chegarem no Ensino Médio irão conhecer um outro conjunto numérico e dentro desse outro conjunto será possível encontrar as raízes de uma equação do 2º grau que possui discriminante menor que zero. Nesse contexto, concordamos com a estratégia adotada pelos professores.

Para superar o obstáculo da subtração em que o minuendo é maior que o subtraendo, destacamos as respostas dos P7 e P10:

> No 6º ano não toco em assunto de número negativo, mas quando chega no 7º ano eu começo dizer a eles que tem a possibilidade de ficar devendo... eu mostro esse conceito de ficar devendo, não é que ele não possa tirar 10 de 8... mas ele vai tirar o 8 e vai ficar devendo o 2. Eu tento colocar nele esse sentido de dívida, pra ver se ele consegue entender melhor. Eu sempre uso uma brincadeira dizendo que o positivo é o dinheiro que tá no bolso e o negativo é o que devendo (P7).

> Geralmente eu gosto de expor situações problemas, dar exemplo do cotidiano, onde a gente possa trabalhar com os números negativos, também com jogos, pra que o aluno possa ter uma compreensão a mais do assunto. Gosto de mostrar onde ele pode encontrar os números negativos no cotidiano deles. Eu trabalhei com o jogo do sobe e desce, mostrei a eles que se tivessem na casa +2 do tabuleiro e tivessem saído no dado o número de 4 casas pra descer, eles teriam que realizar 2 – 4, no caso, tando no +2, eles precisavam descer 4 casas no tabuleiro chegando a casa -2 do tabuleiro, sabendo então que se tirar 4 de 2 encontra -2. Falei para eles que o tabuleiro do jogo era como se fosse a reta numérica do +6 ao -6 (P10).

A partir da fala desses professores, percebemos que eles utilizam situações do cotidiano para abordar essa operação, o que se trata de algo importante no trabalho inicial com números inteiros, pois segundo os PCN o professor deve apresentar situações, nas quais a resolução não é possibilitada através dos números naturais, para que assim o aluno perceba a necessidade de se introduzir o conceito de números negativos.

O P10 relatou que utiliza um jogo matemático para superar esse obstáculo, afirmando que o aluno poderia subir ou descer de acordo com os números obtidos no dado e que explicou para os alunos que o tabuleiro do jogo era como se fosse a reta numérica.

Entendemos como pertinente a proposta do professor trabalhar com o jogo e associá-lo a reta numérica, pois de acordo com os PCN, a utilização da reta numérica pode favorecer para que o aluno compreenda situações como essas, ou seja, a utilização da reta para se trabalhar com a resolução de situações no campo aditivo envolvendo números positivos e negativos é apropriada segundo esse documento. Essa estratégia está coerente com a filosofia do nosso trabalho, ou seja, a de utilizar materiais didáticos para contribuir na superação de obstáculos epistemológicos.

Já em relação a comparação de números inteiros mencionada pelos professores P5, P10 e P11, transcrevemos as duas primeiras argumentações e antes afirmamos que P11 trabalha com a reta numérica:

> Acredito que para comparar é justamente dar um exemplo da vida cotidiana, tipo, pegar um elevador, que tá no térreo, o térreo sabendo... vamos colocar que é o zero... aí quero subir para o 1º andar, quero subir para o 2º... aí a partir do zero ele quer descer, aí desce para o andar -2, para o -3... Também pode usar a ideia de termômetro, por que tem temperaturas positivas e negativas, acho uma boa estratégia de compreender o que é maior e menor (P5).

> Em relação a comparação eu utilizo a noção do jogo do sobe e desce também, por que digo: você tá no -6 e acabou saindo 4 no dado referente a casas para descer, aí você vai ficar no -10. Aí pergunto: você está mais perto de ganhar ou mais longe agora? O aluno diz: mais longe professora. Aí eu digo: então isso quer dizer o que? Você acha que -10 é menor ou maior que -6? Diante dessas reflexões o aluno acaba compreendendo o porquê que um número é maior ou menor que outro (P10).

Dessa forma, concordamos com as três estratégias, seja a da contextualização, o uso do jogo ou da reta numérica, os quais podem fazer com que o aluno tenha uma compreensão maior das comparações feitas com números positivos e negativos, sem contar que a utilização da reta como já vimos anteriormente pode ajudar na compreensão de situações como essas.

Quanto ao obstáculo relacionado ao zero, o P11 entende que deva trabalhar a aplicabilidade dos números inteiros considerando a contextualização e para isso busca mostrar que “[...] os naturais não vão dar conta de todas as situações cotidianas, ou seja, o professor deve mostrar o porquê do surgimento dos números inteiros. Mostrando como o conjunto surgiu... aí já evidencia que o zero vai ter antecessor” (P11). Concordamos com o ponto de vista deste professor, pois desta forma o aluno perceberá a utilidade dos números negativos, bem como a necessidade da representação dos mesmos, dando mais significado às quantidades negativas.

Um outro obstáculo descrito por esse professor foi com relação ao produto de dois números inteiros positivos que é sempre maior do que cada fator. Em relação a possibilidade de superação deste, o P11 ressalta que:

> Já com relação a multiplicação, eu acho que o professor deveria trabalhar com situações que evidenciassem dinheiro, acho que ficaria mais fácil, por

> exemplo, 4 x 0,5, onde o 0,5 era 50 centavos, no caso, 4 x 0,5 seria como se fosse 4 pratas de 50 centavos. Acho que ficaria mais fácil de tá superando esse obstáculo. Acho que através de problemas que evidenciassem a necessidade de superar essas dificuldades, ou seja, o professor ele tem que preparar problemas cuja a utilidade desse problema possa dar conta de superar esses obstáculos (P11).

De acordo com a fala do P11, o mesmo ressalta a importância de se trabalhar com problemas que evidenciem a necessidade de superação deste obstáculo, e especificamente, considera que situações que envolvam dinheiro sejam uma boa estratégia para se fazer isso. O professor cita um exemplo, a saber, 4 x 0,5, em que o número 0,5 equivale a 50 centavos, calculando essa operação temos igual a 2 reais. Porém, percebemos que a resposta obtida é menor que um dos fatores e não menor que os dois fatores.

Dessa forma, apesar do resultado não satisfazer integralmente ao argumento inicial, porém isso não quer dizer que o mencionado seja inválido, pois em relação aos números naturais nunca acontecerá isso, no mínimo igual a uma das parcelas, como é o caso de 2 x 1 = 2. Entendemos que trabalhar com situações problemas que evidenciem dinheiro seja uma boa estratégia para superar esse obstáculo, pois situações como estas são bem amplas e podem se encaixar em vários contextos que se bem planejado pelo professor pode colaborar bastante nesse aspecto. Além do mais, podem contemplar atividades de Laboratório de Matemática, desde que sejam inseridas na lógica dessa metodologia.

Em relação aos obstáculos didáticos de origem didática descritos pelos professores P4 e P5 e a respeito das atividades com o intuito de superá-los, estas já foram mencionadas na análise da questão quatro. Desta forma, resta-nos aqui a análise dos procedimentos usados/imaginados por esses professores.

Em relação ao obstáculo descrito pelo professor P4, que diz respeito ao cálculo de perímetro e área, consideramos que a atitude do professor em adotar uma outra metodologia para se abordar esse conteúdo foi digna de evitar um obstáculo dessa natureza, pois como já foi dito anteriormente, em caso de apresentação desse conteúdo como estava proposto no livro didático o professor iria promover um conceito equivocado.

Já com relação ao obstáculo mencionado pelo P5, que diz respeito quando o professor se limita ao quadro para apresentar os sólidos geométricos. Consideramos que a visão que o professor mostrou ao associar essa situação aos obstáculos didáticos de origem didática foi muito propícia, pois essa foi uma situação que já está registrada na literatura. Ao citar esse exemplo, percebemos que o professor teve um bom entendimento acerca do que foi passado a respeito desse tipo de obstáculo didático.

A seguir, trazemos o discurso do P4 quando este traz uma estratégia para superar o obstáculo didático de origem epistemológica mencionado por ele (caso da divisão de um número positivo por um número menor que um que seja racional, cujo o resultado é maior que o dividendo).

> Com relação a esse conteúdo de divisão eu comecei a trabalhar com situações do cotidiano dos alunos. Trazendo questões mais assim... envolvendo problemas e não envolvendo de forma mecânica... só o cálculo em si, trazendo toda aquela história pra poder trabalhar com o aluno, comecei a trabalhar na perspectiva da resolução de problemas, pra eles perceberem que acontecia essa mudança aí do natural e racional, por que na resolução ele já iria perceber que ia mudar de figura do natural (P4).

Em sua fala, o P4 ressalta que para superar esse obstáculo, trabalhou na perspectiva da resolução de problemas, através de situações relacionadas ao cotidiano dos alunos, mesmo não citando nenhum exemplo específico a respeito, entendemos que o trabalho com essa metodologia de ensino pode colaborar nesse aspecto, pois através de problemas como, por exemplo: para fazer bandeiras juninas, Jorge precisa de 5 metros de pvc cortados em pedaços de 0,20 metro. Quantos pedaços Jorge vai obter, usando a quantidade total desse fio? A citada situação pode ser também transformada em atividade prática com o uso de materiais didáticos.

6. Em sua opinião, é importante que o professor conheça esses conceitos (obstáculos epistemológicos e didáticos)? Por quê? Como eles se refletem em sua prática docente?

Com relação a esse questionamento, todos os professores responderam que *sim*. A diferença de uma resposta para a outra encontra-se na justificativa. Assim, destacamos algumas falas:

Ao analisarmos os discursos dos professores, notamos que o P1, P2 e P7 mencionaram que tinham conhecimento de forma intuitiva desse conceito, porém não conheciam de forma sistematizada, o P2 alegou que isso pode ser o caso da maioria dos professores. Separamos alguns trechos das falas desses professores que condizem a isto.

> Eu não conhecia essa teoria que você falou... É muito importante que o professor venha a ter esse conhecimento, e a partir do momento que ele tem esse conhecimento, ele começa a compreender os porquês que o aquilo tá acontecendo, por que muitas vezes a gente sabe, por que aquilo acontece, mas a gente não tem a compreensão que existe toda uma teoria por trás (P1).

> Claro, ... assim... eu acho que a maioria dos professores sabem intuitivamente disso, eles podem não conhecer de maneira sistematizada como você explicou, de forma conceituada, formalizada. Mas os professores de forma geral tem noção disso que a gente tá conversando. Mas que é

> fundamental conhecer isso de forma sistematizada é. [...] acho que os professores tem essa ideia formada, talvez não de maneira sistematizada, mas que tem a noção tem (P2).
>
> Com certeza, eu não sabia que era esse termo de obstáculo epistemológico, mas eu entendia, eu entendia porque eu pensava muito na minha experiência como aluna no Ensino Fundamental, por que pra mim foi uma surpresa chegar no 7º ano e ver os números negativos. Isso é jogado de qualquer forma. Eu pensava muito nisso, quando me tornei professora, passei a ter esse cuidado, a mesma coisa é quando vou falar dos reais, que existe mais um conjunto... além dos reais que o livro do 9º ano não mostra. Por que quando eu cheguei no Ensino Médio e apareceu os complexos eu fiquei indignada, quando o professor falou que o maior era dos reais e de repente aparece outro. Aí eu lembrava disso e sempre tive esse cuidado de mostrar para o aluno (P7).

Evidenciamos no depoimento do P7 que ele se refere a quando era estudante, para exemplificar a surpresa que teve ao se deparar tanto com os números negativos quanto com os números complexos, pois em ambos os casos os professores não tinham se referido da possibilidade de existência desses dois conjuntos em séries anteriores causando uma surpresa nas séries posteriores.

Por outro lado, o P6 acredita que a importância de todos os professores conhecerem essa teoria se dá para que de repente o professor dando uma aula no 6º ano de números naturais já tentar preparar o aluno para refletir a respeito da possibilidade de existência de um outro conjunto, mais amplo, para quando o mesmo chegar nas séries futuras ele se deparar com situações do tipo, para que assim o aluno não seja pego de surpresa. O P10 concorda com o P6, acrescentando que quando o professor é conhecedor dessa noção, ele vai trabalhar em uma determinada série já pensando que quando o aluno chegue na série seguinte não crie tanta confusão.

Já o P3 afirma que “Essa ideia é muito importante, pois o professor vai identificar e entender melhor as dificuldades e os erros dos alunos”. O P5 relata que, além disso, através dessa ideia, o professor poderá também identificar e entender as dificuldades das suas próprias metodologias que estão sendo aplicadas em sala de aula. Enquanto o P5, opina que ao conhecer esse conceito, o professor poderá fazer uma auto avaliação, tanto em relação as dificuldades apresentadas pelo aluno, quanto do método aplicado por ele (professor).

Para o P4 é essencial que o professor esteja por dentro dos obstáculos e saber diferenciá-los é de suma importância, pois “o professor vai ver se está relacionado com o conteúdo, com a didática adotada ou com o próprio aluno.”

O P11 se refere primeiramente a qualidade do processo de ensino-aprendizagem, que na opinião do mesmo ganha impulso quando o professor tem conhecimento dos obstáculos. Esse professor justifica sua afirmação afirmando o seguinte:

> [...] o professor saber ensinar aquele conteúdo tem justamente a ideia de saber quais as possíveis dificuldades inerentes aquele conteúdo e quando você sabe essas dificuldades e você consegue preparar uma atividade para antecipar elas, aí você vai conseguir levar um melhor ensino-aprendizagem em sala de aula. Então a ideia de saber desses obstáculos é importante pra antecipar as dificuldades pra você propor atividades que possam tá superando essas dificuldades. Essa teoria permite que o professor reflita sobre suas práticas docentes e a respeito de melhorá-las. O que ensinar e como ensinar. Que tipos de dificuldades você vai ter posteriormente e como você pode pensar em atividades pra superar essas dificuldades (P11).

Logo, em sua fala, o P11 ressalta a importância do professor ter conhecimento dos obstáculos, ou seja, das dificuldades inerentes ao conteúdo que vai ensinar, pois será a partir daí que conseguirá propor atividades apropriadas para antecipar as mesmas e consequentemente proporcionar um ensino-aprendizagem mais qualificado. Assim, como o P5, o P11 acredita que tendo conhecimento dos obstáculos o professor poderá refletir melhor sobre sua prática docente.

Ao refletir a respeito de como essa ideia chega ou pode chegar ao professor do Ensino Básico, resolvemos ao final de cada fala dos professores a cerca dessa questão 6, fazer o seguinte questionamento: *Você acha que esse seria um bom tópico para se apresentar para os professores em uma oficina, formação continuada, entre outros(as)? Por que?*

Todos os professores responderam que sim, a seguir trazemos algumas falas:

> Eu acho que essa ideia deveria ser passada para os professores de alguma forma pelo fato... de ser uma coisa que acontece direto em sala de aula... então por isso que acho que seria importante o professor saber que aquilo que acontece tem uma definição por trás (P1).
> Eu acho que esse conceito é muito viável em uma formação continuada, pois acredito que a maioria dos professores só sabem intuitivamente disso (P2).
>
> Acho que esse seria um tópico que causaria muito impacto nos professores, muitos deles iriam ter o seu primeiro contato com esse tema. Acho que seria importante fazer um resumo como você fez e explicou, pois deu pra entender, no caso poderia dizer para os professores o seguinte: olha... essa dificuldade que vocês tão vendo é uma coisa chamada de obstáculo epistemológico, tem um cara que trouxe essa noção lá atrás e ele diz isso, isso e aquilo... (P5).
>
> Sim, pois quanto mais o professor entender o motivo das dificuldades dos alunos... ele vai saber lidar com elas (P9).

> Acho que sim, pois a maioria dos professores não conhecem, digo por mim, não lembro de ter visto na minha graduação, só vi por que to no mestrado. Acredito que estes professores não sabem. Só vi no mestrado (P10).

> Seria muito importante que os professores fossem apresentados a essa teoria, pois creio que a grande maioria nunca ouviram falar. Eu só ouvi falar no mestrado em Educação Matemática (P11).

Pelo que podemos perceber, os professores concordam que esse conceito seria um bom tema para se apresentar para os professores através de uma formação continuada ou outro tipo de evento.

7. Você já identificou alguma abordagem de conteúdo ou atividade em livro didático que poderia gerar um obstáculo à aprendizagem? Se sim. Qual?

Para essa questão, o P1 e o P11 afirmaram não se lembrar no momento, de ter identificado nenhuma abordagem de conteúdo ou atividade em livro didático que poderia gerar um obstáculo a aprendizagem.

