UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SAUL BARBOSA DE OLIVEIRA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ESPAÇOS VETORIAIS VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAMPINA GRANDE-PB
2021

SAUL BARBOSA DE OLIVEIRA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ESPAÇOS VETORIAIS VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

CAMPINA GRANDE-PB
2021

O48e Oliveira, Saul Barbosa de.
Ensino-aprendizagem de espaços vetoriais via exploração-resolução-proposição de problemas [manuscrito] : uma experiência na licenciatura em Matemática / Saul Barbosa de Oliveira. - 2021.
202 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.
"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Departamento de Matemática - CCT."

1. Ensino de Matemática. 2. Espaços vetoriais. 3. Formação docente. 4. Educação algébrica. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

SAUL BARBOSA DE OLIVEIRA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ESPAÇOS VETORIAIS VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em: 28 / 05 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

John A. Fossa

Prof. Dr. John Andrew Fossa (Examinador Interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Lourdes de la Rosa Onuchic

Prof[a]. Dr[a]. Lourdes de la Rosa Onuchic (Examinador Externo)
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP)
Universidade de São Paulo (USP)

A Jesus, meu Cristo, à minha esposa, Maria Aparecida, a meu pai, Dimas Barbosa, e à minha Mãe, Josefa Gomes (*in memoriam*), pela dedicação, companheirismo e amor, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Jesus, pois, embora muitas pessoas julguem que Ele não existe, o mesmo se mostrou vivo e poderoso, me ajudando a viver e lutar a cada dia, ainda que, em muitas horas, quando faltaram familiares, amigos, alimento, motivação e dinheiro, Ele nunca me faltou e isso me bastou para que eu chegasse até aqui.

Certa vez, Isaac Newton, famoso matemático, físico e teólogo, disse: "se cheguei até aqui é porque estive apoiado sobre o ombro de gigantes". Segue, então, a lista dos gigantes nos quais me apoiei.

Agradeço à minha esposa, Maria Aparecida (Cidinha), pelo carinho, motivação e por compreender a minha ausência devido à minha pesquisa. Saiba que você foi crucial para que eu chegasse até aqui. Ao meu pai, Dimas Barbosa de Oliveira, por ter financiado grande parte da minha pesquisa e, mais do que isso, meus sonhos e minha vontade de ser alguém na vida. À minha mãe (*in memoriam)*, embora fisicamente ausente no final, mas no início do meu mestrado esteve comigo me auxiliando sempre como podia.

À Igreja Adventista do Sétimo Dia, por ter apresentado essa fé que hoje me sustenta e por ter vivido essa fé comigo, me auxiliando, muitas vezes, com alimento e pagando minhas contas quando estive desempregado para que continuasse a estudar.

Ao meu orientador, Silvanio de Andrade, pela compreensão, pela paciência em guiar-me nos meus primeiros passos como pesquisador, por me oferecer abrir diversas oportunidades que jamais vou esquecer, sou, infinitamente, grato.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. John Andrew Fossa e a Profª. Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic, por aceitarem o convite e pelas valiosas contribuições em prol da melhoria do trabalho.

À Prof.ª Dr.ª Emanuela Régia de Sousa Coelho, que, mesmo depois da graduação, me ajudou com conselhos de grande valor sobre o mundo acadêmico, estando sempre disponível toda vez que eu "dava um grito".

A todos os discentes que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

Aos professores e funcionários do Curso de Mestrado, que contribuíram ao longo desses meses, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP), com os quais tive a oportunidade de adquirir mais conhecimento, dos quais destaco Ana Beatriz, Cícero e Jéssica. Aos demais colegas do mestrado, pelo companheirismo.

Às alunas que participaram da pesquisa com tanto afinco e dedicação.

Aos meus familiares e da minha esposa, pela torcida (ainda que, de alguns na minha família, muitas vezes, contrária, mas foi uma motivação para seguir em frente).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 entre os meses de abril e agosto de 2020. Assim, agradeço à CAPES.

À Prefeitura Municipal de Queimadas – PB, pelo transporte que me concedeu em toda minha formação acadêmica. Aos demais funcionários da UEPB, em especial, ao pessoal da biblioteca e da limpeza, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

A todos que, de maneira direta e indireta, contribuirão para isso se tornar realidade.

"A verdadeira Educação significa mais do que avançar em certo curso de estudos. É muito mais que a preparação para a vida presente [...] É o desenvolvimento harmonioso das faculdades físicas, intelectuais e espirituais. Prepara o estudante para a satisfação do serviço neste mundo, e para aquela alegria mais elevada em razão de um serviço ainda mais amplo, relacionado com o mundo vindouro."

Ellen G. White

RESUMO

Esta pesquisa investiga as contribuições da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas aliada às Representações Múltiplas de Álgebra no que tange ao processo de ensino-aprendizagem do conceito de Espaço Vetorial e de alguns conceitos referentes ao mesmo (Operações de Adição e Multiplicação por Escalar, Subespaço Vetorial, Combinação Linear, Dependência Linear, Subespaço Gerado, Transformações Linear e Operador Linear) na formação inicial de professores de matemática. A pesquisa caracteriza-se como qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994; YIIN, 2016), na modalidade pesquisa pedagógica (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008). O estudo foi desenvolvido em uma oficina com alunos de diversos períodos do curso de Licenciatura em Matemática e um de Licenciatura em Física, oriundos de Universidades Públicas situadas no Estado da Paraíba. A oficina foi ministrada, de maneira remota (devido à pandemia causada pelo vírus Sars-Cov-2), por meio do aplicativo WhatsApp (BARBOSA; CARVALHO, 2018). A partir da oficina, foram levantados dados, com atividades planejadas à luz de Friedlander e Tabach (2001) e desenvolvidas utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas (ANDRADE, 1998, 2017). Para auxiliar no levantamento de dados, foi construído e entregue aos participantes um questionário sobre o desenvolvimento da oficina e as metodologias utilizadas na mesma. O instrumento de análise das entrevistas deu-se via o Discurso do Sujeito Coletivo – DSC (LEFÉVRE; LEFÉVRE, 2005), instrumento de análise desenvolvido recentemente no Brasil. As descrições e a análise dos encontros e dos questionários apontam que, através da oficina, os discentes puderam entender a importância da concepção de estrutura que os conceitos de Álgebra Linear têm para a compreensão dos conceitos matemáticos do ensino fundamental, médio e superior. Destaca-se, então, a relevância da mediação-refutação do pesquisador que foi proporcionada as discentes na Oficina, sobretudo, nos diálogos, quando os alunos apontam que essas interações os fazem refletir sobre o seu próprio processo de ensino-aprendizagem e acerca da sua futura atuação como docentes na Educação Básica. Dessa forma, ao tratar do ensino de Espaços Vetoriais, foi notório o avanço dos discentes, principalmente, para expressar as resoluções dos problemas na linguagem matemática. Portanto, os resultados evidenciaram que as Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas favorecem um ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais com mais compreensão. Conclui-se, assim, que a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas contribui para a construção de uma concepção sobre o ensino de Espaços Vetoriais.

Palavras-Chave: Exploração-Resolução-Proposição de Problemas. Espaços Vetoriais. Formação Docente. Educação Algébrica.

ABSTRACT

The current research investigates the contributions of Exploration-Solving-Posing of problems aligned to the Multiple Representations in Algebra in what concerns the teaching-learning process of the concept of Vectorial Space and other significant concepts (Addition and Multiplication by Scalar Operations, Linear Subspace, Linear Combination, Linear Dependency, Generated Subspace, Linear Transformations, and Linear Operator) on the initial teacher education of mathematics teachers. The research carries out a qualitative method (BOGDAN; BIKLEN, 1994; YIIN, 2016), in the perspective of a pedagogical research (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008). The study has been developed in a workshop with students from distinct semesters of the Mathematics Teaching Course and also with a student from a Physics Teaching Course, both from public universities in the Brazilian state of Paraíba. The lectures in the workshop were carried out remotely (due to the pandemic situation caused by the virus Sars-Cov-2), throughout the application WhatsApp (BARBOSA; CARVALHO, 2018). Furthermore, this strategy supports the data gathering through planned activities highlighted from Friedlander and Tabach (2001), and it was developed with the teaching-learning methodology of Mathematics and Exploration-Solving-Posing of problems (ANDRADE, 1998; 2017). In order to support this method and the data gathering, the research set up and delivered to participants a questionnaire about the workshop development and its methodologies. The analysis tool of interviews considered the Discourse of the Collective Subject – DCS (LEFÉVRE; LEFÉVRE, 2005), an instrument of analysis recently developed in Brazil. The descriptions and investigation of the meetings and interviews point out, throughout the workshop, that the students were able to understand the importance of how the structural conception of Linear Algebra has to the comprehension of mathematical concepts of elementary, high, and superior education. The research highlights, on this perspective, the relevance of the mediation-refutation of the researcher carried out to the students on the Workshop, mainly on the dialogues, in which the students point out the interactions made them consider their own process of teaching-learning and about their future acting as teachers on the elementary education. Considering this context, while concerning the Vectorial Space, it is clear the advance on teachers, mainly to express the problem resolutions on the mathematical language. Concluding, the results highlighted that the Multiple Representations in Algebra and the transition between them support a teaching-learning of Vectorial Spaces with better understanding. In addition, the methodology of mathematics teaching-learning throughout

Exploration-Solving-Posing of problems contributes with a conception on the teaching of Vectorial Spaces.

Keywords: Exploring-Solving-Posing. Vectorial Spaces. Teacher Education. Algebra Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao decorrer de minha jornada acadêmica no curso de Licenciatura em Matemática, foi-me proporcionado diversas oportunidades no âmbito da pesquisa, do ensino e da extensão, introduzindo-me, assim, no campo teórico e profissional da Educação Matemática. Essas oportunidades vieram tanto de programas oferecidos pela Universidade, a exemplo do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) e Monitorias em disciplinas da graduação, quanto por meio de vínculos empregatícios exercendo a função de Professor de Matemática na rede pública e privada. Tal trajetória me possibilitou uma inquietação acerca da maneira como o processo de ensino-aprendizagem de Matemática era realizado na graduação, em especial, na disciplina de Álgebra Linear (AL).

Enquanto cursava a disciplina de AL, percebi que grande parte dos discentes não compreendia o que estava sendo ministrado pelo docente e o índice de reprovação acompanhava os alunos que não entendiam o conceito de Espaços Vetoriais e outros que o tangenciam. Entretanto, vale salientar que esse não é um caso isolado. De acordo com Celestino (2000), a disciplina de Álgebra Linear é uma das que tem um número de reprovações mais elevado nos cursos na área de ciências exatas nas Universidades Brasileiras. Neste aspecto, Coimbra (2008, p. 61) afirma que "já está evidenciado que o problema de grande índice de reprovação em Álgebra Linear é decorrente dos problemas relacionados ao ensino dessa disciplina", em seguida, o autor discorre que os professores da disciplina não constatam o fracasso do ensino tradicional de Álgebra Linear.

Bianchini e Machado (2018) afirmam que o problema da pouca compreensão dos conceitos de Álgebra Linear ainda persiste no processo de ensino-aprendizagem, todavia, as pesquisas têm avançado para a mudança desse cenário.

Pesquisas como as de Celestino (2000), Coimbra (2008) e Bianchini e Machado (2018) despertam o surgimento de uma reflexão, por parte do leitor, acerca da responsabilidade de devolver uma contribuição científica ao campo de formação de professores e ao ensino de Álgebra Linear, um ensino baseado na compreensão, um ensino baseado no objetivo de formar professores que atuarão na Educação Básica. Nesse sentido, conforme Prado e Bianchini (2018, p. 88), é "urgente a necessidade de reestruturação de disciplinas que abordem conceitos específicos de Matemática, pois é preciso estabelecer articulações entre as noções de Educação Matemática, noções de Matemática e noções matemáticas ensinadas na Educação Básica".

Partindo desses pressupostos, no que tange à licenciatura em Matemática, cabe-nos questionar: como tornar o processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear mais proveitoso para futuros professores de matemática? Como proporcionar a esses licenciandos o entendimento de conceitos dos Espaços Vetoriais (EV) e de suas transformações?

No programa de pós-graduação, como aluno em diferentes disciplinas, amadureci minhas indagações e, ao aprofundar nossa revisão de literatura e em consonância com o orientador, delimitamos nosso objeto de estudo e demos prosseguimento a esta investigação, buscando responder ao seguinte questionamento: *Que contribuições a Metodologia da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas (ERP) aliada à Teoria das Representações Múltiplas de Álgebra pode proporcionar ao processo de ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais na licenciatura em Matemática?* Almejando encontrar uma resposta consistente para tal questionamento, partimos dos seguintes objetivos de pesquisa:

- **Objetivo Principal**:

- Analisar as contribuições da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas aliada às Representações Múltiplas de Álgebra ao ensino de Espaços Vetoriais na licenciatura em Matemática.

- **Objetivos Específicos:**

- Proporcionar aos licenciandos em matemática reflexões quanto à aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear para uma atuação na Educação Básica através da ERP;

- Desenvolver problemas que possibilitem a geração dos conceitos que serão trabalhados;

- Possibilitar experiências com a utilização da ERP aliada às Representações Múltiplas de Álgebra;

- Descrever as contribuições das Representações Múltiplas para o processo de ensino dos conceitos que serão trabalhados.

No que tange à fundamentação teórica de nossa pesquisa, destacamos os trabalhos de Celestino (2000), Coimbra (2008), Prado (2016) e Ferreira (2017a, 2017b), Mutambara e Bansilal (2018) e Leivas (2020), uma vez que, através de tais autores, é possível perceber que há necessidade de um ensino de Álgebra Linear com mais compreensão, que não se limite à apresentação de teoremas e corolários, que seja ligado a assuntos da Educação Básica e outros assuntos de nível superior vistos em paralelo, um ensino que seja voltado às características axiomáticas desses conceitos, possibilitando, então, a reflexão.

O trabalho aqui apresentado buscou diferenciar-se das pesquisas existentes, ao desenvolver uma Oficina com os alunos da Licenciatura em Matemática de diversas Universidades Públicas no Estado da Paraíba, procurando proporcionar, por meio da metodologia de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, uma compreensão de Espaços Vetoriais e de alguns conceitos que o tangenciam, tais como: Subespaços Vetoriais, Operações de Multiplicação por Escalar e Soma, Combinações Lineares, Bases e Transformações Lineares.

A Oficina foi elaborada de forma remota por meio do aplicativo WhatsApp devido à pandemia causada pelo vírus Sars-Cov-2. Esta teve como finalidade não somente levantar dados, mas desenvolvê-la de modo que as ideias exploradas e fortalecidas possam contribuir tanto para a formação específica dos licenciandos em Matemática, quanto para a formação pedagógica dos futuros professores, podendo, assim, fundamentar, posteriormente, suas práticas docentes.

Esta dissertação de mestrado está organizada em cinco capítulos, repartidos da seguinte forma: no primeiro capítulo, contemplamos esta introdução; no segundo capítulo, trazemos a nossa fundamentação teórica e o levantamento bibliográfico, objetivando situar o leitor em nossa pesquisa. Assim, apresentamos, inicialmente, considerações relacionadas à formação inicial do licenciando em matemática e à Álgebra, bem como concepções de Álgebra ao longo da história. Em seguida, trazemos o levantamento de dissertações e teses realizadas nos últimos anos sobre esta temática, como também uma discussão sobre o ensino de Espaços Vetoriais, as Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Álgebra Linear e a ERP como Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática.

No terceiro capítulo, discorremos sobre a forma como este trabalho foi desenvolvido. Desse modo, apresentamos a natureza da pesquisa, a caracterização dos sujeitos da pesquisa e, também, as justificativas para a escolha da Pesquisa Qualitativa na modalidade Pesquisa Pedagógica, o instrumento de levantamento de dados e sua descrição, além de detalhar como ocorreu a metodologia de análise do questionário.

No quarto capítulo, apresentamos a descrição das atividades desenvolvidas por intermédio da oficina com os alunos da licenciatura em Matemática, bem como as análises e discussões destas, além das análises dos questionários baseadas no Discurso do Sujeito Coletivo (LEFÈVRE; LEFÈVRE, 2005). Optamos por fazer isso conjuntamente, por percebermos que, em alguns momentos, a separação não propiciaria ao leitor clareza suficiente das vivências deste momento tão importante de nossa pesquisa; por fim, no quinto capítulo, trazemos nossas considerações finais.

2 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ESPAÇOS VETORIAIS NA PERSPECTIVA DA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, apresentamos a fundamentação teórica e o levantamento bibliográfico da pesquisa, para, assim, situarmos o leitor no estudo aqui desenvolvido, de modo que se possa compreender as discussões atuais sobre o tema, perceber a relevância desta pesquisa para o ensino de Espaços Vetoriais e identificar novos enfoques teórico-metodológicos.

Para tanto, expomos, primeiramente, aspectos e reflexões iniciais relacionadas à Formação Inicial do professor de Matemática e à Álgebra Linear, como também uma discussão sobre a Álgebra e seu processo de ensino-aprendizagem ao longo da história. Em seguida, trazemos o levantamento de dissertações e teses realizadas nos últimos anos acerca desta temática e, também, uma discussão sobre: o ensino de Espaços Vetoriais, as Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Espaços Vetoriais e a ERP como Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática.

2.1 Reflexões sobre a formação inicial do professor de Matemática

Esta pesquisa versa sobre o processo de ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais em uma instancia de fundamental importância para o professor de matemática: sua formação inicial. Partindo deste pressuposto, para situarmos nossa discussão sobre os Espaços Vetoriais, começaremos discorrendo sobre este tema.

A Licenciatura é um requisito fundamental para que se possa lecionar Matemática no Brasil, assumindo, assim, todas as responsabilidades e direitos da atividade docente na educação básica. Embora não seja esta a realidade na qual se encontra os sistemas educacionais brasileiros (municipais, estaduais e federal), o Plano Nacional de Educação (PNE) nº 13.005/2014, que se constitui por 20 metas das quais a 15ª discorre que "todos os professores e as professoras da educação básica possuam formação específica de nível superior, obtida em curso de licenciatura na área de conhecimento em que atuam". (Meta 15, PNE 2011-2020, p. 48).

Sobre essa formação, foram verificados, por parte do pesquisador, diversos documentos brasileiros, entre 2001 a 2020, que discorrem acerca das normas que regem a formação de professores de Matemática, dentre os quais, é viável e de grande valia destacar as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), parecer nº CNE/CES 1.302/2001, em que se afirma que os cursos de Licenciatura em Matemática (LM) têm como objetivo desenvolver as seguintes características nos seus licenciados: i) visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos; ii) visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania; iii) visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que, muitas vezes, ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.

Tendo como princípios norteadores as características citadas anteriormente, as instituições de ensino superior (IES) têm liberdade para redigir o currículo de seus cursos de Licenciatura em Matemática, todavia, as mesmas devem contemplar, ao longo do curso, conteúdos como: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, dentre outros, de modo que essas visões citadas anteriormente sejam contempladas. Entretanto, a realidade parece diferir do que está escrito nos documentos oficiais. Nesse sentido, a não compreensão dos conceitos Matemática na graduação, mais especificamente, da Álgebra Linear vem levando a “altos índices de reprovação a nível planetário, ou seja, não apenas no Brasil, o ensino desta matéria tem sido merecedor da atenção de muitos pesquisadores” (COIMBRA, 2008, p. 7).

Seguem, então, as seguintes indagações: se os discentes não compreenderem os conceitos, como possuirão as visões descritas nos documentos oficiais? Por que o ensino-aprendizagem de matemática na formação inicial parece não preparar para que o professor de matemática tenha essa concepção apresentada nos documentos? O que está causando um aprendizado de matemática aquém do desejado? O que faz com que o processo de ensino-aprendizagem esteja desvinculado de um contexto sócio-histórico? O que há na formação inicial que faz com que o licenciando tenha, em sua sala de aula (tanto como aluno universitário quanto como professor na educação básica), uma ação didática que, cada vez mais, se parece com um “curso de nivelamento” do que um efetivo aprendizado não só de métodos, mas de conceitos que serão acessíveis a todos e utilizáveis no cotidiano de forma crítica e transformadora? De onde vem essa postura dos formadores de professores de matemática?

Não buscamos responder todas essas perguntas aqui, pois tais respostas têm diversas origens e pesquisas que se dedicam exclusivamente para esse tema, todavia, através de autores como Ferreira (2017a, 2017b), Silva (2013) e Cury (2001) se é possível afirmar que parte dessas respostas se encontram nas salas de aula da formação inicial.

De acordo com Cury (2001), mais precisamente em 1934, originaram-se na Universidade de São Paulo com o intuito de formar professores para o ensino secundário, as primeiras faculdades de Filosofia, Ciências e Letras. O modo como eram formados os licenciados em matemática, nessa época, ficou denominado como "3+1", isto é, ao graduando, ao final de três anos de disciplinas específicas do curso de matemática, era conferido o título de bacharel em Matemática, posteriormente, após um ano cursando disciplinas com cunho educacional, tais como, Psicologia Educacional, Laboratório de Ensino de Matemática, Didática, dentre outras, que, juntamente com estas, foram acrescidas na década de 1970 e o estágio supervisionado em 1980, recebia o diploma de licenciado em Matemática.

Todavia, mesmo depois dos cursos de matemática passarem a serem ministrados nos institutos de matemática das universidades tanto privadas quanto públicas, o corpo docente era constituído por engenheiros e bacharéis em Ciências Físicas e Matemáticas, que valorizavam, extremamente, os conteúdos matemáticos em detrimentos dos métodos de ensino. De acordo com Cury (2001), esses docentes alegavam que sua preocupação era apenas com o ensino específico, deixando, para os professores da área de educação, a preocupação com a sala de aula.

Posturas como essa, apresentada por professores que se diziam "especialistas", traziam, para a sala de aula dos alunos dos cursos de licenciatura, uma matemática absolutista, pois os docentes eram tomados como modelos em opiniões e posturas. Desse modo, os discentes carregavam tais posturas dos corredores da universidade para suas respectivas salas de aula, trabalhando com uma matemática que é feita de verdades absolutas e que representa o domínio único do conhecimento incontestável. Concepções como estas refletiam nas práticas que, infelizmente, permeiam até o dia de hoje em departamentos de matemática e em salas de professores, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior.

Esse histórico, apresentado de maneira sucinta, é de suma importância para a compreensão da origem de certos modelos de ensino que temos hoje e, por conseguinte, para o entendimento dos problemas que existem no ensino-aprendizagem da matemática, tanto no ensino básico quanto na educação superior, tendo em vista o cenário educacional atual, em que podemos destacar a "desarticulação entre teoria e prática, entre formação específica e pedagógica e entre formação e realidade escola" (FIORENTINI, 2003, p. 12).

Para Cury (2001), grande parte dos docentes que compõe os departamentos de matemática nas instituições de ensino superior é composto por professores da área de Matemática pura ou aplicada em contraste com os poucos na área de Educação ou Educação Matemática. Contudo, o problema central não se encontra nesse dado, mas, sim, no fato de que grande parte desses professores trazem uma visão absolutista da matemática – advinda da época em que a formação pedagógica era separada da formação matemática, denominada como 3+1, como dita anteriormente, e como, predominantemente, os docentes pensam desse modo, isso "faz com que o modelo para os futuros licenciados seja o dos docentes das disciplinas de Cálculo, Álgebra, Geometria, Álgebra Linear, Análise Matemática" (CURY, 2001, p. 20). E como é a prática desses professores? De acordo com Cury (2001), tais docentes

> consideram, muitas vezes, que o mais importante é "passar" uma grande quantidade de conteúdos, espremidos, também, pelos programas e cronogramas a cumprir. Esquecem-se, no entanto, de que estão lecionando em cursos de formação de professores e não de bacharéis em Matemática." (CURY, 2001, p. 20).

Essa prática de ensino que diverge da que está escrita nos documentos oficiais de tal forma que prejudica, consideravelmente, os discentes dos cursos de formação inicial de professores de matemática e essa divergência acarreta em diversos problemas, dentre os quais "a valorização do conteúdo da área em detrimento dos conhecimentos pedagógicos" (SILVA, 2013, p. 73), valorização esta que implica na falta de diálogo entre as disciplinas pedagógicas e da área de matemática (um dos fatores que, se revertidos, acreditamos e defendemos, neste trabalho, que será de grande valia para a formação e professores). Sobre a necessidade dessa integração, Gonçalves e Gonçalves (1998, p.118 *apud* Cury 2001, p. 21) afirmam que:

> se torna indispensável que estes professores, formadores de professores, trabalhem para estabelecer, quando possível, a relação existente entre as disciplinas de conteúdos específicos e as de conteúdos pedagógicos, bem como entre aquelas de conteúdos específicos e conteúdos pedagógicos que fazem parte dos cursos de formação. Temos consciência de que esta última articulação só será possível a partir do momento em que haja, por parte dos professores dos departamentos de conteúdos específicos e os da faculdade de educação, clareza dos objetivos do curso e do perfil do profissional que estão formando, não considerando uma disciplina mais relevante do que outra.

Sobre esse tema, Martins (2019, p. 19) versa que, há décadas, existe a necessidade de "discussões entre a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) a respeito da licenciatura em Matemática". Essa necessidade já existente foi considerada ainda mais importante durante o IV Fórum Nacional de Licenciaturas em Matemática, ocorrido em 15 e 16 de abril de 2011, na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE/USP). Nesse evento, houve uma iniciativa para uma elaboração de um documento com uma análise crítica dos Referenciais Curriculares Nacionais para Cursos de Licenciatura em Matemática.

Documento esse que foi publicado pela SBEM em fevereiro de 2013, com o título "A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/ SBM". Tal documento afirmava que o curso de Licenciatura em

Matemática atual ainda se assemelha bastante com o primeiro curso de Matemática, criado na Universidade de São Paulo (USP), em 1934:

> Na maioria das instituições, as disciplinas ainda são agrupadas em conteúdo específico e conteúdos pedagógicos, com tendência a valorizar mais o primeiro grupo que o segundo, mesmo em se tratando da formação do professor de Matemática e não do bacharel em Matemática. (SBEM, 2013, p. 04).

A SBEM (2013), ainda versando sobre a formação de professores de matemática, no que tange ao ensino de Álgebra Linear, declara que, apesar da importância que este campo da matemática tem, "é necessário focar seu escopo quando consideramos um currículo de licenciatura em Matemática para preparar um professor de Ensino Médio que reflita as necessidades atuais, tendo em vista o contexto escolar" (SBEM, 2013, p. 29).

Esse documento ainda afirma que o conteúdo curricular de Ensino Médio inclui diversos temas, como: funções afins, gráficos destas mesmas funções, como retas num plano cartesiano, mas não é comum trabalhar o conceito de linearidade que pode estar presente ou ser observado em fenômenos ou experimentos. Os discentes aprendem a escrever a equação de uma reta e a estudar os elementos da mesma, todavia, raramente, investigam a natureza linear. Segundo o documento, os professores devem conhecer o significado da multiplicação de matrizes ou das operações sobre as linhas das matrizes do algoritmo de escalonamento para resolução de sistemas lineares. Um currículo para licenciatura deve apresentar um tópico de matrizes e suas operações e, também, deve dar significados aos determinantes de matrizes 2 x 2 ou 3 x 3, significados estes que explorem para além do seu uso na Regra de Cramer ou alguns exercícios mecanizados.

É sugerido pelo documento da SBEM que os trabalhos em Álgebra Linear com exemplos visualmente concretos de objetos e conceitos lineares possam ser uma ponte para uma abordagem adequada de um curso de Álgebra Linear para a licenciatura, além de ser desejável que a conexão entre a geometria e a álgebra seja contemplada em um curso de Álgebra Linear, trazendo significados para os conceitos teóricos da disciplina, de modo a capacitar o professor no tratamento adequado do conteúdo curricular do Ensino Médio.

No que tange aos tópicos, os sistemas de equações lineares gerais com interpretação geométrica do espaço de soluções em dimensões 2 e 3, o conceito de espaços vetoriais, os conceitos de base e dimensão no caso finito, a mudança de base relacionada com mudança de referencial, especialmente em dimensões 2 e 3, são elementos que constroem uma ponte para o conteúdo escolar, isto é, na medida do possível, o currículo deve trabalhar em dimensões gerais, mas uma ênfase em dimensões 2 e 3, com a linguagem própria da Álgebra Linear, permitirá uma visão do licenciado para as extensões teóricas desta disciplina.

Já a ideia de espaços gerados por combinações lineares é nova em relação ao currículo do ensino médio, mas ela está na base do pensamento sobre a linearidade de conceitos e fenômenos e deve ser trabalhada de acordo, enfatizando os exemplos em dimensões 2 e 3.

A SBEM (2013) recomenda que, na formação de professores de matemática, no que diz respeito à Álgebra Linear, o formador de professor deve trabalhar o tópico de transformações lineares, enfatizando aquelas entre espaços de dimensão finita, com exemplos em dimensões 2 e 3, e matrizes de transformações lineares, transformações como reflexão axial, reflexão pontual, rotação, projeção ortogonal, isometrias e homotetias, estudadas junto com suas matrizes e propriedades geométricas, formando, assim, um conhecimento essencial do professor no ensino da geometria em nível básico.

Ainda sobre a SBEM (2013), a teoria de operadores pode integrar o currículo de licenciatura, fazendo conexão com a matemática do Ensino Básico, especialmente, as isometrias e homotetias que dão significado geométrico, por exemplo, ao produto de matrizes no currículo nesse nível de ensino, pois essa teoria de autovalores, autovetores e diagonalização de operadores é um tópico que introduz o futuro professor às aplicações relevantes do mundo atual, com exemplos que podem ser compreendidos em nível de Ensino Médio.

Tendo como pressupostos essas características, concepções e princípios da formação inicial de professores de matemática estão presentes nos discursos de pesquisadores da Educação Matemática, que se debruçam para conceber subsídios teórico-metodológicos facilitadores do ensino e da aprendizagem de matemática, tornando-os o mais eficaz possível. Prado e Bianchini (2018) declaram que o estudo de alguns conceitos de AL são fundamentais para o professor de matemática, pois aprofunda o entendimento de Estruturas Algébricas e de propriedades essenciais dos conceitos que são ministrados na Educação Básica. Todavia, esse curso de AL é focado em um profissional que atuará na educação básica fazendo relações com os conceitos matemáticos que o futuro docente ministrará?

Defronte a esse cenário, este trabalho versa sobre uma proposta de ensino-aprendizagem de conceitos de AL embasada na metodologia de ERP aliada à teoria das Representações Múltiplas, proposta esta que pretende apresentar os conhecimentos de Espaços Vetoriais (EV) e conceitos tangentes ao mesmo.

2.2 Concepções de Álgebra e de seu processo de ensino-aprendizagem

A Álgebra é um ramo da matemática cuja presença é notada nos currículos em todos os níveis, sejam eles a Educação Básica ou o Ensino Superior, nos mais diversos cursos de Licenciatura, Bacharelado, Pós-Graduação, dentre outros. Este ramo compreende diversos campos da matemática, tais como: Teoria dos Números Algébricos, Álgebra Comutativa, Geometria Algébrica, dentre outras, tendo, em cada campo, o seu objeto de estudo, suas ramificações, interseções, suas aplicações e suas especificidades.

Segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a partir da Carta Régia de 19 de agosto de 1799 surgiu o interesse legal em fazer com que a Álgebra adentrasse no ensino brasileiro. De acordo com este documento, a Álgebra seria introduzida de forma independente, assim como a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria, disciplinas que já faziam parte do ensino básico.

Mas, em meio a esse percurso histórico, pode-se emergir a seguinte indagação: o que é álgebra? No século XVIII, de acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014), a Álgebra poderia ser compreendida de duas formas: ou pela determinação de incógnitas, a partir do uso de signos e símbolos e a manipulação deles ou como uma aritmética generalizada. Mesmo com essa definição, essa indagação vem perpassando séculos e, de acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014), Matemáticos, Educadores Matemáticos, pesquisadores, estudantes e professores concebem a mesma como: matéria da escola, aritmética generalizada, ferramenta, linguagem, cultura, modo de pensamento ou mesmo uma atividade.

Com o alvorecer do século XIX, estabeleceu-se um debate sobre a natureza da álgebra, debate esse motivado pelos trabalhos dos matemáticos George Peacock (1791-1858), Augustus de Morgan (1815-1864) e Evariste Galois (1811-1832). Conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), duas concepções de Álgebra eram evidenciadas nesse debate. A primeira se tratava sobre uma tendência tradicional, em que a Álgebra era considerada como uma Aritmética universal ou generalizada e, a segunda, uma tendência moderna, em que a Álgebra consistia em um sistema simbólico postulacional. Com intuito de desenvolver uma análise sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) identificam algumas concepções que serão apresentadas a seguir.

A primeira concepção de álgebra é denominada Processológica, que é caracterizada por um conjunto de métodos e técnicas usadas para resolver certos tipos de problemas. Nessa concepção, não há exigência de uma linguagem que tenha o intuito de expressá-la. Os procedimentos, nessa concepção, constituem-se como técnicas algorítmicas que tem como base uma sequência padronizada de passos.

A segunda concepção é chamada de Linguístico-Estilística. Ela é uma linguagem específica que foi originada com o intuito de expressar os procedimentos. Nessa concepção, se origina uma distinção entre forma de pensamento e de expressão, uma vez que ela defende a não suficiência da existência de um pensamento algébrico com o objetivo de que a álgebra se constitua em um campo autônomo do conhecimento matemático.

A terceira concepção de álgebra é a Linguístico-Sintática-Semântica. Esta é uma linguagem – específica e concisa – em que exige uma compreensão dos signos e dos símbolos. Nessa concepção, há uma exigência à consciência de que a linguagem algébrica deve ser verdadeiramente simbólica para adquirir a dimensão operatória e mostrar o seu poder transformacional e instrumental.

Por último, a linguagem postulacional, como o próprio nome prediz, também é considerada como uma linguagem, todavia, de maneira um tanto distinta das anteriores, ela amplia os significados dos símbolos e signos:

> Neste contexto, os signos linguísticos representam não apenas uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas entidades Matemáticas que não estão sujeitas ao tratamento quantitativo, por exemplo, estruturas topológicas. Com esta concepção, entende-se a álgebra como uma ferramenta para todos os campos (SOUZA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 27).

Os autores não especificam sobre a Álgebra do ensino superior, mas, após a leitura desse material, se entende, neste trabalho, Álgebra Linear como uma linguagem postulacional, pois, nessa concepção, entende-se a álgebra como estendendo seu domínio a “todos os campos da Matemática, atingindo um nível máximo de abstração e generalização” (MARTINS, 2019, p. 23).

Este campo da matemática, Álgebra Linear, como é denominado o ramo que estuda os Espaços Vetoriais, tem sua utilidade e estende seu domínio aos mais diversos campos da matemática, seja a Análise Funcional (que são os estudos de Espaços Vetoriais em Dimensão infinita), a Geometria Diferencial (que tem interseções da Álgebra Linear com o Cálculo Diferencial), a Teoria das Representações (que tem um grande diferencial ao simplificar muitos problemas de Álgebra Abstrata, reduzindo-os a problemas mais simples de Álgebra Linear).

Entende-se, também, que a Álgebra Linear possui uma generalização e uma abstração muito elevada. Sobre isso, Dorier *et al*. (2000) disserta que justamente esse caráter abstrato e de uma generalização em um nível superior é um dos motivos pelos quais os estudantes têm tantas dificuldades em assimilar conceitos como Espaços Vetoriais.

A caráter de exemplo do argumento apresentado no parágrafo anterior, os elementos que compõe um espaço vetorial são chamados de vetores, entretanto, nem sempre os vetores são aqueles elementos do plano cartesiano. Isso é um erro nas salas de aula de AL, pois o aluno, muitas vezes, trata a AL como uma continuação do curso de Geometria Analítica e acarreta problemas no processo de ensino-aprendizagem de AL, como afirma Prado e Bianchini (2018). Vetores, por definição, são, de fato, elementos de um espaço vetorial, em que o mesmo satisfaz os seguintes axiomas, de acordo com Lima (2011, p. 1):

> Um espaço vetorial E é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores $u, v \epsilon E$ faz corresponder um novo vetor $u + v \epsilon E$, chamado a soma de u e v, e a multiplicação por um número real, que a cada número $\alpha \epsilon$ $\mathbf{R}$ (conjunto dos reais) faz corresponder um vetor $\alpha \cdot v$, ou αv, chamado produto de α por v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \epsilon$ $\mathbf{R}$ $e\ u, v, w \epsilon E$, as condições abaixo, chamadas os axiomas de espaço vetorial:
>
> **1 Comutatividade:** $u + v = v + u$;
> **2 Associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)\ e\ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
> **3 Vetor nulo:** existe um vetor $0 \epsilon E$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $v + 0 = 0 + v$ para todo $v \epsilon E$;
> **4 Inverso aditivo:** para cada vetor $v \epsilon E$ existe um vetor $-v \epsilon E$, chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de v, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;
> **5 Distributividade:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v\ e\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
> **6 Multiplicação por 1:** $1 \cdot v = v$.

Logo, mesmo se o conjunto não for o $\mathbf{R}^2$, mas, sim, $M(mxn)$, uma matriz desse conjunto será chamada de vetor, pois o conjunto $M(mxn)$ satisfaz os axiomas acima. De maneira análoga, o conjunto $\boldsymbol{F}(X; \mathbf{R})$, que é o conjunto de todas as funções reais $f, g: X \to \mathbf{R}$, em que X é um subconjunto de $\mathbf{R}$, torna-se um Espaço Vetorial e uma função $f: X \to \mathbf{R}$ se chama vetor. Portanto, a concepção de AL, no trabalho aqui apresentado, se torna um elemento pertencente a essa concepção de Álgebra postulacional devido ao seu caráter de abstração e de sua generalização em um alto nível, além de a mesma ser uma linguagem específica e concisa que é imersa em signos e símbolos.

Sabendo, então, a qual concepção julgamos pertencer a Álgebra Linear, seguem as concepções descritas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) sobre a Educação Algébrica. Os autores têm o intuito de tornar clara a especificidade da Álgebra e sua função na história do pensamento humano.

As concepções de Educação Algébrica, ao longo da história, se manifestaram e foram repercutidas antes, durante e depois do Movimento da Matemática Moderna. A primeira das concepções de Educação Algébrica é denominada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) de "linguístico-pragmática", que está entrelaçada em uma proposta Linguístico-Sintática-Semântica de álgebra. Nessa concepção de Educação Algébrica, a aquisição (ainda que mecânica) de técnicas de manipulação algébrica seria necessária e suficiente para que o discente obtivesse a capacidade de resolver problemas, logo, o objetivo principal era fazer com que o aluno assimilasse essa linguagem algébrica já previamente constituída e consolidada.

Esse transformismo algébrico – que é o "processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 83) – é totalmente independente de objetos, sejam eles concretos ou ilustrações, uma vez que ele se "caracteriza por uma sequência de tópicos que, partindo do estudo das expressões algébricas, passava pelas operações, chegando às equações, para, finalmente, utilizá-las na resolução de problemas" (MARTINS, 2019, p. 24). Segue um exemplo:

Exemplo 1 (linguístico-pragmática): Verifique se o subconjunto do R^2 a seguir é linearmente independente,

$$\beta = \{ (1,3), (2,5) \}$$

Solução: Se β for Linearmente Independente, então existem $a, b \in R$ tais que:

$$a(1,3) + b(2,5) = (0,0) \rightarrow (a, 3a) + (2b, 5b) = (0,0) \rightarrow (a + 2b, 3a + 5b) = (0,0)$$

Da última equação, obtemos o sistema linear.

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 3a + 5b = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema, obtêm-se:

$$a = -2b \quad *$$

E substituindo * na segunda equação, obtêm-se:

$$3(-2b) + 5b = 0 \rightarrow -6b + 5b = 0 \rightarrow -b = 0 \rightarrow b = 0$$

Substituindo $b = 0$ em * obtemos:

$$\therefore a = b = 0$$

Portanto, β é Linearmente Independente.

Por mais que aparente ser desenvolvido de uma forma independente de um transformismo algébrico, majoritariamente, as questões que envolvem solucionar um problema (que se trata de verificar se um conjunto é linearmente independente ou linearmente dependente) seguem, também, uma espécie de transformismo algébrico mais parecido com um algoritmo: tomar números reais com o intuito de chegar a um sistema linear e resolvê-lo. Uma indagação que surge é: será que apenas saber o algoritmo para solucionar esses sistemas lineares é suficiente para o aluno compreender o conceito por trás desses transformismos algébricos?