O P3 se refere a ideia de agrupamento, ideia esta que a divisão está associada. O professor menciona que da forma que esse conteúdo vinha apresentado em um livro fazia com que o aluno se confundisse, ou seja, ele não conseguia identificar quantos grupos de tamanhos iguais poderiam ser formados com uma determinada quantidade: “[...] do jeito que tava no livro o aluno não percebia que... por exemplo, quantas vezes um número cabia no outro. Ele não conseguia entender, por que no livro não tava claro” (P3). Esse professor, assim como também o P2, P4, P5, P7 e P10, afirmam que muitas vezes os livros trazem situações fora de contexto com a realidade do aluno. Segundo esses professores, quando percebem isso, modificam a abordagem do conteúdo, procurando trazer situações mais condizentes com a realidade do aluno. Tratamos essa atitude dos professores como positiva para o processo de ensino-aprendizagem, pois entendemos que a contextualização que não condiz com a realidade do aluno pode gerar um obstáculo a aprendizagem do mesmo.

O P5 menciona uma situação relacionada a abordagem de números inteiros.

> Já vi em um livro uma abordagem tradicional de comparação de números inteiros... sem um exemplo concreto... só tinha dizendo: tal número é maior que tal e tal número é menor que tal. Pra iniciar... não tinha um exemplo contextualizado. Aí tive que trabalhar de outra forma, por que ia gerar obstáculo (P5).

De acordo com a fala desse professor, percebemos que a comparação de números inteiros estava sendo abordada de forma não ilustrada, ou seja, eram usados apenas os símbolos de maior e menor para comparar os números. Entendemos que as comparações precisam ser apresentadas de maneira contextualizada, o professor deve buscar situações para que o aluno perceba a utilidade dos números inteiros, assim como também a importância de conhecer a representação deles para que assim possa dar sentido e entender o que significa uma comparação de dois ou mais números inteiros, situações como variações de temperaturas, entre outras poderiam ser trabalhadas.

Esse professor relata também uma situação relacionada a abordagem de números racionais.

> Lembro de uma situação em relação aos números racionais, em que não ficava clara a ideia das diferentes representações de um número racional. Por que a abordagem do livro não estava com uma situação problema, não tinha exemplos convincentes, não tinha um exemplo de pegar uma pizza pra mostrar... Tinha só por escrito mesmo... tava só os números dizendo um exemplo para o aluno ver (P5).

O P8 também faz referência a uma situação relacionada aos números racionais, a saber:

> Na minha graduação, fiz um estudo de alguns livros didáticos e me recordo que em um livro que avaliei trazia os números racionais representados por frações e por decimais, mas deixava a porcentagem lá no final, eu vejo que deveria trazer junto, pois tratam da mesma coisa, são diferentes representações de um número racional. Eu acho que se tratasse de forma junta todas as formas de um número racional, seria melhor para evitar obstáculo lá na frente, por que depois o aluno poderia sentir dificuldade de entender por que a porcentagem não foi considerada como número racional (P8).

Os dois professores citam uma situação relacionada com as representações de um número racional (numeração decimal, frações, porcentagens, dízimas periódicas, dentre outros). Analisando a fala desses professores, percebemos que as situações mencionadas pelos mesmos, ou seja, a falta de contextualização para deixar claro para o aluno as diferentes representações de um número racional (P5) e a abordagem incompleta das diferentes representações de um número racional (P8) nos remetem a um obstáculo didático de origem didática, a saber, a abordagem fragmentada dos números decimais e fracionários.

O P10 menciona uma situação a respeito do trabalho com sólidos geométricos, em que foi necessária uma abordagem diferente da proposta no livro didático.

> [...] já trabalhei com sólidos geométricos, os vértices, arestas, por que só pelo livro fica difícil do aluno ver, ... a questão da visualização, fica difícil do aluno identificar, arestas, faces e vértices. Fica difícil de entender só olhando para o livro ou desenhando no quadro, o aluno vai ter dificuldade da visualização tridimensional. Então aí eu já levei planificações de sólidos

> geométricos, trabalhei também com canudos, que é para os alunos poder pegar, poder ver, saber identificar as características dos sólidos. Então eu já trabalhei de outra forma sem seguir o livro (P10).

Esse professor diante das dificuldades apresentadas pelos seus alunos em visualizarem as características dos sólidos geométricos, aparentemente expostos no livro ou no quadro, decidiu utilizar uma metodologia diferente para superar esse empecilho, a saber, fez uso de materiais didáticos. Consideramos a atitude do professor como pertinente no que diz respeito a superação de um obstáculo didático de origem didática, descrito por Pais (2001), que quando se faz intervir o uso de uma representação através de um ponto de vista. A tarefa de realizar ou fazer a leitura desse desenho não se trata de uma atividade clara.

8. De acordo com sua experiência como professor do Ensino Fundamental II, em relação especificamente ao ensino de números inteiros, quais possíveis obstáculos que aparecem no ensino deste conteúdo? Como você faz para superá-los? Como você trabalha números inteiros em sala?

Antes de iniciarmos a análise das respostas dadas pelos professores em relação a essa questão, ressaltamos que a mesma já foi parcialmente respondida na questão 4 por alguns dos professores, os quais citaram algumas situações de obstáculos que aparecem no ensino desse conteúdo. Assim, não repetimos tais colocações.

Os professores P2 e P3 afirmam que os alunos não sentem tanta dificuldade para perceberem a existência e a utilidade dos números inteiros usados na representação de situações reais. Para esses professores, o que se torna um grande obstáculo é operar com os números inteiros, a partir do conhecimento prévio dos alunos. Abaixo, trazemos a fala desses professores com respeito a essa afirmação.

> A grande dificuldade não foi falar da existência dos inteiros... os alunos tem conhecimento que existem quantidades negativas, não é estranho para eles. Mas o que é obstáculo em si é operar, ... a maioria dos alunos tem dúvida. Para as regras dos sinais a solução é decorar, por que a regra do sinal nem eu sei demonstrar, é difícil mostrar. A soma é mais difícil que a multiplicação e divisão, por que a regra muda... eu peço que os alunos imaginem o sinal como andar pra frente e pra trás, o zero é onde você tá, porque que -5 - 3 = -8, por que você está no zero e depois andou pra trás 5 passos e depois 3 passos, aí pergunto, você deu quantos passos para trás ao todo... faço isso andando na sala. Aí eles constroem essa ideia e quando você coloca alguns exercícios pra que eles façam as operações funciona bem, só que quando você coloca os números inteiros em um contexto de uma situação problema onde eles tem que abstrair dessa ideia de andar pra trás e pra frente, aí o negócio dá errado... pra soma eu contorno assim. Outra forma que trabalho é pedir que eles imaginem que estão andando na reta numérica. Agora para multiplicação e divisão é decorar as regras de sinais, é assim e pronto (P2).

> O aluno que vem do 6º ano que só conhece 0, 1, 2, ... e percebem que agora tem números negativos, que a reta agora não se limita no zero, que ela tem agora um ponto de origem, tudo isso da um nó na cabeça do aluno. Aí a gente começa a trabalhar com situações de temperatura, abaixo e acima do nível do mar, saldo de gols, e eu sempre gosto de começar com um desenho que tem... Cyberchase é um desenho que trabalha a matemática, é muito interessante, tem um episódio que trabalha números inteiros, nesse episódio fala abaixo de zero e descobrem que existem mais números abaixo do zero. Coloco esse desenho para os alunos perceberem que abaixo de zero tem os números negativos. Aí quando acaba o desenho eu começo a indagar: o que vocês perceberam de novo no desenho? Vou trabalhando desta forma para apresentar os números negativos. Até aí eles não tem tanta dificuldade, coloco perguntas e eles conseguem responder. Que ver o que vai trazer dificuldade ao aluno é quando começo as operações. Por exemplo, o aluno agora terá que somar -1 com -1. Ele tem dificuldade de ver que dá -2. Aí eu peço que eles pensem os números negativos como sendo uma família e os positivos outra família. Aí eu digo qualquer soma dentro da família negativa vai ser sempre negativo e qualquer soma dentro da família positiva vai ser positivo. Possa ser até que cause um obstáculo, mas eu faço isso. Quando vai somar números com sinais diferentes eu peço que eles calculem a diferença e coloque o sinal que tiver mais unidades, por exemplo, -3 +7 vai ser 4 ou -4? Aí o aluno vai ver que na família positiva tem 7 unidades e na negativa tem 3, então ele vai colocar o sinal do positivo. Aí para isso trago a proposta de tampinhas azuis e vermelhas, a azul é positivo e a vermelha é negativo. Aí eu dizia que as duas juntas se anulam e o resto é o resultado. Eu peço que eles façam o registro, primeiro peço que eles façam com a tampinha e depois com o cálculo. Aí eu tento levar essa ideia pra a multiplicação e divisão (P3).

Concordamos com o P2 quando o mesmo afirma que os alunos possuem conhecimento a respeito de números negativos que foram formados a partir de suas próprias experiências de vida. Com relação a isso, os PCN afirmam que a partir de suas experiências com seus familiares, os alunos desenvolvem, nos anos anteriores, uma noção intuitiva de números negativos.

Na fala do P2, evidenciamos a valorização à memorização das regras de sinais. Tratamos essa atitude como possível geradora de obstáculo. Entretanto, o professor pode trabalhar a multiplicação de maneira mais dinâmica, fazendo com que os alunos não se concentrem somente nas regras dos sinais, por exemplo, utilizando a tabela de multiplicação sugerida nos PCN que podem permitir a observação de regularidades e padrões. Apresentamos no próximo tópico deste capítulo uma série de possíveis atividades para suprir essa necessidade.

Quanto às operações de adição e subtração de números inteiros, consideramos as iniciativas desses dois professores como pertinentes: deslocamentos na reta numérica (P2), também recomendada pelos PCN; e o trabalho com tampinhas azuis (família positiva) e vermelhas (família negativa) (P3) combinado com o registro em caderno dos resultados da manipulação, pois a utilização de material concreto e consequentemente dos registros pode fazer com que o aluno atribua mais significado aos números negativos e ter uma compreensão maior das operações realizadas. O P3 apresenta ainda mais uma metodologia, a nosso ver adequada, trata-se de um desenho chamado Ciberchase para se fazer a primeira abordagem de números inteiros em sala, pois ao registrar os procedimentos feitos, os alunos poderão ter uma compreensão maior das operações realizadas.

Os professores 4 e 5 tratam como grande desafio fazer com que o aluno compreenda que agora será possível fazer uma operação como por exemplo 7 – 10. Para tentar superar esse obstáculo, os professores relatam o seguinte:

> [...] Trazer situações do dia a dia dos alunos, questões de temperatura, nível do mar, saldo de gols, saldo de conta corrente, transações bancárias, ... trazer situações o mais próximo que puder da realidade do aluno para mostrar as relações com os inteiros. Depois, trabalhar com a reta para que os alunos possam estar operando, comparando, os números (P4).
>
> [...] Lembro de uma vez que usei um ábaco na escola, e comecei a colocar as peças e tirar para o aluno entender esse processo de adição e subtração de inteiros, por que quando falava em número positivo acrescentava e número negativo retirava... aí o aluno percebia quanto que sobrou que era o resultado da operação (P5).

Entendemos a abordagem do P4 como pertinente. Nesse sentido, os PCN orientam que os números inteiros devem ser introduzidos através de experiências que o aluno traz de seu cotidiano, o que acreditamos ser feito a partir dessas situações relatadas por esse professor. O P4 também afirma que é importante utilizar a reta numérica. O P5 também faz uso de uma metodologia sugerida pelos PCN, a saber, o ábaco dos inteiros, esse documento indica que para a iniciação das operações de adição e subtração de números inteiros, além do uso da reta numérica, pode-se utilizar o ábaco, pois a partir dele os alunos podem visualizar quantidades positivas e negativas e situações associadas ao zero.

O P7 em sua fala afirma que a metodologia de dívida (positivo é o dinheiro que está no bolso e negativo é o que está devendo) que ele adota para se trabalhar com a adição não serve para a multiplicação. Esse discurso do professor nos remete a um obstáculo didático de origem didática trazido por Machado (2008), a saber, o desejo de um modelo unificante: o modelo comercial, que facilita a compreensão da adição dos inteiros, é um obstáculo para a multiplicação.

O P8 refere-se a utilização do sinal de menos como a principal dificuldade apresentada pelo aluno.

> Eu vejo a dificuldade do aluno entender o por que do sinal de negativo no número, se você trazer simplesmente uma abordagem dos inteiros e não dizer o que é que aquele sinal de menos representa naquele número... eu acho que ali vai gerar um obstáculo naquele aluno (P8).

Para trabalhar com essa situação (superar essa dificuldade) o P8 afirmou fazer uso da História da Matemática, relatando que procura fazer uma construção do conhecimento, dizendo como foi que surgiu os números negativos e por que é utilizado o sinal de menos para representá-lo. Segundo os PCN, a História da Matemática pode ser utilizada como um recurso (caminho) propício para se *fazer matemática* trabalhar com os números negativos, pois a partir desse recurso o professor pode mostrar como foi que surgiu a necessidade de se estabelecer novos números.

Analisando o discurso do P11, percebemos que o mesmo se referiu a utilização de Jogos e Resolução de Problemas para se trabalhar com números inteiros, consideramos ambas as metodologias descritas por esse professor com pertinentes no trabalho com esse conteúdo, pois segundo os PCN, os jogos podem ser um caminho para se *fazer matemática* assim como a Resolução de Problemas pode servir como ponto de partida para o ensino da matemática. A seguir trazemos a fala desse professor na qual o mesmo relata como faz uso dessas metodologias.

> A ideia para superar aquelas situações que já falei. Eu uso jogos, só que a ideia do jogo, não é o jogo pelo jogo, é propor o jogo e depois trabalhar problemas referentes ao jogo, dar a oportunidade dos alunos refletirem sobre o jogo e propor problemas sobre o jogo, por que a partir daí ele não vai ter só entendimento do jogo, mas também o entendimento dos conceitos trabalhados. Então trabalho dentro da metodologia da resolução de problemas, a ideia de iniciar com um problema pra construir uma nova ideia e com os jogos que gosto de trabalhar quando vou abordar números inteiros (P11).

9. Qual é a sua opinião sobre o uso do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) como alternativa metodológica no ensino da Matemática? Você acha que o LEM pode contribuir na identificação e superação de obstáculos epistemológicos e didáticos? Por quê?

Com relação a essa questão, todos os professores deram sua opinião em relação ao LEM e explicaram por que acreditam que o mesmo pode contribuir na identificação e superação de obstáculos epistemológicos e didáticos. A seguir trazemos as partes mais relevantes das falas desses professores:

> Eu sempre concordei com o laboratório de matemática, por que assim... eu sempre consegui fazer com que meus alunos compreendessem mais o conteúdo na prática do que na teoria. Sempre quando eu levo alguma coisa

na prática eles conseguem entender mais do que na teoria. Através do laboratório a gente consegue trabalhar na prática o que os alunos ver na teoria. Então eu acho que ele pode contribuir bastante na superação dos obstáculos (P1).

Pode. No LEM você tem a possibilidade de ter contato com material concreto, você tem a possibilidade de construir o material a partir de um conceito dado, tem várias abordagens, tem a possibilidade do jogo, do lúdico, trazer... conseguir colocar um conceito a partir de um jogo estratégico. Acredito que contribui sim. Eu acredito que o LEM dentro do LEM pode ser um obstáculo, por que pode ser que tenha coisa que foi produzida mas não está tão bem feita, pois tem que ter a conexão, por exemplo, se for um jogo, tem que ter a conexão do jogo com o conteúdo. Digo isso, por que uma vez na graduação... percebi que no laboratório tinha alguns materiais que estavam com alguns detalhes equivocados em relação a conexão com o conteúdo e se fossem aplicado pelos professores e os mesmos não percebessem iria gerar obstáculos a aprendizagem (P2).

Eu sou um cara que sou muito a favor do laboratório, pois ele é fundamental nas aulas de matemática, todo professor deve trabalhar com o LEM, se ele puder montar um LEM para ter sempre esse apoio, por que o jogo ou qualquer material não vai substituir a aula, ele vai servir como apoio. Se eu encontrar uma dificuldade no aluno, a partir do LEM posso encontrar algo lúdico pra suprir essa necessidade do aluno, ... primeiro tem que identificar o obstáculo e depois procurar uma ferramenta do laboratório pra suprir essa dificuldade. Acho que o laboratório de matemática pode contribuir nesse contexto. É a partir do contato que o aluno tem com o material que ele começa a ver a matemática de outra forma, é como se o professor estivesse explicando o conteúdo e o aluno pegando nele ali, refletindo, percebendo onde está sendo aplicado esse conteúdo. Uma das características do LEM é o estímulo. Ele estimula o conhecimento do aluno, estimula ele a entender como funciona aquele conteúdo e para que funciona, que momentos da vida cotidiana ele pode ser usado e como pode ser usado (P3).

Eu acho que o LEM pode ser de fundamental importância, porque tem muitos conteúdos que a gente pode está trabalhando a partir dele. Um exemplo, é... quando vamos explicar sólidos para os alunos, é bem mais interessante... trabalhar com os materiais didáticos para mostrar aos alunos as diferenças. Só no quadro ou no livro o aluno vai sentir dificuldade em entender os tamanhos e os lados, as faces, pode não perceber que tem lados paralelos, principalmente se for o primeiro contato dele com os sólidos. Quando trabalhei com sólidos através de materiais concretos percebi... que deixou a aula mais dinâmica e até no dia a dia eu perguntava se tinha um sólido parecido com aquele e eles já respondiam, por que eles já estavam vendo aquele sólido e já imaginando no cotidiano, por que no quadro tava somente o desenho e o aluno pegando no sólido, com certeza ele vai ter mais facilidade de caracterizá-lo. O laboratório pode deixar as aulas bem mais dinâmicas e colaborar para uma aprendizagem com compreensão. (P4).

Sim, o LEM assim como qualquer outro laboratório, deve existir na escola de forma funcional, por que através dele o aluno consegue vivenciar situações que ele as vezes imagina e as vezes nem se quer imagina por que tem dificuldade de pensar de forma abstrata. Então, o LEM é viável para que aulas práticas aconteçam com mais frequência, aulas práticas e menos teóricas para ser trabalhadas situações de obstáculos (P6).

> O LEM é muito importante, acredito que o próprio aluno pode participar na construção do laboratório, para que ele possa vivenciar os diversos materiais que poderiam ajudar ele na construção do conhecimento. Ai vejo que o laboratório pode contribuir sim com o ensino da matemática, com o aluno e com o professor principalmente, por que... o professor pode usar os materiais produzidos pra fazer uma didática diferenciada que venha chamar a atenção do aluno, que desperte nele uma necessidade de aprender matemática, pra ele ver ela de uma forma interessante.
> Um exemplo é no trabalho com sólidos geométricos, o professor explica o que é arestas e pede que os alunos encontrem as arestas de um sólido que está no livro ou no quadro... certo..., o aluno vai sentir dificuldades, isso vai trazer um obstáculo a aprendizagem, porém se o professor usar canudos, por exemplo, para o aluno construir o sólido e depois ver que construiu o sólido com um determinado número de palitos, onde esse número é a quantidade de arestas desse sólido. Acho que dessa forma o aluno vai entender melhor e vai construir o conhecimento. Você fez com que o aluno construísse o conhecimento, fez com que ele não se deparasse com obstáculos e você evita que eles apareçam (P8).

> Sim, é importante, por que o LEM tem jogos e materiais didáticos que podem levar o lúdico para trabalhar o conteúdo, para sanar as dificuldades apresentadas pelos alunos. Acho que se os professores conseguissem um espaço da escola que estivesse desocupado para transformar em um LEM seria muito importante, ... mesmo se for um lugar pequeno... seria importante por que acho que mesmo nessas condições iria colaborar muito para elevar o nível de aprendizado dos alunos (P10).

O P1 defende que através da utilização de materiais contidos no LEM o aluno irá compreender melhor o conteúdo trabalhado, pois terá a oportunidade de construir o mesmo através da prática.

Os professores P4 e P8 acreditam que para se trabalhar com sólidos geométricos em sala é importante a utilização de materiais concretos. Segundo esses professores, a aula pode ficar mais dinâmica e o aluno poderá ter uma aprendizagem com mais compressão. Para esses professores o aluno terá dificuldade m visualizar os sólidos só no quadro ou no livro didático, pois o desenho pode não trazer as verdadeiras características do sólido estudado. Essa fala dos professores nos remete a Lorenzato (2006, p. 27), que afirma que "[...] apesar de todas as contribuições da perspectiva, ela não retrata as reais dimensões e posições dos lados e faces dos objetos, uma vez que ela camufla o perpendicularismo e o paralelismo laterais".

O P3 evidencia em sua fala que o recurso didático utilizado a partir do LEM não irá substituir a aula e sim servir como apoio para a mesma. Para ele, a partir do momento que o aluno tem contato com os materiais contidos no LEM ele passa a enxergar a matemática de maneira diferente e é estimulado a aprender.

Para o P6, será através do LEM que o aluno terá a chance de ter aulas mais práticas e menos teóricas possibilitando que o mesmo possa pensar abstratamente. Concordamos com esse professor, pois “[...] para se chegar no abstrato, é preciso partir do concreto.” (LORENZATO, 2006, p. 22).

Em sua fala, o P10 faz referência a importância da escola possuir um LEM, mesmo que este não esteja em condições precárias. Esse professor acredita que o fato de possuir um LEM, por mais pequeno ou simples que ele seja, poderia colaborar para a aprendizagem dos alunos. Concordamos com esse professor, pois “O LEM, mesmo em condições desfavoráveis, pode tornar o trabalho altamente gratificante para o professor e a aprendizagem compreensiva e agradável para o aluno” (LORENZATO, 2006, p. 7). Nesse sentido, P8 acredita que o próprio aluno pode participar da construção de um LEM, afirmando que através dessa participação o aluno poderá ter contato direto com os materiais que irão ajudar ele na construção do seu conhecimento.

O P2 acrescenta uma reflexão importante em sua fala, a saber, a possibilidade do LEM dentro do LEM ser um obstáculo. Esse professor justifica essa afirmação relatando que existe a possibilidade de algum recurso do LEM não ter sido bem construído (elaborado). Para esse professor, para que um recurso didático seja bem elaborado, este precisa ter conexão com o conteúdo abordado, caso contrário, pode gerar obstáculo. Concordamos com esse professor, pois em caso de um recurso didático ser elaborado inadequadamente, este será gerador de obstáculo didático de origem didática, ou seja, a escolha desse professor em trabalhar com este recurso revela-se um obstáculo didático. Tudo isso nos faz refletir a respeito da importância do professor fazer uma análise criteriosa a cerca do recurso que ele considera eficaz para levar para a sala de aula.

10. Em relação aos números inteiros, que atividades podem ser promovidas através do LEM que ajudaria a identificar e superar obstáculos epistemológicos e didáticos?

Antes de iniciarmos a análise das respostas dadas pelos professores em relação a essa questão. Vale ressaltarmos que a mesma já foi parcialmente respondida nas questões 4 e 5 por alguns dos professores, onde os mesmos citaram algumas situações de obstáculos que aparecem no ensino desse conteúdo na questão 4 e mencionaram na questão 5 quais foram as atividades com intuito de superá-los.

Com relação a esse questionamento, oito professores responderam e o restante (3) afirmaram não lembrar de alguma situação (ou 8de mais situações). A seguir, trazemos as falas de sete desses professores:

> Uma coisa que eu vejo no LEM de um modo geral é aqueles jogos onde você avança casas, volta casas, aquele jogo pode ser adaptado para trabalhar

números inteiros. Acho que dá até para os alunos participarem da construção, se eles participassem da construção e se se eles associassem ajudaria. Outro jogo, que seria interessante, seria você dá um dado e o aluno avançar tantas casas e aí ele iria fazendo uma operação, o resultado da operação dizia quantas casas ele poderia avançar, permanecer ou recuar. Você trabalharia a soma de números inteiros, ideia de opostos... Aí funcionaria (P2).

Já dei exemplos na pergunta que você já fez antes. Mas vou dar outro aqui. Eu uso a caixa de ovos, coloco como uma trilha, quando o aluno já tá entendendo como acontece as operações com inteiros... aí eu faço isso, faço a trilha dos inteiros, peço que tragam caixa de ovos, eles que constroem, pra ele ver na prática como se constrói o jogo, por que é importante que o aluno participe da construção, por que aí... ele participa refletindo... professor aqui vou colocar um número negativo... um positivo... um desafio professor... aí o professor pergunta: qual seria o desafio?... é positivo ou negativo? Por que? É interessante colocar cartinhas dizendo: ande duas casas... ande três casas... volte o dobro... e assim ia (P3).

Bom... algumas atividades como: ábaco que já falei, jogos, trilhas, jogos de trilhas, aonde tem que avançar 3 casas, 4 casas, esse tipo de jogos ajuda ao aluno compreender melhor os conceitos de números inteiros, os números que são maior que o outro, os que são menores, dependendo onde ele está no tabuleiro. E, principalmente pra trabalhar a visualização dos inteiros, que é muito importante, por isso é importante utilizar instrumentos que estão no LEM (P5).

Eu até já participei de um LEM, na Universidade de Rio Tinto – PB. Foi aí que tive meu primeiro contato com o LEM, pois na minha graduação não tinha laboratório. Aí quando vi tudo aquilo fiquei encantada, pois lá tinha muitas coisas, jogos, vários materiais concretos pra trabalhar muitos conteúdos de forma prática. Lembro de um que juntava fichas e via que se tornava positivo no final, muito interessante, pra fazer com os alunos, por que aí ele ia ver concretamente por que que dois números negativos multiplicados ia se tornar positivo. Muito interessante, a cor vermelha era negativo e a azul era positivo... o aluno ia somando... por que a multiplicação é soma... aí quando ia somando notava (P7).

Tem muitas atividades que podem ser exploradas para se trabalhar com números inteiros em sala. Eu uso uma do carrinho. Pego aqueles carrinhos de brinquedo do meu filho... aqueles bem pequenos, coloco uma reta e peço pra eles andarem com o carro na reta. Outra atividade que uso é a da escada, uso uma escada e peço que eles subam e desçam. Aí pergunto: quem tá mais alto? E quem tá mais baixo? E assim vou explicando números inteiros (P9).

Tem vários jogos, já vi um que usava garrafas... boliche... tem o jogo do sobe e desce que já falei antes... o jogo pescaria de potências pode ser adaptado pra trabalhar números inteiros, jogos de trilha (P10).

Tem um jogo que uso que acho muito bom... Matix... esse jogo é ótimo para trabalhar adição e subtração de números inteiros e pode ser adaptado para se trabalhar as outras operações. Acho que seria interessante também montar um conjunto de problemas para os alunos responderem, uma caixa e nela colocava vários problemas (P11).

De maneira geral, percebemos a importância do uso de atividades relativas ao laboratório de matemática na tentativa de professores contribuir com os alunos para superar as dificuldades com conteúdo de números inteiros.

Os professores 2, 3, 5, 10 e 11 fizeram referência a jogos de trilha (tabuleiro) que envolvem a lógica de avançar e recuar casas. Segundo esses professores, estes jogos podem ajudar o aluno a compreender melhor o conceito de números inteiros e a comparação desses números pode ser feita de maneira mais compreensível. O P5 acrescenta mencionando que jogos com essa característica são muito importantes, pois trabalham muito a visualização dos números inteiros. Entendemos que atividades (jogos) desse tipo podem fazer com que o aluno reconheça o conjunto dos números inteiros, compreendendo a simetria e a comparação entre os números.

Os professores P2 e P3 acreditam que o aluno pode participar da construção do jogo, o P2 alega que seria muito importante essa participação e mais ainda seria importante se o aluno conseguisse fazer a associação do conteúdo com o jogo e vice-versa. O P3 faz referência que a importância está porque ao construir, o aluno irá aprender mais, pois estará interagindo, refletindo, analisando e indagando, tanto com seus colegas, quanto com o professor e até mesmo sozinho. Concordamos com as afirmações desses professores, pois essa troca de informações (pontos de vista) é importante, como já foi dito anteriormente.

O P11 trouxe uma proposta importante, a saber, a caixa de problemas, nela seriam colocadas várias situações problemas envolvendo o conteúdo abordado. Entendemos essa ideia trazida pelo professor, como pertinente pelo fato de Lorenzato (2006) afirmar que pode estar contido no LEM uma diversidade de materiais didáticos, instrumentos e equipamentos. Esse autor cita uma lista de base para a constituição de um LEM, nessa lista, encontram-se os problemas interessantes. Logo, tratamos essa ideia do P11 como propícia para o trabalho com números inteiros.

Duas ideias interessantes foram mencionadas pelo P9, a saber, a utilização de um carro de brinquedo para fazer deslocamentos na reta numérica e a utilização de uma escada onde os alunos poderiam subir e descer. Entendemos essas duas atividades propostas por esse professor como pertinentes no trabalho com números inteiros, pois os PCN orientam que o trabalho com números inteiros deve ser baseado em experiências do cotidiano dos alunos. Diante disso, o aluno dará mais sentido aos números negativos.

Através da fala do P7, percebemos o quanto é importante a existência do LEM numa instituição de ensino superior de formação de professor, e que por sua vez falta na maioria das escolas do ensino básico, o que se trata de um grande problema. Lorezanto (2006) faz referência a essa ausência, afirmando que:

> [...] não há argumento que justifique a ausência do LEM nas instituições responsáveis pela formação de professores, pois é nelas que os professores devem aprender a utilizar os materiais de ensino; é inconcebível um bom curso de formação de professores de matemática sem LEM (LORENZATO, 2006, p. 10).

Esse professor, em seu discurso, relata que lembra de um material didático que trabalhava a multiplicação de números inteiros, a saber, as fichas azuis e vermelhas. Segundo esse professor, com a utilização dessas fichas o aluno poderia enxergar porque que a multiplicação de dois números negativos resultava em um número inteiro positivo. Pelo que entendemos, esse professor se referiu ao kit "Operações com números inteiros", que se trata de um Kit que está disponível na CDCC (Centro de Divulgação Científica e Cultural), que tem por finalidade trabalhar operações com números inteiros através da manipulação de peças com aparências às de dominó. Trazemos esse Kit em nosso trabalho por considerarmos esse material como favorável, pois poderá facilitar a compreensão do aluno na hora de elaborar regras para operar com inteiros, principalmente para a multiplicação, pois como o P7 mencionou, não é tarefa fácil para o aluno reconhecer que a multiplicação de dois números negativos resulte em um positivo. Esse Kit é uma das propostas trazidas nesse trabalho com o intuito de identificar e superar obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de adição, subtração, multiplicação de números inteiros.

Através dessas entrevistas, podemos notar o quanto os obstáculos epistemológicos e didáticos refletem-se na prática docente dos professores. Através da mesma, percebemos a importância dos professores terem conhecimento desse conceito. A maioria dos professores se sentiram agradecidos pelo momento de aprendizado oportunizado pela entrevista, separamos algumas falas que indicam isso:

> Eu que agradeço, por que esse conceito que você trouxe hoje é muito importante. Foi uma manhã de grande aprendizado para mim (P8).
>
> Quem agradece sou eu rapaz... é vivendo e aprendendo (P9).
>
> Agradeço muito também viu... e quando o trabalho estiver pronto... mande pra mim por favor... por que isso muito me interessa... posso melhorar minhas metodologias de ensino e tentar nas aulas (P7).

De modo geral, notamos que os professores reconhecem que é importante ter conhecimento dos conceitos apresentados. Algumas experiências vivenciadas e descritas por eles possibilitaram muitas reflexões, diante dos questionamentos feitos na entrevista.

Vale ressaltarmos que o papel das entrevistas nessa pesquisa foi de perceber até que ponto os discursos dos professores, poderiam promover acréscimos e alterações na proposta de atividades que estávamos elaborando.

Contudo, os dados colhidos foram de extrema importância, e, inclusive, podem ser usados em futuras pesquisas.

No próximo capítulo de nosso trabalho apresentamos o conjunto de propostas que entendemos serem propícias para o trabalho com números inteiros almejando a identificação e superação dos obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de números inteiros.

4 CONJUNTO DE PROPOSTAS REFERENTES NO LEM COMO RECURSOS PEDAGÓGICOS QUE PROMOVAM A IDENTIFICAÇÃO E A SUPERAÇÃO DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E DIDÁTICOS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS

Primeiramente, apresentamos um quadro com alguns exemplos/situações de obstáculos epistemológicos e didáticos. Resolvemos agir dessa forma, ou seja, apresentar exemplos/situações de obstáculos antes do conjunto de propostas para superá-los, por entender que seria mais compreensível para o leitor fazer a associação.

Quadro 3 - Exemplos/situações dos obstáculos epistemológicos e didáticos contemplados na teoria.