A segunda concepção de Educação Algébrica – entrelaçada pela concepção da álgebra linguístico-postulacional – é chamada "fundamentalista-estrutural". Segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), quem aderia a essa forma de conceber a Educação Algébrica entendia a álgebra como elemento estruturante de todos os ramos da matemática, assim, o discente conseguiria entender a álgebra se compreendesse, fundamentado em justificativas lógicas, todas as passagens encontradas numa transformação algébrica. Segue um exemplo para que tenhamos uma melhor noção do que se trata esse modelo de Educação Algébrica:

Exemplo 2[1] (linguístico-postulacional): prove que o axioma da comutatividade de vetores em um espaço vetorial pode ser consequência de outros axiomas.

Solução: Lancemos mão de todos os outros axiomas de um espaço vetorial[2], menos a comutatividade, teremos, então,

$$u+u+v+v= \; 2u+2v=2(\,u+v)=(u+v)+(u+v) \qquad \textit{lançando do axioma } 5.$$

$$Somando(-u) \text{ à } esquerda\ e\ (-v) \qquad \textit{lançando mão os axiomas } 2{,}3 \textit{ e } 4.$$

$$(-u)+u+u+v+v+(-v)=(-u)+\; u+v+u+v+(-v) \rightarrow$$

$$\rightarrow =0+u+v+0=0+v+u+0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad u+v=v+u$$

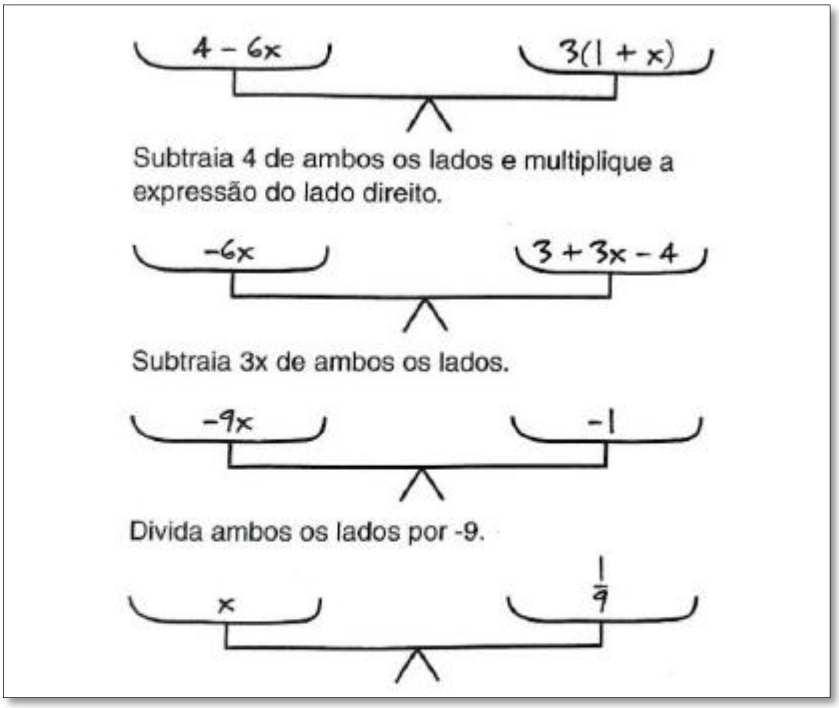
A terceira concepção de Educação Algébrica, que se faz presente no período que sucede a Matemática Moderna, é denominada "fundamentalista-analógica" e tem como característica uma junção dos conceitos existentes nas outras duas concepções anteriores. Na mesma, se faz presente tanto o valor instrumental da álgebra quanto o aspecto fundamentalista (todavia, não mais do que de uma maneira lógico-estrutural) que justifica as passagens presentes no

[1] Levando em consideração dos axiomas apresentados anteriormente.

transformismo algébrico, fazendo com que a álgebra pareça, de uma certa forma, como uma "álgebra geométrica", isto é, lançando mão do uso de balanças ou mesmo de figuras geométricas para uma melhor visualização, a fim de que os mesmos tenham uma melhor justificação das passagens presentes no transformismo algébrico. Segue um exemplo para compreensão:

Exemplo 3: Resolução da equação $4 - 6x = 3(1 + x)$ utilizando a balança.

Figura 1 - Balança de equações.



Fonte: Martins (2009, p. 26).

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) destacam que o importante em uma educação algébrica é o pensamento algébrico (que as três concepções de educação algébrica não centraram). Nessa perspectiva, Ponte, Branco e Matos (2009), dissertando sobre o pensamento algébrico, apontam que ele é algo amplo e que compreende diversas competências, como: lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, funções, estruturas matemáticas, que podem ser usadas na interpretação e Resolução de Problemas matemáticos ou não.

Partindo desse pressuposto, tanto Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) quanto Ponte, Branco e Matos (2009) enfatizam que o trabalhar com a Álgebra não se limita ao domínio do simbolismo formal, mas, sim, que aprender Álgebra implica ter a habilidade de pensar algebricamente nas mais diversas situações. Convergindo com essas concepções, Van de Walle (2009, p. 287) afirma que "o pensamento algébrico envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativo e explorar os conceitos de padrão e de função".

Mesmo levando em consideração que esse conceito de pensamento algébrico está, majoritariamente, em trabalhos que tratam da Educação Básica, ele pode ser aplicado, perfeitamente, no ensino de Álgebra Linear e, principalmente, no que diz respeito aos Espaços Vetoriais, haja vista que os Espaços Vetoriais não são uma continuidade do estudo do cálculo vetorial, mas, sim, uma estrutura algébrica munida das operações de adição e multiplicação por escalar que satisfazem certos axiomas.

Tendo por base essas considerações, este trabalho conceberá o ensino-aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear, como os Espaços Vetoriais, partindo por experiências com casos particulares, em que, a partir de conjuntos como o $\mathbf{R}^2$, se possa generalizar as propriedades para um $\mathbf{R}^2$, posteriormente, para outro conjunto, como um $\mathbf{M}_{mxn}(\mathbf{R})$, até constatar em um espaço vetorial E qualquer. Acreditamos, diante dos argumentos apresentados anteriormente, que buscar padrões de "comportamento" através de generalizações como estas e de diálogos, generalizando padrões e explorando propriedades a partir da exploração-resolução-proposição de problemas será o caminho para uma verdadeira compreensão da matéria e apreensão dos conceitos.

Antes de adentrarmos nas discussões sobre o ensino de EV, vamos esclarecer o que entendemos por Espaços Vetoriais e Vetores, pois acreditamos que, para entender os conceitos, é importante ter a compreensão do significado das palavras. De acordo com Lima (2011), a Álgebra Linear é o estudo dos Espaços Vetoriais e das Transformações Lineares entre eles. O desenvolvimento do Estudo sobre EV é algo relativamente recente. De acordo com Dorier (2000), ele se desenvolveu entre os séculos XVII e XIX. O estudo sobre esses conceitos matemáticos surgiu ao passo que alguns tópicos da Geometria Analítica, com o objetivo de elaborar um cálculo geométrico, conceitos de Álgebra (estruturas algébricas) e da Análise (algumas pesquisas de Peano) se desenvolviam e, paulatinamente, os pesquisadores faziam junções entre os conceitos desenvolvidos.

Conforme Lima (2011) e Dorier *et al*. (2000), Espaços Vetoriais E são conjuntos cujos elementos são chamados de Vetores, no qual estão definidas duas operações: a multiplicação por um número real, que a cada $\alpha \in \mathbf{R}$ e a cada $v \in E$ faz corresponder a um vetor $\alpha \cdot v$, ou αv, chamado produto de α por v e a operação de adição, que a cada par de vetores $u, v \in E$ faz corresponder a um novo vetor $u + v \in E$, chamado de a soma de u e v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e $u, v, w \in E$, certas condições que são chamadas de axiomas. Seguem os mesmos:

> **1 Comutatividade:** $u + v = v + u$;
> **2 Associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
> **3 Vetor nulo:** existe um vetor $0 \in E$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $v + 0 = 0 + v$ para todo $v \in E$;
> **4 Inverso aditivo:** para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$, chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de v, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;
> **5 Distributividade:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
> **6 Multiplicação por 1:** $1 \cdot v = v$.

Portanto, quaisquer conjuntos que satisfaçam as condições acima são Espaços Vetoriais e isso nos faz compreender diversos conjuntos que são objetos do processo de ensino-aprendizagem na Educação Básica, tais como, Matrizes, Polinômios, Funções, dentre outros. Consequentemente, vetores são os elementos desse conjunto. Em Álgebra Linear, o conceito de vetor é ampliado, não sendo compreendido apenas as setas que são trabalhadas na Geometria Analítica e Cálculo Vetorial, que correspondem a pares ordenados do plano cartesiano no qual associamos direção, sentido e módulo. Vetores, na Álgebra Linear, são elementos de um Espaço Vetorial, sendo assim, matrizes, polinômios, funções, números reais, números complexos e as próprias setas equipolentes da Geometria Analítica podem ser denominados vetores de um Espaço Vetorial.

2.3 Um olhar para a literatura acadêmica sobre ensino-aprendizagem de Álgebra Linear

De acordo com Dorier *et al*. (2000, p. 193), as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear (Teoria em que se estudam os Espaços Vetoriais) são muito comuns, importantes e visíveis. Dificuldades na compreensão de conceitos em AL para um docente pode parecer simples e irrisória, todavia, "há que se destacar que a compreensão discente envolve múltiplos processos mentais, os quais são geralmente inacessíveis ao docente" (BERTOLAZI; SAVIOLI, 2018, p. 333).

Dissertando sobre o ensino de matemática em tempos passados – e, infelizmente, às vezes, presente em nossas salas de aulas – Niss (1999) declara:

> Tempos atrás [...] esperava-se que os estudantes universitários de tópicos em matemáticos assumissem toda a responsabilidade por seus próprios estudos, como também de seus sucessos ou fracassos. Aqueles estudantes que passavam nos exames conheciam os pré-requisitos necessários, talento matemático, e diligência, porém, aqueles que fracassavam, não os tinham e, apesar do empenho para consegui-los, não

> havia muito o que o professor fazer a respeito... Isto implicava que os professores de Matemática podiam se concentrar em dar aulas, pois a aprendizagem individual, de cada estudante sobre o que era ensinado, não era negócio do professor em si, mas, sim, do próprio estudante. (NISS, 1999, p. 2 *apud* BIANCHINI; MACHADO, 2018, p. 7).

Entretanto, com o avanço da Educação Matemática como campo teórico e profissional, a visão atual está mudando. Tanto matemáticos (mesmo que uma pequena parte) quanto educadores matemáticos estão preocupados com o processo de ensino-aprendizagem desse campo da matemática tão importante para engenheiros, físicos, matemáticos e, também, professores de matemática (sejam eles da educação básica ou superior).

Dorier *et al*. (2000, p. 156) destaca, em seu trabalho, que a compreensão do conceito de Espaços Vetoriais é algo essencial tanto dentro da matemática quanto fora, fazendo do mesmo algo indispensável para o currículo universitário em matemática. Ao ensinar o conceito de Espaços Vetoriais, o docente deve ter em conta a realização de uma progressão do conceito, iniciando do conjunto $\mathbf{R}^2$, para um $\mathbf{R}^3$ até no $\mathbf{R}^n$, posteriormente, deve mostrar que as mesmas propriedades valem para um $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ e, em seguida, deve chegar em um espaço vetorial E qualquer. É importante ressaltar que, sobre os axiomas desta estrutura algébrica, não devem ser dados, mas, através de um problema e com diálogo, deve-se chegar até a ele.

Como em toda pesquisa científica, faz-se necessário um recorte. Partindo desse pressuposto, na presente pesquisa, os conceitos matemáticos aqui descritos são: operações de adição e multiplicação por escalar, espaços vetoriais, subespaços vetoriais, combinação linear, bases e transformações lineares.

Em nosso estudo, destacamos seis dos diversos trabalhos analisados, pela pertinência e pelas contribuições ao tema da presente pesquisa. Para tanto, apresentamos os principais resultados das pesquisas de Leivas (2020), Mutambara e Bansilal (2018), Ferreira (2017a, 2017b), Prado (2016), Coimbra (2008) e Celestino (2000), que foram desenvolvidas em diferentes programas de pós-graduação e que abordam diversos olhares sobre os processos educativos da Álgebra Linear (um de Álgebra Abstrata) no Ensino Superior.

Leivas (2020) tem como objetivo desencadear um processo de visualização de ‘soma e intersecção’ de subespaços vetoriais, explorando aspectos geométricos por meio da metodologia de Resolução de Problemas; Mutambara e Bansilal (2018) publicaram, na décima terceira edição do Congresso Internacional de Educação Matemática, uma monografia denominada *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. Neste trabalho, os autores buscaram explorar algumas dificuldades específicas pelos alunos ao se depararem com os conceitos de Espaço Vetorial e Subespaço Vetorial.

Ferreira (2017a, 2017b), apesar de seu tema não ser especificamente em Álgebra Linear, mas Álgebra Abstrata (contudo, Espaços Vetoriais são Estruturas Algébricas), aponta, em sua pesquisa, a possibilidade de se ensinar (e se aprender) Estruturas Algébricas por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação e mostra que é possível apresentar contribuições da Álgebra Abstrata Moderna – através dessa metodologia – na formação de professores de matemática.

Prado (2016), em sua tese de doutorado, tem como intuito compreender a Álgebra Linear ensinada para a Licenciatura em Matemática como um saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica e busca ressignificar essa AL para o professor; Coimbra (2008) aponta algumas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de AL, sejam estas dificuldades no uso da geometria, em conhecimentos prévios de outras disciplinas, dificuldades lógicas, dentre outras.

Celestino (2000), em sua pesquisa, coletou dados de pesquisas sobre ensino de Álgebra Linear na década de 1990 e analisou esses trabalhos em comparação com o contexto mundial, apontando dados que são pontos de interseção entre as pesquisas internacionais e as nacionais que serão de grande valia para o presente trabalho.

Diante dessas considerações, de forma cronológica, apresentamos uma síntese de cada pesquisa analisada nos parágrafos seguintes.

1. O artigo do autor José Carlos Pinto (ver LEIVAS, 2020), intitulado “Resolução de problemas envolvendo soma e intersecção de subespaços vetoriais” (o autor é professor da Universidade Franciscana no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática em Porto Alegre, RS, Brasil).

Este trabalho tem por objetivo desencadear os processos de visualização de soma e de intersecção de subespaços vetoriais, explorando aspectos geométricos por meio da Metodologia de Resolução de Problemas – MRP.

Ele usou como aporte teórico a Metodologia de Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas, tendo como principais autoras Onuchic e Allevato (1999). Vale ressaltar que essa metodologia será mais detalhadamente abordada nos próximos capítulos. Além desta Metodologia de ensino de matemática, o autor considerou o conceito de “Visualização”, no qual o mesmo entende “como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (LEIVAS, 2020, p.5).

O autor, tendo esses conceitos como pressupostos, afirma que:

> na medida em que alunos de uma disciplina de Álgebra Linear mobilizam habilidades visuais para resolver problemas envolvendo soma e intersecção de espaços vetoriais, isso parece ser um elemento fundamental na Metodologia de Resolução de Problemas – MRP. (LEIVAS, 2020, p. 5).

Essa pesquisa qualitativa envolveu cinco discentes de uma disciplina de um Programa de Pós-Graduação na área de Ensino na qual o pesquisador era o professor. Para o levantamento de dados, o autor teve como base a semiologia, pois ela "provê [...] um conjunto de instrumentais conceptuais para uma abordagem sistemática dos sistemas de signos, a fim de descobrir como eles produzem sentido" (PENN, 2015, p.319 *apud* LEIVAS, 2020, p. 7).

Dessa forma, após a etapa de resolução de problemas, o pesquisador buscou compreender como se realizavam os registros simbólicos (linguagem natural, matemática) e registros visuais (representações geométricas). Os conceitos trabalhados foram soma e interseção de Subespaços Vetoriais.

Sobre os resultados da pesquisa, verificou-se que, no primeiro problema, os indivíduos não utilizaram representações geométricas na resolução, apenas a partir do debate ponderaram a possibilidade de aplicar habilidades visuais nas resoluções. Também foi concluído que mobilizar habilidades visuais para resolver problemas envolvendo "soma e intersecção" de espaços vetoriais parece ser um elemento fundamental na MRP. Ainda como resultado, o autor declara que "embora nenhum tema tenha sido apresentado formalmente aos estudantes, os problemas propostos e resolvidos, juntamente com a metodologia empregada, podem servir para desenvolver uma disciplina" (LEIVAS, 2020, p. 21).

2. A pesquisa escrita por Lillias H.N. Mutambara e Sarah Bansilal (MUTAMBARA; BANSILAL, 2018), denominada *Dealing with the Abstraction of Vector Space Concepts*, é um dos artigos que compõem a monografia denominada *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*, publicação esta que resultou de alguns dos trabalhos apresentados sobre Álgebra Linear na décima terceira edição do *International Congress on Mathematical Education*.

A presente pesquisa tem como sujeitos setenta e três estudantes de graduação no Zimbábue. Eles estavam em um curso para obter uma qualificação, uma vez que tais estudantes já atuavam em sala de aula e não tinham uma graduação. O estudo teve como objetivo responder às seguintes perguntas: como os professores participantes da pesquisa respondiam às demandas conceituais abstratas associadas ao conceito de espaço vetoriais? E quais mentais podem ser deduzidas a partir das informações escritas e respostas verbais das tarefas envolvendo o conceito de espaço vetorial?

A teoria usada, **ação-processo-objeto-esquema** (APOS), teve como principal objetivo descompactar a estrutura do conceito de espaço vetorial. Essa perspectiva baseia-se na teoria de extensão de Jean Piaget (1965-1973), na qual debate-se sobre o princípio da abstração reflexiva, em que um indivíduo aprende matemática ao aplicar certos mecanismos mentais para construir estruturas mentais específicas. De acordo à teoria APOS, os principais mecanismos mentais para a construção das estruturas mentais incluem interiorização, coordenação e encapsulamento. As estruturas mentais se referem à ação, ao processo, ao objeto e ao esquema.

Um dos resultados desta pesquisa, que será fundamental para a nossa, é que o estudo mostrou que muitos problemas na compreensão de Espaços Vetoriais estavam relacionados à compreensão dos professores acerca dos conceitos subjacentes à operação binária e conjuntos.

3. A tese de doutorado do autor Nilton Cezar Ferreira (FERREIRA, 2017a), intitulada "Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática", foi orientada pela Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic e desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP- Rio Claro/SP.

Ela tem como objetivo analisar as contribuições de um curso de Álgebra Abstrata Moderna (AAM) para a formação de professores da Educação Básica, em que esses professores são licenciandos em matemática do quinto período do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG). O autor também procura entender de que maneira, lançando mão da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pode-se levar o aluno da Licenciatura em Matemática do IFG a construir conhecimentos de Álgebra Abstrata Moderna.

Acerca da metodologia, o autor lançou mão do Fluxograma de Romberg – Onuchic (que também será utilizado neste trabalho, logo, será explicado posteriormente) e da Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação através da Resolução de Problemas (que também será explicada em outro capítulo).

Sobre os resultados da pesquisa, dentre os vários, destacamos alguns que serviram de contribuição para a nossa pesquisa: os conteúdos de Álgebra Abstrata Moderna – Operações Binárias, Grupos, Anéis, Corpos e Domínio de Integridade – são de grande valia para futuros professores de matemática de Educação Básica, assim podemos supor que, como os Espaços Vetoriais também são estruturas algébricas, eles devem ser de grande valia, além de levar os alunos a serem mais criteriosos em relação às hipóteses de propriedades matemáticas e a se preocuparem com a composição da estrutura e dos elementos com que eles estiverem trabalhando. Acerca do ensino dessas estruturas algébricas, propicia ao aluno um ambiente adequado para melhorar a sua escrita matemática.

4. A tese de doutorado do autor Eneias de Almeida Prado (PRADO, 2016), que tem como título "Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para a formação profissional da Educação Básica", foi orientada pela Profª. Dr.ª Barbara Lutaif Bianchini e desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC – SP.

Essa pesquisa teve como objetivo investigar a Álgebra Linear ensinada na Licenciatura em Matemática, em que os profissionais atuarão como professores na Educação Básica. No que tange à coleta de dados, foi selecionada uma amostra composta de seis universidades (duas da região Sudeste e outras quatro distribuídas em cada uma das outras regiões do Brasil). Esses dados foram coletados a partir dos projetos pedagógicos dos cursos e alguns deles foram também coletados por meio das ementas e planos de ensino da disciplina de Álgebra Linear dos cursos que serviram de amostra.

Após a análise dos documentos citados anteriormente, foram realizadas entrevistas com os professores de AL das universidades da amostra, que seguiram um roteiro previamente elaborado, levando em conta a formação acadêmica e a atuação profissional de cada um – foram seis professores entrevistados, dos quais dois atuam na área de Matemática Pura, dois na área de Matemática aplicada e dois na área de Educação Matemática – e identificaram como estes docentes concebem o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática.

O aporte teórico utilizado, nessa pesquisa, foi denominado de Pensamento Matemático Avançado (PMA), em que o autor principal é Dreyfus (2010)[2] . O autor discorre sobre os processos que envolvem a construção de conhecimentos matemáticos, observando-se o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançando. Um se distingue do outro tendo em vista que, com o segundo, o indivíduo expõe a capacidade de apresentar definições e deduções formais.

O autor explica, em sua tese, que o PMA abrange muitos processos que interagem entre si, dentre os quais podemos destacar: representar, visualizar, generalizar, classificar, induzir, analisar, sintetizar, alternar e interpretar, modelar, abstrair ou formalizar.

[2] DREYFUS, T. Advanced mathematical processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thiking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 25-41.

E, como todos esses processos estão presentes na pesquisa de um matemático, eles precisam ficar evidentes em seu ensino. Nas entrevistas, ora de maneira explícita, ora implícita, notou-se processos do PMA.

Sobre os resultados da pesquisa, o autor destacou cinco considerações pelas quais ele justifica o ensino de Álgebra Linear nas licenciaturas em matemática:

- O estudo da estrutura algébrica de Espaço Vetorial: pelo seu caráter axiomático, pela sua natureza de estrutura algébrica, e por aprofundar e alargar a visão dos conteúdos da Educação Básica;
- O estudo das transformações lineares: pela possibilidade de fazer relações não só com outras disciplinas, como Cálculo e Análise, mas também com noções da Educação Básica, aplicações em outros campos da Ciência;
- O estudo do processo de demonstração: por proporcionar que o aluno vivencie diversos processos que compõe o Pensamento Matemático Avançado;
- Relações com outras disciplinas: Álgebra Abstrata, Análise Funcional, Equações Diferenciais, Teoria dos Conjuntos, dentre outras citadas no trabalho;
- Noções de Matemática que são ensinadas na educação básica e podem ser trabalhadas em AL: Matrizes, sistemas de equações lineares, conjuntos numéricos, função, vetores e transformações lineares no plano e no espaço.

5. A dissertação de mestrado do autor Jarbas Lima Coimbra (COIMBRA, 2008), que tem como título “Alguns aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem de Álgebra Linear”, foi orientada pelo Prof. Dr. Renato Borges Guerra e desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFPA – PA.

Nessa pesquisa, o autor buscou compreender quais são os obstáculos mais evidentes na conceituação de espaço vetorial e, para alcançar tal objetivo, ele interrogou uma amostra de quinze alunos, de duas turmas, na última semana de aula do semestre em uma universidade púbica de Belém do Pará, nas quais, em ambas as turmas, os professores possuíam a titulação de doutores em Matemática.

O autor usou como aporte teórico, para compreensão dos obstáculos a aprendizagem, Bachellard (1996)[3] e D’Amore (2005)[4]. Coimbra (2005), baseado nos autores citados

[3] BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
[4] D’AMORE, B. **Epistemologia e Didática da Matemática**. Escrituras Editora: São Paulo, 2005.

anteriormente, relata sobre três tipos de obstáculos: de natureza ontogenética, de natureza didática e de natureza epistemológica.

Ao dissertar sobre o obstáculo ontogenético, o autor explica que ele se trata de limitações neurofisiológicas, como tentar demonstrar o teorema de Pitágoras para crianças, em que sua idade ainda não a possibilita a possuir o raciocínio necessário.

Acerca dos obstáculos didáticos, os mesmos podem ser entendidos com o exemplo a seguir: um professor, ao escolher um projeto, um currículo, um método e interpretar de acordo com suas convicções científicas e didáticas, o mesmo será eficaz para um determinado estudante da turma, todavia, não será para os demais, para estes, tal projeto se tornou um obstáculo didático.

No que tange ao obstáculo epistemológico, Coimbra (2008) deixa claro que cada assunto matemático possui um estatuto epistemológico próprio que está interligado intrinsecamente à sua evolução histórica no interior da matemática, além de depender, de igual forma, da sua aceitação crítica no âmbito da matemática, “das reversas que lhe são próprias, da linguagem no qual é expresso, ou que é necessária para poder exprimi-lo” (COIMBRA, 2008, p. 13).

No mesmo contexto, o autor ainda declara “quando a história da evolução de um conceito se percebe uma não continuidade, uma ruptura, mudanças radicais de concepções, então se supõe que tal conceito possua, no seu interior, obstáculos de caráter epistemológicos para serem aprendidos” (COIMBRA, 2008, p.13). Tendo em vista que o desenvolvimento histórico da Álgebra Linear possui exatamente essas características, o autor classifica muitas das dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de AL como dificuldades epistemológicas.

Sobre os obstáculos encontrados em sua pesquisa, ele relatou os seguintes:

- Atitude do professor: o autor conclui que alguns professores, apenas por possuírem uma formação específica na área de matemática, creem que isso é o suficiente para ministrar aulas daquele conteúdo. Não que a formação não seja importante, todavia, o docente deve possuir conhecimento (e se não tiver, deve buscar capacitar-se) acerca de como ensinar, pois a mente dos discentes não é um quadro em branco que basta apenas preencher, existem obstáculos e os mesmos precisam ser superados, sendo o professor o profissional mais adequado para essa superação;
- Obstáculos Verbais: Existem palavras que são conhecidas da álgebra vetorial, da geometria e de outros assuntos dos campos do conhecimento que também são usados na Álgebra Linear, entretanto, os conceitos nem sempre são os mesmos.

Isso é o que causa uma confusão de sentidos. Um vetor em AL passa a ser qualquer elemento de um Espaço Vetorial, e o termo ortogonal não deve ser compreendido apenas como uma imagem de duas retas ou dois vetores cujas direções fazem ângulos de noventa graus, mas, sim, deve-se generalizar para produto escalar igual a zero e mostrar que os casos antigos são casos particulares das novas definições. Nessa direção, essas palavras se tornam obstáculos verbais;

- O uso da Geometria: O uso da geometria pode auxiliar no processo de compreensão. Contudo, deve haver certa cautela com o excesso de exemplos, pois, caso contrário, o discente pode criar uma visão de que a AL está fundamentada apenas na Geometria. O docente deve usar tanto a lógica na exposição do conteúdo quanto usar vários domínios para os exemplos, ($\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{M}_{mxn}(\mathbf{R})$, $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, dentre outros).

6. A dissertação de mestrado do autor Marcos Roberto Celestino (CELESTINO, 2000), que tem como título "Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90", foi orientada pelo Prof.ª Dr.ª Silvia Dias Alcântara Machado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC – SP.

Esse estudo teve como objetivo coletar e apresentar as pesquisas sobre o processo de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear realizadas na década de 1990. Posteriormente, essa contribuição foi analisada e comparada com outras pesquisas realizadas a nível mundial.

Como o autor realizou uma pesquisa em caráter de estado da arte, ele coletou artigos em revistas internacionais, também visitou centros universitários brasileiros, como a Universidade de São Paulo, Universidade Santa Úrsula, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e a Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho de Rio Claro, dentre outras universidades, para procurar teses e dissertações sobre o tema.

Quadro 1 - Dados pertinentes das pesquisas.

Pesquisa	**Pressupostos Teóricos e Metodológicos**	**Dados**	**Apontamentos (Resultados encontrados)**	**Contribuições para o nosso trabalho**

1 LEIVAS (2020)	Metodologia de Ensino e Resolução de problemas sob a perspectiva de Onuchic (1999). Considerou o conceito de “Visualização” (LEIVAS, 2020, p.5).	Cinco alunos de um programa de pós-graduação na área de ensino na qual ele era docente.	• Os indivíduos não utilizaram representações geométricas na resolução. • Mobilizar habilidades visuais para resolver problemas envolvendo ‘soma e intersecção’ de espaços vetoriais parece ser um elemento fundamental na MRP, ainda como resultado.	• Os resultados obtidos pelo pesquisador foram de grande valia para a nossa pesquisa, pois, ao propormos problemas geradores de conceitos envolvendo Subespaços Vetoriais, devemos lançar mão de outras representações para melhor compreensão.
2 MUTAMBARA e BANSILAL (2018)	A teoria usada foi a **ação-processo-objeto-esquema** (APOS) (ARNON *et al.*, 2014).	Setenta e três estudantes de um curso de matemática no Zimbábue, na África.	• O estudo mostrou que muitos problemas eram relacionados à compreensão dos professores a respeito dos conceitos subjacentes à operação binária e conjuntos.	• Antes de introduzir o conceito de Espaço Vetorial ou qualquer outro, deve-se primeiro introduzir melhor os conceitos das Operações de Adição e Multiplicação por escalar.

3 FERREIRA (2017a)	Modelo metodológico de Romberg (ROMBERG, 2007; ONUCHIC *et al.*, 2014) e usou, como Metodologia de Ensino, a Resolução de problemas sob a perspectiva de Onuchic (1999).	Licenciandos em Matemática do quinto período do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás.	• Os conteúdos de AAM se apresentam de forma bastante significativa nos conteúdos da Educação Básica; • O conhecimento de AAM pode ser usado como principal instrumento para se fazer justificativas formais de propriedades e, até mesmo, de definições trabalhadas na Educação Básica; • O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais criteriosos em relação às hipóteses de propriedades matemáticas e a se preocuparem com a composição da estrutura e dos elementos com que eles estiverem trabalhando; • O ensino de AAM propicia um ambiente adequado para melhorar	• As Estruturas de Grupo, Anéis e Corpos que foram apresentadas no trabalho, aliadas ao ensino através de Resolução de problemas, mostraram-se benéficas à formação de licenciandos em matemática. Os Espaços Vetoriais, como estruturas algébricas, podem, também, ser favoráveis ao futuro licenciando; • Observando a maneira como o autor abordou o conteúdo, também pretendemos proporcionar reflexão e

			a escrita matemática do estudante.	diálogo aos licenciandos em nossa pesquisa.
4 PRADO (2016)	Usou pesquisa bibliográfica e, para analisar as entrevistas, utilizou a teoria do Pensamento Matemático avançado (DREYFUS, 1991).	Análise de projetos pedagógicos em cursos de seis universidades brasileiras e entrevista com seis professores de AL dessas universidades para entender como esses professores concebem o ensino de AL para a licenciatura em matemática.	A AL é de fundamental importância para o curso de licenciatura em matemática, pois a mesma, além de ser uma porta de entrada para outras disciplinas: • proporciona um olhar aprofundado para a matemática; • fortalece a ideia de estrutura algébrica; • consegue fazer ligação entre diversos conceitos da Educação Básica; • consegue proporcionar ao estudante um olhar crítico acerca das demonstrações; • O docente deve ensinar fazendo ligações entre outras disciplinas.	• Ao aplicar a atividade, devemos proporcionar ligação com outras disciplinas e conteúdos da Educação Básica, sempre que possível. • Devemos fortalecer a ideia de estrutura algébrica para que, através disso, o mesmo possa desenvolver um olhar mais crítico e mais amplo para educação básica.
5 COIMBRA (2008)	Aplicação de Questionários para alunos de licenciatura em	Quinze alunos, de duas turmas, na última semana de aula	Conseguiu levantar alguns obstáculos ao processo de ensino-aprendizagem em	• Devemos apresentar os problemas com cautela,

	matemática. Para analisa-los, o autor lançou mão dos Obstáculos Epistemológicos (BACHELARD, 1996; D'AMORE, 2005).	do semestre em uma universidade púbica de Belém do Pará.	Álgebra Linear, tais como: Atitude do professor; Desconhecimento da história; Assimilação sem acomodação; Obstáculos Verbais e o uso da Geometria.	em diálogo, para que tenhamos a certeza de que os conceitos estão sendo bem apreendidos; • Devemos ter cuidado ao propor os problemas e apresentar as palavras de tal forma que os alunos compreendam plenamente o que está sendo dito; • Devemos apresentar os problemas, sempre que necessário, com cautela acerca da geometria.
6 CELESTINO (2000)	Pesquisa bibliográfica.	Dissertações e teses produzidas no Brasil e exterior nos	Conseguiu analisar as teses e dissertações brasileiras e verificou que os resultados são semelhantes aos	• Quando propormos os problemas, devemos levar em conta os

		anos da década de 1990.	internacionais, dentre os diversos resultados se destacam: Formalismo excessivo se torna um obstáculo; Possibilidade de fazer uso de diferentes metodologias no ensino-aprendizagem de Álgebra Linear; Os discentes têm bom desempenho no uso de técnicas, mas mau desempenho na utilização de teoremas e dificuldade em fazer uso de conversões nas diversas representações semióticas.	obstáculos verbais quando formalizarmos os conceitos; • Devemos usar diferentes conjuntos para construir os conceitos e não apenas os $\mathbf{R}^n$, para não limitar a compreensão; • Devemos fazer conversões para outras representações.

Fonte: elaborado pelo autor.

Esses trabalhos são alguns dentre os muitos trabalhos de pesquisa, nos quais a Educação Matemática, de acordo com Bianchini e Machado (2018), vem direcionando sua atenção desde as últimas décadas do século XX. Isso se deve ao fato de que este campo do saber constitui uma parte importante no conteúdo matemático que é "ensinado no início da universidade, sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e cientistas que a utilizam como ferramenta" (DORIER, 2000, p. 193).

Como foi apresentado nos trabalhos de pesquisa anteriormente, o estudo dos Espaços Vetoriais é fundamental na formação de professores, pois eles potencializam a compreensão de conceitos que se generalizam em diversos objetos matemáticos que hão de ser ministrados na Educação Básica, um exemplo disso é o próprio conceito de EV, que compõe diversos conjuntos, tais como: Matrizes, Números Reais, Números Complexos, Polinômios, dentre outros.

Como é possível notar, embora esses estudos possuam autores diferentes, embasamentos teóricos distintos, épocas distintas e sujeitos diferentes, eles apontam para a necessidade de um ensino de Álgebra Linear com mais compreensão, que não se limite à apresentação de teoremas e corolários, que seja enriquecido com uma metodologia que leve em consideração os resultados dessas pesquisas e que consiga abarcar o processo de ensino, aprendizagem e avaliação (que está implícita no processo).

De modo geral, esses trabalhos auxiliaram na compreensão de que uma metodologia, tendo como ponto de partida um problema, é favorável para o processo de ensino-aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear. Os trabalhos também auxiliaram na compreensão de que o uso de diversas representações pode ser favorável ao entendimento de conceitos de AL.

Partindo desse pressuposto, a pesquisa aqui apresentada lançará mão dos trabalhos citados anteriormente para que possamos ter um embasamento teórico sobre o ensino de Espaços Vetoriais. No que tange aos trabalhos de Celestino (2000) e Coimbra (2008), pretendemos fazer uso, no nosso trabalho, de suas conclusões, uma vez que ambos discorrem sobre o uso da Geometria no ensino de conceitos de Álgebra Linear. Assim, pretende-se fazer uso, aqui, da Geometria no ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais, partindo de exemplos em domínios como $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, mas, em consonância com os autores, não faremos uso excessivo da Geometria, para que não "deixe o aluno com a visão que a Álgebra Linear está baseada somente na geometria" (COIMBRA, 2008, p. 68).

Sobre Leivas (2020), o mesmo desenvolveu sua pesquisa e concluiu que o processo de ensino-aprendizagem de Subespaços Vetoriais pode ser potencializado se o docente fizer uso de representações semióticas e da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (MEAAARP), convergindo, desse modo, com Ferreira (2017a, 2017b), que discorre sobre o uso da MEAAARP no ensino de Estruturas Algébricas. O autor afirmou, a partir de suas conclusões, que essa metodologia se mostrou benéfica para o ensino de EA na formação de professores, logo, suporemos que se mostrará benéfica no ensino de Espaços Vetoriais, haja vista que este é, também, uma Estrutura Algébrica.

Ainda sobre o trabalho de Ferreira (2017a, 2017b), é preciso esclarecer que, embora o conceito de EA tenha um nível de abstração considerável, é possível e mais eficiente ensinar esses conceitos através de conhecimentos dos próprios alunos, como os aprendidos na Educação Básica ou em outras disciplinas de matemática do Ensino Superior por meio de problemas que facilitam a generalização e encaminham para a abstração. Em consonância com os demais autores, Prado (2016) afirma, em suas conclusões, que, ao aplicar uma atividade com o intuito ensinar conceitos de Álgebra Linear, devemos proporcionar ligação com outras disciplinas e conteúdos da Educação Básica sempre que possível, proporcionando, assim, o desenvolvimento de um olhar mais crítico e mais amplo para educação básica.

Nesse sentido, entendemos que o processo de ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais pode ser realizado por meio de problemas, mas que esses tenham o objetivo de construir o conceito e de chegar à abstração, haja vista que a mesma, de acordo com Prado (2016), servirá de apoio para a aprendizagem de novos conceitos, conteúdos e, principalmente, procedimentos e uma melhor compreensão dos objetos matemáticos que serão ensinados pelo discente na educação básica.

Neste trabalho, também faremos uso das conclusões de Mutambara e Bansilal (2018). Os autores concluíram que, antes de adentrar nos conteúdos da Álgebra Linear propriamente dita, devemos fortalecer (ou até construir) os conceitos de Operações de Adição e Multiplicação por um escalar. Desse modo, tendo em vista que iremos tratar sobre o processo de ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais, essas conclusões se tornaram de grande valia.

A partir das conclusões desses trabalhos, optamos por fazer uso de uma Metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática que proporcionasse uma melhor compreensão do conceito de Espaços Vetoriais e outros que o tangenciam, sendo eles: Operações de Adição e Multiplicação por Escalar, Subespaço Vetorial, Combinação Linear, Independência Linear, Base, Dimensão e Transformações Lineares. Optamos, então, pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Resolução-Proposição de Problemas (ERP), sobre a qual iremos dissertar posteriormente. Além disso, como diversos trabalhos lidos dissertaram sobre o uso de Registros de Representação Semiótica (embora sendo para conceitos de dependência linear, transformações lineares e subespaços vetoriais, mas não nos EV), iremos lançar mão dessas representações segundo Friedlander e Tabach (2001), isto é, refletindo sobre as Representações Múltiplas no Ensino de Álgebra.

Segue, então, uma discussão a respeito das Representações Múltiplas no ensino de Álgebra Linear e, também, acerca da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Resolução-Proposição de Problemas (ERP).

2.4 Representações Múltiplas no ensino de Álgebra Linear

As discussões feitas até agora apontam para a necessidade de um ensino de Álgebra Linear aliado a outras representações e a compreensão. Nessa direção, neste trabalho, utilizaremos a Teoria das Representações Múltiplas de Álgebra, pois consideramos que ela pode proporcionar uma aprendizagem que contribua para a construção, aquisição e compreensão do conteúdo de maneira significativa.

No que tange às Representações Múltiplas, os autores Friedlander e Tabach (2001) apresentam a concepção de Álgebra a partir de quatro representações, a saber: representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. De acordo com os autores, o uso das representações tem o potencial de tornar o processo de aprendizagem de Álgebra compreensivo e efetivo.

A representação verbal, geralmente, é utilizada para apresentar um problema e é fundamental na interpretação final dos resultados obtidos na solução do processo. A representação numérica é familiar para os estudantes no início da fase do estudo de Álgebra, sendo importante para adquirir uma primeira compreensão de um problema e para a investigação de casos particulares, logo, é fundamental que, ao propormos problemas para introduzir os conceitos de Álgebra Linear, independente do conjunto a ser tratado, é viável começar por casos particulares. Por exemplo, se for tratar de Espaços Vetoriais, o conjunto $\mathbf{R}^n$ será o conjunto utilizado para gerar o conceito. É viável que se inicie o problema com vetores do conjunto $\mathbf{R}^2$, não com vetores genéricos, mas com vetores numéricos, como (2,-9).