Obstáculo didático	**Origem**	**Situação**
	Epistemológica	O conjunto dos números naturais é obstáculo para a aprendizagem dos números decimais. Veja alguns exemplos: • A relação “o quadrado de um número natural é sempre maior ou igual a ele” que é tida como certa para o aluno, pode ser transferida para os números decimais. • A incapacidade de encontrar um número decimal entre 3,25 e 3,26, numa nítida transposição do conceito de sucessor, conceito esse existente no contexto dos números naturais e transposto para os números decimais, ou seja, “todo número natural tem um sucessor”. • A “concepção” de que “multiplicar sempre aumenta e dividir sempre diminui”. • O resultado de uma divisão de um número inteiro positivo por um número racional que seja menor do que um, tem como quociente um número maior do que o dividendo. No entanto, se conclui normalmente de maneira intuitiva em um cotidiano não pensado, que o resultado da divisão é sempre menor do que o dividendo, o que acaba contrariando o caso da divisão de um número inteiro positivo por um número racional menor que um. • A ideia que a soma de dois números diferentes de zero é sempre maior que as duas parcelas da adição. Essa ideia entra em contradição quando se trabalha com números decimais.
	Epistemológica	O conjunto dos números naturais é obstáculo para a aprendizagem dos números inteiros. • A incapacidade de encontrar um número que seja o sucessor de um número inteiro negativo, numa nítida transposição do conceito de sucessor, conceito esse existente no contexto dos números naturais e transposto para os números inteiros. • A “concepção” de que “o produto entre dois números será sempre maior ou igual aos fatores da multiplicação, ou seja, que multiplicar sempre aumenta”. • A concepção que dividir sempre diminui: o resultado de uma divisão de um número inteiro por um outro número inteiro, pode ter como quociente um número maior do que o dividendo. O que se tratando de números naturais não acontece. • A lógica dos números inteiros é contrária a dos naturais. (A ideia que a soma de dois números diferente de zero é sempre maior que as duas parcelas da adição). • Conferir significado às quantidades negativas.

		• Reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido. • Reconhecer diferentes papéis para o zero, a saber, zero absoluto e zero origem. • Perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais – por exemplo, é possível "adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado", como também é possível "subtrair um número de 2 e obter 9". • Inaptidão para manipular quantidades isoladas. • Unificação da reta numerada. • Estagnação no estágio das operações concretas. É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos. • Desejo de um modelo unificador que justifique a estrutura aditiva e multiplicativa.
	Epistemológica	A concepção dos números racionais e dos decimais como razões, ou ainda operadores lineares sobre o conjunto dos racionais.
	Didática	O problema de ligar os números decimais/racionais somente às medidas, a objetos ou ao sistema métrico pode levar os alunos a pensarem neles como uma simples alteração de unidades. Por exemplo, a unidade 3,25 m é pensada como 325 cm expressos em metros.
	Didática	A abordagem fragmentada dos números decimais e fracionários.
	Epistemológica	Do produto de dois números inteiros positivos que é sempre maior ou igual do que cada uma das parcelas. Porém, essa proposição nem sempre é verdadeira ao se tratar, por exemplo, do caso do produto de duas frações unitárias que é menor do que cada parcela.
	Epistemológica	O conjunto dos números naturais é obstáculo para a aprendizagem dos números fracionários. Veja alguns exemplos: • Dificuldade em aceitar as frações como números. • Só os números naturais tem status de número. • A negação da necessidade das quantidades fracionárias.
	Didática	Quando se faz intervir o uso de uma representação através de um ponto de vista. A tarefa de realizar ou fazer a leitura desse desenho não se trata de uma atividade clara. Por exemplo, quando um cubo é representado em uma perspectiva paralela.
	Didática	A atividade de medida dos segmentos e as considerações usuais a esse respeito tem sido evidenciadas como obstáculos didáticos à compreensão da equipotência de segmentos considerados como conjuntos de pontos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Vale ressaltar que as propostas que serão apresentadas a seguir são direcionadas aos obstáculos epistemológicos e didáticos relacionados aos números inteiros.

Apresentamos nessa seção um conjunto de propostas/atividades a partir de materiais didáticos manipuláveis e jogos matemáticos que envolvem a exploração de números inteiros. Entendemos que essas propostas/atividades podem contribuir na identificação e superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo.

4.1 Material manipulável: movimentação na conta corrente.

Para evidenciarmos a utilidade dos números negativos aplicado ao cotidiano, algumas situações podem ser trabalhadas, principalmente aquelas que dramatizam situações da vida real, como atividades nas quais as respostas são interpretativas, feitas por meio de números inteiros, positivos e negativos. Estas, levam os alunos a reconhecer a existência dos números positivos e negativos usados na representação de situações reais. Através de situações como essa que será citada a seguir os alunos poderão perceber que os números negativos surgiram da necessidade de contemplar situações que não era possível com a utilização dos números naturais. É por meio de situações desse tipo que podemos causar um enfrentamento ao possível obstáculo epistemológico citado por Glaeser (2010), que se trata de dar significado às quantidades negativas.

A atividade proposta é de dramatizar uma situação da vida real através de materiais que podem ser facilmente produzidos, a saber, o dinheiro de mentira, uma escala numérica comtemplando números positivos e negativos na qual será indicada a movimentação na conta corrente e duas caixas (uma representando uma conta corrente e outra representando o dinheiro que pertence ao banco).

Figura 2 - Materiais didáticos (Dinheiro de mentira, duas caixas e uma escala numérica).

Fonte: https://www.google.com.br/

Nessa atividade o aluno pode dramatizar uma situação de operação bancária, simulando a ação de depositar e retirar os valores de uma conta corrente. Por meio dessas dramatizações os alunos podem esclarecer dúvidas a respeito de números negativos. Com esses materiais, podemos tornar o ensino mais atrativo e ao mesmo tempo trabalhar situações reais como, por exemplo: João tem um saldo de 100 reais na sua conta corrente. Qual será o saldo, se ele depositar 200 reais? E se ele retirar 100 reais? E se ele depositar 150 reais? E se ele retirar 120 reais?

Diante dessa situação o aluno pode representar uma retirada ou um depósito. *Retirada*: ele retira da sua caixa, que representa a sua conta corrente, um determinado valor. Se o valor a retirar for maior do que ele tiver na sua caixa, então ele deve retirar o que falta da caixa que representa o banco, ou seja, o aluno ficará devendo ao banco, caracterizando assim um saldo negativo. Já em relação ao *depósito*, o aluno colocará cédulas na caixa que representa a sua conta corrente, seja para pagar o que deve ao banco como para deixar o excedente em conta corrente.

Paralela a toda essa movimentação, o professor (também pode ser feito por um outro aluno) deve registrar no quadro cada passo dessa movimentação através da escala numérica, permitindo assim um debate com uma troca de posições com interferência do professor, sempre evidenciando o zero, mostrando a importância dele como ponto de referência para números positivos e negativos. Entendemos que agir dessa forma proporcionará um equilíbrio entre o papel do professor e do aluno, o que segundo Brousseau trata-se de uma das estratégias do conflito cognitivo, que por sua vez trata-se de um método para lidar com os obstáculos.

Ressaltamos que várias outras situações poderiam ser trabalhadas a partir desse material didático. Seguem algumas situações problemas que podem ser trabalhadas. Além do mais, os alunos também podem criar outras para que os seus próprios colegas possam resolver.

- Teodoro tirou o extrato de sua conta corrente e verificou que havia R$ 1800,00. Ele pagou contas com três cheques: um de R$ 300,00 para o mercado, outro de R$ 500,00 para a prestação da moto e outro de R$ 1200,00 para a prestação do carro. Qual é o valor que Teodoro deve depositar na conta para, após os descontos, não ficar com saldo negativo?

- Seu Zé depositou R$ 240,00 em sua conta corrente, que estava com saldo devedor de R$ 540,00. Qual o novo saldo da conta corrente de Seu Zé?

- Qual será o novo saldo de Galvan se ele tinha saldo positivo de é R$ 200,00 e fez uma retirada de R$ 320,00?

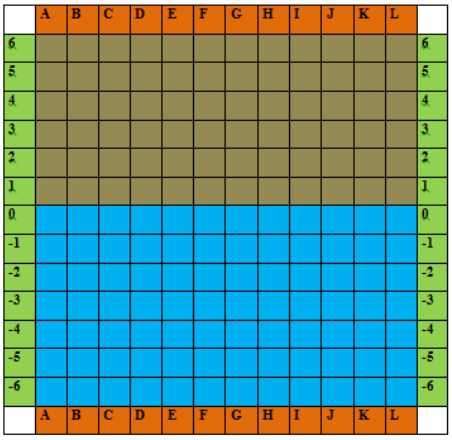
A partir de situações como essas o professor tanto colabora para ajudar os alunos a dar significado aos valores observados no resultado de cada movimentação, quanto contempla as orientações dos PCN (1998), que indicam que os estudos de números inteiros precisam acontecer a partir de situações no campo aditivo, cuja resolução não seja possível através da utilização de números naturais.

4.2 Jogo matemático: batalha naval dos números inteiros

Esse jogo ajuda a reconhecer a existência de números inteiros positivos e negativos e o conjunto dos números inteiros. Através desse jogo, os alunos podem localizar a posição dos números inteiros numa reta numérica além de representá-los. O desenvolvimento do cálculo mental e do raciocínio lógico, além da identificação de um par ordenado também são trabalhados nesse jogo.

Tratamos de um jogo muito simples de ser confeccionado, ele é composto por duas malhas quadriculadas, ou seja, dois (tabuleiros) para cada jogador, ou dupla de jogadores, contendo em cada um deles a reta numérica que vai do número -6 até o número +6 e as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L (figura 3).

Figura 3 - Tabuleiro do jogo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

As embarcações do jogo são representadas por 12 peças, cada tipo de embarcação recebe uma cor diferente (figura 4) e é formada por uma quantidade de quadradinhos diferentes. Sendo elas: 1 encouraçado (possui quatro quadradinhos na cor amarela); 4 submarinos (possui três quadradinhos na cor verde); 4 hidroaviões (possui dois quadradinhos na cor vermelha); 3 destróyers (possui um quadradinho na cor preta).

Figura 4 - Representações das embarcações.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

As regras são as seguintes:

1 - O jogador ou dupla de jogadores não poderá ver o tabuleiro de seu adversário, para isso, algo deve ser colocado entre os jogadores para evitar que isso aconteça, ou então, podem jogar a uma certa distância que evite que isso aconteça.

2 - Cada jogador ou dupla de jogadores ficará com dois tabuleiros, o primeiro para localizar suas embarcações e o segundo para marcar os palpites (tiros) que vão dar, tentando atingir as embarcações do seu oponente.

3 - Nesse tabuleiro, a parte colorida de marrom, representará a parte acima do nível do mar e a parte colorida de azul, ou seja, a parte do nível do mar para baixo representará a água do mar.

4 - Cada jogador ou dupla de jogadores deve distribuir os desenhos de suas embarcações no primeiro tabuleiro, marcando os quadrados que estarão ancoradas as suas embarcações. No segundo tabuleiro, deve marcar os tiros dados.

5 - As embarcações devem ocupar os quadrados na extensão de uma linha ou coluna. Por exemplo, um submarino deve ocupar três quadrados consecutivos, em uma linha ou em uma coluna.

6 - O encouraçado e os destróyers só podem ocupar quadrados referentes ao nível do mar, ou seja, quadrados que estejam na linha do número zero. O encouraçado pode ocupar uma linha ou coluna, contanto que pelo menos um dos quatro quadradinhos que o compõem (uma parte de sua peça) esteja na linha do zero. Já os hidroaviões podem ocupar tanto a linha do número zero (nível do mar), quanto os quadrados acima do nível do mar. O hidroavião somente poderá ocupar quadradinhos abaixo do nível do mar se pelo menos um de seus três quadradinhos (uma parte de sua peça) estiver localizado na linha referente ao número zero (nível do mar). Os submarinos podem ocupar tanto o nível do mar (linha do número zero) quanto os quadrados referentes abaixo do nível mar (abaixo de zero). Ele só poderá ocupar alguns quadrados acima do nível do mar se pelo menos um dos quadradinhos que o compõe (uma parte de sua peça), ocupar um quadrado do nível do mar (linha do número zero).

7 - Não é permitido blefar e nem que duas embarcações se toquem ou se sobreponham. Nem revelar ao oponente a localização das embarcações.

8 - Fica livre a decisão sobre o critério de quem começa o jogo, por exemplo, no par ou ímpar.

9 - Cada jogador ou dupla de jogadores, na sua vez, indica um quadradinho (atira). O tiro é dado pela indicação do par ordenado, ou seja, (número e letra), que funcionam como endereços dos quadradinhos da malha. Ao fazer isso, o jogador ou dupla de jogadores estarão tentando descobrir a posição de uma das embarcações de seu adversário.

10 - Se o jogador ou dupla de jogadores falar o par ordenado errado perde a vez de jogar.

11 - Se o tiro acertar a água, passa a vez para o oponente atirar. Se acertar a embarcação pode atirar novamente e assim sucessivamente até acertar a água.
12 - A embarcação que está sobre os quadrados escolhidos deve ser entregue ao adversário, que a colocará no quadradinho correspondente no seu segundo tabuleiro.
13 - Os tiros precisam acertar todos os quadradinhos que formam a embarcação (peça) do adversário para afundá-la. Cada tiro errado é indicado pelo adversário com a palavra “errou”. Os tiros que acertam o alvo também são indicados pelo adversário, que diz o nome da embarcação atingida (quando acertar pelo menos um quadradinho que a compõe) ou “afundou” (quando o último quadradinho que compõe a peça da embarcação é atingido).
14 - Não pode colocar embarcações sobre a coluna de números e nem na linha de letras.
15 - Cada embarcação só afundará quando todos os quadradinhos que a representam forem atingidos.
16 - Ganha o jogador ou dupla de jogadores que afundar primeiro toda a esquadra do adversário.

Através desse jogo, considerando que cada quadrado equivale a um metro, podemos criar várias situações problemas que podem fazer com que o aluno reconheça a existência de números inteiros positivos e negativos em situações reais, atribuindo significado a essas quantidades. Algumas situações podem ser trabalhadas, como:

- Jogando o jogo Batalha Naval dos Números Inteiros, Marcos estava na sua vez de escolher um quadrado (atirar). Ele escolheu o número -5 e a letra J, seu adversário avisou que ele atingiu um quadrado que compõe um submarino, ou seja, uma parte da peça de um submarino. Diante disso, Marcos continuou a atirar e escolheu os seguintes pares ordenados (-5, K) e (-5, L) conseguindo afundar totalmente essa embarcação. Esse submarino estava acima ou abaixo do nível do mar? Quantos metros?

- Quantos metros há entre 70 m abaixo do nível do mar e 30 m acima do nível do mar?

- Suponha que em um instante, um hidroavião e um submarino estão alinhados verticalmente, o hidroavião está voando a uma altitude de 13 m em relação ao nível do mar (+13 m); e o submarino, navega a 40 m de profundidade em relação ao nível do mar (-40 m). Qual é a distância entre o hidroavião e o submarino nesse instante?

Nessas duas últimas questões é interessante que o professor peça para que os alunos desenhem uma escala numérica para facilitar a compreensão da representação dos números positivos e negativos em relação ao zero. Perguntar aos mesmos qual é a referência tomada nesses dois casos para que consigam fazer as indicações. O professor deve explorar questionamentos que colaborem para que os alunos percebam que a referência é o nível do mar, ou seja, que existe um referencial que tomamos como origem. Tanto no jogo, quanto nas situações propostas pós-jogo, a apresentação da reta numérica vertical tem enorme importância na compreensão, mais tarde, do plano cartesiano. Vale ressaltar para os alunos que a reta numérica não precisa, necessariamente, estar na posição vertical, ela pode estar na posição horizontal, e o aluno precisa compreender essas duas representações.

Como podemos perceber, o jogo abre um *leque* de opções contextualizáveis que podem ser trabalhadas com os alunos em sala de aula. Através de situações como essas, podemos colaborar para a superação de um obstáculo epistemológico citado por Glaeser (2010), que se trata de dar significado às quantidades negativas.

Outros dois obstáculos referidos por Glaeser (2010), que são a ambiguidade dos dois zeros e a unificação da reta, podem ser enfrentados diante de algumas reflexões que podem ser propostas pelo professor, através de atividades realizadas em laboratório de matemática, como construir o próprio tabuleiro do jogo, para que assim os alunos aprendam como construir uma reta numérica.

Dessa forma, o professor deve pedir que os alunos desenhem uma reta *r* e escolham um ponto *O* qualquer da reta, onde a ele deve associar o número 0 (zero), que será denominado como *origem*. A partir daí, o professor orienta que os alunos escolham um ponto dessa reta, acima do ponto *O*, e a esse ponto associar o número +1. Depois, pedir que determinem uma unidade de comprimento e o sentido positivo da reta. Partir de *O*, (associado ao zero), colocar essa unidade de medida 6 vezes, de baixo para cima, ao longo da reta, determinando assim a localização dos pontos associados aos números positivos +2, +3, +4, +5 e +6. Ressaltar que existem mais números acima do +6, porém o tabuleiro do jogo só alcança até o +6. Usando a mesma unidade de comprimento, pedir para que os alunos façam a medição de distâncias abaixo do zero, localizando os números -1, -2, -3, -4, -5 e -6. Ressaltar que da mesma forma que o lado positivo, o negativo também continua indefinidamente, porém estacionamos no -6 pelo fato do tabuleiro do jogo só alcançar até o número -6.

Ao adotarmos o ponto *O*, associando-se a ele o número zero, buscamos diferenciar o zero como ponto de origem do zero em seu valor absoluto, colaborando para o enfrentamento desse primeiro obstáculo. Já ao iniciar a construção da reta a partir do zero e indicar os números positivos acima do zero e os negativos abaixo do zero, ao invés de duas retas contrárias que se sobrepõem, busca-se favorecer a compreensão que os números negativos estão dispostos na mesma reta que os positivos, porém em sentido oposto, buscando superar o obstáculo da unificação da reta citado por Glaeser (2010) assim como também superar um obstáculo previsto nos PCN (1998), a saber, reconhecer a existência de números em dois sentidos, a partir do zero.

4.3 Material didático: prendedor dos inteiros

Nessa atividade, os alunos terão a chance de vivenciar uma situação de localização e disposição dos números inteiros em uma reta numérica.

A atividade é bem simples e os materiais necessários serão apenas 61 prendedores de roupa em madeira, um pedaço de barbante e uma sacola qualquer. Na figura 5, mostramos um exemplo de um número escrito em um prendedor de madeira, um pedaço de barbante e uma sacola.

Figura 5 - Imagem fotográfica de prendedor com número 1 escrito, barbante e sacola.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Cada prendedor representará um número de -30 a +30, estes serão escritos nos prendedores e depois colocados em um saco. Em seguida, basta prender as pontas de um pedaço de barbante (que deverá ter marcas equidistantes) em algum local em que os alunos possam pendurar os prendedores (números). Logo após, cada aluno receberá um prendedor e, um de cada vez, ao aval do professor, irá pendurá-lo no barbante, seguindo o critério de localização observado da reta numérica, observando sempre se o número é maior ou menor que os números que já foram pendurados por seus colegas de turma.

Entendemos que no decorrer dessa atividade, os alunos percebam que seria importante ter uma referência, ou seja, supor que o zero esteja no centro do barbante, haja visto ser o zero a referência entre números positivos e negativos, para que assim a distribuição dos números possa acontecer de forma precisa. Deste modo, esperamos que essa atividade se bem explorada pode auxiliar o aluno na compreensão das propriedades da reta e pode colaborar com a superação de um obstáculo epistemológico observado por Glaeser (2010), que é reconhecer diferentes papéis para o zero, a saber, zero absoluto e zero origem.

É comum que quando o professor trabalhe com os alunos o conceito de antecessor/sucessor de um número negativo, ele se depare com erros cometidos pelos mesmos. Estes se dão por uma nítida transposição do conceito de sucessor no contexto dos números naturais e transposto para os números inteiros. Entendemos que esse obstáculo pode ser superado através da exploração dessa proposta, pois a partir da identificação do sucessor e do antecessor de um número positivo e negativo por meio da mesma, os alunos irão perceber que a lógica dos números inteiros contraria a dos números naturais, ou seja, que para saber se um número negativo é maior que outro número negativo, basta verificar qual dos dois está mais próximo do número zero, diferente dos números naturais que para saber se um número natural é maior que outro número natural, basta verificar qual dos dois está mais distante do zero.

Entendemos também que no decorrer da atividade os alunos trabalhem com a comparação de números inteiros, ao perceberem que alguns números (pegadores) precisam ser afastados para que outro possa caber ao lado, acompanhando o método de localização exposto na reta numérica. Esse material é sujeito a muitas variações, uma delas pode ser feita fazendo o inverso, ao invés de pendurar o prendedor, o aluno vai retirá-lo do barbante. A partir daí, o professor pode realizar várias atividades de modo prazeroso, se distanciando daquelas listas imensas de exercícios.

Outra variação, o professor pode pedir que um aluno retire o oposto de um número, ou dois números que sejam opostos, ou um número que seja menor que -2 e maior que -4, um número que somado com -5 resulte em zero, dois números que tenham a mesma distância para o zero (módulo de um número inteiros). Essa e outras atividades podem ser realizadas com o intuito de tornar esse estudo mais significativo.

Um outro obstáculo ocorre com a transposição para os inteiros da ideia que a soma de dois números naturais diferentes de zero é sempre maior que as duas parcelas da adição. Nesse caso, o professor pode pedir que os alunos calculem (-2) + (-3), questionando-os como representar esse cálculo na reta numérica, ou seja, a partir do zero, é necessário fazer um deslocamento de 2 unidades no sentido negativo e a partir do ponto associado ao número -2, fazer um novo deslocamento de 3 unidades novamente no sentido negativo. Verificando assim que o deslocamento total foi de 5 unidades no sentido negativo. Portanto, (-2) + (-3) = -5, mostrando ao aluno que a soma neste caso resultou em um número que é menor que as duas parcelas da adição, ou seja, que agora, com a ampliação do conjunto dos números naturais para os números inteiros será possível que a soma de dois números diferentes de zero seja menor que as duas parcelas da adição.

Além desses tópicos já citados, através desse simples material o professor pode trabalhar vários outros tópicos do conteúdo de números inteiros de maneira concreta e dinâmica, como: a ideia de números inteiros, o conjunto dos números inteiros, módulo de um número inteiro, números inteiros opostos, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros. Vale ressaltarmos a importância de mediar e acompanhar as escolhas dos alunos, sempre que julgar oportuno, solicitar que justifiquem as suas escolhas em todos os momentos das atividades que forem propostas. Outro ponto importante, será o de trabalhar com as duas representações da reta numérica, ou seja, horizontal e vertical, mostrando ao aluno que a reta numérica, não precisa necessariamente estar na posição horizontal. Ao fazer isso, o aluno irá perceber que os números negativos estão sempre associados a certas expressões, como por exemplo: "à esquerda de", "abaixo de". Já os positivos estão associados às expressões do tipo: "à direita de", "acima de".

Logo, percebemos que diante da exploração bem feita desse material, o professor poderá proporcionar que: I) os modelos implícitos utilizados pelos alunos sejam confrontados a todo momento e II) realizar a exploração explicita das dificuldades em um confronto de posições. O que se tratam de duas das estratégias citadas por Brousseau para se trabalhar com o conflito cognitivo, que se trata de um método para se lidar com obstáculos.

4.4 Material manipulável: o*perações com números inteiros.*

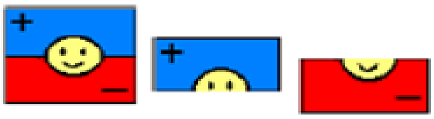
Na Experimentoteca do CDCC (Centro de Divulgação Científica e Cultural) podemos encontrar alguns kits, entre eles, existe um que objetiva trabalhar com as operações de adição, subtração e multiplicação de números inteiros, fazendo com que os alunos deem significado as regras de sinais, a saber, o Kit *operações com números inteiros* (figura 6).

Figura 6 - Kit operações com números inteiros.

Fonte: CDCC[4].

O material é formado por peças no formato das do jogo de dominó que assumem valores positivos (números positivos "+"), representadas pela cor azul e negativos (números negativos "-"), representadas pela cor vermelha. Há um total de 28 peças, sendo 14 de cada cor. Na figura 7 apresentamos peças do jogo.

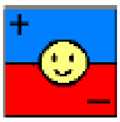
Figura 7 - Desenho ilustrativo de peça do Kit operações com números inteiros.



Fonte: CDCC.

As orientações aparecem juntas ao kit e segundo estas, devemos primeiramente combinar com os alunos que uma peça vermelha anula uma peça azul e vice-versa. Desta forma, pode aparecer o seguinte questionamento: Como representar o número zero? De acordo com as orientações, basta juntarmos duas peças de cores diferentes. Isso pode ser feito várias vezes. Desta forma, colocando um número igual de peças azuis e vermelhas, elas se anulam duas a duas, formando os "zeros". E é a partir do questionamento de como representar o zero que se pode desenvolver o conceito de números opostos, pois uma peça azul anula uma vermelha e vice-versa. Vale ressaltarmos que através deste kit, podemos trabalhar com a ideia de zero absoluto (figura 8).

Figura 8 - Representação do *zero*.



Fonte: CDCC.

De acordo com as orientações, depois que trabalharmos com os alunos a ideia principal do material, ou seja, a ideia que uma peça azul anula uma vermelha e vice-versa, devemos passar para uma segunda etapa, a de representação de números inteiros. Assim, podemos perguntar, por exemplo: Como representar o número (+5)? E como representar o número (-5)?

Para representar o número (+5), a expectativa é que os alunos coloquem inicialmente apenas 5 peças azuis. Neste caso, o professor pode questionar: existem outras maneiras para se expressar esse número? Como poderíamos relacionar as peças, considerando o princípio de

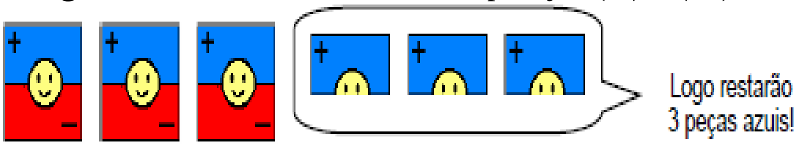
[4] Acesso em:
https://cdcc.usp.br/wp-content/uploads/sites/512/2020/03/1f_numeros_inteiros_p.pdf

que uma vermelha anula uma azul? Uma resposta possível: utilizar 10 peças azuis e 5 vermelhas. Da mesma forma, deveremos agir para mediar a representação do número (-5).

Para efeito de trabalharmos as operações propriamente ditas, temos as seguintes orientações:

Em relação a adição, os autores alertam que antes de trabalharmos com os alunos alguns exemplos, seria importante relembrar para eles o conceito de adição, explorando as ideias da adição (juntar e acrescentar). A partir daí, sugerem que o professor trabalhe o exemplo de adicionarmos (-3) com (+6), ou seja, de juntar três peças vermelhas com 6 peças azuis. Na figura 9, segue imagem dessa situação.

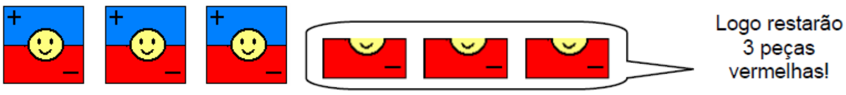
Figura 9 - Desenho ilustrativo da operação (-3) + (+6).



Fonte: CDCC.

Outras três situações são propostas pelo guia: 1ª) adicionar (+3) com (+6); 2ª) adicionar (-3) com (-6) e 3ª) (+3) com (-6). Na figura 10 apresentamos uma dessas situações.

Figura 10 - Desenho ilustrativo da operação (+3) + (-6).



Fonte: CDCC.

Entendemos que a partir da manipulação das peças do Kit podemos causar um enfrentamento a possíveis obstáculos epistemológicos citados por Glaeser (2010), que se trata da dificuldade de dar um sentido às quantidades negativas, inaptidão para manipular quantidades isoladas, estagnação no estágio das operações concretas e do desejo de um modelo unificador. Nessa direção, entendemos também que o obstáculo (a ideia que a soma de dois números diferente de zero ser sempre maior que as duas parcelas da adição) pode ser enfrentado a partir da manipulação das peças para realizar uma adição de números inteiros, pois será através da manipulação do material que o aluno perceberá de maneira concreta/prática que essa ideia aprendida anteriormente no contato com números naturais não será válida em todas as situações para o contato com números inteiros, ou seja, em alguns casos na adição de números inteiros poderá ocorrer que o resultado encontrado seja menor que ambas as parcelas, por exemplo, ao calcular (-2) + (-3), o aluno irá juntar duas peças vermelhas com mais três peças vermelhas obtendo cinco peças vermelhas (-5) como resposta, verificando através do manuseio das peças que diante da inserção dos números negativos se tornará possível que a soma de dois números diferentes de zero seja menor que as duas parcelas da adição.

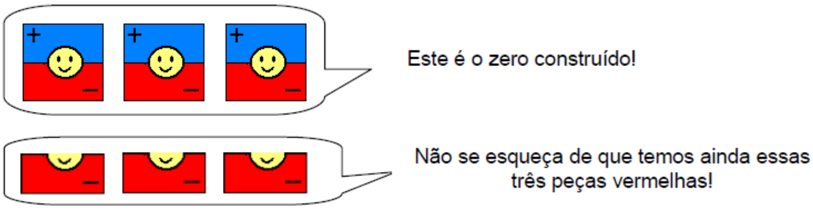
Uma outra variação que poderia ser associada a esse material, e consequentemente ser uma forma de superar esse obstáculo, seria associar exemplos como esse já citado anteriormente às ideias de prejuízo e lucro, ou seja, as peças vermelhas representaria prejuízo e as azuis lucro. Desta forma, considerando o exemplo acima, teríamos que juntar dois prejuízos, obtendo um prejuízo. Já considerando uma adição de dois números positivos teríamos que juntar dois lucros, obtendo um lucro. Por fim, considerando uma adição de dois números com sinais diferentes teríamos que juntar um lucro com um prejuízo e o resultado dependeria do valor absoluto de cada um.

Vale ressaltar que antes de trabalhar com o aluno exemplos como este exposto acima, seria importante que o professor começasse com situações envolvendo números positivos (peças azuis/lucro), ou seja, com o conhecimento adquirido anteriormente pelo aluno, para que assim o mesmo pudesse perceber que somando-se dois números diferentes de zero a soma (total de peças azuis (lucro)) seria maior que esses(as) números/lucros/parcelas. Agindo dessa maneira o professor poderá causar uma revolução entre "o velho conhecimento e o saber que se encontra em fase de elaboração" (PAIS, 2001, p. 43). Favorecendo a aprendizagem através da ruptura com o conhecimento antigo.

Um outro fator importante do trabalho com esse material se trata que os alunos a partir do registro utilizando os símbolos numéricos e operatórios poderão interpretar o significado da operação adição com números inteiros. Vale salientar que a consideração/atribuição/manutenção dos sinais na adição de números inteiros (quando adicionamos números inteiros com o mesmo sinal, a soma é obtida adicionando esses números e mantendo o mesmo sinal; quando adicionamos dois números inteiros com sinais diferentes, a soma é encontrada efetuando-se a diferença entre esses números e mantendo o sinal do número maior) podem ser utilizadas na prática, ou seja, o aluno pode construir essa compreensão manipulando as peças desse Kit, percebendo o motivo da prevalência e manutenção do sinal em cada caso, dando mais sentido para os procedimentos realizados e consequentemente assimilando melhor o conteúdo.

Quanto a subtração, da mesma forma, os autores orientam que inicialmente o professor trabalhe noções dessa operação, explorando principalmente a ideia de retirar. Em seguida, propõem a operação (-3) - (+2). Neste caso, o professor poderá questionar: como retirarmos 2 peças azuis das 3 peças vermelhas que temos? Assim, devemos utilizar o recurso de *colocar* *zeros*, ou seja, acrescentar peças azuis e vermelhas em quantidades iguais quando for necessário. Neste caso, para que se consiga retirar 2 peças azuis, é necessário que essas peças apareçam na situação. Diante disso, podemos por exemplo acrescentar 3 zeros, ou seja, mais 3 peças azuis e 3 peças vermelhas, tornando assim possível retirarmos 2 peças azuis.

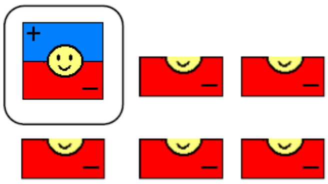
Figura 11 - Inserção de “três zeros”.



Fonte: CDCC.

Agora temos um total de 6 peças vermelhas e 3 peças azuis. Precisamos retirar 2 peças azuis, fazendo isto, temos:

Figura 12 - Tirando-se 2 peças azuis (+2).



Fonte: CDCC.

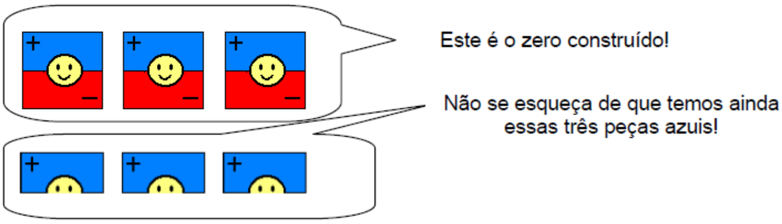
Percebemos que ainda restam um par (1 peça vermelha e 1 azul) e mais 5 peças vermelhas. Como essas duas peças do par se anulam, podemos retirá-las, sobrando dessa maneira 5 peças vermelhas, ou seja, (-5).

É descrito nas orientações que a quantidade de peças usadas no momento de se determinar os zeros pode variar de acordo com a vontade do aluno, porém, para cada peça azul deve-se ter uma peça vermelha e vice-versa.

O roteiro propõe outras situações: (+3) - (+2); (-3) - (-2) e (+3) - (-2).