A representação gráfica é eficaz em fornecer uma imagem clara de vetores no $\mathbf{R}^2$, ou de uma função de uma ou mais variáveis reais. A representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos. Neste trabalho, diferenciamos a representação algébrica em 1º nível e em 2º nível: em uma representação algébrica de 1º nível são tratados elementos específicos de um conjunto (ainda que de forma algébrica) e em uma representação algébrica de 2º nível trata-se de um elemento genérico de conjunto qualquer. A caráter de exemplo, se considerarmos o conjunto $\mathrm{F}=\{f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}: f \text{ é uma função afim}\}$, uma função pertencente a F definida por $f(x)=x$ é uma função escrita de forma algébrica, mas que é uma função em particular das funções afins, todavia, a função $f(x)=ax+b,\ onde\ a,b\ \in \mathbf{R}$ é uma representação algébrica de uma função afim qualquer.

Para os Friedlander e Tabach (2001), os objetos matemáticos que a álgebra trata não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. Entretanto, temos acesso aos mesmos através de representações. De acordo com os autores, se utilizadas dessa forma, nenhuma das representações consegue abranger a totalidade de um conteúdo, pois, embora possuam inúmeras vantagens, elas também possuem desvantagens, como podemos ver no quadro a seguir:

Quadro 2 - Potencialidades e Limitações das Representações Múltiplas de Álgebra.

Representação	**Potencialidades**	**Limitações**
Verbal	• Possibilita ambiente natural para entender seu contexto e comunicar sua solução; • Facilita a apresentação e aplicação de padrões gerais; • Possibilita a conexão entre a matemática e outras áreas;	• Pode ser ambígua e provocar associações irrelevantes ou enganosas; • É menos universal; • Sua dependência do estilo pessoal pode ser um obstáculo na comunicação matemática; •
Numérica	• Familiar para os estudantes na fase inicial com Álgebra Linear; • Oferece uma ponte eficaz para Conceitos Mais Abstratos e precede as outras representações; • Importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares;	• Pode não ser eficaz em fornecer um quadro geral; • Alguns aspectos ou soluções importantes de um problema podem ser perdidos;
Gráfica	• Eficaz em fornecer uma imagem clara quando o espaço vetorial que será o $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, ou qualquer outro espaço que possua dimensão que possibilite uma representação gráfica. • Os gráficos são intuitivos e atraentes aos que gostam de uma abordagem visual;	• Pode não ter a precisão necessária, é influenciada por fatores externos (como escala); • Sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em questão; • Se o espaço for uma dimensão superior a 3, ele não possuirá uma representação gráfica.
	• Concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos; • A manipulação de objetos algébricos, às vezes, é o	• O uso exclusivo de símbolos (em qualquer estágio de aprendizagem) pode dificultar o significado matemático ou natureza dos objetos

Algébrica	único método de justificar ou provar declarações gerais.	representados, causando dificuldades na interpretação dos seus resultados.

Fonte: Adaptado de Martins (2019).

Se uma representação é apresentada de maneira isolada, de forma alguma poderá abranger todas as potencialidades, isto é, o discente não conseguirá alcançar uma compreensão significativa do conceito, faz-se necessário a visualização da transição entre, ao menos, duas representações.

Friedlander e Tabach (2001) discorrem sobre as várias contribuições que o problema apresentado em múltiplas representações pode proporcionar, tais como: i) incentiva a flexibilidade na escolha de representações dos alunos em seu caminho de solução e aumenta sua conscientização sobre seu estilo de solução; ii) dá legitimação ao uso das diversas representações no processo de solução; iii) proporciona transições involuntárias entre as representações, fazendo com que o aluno as perceba como uma necessidade natural e não como um requisito arbitrário.

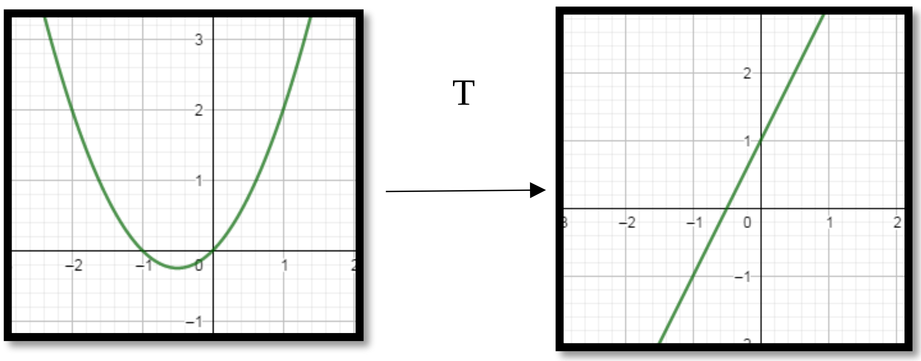
Acreditamos que a utilização das diferentes representações e a transição entre elas pode facilitar a compreensão do licenciando sobre os conceitos de Álgebra Linear, como também, do trabalho do docente, no que diz tange à avaliação contínua do desenvolvimento do aluno, uma vez que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação" (DUVAL, 2003, p. 14).

Artigue, Chartier e Dorier (2000), versando sobre o mesmo tema, dissertam que existe uma análise global que

> corrobora a hipótese de que o ensino de álgebra linear centrado na coordenação dos registros de representação semiótica melhora as habilidades e mesmo em tarefas não explicitamente ligadas a atividades de reconhecimento ou conversão de registros de representação semiótica (ARTIGUE; CHARTIER; DORIER, 2000, p. 251).

Seguem, então, alguns exemplos de objetos que serão trabalhados nas suas diversas representações:

Quadro 3 - Exemplos de representações múltiplas em Álgebra Linear.

Tipo de Representação	**Objeto Matemático representado**
Verbal	Uma aplicação que associe cada polinômio do conjunto de polinômios reais de grau à sua derivada.
Algébrica em 2º nível.	$T : P_n(R) \rightarrow P_n(R)$ $p \mapsto p'$ Onde $P_n(R) = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : a_i \in R, 0 \leq i \leq n\}$ e p representa um elemento de $P_n(R)$ e p' é sua derivada.
Algébrica em 1º nível.	$T : P_n(R) \rightarrow P_n(R)$ $x^2 + x \mapsto 2x + 1$ Ou ainda $T(x^2 + x) = 2x + 1$
Numérica	$T(2) = 3$ para $x = 1$
Geométrica	$x^2 + x$ $2x + 1$ 

Fonte: produzido pelo autor.

2.5 A Exploração-Resolução-Exploração de Problemas e seus fundamentos teóricos

A atividade de resolver problemas é inerente ao ser humano, o cotidiano de cada pessoa, independente de ele residir nos cantos mais isolados ou nas grandes metrópoles, é atravessado por problemas. E, nessa direção, o ser humano se debruça para resolvê-los. Uma parte considerável desses problemas envolve uma ciência que é denominada por muitos como a ciência dos padrões, a Matemática.

A matemática está presente em todos os lados, e porque não dizer em quase todos os problemas, desde o simples mensurar a quantidade de cada ingrediente que será utilizado no fazer um bolo a dinâmica de controle de pragas, e o compreender o cosmos, fazendo uso da Geometria Lorentziana.

No que tange à atividade matemática, a resolução de problemas é considerada o seu âmago, pois é a força motriz para o tecer de novos conhecimentos (que serão aplicados nas mais diversas áreas do conhecimento). A caráter de exemplo, temos a conjectura (agora, teorema, devidamente provado) denominada "O último teorema de Fermat" que versava: "Se n é um número inteiro maior que 2, então, não existem números inteiros positivos x, y e z, que satisfaçam a igualdade $x^n + y^n = z^n$ ". Proposto por Pierre de Fermat, em 1637, e solucionado trezentos e cinquenta e sete anos depois por Andrew Wiles, as diversas tentativas, nesse ínterim, contribuíram para o surgimento e o aprofundamento de diversos campos da matemática, dentre os quais a Geometria Algébrica, a Álgebra Comutativa e a Teoria dos Números Algébricos. Dentre os problemas que envolvem matemática, diversos deles dependem inteiramente de conceitos pertencentes à Álgebra Linear, desde problemas que envolvem um conceito simples, como a solução de Sistemas de Equações Lineares via Escalonamento, até o estudo de teorias mais avançadas, como a Teoria Espectral de Operadores de Schrödinger.

Mas o que, realmente, é um problema? As concepções de problemas não são uniformes - todavia, às vezes, são convergentes – variando do pressuposto teórico de cada indivíduo, ou grupo de indivíduos, que tem como intuito solucioná-lo. Partimos do pressuposto de que, quando não se sabe os meios pelos quais resolver a questão, ela, de fato, é um problema, entretanto, quando já se sabe os métodos para resolver, deixa de ser um problema e passa a ser um exercício. Outra definição plausível de um problema é:

> uma situação em que a um indivíduo ou a um grupo é solicitado desempenhar uma tarefa na qual não existe nenhum algoritmo disponível que determine completamente o método de resolução. A realização desta tarefa tem que ser desejada pelo indivíduo ou grupo. De outro modo a situação não pode ser considerada um problema. (LESTER (1980 *apud* SILVA, 2013, p. 96)

Assim, podemos concluir, a partir da citação anterior, que, além de não possuir algum algoritmo disponível, o indivíduo deve possuir interesse em resolver o problema, descobrir o método da resolução e determinar a solução do problema proposto.

Para Andrade (2017), na proposta de Exploração de Problemas, o conceito de Problema é entendido como um projeto, uma questão/tarefa/situação em que:

i) *O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução*. Neste aspecto, Andrade (2017) discorre que o problema necessita exigir, da parte do aluno, a realização de um trabalho não-repetitivo, o autor discorre que esse trabalho "precisa ser um nó entre o que o aluno sabe e aquilo que ele não sabe" (ANDRADE, 2017, p. 364);

ii) *O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo*. Esse problema necessita despertar o interesse do aluno e, se isto não acontecer, o professor tem que iniciar um trabalho de problematização que possa despertar o interesse do aluno pela situação problema;

iii) *Introduz-se ou se leva o aluno a realizar algum trabalho efetivo.* Não importa se o aluno tenha conseguido ou não resolver o problema, o que importa é que ele trabalhe ao máximo. O autor discorre que o compromisso do professor é levar o aluno e a turma até o ponto em que eles possam ir cada vez mais além.

Portanto, com o intuito de complementar a concepção de problema no ensino da matemática, observamos que Serrazina (2017) disserta sobre as características de um bom problema a ser aplicado em sala de aula, tanto em Educação Básica quanto no Ensino Superior:

> (i) ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática; (ii) ser adequado, permitindo relacionar o conhecimento que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas; (iii) ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível. (SERRAZINA, 2017, p. 60).

Não são poucos os casos em que problemas matemáticos são encontrados em registros de povos antigos, tais como egípcios, chineses e gregos. Contudo, apenas nas últimas décadas a resolução de problemas matemáticos foi encarada como uma peça importante para o ensino de matemática.

Segundo Andrade (1998), as investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares, em nível mundial, têm início, aproximadamente, na década de 1970, todavia, é fundamental destacar que a primeira vez em que a Resolução de Problemas é considerada como tema de interesse para docentes e discentes foi a partir do livro "How to solve it", de George Polya, cuja primeira edição data de 1945.

De acordo com um levantamento realizado por Andrade (1998), os estudos sobre Resolução de Problemas, antes de 1960, preocuparam-se com o desempenho bem-sucedido na obtenção da solução do problema proposto, perspectiva essa que não está preocupada com o processo, isto é, como é o caminhar até chegar à solução. Nessa direção, o discente deveria exercitar-se exaustivamente na solução de uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo. Após 1960 até 1980, o autor destaca que a preocupação dos estudos de Resolução de Problemas passou a se interessar com o processo, quando, nesta época, o processo era centralizado no ensino e no uso de estratégias conhecidas.

Na década de 1980, a RP ganha espaço. Essa década é considerada por muitos como a idade de ouro da Resolução de Problemas. O NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*), entidade norte-americana, na sua lista de recomendações para a década, situa, enquanto primeiro procedimento, a RP como foco da Matemática Escolar, apresentando-se o documento: *An Agenda For Action – Recommendations for school mathematics of the* 1980s. A entidade inglesa ATM (*Association of Teachers of Mathematics*) substitui a aritmética elementar pela Resolução de Problemas como centro do ensino da Matemática.

Ainda na década de 1980, a RP passa a ocupar as atenções de quase todos os congressos em nível internacional. No que tange ao Brasil, nessa década, o país começa a trabalhar, de modo mais efetivo, na Resolução de Problemas. Os trabalhos brasileiros, majoritariamente, se resumiam a Dissertações de Mestrados e Teses de Doutorados. Surge, também, nessa idade de ouro da RP, o curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP-RC/SP, com cursos em Resolução de Problemas sendo ministrados pelos docentes Dr. Luiz Roberto Dante e Dr.ª Lourdes de la Rosa Onuchic e trabalhos sendo orientados nesta linha por eles (ANDRADE, 1998, p. 09-10).

Neste ínterim, Schroeder e Lester (1989) distinguiram entre três vertentes da Resolução de Problemas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar matemática para resolver problemas e aprender matemática via resolução de problemas.

A primeira dessas vertentes, o "ensinar matemática sobre a resolução de problemas", visa trabalhar com o método proposto por Pólya (1995), em que a resolução de problemas é tratada como uma "arte" da descoberta. O modelo de George Pólya rege um conjunto de quatro fases que compõe o processo de resolução de algum problema matemático: (1) compreender o problema; (2) planejar uma estratégia de resolução do problema; (3) executar a estratégia e (4) fazer a recapitulação do problema original.

A segunda vertente, denominada "ensinar para resolução de problemas", interpretava a resolução de problemas como uma capacidade do aluno, capacidade essa que deveria ser desenvolvida no decorrer do processo educativo, em que o aluno desenvolveria essa faculdade de resolver problemas de ordem cotidiana ou não, envolvendo aplicações dos conceitos matemáticos.

Por conseguinte, temos o "ensinar via Resolução de Problemas", a terceira vertente que versa sobre um ensino para além do fato de expor exercícios respondidos de forma mecânica e similar ao modo com o qual o docente expôs em aulas passadas. Essa metodologia trata de fazer matemática através da resolução de problemas matemáticos, o problema não é mais consequência de definições após definições escritas no quadro anteriormente, o problema passa a ser o passo inicial no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

No ensino via Resolução de Problemas, o estudante consegue, através de reflexões e juntamente com o professor, que, neste caso, atuará como mediador, fazer conexões entre os conceitos abordados e formalizá-los. Esse meio de conceber a Resolução de Problemas é um caminho que possibilita o trabalho dinâmico e investigativo, proporcionando aos licenciandos pensar sobre as estratégias utilizadas na resolução de quaisquer problemas. No que tange à pesquisa aqui apresentada, refletimos sobre problemas também envolvendo a Álgebra Linear. Nesse contexto, Andrade (1998, 2017) disserta que os problemas propostos têm o objetivo final de contribuir para o processo de aquisição de conceitos matemáticos.

Ainda sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, existem diversas concepções acerca da mesma, dentre as quais, destacamos os seguintes autores: Serrazina (2017), Kilpatrick (2017), Onuchic (1999, 2014) e Andrade (1998, 2017). Tais teóricos têm como ponto em comum o uso de problemas como ponto de partida no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Vale destacar que, nesta pesquisa, tomamos como referência o último, para pensarmos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem.

Serrazina (2017) defende que a função do docente é mediar situações didáticas que proporcionem ao discente experimentar suas estratégias, questionando, explorando, das mais diversas formas, métodos e estratégias nas quais não há receio de errar. A autora defende que os professores devem levar os alunos a não apenas ler, mas entender o problema proposto em forma escrita e, em forma oral, deve orientá-los a compreender claramente. Enquanto aos alunos, estes devem

> ter a oportunidade de discutir com os colegas e com o professor, de argumentar, de criticar, de interagir por forma a haver uma partilha de ideias, de estratégias de raciocínios, de pensamentos matemáticos e de desenvolver a sua capacidade de comunicação. (SERRAZINA, 2017, p. 66).

Nessa perspectiva, denominada ensino-exploratório, a aprendizagem proporcionada pela ação de solucionar problemas nasce da reflexão que o discente faz sobre o problema proposto, tal solução deve "terminar com uma síntese das principais ideias aprendidas, sendo este trabalho realizado pelos alunos, em conjunto com o professor" (SERRAZINA, 2017, p. 70).

Em uma abordagem atual, o Prof. Dr. Jeremy Kilpatrick (KILPATRICK, 2017), faz uma analogia do ato de resolver um problema a um homem que, ao dirigir seu carro norteado pelo GPS (Sistema de Posicionamento Global), se depara com uma voz que diz "recalculando" quando resolve pegar um atalho para o caminho desejado. Nessa concepção de Resolução de Problemas, o autor a descreve como uma sequência de reformulações.

Kilpatrick (2017) compreende a Resolução de Problemas como um processo de reformulações, sendo assim ele tem uma concepção mais ampla no que tange ao processo de resolução de problemas matemáticos. Nessa perspectiva, quando o professor apresenta o problema ao aluno, o discente confronta o problema e uma exigência cognitiva entra em cena, exigência essa que coloca o aluno a fazer Matemática em prática, desenvolvendo, com ou sem conexões, processos de resolução, ao utilizar de conhecimentos previamente obtidos e, de acordo com suas tentativas, o mesmo começa a fazer reformulações do problema inicial.

Nessa direção, os alunos são estimulados a fazer reformulações do problema original, para que, no final, consigam ser bem-sucedidos. Nesse processo, que envolve erros, Kilpatrick (2017) discorre que:

> Nós podemos aprender com o fracasso: pode haver alguma boa ideia numa tentativa malsucedida, e nós podemos chegar a uma tentativa mais bem-sucedida modificando uma malsucedida. O que nós atingimos depois de várias tentativas é muito frequentemente... um problema auxiliar mais acessível. (KILPATRICK, 2017, p. 182).

Assim, o autor conclui que, ao se reformular um problema, observa-se todas as dimensões de um problema. Voltando ao caso do GPS, ele pode traçar o caminho mais curto ao destino, mas, talvez, não seja o mais rápido, pois as variáveis "congestionamento" e "periculosidade do bairro" não foram consideradas, da mesma maneira, a partir de uma reformulação de rota, ou melhor, do problema inicial, a solução pode chegar de maneira mais rápida e com a qualidade esperada.

Sobre a pesquisa em RP no Brasil, o autor Tiêgo dos Santos Freitas (FREITAS, 2019) buscou, em sua tese de doutorado, a partir da Resolução de Problemas, identificar, em uma abordagem de cunho histórico, características da inserção desta Metodologia no cenário nacional, mais especificamente, como uma tendência de pesquisa e ensino dentro da Educação Matemática. O estudioso lançou mão dos anais das 12 edições dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs), através de um recorte realizado do ano de 1987 ao ano de 2016.

Ao longo de sua investigação, Freitas (2019) relatou que um dos grupos de pesquisa que se destacam em publicações sobre RP no cenário nacional é o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), formado em 1992 pela Prof.ª Dr.ª Lourdes de la Rosa Onuchic na UNESP. Freitas (2019) também destacou que um dos grupos de pesquisa em RP que mantém contato com o GTERP é o Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP), fundado pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade. Sobre esse último, Freitas disserta

> O grupo de pesquisa GPEP, constituído em 2008, após conclusão do doutorado de Silvanio de Andrade, se relaciona com o GTERP, considerando os trabalhos conjuntos de ANDRADE, S. e ONUCHIC, L. R., porque, dentre suas linhas de pesquisa, destaca-se a Resolução, Proposição e Exploração de Problemas. Aliás, desde sua fundação, o grupo investiga o tema Resolução de Problemas em salas de aula da Educação Básica, constituindo-se como um núcleo de pesquisa dessa temática na região Nordeste, em específico na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), em Campina Grande. (FREITAS, 2019, p. 158).

A líder do grupo GTERP, a Prof.ª Dr.ª Lourdes de la Rosa Onuchic – Onuchic (1999) – com o intuito de auxiliar na compreensão da Resolução de Problemas, relata alguns passos para o processo: (1) formar grupos e entregar uma atividade; (2) o papel do professor; (3) resultados na lousa; (4) plenária; (5) análise dos resultados; (6) consenso e (7) formalização.

Entretanto, o roteiro, após serem consideradas constatações levantadas durante os anos, se tornou, de acordo com Onuchic *et al.* (2014): (1) proposição do problema; (2) leitura individual; (3) leitura em Conjunto; (4) resolução do problema; (5) observar e incentivar; (6) registro das resoluções na lousa; (7) plenária; (8) busca do consenso; (9) formalização do conteúdo; (10) proposição e resolução de novos problemas.

Desde 1999, essa Metodologia vem integrando o processo de avaliação ao de ensino-aprendizagem, passando a ser denominado Ensino-Aprendizagem-Avaliação (EAA) de Matemática através da Resolução de Problemas, em que a palavra composta "EAA" tem por objetivo expressar a concepção de que o ensino, a aprendizagem e a avaliação precisam ocorrer de maneira simultânea durante a construção do conhecimento do aluno através da orientação do professor no processo da resolução do problema proposto. A palavra "através" significa que esse processo de EAA vai ocorrer ao passo que o discente está resolvendo o problema proposto.

Orientando de mestrado da Prof.ª Dr.ª Lourdes de la Rosa Onuchic, o Prof. Dr. Silvanio de Andrade, líder do GEPEP, desenvolveu, em sua pesquisa de mestrado, intitulada **Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Decodificação de Problemas,** reflexões sobre a Resolução de Problema na perspectiva da Exploração de Problemas. Acerca dessa perspectiva, o autor destaca que:

> há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola [...] e por isso pode ir outra vez e mais outra vez (ANDRADE, 1998, p. 27).

A Resolução de Problemas, em Andrade (1998, 2017), deve entendida como uma perspectiva metodológica de ensino-exploratório e investigativo, na qual a mesma entrelaça Resolução, Proposição e Exploração, concedendo ao aluno a oportunidade de explorar, elaborar reformulações (é importante que não sejam poucas, para que ele possa aproveitar ao máximo o que o problema proporciona) e investigar o problema inicial, desenvolvendo estratégias de resoluções com o intuito de encontrar a tão esperada solução.

Nesse sentido, Andrade (1998) destaca que fundamenta seus trabalhos na perspectiva da Educação Crítica de Paulo Freire e da teoria sociocultural/sóciohistórica de Vygotsky, em que os mesmos, embora vivendo em contextos totalmente distintos, perceberam que, nos estudos sobre ensino, a palavra “história” merece um lugar de destaque. Andrade (1998) também se fundamenta em uma perspectiva de educação crítica, admitindo que a Matemática é um construto social, portanto, falível, aquém de um conhecimento absoluto. Assim, Andrade (1998, 2017) adota a visão falibilista de Imre Lakatos.

Vale ressaltar que Andrade (1998) não utiliza os teóricos (Paulo Freire, Vygotsky e Lakatos) como uma aplicação direta para explicar a dinâmica de um processo de ação-reflexão, mas, sim, a partir de uma possível prática de Educação Crítica em Resolução de Problemas em uma junção de teoria e prática, isto é, práxis concreta da sala de aula. De acordo com Andrade (2017), ao passar dos anos, as suas pesquisas e disciplinas (ministradas no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática a nível de Mestrado e Doutorado) estão sendo influenciadas por estudos em perspectiva denominada pós-crítica, tendo nisso um forte reflexo da sua pesquisa de doutorado (ANDRADE, 2008), mesmo que a temática de trabalho de sua tese não tenha sido a ERP propriamente dita.

Nessa perspectiva, a Exploração-Resolução-Proposição de Problemas é concebida como um movimento “aberto, não fechado, embora não solto, [...] denominado de Problema-

Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado" (ANDRADE, 2017, p. 365). De início, é proposto um problema que pode ser dado pelo docente ou pelo próprio discente, em que, através desse problema, os alunos irão desenvolver um trabalho para encontrar a solução. Nesse ínterim, professor e alunos irão dialogar sobre esse trabalho que se desenvolve num processo de reflexões e síntese.

Partindo desses pressupostos teóricos estabelecidos por Andrade (1998, 2011, 2017), os discentes, possivelmente, chegarão à solução do problema, mas não só a isso, como também a novos conceitos, novos problemas, gerando, assim, a realização de novos trabalhos, por conseguinte, a novas reflexões e sínteses. Por isso, esse trabalho é tido como inacabado, pois vai além do problema e refere-se ao movimento P-T-RS (Problema – Trabalho – Reflexões e Sínteses). Posteriormente, o autor em questão aderiu à palavra "resultado", tornando a nomenclatura Problema-Trabalho-Reflexões em Síntese-Resultado, a partir da experiência de Resolução de Problemas.

Movimento esse baseado em um processo de Codificação e Descodificação, "ferramentas essenciais no desenvolvimento do processo como um todo" (ANDRADE, 2017, p. 369). Codificar um problema é "representá-lo em uma outra forma, outro código, outra linguagem, numa forma mais curta, mais simplificada e mais conveniente" (ANDRADE, 2017, p. 369). Essa ação se refere a todo trabalho de síntese em torno de um problema. Já a descodificação é procurar o significado do problema, decifrando sua mensagem, fazendo uma análise crítica do mesmo, ou da sua resolução ou de cada trabalho que o envolva.

Vale ressaltar que a codificação e a descodificação ocorrem em vários momentos, inclusive, quase simultaneamente, quando um aluno busca compreender o problema e procura representá-lo em um código possível de operacionalização. Estas ferramentas não podem ser ensinadas de maneira explícita em sala de aula. De acordo com Andrade (1998, p. 26), "elas são adquiridas no trabalho da unidade Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado e quanto melhor for desenvolvida essa unidade, melhor será o seu trabalho de codificação e descodificação".

Atualmente, novas vertentes surgiram além das mais conhecidas - "para, sobre, via" dissertadas anteriormente – dentre as quais, podemos destacar a Proposição de Problemas (PP), uma vertente que vem se destacando a nível internacional. Nesta temática, destacam-se os trabalhos do Prof. Phd Jinfa Cai da *University of Delaware* (EUA), dentre outros.

Kilpatrick (2017), discorrendo sobre a necessidade de se dar mais espaço à PP nas pesquisas em Educação Matemática, indaga de onde vêm os bons problemas. O autor declara que "vêm de professores e livros didáticos, mas muito raramente dos alunos" (KILPATRICK, 2017, p. 170). Pensando nisso, pode surgir outra indagação: por que não formar professores de matemática que saibam propor bons problemas e que, através disso, os seus alunos também possam desenvolver a capacidade de fazer o mesmo? Kilpatrick (2017) ainda afirma que a PP deve ser tanto um objetivo quanto um meio para se ensinar matemática.

A Proposição de Problemas vem se destacando em termos de pesquisas e práticas educacionais, tendo destaque, inclusive, em eventos e publicações internacionais e, também, estando presente no currículo educacional de muitos países. Ela, a Proposição de Problemas, constitui o 17° T*opic Study Group* - TSG (Tópico Grupo de Estudos) do 14° *International Congress on Mathematical Education* - ICME (Congresso Internacional de Educação Matemática) que será realizado em Shanghai – China, no ano 2021.

Cai *et al*. (2015), nesse contexto, afirma que há uma longa história de integração da RP nos currículos escolares, e, nessa história, houve avanços significativos em relação aos aspectos afetivos, cognitivos e metacognitivos da Resolução de Problemas tanto em Matemática quanto em outros campos da Ciência.

Mas o que se entende por Proposição de Problemas? De acordo com Cai e Hwang (2020), há diversos autores no campo da Educação Matemática que trabalham nesta perspectiva e cada um deles tem suas peculiaridades em relação a PP. De acordo com Cai e Hwang (2020), a PP em Educação Matemática abrange diversos tipos de atividades relacionadas que envolvem ou apoiam professores e alunos na formulação ou reformulação de um problema com base em um contexto particular (ao qual nos referimos como o contexto do problema ou situação do problema). Os autores entendem por problema e tarefa qualquer questão matemática que possa ser solicitado ou qualquer tarefa matemática que possa ser executada com base na situação problema. Cai e Hwang (2020) interpretam o contexto como situações dentro da matemática que dão origem a novas questões, bem como situações extraídas (ou incorporadas) de fenômenos da vida real e questões decorrentes de outras disciplinas.

Entretanto, ainda segundo Cai *et al*. (2015), já há esforços em algumas partes do mundo para vincular a Proposição de Problemas ao currículo de Matemática, devido ao seu alto potencial para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da matemática, pois a mesma é uma atividade intelectual que é fundamental para a atividade científica, fundamental a tal ponto que, segundo Cai *et al*. (2015), a atividade de propor problemas é mais importante até que resolver problemas, pois, no que tange ao desenvolvimento cognitivo do aluno, propor problemas é uma ferramenta para fixar mais os conceitos, desenvolver a criatividade e também é uma característica fundamental para desenvolver matemática de alta qualidade, como exemplo, temos os problemas de David Hilbert (1862 – 1943).

Propor problemas de alta qualidade dentro do mundo dos matemáticos é considerada "uma das formas mais altas de conhecimento matemático e um caminho seguro para ganhar status no mundo da matemática" (CRESPO, 2015, p. 494), mesmo que essa prática venha a ser conhecida, muitas vezes, como um ato criativo ou uma espécie de arte, ela é de suma importância para o desenvolvimento da matemática como um campo e do matemático ao se aprofundar em seus estudos. Essas duas ações (propor e resolver) estão intimamente ligadas ao mundo da matemática. Podemos notar que, na história da matemática, ao tentar resolver conjecturas, foram propostas novas que geraram novos conhecimentos. No entanto, no campo da sala de aula, o propor problemas e o resolver problemas não estão tão ligados como na matemática acadêmica.

Tendo em vista a importância da Proposição de Problemas para a sala de aula de matemática a fim de construir e fortalecer conceitos matemáticos, não se pode ignorar sua importância para a formação inicial dos professores de matemática, pois os mesmos, de acordo com Cai *et al*. (2015), podem ser treinados para propor problemas, uma vez que, ainda que esteja em processo de descoberta, as melhores estratégias para ensinar a propor bons problemas é praticando. Conforme Cai e Hwang (2020), essa atividade de Proposição de Problemas, no que diz respeito à formação de professores, se torna mais produtiva quando interligada a uma exploração de problemas e à metodologia de Resolução de Problemas. Desse modo, essa junção auxilia o futuro professor a propor problemas mais interessantes, potencializando, assim, o ensino de matemática nas suas futuras salas de aula.

Portanto, considerando o que esses autores dizem sobre a Proposição de Problemas, visamos, neste trabalho, sugerir que os futuros licenciandos proponham problemas. Assim sendo, nesta pesquisa, será fundamental para o licenciando que ele proponha problemas sobre Álgebra Linear, pois, fazendo isso, estará aprendendo a propor bons problemas para sua prática escolar, além de estar fixando e aprofundando os conceitos aprendidos na disciplina e isso irá proporcionar uma formação mais reflexiva e criativa ao futuro docente.

Considerando diversos trabalhos sobre a PP, Andrade (2017, p. 371) pontua que a "atividade de exploração de problemas é considerada a ferramenta mais importante e mais ampla de todas, ela compreende tanto a resolução como a proposição". Nessa direção, nosso trabalho, em sala de aula, pautou-se nesta perspectiva de Andrade (2017), através da Experiência de Resolução$_{\text{exploração}}$, Exploração, Proposição$_{\text{exploração}}$ e Codificação – Descodificação de Problemas, tratando-se de uma versão ligeiramente modificada da primeira, considerando, como ferramentas essenciais de trabalho, o processo de codificação e descodificação e a proposição de problemas ao longo de todo o processo educativo.

Segue um quadro que sintetiza as vertentes metodológicas da Resolução de Problemas que aqui foram apresentadas:

Quadro 4 - Algumas Vertentes da Metodologia de Resolução de Problemas.

Autor/Ano	Abordagem	Ideia principal
POLYA (1995)	Descreve um conjunto de quatro fases que se relacionam no processo de resolver problemas matemáticos: (1) compreender o problema; (2) planejar um plano de resolução; (3) executar o plano; e (4) fazer a retrospectiva do problema original.	Preocupa-se com a resolução de problemas e como ensinar estratégias que levem a enxergar caminhos para resolver problemas.
SCHROEDER E LESTER (1989)	Apresentam três abordagens distintas para se trabalhar a Resolução de Problemas em contexto de sala de aula: (1) ensinar sobre Resolução de Problemas; (2) ensinar matemática para resolver problemas; e (3) ensinar matemática através da Resolução de Problemas.	Preocupa-se com a interpretação da Resolução de Problemas em contexto de sala de aula, tendo em vista que ela pode ser vista como uma teoria, como uma metodologia, ou como uma ação a ser realizada em torno de um problema.
ONUCHIC *et al*. (2014)	Discute a implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em que os processos de ensino, aprendizagem e avaliação ocorrem de maneira contínua, ao passo que o discente soluciona o problema e constrói o conceito	Considera o processo integrado ensino-aprendizagem-avaliação. Neste, o trabalho destes três elementos ocorrem simultaneamente durante o processo de resolução dos problemas.

	matemático por intermédio do docente.	
SERRAZINA (2017)	Dialoga sobre a Metodologia de Ensino e aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas, em uma abordagem de ensino-exploratório.	Objetiva ajudar os professores na promoção de um ambiente em que os alunos sejam encorajados a questionar, experimentar, explorar, de maneira criativa, diversas maneiras de resolução que o conduzam a processos de construção do conhecimento. Com isso, a autora apresenta dez estratégias de resolução de problemas que precisam ser trabalhadas na formação inicial dos professores que ensinam matemática.
KILPATRICK (2017)	Aborda a Resolução de Problemas como sendo uma investigação, em que uma sequência de reformulações é realizada em torno de um problema inicial.	A perspectiva da Resolução de Problemas como um processo de reformulações e investigação enxerga cada ideia compreendida no processo de resolução como sendo uma reformulação do problema inicial, fazendo aperfeiçoamentos das definições apresentadas no problema original.
CAI *et al*. (2015), CAI E HWANG (2020) e CRESPO (2015)	Apesar de cada um dos autores ter sua concepção acerca da proposição de problemas, um ponto convergente é todos concebem a Proposição de Problemas como uma metodologia eficaz no ensino de Matemática em sala de aula, em que aluno ou o professor formula ou reformula problemas a partir	A Proposição de Problemas é uma metodologia que está presente, intrinsecamente, no trabalho de matemáticos e também pode estar no trabalho didático em sala de aula. Mostram os benefícios da PP e que tanto professores quanto alunos podem propor bons problemas.

	de dados iniciais que podem ser retirados do contexto matemático ou exterior a ele.	
ANDRADE (1998, 2017)	Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.	A partir da exploração, da resolução e da proposição dos problemas, através do movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado, que toma como base o processo de Codificação e Descodificação, os alunos constroem ideias e conceitos matemáticos.

Fonte: Adaptado de Santos (2019).

Partindo desses pressupostos, o trabalho aqui apresentado tem como Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática a ERP. Como objetivo, buscamos analisar as contribuições da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas aliada às Representações Múltiplas de Álgebra ao ensino de Espaços Vetoriais na licenciatura em Matemática.

Para tanto, iremos, nesta pesquisa, elaborar, aplicar e analisar uma Oficina sobre o ensino de Espaços Vetoriais, aliado ao uso das Representações Múltiplas de Álgebra, na perspectiva da ERP, com os alunos da Licenciatura em Matemática, buscando, dessa forma, alcançar os seguintes objetivos específicos: i) proporcionar aos licenciandos em matemática reflexões quanto à aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear para uma atuação na Educação Básica através da ERP; ii) desenvolver problemas que possibilitem a geração dos conceitos que serão trabalhados; iii) possibilitar experiências com a utilização da ERP aliada às Representações Múltiplas de Álgebra; iv) descrever as contribuições das Representações Múltiplas para o processo de ensino dos conceitos que serão trabalhados.

Nos problemas geradores que serão propostos, se pretende ter como fundamento os resultados obtidos nas pesquisas anteriores. Assim, propõe-se, inicialmente, fortalecer a ideia de que, quando se está estudando Espaços Vetoriais, está se estudando uma Estrutura Algébrica, assim como disserta Ferreira (2017a) e Prado (2016). Mas, antes de tratar dos axiomas de um Espaço Vetorial propriamente dito, se pretende propor problemas geradores sobre as Operações de Adição e Multiplicação por escalar, como discorre Mutambara e Bansilal (2018).

Como a presente pesquisa tem como intuito apresentar problemas para licenciandos que irão atuar na Educação Básica, então serão propostos problemas que façam conexão com os conteúdos da Educação Básica e com outros conceitos matemáticos do Ensino Superior, como indica Prado (2016).

Vale ressaltar que, nos problemas, será seguida a orientação de Dorier (2000), na qual se deve partir por experiências com casos particulares, em que, através de conjuntos como o R^2 se possa generalizar as propriedades para um R^n, posteriormente, para outro conjunto, como $\mathrm{M}_{mxn}(\mathrm{R})$, até constatar em um espaço vetorial E qualquer, buscando, assim, padrões de "comportamento" através de generalizações como estas e de diálogos.

A partir de reflexões realizadas através dos trabalhos analisados, tais como Coimbra (2008), percebeu-se que, ao propor os problemas, se deve chamar atenção para o fato de que os Espaços Vetoriais ou Subespaços vetoriais não são uma extensão da Geometria Analítica, mas uma estrutura algébrica, logo, o vetor não deve ser apenas o segmento que eles conhecem e as operações podem ser realizadas em diversos conjuntos.

3 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos a forma como esta pesquisa foi desenvolvida. Assim, expomos, inicialmente, aspectos relacionados à Metodologia de Pesquisa Qualitativa (BOGDAN; BICKLEN, 1994; YIIN, 2016), na modalidade de Pesquisa Pedagógica (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008), pontuando em quais momentos nossa pesquisa corresponde à metodologia e modalidade citada e justificando os motivos para esta escolha. Posteriormente, trazemos o detalhamento da pesquisa, apontando as etapas, caracterizando os sujeitos da pesquisa, discorrendo sobre os problemas geradores e fornecendo informações sobre o instrumento de levantamento de dados. Para auxiliar no levantamento de dados, foi desenvolvido e entregue aos participantes um questionário sobre o desenvolvimento da oficina e as metodologias utilizadas na mesma. Cabe ressaltar, ainda, que o instrumento de análise das entrevistas deu-se via o Discurso do Sujeito Coletivo – DSC (LEFÉVRE; LEFÉVRE, 2005).

3.1 Metodologia da Pesquisa

Para elaboração deste trabalho de pesquisa, a metodologia selecionada foi qualitativa, por entendermos que esta trata o fenômeno em toda sua complexidade, isto é, ela busca a sua compreensão e seus significados, não somente sua explicação, proporcionando, assim, um melhor entendimento do fenômeno de interesse.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a Pesquisa Qualitativa tem como a fonte direta de dados o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Na pesquisa qualitativa, a investigação é descritiva, além disso o processo é tão importante quanto os resultados ou produtos, os dados são analisados de maneira indutiva, o significado é de importância essencial nesta abordagem. Nesse sentido, destacamos, a seguir, alguns pontos de nossa pesquisa que acreditamos corresponder aos aspectos citados:

- O ambiente natural desta pesquisa foi uma turma que cursou uma oficina intitulada "Estudando Espaços Vetoriais por meio da Exploração de Problemas", em que o ministrante da oficina era o próprio pesquisador, responsável pela elaboração do material para levantamento de dados, como também pela aplicação, observação, descrição e análise, sendo esta oficina o instrumento principal da pesquisa.
- Os dados foram levantados através dos registros escritos dos alunos da Oficina na resolução, proposição e exploração das atividades por meio de diálogos registrados

durante as aulas através de imagens, áudio e vídeos disponibilizados no grupo do WhatsApp.

- O propósito das atividades desenvolvidas não era centrado no resultado obtido, mas no percurso de cada aluno durante a resolução e exploração do problema.
- A partir das discussões e ao analisarmos o desenvolvimento dos alunos no decorrer da Oficina, unimos pressupostos relevantes para a discussão acerca da utilização das Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Espaços Vetoriais, como também sobre as contribuições da metodologia Exploração de Problemas no estudo deste conteúdo.
- Ao considerar que alguns dos alunos da licenciatura já haviam tido contato com o conteúdo abordado, o diálogo durante a Oficina buscou identificar as concepções que os alunos construíram ao longo de sua vida acadêmica, proporcionando a ampliação delas a partir de uma aprendizagem com mais compreensão e, até mesmo, contribuir no desenvolvimento de novos conceitos.

Dentre as diversas modalidades de pesquisa qualitativa nas áreas de ensino e educação, o trabalho aqui apresentado se enquadra numa modalidade denominada pesquisa pedagógica, na qual se vem discutindo a possibilidade e necessidade de se realizar estudos com o professor pesquisando sua própria prática, exercendo o duplo papel de professor e pesquisador. Pesquisa pedagógica significa professores pesquisando suas próprias salas de aula, neste caso, a sala de aula será a oficina que foi ministrada de maneira remota. Primeiro, a pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula; segundo, o principal pesquisador em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica é o professor cuja sala de aula está sob a sua investigação (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008).