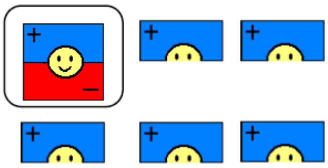
Podemos perceber que nas duas primeiras questões basta o aluno retirar peças que já estão colocadas, esperamos que ele encontre (+1) e (-1) como respostas respectivamente. Já a terceira questão é preciso que o mesmo perceba que será necessário *colocar zeros (figuras 13 e 14)* para poder retirar peças vermelhas, chegando assim em (+5) como resposta.

Figura 13 - Inserção de “três zeros”.



Fonte: CDCC.

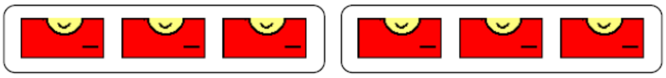
Figura 14 - Tirando 2 peças vermelhas (-2), resultando em (+5).



Fonte: CDCC.

Em se tratando da multiplicação, o guia destaca a importância de que o professor previamente trabalhe o conceito da referida operação, explorando a ideia de que multiplicar significa adicionar parcelas iguais. Como exemplo inicial, a orientação solicita que os alunos determinem a solução de (+2) x (-3). Assim, precisamos formar 2 grupos com 3 peças vermelhas cada um, ficando com um total de 6 peças vermelhas, ou seja, (-6), como observamos na figura 15.

Figura 15 - Desenho ilustrativo da formação de dois grupos com 3 peças vermelhas cada um.



Fonte: CDCC.

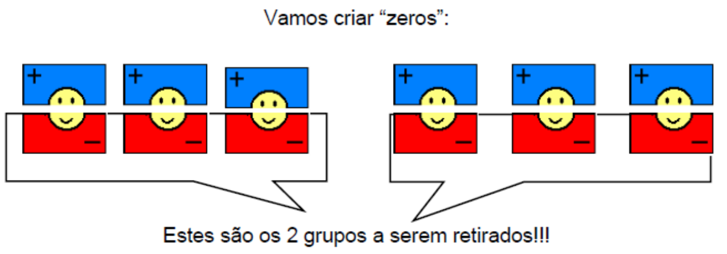
Através dessa situação, podemos colaborar para uma possível superação de um obstáculo, que se trata da "concepção" de que o produto entre dois números será sempre maior ou igual aos fatores da multiplicação, ou seja, que multiplicar sempre aumenta. Entendemos que através do manuseio das peças para se resolver situações (multiplicações) como essa trazida acima, o aluno poderá compreender que agora no contexto dos números inteiros será possível que o produto entre dois números seja menor que ambos os fatores, ou seja, que multiplicar agora não seja necessariamente sinônimo de aumentar. Nesse exemplo citado anteriormente o aluno iria perceber que ao calcular (+2) x (-3) obteria como resultado seis peças vermelhas (-6) que por sua vez é menor que duas peças azuis (+2) e três peças vermelhas (-3).

Vale salientar que antes de apresentar ao aluno exemplos como esse trazido acima, seria interessante que o professor explorasse primeiramente multiplicações envolvendo dois números positivos (peças azuis), trabalhando o que o aluno já aprendeu anteriormente, para depois iniciar o trabalho com a inserção de números negativos (peças vermelhas). Agindo dessa maneira o professor fará com que o aluno compreenda que a ideia que ele aprendeu anteriormente é incompatível para esse novo contexto, ou seja, provocando uma contradição do antigo conhecimento com o novo que está sendo construído. Para Brousseau (1989), isso se trata de um processo necessário, pois um conhecimento novo é determinado em contradição a um conhecimento antigo.

Posteriormente, o guia sugere outra operação: (-2) x (-3). Diante disso, um questionamento pode aparecer: *como será possível termos um número negativo de grupos?* Neste caso, vale ressaltarmos que o primeiro fator da multiplicação é *o que irá prevalecer*, ou seja, quando ele for positivo, deve-se ter em mente sempre a ideia de *juntar*, quando o primeiro fator da multiplicação for negativo, devemos pensar em *retirar*, lembrando que as ideias de juntar e retirar são ideias da adição e subtração respectivamente.

Portanto, para resolvermos o problema proposto, *devemos* retirar dois grupos de 3 peças vermelhas. Para isto, é necessário *colocar zeros* de modo que apareça as peças que devem ser, posteriormente, tiradas. Sendo assim, coloca-se dois grupos de "três zeros" cada, para então conseguir retirar os dois grupos de 3 peças vermelhas. Chegamos à conclusão que restarão 6 peças azuis. Logo, (–2) x (–3) = (+6), como mostramos na figura 16.

Figura 16 - Desenho ilustrativo da formação de dois grupos de *três zeros*.



Fonte: CDCC.

Além do mais, propõe mais duas situações: (+3) x (+4); e (-4) x (+3). Na primeira, basta juntarmos três grupos de 4 peças azuis cada, resultando em 12 peças azuis, ou seja (+12). Já na segunda situação, seguimos o mesmo raciocínio do exemplo ilustrado anteriormente. Devemos retirar quatro grupos de 3 peças azuis. Para isso, acrescentarmos quantos zeros forem necessários para depois retirarmos os quatro grupos de 3 peças azuis, sobrando 12 peças vermelhas, ou seja, resultando (–12).

Entendemos que após sucessivas multiplicações através da manipulação das peças do material com a mediação do professor, o aluno compreenda e elabore regras para a multiplicação de números inteiros, tendo a compreensão que a multiplicação de dois números inteiros positivos dá um número positivo, que a multiplicação de um número positivo por um número negativo, resulta em um número negativo e que a multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro positivo. Defendemos que por meio desse Kit, com a constante manipulação das peças e mediação frequente do professor, as regras de sinais, serão utilizadas na prática e não de maneira mecânica, ou seja, serão construídas através do manuseio de um material didático, facilitando a compreensão do conteúdo e dando mais sentido e significado ao mesmo.

4.5 Jogo matemático: *Elevador dos Inteiros.*

Esse jogo pode contribuir para ampliar o conceito de número pela incorporação dos números inteiros, relacionando-os com situações do cotidiano. Além disso, através do mesmo o aluno poderá reconhecer a existência de números inteiros, comparando, ordenando e localizando esses números na reta numérica. A resolução e elaboração de problemas que envolvam operações com números inteiros também podem ser exploradas a partir das problematizações oriundas desse jogo.

O mesmo explora o conceito de número inteiro e pode ser usado para introduzir as operações de adição e subtração nesse campo numérico. O registro das operações possibilita que os alunos estabeleçam relação entre os movimentos das peças e a linguagem simbólica matemática.

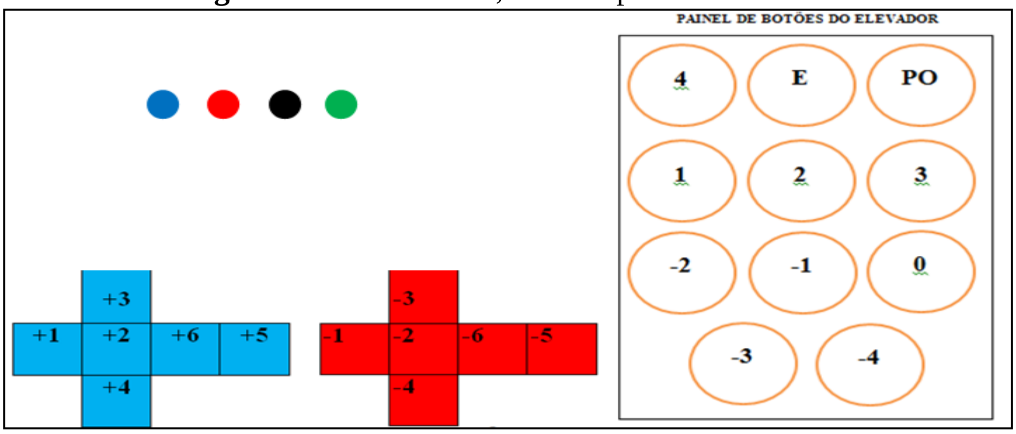
A organização da classe pode ser em grupos de até quatro alunos e os recursos necessários são: um tabuleiro, dois dados de cores diferentes (azul (números positivos) e vermelho (números negativos)), um painel de botões do elevador e quatro marcadores de cores diferentes (figura 17 e 18).

Figura 17 - Tabuleiro do jogo Elevador dos inteiros.

ELEVADOR DOS INTEIROS					
ANDARES	VOLTE PARA O TÉRREO	VOLTE PARA O TÉRREO	VOLTE PARA O TÉRREO	VOLTE PARA O TÉRREO	ANDARES
+4	ANDAR PRINCIPAL	ANDAR PRINCIPAL	ANDAR PRINCIPAL	ANDAR PRINCIPAL	4
+3	3º ANDAR	3º ANDAR	3º ANDAR	3º ANDAR	3
+2	2º ANDAR	2º ANDAR	2º ANDAR	2º ANDAR	2
+1	1º ANDAR	1º ANDAR	1º ANDAR	1º ANDAR	1
0	TERREO	TERREO	TERREO	TERREO	0
-1	1º SUBSOLO	1º SUBSOLO	1º SUBSOLO	1º SUBSOLO	-1
-2	2º SUBSOLO	2º SUBSOLO	2º SUBSOLO	2º SUBSOLO	-2
-3	3º SUBSOLO	3º SUBSOLO	3º SUBSOLO	3º SUBSOLO	-3
-4	4º SUBSOLO	4º SUBSOLO	4º SUBSOLO	4º SUBSOLO	-4
ANDARES	VOLTE PARA O TÉRREO	VOLTE PARA O TÉRREO	VOLTE PARA O TÉRREO	VOLTE PARA O TÉRREO	ANDARES

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Figura 18 - Marcadores, dados e painel de botões.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

As regras são as seguintes:

1. Cada grupo usa um tabuleiro, dois dados, o painel de botões do elevador e quatro marcadores.
2. Primeiramente todos os jogadores devem colocar seus marcadores na posição zero (térreo).
3. Os alunos, em comum acordo, decidem quem começa jogando.
4. Para iniciar o jogo, cada jogador, na sua vez, lançará os dois dados e com os resultados obtidos, indicará no painel de botões do elevador. Por exemplo, dado com números positivos:

+2 e dado com números negativos: -3 (o aluno deverá indicar no painel que irá parar no andar (-1) e depois mover seu marcador no tabuleiro parando no 1º subsolo).

5. Só existe uma forma de ganhar o jogo: o jogador que chegar primeiro no andar principal (+4) vencerá o jogo.

6. O jogador que parar na casa roxa ou ultrapassá-la, deverá voltar para a posição zero (térreo).

Observamos que é importante esclarecer para os alunos que o botão PO significa: aperte para abrir a porta e que o térreo em cada lugar é identificado de um jeito e que nesse painel ele está identificado pelo número zero, mas poderia ter um botão com o nome "térreo". Explicar que no painel do jogo aparecem os números negativos (subsolo) e os números positivos (acima do térreo) para indicar os andares do prédio.

Orientamos para que os alunos nas primeiras vezes que jogarem, não façam registros das jogadas, apenas se apropriem das regras e aprendam.

Após jogarem algumas vezes, é pertinente o registro das jogadas para, a partir destes, introduzir a soma algébrica dos números inteiros. O professor pode orientar os alunos a registrar os cálculos em um quadro:

Quadro 4 - Quadro de registro de jogadas.

Andar de partida	Dado azul	Dado vermelho	Andar de chegada

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O presente jogo é um cenário estimulante para problematizações que podem fazer com que o aluno reconheça a existência de números inteiros positivos e negativos em situações reais, causando um enfrentamento ao obstáculo citado por Glaeser, que se trata de atribuir significado a essas quantidades negativas isoladas. Algumas situações podem ser trabalhadas, como:

1- Em qual andar devo parar no Jogo Elevador dos Inteiros?
a- Dado azul: 5 e dado vermelho: 3;
b- Dado vermelho: 3 e dado azul: 2.

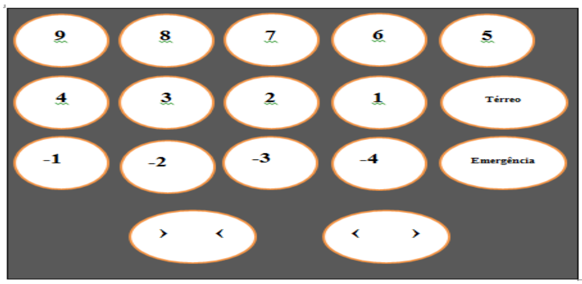
2- Calcule usando a ideia do Jogo Elevador dos Inteiros:
a- (-5) + (+1) b- (+3) + (-5) c- (+4) + (+1) d- (-1) + (-1)

3- Jogando o Jogo Elevador dos Inteiros Hudson estava localizado na casa +2 (2º andar) do tabuleiro. Na sua vez de jogar, o resultado nos dados foram: dado com números positivos: +5 e dado com números negativos: -1. Em qual andar Hudson irá parar ao final de sua jogada?

4- Raniel estava jogando o Jogo Elevador dos Inteiros. Na sua vez de jogar, ele se encontrava no 3º andar do tabuleiro. Quantas e quais possibilidades diferentes Raniel tem para vencer o jogo? Quais números ele precisará obter nos dados para poder vencer o jogo?

5- Jonas entrou no elevador no andar térreo. Desceu, inicialmente, 2 andares, e, em seguida, subiu 6 andares. Em qual andar o elevador parou?

6- Luiz é contador e seu escritório fica em um prédio com 9 andares de salas comerciais e 4 andares de garagem no subsolo. Observe o painel do elevador do prédio.



a- Que número indica o andar térreo?

b- Quais botões do painel indicam números de andares abaixo do térreo (subsolo)? E quais indicam os andares acima do térreo?

7- Joan trabalha como ascensorista. Ele opera e verifica o funcionamento dos elevadores. O serviço de manutenção dos elevadores, por causa de problemas técnicos, pediu a Joan para registrar o movimento do elevador nos andares em um intervalo determinado de tempo. Joan decidiu anotar os movimentos indicando ↓ para “desce” e ↑ para “sobe”. Diga em que andar o elevador parou, por último, em cada caso usando a adição de números inteiros.

a- térreo ↓6 ↑3 ↑5 b- térreo ↓1 ↓2 ↑4 c- térreo ↓2 ↑4 ↓3 ↑2

8- Luíza pegou o elevador no 2º subsolo e subiu até o 6° andar. Quantos andares ela percorreu?

9- Severo estava no quinto andar e desceu 7 andares. Represente o número do andar em que ele parou, usando números inteiros positivos ou negativos.

10- Para sair o 4º andar (+4) e chegar no 1º subsolo (-1), qual vai ser o deslocamento do elevador?

11- Imagine um movimento de um elevador em um prédio de 7 andares (acima do térreo) e 3 subsolos. Complete o quadro. Lembre-se de na última linha indicar o cálculo efetuado.

Andar de partida	Deslocamento realizado pelo elevador	Andar de parada	Cálculo realizado
-2	-1		
-1	+3		
+4		-3	
	+1	+1	
-4		-1	
0	-3		

Assim como nas atividades propostas anteriormente, diante dessas situações trazidas acima é interessante que o professor peça para que os alunos desenhem uma escala numérica para facilitar a compreensão da representação dos números positivos e negativos em relação ao zero (térreo). Perguntar aos mesmos qual é a referência tomada nesses dois casos para que consigam fazer as indicações. O professor deve explorar questionamentos que colaborem para que os alunos percebam que a referência é o térreo (referencial que tomamos como origem), pois dessa forma o professor causará um enfrentamento aos seguintes obstáculos: a ambiguidade dos dois zeros, unificação da reta e reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir do zero. Outra maneira importante de superar estes obstáculos é pedindo que o aluno construa o tabuleiro do jogo (uma reta numérica) assim como proposto no jogo Batalha Naval dos Números Inteiros, para que assim os alunos aprendam como construir uma reta numérica.

Como podemos perceber, o jogo é propício a diversas problematizações que podem estar relacionadas às situações reais. Através de situações como as aqui apresentadas e muitas outras que podem ser exploradas a partir desse jogo, podemos colaborar para a superação de vários obstáculos já mencionados, relacionados aos números inteiros.

Esse jogo é sujeito a algumas variações:

1. O tabuleiro pode ser ampliado para que assim joguem mais alunos.
2. Acrescentar “casas especiais” com algum desafio, vantagem ou prejuízo. Por exemplo, poderia inserir no tabuleiro uma casa com a palavra OPOSTO. Nesse caso, ao parar nessa casa, o jogador deveria deslocar seu marcador para o oposto do número. Utilizando a mesma ideia, poderia acrescentar em algumas casas negativas a palavra MÓDULO. Nesse caso, ao parar nessa casa, o jogador deveria deslocar seu marcador para o módulo do número.

3. Uma outra variação pode ser realizada para se introduzir/trabalhar o conceito da multiplicação e divisão, a saber, em algumas casas do tabuleiro poderiam ser acrescentadas algumas frases/palavras, por exemplo, "DOBRAR", "MULTIPLIQUE POR 2", "TRIPLIQUE", "DIVIDA POR 2", "DIVIDA POR 3", entre muitas outras. Neste caso, se em uma certa casa do tabuleiro tivesse a frase "MULTIPLIQUE POR 2", o jogador deve multiplicar o valor da casa que ele está posicionado por 2 e se deslocar até o resultado encontrado.

4. Fazer adaptações no jogo, para que assim, o mesmo possa trabalhar outras operações. Neste caso, as regras devem ser alteradas se necessário.

5. O tabuleiro pode ser desenhado no chão seguindo-se as mesmas regras, porém nesse caso, os alunos seriam os marcadores. Esta variação pode tornar o jogo muito dinâmico. É também uma forma de explicar o jogo de maneira geral para todos os alunos da turma antes de dividi-los em equipes para jogar.

Essa variação 5 pode colaborar para o enfrentamento de um obstáculo, a saber, a incapacidade de encontrar um número que seja o sucessor de um número inteiro negativo, pois entendemos que o aluno sendo um "marcador" que está posicionado por exemplo no 3° subsolo (-3) irá perceber na prática que existe um colega (2º subsolo) que está na sua frente (à cima), ou seja, esse colega representa outro número (-2). Desta forma, o aluno perceberá de maneira prática que um número negativo possui um sucessor e que este, nessa situação do jogo é o seu colega que está marcando a casa do 2º subsolo (-2).

Ressaltamos que todo esse processo precisa ser trabalhado paralelamente com a exposição da reta numérica e que o professor deve deixar claro para o aluno que a mesma pode ser representada horizontalmente, porém como o jogo envolve a ideia de elevador, logo utiliza-se a representação vertical.

Durante todo o jogo, o aluno efetua adição de números inteiros constantemente. Vale ressaltar que a partir do registro das jogadas (adições de números inteiros) os alunos irão estabelecer relação entre os deslocamentos dos marcadores e a linguagem simbólica. Através desse registro o professor pode colaborar para a superação de um obstáculo epistemológico, a saber, a ideia que a soma de dois números diferente de zero é sempre maior que as duas parcelas da adição. Isso acontece por que o aluno irá perceber que em algumas situações a soma encontrada não fará ele avançar (subir) de andar, isso irá chamar sua atenção e o mesmo perceberá que a soma em algumas situações de adição de dois números inteiros será menor que ambas as parcelas, ou seja, ao invés de avançar andares ele vai descer.

Vale ressaltar que para causar essa ruptura, o professor precisa anteriormente trabalhar com situações com dois dados azuis. Será a partir dessa situação que o aluno enxergará que a lógica dos números negativos é contrária a lógica dos números naturais, que, por exemplo, com a inserção dos números negativos essa ideia relacionada aos números naturais poderá falhar quando aplicada no contexto dos inteiros.

Por meio da terceira variação trazida anteriormente, o professor pode causar um enfrentamento a dois obstáculos, a saber, 1º) a concepção de que o produto entre dois números será sempre maior ou igual aos fatores da multiplicação, ou seja, que multiplicar sempre aumenta; 2º) a concepção que dividir sempre diminui: o resultado de uma divisão de um número inteiro por outro número inteiro, pode ter como quociente um número maior do que o dividendo. O que se tratando dos números naturais não acontece; pois:

1°) Quando o aluno ver a frase “MULTIPLIQUE POR 2”, provavelmente pensará que irá avançar (subir) no tabuleiro, isso pelo fato que ele aprendeu anteriormente que multiplicar é sinônimo de aumentar. Porém, isso irá acontecer somente quando ele estiver em um andar acima do térreo, pois esses andares são representados por números naturais maiores que zero. Em caso do aluno estar localizado em um andar abaixo do térreo (números menores que zero), por exemplo, no 2° subsolo (-2), o mesmo terá que calcular (-2) x (+2), ou seja, (-2) + (-2) que resultará em -4, fazendo com que ele tenha que descer e parar no 4º subsolo, ou seja, a partir de situações como essa, através da mediação do professor, o aluno compreenderá que o produto de dois números será sempre maior ou igual aos fatores da multiplicação quando forem considerados dois números naturais, caso contrário, a partir do momento que um dos fatores é negativo, existirá a possibilidade do produto ser um número menor que ambos os fatores da multiplicação. O professor poderá trabalhar essa situação através de contraexemplos, ou seja, primeiramente mostrando situações envolvendo apenas números naturais. Logo, o aluno iria perceber que sempre avançaria ou permaneceria no mesmo andar. Depois, o professor acrescentava os andares abaixo do térreo (números negativos), fazendo com que o aluno perceba que a ideia que ele associava aos números naturais se revelava verdadeira e que a partir do momento que essa ideia foi transferida para um/outro contexto mais amplo, a mesma revelou-se equivocada.

2°) Inicialmente, para causar uma ruptura seria preciso que o professor solicitasse que os alunos usassem dois dados azuis. Neste caso, se o aluno estivesse, por exemplo, no 2º andar, e neste estivesse a frase “DIVIDA POR 2”, o mesmo desceria uma casa no tabuleiro. Depois de algumas jogadas, o professor poderia solicitar a utilização do dado azul e vermelho. A partir de algumas jogadas o aluno entenderia que ao considerar apenas números positivos (andares acima do térreo), o quociente sempre seria menor que o dividendo. Caso contrário, poderá ocorrer do quociente ser maior que o dividendo, ou seja, existirá a possibilidade de subir no tabuleiro.

Entendemos que por meio de situações como essa o professor fará com que o aluno compreenda que a divisão nem sempre diminui, ou seja, que o resultado de uma divisão de um número inteiro por outro, pode ter como quociente um número maior do que o dividendo, ou seja, que a partir de agora com o conhecimento dos números inteiros negativos essa ideia existente no contexto dos números naturais não poderá ser transposta para os números inteiros (contexto mais amplo).

4.6 Jogo matemático*: Zero Ganha* - uma proposta para se trabalhar com números inteiros.

O Jogo *Zero Ganha* se tratou da(o) (atividade) trabalho final da disciplina de Laboratório de Matemática na formação de professores pertencente ao programa de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) - Campina Grande. Essa disciplina foi ministrada pelo professor Doutor Aníbal de Menezes Maciel, responsável pela orientação da produção deste jogo.

Este foi responsável por orientar os alunos Carvalho[5], Galvão[6], Silva[7] e Guedes[8] na elaboração desse jogo que segundo esses autores, foi inspirado no jogo *Ganha Quem Chega a Zero*, pertencente na obra Mathema da autora Smole (2019). A ideia principal do jogo é chegar a zero.

De acordo com a proposta dos autores, o jogo é indicado a partir do 6º ano do Ensino Fundamental II. Trata-se de um jogo estratégico que pode ser usado de diversas formas diferentes, possibilitando a geração de discussões e reflexões a respeito dos números inteiros. Esse jogo pode ser usado para introduzir/trabalhar/revisar vários tópicos deste conteúdo, a saber: números inteiros opostos, comparação de números inteiros e as operações de adição e subtração nesse campo numérico.

Segundo os autores, através do jogo zero ganha, os jogadores têm a possibilidade de desenvolver a capacidade de antecipar jogadas e de estabelecer estratégias de ação.

---

[5] João Luiz Galvão de Carvalho.
[6] Janaína Teodoro dos Santos Galvão.
[7] Maiara Moreira da Silva.
[8] Girlan Paiva Guedes.

Os recursos necessários para este jogo são: conjunto com 56 cartas, formado com duas cartas de cada um dos números -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -10; +1; +2; +3; +4; +5; +6; +7; +8; +9; +10, além de 16 cartas coringas, para cada grupo. Na figura 19, mostramos as cartas do jogo, além de como é o verso das cartas (contendo as iniciais do nome do jogo, ou seja, ZG "zero ganha" - primeira carta):

Figura 19 - Cartas do Jogo Zero Ganha e verso de todas as cartas (primeira carta).

Fonte: Carvalho, Galvão, Silva e Guedes (2021).

Para se jogar a classe deve ser organizada em grupos de três ou quatro alunos. As regras do jogo Zero Ganha são as seguintes:

- Cada grupo usa um conjunto de 56 cartas que devem ser embaralhadas e colocadas no centro da mesa, formando um monte, com as faces voltadas para baixo.
- Cada jogador deve receber seis cartas. As demais ficam no centro da mesa.
- Para iniciar, cada jogador deverá retirar uma carta do montante. O jogador que tiver a carta de maior valor inicia jogando no sentido horário.
- O objetivo do jogo é chegar no valor zero ao praticar a adição algébrica de números inteiros.
- Cada jogador, na sua vez, tem que pegar uma carta do montante no centro da mesa, podendo descartar ou trocar com uma das seis cartas de sua mão. As cartas descartadas ficam voltadas para cima de modo que todos os jogadores possam ver. Se conseguir resultado zero, vence o jogo; se não conseguir, o jogo prossegue.
- Se a carta retirada do monte for uma carta coringa, o jogador pode descartar ou trocar com uma das seis cartas de sua mão. Ele poderá usá-la imediatamente na mesma jogada ou depois. Dependendo da carta coringa, o jogador poderá executar as seguintes jogadas, vejamos:

Cartas Coringas

- **Carta troca-troca:** com essa carta o jogador poderá trocar uma carta de sua mão com uma carta do adversário, este deve mostrar suas seis cartas para que o jogador possa escolher.

- **Carta Resgate:** com essa carta o jogador poderá trocar uma carta de sua mão com uma das cartas que foram descartadas, fazendo a troca com uma carta de sua mão.
- **Carta positiva ou negativa:** essa carta poderá assumir qualquer número positivo ou negativo que aparece no jogo, por exemplo ela poderá assumir os seguintes números: -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9; -10; +1; +2; +3; +4; +5; +6; +7; +8; +9; +10. Logo, dependendo do sinal que ela representar, ou seja, se ela for positiva poderá representar qualquer número positivo dos mencionados acima, se caso contrário, ou seja, se for negativa poderá representar qualquer número negativo dentre os mencionados acima.

- O jogo termina quando o jogador em sua vez de jogar conseguir chegar no valor zero e dizer: *zerei!*.
- Ganha o jogador que, primeiro conseguir obter resultado zero.

Algumas observações são trazidas pelos autores:

1 - As cartas coringas poderão ser usadas apenas uma vez, ou seja, quando já usadas não ficarão junto das cartas descartadas, elas ficarão em um lugar separado.

2 - Ao vencer a partida, o jogador deve mostrar suas seis cartas para os demais.

3 - Não é obrigatório usar as cartas coringas de forma imediata, o jogador poderá guardá-las e usá-las depois. Ele poderá usá-las somente na sua vez de jogar.

4 - O jogador tem que fazer uma jogada por vez.

5 - O jogador só poderá ficar com seis cartas em mãos.

Algumas variações do jogo são trazidas pelos autores:

1 - Jogar em duplas, ou seja, os alunos podem participar de duas até cinco duplas. Jogando em duplas, os aluno pode interagir com seu colega e a partir daí traçar melhor o percurso a ser estabelecido. Esta variação pode tornar o jogo bastante dinâmico.

2 - Aumentar o número total de cartas do jogo.

3 - Acrescentar mais cartas coringas (especiais).

4 - Fazer adaptações no jogo, para que assim, o mesmo possa trabalhar a operação de multiplicação, divisão, potenciação, raiz quadrada exata e expressões numéricas de números inteiros. Neste caso, as regras devem ser alteras se necessário.

5 - Acrescentar mais regras.

6 - Uma variação possível é propor que os alunos, usando as cartas do jogo que estejam na sua mão, obtenham o maior/menor número possível de ser formado com estas cartas, usando para

isso as operações que foram trabalhadas no jogo, por exemplo: adição, subtração, multiplicação, divisão entre outras.

7 - Esse jogo é sujeito a muitas variações, e os alunos com sua criatividade podem participar desse momento.

8 - Determinar tempo para realizar as jogadas

Os autores trazem como proposta algumas problematizações acerca do jogo que enfatizam a discussão de resultados de jogadas, a saber:

1 - Sonia gritou: “zerei” e mostrou as seis cartas: -1; +4; -4; +9; -7; -1 para seus colegas. Sonia realmente venceu o jogo? Por que?

2 - Paulo estava com as cartas -10; +4; -6; +9; -4; +6 em mãos. Na sua vez de jogar, teve sorte e pegou do monte a carta coringa do sinal de mais. Nessas circunstâncias, para que Paulo possa vencer o jogo ele deve fazer qual procedimento?

3 - Koller estava com as cartas -5; +5; -3; +8; -8; +6 em mãos. Na sua vez de jogar, pegou do monte a carta coringa “troca troca”. Koller pediu para ver as cartas de um de seus colegas de jogo, as cartas foram as seguintes: -4; +4; +3; +8; -10; +10. Diante disso, para que Koller vença o jogo ele deve fazer qual procedimento de troca? Por que ? Justifique.

4 - Qual jogador abaixo realmente “zerou”?

a) Luiza: -5; +4; -3; +8; -8; +6.

b) Galvan: -5; -3; -1; +8; -9; +10.

c) Sanablia: -1; +5; -7; +8; -7; +1

d) Barbarez: -10; +5; -3; +6; -9; +6

5 - Na sua vez de jogar, Gabiadini pegou do monte a carta coringa *resgate*. As opções que ele tem para resgatar são: -4; +5; -3; +8; -8; +6; -1; +7; -9; +2. Sabendo que Gabiadini tem em

mãos as cartas -5; +1; -1; +8; -10; +6. Cite uma das várias jogadas que Gabiadini pode realizar para que possa vencer o jogo?

A partir das variações e problematizações trazidas pelos autores e muitas outras que podem ser criadas pelo professor podemos causar um enfrentamento a alguns obstáculos já mencionados anteriormente: I) dar significado as quantidades negativas (o aluno irá refletir a todo o momento com o objetivo de se chegar à zero. Diante dessa reflexão frequente, o aluno com a mediação do professor poderá imaginar os números negativos como “saldo negativo ou perda” e os positivos como “saldo positivo ou ganho”, e mais, podendo associar a ideia de saldo de gols se esta for trabalhada pelo professor); II) ambiguidade dos dois zeros, III) unificação da reta, IV) reconhecer a existência de números em dois sentidos, a partir do zero, V) a incapacidade de encontrar um número que seja o sucessor de um número inteiro negativo e VI) a lógica dos números negativos contraria a lógica dos números naturais (o professor distribui para os alunos as 20 cartas de números de -10 à +10 e solicita que os mesmos distribuam esses números (cartas) em uma escala numérica, nesta contendo espaços para essas 20 cartas serem colocadas.

A partir dessa variação os alunos poderiam refletir sobre a necessidade de ter uma referência entre os números positivos e negativos. Caso contrário, depois que todos os 20 números fossem colocados em seus lugares, o aluno iria perceber que existiria um espaço entre os números -1 e +1. Alguns questionamentos e afirmações poderiam surgir, como: Está faltando um número professor? Qual é esse número?, Este número está entre o -1 e o +1 professor! Ele separa os números negativos dos positivos! Vai ficar vazio professor, pois não tem a carta pra colocar nesse espaço! Está faltando o zero! Desta forma, o professor poderia levar o aluno a compreensão dos papéis que o zero pode assumir. Para superar os obstáculos III e IV o professor pode iniciar a distribuição dos números positivos e negativos na escala numérica, sendo os positivos acima (à direita) do zero e os negativos abaixo (à esquerda) do zero. Já para se enfrentar o obstáculo V, o professor pode trabalhar a ideia de “sucessor” de maneira mais compreensível para o aluno, fazendo com que o mesmo perceba que a ideia que ele adquiriu anteriormente (sucessor de um número natural) não pode ser levada para os números negativos, pois a lógica desses números é contrária a dos números naturais (obstáculo VI).

Outra maneira de fazer com que o aluno compreenda na prática que a lógica dos números negativos contraria a lógica dos números naturais (obstáculo VI) é mostrar para os alunos que a ideia aprendida anteriormente (quanto mais um número estiver distante do zero maior ele será) válida para os números naturais agora não será mais válida em toda sua totalidade para os números inteiros. Para isso, o professor pode solicitar que o aluno pegue dois números positivos (duas cartas) e verifique quais delas está mais distante do zero, depois solicitar que o aluno pegue dois números negativos (duas cartas) e faça a mesma coisa, fazendo com que o aluno compreenda que quanto mais um número negativo estiver distante do zero menor ele será).