Nesse sentido, ressaltamos que, ao realizar esta Pesquisa Qualitativa na modalidade de Pesquisa Pedagógica, não levantamos apenas dados, também buscamos aprimorar nossa prática pedagógica e, sobretudo, contribuir para a formação desses futuros professores de Matemática, levando novas compreensões sobre a Álgebra Linear e a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos quanto ao Ensino da Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas.

3.2 Momentos da pesquisa

A presente pesquisa foi fragmentada em quatro etapas, as quais sucederam em momentos distintos, mas não necessariamente de forma cronológica. A seguir, descrevemos as fases e as ações que foram desenvolvidas em cada uma delas.

Na primeira etapa, foi realizada a revisão de literatura, para que pudéssemos situar nossa questão de pesquisa e os nossos objetivos aqui propostos. Posteriormente, foi realizado o levantamento bibliográfico, com o intuito de se obter um aprofundamento na elaboração da proposta e discussão dos dados.

A segunda fase da pesquisa consistiu na elaboração do instrumento de pesquisa – Oficina, como também em sua avaliação, uma vez que grande parte das atividades desenvolvidas na Oficina foi aplicada em disciplinas do Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), da UEPB, pelo próprio pesquisador, na forma de seminário. As disciplinas eram ministradas pelo Professor Dr. Silvanio de Andrade, que também é o orientador deste trabalho. A partir das discussões realizadas nas disciplinas acerca das atividades, elas foram adaptadas e reorganizadas pelo pesquisador.

A terceira fase constituiu-se no levantamento de dados, o qual foi realizado por meio de uma Oficina ministrada através do aplicativo WhatsApp, devido a algumas restrições por conta da Pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2. A oficina foi composta por seis momentos, quatro deles antes do recesso acadêmico e dois, depois, mais especificamente, no mês de fevereiro. Cada momento era dedicado a trabalharmos a Exploração de Problemas de um problema específico e tinha uma duração de 5 dias. A Oficina era composta por 7 alunos de diversos períodos de cursos de Licenciatura em Matemática e Física de universidades públicas Paraíba.

Por fim, a quarta fase constituiu-se na descrição e na análise dos dados, a qual teve início concomitante à terceira fase, pois, à medida que as atividades eram aplicadas, era realizada a descrição e feitas as análises iniciais dos dados. Posteriormente, foi aplicado um questionário semiestruturado aos discentes.

A seguir, apresentamos caracterizações dos sujeitos que compõe esta pesquisa, bem como o detalhamento do levantamento de dados.

3.3 Caracterização dos sujeitos

No que tange à aplicação desta pesquisa, *a priori* a intensão era ministrar uma oficina na forma presencial para alunos de licenciatura em Matemática, todavia, com o advento da pandemia devido ao Sars-CoV-2, a aplicação desta pesquisa teve de ser realizada remotamente. Partindo desse cenário, em consonância com o orientador, foi planejada a oficina, agora de forma remota, através do software *Google Meet*, em que o pesquisador buscava interagir com os sujeitos da pesquisa. Para esta oficina, foi disponibilizado um local onde possuía internet, câmeras, Notebook, lousa e pincéis.

Com o intuito de alcançar os futuros sujeitos da pesquisa, foi elaborado um cartaz contendo todas as informações necessárias sobre a oficina e foi postado pelo professor pesquisador em grupos virtuais de redes sociais, nos quais o público era constituído por licenciandos e licenciados em Matemática espalhados por todo o Brasil. No cartaz, continha todas as informações necessárias, inclusive, um link contendo um formulário do Google Forms, no qual o candidato poderia deixar todos os seus dados de contato. Ao final do prazo de quase um mês, obteve-se um quantitativo de 32 interessados em participar, dentre eles, 29 licenciados e licenciandos em Matemática, um licenciado em Física e um bacharel em Ciências da Computação, sendo o último já Mestre na área e atuante como professor de uma instituição de ensino superior pública localizada no Estado da Paraíba, os demais pertenciam não só ao Estado da Paraíba, como também de Sergipe, Pernambuco e Bahia.

Um grupo via aplicativo WhatsApp foi criado com todos os interessados explicando que a oficina se tratava de uma pesquisa de Mestrado e mostrando que todos os dados iriam permanecer sob total sigilo. Marcou-se, então, o primeiro encontro para o dia 02/11/2020, às 15h30min. No primeiro encontro com a turma, compareceu apenas 13 pessoas que não interagiram a nenhuma das provocações e que alegaram estar envolvidos em outras atividades paralelas, tais como: aulas virtuais, fazendo trabalhos, dentre outras coisas.

Dadas as dificuldades encontradas, como pesquisador, me reuni com meu orientador, posteriormente, foi realizado um diálogo no grupo do WhatsApp, em que se questionou quem, de fato, estava interessado na participação da oficina e apenas sete sujeitos concordaram em participar, todavia, alguns tinham disponibilidade pela manhã, outros pela tarde e alguns pela noite.

Os sujeitos da pesquisa, então, são sete licenciandas do sexo feminino de Universidades públicas situadas no Estado da Paraíba. No que tange à formação acadêmica, são seis licenciandas em Matemática e uma licencianda em Física, apenas três das mesmas já haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear e nenhum dos sujeitos já exerce a função de professor de matemática. Das sete alunas, apenas seis concluíram a oficina, sendo que a última não participou do último momento, ela alegou que, infelizmente, não iria poder por causa de muitas atribuições extracurriculares.

3.4 Levantamento de Dados

Como instrumento de levantamento de dados, foi utilizado uma Oficina sobre o conteúdo Espaços Vetoriais e outros conceitos que o tangenciam, tendo como objetivo promover o estudo de Espaços Vetoriais, aliado às Múltiplas Representações de Álgebra, através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas.

Como os sujeitos da pesquisa dispunham de horários que não convergiam e considerando que estávamos aplicando a pesquisa de forma remota, em consonância com o orientador, a Oficina se realizou por meio do aplicativo WhatsApp, já que todos os sujeitos tinham acesso.

Barbosa e Carvalho (2018) afirmam que o WhatsApp é um aplicativo disponível na nova geração de telefones inteligentes (iPhone, Blackberry, Android e Nokia), que possibilita aos usuários enviar mensagens de texto, imagens, áudios e vídeos para outro usuário gratuitamente, dependendo apenas de uma conexão de internet. E, ao compreender essas facilidades de comunicação deste aplicativo, Barbosa e Carvalho (2018) apontaram o mesmo como uma ótima ferramenta para elaborar pesquisas qualitativas na área de educação. Segundo os autores:

> acredita-se que o WhatsApp, como instrumento de pesquisa, se caracteriza como um ambiente virtual de construção coletiva, pois permite acesso dos participantes às redes sociais. Funciona como ferramenta de coleta e discussão e possibilita a expansão de acesso à informação por meio de arquivo, vídeos, textos, *links*, dentre outros. Suas potencialidades propiciam a discussão crítica, a produção de conhecimento e potencializa a tomada de decisão e a ação interventiva. (BARBOSA; CARVALHO, 2018, p. 8).

Com esta compreensão do aplicativo para pesquisas qualitativas na área de ensino e tendo como entendimento que o mesmo permite que “o conhecer se torne onipresente porque cria novas possibilidades e não se limita apenas a um dado local ou tempo” (BARBOSA; CARVALHO, 2018, p. 4), o WhatsApp veio a ser convergente com nossos objetivos e com a disponibilidade de nossos sujeitos de pesquisa.

Durante a Oficina, utilizamos, como registro dos dados, as notas de aula do professor-pesquisador, atividades enviadas em formato pdf no grupo da Oficina, registros dos alunos na resolução das atividades, imagens fotográficas de resoluções e outras produções dos discentes.

Para auxiliar na descrição das atividades e na melhor compreensão do raciocínio dos alunos, também utilizamos, como registro, as suas falas registradas em áudio ou escritas, uma vez que, no decorrer das aulas, o pesquisador buscou anotar diálogos e comentários pertinentes, sempre procurando transcrevê-los ao final das aulas. Para identificar os alunos e preservar suas identidades, os nomeamos em ordem alfabética, como disposto na sequência de membros pertencentes ao grupo do WhatsApp, por: $A1$, $A2$, $A3$, ..., $A7$.

A Oficina foi composta por seis (Cf p. 66) momentos, cada momento durava cinco dias. Neste intervalo de tempo, era realizado o processo de Exploração de Problemas de um conceito Matemático. Cada participante interagia com seu colega ou com o pesquisador conforme sua disponibilidade de tempo e, neste ínterim, o pesquisador, prontamente, fazia uso de provocações e questionamentos para gerar o diálogo e a reflexão do grupo. As atividades realizadas foram fundamentadas na perspectiva de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas (ANDRADE, 1998, 2017).

No quadro abaixo, apresentamos um roteiro com uma síntese dos tópicos abordados na Oficina desenvolvida, expondo o conteúdo estudado e as ideias matemáticas trabalhadas:

Quadro 5 - Conceitos Matemáticos que foram trabalhados em cada momento.

Momento	**Conceitos matemáticos trabalhadas**
1º Revisando Sistemas Lineares	Equação Linear, Sistemas Lineares e a natureza de suas soluções.
2º Construindo o conceito de operações.	Operações de Adição e Multiplicação por Escalar (mais especificamente, por um número real) em alguns conjuntos que serão ensinados pelos discentes na Educação Básica.
3º Decodificando os Espaços Vetoriais.	Espaço Vetoriais.
4º Como Encontrar os Subespaços Vetoriais.	Subespaços Vetoriais.
5º Combinações Lineares e a "cabana de Gauss".	Combinações Lineares e Dependência Linear. Combinações Lineares, Subespaço Gerado, Dependência Linear e Bases.
6º "O problema do Rapel" no $\mathbf{R}^2$.	Transformações Lineares e Operador Linear.

Fonte: produzido pelo autor.

Ao final da oficina, foi aplicado um questionário para levantamento de dados. Optamos por utilizar uma entrevista pelo aplicativo WhatsApp de forma semiestruturada.

Entendeu-se que esse instrumento seria adequado para auxiliar no alcance dos objetivos dessa pesquisa. Sobre o questionário, o leitor pode encontrá-lo no apêndice 1 deste trabalho.

3.5 Metodologia de Análise dos questionários

As concepções acerca do ensino-aprendizagem da matemática variam muito de indivíduo para indivíduo, pois cada um possui seus pressupostos, sua experiência, formação e inúmeros outros fatores que moldam essas concepções, todavia, mesmo perante essa variedade de concepções, os grupos sociais apresentam ideais em comuns a respeito de determinado assunto e, em meio à diversidade de diferentes argumentações, é possível encontrar ideias que são coletivas. Entretanto, obter essas ideias coletivas não é uma tarefa simples. Assim, optamos, como instrumento de análise dos questionários, o Discurso do Sujeito Coletivo (DSC).

Desenvolvida por pesquisadores da Universidade de São Paulo (USP), Fernando Lefèvre e Ana Maria Cavalcanti Lefèvre, esta metodologia vem tomando espaço no meio acadêmico como metodologia de análise em pesquisas qualitativas. Ao usar o DSC, o pesquisador pode padronizar e sistematizar os procedimentos, viabilizando, assim, agregar os discursos individuais, concedendo voz à coletividade, como se fosse um só indivíduo, partindo das respostas do questionário aplicado.

De acordo com Lefèvre e Lefèvre (2005), essa proposta consiste em realizar uma análise do material verbal coletado (artigos, cartas, *papers*, questionários, entre outros), a partir das ideias centrais e/ou ancoragens e suas correspondestes expressões-chave. De acordo com os pesquisadores, para elaborar o DSC, são indispensáveis quatro figuras metodológicas (ou operadores), sendo eles: Expressões-Chave (ECH), Ideias Centrais (IC), Ancoragem (AC) e, posteriormente, o DSC propriamente dito.

Ainda de acordo com Lefèvre e Lefèvre (2005), as Expressões-Chave são o fundamento para a construção do DSC, pois são trechos selecionados das respostas, que melhor descrevem o conteúdo delas. Selecionados as ECH, são eleitas as Ideias Centrais, que são a descrição do sentido presente nas respostas do questionário, as IC, por sua vez, mostram o tema da resposta. As Expressões-Chave ainda podem indicar outro operador que são as AC, elas são fórmulas sintéticas que descrevem, sob a forma de afirmações genéricas, ideologias, valores, crenças e teorias. Para que sejam elencadas Ancoragens, são necessárias marcas discursivas explícitas nas respostas do questionário. Assim, isso implica dizer que nem sempre será possível elencar as AC. Portanto, de acordo com Lefèvre e Lefèvre (2005), o Discurso do Sujeito

Coletivo é a junção das Expressões-Chave que possuem Ideias Centrais e/ou Ancoragens com sentido semelhante ou complementar.

De acordo com os autores, há dois Instrumentos de Análise do discurso, o Instrumento de Análise do Discurso 1 (IAD 1) e o Instrumento de Análise do discurso 2 (IAD 2). No primeiro, são expostos integralmente o conteúdo das respostas com as ECH sublinhadas, grifadas, destacadas em negrito ou itálico. Ainda no primeiro são organizadas as IC e/ou AC. Já no segundo, o IAD 2, são relacionadas as ECH retiradas do discurso e o DSC. Antes da elaboração dos IAD's, é preciso fazer a transcrição literal das respostas, feito isso passamos a elaborar o IAD 1. Para a construção dele, seguimos alguns procedimentos sequenciados, os quais serão explicitados a seguir.

Para elaboração do IASD 1, deve-se fazer: a transcrição das entrevistas, destacar as ECH, nomear as IC, identificar a ancoragem, agrupar as ideias chave.

Já para elaboração do IAD 2, deve-se realizar: a transcrição das ECH e a construção do discurso do sujeito coletivo.

Para tornar mais claro o método de análise dos questionários que será utilizado nessa pesquisa, usaremos um fragmento da pesquisa de Eleutério (2016), que investigou acerca das concepções dos estudantes de Licenciatura em Matemática, sobre a Matemática e seu ensino, bem como suas implicações para a prática pedagógica. Escolhemos, então, o DSC usado para responder à seguinte questão: Para você, quando formado, que contribuição este curso poderá ter na sua prática pedagógica?

Primeiro passo: Deve-se escrever em cada linha da coluna correspondente as ECH, ou seja, na primeira coluna, a resposta de um dos sujeitos da pesquisa. Em seguida, em nosso segundo passo, deve-se destacar as ECH de cada resposta. Podemos destacar usando o efeito itálico, negrito, sublinhado, alterando a cor da fonte ou utilizando ferramenta de realce. Depois, utilizamos outro recurso gráfico, para que, a partir das expressões-chave, destaque-se a ancoragem, caso haja.

Quadro 6 - Segundo passo para a construção do IAD 1.

Expressões- Chave	**Ideias Centrais**	**Ancoragem**
Aluno A: Não muitas, porque a prática é diferente da teoria, no curso não nos ensinam a como lidar com alunos que realmente nos darão problemas, contribuirá apenas para nossos conhecimentos, porém para a prática não muito.		
Aluno B: Nenhuma, já tinha meus próprios métodos, só contribui com algumas informações a mais, que não vai ser preciso utilizá-las.		
Aluno C: De manuseio e prática com demonstrações. E experiência através dos estágios;		
Aluno D: Aqui aprendi o quanto os professores devem pesquisar para dar uma boa aula.		
Aluno E: Acredito que a graduação é o ponto inicial, uma ajuda, pois muita coisa só aprenderei na prática e o curso na minha concepção para um curso de Licenciatura em Matemática tem que melhorar muito, em relação a prática docente ainda deixa muito a desejar;		
Aluno F: Como estudantes, apenas a noção de como agir na sala de aula, mas sabemos que nem tudo o que vemos no curso, principalmente nas práticas pedagógicas, será possível realmente colocar na prática.		
Aluno G: *Ensinar bem o conteúdo* proposto pela grade escolar de onde trabalha.		
Aluno H: -	-	-
Aluno I: Contribui para um *melhor domínio do conteúdo, uma melhor postura com alunos, conhecer melhor o ambiente escolar através dos estágios, etc*.		

Aluno J: *Diversas*, aqui *aprendi muitas coisas, não só nas cadeiras de Matemática* (Álgebra/Geometria), *mas nas práticas educacionais*, estágios, tudo foi/está sendo de grande valia.		
Aluno K: Primeiramente *não seguir a metodologia dos professores ruins que não tem didática*, e jogar fora o que não prestou e ficar apenas com o que foi bom, *não me contaminar com as práticas de muitos desestimulados e sem boa vontade de ensinar*. Ter paciência sempre.		
Aluno L: *Contribuições diversas, desde o conteúdo em si, como a respeito da didática.*		
Aluno M: *Ter contribuído bastante no conhecimento matemático e me tornado capaz de ver os problemas em sala de aula.*		

Fonte: Adaptado de (ELEUTÉRIO, 2016, p. 91- 93).

Em nossa pesquisa destacamos as ideias centrais de cada entrevista utilizando o destaque em negrito e realçamos as ancoragens utilizando a ferramenta de sublinhar (Ver anexo 8).

No Terceiro passo o pesquisador deve eleger as Ideias Chave e a Ancoragem.

Quadro 7 - Terceiro passo para a construção do IAD 1.

Expressões- Chave	**Ideias Centrais**	**Ancoragem**
Aluno A: Não muitas, porque a prática é diferente da teoria, no curso não nos ensinam a como lidar com alunos que realmente nos darão problemas, contribuirá apenas para nossos conhecimentos, porém para a prática não muito.	Não terá muitas contribuições, pois a pratica é diferente da teoria.	Teoria diferente da prática,

Aluno B: Nenhuma, já tinha meus próprios métodos, só contribui com algumas informações a mais, que não vai ser preciso utilizá-las.	Nenhuma, as informações recebidas não será preciso utilizá-las.	Teoria diferente da prática.
Aluno C: De manuseio e prática com demonstrações. E experiência através dos estágios;	Prática com as demonstrações e experiência através de estágios.	
Aluno D: Aqui aprendi o quanto os professores devem pesquisar para dar uma boa aula.	Professores devem pesquisar para dar uma boa aula.	
Aluno E: Acredito que a graduação é o ponto inicial, uma ajuda, pois muita coisa só aprenderei na prática e o curso na minha concepção para um curso de Licenciatura em Matemática tem que melhorar muito, em relação a prática docente ainda deixa muito a desejar;	Muita coisa só aprenderá na prática. Por ser um curso em licenciatura tem que melhorar muito em relação à prática.	Teoria diferente da prática.
Aluno F: Como estudantes, apenas a noção de como agir na sala de aula, mas sabemos que nem tudo o que vemos no curso, principalmente nas práticas pedagógicas, será possível realmente colocar na prática.	Apenas a noção de agir em sala de aula, pois o que se vê principalmente nas práticas pedagógicas, não será possível realmente colocar na prática.	Teoria diferente da prática.
Aluno G: *Ensinar bem o conteúdo* proposto pela grade escolar de onde trabalha.	Ensinar bem o conteúdo.	
Aluno H:-	-	-
Aluno I: Contribui para um *melhor domínio do conteúdo, uma melhor postura com alunos, conhecer melhor o ambiente escolar através dos estágios, etc*.	Para um melhor domínio do conteúdo, uma melhor postura com os alunos e para conhecer	

	melhor o ambiente escolar.	
Aluno J: *Diversas,* aqui *aprendi muitas coisas, não só nas cadeiras de Matemática* (Álgebra/Geometria), *mas nas práticas educacionais*, estágios, tudo foi/está sendo de grande valia.	Diversas, tanto com as cadeiras de Matemática, como as de Educação.	
Aluno K: Primeiramente *não seguir a metodologia dos professores ruins que não tem didática*, e jogar fora o que não prestou e ficar apenas com o que foi bom, *não me contaminar com as práticas de muitos desestimulados e sem boa vontade de ensinar*. Ter paciência sempre.	Não seguir a metodologia de alguns professores.	
Aluno L: *Contribuições diversas, desde o conteúdo em si, como a respeito da didática.*	Diversas desde o conteúdo em si, como também com a didática.	
Aluno M: *Ter contribuído bastante no conhecimento matemático e me tornado capaz de ver os problemas em sala de aula.*	Contribuiu para o conhecimento matemático, e faz ser capaz de ver os problemas em sala de aula.	

Fonte: Adaptado de (ELEUTÉRIO, 2016, p. 91- 93).

O quarto passo é agrupar e categorizar as Ideias Centrais e Ancoragem de mesmo sentido ou de sentido complementar, etiquetando cada categoria com, por exemplo, letras A, B, C, etc.

Quadro 8 - Quarto passo para a construção do IAD 1.

Expressões- Chave	Ideias Centrais	Ancoragem
Aluno A: Não muitas, porque a prática é diferente da teoria, no curso não nos ensinam a como lidar com alunos que realmente nos darão problemas, contribuirá apenas para nossos conhecimentos, porém para a prática não muito.	Não terá muitas contribuições, pois a pratica é diferente da teoria. A	Teoria diferente da prática, A
Aluno B: Nenhuma, já tinha meus próprios métodos, só contribui com algumas informações a mais, que não vai ser preciso utilizá-las.	Nenhuma, as informações recebidas não será preciso utilizá-las. A	Teoria diferente da prática. A
Aluno C: De manuseio e prática com demonstrações. E experiência através dos estágios;	Prática com as demonstrações e experiência através de estágios. B	
Aluno D: Aqui aprendi o quanto os professores devem pesquisar para dar uma boa aula.	Professores devem pesquisar para dar uma boa aula. B	
Aluno E: Acredito que a graduação é o ponto inicial, uma ajuda, pois muita coisa só aprenderei na prática e o curso na minha concepção para um curso de Licenciatura em Matemática tem que melhorar muito, em relação a prática docente ainda deixa muito a desejar;	Muita coisa só aprenderá na prática. Por ser um curso em licenciatura tem que melhorar muito em relação à prática. A	Teoria diferente da prática. A
Aluno F: Como estudantes, apenas a noção de como agir na sala de aula, mas sabemos que nem tudo o que vemos no curso,	Apenas a noção de agir em sala de aula, pois o que se vê principalmente nas práticas	Teoria diferente da prática. A

principalmente nas práticas pedagógicas, será possível realmente colocar na prática.	pedagógicas, não será possível realmente colocar na prática. A	
Aluno G: *Ensinar bem o conteúdo* proposto pela grade escolar de onde trabalha.	Ensinar bem o conteúdo. B	
Aluno H:-	-	-
Aluno I: Contribui para um *melhor domínio do conteúdo, uma melhor postura com alunos, conhecer melhor o ambiente escolar através dos estágios, etc*.	Para um melhor domínio do conteúdo, uma melhor postura com os alunos e para conhecer melhor o ambiente escolar. B	
Aluno J: *Diversas,* aqui *aprendi muitas coisas, não só nas cadeiras de Matemática* (Álgebra/Geometria), *mas nas práticas educacionais*, estágios, tudo foi/está sendo de grande valia.	Diversas, tanto com as cadeiras de Matemática, como as de Educação. B	
Aluno K: Primeiramente *não seguir a metodologia dos professores ruins que não tem didática*, e jogar fora o que não prestou e ficar apenas com o que foi bom, *não me contaminar com as práticas de muitos desestimulados e sem boa vontade de ensinar*. Ter paciência sempre.	Não seguir a metodologia de alguns professores. C	
Aluno L: *Contribuições diversas, desde o conteúdo em si, como a respeito da didática.*	Diversas desde o conteúdo em si, como também com a didática. B	

Aluno M: *Ter contribuído bastante no conhecimento matemático e me tornado capaz de ver os problemas em sala de aula.*	Contribuiu para o conhecimento matemático, e faz ser capaz de ver os problemas em sala de aula. B	

Fonte: Adaptado de Eleutério (2016, p. 94).

Em sua pesquisa de Eleutério (2016) organizou as Ideias Chave e Ancoragem nos seguintes grupos: Grupo A - Não terá muitas contribuições, pois a teoria é diferente da prática; Grupo B – Contribui para dominar melhor o conteúdo e ter didática em sala de aula e Grupo C – Não seguir a metodologia de alguns professores. Esse processo se repete para a tabulação de todas as perguntas. O pesquisador, após elaborar a IAD 1, deve separar todas as ECH correspondentes a cada categoria etiquetada e para cada categoria elaborar o Instrumento de Análise do Discurso 2, que deve ser feito para cada grupamento.

Segue um exemplo de elaboração do IAD 2 apenas para um grupamento de Eleutério (2016). Para a elaboração do IAD 2 o pesquisador também deve seguir alguns passos, que serão apresentados a seguir: Primeiro: Na linha correspondente à coluna das Expressões Chave, copiamos todas as ECH, destacadas anteriormente, colocando-as juntas.

Quadro 9 - Primeiro passo para construção do IAD- 2 do Grupo B: Contribui para dominar melhor o conteúdo e ter didática em sala de aula.

Expressões-Chave	**DSC**
Aluno C: De manuseio e prática com demonstrações. E experiência através dos estágios. Aluno D: Professores devem pesquisar para dar uma boa aula Aluno G: Ensinar bem o conteúdo. Aluno I: Um melhor domínio do conteúdo, uma melhor postura com alunos, conhecer melhor o ambiente escolar através dos estágios. Aluno J: Diversas, aqui aprendi muitas coisas, não só nas cadeiras de Matemática, mas nas práticas educacionais. Aluno L: Contribuições diversas, desde o conteúdo em si, como a respeito da didática	

Aluno M: Ter contribuído bastante no conhecimento matemático e me tornado capaz de ver os problemas em sala de aula.	

Fonte: Adaptado de Eleutério (2016, p. 91- 93).

O segundo passo para a criação do IAD-2 é preencher a linha correspondente a coluna DSC. Para o pesquisador construa o Discurso do Sujeito Coletivo é preciso sequenciar as expressões-chave tendo em vista uma "esquematização clássica do tipo: começo, meio e fim ou do mais geral para o menos geral e mais particular. A ligação entre as partes do discurso ou parágrafo deve ser feita através de introdução de conectivos que proporcionam a coesão do discurso [...]. Deve-se, também, eliminar os particularismos de sexo, idade, eventos particulares, doenças específicas, [...] processo que se chama desparticularização. Deve-se igualmente eliminar as repetições de ideias, mas não da mesma ideia quando expressa de modos ou com palavras e expressões distintas ainda que semelhantes. Para construção do DSC, utilizar todo o material das expressões-chave. (LEFÈVRE & LEFÈVRE, 2005)

Quadro 10 - Segundo passo para construção do IAD- 2 do Grupo B: Contribui para dominar melhor o conteúdo e ter didática em sala de aula.

Expressões-Chave	DSC
Aluno C: De manuseio e prática com demonstrações. E experiência através dos estágios. Aluno D: Professores devem pesquisar para dar uma boa aula Aluno G: Ensinar bem o conteúdo. Aluno I: Um melhor domínio do conteúdo, uma melhor postura com alunos, conhecer melhor o ambiente escolar através dos estágios. Aluno J: Diversas, aqui aprendi muitas coisas, não só nas cadeiras de Matemática mas nas práticas educacionais. Aluno L: Contribuições diversas, desde o conteúdo em si, como a respeito da didática Aluno M: Ter contribuído bastante no conhecimento matemático e me tornado capaz de ver os problemas em sala de aula.	Contribuiu para eu saber que professores devem pesquisar para dar uma boa aula, ensinar bem, ter um melhor domínio do conteúdo, uma postura com os alunos conhecer melhor o ambiente escolar, e isso foi através dos estágios. Contribuiu com muitas coisas, de manuseio e prática com demonstrações e experiência através dos estágios, ou seja, não só nas cadeiras de Matemática, mas nas práticas educacionais. São contribuições diversas, desde o conteúdo em si, como a respeito da didática, isto é, contribuiu no conhecimento matemático, me tornado capaz de ver os problemas em sala de aula.

Fonte: Adaptado de Eleutério (2016, p. 91- 93).

O quarto e último passo para concluir o IAD-2 da questão consiste em repetir os dois últimos passos para os outros grupos de Ideias Centrais. Posteriormente o pesquisador também deve repetir todo o processo supracitado para gerar o DSC de cada uma das questões que compõe o questionário (se tratando de nossa pesquisa). Um dos caminhos a seguir para apresentação dos dados segundo Lefèvre e Lefèvre (2005, p. 56), consiste em apresentar a pergunta, seguida do quadro síntese de ideias centrais e por fim, o DSC gerado para cada Ideia Chave ou ancoragem. Segue o exemplo abaixo:

Figura 2 - Modelo para apresentação de dados.

QUESTÃO 3. PARA VOCÊ, O QUE SIGNIFICA SER UM BOM PROFESSOR DE MATEMÁTICA?

Que domine e saiba transmitir o conteúdo	**O professor como formador de ser humano**	**Que dá sentindo à Matemática**

AC - Que domine e saiba transmitir o conteúdo.

DSC *Não vale nada dominar o conteúdo se não souber transmitir esse conhecimento.*

IC - O professor como formador de ser humano.

DSC *Um professor que tenha didática, uma boa metodologia, que cative despertando a curiosidade do aluno e que respeite as opiniões deles, entendendo e compreendendo suas dúvidas, ou seja, o professor deve ser humano, de forma a estimular o aluno a gostar de Matemática, derrubando a crença de que ela é difícil, e que é só para os superdotados.*

IC - Que dá sentindo à Matemática.

DSC *Um professor que relaciona a matemática com o cotidiano dos alunos.*

Fonte: Eleutério (2016, p. 97).

Tanto a Oficina quanto o DSC serão mais bem detalhados no próximo capítulo.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos a descrição das atividades desenvolvidas, bem como a análise e discussões destas. Optamos por fazê-las conjuntamente, por percebermos que, em alguns momentos, sua separação não propiciaria ao leitor clareza suficiente das vivências desse momento tão importante de nossa pesquisa. Também neste capítulo serão apresentadas as respostas dos questionários que foram analisadas utilizando o Discurso do Sujeito Coletivo – DSC, desenvolvido por Lefèvre e Lefèvre (2005). Para cada pergunta, apresentaremos as ideias centrais juntamente com o discurso gerado para cada uma delas, seguido da discussão dos resultados de cada pergunta.

4.1 Descrição e análise dos encontros: algumas considerações

Na descrição desses momentos, será apresentado alguns diálogos, isto é, a fala dos sujeitos e do Pesquisador. Para uma melhor organização e preservação da identidade dos sujeitos, adotamos as seguintes convenções:

- $A1$, $A2$, $A3$..., $A13$ será utilizado conforme a ordem que é apresentada no aplicativo WhatsApp, na interface do pesquisador para fazer referência a cada aluno que participou do diálogo.
- P será utilizado para fazer referência ao Professor-Pesquisador no grupo do WhatsApp.
- PY será utilizado para fazer referência ao Professor-Pesquisador no canal do Youtube.
- Usaremos a palavra “Comentarista” quando fizermos algum comentário sobre a aula descrita.
- Usaremos a palavra “Alunos” quando nos referirmos à fala de mais de um aluno, não necessariamente de todos.
- Usaremos “(Silêncio)” para indicar os momentos em que a turma não interagiu.
- Usaremos as palavras “entenderam” ou “ok” para simbolizar que todos entenderam, pois alguns enviaram emojis e outros enviaram ok ou tudo certo.

Apresentaremos, a seguir, as descrições e análises dos 6 momentos realizados no desenvolvimento da Oficina.

4.1.1 1º Momento: revisando os Sistemas Lineares

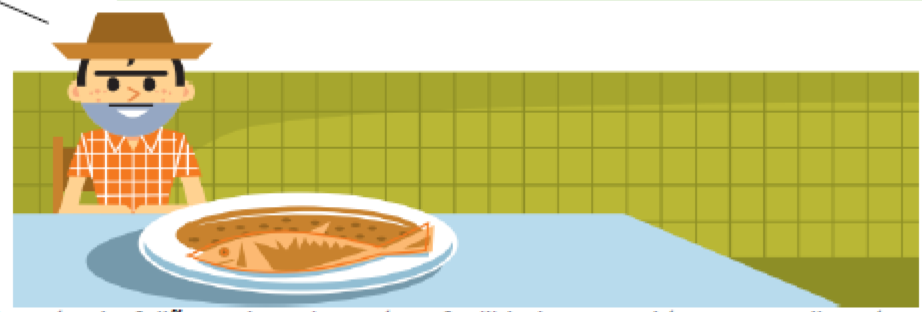
1º problema

Figura 3 - problema sobre sistemas lineares.

Calculando as calorias

Você sabia?

Quando as pessoas andam, trabalham ou fazem esporte, o corpo gasta energia e necessita de calorias. Dependendo de uma série de fatores, um homem necessita de 1800 a 3200 quilocalorias por dia.



Rui gosta de feijão e de peixe e tem facilidade para obter esses alimentos. Ele procura ingerir 1880 Kcal por dia, tomando como base os dois alimentos. Olhando em uma tabela, verificou que:

- 100 g de feijão fornecem 330 Kcal.
- 100 g de peixe fornecem 70 Kcal.

Ele concluiu que:

- 1 grama de feijão fornece 3,3 Kcal.
- 1 grama de peixe fornece 0,7 Kcal.

Para ter o total de 1880 Kcal, o que Rui pode fazer?

Fonte: Primeira parte do problema[5]

Conteúdos trabalhados: Equação de Linear e Sistemas Lineares.

Objetivos:

- Representar problema por meio de equação linear com duas incógnitas;
- Explorar o conceito de uma equação linear;
- Desenvolver o conceito de Sistemas Lineares;
- Explorar as Representações de um Sistema Linear.

[5] Retirado de MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de matemática via exploração, resolução e proposição de problemas**. 138 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2019.

Comentarista: Neste momento, era esperado que os alunos conseguissem codificar o problema de tal forma que eles passassem o problema de linguagem verbal para uma linguagem algébrica, percebendo, posteriormente, que existem diversas soluções para a composição desta refeição, podendo, dessa forma, representar a situação por meio de uma equação linear com duas variáveis e, assim, poderíamos discutir o conceito de equação linear e a natureza de sua solução.

> **P:** Pessoal, tudo bem? Segue nosso primeiro problema. Resolvam da maneira pela qual vocês acharem mais conveniente.

Neste momento, os alunos deram início às resoluções e grande parte das resoluções obtidas foram pela utilização de uma representação numérica, o que é comum ocorrer, pois, de acordo com Friedlander e Tabach (2001), essa representação, frequentemente, precede às outras e isto é de fundamental importância para uma primeira compreensão do problema e para a investigação de casos particulares, como será apresentado no diálogo a seguir:

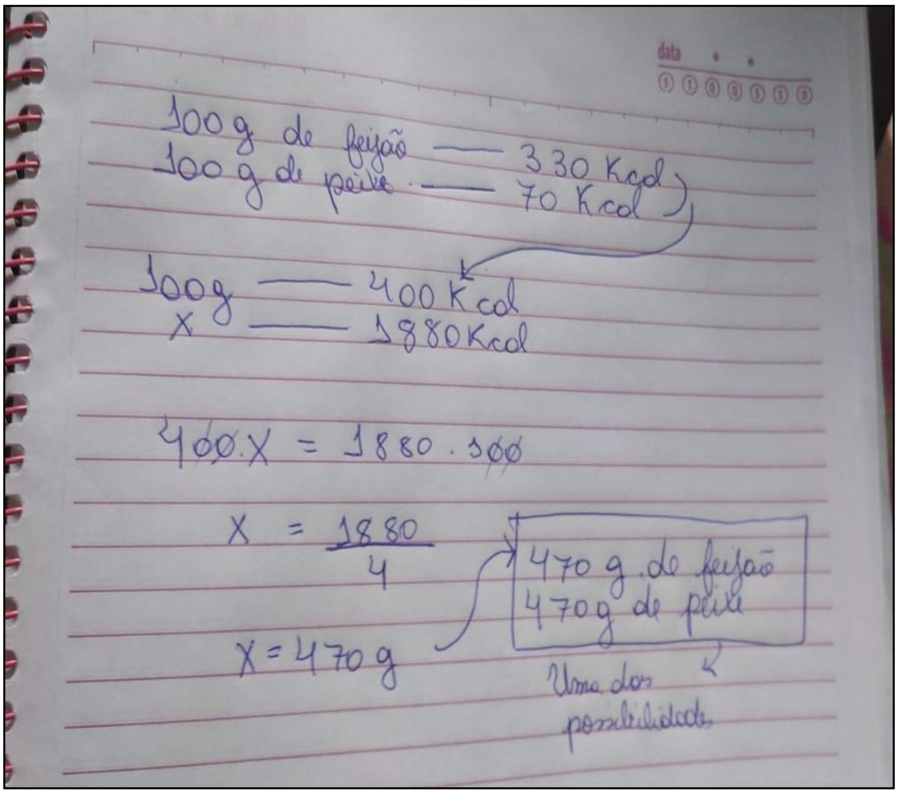
> **A2:** Eu achei a solução, e foi 1320Kcal de feijão e 560Kcal de peixe, totalizando 1880Kcal como pedido no problema.
>
> **P:** E como você conseguiu chegar nesses valores?
>
> **A2**: Não foi tão rápido... tive que pegar os dois números de Calorias das duas comidas, quer dizer, de feijão e arroz e fiz os seus múltiplos até chegar perto de 1880 em cada um, de 330 consegui os números: 330, 660, 990, 1320, 1650, só até aqui porque o próximo seria 1980, daí não serviria. Por outro lado, fiz a mesma coisa, peguei 70 e consegui esses daqui: 70, 140, pra resumir, os múltiplos é 70 até 1540, isto é, o 22º múltiplo, o outro não serviria mesmo sendo 1610, porque, se eu somasse com o menor de feijão, 330, no caso, resultaria em 1940, aí não daria, pois fugiria do que o problema está dizendo, fui somando os que, provavelmente, dariam perto de 1880, entrei, então, 1320 e 560, ou melhor 400g de feijão e 800 gramas de peixe...ufa, foi mais ou menos assim.
>
> **P:** Eita, foi uma solução bem complexa! Você encontraria outra soma que resultaria em 1880?
>
> **A2:** Eu acho que sim...na verdade, eu nem procurei porque estava focado apenas em encontrar a solução, não pensei nisto, mas vou procurar.
>
> **P:** Ok, ficamos no aguardo.

Comentário: Pelo método de resolução, é notório que A2 não havia percebido que o problema poderia ser solucionado com a utilização de equações lineares, nem que havia diversas soluções.

Além disso, o mesmo aluno fez uso apenas de números inteiros, no que tange a Kcal, ignorando, assim, a utilização de números reais para a composição solicitada no problema, então, solicitamos ao aluno A2 que encontrasse outra solução para que o mesmo pudesse conceber as percepções acima. Em seguida, o aluno A1 sugeriu uma solução, como segue no diálogo abaixo:

A1: A minha solução foi a seguinte:

Figura 4 - Registro da resolução de A1 para primeira parte do problema 1.



Fonte: dados da pesquisa.

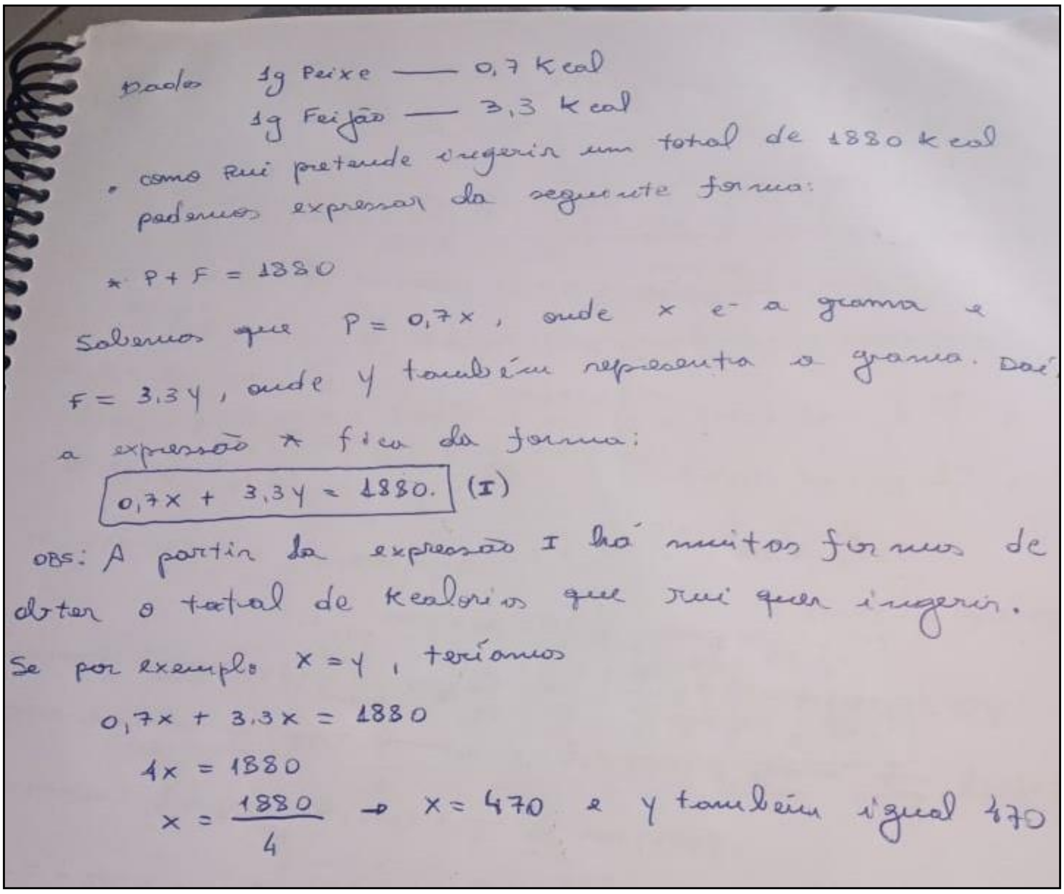
P: Realmente, se tivermos 470g de cada componente, conseguiremos as 1880Kcal, mas você poderia explicar melhor a regra de três utilizada acima?

A1: É que, assim... na minha cabeça, eu pegava 100g de... dos dois juntos sabe...330Kcal mais 70Kcal que são equivalentes a 100g pra calcular quanto seria no total, entendeu? Sabe, eu não sei explicar bem... (risos).

Comentário: Diante da fala de A1, foi possível perceber que ela focou apenas em usar qualquer conceito matemático que a fizesse chegar em uma resposta correta, visando o fim, o resultado. Isso, possivelmente, advém de uma perspectiva de resolver problema na qual o aluno é ensinado nas escolas e universidades para resolver problemas como Schroeder & Lester (1989) destacam, tendo, assim, a solução como objetivo e pouca ou nenhuma reflexão acerca do problema.

> **P**: Alguém mais conseguiu solucionar?
> **A3**: Eu consegui desenvolver uma solução!
> **P**: Você poderia nos mostrar?
> **A3**: Segue na foto:

Figura 5 - Resolução de A3 para primeira parte do problema 1.



Fonte: dados da pesquisa.

Comentarista: Pode-se observar que a discente fez codificação e decodificação de problemas citada por Andrade (1998, 2017) ao explicar o F=3,3x, em que F representava para o mesmo a quantidade de calorias enquanto o x representava a quantidade de gramas, ela fez uso de uma representação algébrica do problema, todavia, ela considerou que, como x e y representavam gramas, ela substituiu como se houvesse $x = y$ sempre, isto é, como se a quantidade de gramas de feijão e de peixe fosse sempre a mesma.

P: Parabéns por ter encontrado uma solução, mas você poderia me mostrar a questão de uma outra forma?

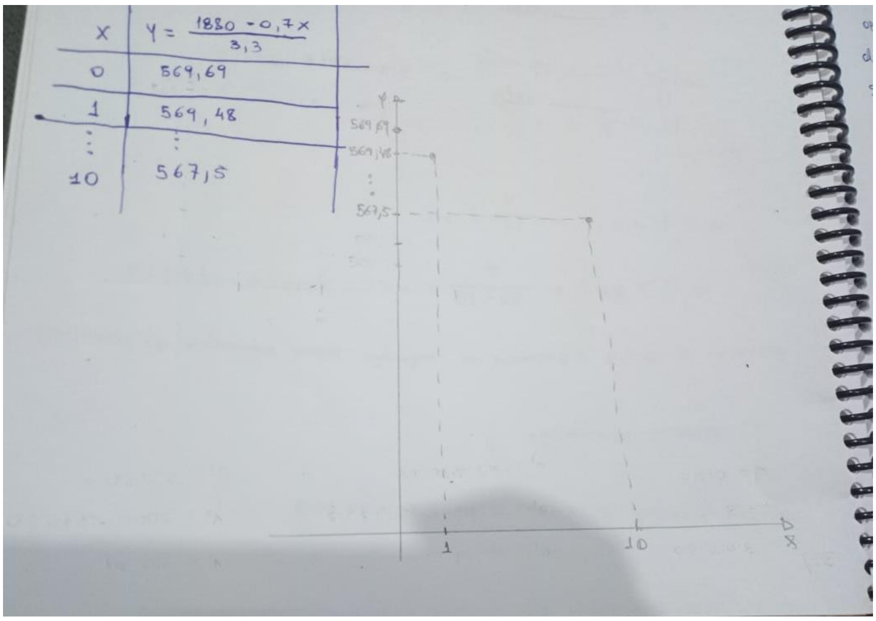
Comentarista: Dessa vez, o pesquisador solicitou que a discente pudesse fazer uso de outra representação, para que ela pudesse talvez chegar à conclusão de que não existe apenas uma solução para a equação e compreender, assim, melhor o conceito, pois, de acordo com Friedlander e Tabach (2001), a mudança de representações supre possíveis limitações e proporciona ao discente uma melhor compreensão do objeto matemático.

A3: Não sei (risos), quando tiver um tempo.

Em poucos minutos depois, ela enviou a solução:

A3: Não tem nenhuma escala aí...no gráfico. Seria interessante fazer no Geogebra, já que são muitos números.
A3: Eu, deixa eu postar a foto aqui.

Figura 6 - Mudança de registro da aluna A3 para representação tabular.



Fonte: dados da pesquisa.

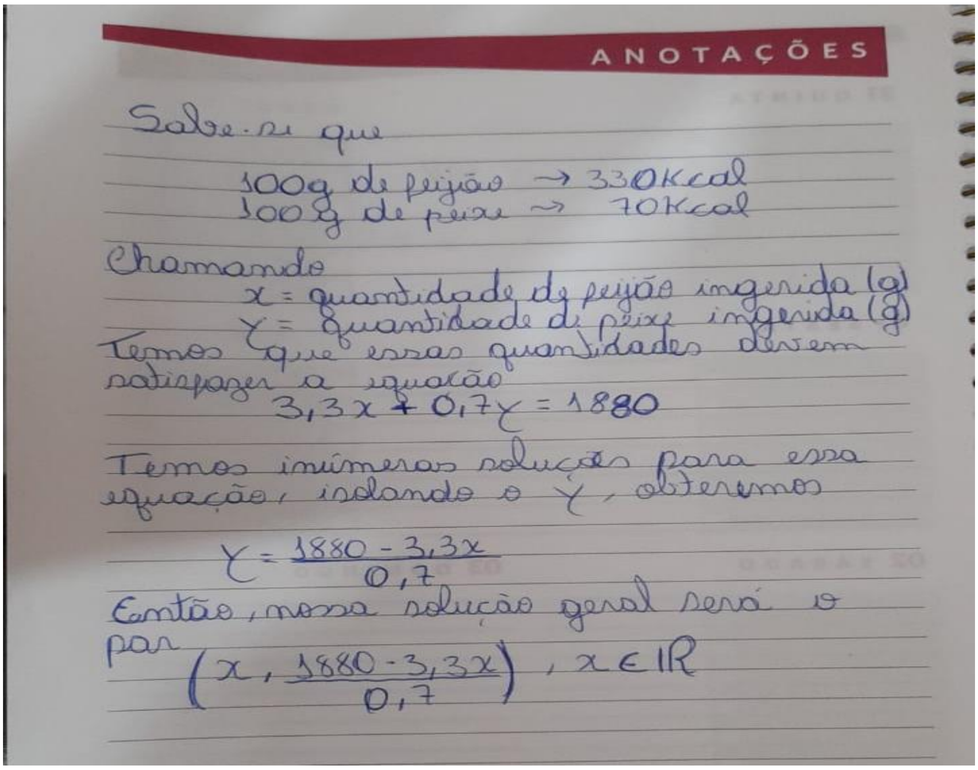
Comentarista: a aluna conseguiu deduzir, através da conversão para representações tabular e gráfica, que existem várias soluções, como se pode observar nas discussões de Friedlander e Tabach (2001), quando os autores discutem acerca da conversão de representações.

P: Mais alguém chegou à solução?

A6: Eu resolvi assim.

Comentarista: A6 postou a foto no grupo:

Figura 7 - Resolução de A6 para o problema 1.



ANOTAÇÕES

Sabe-se que

100g de feijão → 330Kcal

100g de peixe → 70Kcal

Chamando

x = quantidade de feijão ingerida (g)

y = quantidade de peixe ingerida (g)

Temos que essas quantidades devem satisfazer a equação

$$3,3x + 0,7y = 1880$$

Temos inúmeras soluções para essa equação, isolando o y, obteremos

$$y = \frac{1880 - 3,3x}{0,7}$$

Então, nossa solução geral será o par

$$\left(x, \frac{1880 - 3,3x}{0,7}\right), x \in \mathbb{R}$$

Fonte: dados da pesquisa.

A1: Boa!

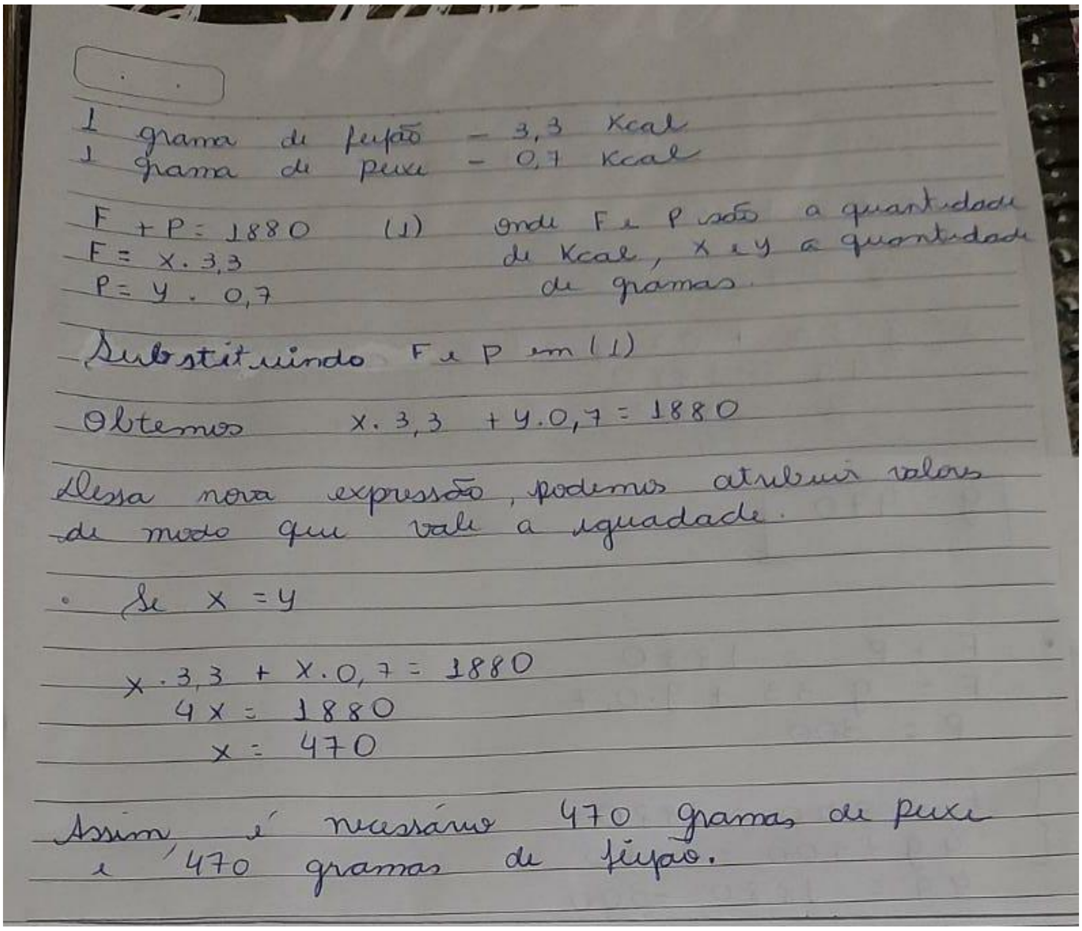
P: Realmente, ficou muito bom, parabéns! Então, quais são as soluções? E mais alguém conseguiu resolver?

A6: Infinitas.

A4: Eu consegui também.

Comentarista: A1 escreveu esse comentário referindo-se à resolução de A6, em que percebe-se o processo de codificação em uma representação algébrica, visualizando que existem infinitas soluções devido ao fato de x ser um número real e existem infinitos números reais. Em seguida, a aluna A4 respondeu à questão, postando a foto no grupo:

Figura 8 - Solução da aluna A4 Resolução de A6 para o problema 1.



1 grama de feijão — 3,3 Kcal
1 grama de peixe — 0,7 Kcal

F + P = 1880 (1) onde F e P são a quantidade de Kcal, x e y a quantidade de gramas.
F = x . 3,3
P = y . 0,7

Substituindo F e P em (1)

Obtemos x . 3,3 + y . 0,7 = 1880

Dessa nova expressão, podemos atribuir valores de modo que vale a igualdade.

• Se x = y

x . 3,3 + x . 0,7 = 1880
4x = 1880
x = 470

Assim é necessário 470 gramas de peixe e 470 gramas de feijão.

Fonte: dados da pesquisa.

A4: Podem existir mais possibilidades, desde que satisfaça à equação. O problema é que, por tentativa, fica difícil acertar. As mais simples são quando o valor de gramas é igual ao valor de gramas do feijão.

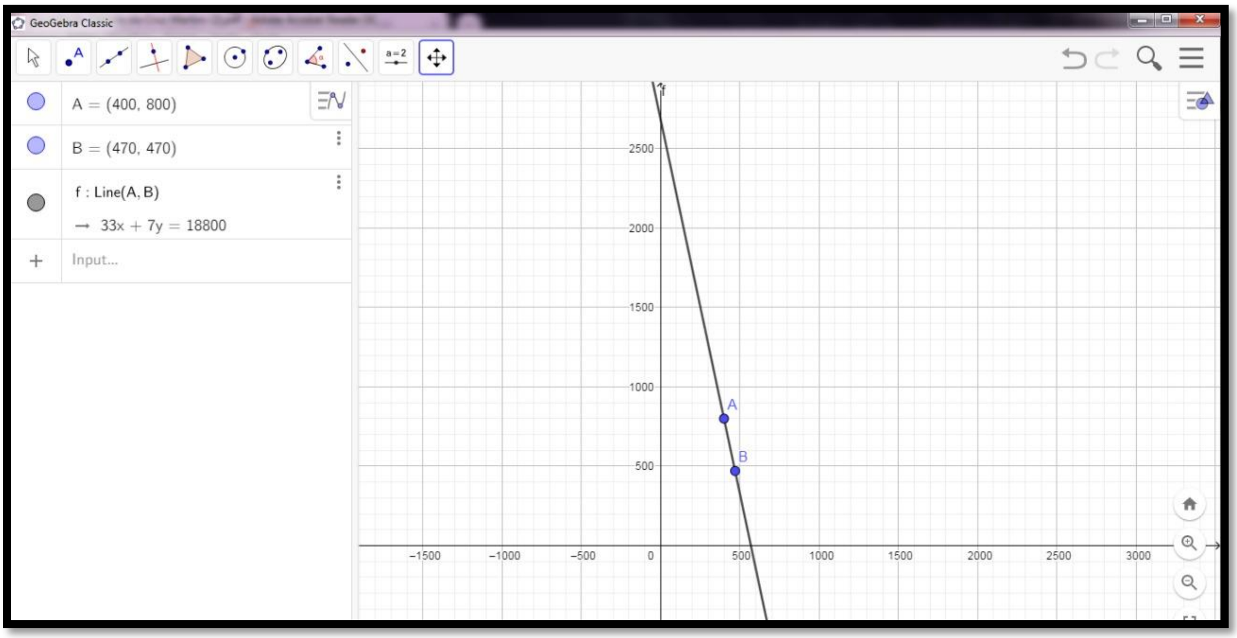
P: Parabéns! Será que existem quantas soluções?

A1: Infinitas.

Comentarista: É possível perceber que A4 também conseguiu codificar o problema de uma maneira algébrica e encontrou a equação linear que representa a solução do problema proposto. Essa percepção não se limitou a A4, tanto que A1 também comentou. Em seguida, a aluna A5 fez uso do aplicativo Geogebra e postou no grupo:

A5: Já que a maioria resolveu desse jeito, resolvi fazer no aplicativo Geogebra. Eu achei duas soluções e resolvi projetar no aplicativo para que eu pudesse encontrar uma equação que me desse todas as soluções que eu queria.

Figura 9 - Solução da aluna A5 projetada no software Geogebra.



Fonte: dados da pesquisa.

P: O que simboliza a parte da reta que está no quarto quadrante do plano cartesiano?

A6: Não pode ter a parte negativa, porque não tem como ingerir uma quantidade negativa de algum alimento, então, teria que delimitar, a resposta seria só um intervalo desse gráfico.

P: E qual seria esse intervalo?

A6: [0,597], o domínio, eu acho (risos).

P: E como chegou a esse resultado?

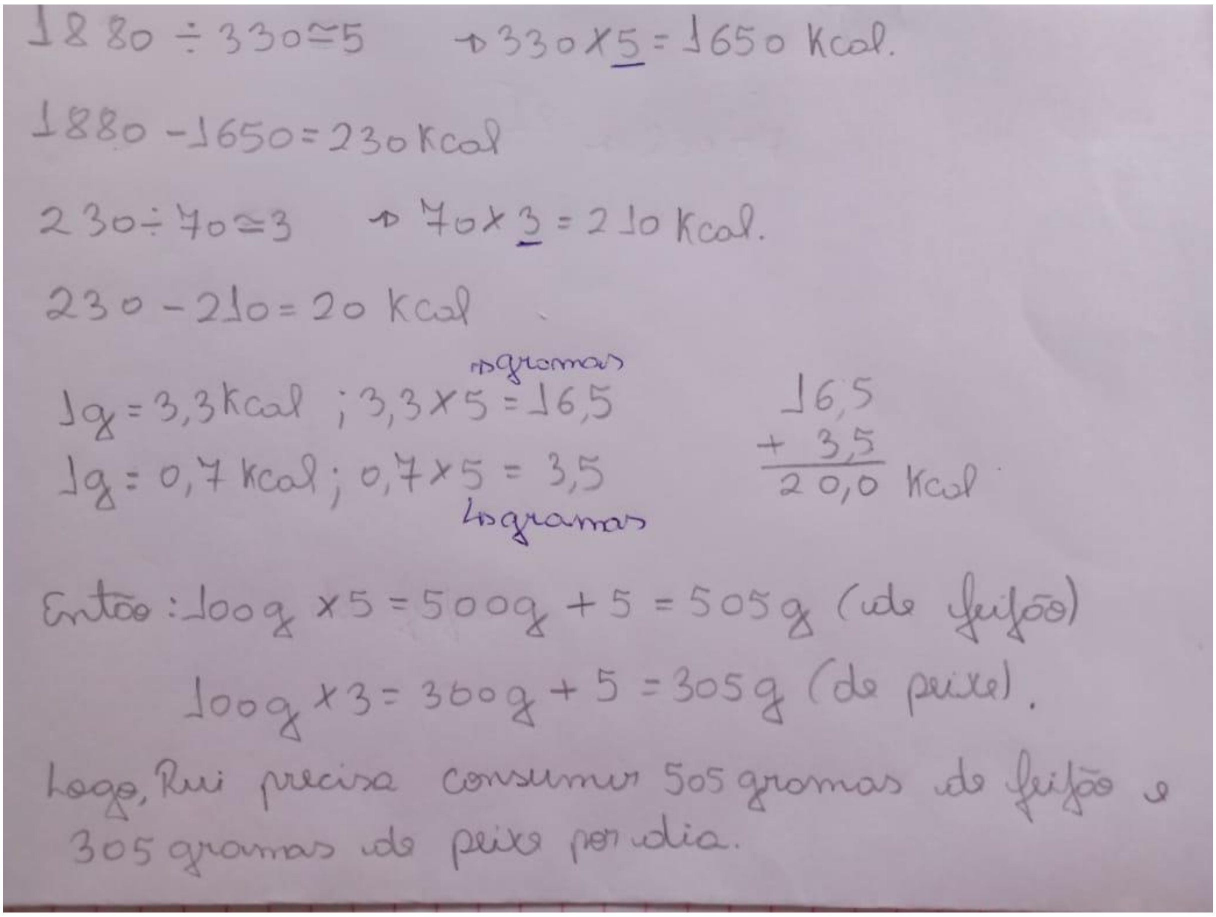
A6: O menor valor da quantidade de feijão que ele vai ingerir será 0, e o maior valor vai ser quando a quantidade de peixe for 0. Aí, basta fazer P igual a 0 na equação... Aí fica: $3{,}3f = 1880$, aí f vai ser aproximadamente $569{,}7$.

A5: Ela está correta no quarto quadrante.

Comentarista: Nesta resolução, a aluna A5 resolveu trazer um elemento novo para a resolução do problema, lançando mão de um aplicativo chamado Geogebra, o qual proporciona ao usuário diversas ferramentas matemáticas, dentre as quais, a aluna traçou a reta pertencente a duas soluções. Todavia, ela não pensou de maneira reflexiva acerca do problema e deduziu que toda a reta compreendia as soluções. Após uma reflexão orientada pelo pesquisador, os discentes chegaram à compreensão correta a respeito do intervalo que representa a solução, pois, mesmo contendo infinitas soluções, não há possibilidade, no problema, de encontrarmos alimentação negativa. Em consonância com Friedlander e Tabach (2001), o uso de mais de uma representação auxilia nas limitações de outra e isso se potencializa se resolvermos de forma crítica e reflexiva, como afirma Andrade (1998).

> **A7**: Eu fiz mais por questão de lógica, eu peguei as 1880Kcal e dividi por 330, porque os 330 equivale as 100g de feijão, aí eu vi quanto desses 330Kcal cabiam em 1880, aí eu vi que dariam cinco, aí eu vi que seriam cinco partes de 330. Eu, depois, descobri quanto valeriam essas cinco partes, aí multipliquei os 330 por cinco e dariam 1650, e os demais cálculos você vê na postagem.

Figura 10 - Solução de A7 para o problema 1.



Fonte: dados da pesquisa.

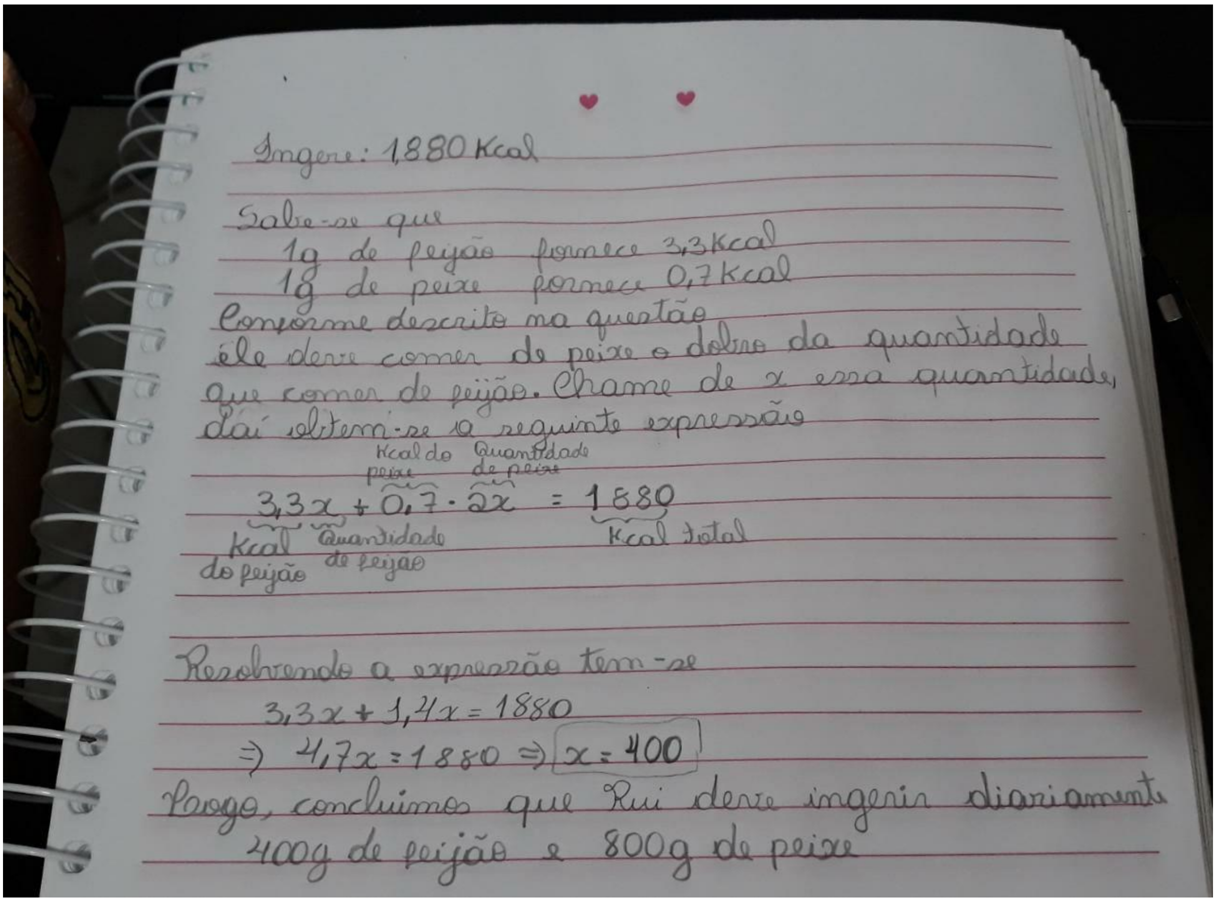
Comentarista: Vale ressaltar que não estava previsto, em nosso planejamento, a utilização de software nessa atividade, todavia, como o curso estava sendo aplicado de maneira remota, isso facilita o uso da internet e dos programas de computador tanto por parte do professor quanto por parte do aluno, com isso, destacamos o aspecto fundamental da atenção do professor às oportunidades de aprendizado durante os diálogos, como também estar preparado para a mediação em sala de aula, não se limitando somente ao que está no seu planejamento. Em seguida, o pesquisador considerou as falas das alunas, explanou sobre equação linear partindo da equação em questão $3{,}3f + 0{,}7\text{p} = 1880$. Posteriormente, formalizou o conceito e a natureza da solução: denomina-se equação linear de n variáveis a toda equação que pode ser escrita na forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas e b é o termo independente. Assim, dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, dizemos que a ênupla ordenada de números reais $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é solução da equação se, e somente se, $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b$. Agora, ocorre o que chamamos de Exploração de Problemas, em que foi possível chegar ao que destaca Andrade (2017, p. 365): "à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses". Seguiu-se, então, uma exploração do problema por parte do pesquisador:

> **P**: Pessoal, vamos supor que, ao tentar resolver a situação, Rui descobriu que haveria muitas soluções para ela. Conforme comesse um tanto de feijão, ele teria que comer determinada quantidade de peixe para completar as Kcal. Dessa forma, Rui resolveu que comeria de peixe o dobro da quantidade que comesse de feijão. Nessas condições, quantos gramas de cada Rui deveria comer?

Comentarista: Neste momento, os discentes começaram a postar suas resoluções.

> **A6:** Como descrito na questão, Rui tem que ingerir 1800kacl. Sabe-se que, se ele ingerir uma grama de feijão, fornece 3,3Kcal e uma grama de peixe 0,7Kcal. Agora, nós temos uma questão que diz que ele quer comer de peixe o dobro da quantidade de feijão. Eu chamei de x essa quantidade e a gente obtém que $3{,}3x + 0{,}7 \cdot 2x = 1880$, resolvendo isso resulta que Rui tem que ingerir 400g de feijão e 800g de peixe. Foi dessa forma que eu pensei, segue foto:

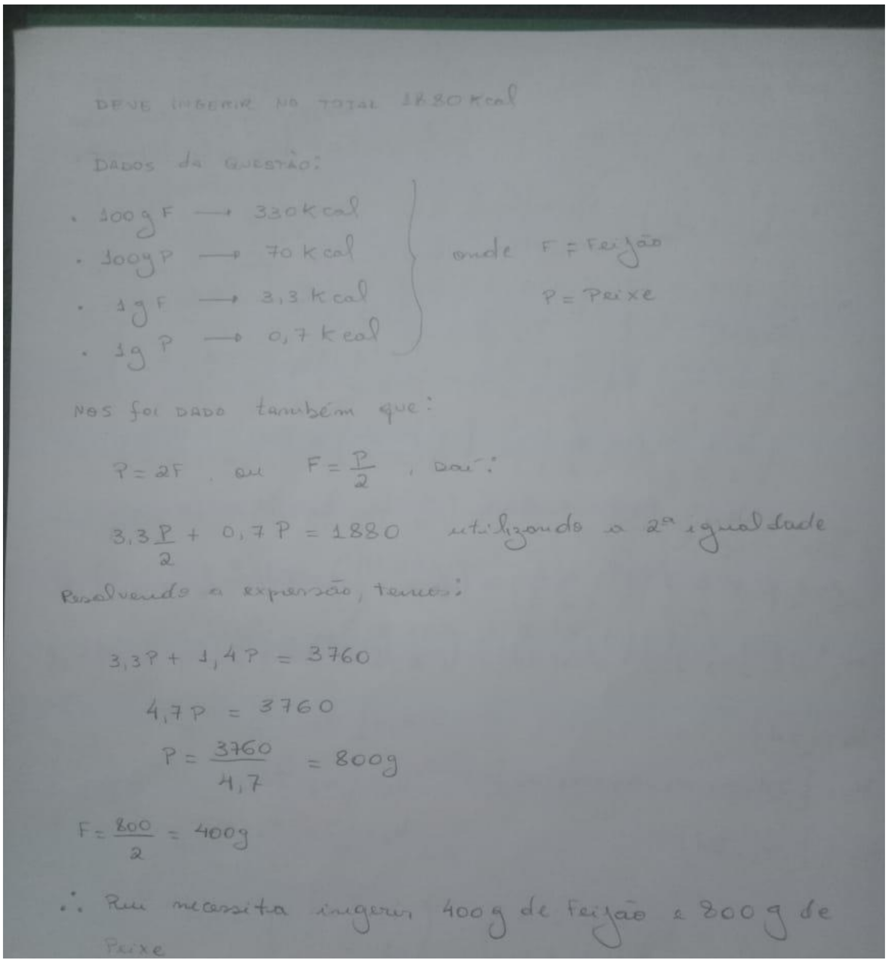
Figura 11 - Segunda resolução de A6.



Fonte: dados da pesquisa.

A4: Eu fiz de um modo muito semelhante ao que A6 fez e colocou aí. Eu vi na mesma questão a mesma coisa, que ele queria ingerir o dobro, aí o que só muda, nessa questão, é a notação. Eu primeiro fiz por tentativas e encontrei que também tem a solução que você faz a quantidade de gramas que você for comer de peixe e de feijão, aí eu encontrei o valor de 470g, mas aí eu fui tentando outras possibilidades e não encontrei, mas depois eu pensei que esse problema pode ser visto como uma combinação linear, então, qualquer valor que satisfaça a igualdade de 1880Kcal vai dar a solução para esse problema, mas eu resolvi por sistema linear, segue a foto:

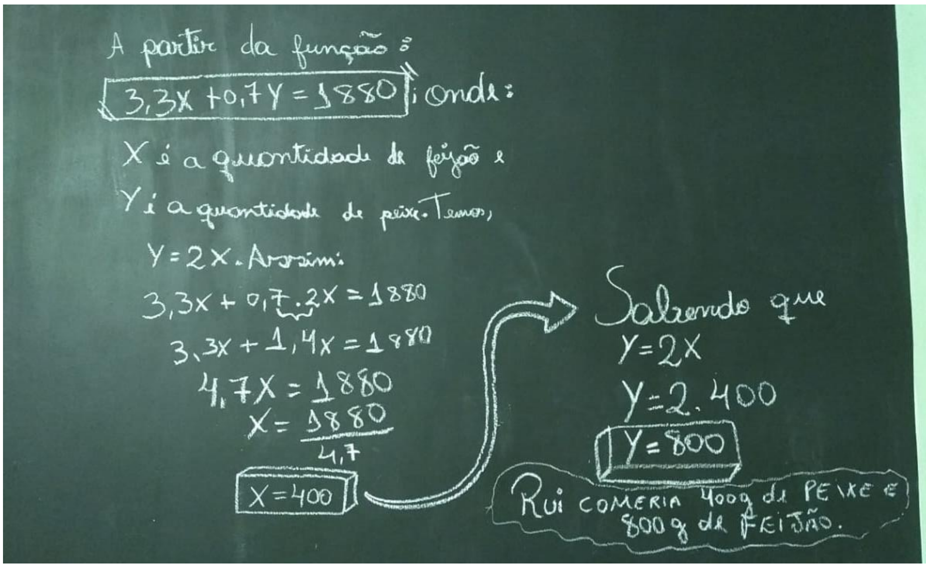
Figura 12 - Segunda resolução de A4.



Fonte: dados da pesquisa.

A1: Minha resolução foi esta:

Figura 13 - Segunda resolução de A1 para o problema 1.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Quadro negro! Parabéns!

A1: Pintei na parede do quarto (risos).

A6: Sonho de todo professor.

P: Realmente.

Comentarista: Os demais alunos insistiram que sua resolução se assemelhava com as soluções das alunas e, por isso, não postaram a imagem. Em seguida, o docente começou a realizar algumas indagações para dar início à formalização do conceito de sistemas lineares:

P: A informação facilita na resolução da questão?

A5: Facilita em encontrar um resultado específico, mas acho que, na primeira parte, eu posso achar uma, duas, três, infinitos resultados para o problema, mas, na segunda, é diferente, porque só dá para achar uma solução.

P: E qual conceito matemático vocês usaram para solucionar essa questão?

A1: Eu usei Sistemas Lineares

Comentário: Todos os alunos confirmaram que utilizaram os Sistemas Lineares.

P: E para que servem os Sistemas Lineares e o que são eles?

A5: São várias equações que estão ligadas uma com a outra e encontram uma solução.

P: Como assim ligadas?

A5: Não sei dizer ao certo.

Neste momento, o pesquisador formalizou o conceito de sistemas lineares: um sistema de equações lineares ou simplesmente sistema linear é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto da forma:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Comentarista: O pesquisador observou, então, junto à turma, que a maioria apresentou a solução utilizando o método de resolução utilizando uma substituição e, posteriormente, perguntou à turma se eles tinham outra representação para essa solução. A grande maioria respondeu a maneira geométrica (interseção de duas retas) e o pesquisador voltou a perguntar se havia outra forma usando matrizes. Como ninguém conseguiu lembrar da representação Matricial, o pesquisador dialogou sobre o sistema com a turma e construiu a seguinte afirmação:

P: Vocês concordam que o sistema

$$\begin{cases} 3,3f + 0,7p = 1880 \\ -2f + \quad p = 0 \end{cases}$$

Pode ser interpretado como essa igualdade de matrizes?

$$\begin{pmatrix} 3,3f + 0,7p \\ -2f + \quad p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1880 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Todos: Sim.

P: Vocês concordam com as seguintes implicações?

$$\begin{pmatrix} 3,3f + 0,7p \\ -2f + \quad p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1880 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3,3 & 0,7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1880 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Todos: Sim.

P: Então, quais são os valores que substituem f e p?

Todos: 400 e 800.

A2: Nunca tinha pensado assim.

Comentarista: Aproveitando o ensejo, o pesquisador formalizou o conceito: usando as operações matriciais, o sistema S acima pode ser escrito como uma equação matricial $AX = B$, na qual

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} e\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Uma solução de um sistema linear S é uma matriz

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos $x_1 = s_2$, $x_2 = s_2, \ldots$, $x_n = s_n$.

Comentarista: Então, a aluna A3 concluiu.

A3: Então, a equação matricial da solução do problema é $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \end{pmatrix}$.

P: Isso mesmo, parabéns!

Comentarista: O pesquisador retornou ao problema inicial para verificar se o conceito estava bem formado e voltou a questionar. À medida que se lançava o questionamento, a turma ia respondendo. Dentre os problemas criados e resoluções dadas, podemos destacar os seguintes: i) E se ele comesse de feijão o quádruplo de gramas que comeu de peixe? R. podíamos denotar por $f = 4p$; ii) E se ele acrescentasse, quem sabe, um arroz que tem 1,3Kacl por grama? R. poderíamos representar a equação por: $3{,}3f + 0{,}7p + 1{,}3a = 1880$.

P: Parabéns a todos. Vou postar, então, a próxima atividade.

Foi observado que, neste momento, a Exploração de Problemas foi fundamental para um aprofundamento do conteúdo, auxiliando na passagem da compreensão de Equações Lineares para o de Sistemas Lineares e aprofundando suas representações, dentre as quais, a representação matricial dos sistemas lineares e a algébrica que serão imprescindíveis para uma melhor compreensão dos conceitos que irão se suceder na oficina. Após a Exploração, foi possível perceber um melhor domínio acerca da representação algébrica como linguagem principal para interpretar o problema matemático.

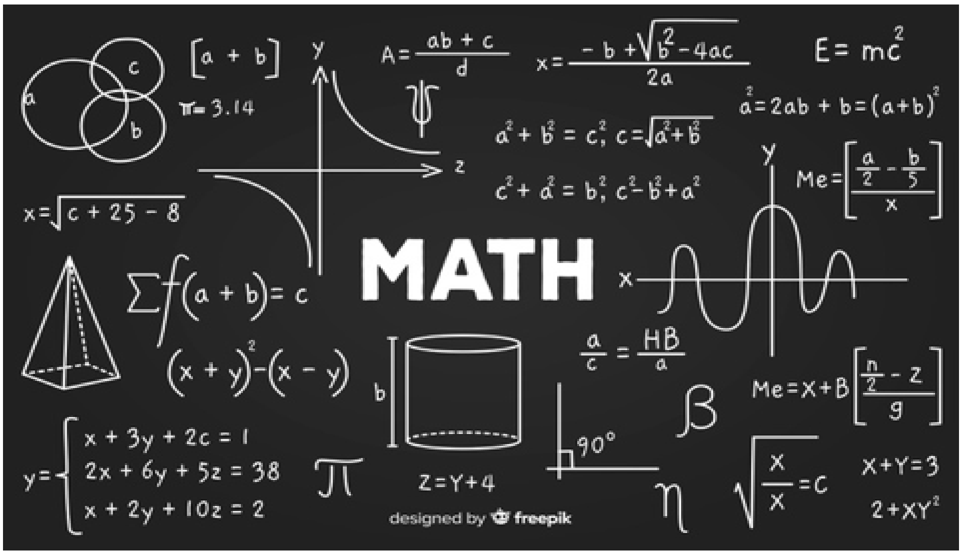
4.1.2 2º Momento: construindo Operações

2º problema

Figura 14 - Segundo problema gerador.

Considerando os conceitos matemáticos que você aprendeu na Educação Básica e Superior, proponha um problema envolvendo as operações básicas.

Figura: Formulas matemáticas.



Fonte: Google Imagens[4]

Fonte: Disponível em: < https://br.freepik.com/vetores-gratis/quadro-de-matematica_4565686.htm >. Acesso em: 02 out. 2020.

Conteúdos trabalhados: Operação de Adição e Operação de Multiplicação por Escalar.

Objetivos:

- Proporcionar uma experiência em proposição de problemas;
- Formalizar os conceitos de Operações de Adição e Multiplicação por Escalar.