Um tópico muito importante no trabalho com números inteiros pode ser explorado através desse jogo de maneira ativa e frequente, a saber, a ideia de números opostos. Isso acontece pelo fato que o objetivo principal do jogo é chegar à zero. Logo, diante do resultado que o aluno tem em mãos (adição algébrica de números inteiros) ele precisará encontrar o oposto desse resultado (adição algébrica). A noção de números opostos também pode ser enxergada em outras situações durante o jogo, como: quando o aluno precisa utilizar as cartas coringas (carta troca-troca (o aluno poderá trocar a carta com o seu adversário com o intuito de juntá-la com seu oposto ou vice-versa), carta resgate (o aluno poderá resgatar uma carta que seja o oposto de uma outra qualquer ou da adição algébrica que ele terá em mãos) ou carta positiva ou negativa (o aluno poderá utilizar essa carta para assumir um número positivo ou negativo que seja o oposto de um determinado número).

Ressaltamos que no decorrer de todo o jogo, o aluno ficará resolvendo adições algébricas constantemente, ou seja, ao jogar, o aluno poderá perceber na prática com a ajuda do professor que nem sempre a soma de dois números diferentes de zero é maior que as duas parcelas da adição. Portanto, esse obstáculo (a ideia que a soma de dois números diferente de zero é sempre maior que as duas parcelas da adição) poderá ser enfrentado a partir desse jogo.

Como podemos perceber, trata-se de um jogo aberto a diversas variações, adaptações e problematizações onde o professor (mediador) trabalha vários tópicos do conteúdo de números inteiros de maneira dinâmica, prática e mais compreensível.

4.7 Material didático: atividades com tampinhas de garrafa.

O material utilizado nesse item pode ser constituído de tampinhas de garrafa pet coloridas com o propósito de introduzir e sistematizar as operações de multiplicação e divisão de números inteiros. As tampinhas são nas cores azuis e vermelhas. Cada tampinha tem o fundo na cor vermelha e o resto (parte superior e sua lateral) na cor azul. A tampinha poderá ser utilizada de duas formas durante a atividade: a parte superior da tampa voltada pra cima (cor azul) representará o número (+1) e o fundo da tampa (cor vermelha) representará o número (-1).

Figura 20 - Tampa de garrafa pet (imagem superior, lateral e inferior).

Fonte: https://www.google.com.br/

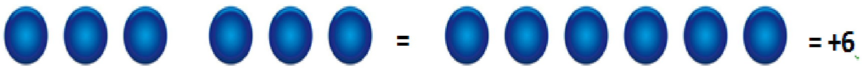
Uma só tampinha poderá representar tanto o "+1" (parte superior voltada pra cima) como o "-1" (fundo voltado pra cima).

Ressaltamos que antes de trabalhar com os alunos essas operações, será importante anteriormente explorar o material pedindo que os mesmos representem números positivos e negativos através das tampinhas para que assim eles se familiarizem com o material para aos poucos irem construindo novas ideias através do manuseio. Como também, abordar a noção de reta numérica, do valor simétrico e de operador (multiplicador).

- Multiplicação:

Para representarmos a multiplicação, quando os dois fatores forem positivos, por exemplo: (+2) x (+3), temos: nessa representação, (+2) indica o número de vezes que o fator (+3) deve ser repetido. Neste caso, obtemos 6 tampinhas azuis. Logo, (+2) x (+3) = +6, (figura 21).

Figura 21 - Desenho ilustrativo da operação (+2) x (+3).



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Para representarmos a multiplicação quando o primeiro fator é positivo e o segundo é negativo, por exemplo: (+2) x (-3), temos: Nessa representação, (+2) indica o número de vezes que o fator (-3) deve ser repetido. Neste caso, obtemos 6 tampinhas vermelhas. Logo, (+2) x (-3) = - 6 (figura 22).

Figura 22 - Desenho ilustrativo da operação (+2) x (-3).

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

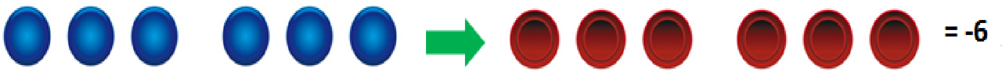
Para representarmos a multiplicação, quando o primeiro fator (multiplicador) é negativo e o segundo (multiplicando) é positivo, por exemplo (-2) x (+3): nesse caso, utilizamos a ideia de oposto (simétrico) de um número inteiro. Como uma só tampinha representa "+1" e "-1", podemos trabalhar com os alunos a referida ideia. Logo, fazemos todo o processo como se o multiplicador (-2) fosse positivo e depois invertemos o sinal do que foi obtido (figura 23).

(- 2) x (+ 3)

Inverter

Multiplicador (operador)

Figura 23 - Desenho ilustrativo da operação (-2) x (+3).



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

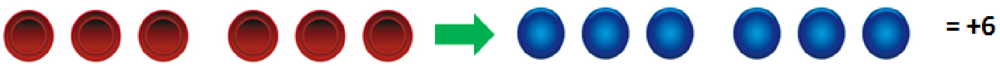
Para representarmos a multiplicação, quando os dois fatores (multiplicador e multiplicando) forem negativos, por exemplo (-2) x (-3): utilizamos também, nessa situação a ideia de oposto, ou seja, fazemos todo o processo como se o multiplicador (-2) fosse positivo e depois invertemos o sinal.

(- 2) x (- 3)

Inverter

Multiplicador (operador)

Figura 24 - Desenho ilustrativo da operação (-2) x (-3).



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

É importante que o professor trabalhe previamente o conceito da multiplicação, explorando a ideia de adicionar parcelas iguais. Primeiramente é recomendável que o professor trabalhe apenas com os números positivos (parte superior da tampa voltada pra cima). Para, logo depois, aos poucos, ir trabalhando com os números negativos (parte inferior da tampa voltada pra cima). Entendemos que será a partir daí que um possível enfrentamento de um obstáculo (o produto entre dois números será sempre maior ou igual aos fatores), poderá acontecer, pois o aluno poderá verificar que quando considerava apenas os números positivos o resultado (número de tampinhas azuis) da multiplicação só aumentava. E a partir do momento que começa a trabalhar com números positivos e negativos essa ideia passa a não funcionar, ou seja, um conhecimento precedente que levava ao acerto, agora se revela falho.

A divisão segue o mesmo raciocínio. A realização de atividades dessa natureza poderá também contribuir com a superação de outro obstáculo, pois o aluno compreenderá que a partir do momento que começou a efetuar a divisão considerando números negativos nem sempre obtém um resultado menor que o dividendo, ou seja, que em vez de diminuir, aumenta. Neste caso, essa ideia (o quociente de uma divisão exata de números naturais, com divisor diferente de zero, ser sempre um número menor que o dividendo, “dividir sempre diminui”) que dava resultados corretos no contexto dos números naturais, revela-se falha no contexto dos números inteiros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino da matemática evoluiu bastante nos últimos anos, porém apesar desse notável avanço muito ainda temos a realizar. Como professores, buscamos sempre a melhoria desse ensino, sabemos que isso passa por vários aspectos, um deles é desenvolver um ensino que traga uma aprendizagem significativa. Para que isso se consolide é necessária a identificação e superação de diferentes tipos de impedimentos que surgem no processo de construção de um conceito matemático, pois será a partir daí que o professor poderá intervir de maneira mais adequada. Diversas inquietações podem surgir a respeito desses impedimentos. Em nosso trabalho, trazemos uma discussão relacionada a um desses, a saber, os obstáculos epistemológicos e didáticos, fundamentado nas ideias desenvolvidas por Bachelard e adaptado para o ensino de Matemática por Brousseau (1976). Assim como também, articulamos esses conceitos ao LEM, na perspectiva da Educação Matemática, para apresentar propostas de intervenções didáticas que, no nosso entendimento, podem favorecer a identificação e superação desses obstáculos no ensino-aprendizagem do conteúdo de Números Inteiros.

Dessa maneira, tivemos como objetivo geral: *apresentar as potencialidades do Laboratório de Ensino de Matemática na contribuição de superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros, já identificados na literatura.*

Logo, debruçamo-nos em bibliografia existente sobre o assunto para conhecermos obstáculos já identificados; realizamos uma entrevista com professores de Matemática que lecionam no Ensino Fundamental para nos inteirarmos de concepções sobre a temática desenvolvida e apresentamos diversos recursos didáticos, materiais manipuláveis e jogos matemáticos, criados e adaptados (movimentação na conta corrente; Jogo matemático: batalha naval dos números inteiros; Material didático: prendedor dos inteiros; Material manipulável: operações com números inteiros**;** Jogo matemático: Elevador dos Inteiros; Jogo matemático: Zero Ganha; Material didático: atividades com tampinhas de garrafa), para contribuir na superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino aprendizagem do

Assim, respondemos a problemática de pesquisa delineada (Como o LEM pode contribuir na superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente de números inteiros?), por meio das entrevistas realizadas e da apresentação do conjunto de propostas.

Dessa forma, entendemos ter atingido nossos objetivos no que se refere mostrar como o LEM pode contribuir na identificação e superação de obstáculos epistemológicos e didáticos no processo de ensino-aprendizagem de números inteiros.

Como consequência de nossa pesquisa, recomendamos ao professor de Matemática que busquem utilizar recursos didáticos, em particular os aqui apresentados, pois além de não requerer investimento alto, podem proporcionar muitas vantagens se bem empregados e explorados em sala de aula. Entendemos que a ideia de aplicabilidade Matemática, a contextualização e o prazer em aprender podem ganhar impulso a partir do uso desses recursos.

Outro ponto importante que ressaltamos, em termos de sugestão, é a necessidade na formação do professor de matemática, seja na graduação ou formação continuada que não necessariamente no âmbito de pós-graduação, contemplar assuntos referentes aos obstáculos epistemológicos. Pois, identificamos, através das entrevistas realizadas que a maioria dos entrevistados não tinham conhecimento de tão importante temática para o cotidiano do ensino de Matemática. Nessa direção, assim como os professores ouvidos, entendemos como pertinente que esse conceito seja refletido com os professores da Educação Básica.

Outro aspecto de contribuição, diz respeito, especificamente, ao estudo de Números Inteiros. Pois, apresentamos propostas interessantes de uso de materiais manipuláveis e jogos matemáticos, os quais podem favorecer para um novo olhar por parte do professor na sua função de ensinar matemática e lidar com as diferentes dificuldades que surgem no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Do ponto de vista da pesquisa acadêmica, o nosso trabalho aponta para algumas possibilidades de continuação de estudos: verificação de resultados com base na aplicação das propostas apresentadas; estudo de outros conteúdos matemáticos a partir da teoria dos obstáculos epistemológicos; uma maior estruturação de aprofundamento de nossas discussões, bem como a ampliação e adaptação dos recursos didáticos que foram propostos, pois todos são passíveis de mudanças com o foco de satisfazer ações diferentes; um trabalho restrito a formação de professores de Matemática da Educação Básica, abordando a temática em foco.

Finalmente, em resumo, verificou-se, apoiado na finalização deste trabalho, que alguns pretextos para discussões são abertos, relacionados principalmente à importância de conhecer e identificar os obstáculos epistemológicos e didáticos e ao uso de recursos didáticos componentes de um LEM para superá-los, estes precedentes para discussões transformam esse trabalho em novas alternativas de pesquisas. Logo, espera-se que os resultados encontrados nesta pesquisa possam ser úteis, servindo como apoio para futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino da matemática: Uma prática possível.** Campinas, São Paulo: Papirus, 2001.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAUMGARTEL, P. **O uso de jogos como metodologia de ensino da Matemática**. Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – XX EBRAPEM, Curitiba –PR, 12 a 14 de novembro de 2016. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_priscila_baumgartel.pdf

BEZERRA, M. C. A.; RÊGO, R. G. As quatro operações básicas: uma compreensão dos procedimentos. In: SILVA, M. G. L.; FARIA, T. C. L. **Educação matemática: relatos de pesquisas e materiais didáticos.** Natal, RN: EDUFRN, 2009. p. 33-61.

BITTENCOURT, J. **Obstáculos Epistemológicos e a Pesquisa em Didática da Matemática.** Educação Matemática em Revista – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 5, n. 6, p. 13-17, 1998.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, Secretaria Nacional de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília, 1997b.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação média e tecnológica. **Matemática, Parâmetros curriculares nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC; SEF, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. Brasília, DF: MEC/ SEF, 2018.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In: BROUSSEAU, G. **La problématique et l'enseignement de la mathématique.** France: Louvain-la-neuve, 1976. p. 101-117.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino.** 1ª edição. ed. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. (1989). **Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques.** In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs , Obstacles et Conflits* (pp. 41-63). Montréal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

CARVALHO J. B. P. de. **O que é Educação Matemática? Temas e Debates**, n. 3, p. 17-26, São Paulo, 1991.

D’AMBRÓSIO, B. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**, n.1, ano 2, 1989, p. 16-18.

D’AMBRÓSIO, U. Prefácio In: BORBA, M.; ARAÚJO, J. L. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática,** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

D’AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Tradução Maria Cristina Banomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, São Paulo: Autores associados, 2006.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim SBEM. São Paulo, ano 4, n. 7. 1990.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

GLAESER, G. **Epistemologia dos Números Relativos.** GEPEM - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Rio de Janeiro, Jul/Dez 2010. 65-102.

GONÇALVES, A. R. **O Uso do Laboratório no Ensino de Matemática.** 2003. Dissertação de Mestrado. Jacarezinho, PR: FAFIJA.

GRANDO, R. C. **O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula.** 2000. 239f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

IFRAH, G. **Os Números: história de uma grande invenção.** 9ª Edição. ed. São Paulo: Globo, 1998.

IGLIORI, S. B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação matemática: uma (nova) introdução**, 3. ed. São Paulo: Educ, 2008.

LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática do 6º ao 9º ano**. São Paulo: Rêspel, 2011.

LINS, I. M. **O uso de jogos matemáticos na perspectiva da resolução e exploração de problemas no ensino médio.** 161 f. Dissertação (mestrado) - (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, Paraíba, 2019.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 03-37.

MACHADO, S. D. A. **Educação matemática: uma (nova) introdução**, 3. ed. São Paulo: Educ, 2008.

MACIEL, A. M. **Ensino de matemática: uma proposta metodológica para jovens e adultos do período noturno.** 2002. 156 p. Dissertação. (Mestrado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba- Campus I - (UFPB), João Pessoa, 2002.

MISKULIN, R. G. S. As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. In: LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 153 – 178.

MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do lúdico na Matemática. In: KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 12 ed. São Paulo: Cortez, 2009. p. 73-87.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar:** enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Educação Matemática em Revista** – RS, v. 9, n. 9/10, p...., 2004-2005.

OLIVEIRA, A. M. N. de (1993). **Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática: as razões de sua necessidade.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; análise da influência francesa** - Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PEREZ, G. **O Laboratório de Ensino e os Materiais Didáticos no Ensino de Matemática**. UNESP, Rio Claro/SP, Abril de 1993, (manuscrito).

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do. **Matematicativa**. 3. Ed. Ver e ampl. – Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

RIBEIRO, F. 2008. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. Curitiba: IPBEX, 2008.

SANTOS, R. de O. Atividades estruturadas para o ensino das primeiras noções relacionadas ao conceito de números complexos. In: SILVA, M. G. L.; FARIA, T. C. L. **Educação matemática: relatos de pesquisas e materiais didáticos.** Natal, RN: EDUFRN, 2009. p. 79-112.

SANTOS, S. M. P. dos. **O brincar na escola: Metodologia Lúdico-Vivencial, coletânea de jogos, brinquedos e dinâmicas.** 2. Ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

SANTOS, V. R. dos. **Jogos na escola: Os jogos nas aulas como ferramenta pedagógica.** – Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

SCHUBRING, G. **Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos?** – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. (Série história da matemática para professores).

SILVA, R. C.; SILVA, J. R. – **O papel do laboratório no ensino de matemática.** In: VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, 2004.

SOUZA, S. E. de. **O uso de recursos didáticos no ensino escolar.** I Encontro de Pesquisa em Educação, IV Jornada de Prática de Ensino, XIII Semana de Pedagogia da UEM: "Infância e Práticas Educativas". Arq Mudi. 2007;11(Supl.2):110-4. Disponível em: http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20103/2014-II/listas/Rec%20didaticos%20-%20MAT%20103%20-%202014-II.pdf Acesso em: 12 de março de 2021.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I.; MILANI, E. **Jogos de matemática de 6º a 9º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

TEIXEIRA, R. R. P; APRESENTAÇÃO, K. R. dos S. da. **Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática.** Revista Linhas, Florianópolis, v. 15, n. 28, p. 302-323, jan./jun. 2014.

TODESCO, H. **Um Estudo com os Números Inteiros nas Séries Iniciais: Reaplicação da Pesquisa de PASSONI.** São Paulo, PUC, 2006.

TURRIONI, A. M. S. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores.** 2004. 165 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2004. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91124>.

VIEIRA, J. C. **Laboratório de Matemática: Uma alternativa para a aprendizagem prazerosa e significativa da matemática** [trabalho de conclusão de curso]. Brasília: Universidade Católica de Brasília, curso de Licenciatura em Matemática. (2012).