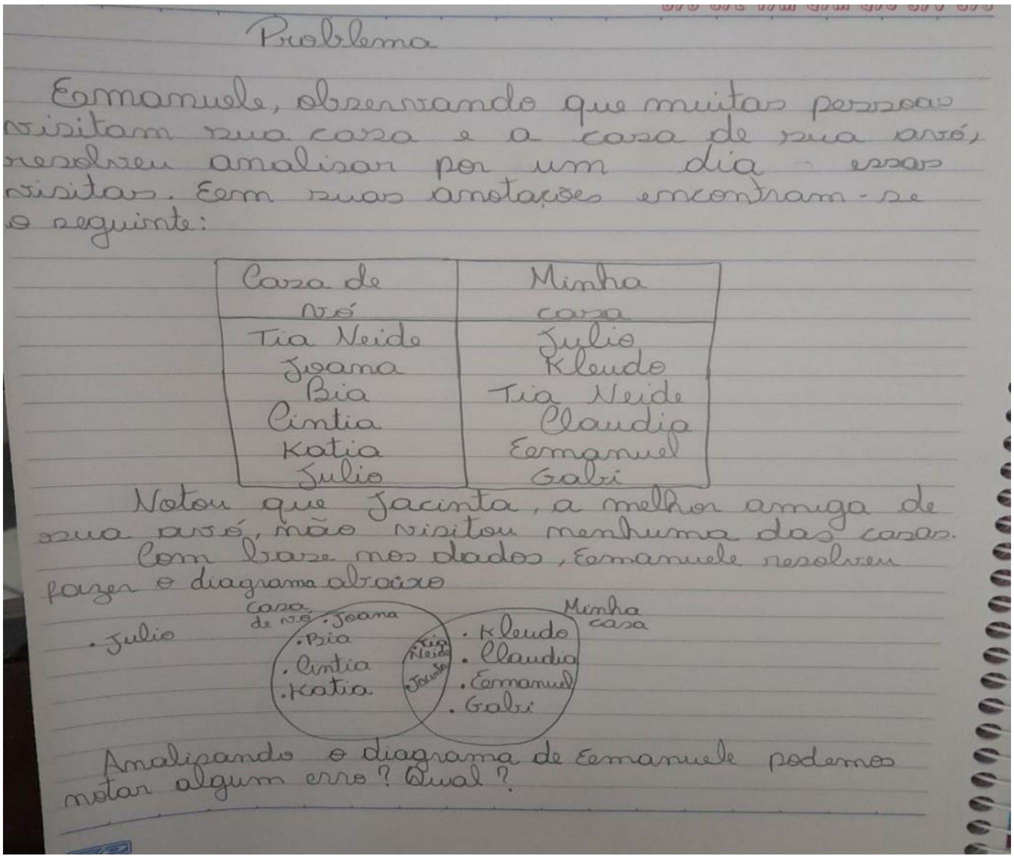
Comentário: De acordo com Mutambara e Bansilal (2018), a não compreensão sobre os conceitos de Operações de Adição e Multiplicação por Escalar pode ser um empecilho ao entendimento do conceito de Espaços Vetoriais e outros que a ele tangenciam. Diante disso, espera-se que, com esse problema, o aluno, por intermédio do professor, construa esses conceitos matemáticos, nos quais lançaremos mão da Proposição de Problemas com intuito de que o discente reflita sobre essas operações e sobre a variedade de conjuntos em que estão presentes estes conceitos.

> **P**: Pessoal, podem propor envolvendo qualquer conjunto que vocês queiram, certo?
> **Todos**: Sim.
> **A2**: Um rapaz percebeu, durante algum tempo na varanda, que sua crush corre regularmente. Ele observou que ela correu 7 vezes de manhã ou à tarde. Houve 5 manhãs sem que ela corresse e houve 6 tardes em que ela correu, além disso, ele também observou que, quando ela corre de manhã, ela não corre à tarde e vice-versa. Afinal, quantos dias esse rapaz a observou? Esse é meu problema.
> **P**: Parabéns, muito bom!
> **A4:** Carlos é taxista e cobra R$ 3,00 de taxa fixa mais R$5,00 por km rodado. Ele gastou 4500 metros para chegar ao destino final de um de seus clientes. Quanto Carlos ganhou por essa corrida?
> **A3:** O meu problema: Samuel tem, em sua poupança, R$ 5000. Ele pretende investir esse dinheiro durante um ano, podendo ter um lucro mensal de 3 a 10% do valor investido. Supondo que, nos seis primeiros meses, ele tenha uma média de 6% de lucro e, nos outros seis meses, obtenha a porcentagem máxima de lucro, qual será o lucro total, após um ano, de Samuel?
> **P:** Parabéns a ambas, espero as demais.
> **A1**: Robson comprou uma televisão no valor de R$950,00, dividida em 10 prestações iguais. Ao pagar a 4ª prestação, recebeu de presente de seu avô o restante do dinheiro para a quitação do aparelho. Quanto Robson recebeu?

Comentarista: Foi possível notar que todos os problemas propostos, até então, envolveram conceitos de conjuntos numéricos, funções, porcentagem. Isso mostra a potencialidade e a abrangência da Metodologia de Proposição de Problemas para criar uma variedade de possibilidades para a Exploração de Problemas, como afirma Andrade (1998, 2017).

A6: Segue meu problema:

Figura 15 - proposição de A6 relativa ao segundo problema.



Problema

Emmanuele, observando que muitas pessoas visitam sua casa e a casa de sua avó, resolveu analisar por um dia essas visitas. Em suas anotações encontram-se o seguinte:

Casa de vó	Minha casa
Tia Neide	Julio
Joana	Kleudo
Bia	Tia Neide
Cintia	Claudia
Katia	Emmanuel
Julio	Gabi

Notou que Jacinta, a melhor amiga de sua avó, não visitou nenhuma das casas.
Com base nos dados, Emmanuele resolveu fazer o diagrama abaixo

Analisando o diagrama de Emmanuele podemos notar algum erro? Qual?

Fonte: dados da pesquisa.

A6: Meu outro problema é esse. Segue na foto:

Figura 16 - proposição de problemas da aluna A6.

Fonte: dados da pesquisa.

A2: Bom dia, amigas! Oi, professor! Eu tenho uma dúvida para tirar com vocês: o que, realmente, seriam aquelas setas na imagem? Sim, e eu gostei demais dessa proposição. Porque eu acho que tem a ver com força centrípeta. Não sei ao certo, mas eu acho que tem a ver com vetores.

A7: No caso da imagem, seria a força aplicada pela lateral da moto e sentida pelo motoqueiro quando o mesmo entra em uma curva. E a seta poderia ser a força resultante que faria para o centro da curva.

P: E como conseguimos esse vetor resultante, o que está no meio?

A2: Através de soma de vetores.

A7: Isso.

Comentarista: Como discorre Cai e Hwang (2020), o professor que faz uso da Metodologia de Proposição de Problemas tem uma expectativa dos problemas que serão propostos por seus alunos, mas, dessa vez, o pesquisador não esperava que, dentre os problemas propostos, o que chamasse atenção da turma fosse um aspecto relacionado à imagem contida no problema. Neste caso, aparecem os vetores, entrando em cena, portanto, conceitos físicos: força resultante e força centrípeta. Neste momento, surge a Exploração de Problemas, como afirma Andrade (1998, 2017). Por meio de questionamentos, desenvolve-se uma proposta “aberta, não fechada, embora não solta, para que possamos escutar/ver/olhar o que acontece nas tramas [...] que o cotidiano da sala de aula nos proporciona” (ANDRADE, 2017, p. 367).

P: Como conseguimos essa soma?

A2: Através da soma de vetores.

P: Mas o que é uma soma?

A4: O resultado da adição de dois ou mais elementos.

P: Mas o que é adição?

A4: Um processo de juntar dois elementos.

A1: eu acho que é uma operação.

P: E o que é uma operação?

A5: Eu nunca pensei o que era uma operação, eu sempre usei desde o ensino fundamental, sabe? Mas nunca pensei. E tem uma definição formal para operação?

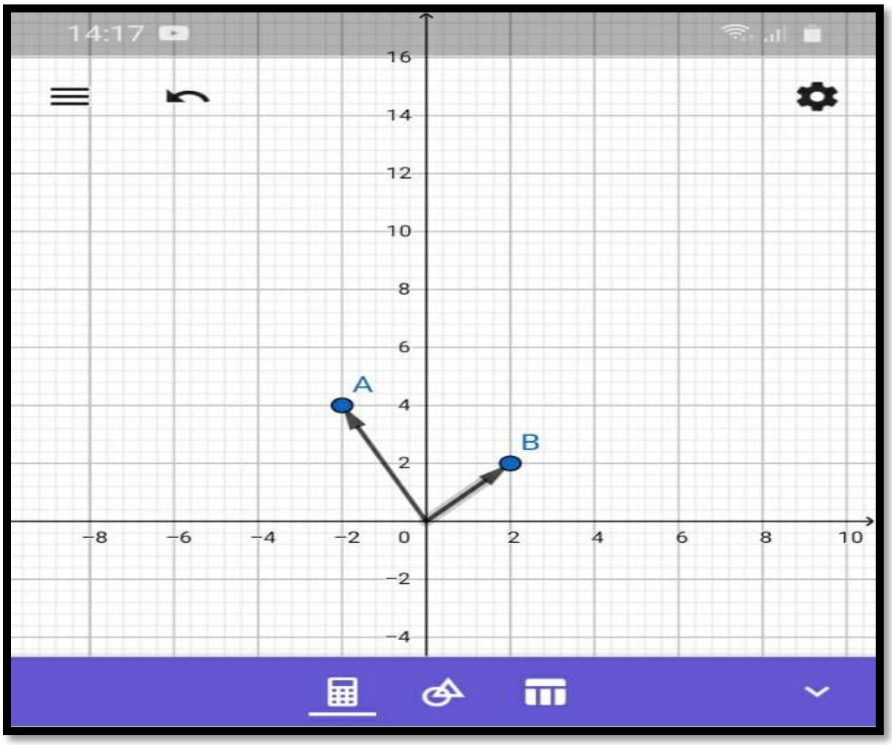
P: Boa pergunta! será que tem?

A7: Não sei se tem.

P: A2 disse que chegamos através de uma soma de vetores, mas como se soma vetores?

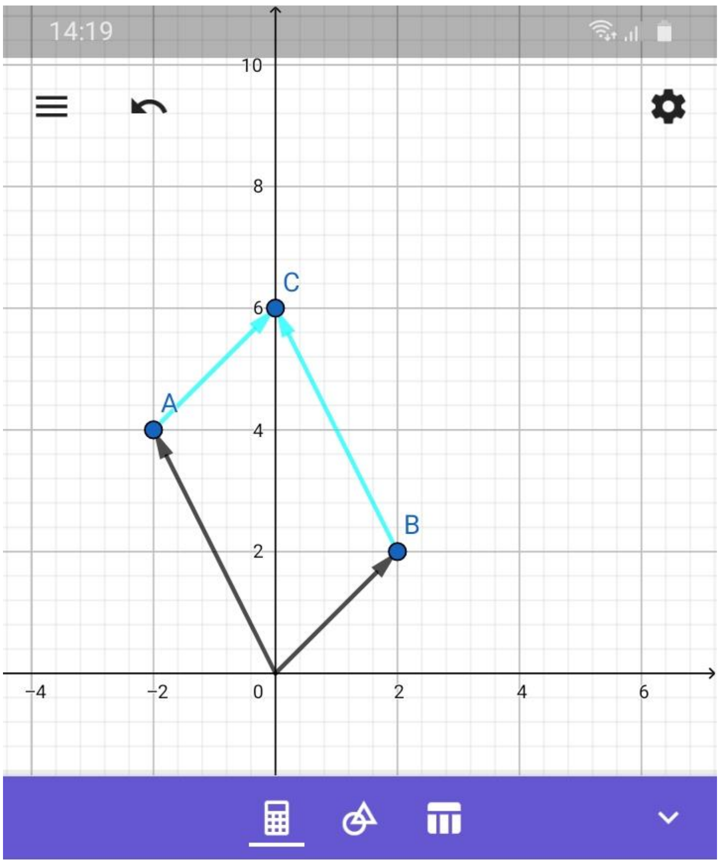
A5: Eu fiz no Geogebra, fiz assim: considerei dois vetores do $u = (2,2)\ e\ v = (-2,4)$ e somei ambos, conforme a definição de soma, e resultou no vetor $w = u + v = (2,2) + (-2,4) = (2 - 2, 2 + 4) = (0,6)$. Seguem as imagens:

Figura 17 - Vetores enviados pela aluna A5.



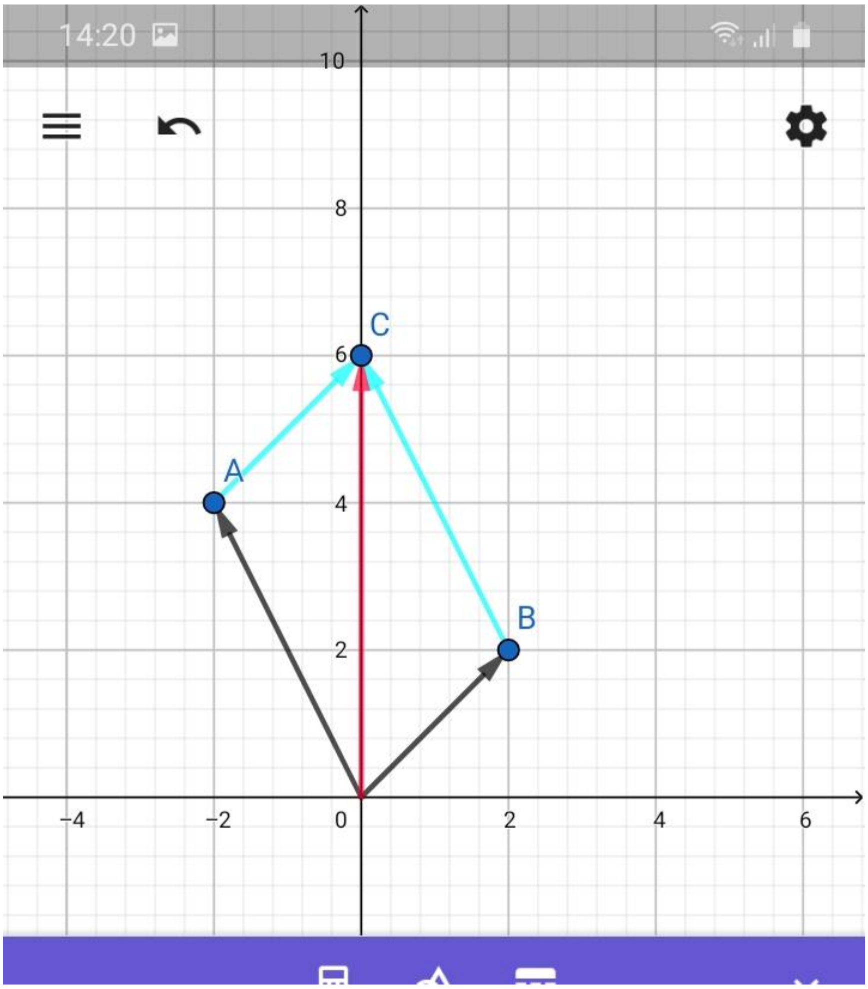
Fonte: dados da pesquisa.

Figura 18 - Soma de vetores enviada pela aluna A5 relativo ao problema em questão.



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 19 - Continuação da soma de vetores enviada pela aluna A5.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Parabéns pela representação geométrica. Pessoal, qual seria a outra operação envolvendo vetores que vocês se lembram?

Comentarista: Ninguém respondeu.

P: Que tipo de operação envolve multiplicação?

A2: Multiplicação por um Escalar.

P: E o que é essa multiplicação?

A5: É uma operação que multiplica um número por um vetor, deixando o vetor, proporcionalmente, do tamanho que é multiplicado, tipo, se eu multiplicar por 1, ele fica do mesmo jeito, mas, se multiplicar por 2, fica o dobro, se eu multiplicar por 0,5, ele fica pela metade e, se eu multiplicar por um número negativo, ele fica ao contrário, ou melhor, muda a direção.

P: Uma pergunta a todos: podemos perceber essas operações em conjuntos além dos vetores?

A4: Bem, nós somamos tudo, funções...

A5: Matrizes, R2, R3, ..., Rn.

A4: E multiplicamos muita coisa por números.

Comentarista: Neste momento, o pesquisador aproveitou para abranger o entendimento apresentado pelas alunas e formalizar o conceito, sempre questionando para saber se as alunas estariam entendendo ou não. O pesquisador aproveitou que foi citado algo sobre vetor e orientou o diálogo a fim de chegar na soma e subtração de dois vetores do plano cartesiano, seguindo a orientação de Dorier (2000) e da SBEM (2013), pois os mesmos convergem ao afirmar, pelas suas pesquisas, que devemos introduzir conceitos de Álgebra Linear primeiro em baixa dimensão e fazendo conexões com conceitos da Educação Básica e, também, do Ensino Superior. Ao resolver problemas, seguimos primeiro com a representação numérica, pois, segundo Friedlander e Tabach (2001), ao partir dessa representação, os alunos têm mais facilidade em assimilar o conceito que está sendo construído. O pesquisador iniciou a formalização em forma de vídeo na plataforma YouTube, mostrando que a operação de adição estava presente nos vetores (passando da representação numérica à geométrica e depois à algébrica). Além disso, mostrou, ainda, que estava presente nas funções e matrizes (passando da representação numérica à algébrica de nível 1 e à algébrica de nível 2). Posteriormente, formalizou da seguinte maneira:

Dado um conjunto $A \neq \emptyset$, consideremos a seguintes aplicações:

$$\begin{array}{lcl} +: AxA \to A & & \cdot: \mathrm{R}xA \to A \\ \quad (\mathrm{u},\mathrm{v}) \mapsto \mathrm{u}+\mathrm{v} & \text{e} & \quad (\alpha, u) \mapsto \alpha \cdot u \end{array}$$

Onde a primeira aplicação, denotada por “+”, é denominada adição e a segunda, denotada por “·”, é denominada multiplicação por um número real ou multiplicação por escalar. Posteriormente, o docente considerou diversos exemplos dessas operações, além dos vetores do $\mathbf{R}^2$, partindo do caso particular para o geral, como sugere com Dorier (2000), e de representações numéricas para algébricas, conforme discorre Friedlander e Tabach(2001), tais como: o conjunto dos vetores pertencentes ao $\mathbf{R}^2$. Utilizamos os que foram motivos de discussão durante a exploração do problema, então, formalizamos as operações estudas em questão:

$$\begin{array}{ll} +: \mathbf{R}^2 x\, \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ \quad (u,v) \mapsto u+v \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ll} \cdot: \mathbf{R}\, x\, \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ \quad (\lambda,v) \mapsto \lambda \cdot v \end{array}$$

$$u = (2,2) \text{ e } v = (-2,4), \text{ onde } u, v \in \mathbf{R}^2.$$

Notamos que

$$u + v = (2,2) + (-2, 4) = (2 + (-2), 2 + 4) = (0,6) \in \mathbf{R}^2$$

E considerando qualquer número real α, temos que:

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (2,2) = (\alpha \cdot 2, \alpha \cdot 2) \in \mathbf{R}^2$$

E, posteriormente, para os vetores pertencentes ao conjunto $\mathbf{R}^2$, na representação algébrica de nível 2, como $u = (x_1, x_2)$. Avançamos, juntos com a turma, em vetores de outras dimensões, como $\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^n$ e outros conjuntos, a exemplo de polinômios e funções.

Acerca do trabalho de Exploração de Problemas, Andrade (2017) disserta que é um trabalho inacabado, podendo sempre ir além da resolução do problema. Poderíamos explorar esse problema de tal modo a chegar a formalizar o conceito de operação binária, todavia, isso fugiria um pouco do foco, levando a um curso de Álgebra Abstrata. Como este momento foi o primeiro em que colocou-se em prática a Proposição de Problemas, tivemos uma pequena demora, pois, embora as alunas tivessem respondido o problema anterior, no qual houve uma predominância da Resolução de Problemas, elas disseram não estar habituadas a criar problemas, mas apenas a resolvê-los. Em suas pesquisas, Andrade (2017) também percebe que a Proposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida nos alunos: “Temos observado que isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada apenas na resolução de problemas oriunda de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos”. (ANDRADE, 2017, p. 388).

Enquanto estávamos formalizando os conceito de Operação de Adição e Multiplicação por Escalar, a aluna A4 me enviou um áudio, via inbox, afirmando o seguinte: “Eu achei esse curso... estou achando muito produtivo, essa parte de Propor Problemas é algo que é diferente, a pessoa inverte, a gente começa a pensar, pensar e pensar em alguma coisa que a gente nem se quer sabia que poderia sair, aí acaba estimulando nosso raciocínio pra tentar criar algo que seja relacionado ao assunto e contribuiu bastante para que fixasse os conceitos.” Nesta fala, foi possível notar que a Proposição de Problemas não é comum nas salas de aula de formação de professores, como afirma Andrade (2017) e Cai e Hwang (2020), mas é de fundamental importância para tornar o futuro professor de Matemática mais reflexivo, estimulando não apenas forcar no resultado com pouca reflexão sobre o que se está fazendo. Como afirma A4, o aluno é levado a “pensar, pensar e pensar”, possibilitando que o discente reflita sobre os conceitos matemáticas, “fazendo o caminho inverso”, isto é, refletindo sobre o conceito para propor o problema e, assim, ajudar a “fixar mais o conceito”.

4.1.3 3º Momento: decodificando os Espaços Vetoriais

3º problema[7]

Uma maneira de se criptografar uma mensagem é através de operações com matrizes. Vamos associar os vinte e seis primeiros números naturais a nosso alfabeto, segundo a correspondência a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Podemos formar matrizes numéricas correspondentes a uma determinada mensagem. Por exemplo, suponha que a nossa mensagem seja VIDA. A matriz X que corresponde a essa mensagem é:

X = $\begin{bmatrix} V & I \\ D & A \end{bmatrix}$ e sua representação numérica é X = $\begin{bmatrix} 22 & 9 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Descreveremos o método de cifração:

$Y = C \cdot X + K$, onde X, Y, C e K são matrizes mensagem inicial, mensagem criptografada e as chaves (senha responsável por garantir a segurança da cifração), respectivamente.

Com base nessas informações, responda:

a) Decifre a mensagem 70 30 90 40 criptografada com as chaves:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad K = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

---

[7] Adaptado de Ferreira (2017a).

Conteúdos trabalhados: Axiomas que definem um Espaço Vetorial.

Objetivos:

- Proporcionar uma experiência de exploração de problemas;
- Definir Espaços Vetoriais;
- Proporcionar a reflexão e visualização dos discentes em relação ao conceito de Espaço Vetorial na matemática ensinada na Educação Básica.

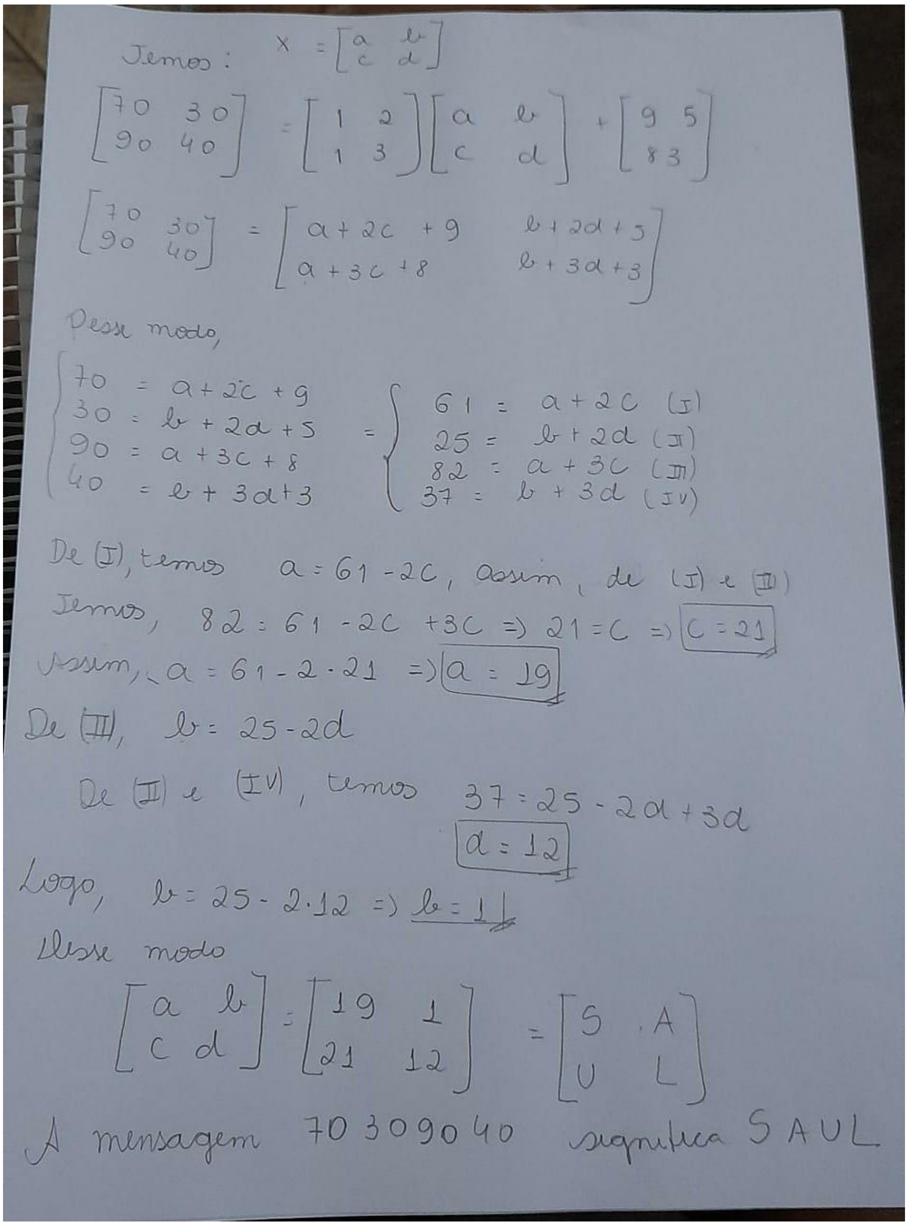
Comentário: No início deste momento, o pesquisador iniciou discorrendo brevemente, por meio de áudio, sobre a criptografia, com o intuito de situar os discentes sobre do que se tratava esta área. Com o objetivo de construir o conceito de Espaço Vetorial, trabalhou-se com operações sobre o conjunto das Matrizes $\mathbf{M}_{2x2}(\mathrm{R})$, pois é um conjunto que é muito trabalhado na educação básica. Assim, trabalhou-se primeiro com uma representação numérica para que só, posteriormente, passássemos para uma representação algébrica, como discorre Friedlander e Tabach (2001). Esperou-se que, por meio desse problema, em um movimento de P-T-RS (Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses) (ANDRADE, 2017), os discentes assimilassem o que é um Espaço Vetorial.

P: Bem, pessoal, segue o problema. Façam uma leitura e, qualquer dúvida, podem perguntar.

Todos: Certo.

A4: Segue a minha resolução:

Figura 20 - Resolução de A4 para o problema 3.



Temos: $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 70 & 30 \\ 90 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 70 & 30 \\ 90 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c+9 & b+2d+5 \\ a+3c+8 & b+3d+3 \end{bmatrix}$$

Desse modo,

$$\begin{cases} 70 = a+2c+9 \\ 30 = b+2d+5 \\ 90 = a+3c+8 \\ 40 = b+3d+3 \end{cases} = \begin{cases} 61 = a+2c \quad (I) \\ 25 = b+2d \quad (II) \\ 82 = a+3c \quad (III) \\ 37 = b+3d \quad (IV) \end{cases}$$

De (I), temos $a = 61 - 2c$, assim, de (I) e (III)

Temos, $82 = 61 - 2c + 3c \Rightarrow 21 = c \Rightarrow \boxed{c = 21}$

Assim, $a = 61 - 2 \cdot 21 \Rightarrow \boxed{a = 19}$

De (II), $b = 25 - 2d$

De (II) e (IV), temos $37 = 25 - 2d + 3d$

$\boxed{d = 12}$

Logo, $b = 25 - 2 \cdot 12 \Rightarrow \underline{b = 1}$

Desse modo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 1 \\ 21 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & A \\ U & L \end{bmatrix}$$

A mensagem 70 30 90 40 significa SAUL

Fonte: dados da pesquisa.

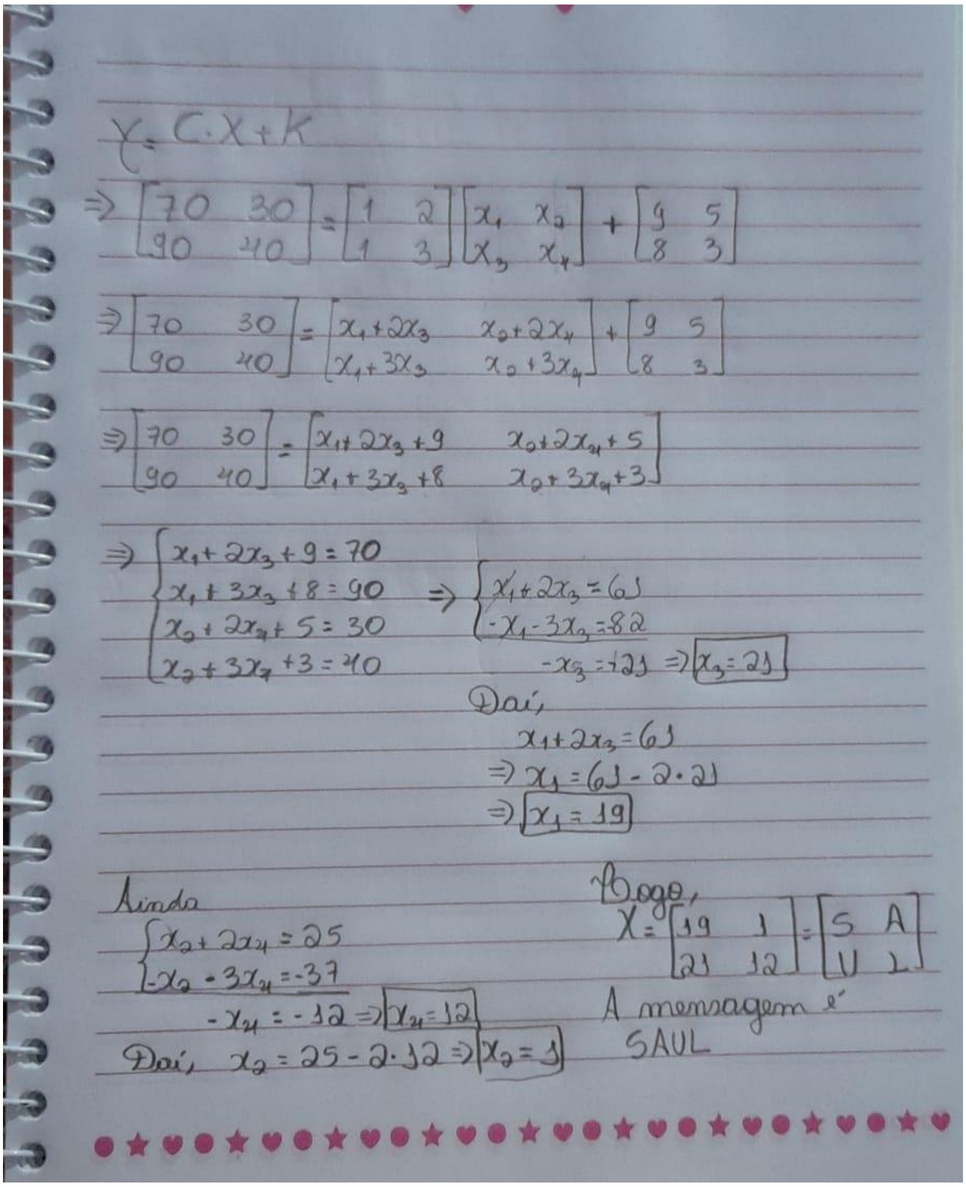
P: Parabéns pela solução! se tiver mais algo a acrescentar, pode dizer. Aguardo os demais.

A4: Para resolver esse problema, trabalhei com as operações básicas de matrizes e envolvi sistemas lineares, que acabou sendo trabalhado mesmo que de maneira involuntária.

A7: Percebi que esse problema, quando eu fui resolvê-lo, deu o mesmo resultado, isso mostra o quanto a matemática é exata, pois a minha ficou praticamente igual a de A4.

A6: Segue a minha resolução:

Figura 21 - Resolução de A6 para o problema 3.



$Y = C \cdot X + K$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 70 & 30 \\ 90 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 70 & 30 \\ 90 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ x_1+3x_3 & x_2+3x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 70 & 30 \\ 90 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_3+9 & x_2+2x_4+5 \\ x_1+3x_3+8 & x_2+3x_4+3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3+9=70 \\ x_1+3x_3+8=90 \\ x_2+2x_4+5=30 \\ x_2+3x_7+3=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3=61 \\ -x_1-3x_3=-82 \end{cases}$$

$$-x_3=-21 \Rightarrow \boxed{x_3=21}$$

Daí,

$x_1+2x_3=61$

$\Rightarrow x_1 = 61 - 2 \cdot 21$

$\Rightarrow \boxed{x_1=19}$

Ainda

$$\begin{cases} x_2+2x_4=25 \\ -x_2-3x_4=-37 \end{cases}$$

$$-x_4=-12 \Rightarrow \boxed{x_4=12}$$

Daí, $x_2 = 25 - 2 \cdot 12 \Rightarrow \boxed{x_2=1}$

Logo,

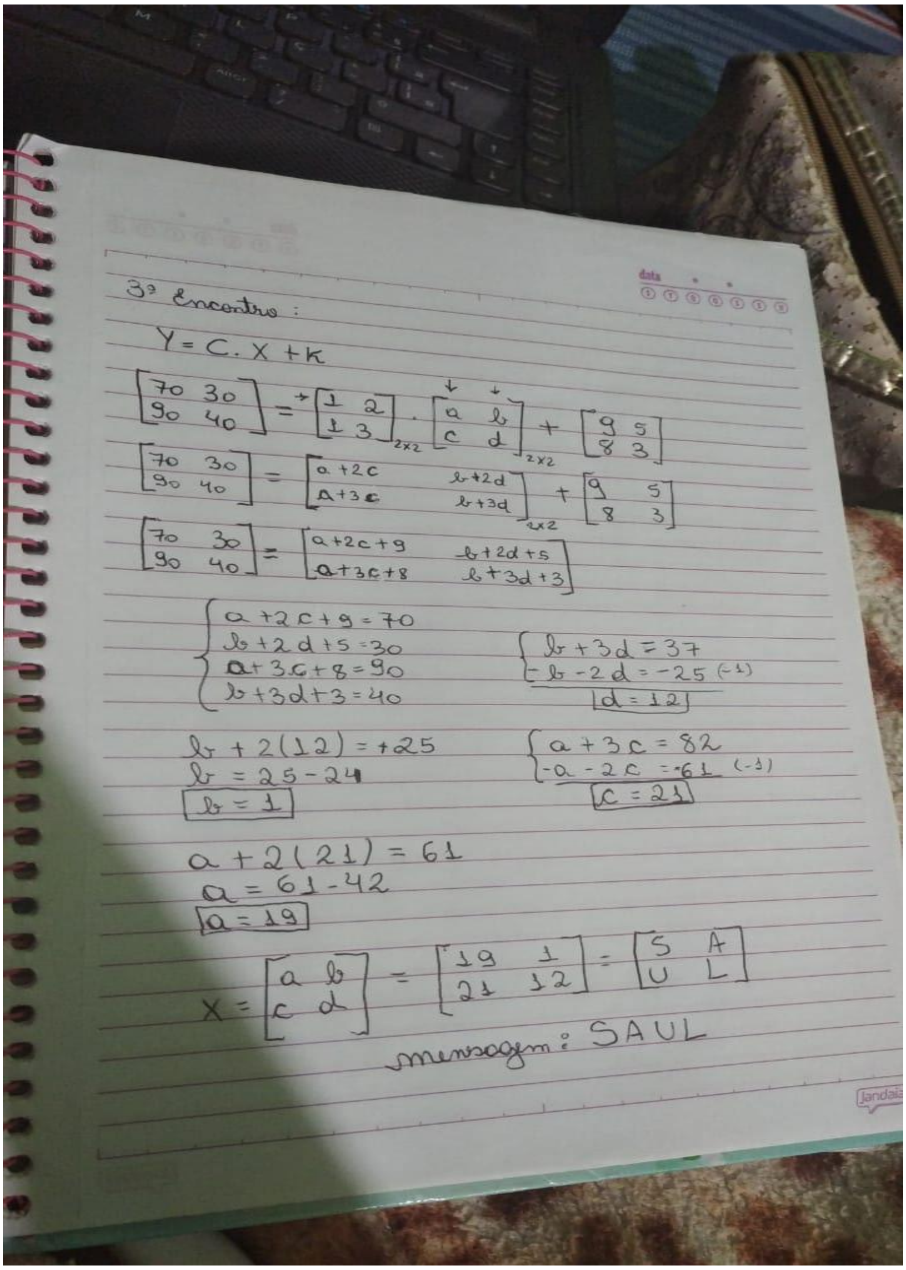
$$X = \begin{bmatrix} 19 & 1 \\ 21 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & A \\ U & L \end{bmatrix}$$

A mensagem é SAUL

Fonte: dados da pesquisa.

A1: Está aqui minha resolução. Segue na foto:

Figura 22 - Resolução de A1 para o problema 3.

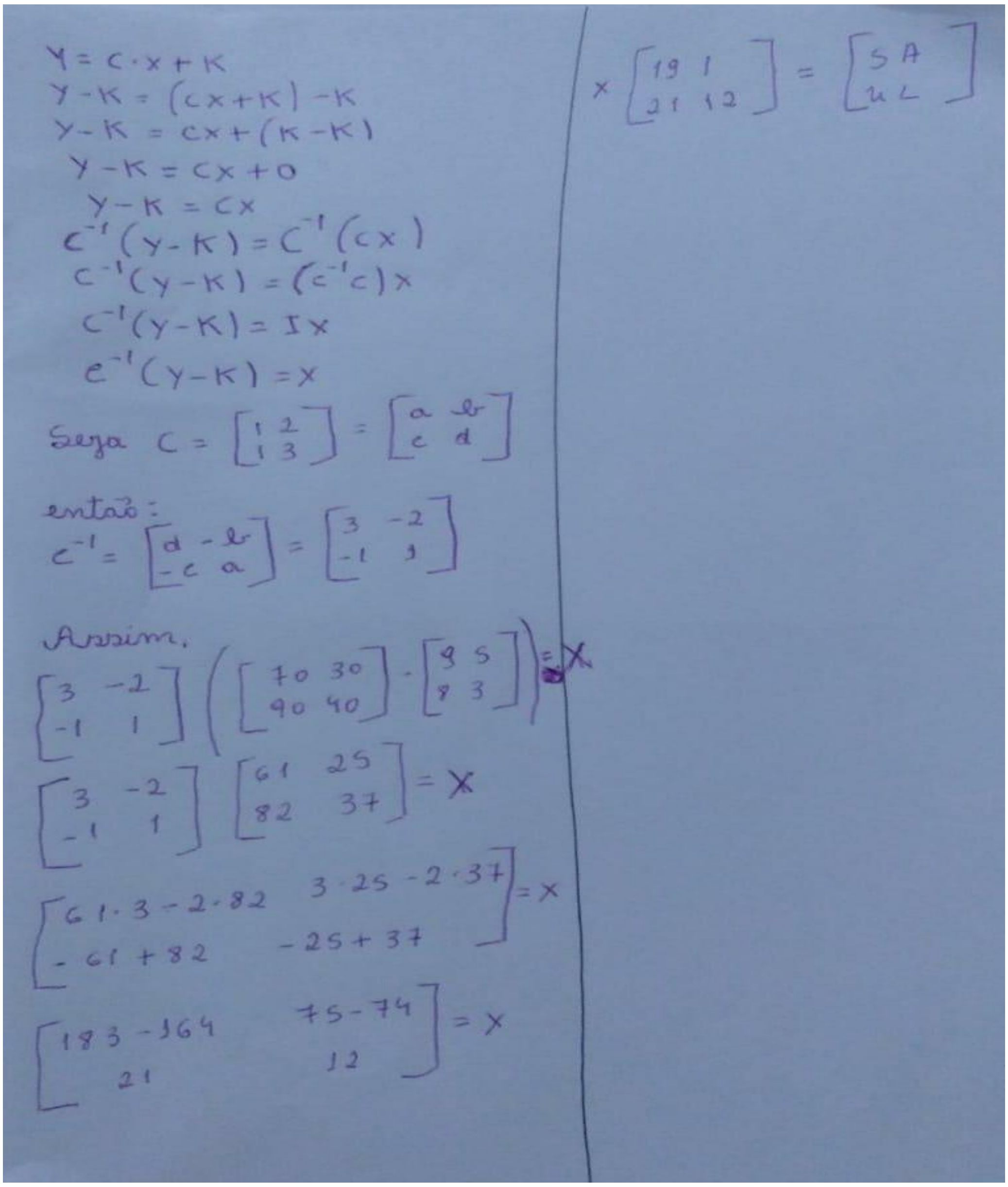


Fonte: dados da pesquisa.

Comentarista: As discentes demostravam, nas resoluções, até então, domínio, fazendo uso do conceito de sistemas lineares formalizado no início da oficina. Até o momento, se mostra uma predominância da representação numérica, de acordo com Friedlander e Tabach (2001). Essa representação oferece uma ponte eficaz para a algébrica, precedendo as outras representações, é importante para a compreensão do problema e para a investigação de casos particulares. Tendo essa compreensão sobre essa representação, é compreensível que, majoritariamente, as discentes tenham lançado mão dessa representação, apenas uma demonstrou um domínio um pouco maior sobre a representação algébrica.

A2: Segue a minha resolução.

Figura 23 - Resolução de A2 para o terceiro problema.

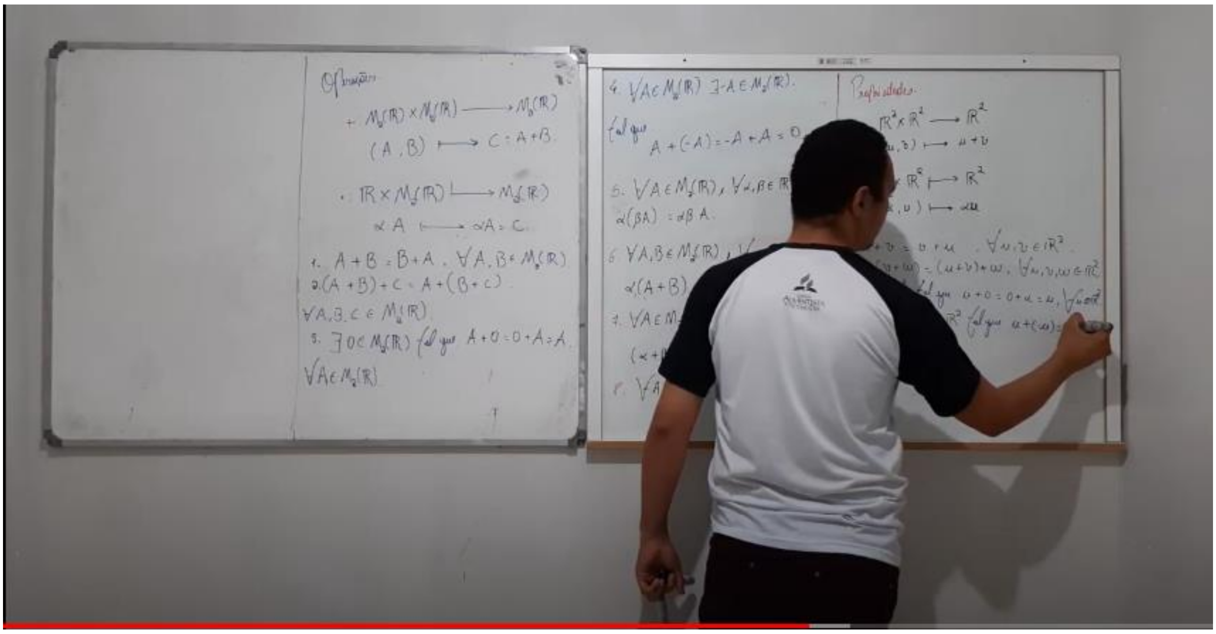


Fonte: dados da pesquisa.

Comentarista: Os demais discentes afirmaram que solucionaram o problema de maneira semelhante às discentes que já tinham postado a resolução no grupo. A aluna postou uma resolução na qual se fez uso de diversos axiomas de um Espaço Vetorial na forma algébrica.

Então, aproveitando a oportunidade, o pesquisador começou a indagar às discentes sobre cada operação utilizada na resolução do problema em questão.

Figura 24 - Professor formalizando o conceito de Espaços Vetoriais por meio de vídeos no YouTube.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Que propriedade foi usada na terceira linha da resolução de A2?

Todos: Inverso aditivo.

P: Como definimos essa operação em matrizes?

A7: É outra matriz que, quando soma, dá uma matriz nula.

P: E essa propriedade é apresentada em quais conjuntos?

A5: Em diversos, nas matrizes, nas funções, nos polinômios, vários.

P: Isso mesmo. Vamos verificar?

Comentarista: Neste momento, o pesquisador verificou axioma por axioma, de forma numérica, depois juntamente com os discentes, e, posteriormente, de forma algébrica, perpassando alguns conjuntos presentes na Educação Básica, tais como: matrizes, funções e polinômios. Iniciamos considerando o conjunto das Matrizes $\mathbf{M}_{2x2}(\mathrm{R})$ e definimos as operações de multiplicação por escalar e adição, neste conjunto, em uma representação numérica:

$$+ : \mathbf{M}_{2x2}(\mathbb{R})\, x\, \mathbf{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad \cdot : \mathbb{R}\, x\, \mathbf{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}_{2x2}(\mathbb{R})$$
$$(A, K) \mapsto A + K \qquad\qquad (\alpha, K) \mapsto \alpha \cdot K$$

$$A = \begin{pmatrix} 61 & 25 \\ 82 & 37 \end{pmatrix} \text{ e } K = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \text{ onde } A, K \in \mathbf{M}_{2x2}(\mathrm{R}).$$

Notamos que:

$$A + K = \begin{pmatrix} 61 & 25 \\ 82 & 37 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 + 9 & 25 + 5 \\ 82 + 8 & 37 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 30 \\ 90 & 40 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2x2}(\mathrm{R})$$

E considerando qualquer número real α, temos que:

$$\alpha \cdot K = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 9 & \alpha \cdot 5 \\ \alpha \cdot 8 & \alpha \cdot 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2x2}(\mathrm{R})$$

Foi verificado, tanto para as matrizes, na forma numérica, pertencentes ao conjunto $\mathbf{M}_{2x2}(\mathrm{R})$ quanto na forma algébrica, tais como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

E, também, para conjuntos mais abstratos como $\mathbf{M}_{mxn}(\mathbb{R})$, onde $m, n \in \mathbf{N}$, que certas propriedades (axiomas do Espaço Vetorial) são comuns a diversos conjuntos além de matrizes e vetores. Assim, formalizamos o conceito de Espaço Vetorial: Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$, munido de duas operações, uma "soma" e uma "multiplicação por escalar":

$$+ : VxV \to V$$
$$(u, v) \mapsto u + v$$

e

$$\cdot : \mathrm{R}xV \to V$$
$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

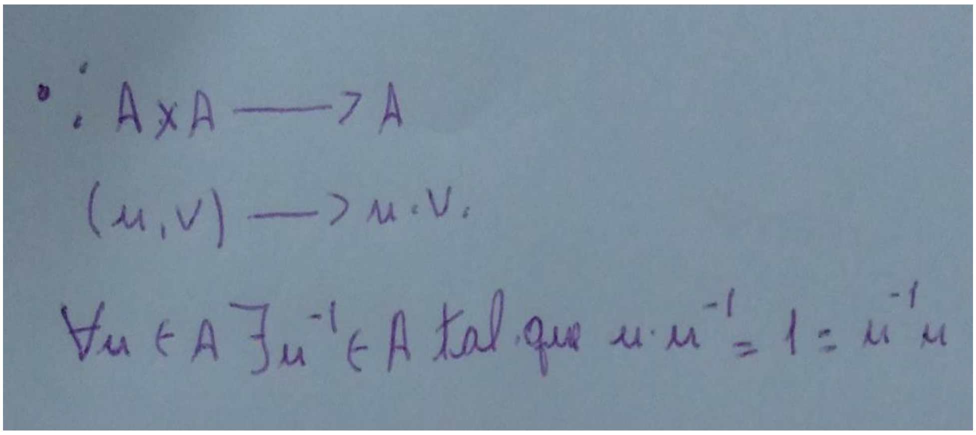
é um **espaço vetorial** sobre R , que se satisfaz a partir das seguintes propriedades:

1. $v + u = u + v, \forall u, v \in V$;
2. $(v + u) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$;
3. $\exists 0 \in V, tal\ que\ 0 + v = v + 0 = v, \forall v \in V$;
4. $\forall v \in V, \exists -v \in V, tal\ que\ v + (-v) = -v + v = 0$;
5. $\forall v \in V\ e\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
6. $\forall u, v \in V\ e\ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e $\forall v \in V, (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
8. $\forall v \in V, 1v = v$.

Comentarista: Ao terminar a formalização, o pesquisador incentivou os alunos para que explorassem o problema e, com isso, uma aluna disse que tinha testado para o conjunto $\mathbf{R}^2$. Todavia, ela afirmou que encontrou mais uma operação e mais uma propriedade.

> **P:** Vocês podem explorar o problema, isto é, fazer novas perguntas, reformulá-lo dentre outras coisas.
>
> **A2**: Professor, fiquei com uma dúvida, posso tirar?
>
> **P:** Claro! Pode dizer.
>
> **A2:** Eu encontrei mais uma operação e mais operação e ela não só serve para o conjunto das matrizes como também para outros conjuntos também. Aí, eles são um tipo de Espaço Vetorial também? Ou não?
>
> **P**: Boa pergunta! Pode me mostrar?
>
> **A2**: Segue na foto:

Figura 25 - Exploração de problemas da aluna A2.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Muito bem observado, o que vocês acham?

Comentário: Neste momento, as discentes não responderam. Como já citado anteriormente por Andrade (2017), quando se trabalha tendo como perspectiva a Exploração, é proposto um problema por parte do aluno ou do professor, e ambos, em processo de reflexões e sínteses, possivelmente, chegam à solução do problema proposto, bem como a novas reflexões e novas sínteses, um processo, assim, inacabado. Neste momento, o pesquisador percebeu que a exploração da aluna era relevante para entender que o conceito de Espaço Vetorial faz parte de uma definição ainda mais ampla e abstrata, as Estruturas Algébricas, e que o conceito de operação não se reduz apenas às Operações de Multiplicação por Escalar e de Adição. Então, o professor lançou uma ideia do que seria uma Estrutura Algébrica e uma Operação Binária, mas não aprofundou.

P: Bem, quando estudamos Álgebra mais profundamente, nos deparamos com diversos conceitos, dentre os quais, aprendemos que existem infinitas operações. Como exemplo, temos a operação de adição, multiplicação por escalar, a que você encontrou, que é de produto, e tem outras, tais como essa operação a seguir representada pelo símbolo $\otimes$ e que associa dois números racionais a e b a outro número racional da forma $\frac{a+b}{2}$:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathbf{Q}x\mathbf{Q} &\to \quad \mathrm{Q} \\ (a,b) &\mapsto \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

A depender da escolha da operação ou das operações e dos axiomas, podemos ter algo que chamamos de estruturas algébricas, por exemplo, os Espaços Vetoriais são uma estrutura algébrica.

A2: Entendi, pesquisei aqui no Google e vi outras estruturas diferentes, como Anéis e Corpos.

P: Isso, você vai aprofundar ainda mais esse assunto em Estruturas Algébricas.

A3: Foi muito bom saber disso, pois nunca tinha pensado que existia ligação entre a disciplina de Estruturas Algébricas e Álgebra Linear.

A7: E eu que pensava que Espaços Vetoriais eram só vetores, as setinhas.

> **A5**: Realmente, muito bacana isso, porque depois de tantos exemplos, podemos perceber que encontramos os Espaços Vetoriais no ensino médio e, até, no fundamental.

Comentarista: Neste problema, pudemos perceber que as discentes codificaram, lançando mão de representações algébricas com mais facilidade e, majoritariamente, fizeram uso de Sistemas Lineares. Sobre as Representações Múltiplas no Ensino de Álgebra, as representações algébricas e numéricas eram constantemente utilizadas e realizadas as conversões, como discorre Duval (2009). Para melhor entendimento do conceito de Espaços Vetoriais, no que tange à representação geométrica, foram realizados a transição entre ela e as representações numérica e algébrica e durante a formalização, quando estávamos tratando de vetores pertencentes ao $\mathbf{R}^2$, partindo sempre da numérica para a Algébrica, como disserta Dorier (2000).

Na formalização desse conceito matemático, foi visto o que Prado (2016) apresenta como essencial no ensino de Álgebra Linear, um fortalecimento da ideia de Estrutura, para que o discente tenha possibilidade de desenvolver um olhar crítico a respeito do currículo matemático que será ensinado na Educação Básica. Foi visto, também, o que Celestino (2000) discorre sobre o ensino de AL, uma vez que, quando se trata do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, deve ser utilizado diferentes conjuntos, como polinômios, funções, matrizes e não apenas os $\mathrm{R}^n\ com\ n \in \mathbf{N}$. Essa atitude de variar a quantidade de conjuntos se tornou positiva, potencializando a ideia de que a Álgebra Linear não é apenas a continuação da geometria, como discorre Coimbra (2008) e Celestino (2000). Vemos isso na fala da aluna A7: "E eu que pensava que Espaços Vetoriais eram só vetores, as setinhas", depois de uma reflexão acerca do conceito de Espaços Vetoriais.

No que tange à Metodologia de Exploração de Problemas, como discutido anteriormente, ela nos fez ir além do esperado, pois, não só proporcionou um aprendizado do conceito de Espaço Vetorial, mas também conseguimos ir além, como discorre Andrade (1998, 2017), além do conceito de EV e de Operações de Adição e Multiplicação por Escalar. Partindo de uma exploração$_{\text{proposição}}$ por parte da aluna A2 conseguimos trazer uma ideia de Estrutura Algébrica e de Operações. Assim, mesmo não aprofundando, serviu para que os discentes tivessem uma ideia sobre o que era um Espaço Vetorial, de maneira mais ampla do que esperávamos, e serviu para que alguns discentes (os que já haviam feito o curso de Estruturas Algébricas) fizessem uma ponte com outros conceitos da Educação Superior. Não prevíamos essa exploração, mas ela foi, sobremodo, valiosa para o processo de ensino-aprendizagem do conceito de EV.

4.1.4 4º Momento: como encontrar os Subespaços Vetoriais?

4º problema

Certa vez, um professor estava ministrando uma aula sobre Espaços Vetoriais, quando ouviu uma pergunta vinda de um aluno na sala.

Figura 26 - História em Quadrinho sobre Álgebra Linear.

Fonte: dados da pesquisa.

Tente encontrar a resposta dessa pergunta da maneira mais sucinta possível.
Conteúdos trabalhados: Subespaço Vetorial.
Objetivos:

- Proporcionar uma experiência em proposição de problemas;
- Formalizar o conceito de Subespaço Vetorial.

Comentarista: Este momento é, na verdade, uma extensão, ou ainda, uma continuação do momento passado, mas para que, o relato não se tornar prolongado, resolvemos dividi-lo. Neste momento, é esperado que os discentes encontrem, com a orientação do pesquisador, os Subespaços Vetoriais, isto é, EV contidos em EV.

P: Pessoal, vocês já entendem o que significam os Espaços Vetoriais, certo?
Todos: Sim.
P: Então, segue o problema para que vocês leiam, reflitam e, se possível, resolvam o problema.

Comentarista: Cerca de um dia depois, as resoluções começaram a chegar.

A7: Professor, estou com problemas com a internet.
A4: Não entendi bem... É para formular um problema com a pergunta?
P: Você está livre para formular um problema tendo este como base, mas, *a priori*, é para tentar encontrar espaços vetoriais em espaços vetoriais. Será que é possível?
A4: Hum, entendi, vamos tentar.
A2: Eu acho que encontrei um.
P: Pode apresentar.
A2: Eu tomei o conjunto dos vetores do R2, e peguei uma reta, a reta $y = x$ e notei que ela é um espaço vetorial, porque eu coloquei ela como um conjunto e ficou assim: um conjunto U={(x,y) pertencentes ao R2 tal que x=y}, aí onde veio o trabalho, kkk, porque tive que verificar tintim por tintim.
P: Como assim?
A2: Verifiquei axioma por axioma e, realmente, bateu.
P: Mas toda reta seria um espaço vetorial contido no espaço vetorial R2?
A2: Boa pergunta, eu tentei outra, sabe? Mas não deu, porque não tinha o elemento, o (0,0), acho que tem que ter o (0,0).

P: Boa observação! Mais alguém conseguiu?

A5: Eu tentei achar, e, realmente, é um pouco difícil, eu tive que pensar primeiro em um Espaço Vetorial, neste caso, pensei nas matrizes três por três, daí eu pensei em um subconjunto, um famoso kkkk, aí me lembrei da disciplina de matemática básica onde tinha o conjunto das matrizes que é igual a sua transposta, aí verifiquei axioma por axioma e vi que ele também é um Espaço Vetorial contido em um Espaço Vetorial.

P: Deu muito trabalho encontrar?

A5: E como.

A7: Professor, no caso, seriam subespaços vetoriais dentro de espaços vetoriais? Como se fosse um conjunto que contém subconjuntos?

P: Você poderia dar um exemplo?

A4: Respondendo à pergunta, a resposta é sim, se você considera o R2 um espaço vetorial, e 0=(0,0), você tem que 0 é subespaço vetorial de R2 e, como todo subespaço vetorial é um espaço vetorial então, é possível ter espaços vetoriais contidos em outros espaços vetoriais. Do mesmo modo, se você considera os números reais, ele é um espaço vetorial, e os inteiros também, como os inteiros estão contido nos reais, então, mais uma vez temos, um espaço vetorial contido no outro.

P: Boa observação! Quantos de vocês sabem o que é um Subespaço Vetorial?

Comentário: Neste momento, foi entendido que as alunas A1, A2 e A5 não sabiam o que era um Subespaço Vetorial enquanto as demais já tinham visto em cursos de Álgebra Linear que cursados anteriormente, todavia, nem todas possuíam um entendimento completo do que seria um Subespaço. A aluna A7 perguntou "professor, no caso, seriam subespaços vetoriais dentro de espaços vetoriais? Como se fosse um conjunto que contém subconjuntos?" Quando ela se refere aos Subespaços Vetoriais, como se fosse algo não relacionado a Espaços Vetoriais, isto talvez seja resultado de um ensino no qual o conceito de Subespaço Vetorial é baseado na verificação de propriedades e não no aprofundamento do conceito.

P: De fato, existem Espaços Vetoriais contidos em Espaços vetoriais e eles são chamados de Subespaços Vetoriais.

A7: Quando eu cursei Álgebra Linear, o professor falava que, para achar um subespaço, bastava verificar umas propriedades lá, mas o que elas têm a ver com esse conceito de ele ser um espaço vetorial dentro de outro? O Subespaço Vetorial é um Espaço Vetorial?

P: Quais eram as propriedades? Você se lembra?

A7: Não, mas vou pesquisar na internet e posto aqui.

Comentarista: Neste momento, o pesquisador aguardava que A7 postasse quais eram as propriedades, enquanto isso os outros discentes observavam, atentamente, as postagens visualizando todas as mensagens.

A7: Era assim: para verificar se um conjunto era ou não subespaço vetorial, você pegava dois elementos e verificava se a soma deles estava no conjunto e, também, pegava um elemento do conjunto e verificava se, quando ele multiplicasse com número real, se o resultado pertencia ao conjunto.

P: Qual a relação entre a observação dessas propriedades e a verificação dos axiomas de um Espaço Vetorial?

Todos: Não sei.

Comentarista: Em seguida, o pesquisador observou, junto com o pessoal, que quando é verificado se as Operações de Multiplicação por Escalar e de Adição são válidas dentro do subconjunto, todos os axiomas são satisfeitos. Então, o pesquisador formalizou:

Se V um espaço vetorial sobre R e W um subconjunto de V, dizemos que W é um subespaço vetorial de V ou, simplesmente, um subespaço de V, se as seguintes condições são satisfeitas:

$i)\ \lambda u \in W,\ para\ todo\ \lambda \in \mathbf{R}\ e\ todo\ u \in W;$

$ii)\ u + v \in W,\ para\ todo\ u, v \in W.$

Posteriormente, o pesquisador formalizou o problema e exemplificou sobre Subespaços Vetoriais na Educação Básica, resolvendo juntamente com os alunos, sempre se comunicando via inbox, para verificar se estariam entendendo ou se haveria alguma dúvida e sempre esclarecendo qualquer dúvida no grupo geral da turma. O exemplo trabalhado foi o seguinte:

Considerando o sistema de equações lineares a seguir:

$$S:\begin{cases} 2x+4y+z=0 \\ x+y+2z=0 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$$

P: Qual a solução desse sistema?

A1: Não estou conseguindo achar de jeito nenhum, só dá zero igual a zero.

A3: Ele é um sistema possível indeterminado, mas as soluções são da forma $\left(\frac{-7y}{3}, y, \frac{2y}{3}\right)$.

A1: Entendi, agora.

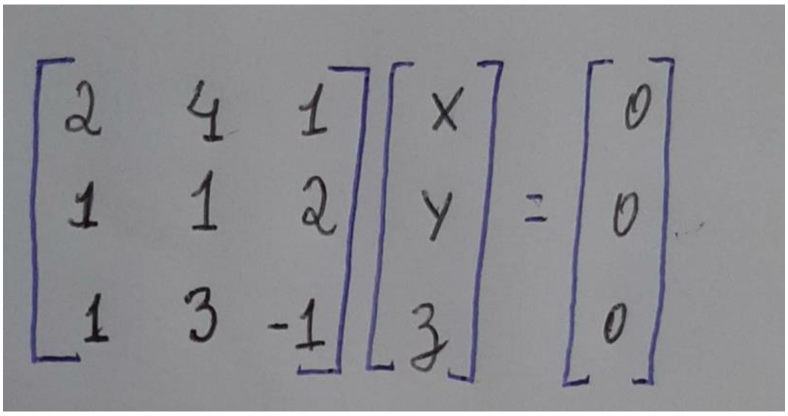
P: E o que é esse y?

A3: Qualquer número real.

P : Alguém poderia passar esse sistema linear para uma representação matricial?

A5:

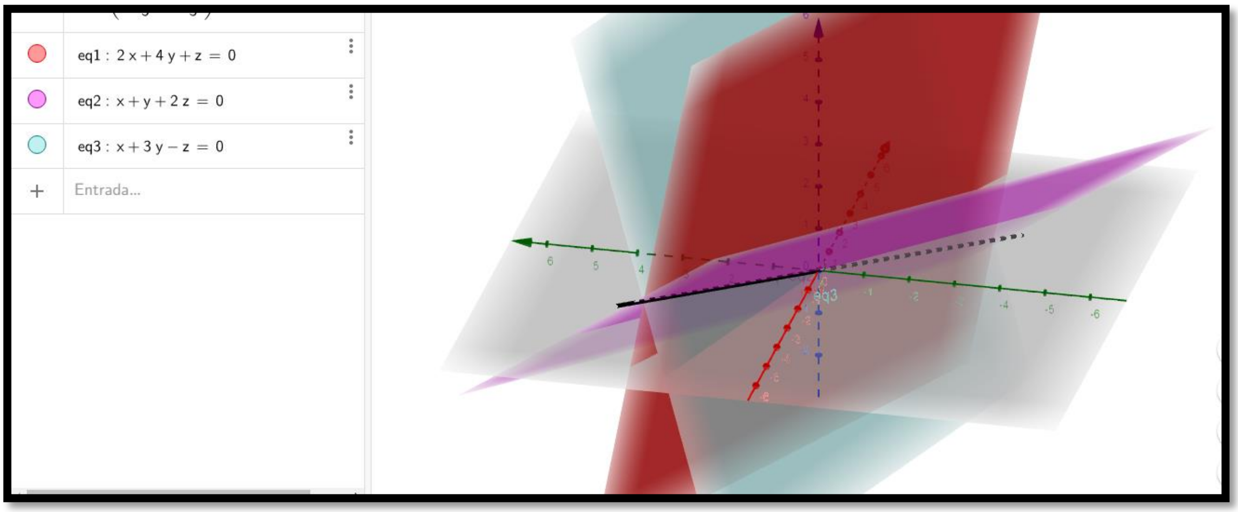
Figura 27 - Representação matricial do sistema de equações lineares escrita por A2.



Fonte: dados da pesquisa.

Comentarista: Neste momento, o pesquisador provou, juntamente com os discentes da oficina, que o conjunto de soluções de S é um Subespaço Vetorial do Espaço Vetorial $M_{3x1}(\mathbf{R})$. Considerando $W=\left\{\left(\frac{-7y}{3}, y, \frac{2y}{3}\right)\in \mathbf{R}^3 \ tal\ que\ \ y\in \mathbf{R}\right\}$ como o conjunto das soluções do sistema linear em questão, buscou-se, em uma representação geométrica, demonstrar a solução pelo software Geogebra, conforme a imagem abaixo:

Figura 28 - Representação geométrica do sistema de equações lineares.



Fonte: dados da pesquisa.

Posteriormente, escolheu-se duas soluções numéricas do conjunto, $(-21{,}9{,}14)\ \ e\ (-7{,}3{,}2)$, e comprovou-se que a soma delas também era uma solução e a multiplicação por um número real também é solução do sistema S. Então, agora pela representação algébrica, concluiu-se: sejam as seguintes matrizes dois elementos do conjunto das soluções:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W, então.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é, a soma é uma solução. Além disso, se multiplicarmos $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ por um número real k qualquer, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \cdot x_2 \\ k \cdot y_2 \\ k \cdot z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(k \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = k \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é, o produto de um número por uma solução continua sendo uma solução. Portanto, o conjunto das soluções do sistema S é um Subespaço Vetorial de $M_{3x1}(\mathbf{R})$.

Comentarista: Neste momento, foi possível verificar, novamente, como disserta Andrade (1998, 2017), o ir além que a Exploração de Problemas proporciona. Agora, ao professor de Álgebra Linear, esta perspectiva concede inúmeras oportunidades de ir além do conteúdo idealizado para formalização do conceito. No terceiro momento, era idealizado formalizar o conceito de Espaços Vetoriais e, pela Exploração de Problemas, foi possível construir o conceito de Subespaço Vetorial, dedicando, assim, um momento apenas para esse tópico. Foi possível verificar que grande parte da turma já tinha um vago entendimento sobre Subespaços Vetoriais, entretanto, alguns demonstraram certas lacunas a respeito do conceito de Espaço Vetorial. Enxergamos isso em falas, tais como: "Qual a relação entre a observação dessas propriedades e a verificação dos axiomas de um Espaço Vetorial?". Foi proporcionado aos discentes, por intermédio da Exploração de problemas e da teoria das Representações Múltiplas de Álgebra, um estudo com mais compreensão a respeito do que é um Subespaço Vetorial e uma aplicação dele na Educação Básica.

4.1.5 5º Momento: combinações e a Cabana de Gauss

5º problema

Problema[8]: Um viajante espacial deixaria sua terra natal pela primeira vez. Seus parentes quiseram ajudá-lo em sua viajem, assim, antes dele partir, lhe deram de presente distintos skates voadores para viajar pelo espaço. Cada um destes meios de transporte pode viajar unicamente numa direção especificada por seus componentes nos eixos do espaço no qual ele viajava. Suponha que o espaço no qual o jovem viajava é o R^2 e os skates presenteados viajam na direção $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Um de seus parentes, o tio Jack, recomendou-lhe visitar o velho sábio Gauss que vive em uma cabana que se encontra a 107km a leste e 4km ao norte da casa do jovem. É possível usar os skates voadores para chegar na cabana do velho Gauss? Se for, de que maneira? Se não for possível chegar com esses meios de transporte, por que isso acontece?

Figura 29 - problema do Skate voador.

Fonte: Disponível em: < https://m.folha.uol.com.br/ilustrada/2015/06/1647590-japoneses-apresentam-skate-voador-inspirado-em-de-volta-para-o-futuro.shtml>. Acesso em: 02 out. 2020. Google[8]

---

[8] TRIGUEIROS, M. Problemas de modelação baseados na teoria APOS que propiciam a aprendizagem da Álgebra Linear. In: MACHADO, S.; BIANCHINI, B. **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2018. p. 64-74.

Conteúdos trabalhados: Combinações Lineares, Subespaço Gerado, Dependência Linear e Base.

Objetivos:

- Através da Resolução de Problemas, formalizar o conceito de Combinação Linear;
- Através da Exploração de Problemas, formalizar os conceitos de Subespaço Gerado, Dependência Linear e Base.

Comentarista: A partir deste momento, houve uma baixa nas participações das discentes, elas alegaram que estavam sobrecarregadas com trabalho e com outras ocupações acadêmicas. Mesmo diante de questionamentos e mais tempo para resolução, algumas não solucionavam alegando que seria a mesma resolução, e, embora o pesquisador solicitasse que enviassem para o privado, algumas não enviavam. Neste problema, espera-se que os discentes façam uso dos dois skates que se movimentam em coordenadas específicas para conseguir chegar na coordenada em que se encontra a cabana do velho Gauss, ou seja, espera-se que os discentes codifiquem, de uma forma algébrica tal, que façam uso de um sistema equações lineares para encontrar os escalares que, multiplicados pelos vetores (skates), consigam chegar no vetor que corresponde às coordenadas da casa de Gauss. Todavia, isso não aconteceu de imediato.

> **P:** Bom dia, pessoal, segue nosso próximo problema, podem ler e postar aqui no grupo a solução assim que puderem.
> **A6:** Tá bem.
> **A4:** Certo
> **Todos:** Ok.

Comentário: Por um período de um dia, os discentes não responderam à questão, logo, o professor enviou indagações em forma de áudio para o grupo.

> **P:** Bom dia, alguém ficou com alguma dúvida a respeito do problema?
> **A6:** Pra ser sincera, eu não compreendi como solucionar essa questão.
> **A4**: Eu também.
> **A2**: Por mim tudo ok, ainda hoje eu envio, bom dia!
> **A5**: Nós poderíamos comparar com o plano cartesiano entende, tipo, norte, sul, leste e oeste se encaixa, perfeitamente, no plano cartesiano.
> **P:** Muito bom, vamos tentar entender com essa comparação de A5.

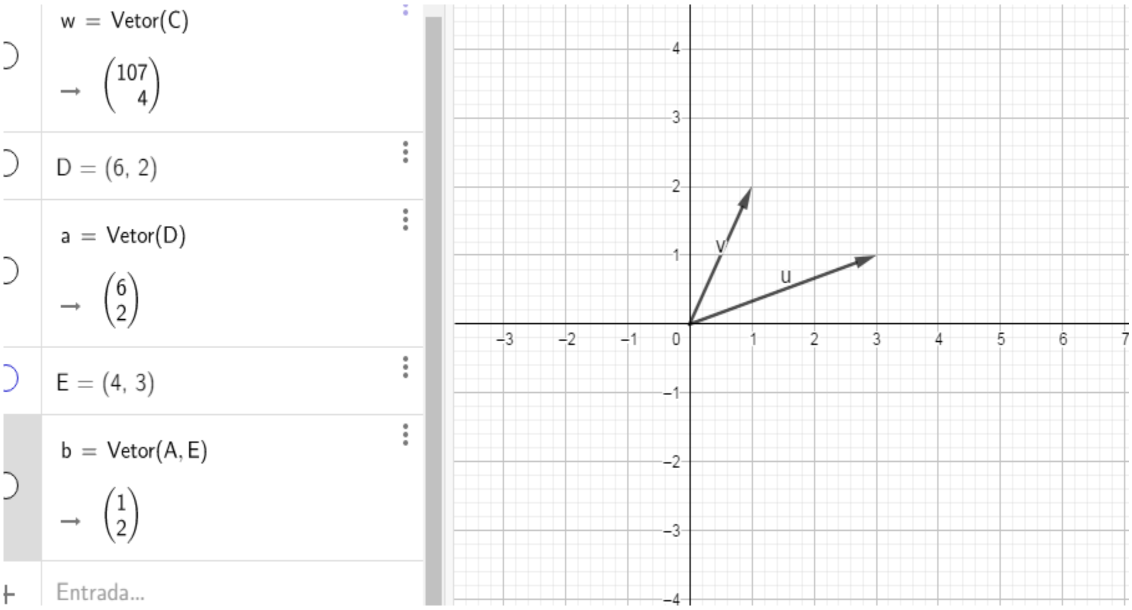
Comentarista: Neste momento, o pesquisador entendeu que algumas das discentes, embora já tendo cursado Álgebra Linear, não haviam se deparado com a representação geométrica de uma Matriz, que é um vetor. O pesquisador enviou um vídeo, gravado por ele na plataforma do YouTube, sobre as representações geométrica de matrizes. Vale ressaltar que o pesquisador sempre fazia uso de uma lousa e, sempre que achava mais didático, usava o aplicativo Geogebra. Segue, em resumo, o que foi postado no vídeo:

> **P:** Pessoal, entendemos que o rapaz possui dois skates que se movem em coordenadas $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, exato?
> **Todos:** Ok.
> **P**: Então, seguindo a ideia de A5, nós temos dois skates que podem ser comparados a quem?

A2: Dois vetores do R2.

P: Ótimo, então vamos associar o skate $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ao vetor u e o skate $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ao vetor v.

Figura 30 - Representação de um vetor na interface do computador do docente.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Vamos focar no vetor u: se eu andar uma vez com ele, então, consigo sair do meu ponto de partida e vou até onde?

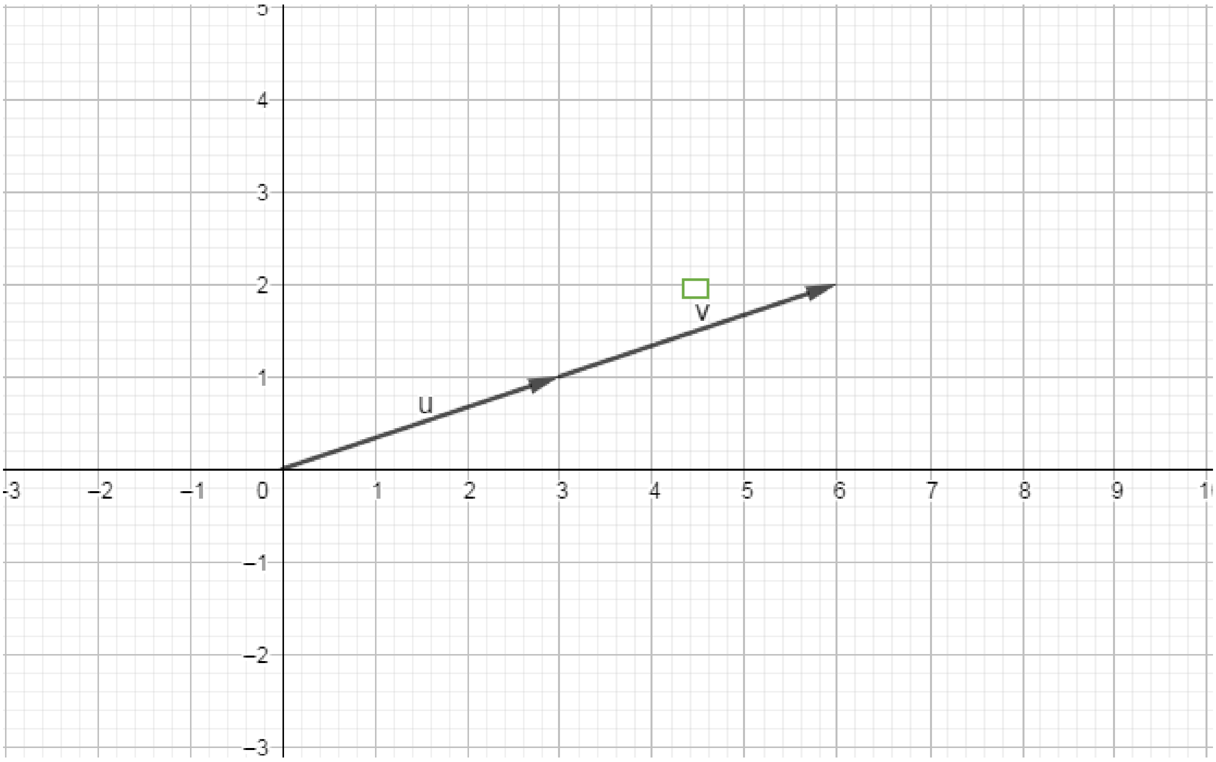
A2: Até o ponto (3,1)

P: Que, em pontos cardeais, é?

A5: 3 a leste e a norte.

P: Exatamente! E se, a partir daí, eu quiser andar com o mesmo skate eu vou pra onde?

Figura 31 - Outra Representação de um vetor na interface do computador do docente.



Fonte: dados da pesquisa.

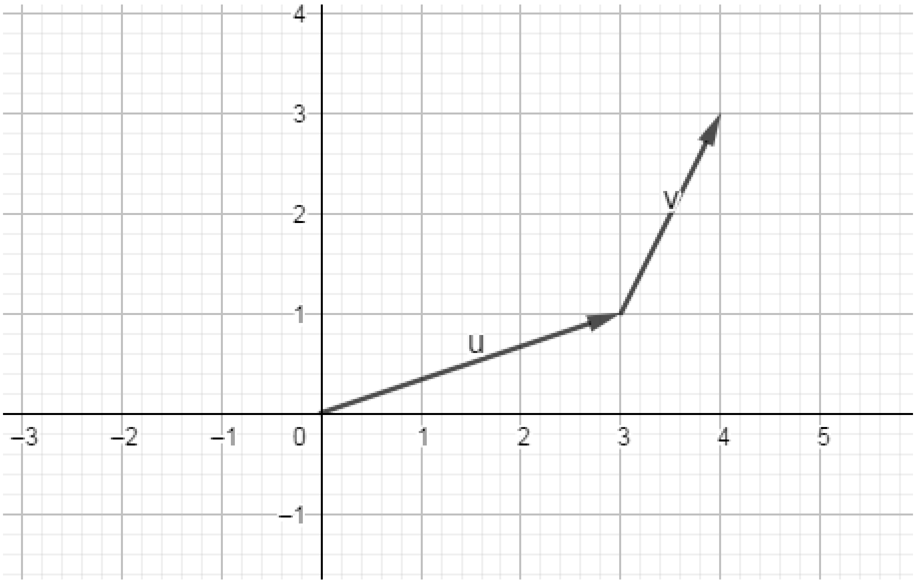
A3: Você vai para 6 a leste e dois a norte.

P: Ok, e se ao invés de usar duas vezes o mesmo skate, eu primeiro usasse $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e depois $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para onde eu iria?

A2: Iria, deixa eu ver, acho que tem que somar e eu acho que chegaria no ponto (4,3), ou seja, quatro a leste e três a norte.

P: Exato.

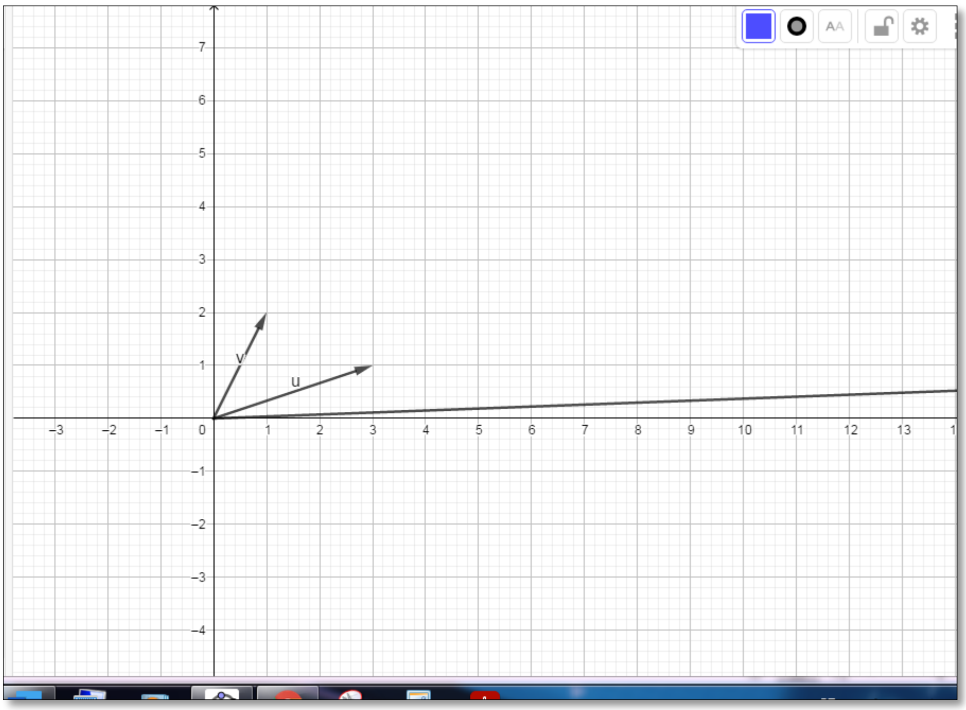
Figura 32 - Mais Representações de um vetor na interface do computador do docente.



Fonte: dados da pesquisa.

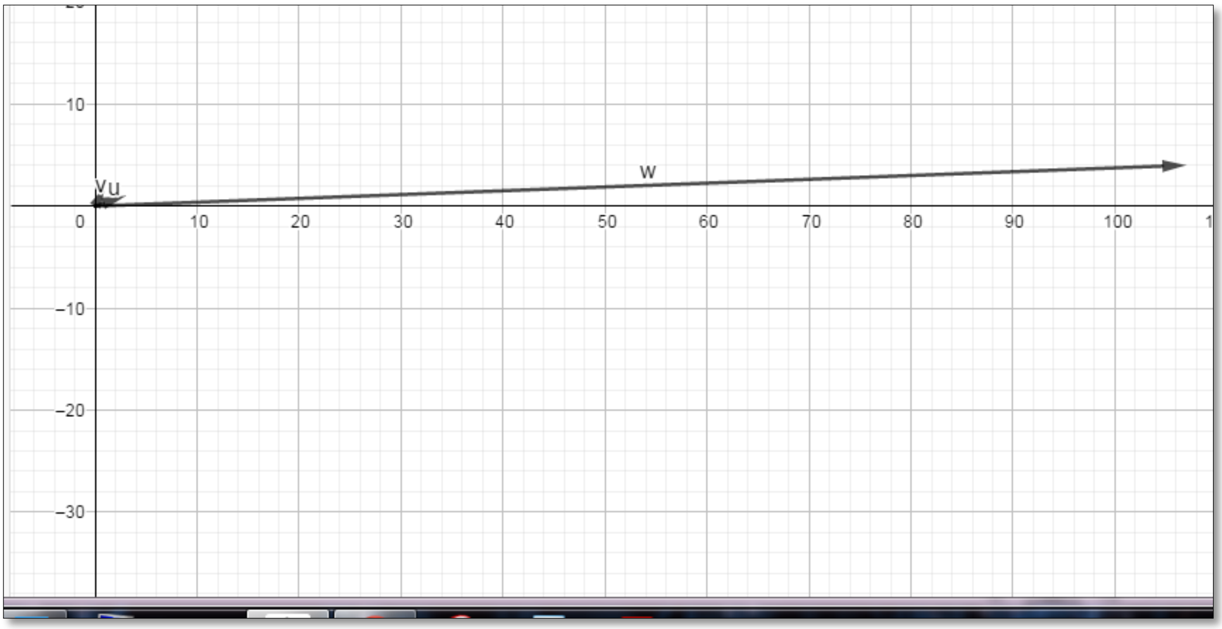
P: Agora, o objetivo da questão é chegar à cabana do velho Gauss (que é bem longe). Todos entenderam?

Figura 33 - Representação geométrica do problema.



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 34 - Representação geométrica da cabana do velho Gauss.

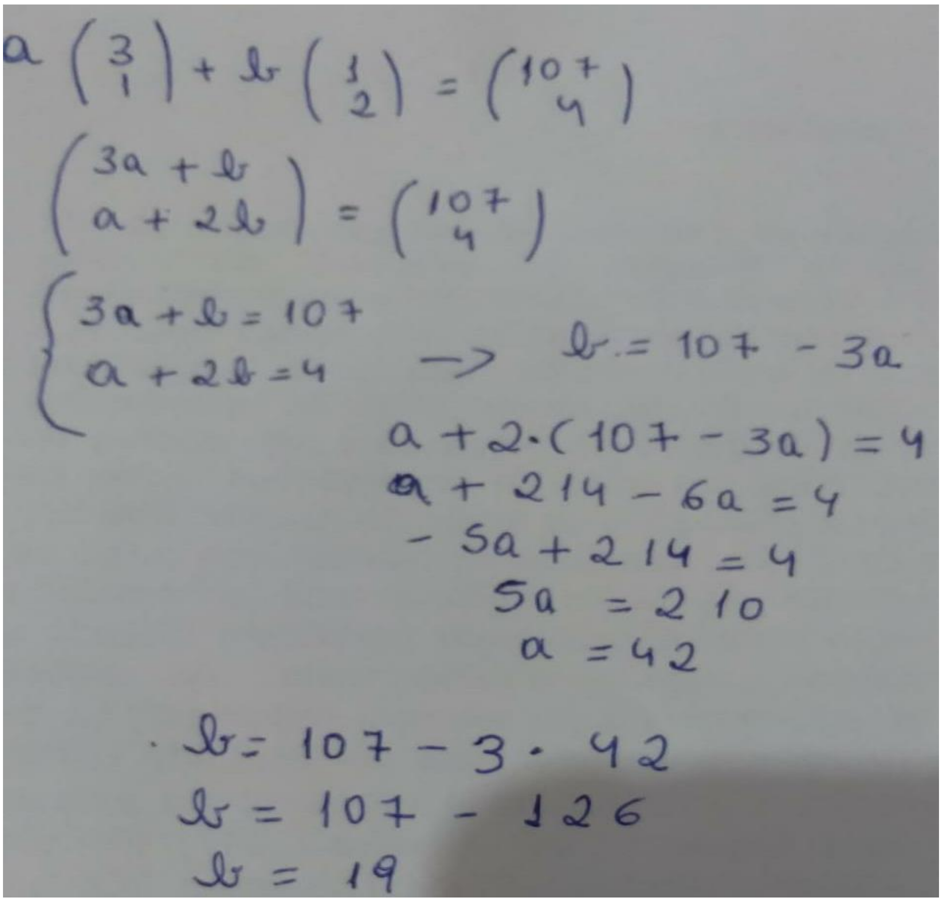


Fonte: dados da pesquisa.

Comentarista: Pode-se observar, neste momento, que a postura do professor é de mediador. Como destacado por Onuchic *et al*. (2014), tal postura declara que o professor ajuda não somente na resolução do problema proposto, como também a solucionar problemas secundários que, muitas vezes, surgem no decorrer da solução do problema proposto, podendo advir de notações, passagem de uma representação da linguagem materna para uma representação algébrica, numérica ou geométrica. Após uma leitura em conjunto do problema, solucionando o problema do entendimento da questão, os discentes sinalizaram, por meio de emojis, que entenderam o problema e começaram a postar suas resoluções.

A2: Segue minha resolução.

Figura 35 - Resolução da aluna A2 para o problema dos skates voadores.



$$a\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}107\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3a+b\\a+2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}107\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3a+b=107\\a+2b=4\end{cases} \rightarrow b = 107-3a$$

$$a+2\cdot(107-3a)=4$$
$$a+214-6a=4$$
$$-5a+214=4$$
$$5a=210$$
$$a=42$$

$$b=107-3\cdot 42$$
$$b=107-126$$
$$b=19$$

Fonte: dados da pesquisa.

A5: Eu fiz também, mas, no meu resultado, deu 19 negativo.

A2: Ahhh, é mesmo... foi erro meu, mas considere negativo.

P: E o que significa os números 42 e -19?

A5: O meu saiu igual, significa que ele tem que andar 42 vezes com o skate 3 e 1, e tem que andar -19 vezes com o skate 1 e 2, assim, matematicamente, tem como, é só ele andar para trás kkk

P: Mais alguém conseguiu?

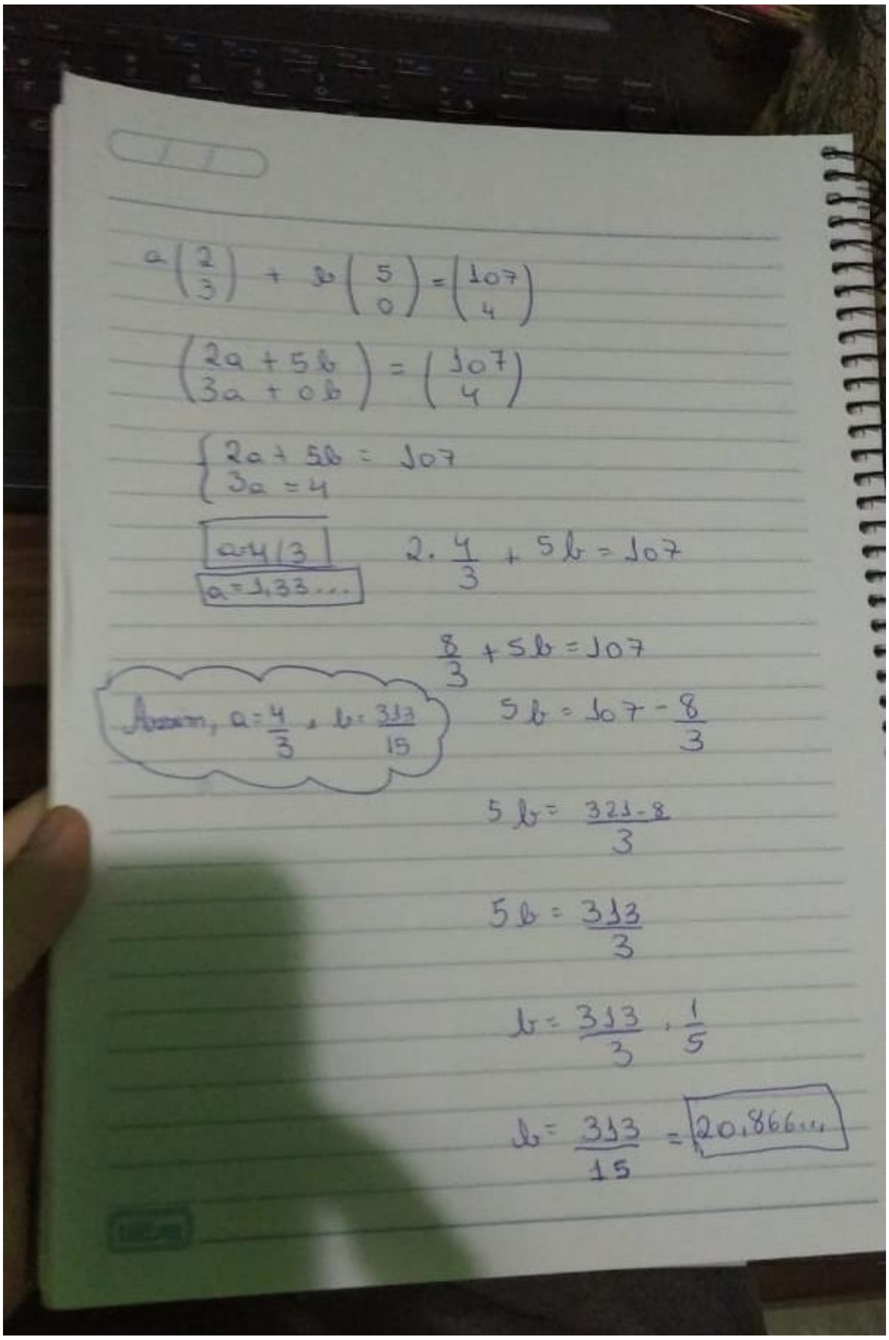
A3: O meu ficou do mesmo jeito também.

P: E se usássemos outros skates que seguissem essas coordenadas $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} e \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$, ainda é possível chegar à cabana do velho Gauss?

Comentarista: Neste momento, o pesquisador iniciou o movimento de Exploração$_{\text{proprosição}}$ para que os discentes pudessem se perceber que existem mais combinações de vetores que possibilitariam chegar ao mesmo vetor $\binom{107}{4}$, proporcionando, assim a formalização dos conceitos matemáticos objetivados.

A1: Segue minha resolução:

Figura 36 - Resolução da aluna A1 para o problema dos skates voadores.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Será que era possível chegar?

Todos: Sim.

A2: É como se nós estivéssemos combinando um par de vetores uma quantidade de vezes até chegar no vetor que nós queremos.

P: Nós conseguimos chegar na seguinte equação para conseguir chegar na localização da cabana do velho Gauss:

$$42 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-19) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Isto é, nós conseguimos encontrar a quantidade de vezes que utilizamos cada skate combinado para chegarmos à casa de Gauss, como A2 falou. Dizemos que o vetor resultante dessa "combinação", como diz a aluna A2, é chamada de combinação linear dos vetores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comentário: Tendo em vista a fala da aluna A2, o pesquisador aproveitou para formalizar o conceito de Combinação Linear, através de um vídeo gravado e postado no YouTube. Formalizando da seguinte maneira:

Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Então, o vetor

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

é um elemento de V ao qual chamamos **combinação linear** de $v_1, \ldots, v_n$.

Posteriormente, o pesquisador exemplificou também em conjuntos presentes na Educação Básica, tais como Matrizes, Polinômios e Funções. Em seguida, o pesquisador fez uso da exploração de problemas para chegar no conceito de conjunto gerador.

P: Mas se nós, ao invés de utilizarmos 42 e -19, fizermos uso de dois números reais quaisquer?

A5: Então chegaríamos a outro vetor?

P: Qual?

A5: A qualquer um vetor do R2.

P: Isso mesmo.

Comentário: Considerando a fala da aluna A5, o pesquisador aproveitou para formalizar o conceito de Conjunto Gerador, através de outro vídeo gravado e postado no YouTube. Formalizando da seguinte maneira:

Se fixarmos os vetores $\binom{3}{1}$ e $\binom{1}{2}$ pertencentes ao $\mathbf{R}^2$, o conjunto W dos vetores que são combinação linear deste é chamado subespaço gerado por $\binom{3}{1}$ e $\binom{1}{2}$ e denotamos por $W = [v_1, \dots, v_n]$. Generalizando, então: Fixados os vetores $v_1, \dots, v_n \in V$, o conjunto W de todos os vetores de V, que são combinação linear destes, é denotado por

$$W = [v_1, \dots, v_n] = \{v \in V: v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n: a_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n\},$$

é um subespaço de V e W é chamado de **subespaço gerado** por $v_1, \dots, v_n$. Provemos, então, que o mesmo é um subespaço vetorial, pois, como vimos anteriormente, basta apenas provamos que as operações de adição e multiplicação por escalar são satisfeitas.

i) Sejam $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $w = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \in W$. Então, pelas propriedades da associatividade e comutatividade em V , ele é um espaço vetorial, podemos escrever:

$$v + w = (a_1v_1 + \cdots + a_nv_n\ ) + (b_1v_1 + \cdots + b_nv_n) = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_n + b_n)v_n \in W.$$

ii) Sejam $\alpha \in \mathbf{R}$ e $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in W$. Então,

$$\alpha v = \alpha(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = \alpha(a_1v_1) + \cdots + \alpha(a_nv_n) = (\alpha a_1)v_1 + \cdots + (\alpha a_n)v_n \in W.$$

Portanto, de fato, $[v_1, \dots, v_n]$ é um subespaço vetorial de V. No nosso caso, $[\binom{3}{1}, \binom{1}{2}]$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^2$.

P: Alguma dúvida?

Todos: Tudo ok!

P: Alguém gostaria de fazer alguma observação, ou algum questionamento a partir do problema ou do conceito formalizado?

A4: Entendi.

A6: Tudo ok.

A3: Nenhuma dúvida até então.

A2: Tudo bem explicado, estou entendendo Álgebra Linear (risos).

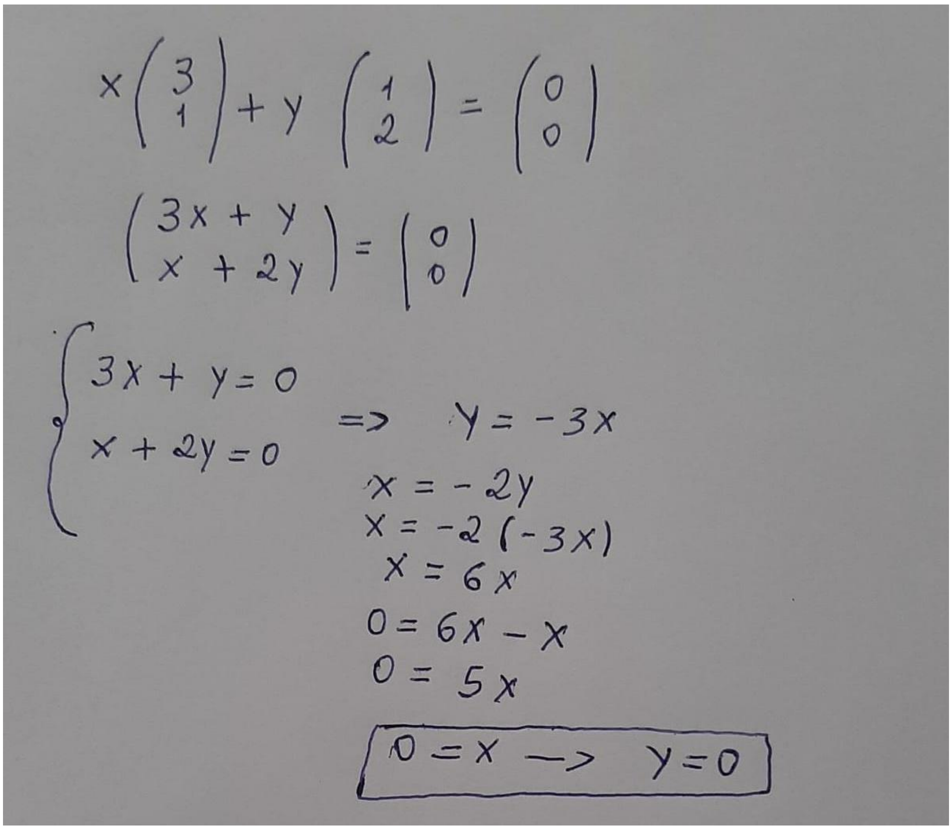
Comentário: Haja vista que nenhum dos discentes questionou, alegando que compreenderam, o pesquisador fez, então, outra exploração para formalizar o conceito de Dependência Linear:

P: Quais números reais podemos colocar na seguinte equação para encontrar o vetor nulo?

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

A2: Eu encontrei a seguinte solução:

Figura 37 - Segunda resolução da aluna A1 para o problema dos skates voadores.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Parabéns A2! Agora, outra indagação: existem outros números reais que satisfaçam a igualdade da equação anterior?

A7: Eu tentei e não encontrei.

P: Alguém encontrou?

A5: Não há números reais que satisfaçam isso, a não ser o par zero e zero.

Comentário: Neste momento, o pesquisador formalizou o conceito de vetores linearmente independentes e o conceito de Base de um Espaço Vetorial.

P: Bem, pessoal, se voltarmos a considerar a seguinte equação:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\alpha = \beta = 0$, dizemos que os vetores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ são Linearmente Independentes. De maneira mais formal, temos: Sejam V um espaço vetorial e $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ contido em V. Consideremos a equação:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

O conjunto A diz-se **linearmente independente** (LI) ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI, caso a equação

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

admita apenas a solução trivial, isto é,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Se existir $a_i \neq 0$, para algum $i = 1, \ldots, n$, diz-se que o conjunto A é linearmente dependente (LD) ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LD.

P: Vocês conseguiram entender?

Todos: ok.

A7: Entendi perfeitamente.

P: Pessoal, o subconjunto gerado por $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ pode gerar qualquer vetor do R2, como afirmou A5, esses vetores são LI?

Todos: Sim!

P: Então, esse conjunto é chamado de base. Mais formalmente:

Um conjunto $\beta = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é uma base para o espaço vetorial V se:

$i)$ β *é* LI;

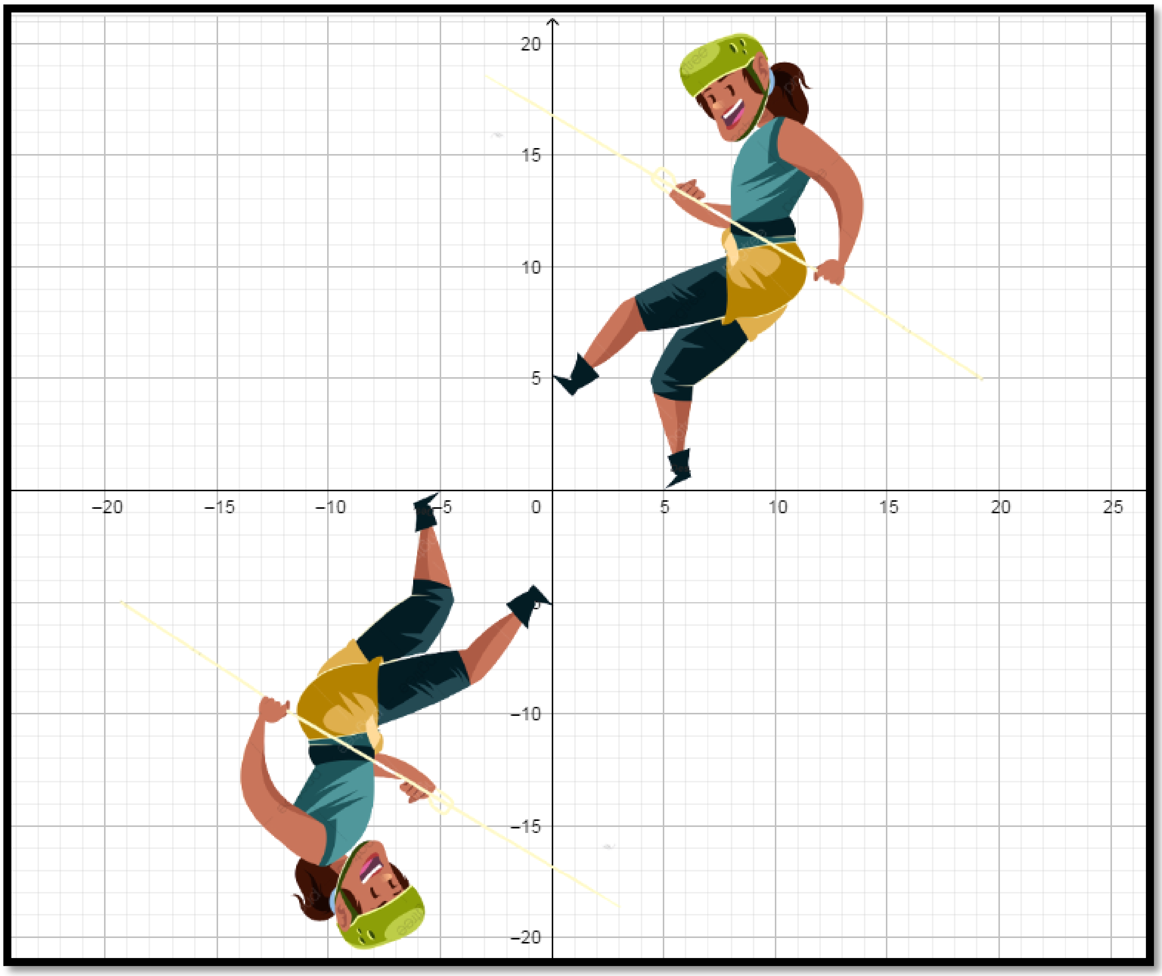
$ii)$ β *gera* V.

Comentário: Neste momento, a etapa de exploração e proposição de problemas ocorreu de maneira simultânea, a exploração$_{\text{proposição}}$ de problemas, neste movimento de Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado, foi essencial para que pudéssemos chegar a formalizar além do conceito de Combinação Linear, os conceitos de Subespaço Gerado, Dependência Linear e Base. No que tange às Representações Múltiplas de Friedlander e Tabach (2001), o uso delas foi indispensável para o entendimento do problema em questão, perpassando pelas representações geométricas, numéricas para, então, formalizar em algébricas de níveis 1 e 2, como discorrem Coimbra (2008), Dorier (2000) e Leivas (2020). Sobre a Educação Básica, a metodologia ERP proporcionou uma reflexão a respeito da visualização desses conceitos no currículo do ensino fundamental e médio, nos polinômios, funções, matrizes, vetores, números reais ou complexos e no próprio sistema de equações lineares.

4.1.6 6º Momento: rapel no $\mathbb{R}^2$

6º problema: Um designer gostaria de passar a imagem da garota fazendo rapel do primeiro quadrante do plano cartesiano para o terceiro, todavia, ele não sabe como fazer matematicamente. Consequentemente, ele chamou você para ajudá-lo, como você o ajudaria?

Figura 38 - O problema da Garota no rapel.



Fonte: adaptada[9]

Conteúdos trabalhados: Transformações Lineares e Operadores Lineares.

Objetivos:

- Formalizar os conceitos de Transformação Linear e Operador Linear através da ERP;
- Aplicar os conceitos de Reflexão Axial e Rotação.

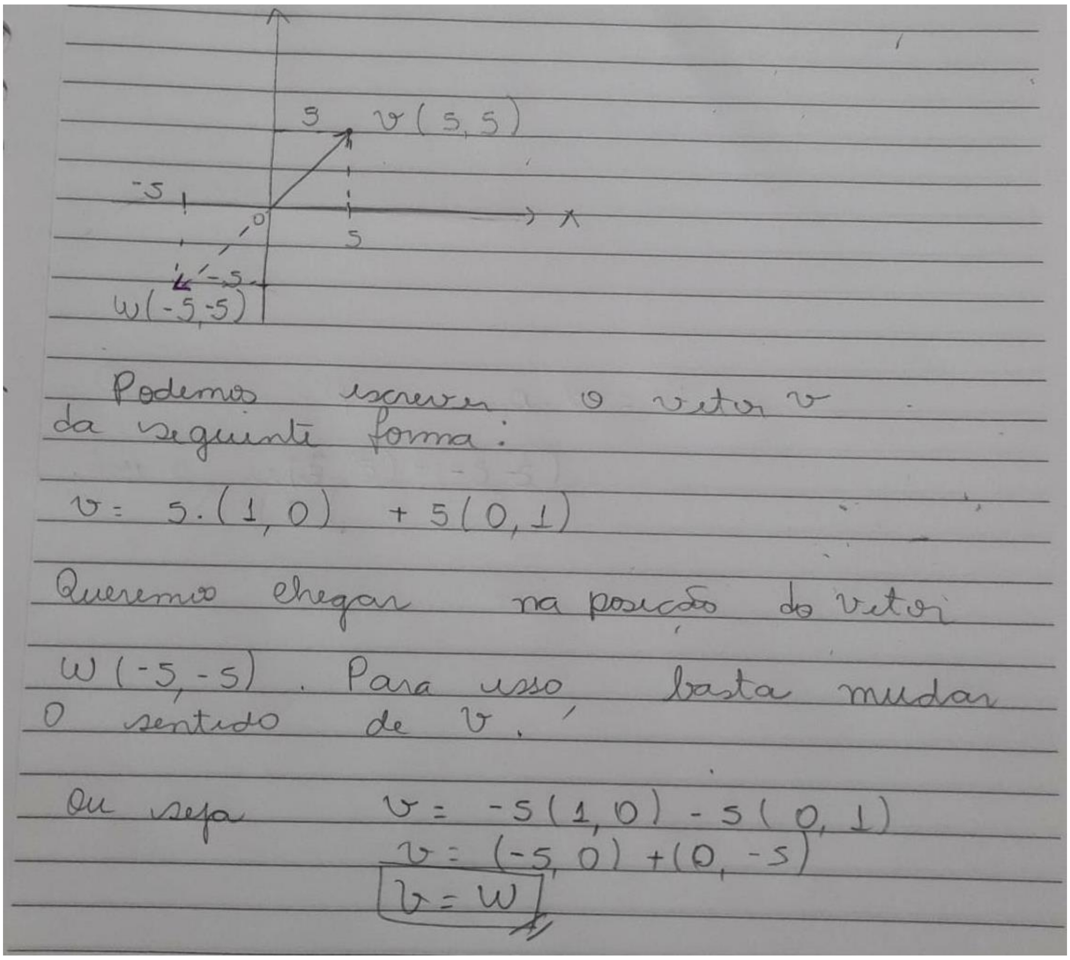
[9] Disponível em: <https://pt.pngtree.com/freepng/vector-painted-boy-climbing_2680273.html>. Acesso em: 02 out. 2020.

Comentarista: Neste problema, é esperado que as alunas construam o conceito de Transformação Linear, conseguindo encontrar a aplicação linear que associa cada vetor que constitui a imagem em questão. Neste momento, a aluna A7 disse que não poderia participar por motivos extracurriculares.

P: Bem, pessoal, bom dia! Tudo bem com vocês? Segue, então, mais um problema a ser solucionado. Qualquer dúvida ou observação, podem expressar aqui ou no inbox, fico no aguardo.

A4: Segue minha resolução:

Figura 39 - Resolução de A4 para o problema 6.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Parabéns, A4! Pode explicar sua resolução?

Comentarista: Neste momento, o pesquisador observou que a discente codificou através de representações geométricas e numéricas, de uma forma que a mesma tomou um vetor em particular para mudar o seu sentido e, posteriormente, apresentou a ideia de generalizar para todos os vetores que constituem a imagem. Todavia, ela apresentou, no final da sua resolução, que $v = w$. Percebido, então, que a discente escreveu isto, o pesquisador solicitou que ela explicasse o problema com o intuito de que ela refletisse sobre o problema e encontrasse o equívoco, não apontando o erro.

A4: Boa noite! Explico, sim, eu imaginava que teria ficado confuso.

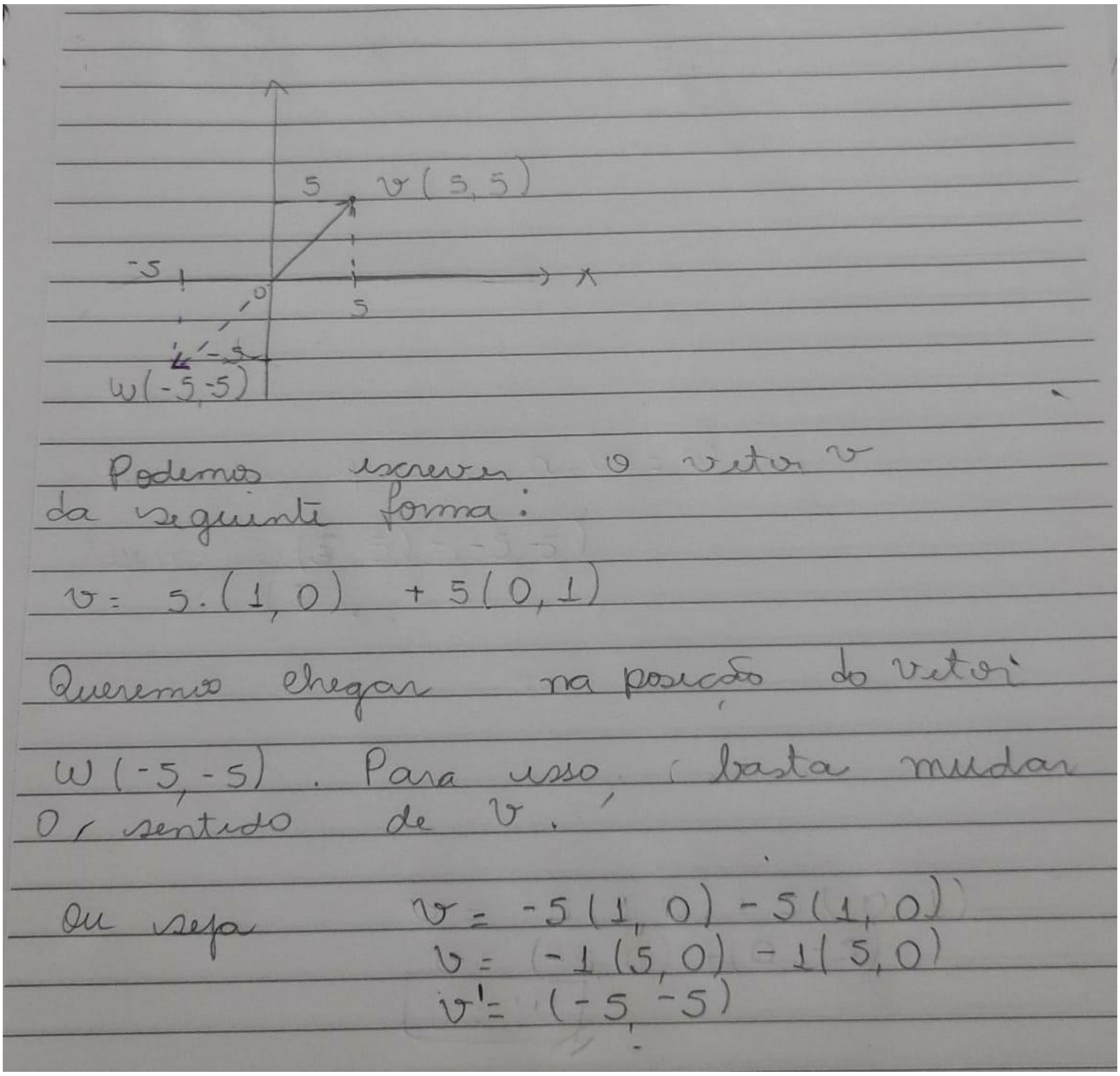
P: Tudo certo!

A4: O objetivo era chegar nesse vetorzinho w, em que as coordenadas sejam $w = (-5, -5)$, mas e aí eu poderia ter feito isso de maneira direta e procurei não fazer, mas o objetivo era chegar nisso, que $v = w$, mas, pensando bem, seria um absurdo dizer que esses dois vetores são iguais, eu queria chegar numa igualdade e acabei fazendo uma confusão. Foi a mistura de letras, vou corrigir. Não sei se faz sentido isso, eu vou refletir novamente.

P: Tudo certo, parabéns pela autoanálise e pelo desejo de ser mais detalhista possível, isso é muito bom para uma matemática.

A4: Que nada, muito obrigada! Foi bom você ter mencionado, se não teria passado despercebido. Segue na foto:

Figura 40 - Correção de A4 sobre o problema de número 6.



Fonte: dados da pesquisa.

P: Muito bom, parabéns! O que achou agora?

A4: Acredito que agora está mais coerente!

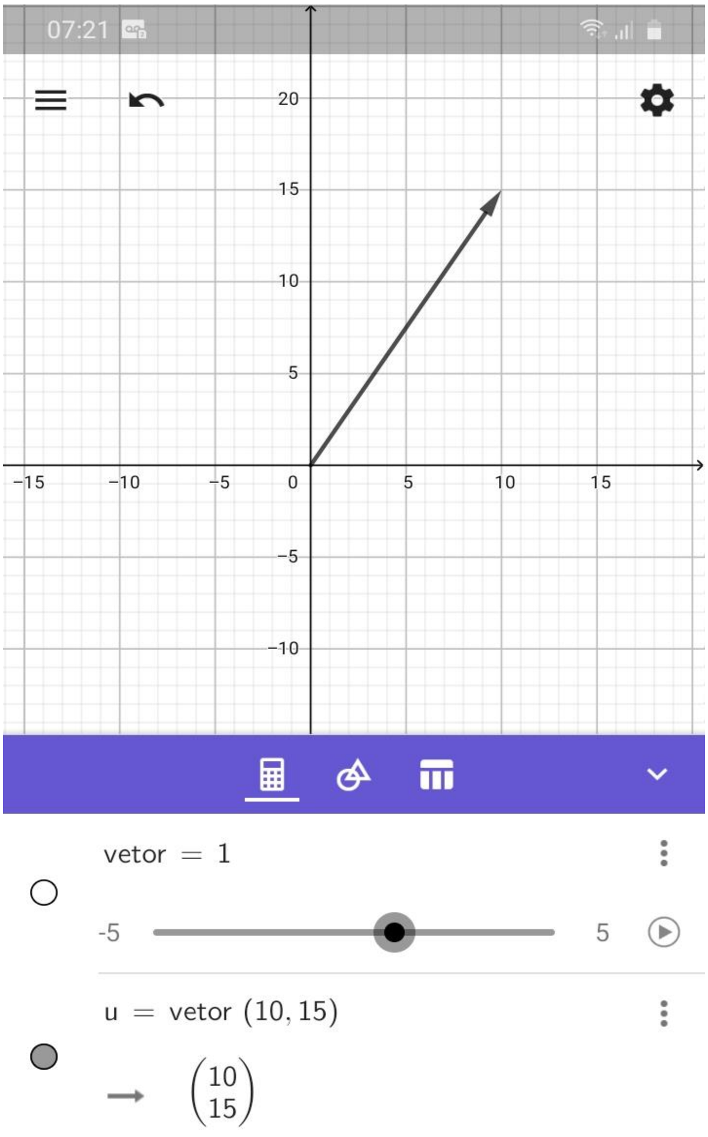
P: Mais alguém conseguiu solucionar esse problema?

A6: Creio que basta ele pegar o vetor que define a imagem, e multiplicar ele por -1... No caso, seria aplicar uma transformação linear da seguinte forma: T(x, y) = - (x, y).

Comentarista: A aluna conseguiu expor o conceito de transformação linear, aplicando, assim, seu conhecimento. No caso da aluna A6, o problema se tornou um exercício, pois, de acordo com Onuchic (1999), um problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver. E, mesmo que a aluna A6 estivesse interessada em resolver, como o conceito de transformação linear já estava formado, ela o aplicou. Em seguida, a aluna A2 postou a sua resolução.

> **A2**: Segue a minha resolução e perdão pela demora. Eu fiz a parte geométrica da coisa. Se eu considerar um vetor ou um ponto (também serve) qualquer que constitui a imagem da menina fazendo rapel:

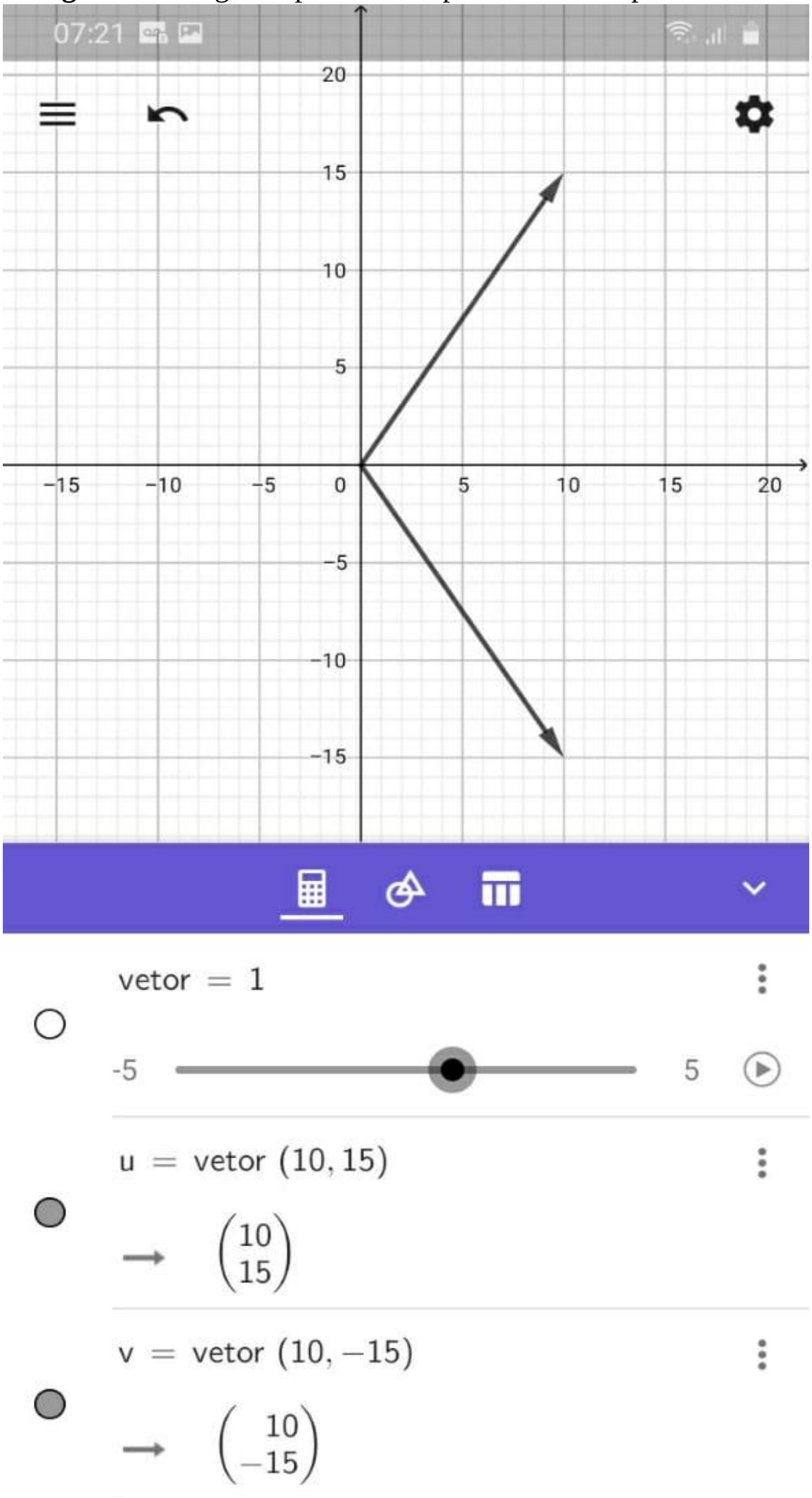
Figura 41 - Primeira parte da Resposta de A2 do problema 6.



Fonte: dados da pesquisa.

> **A2**: Eu colocaria o y pra ser negativo.

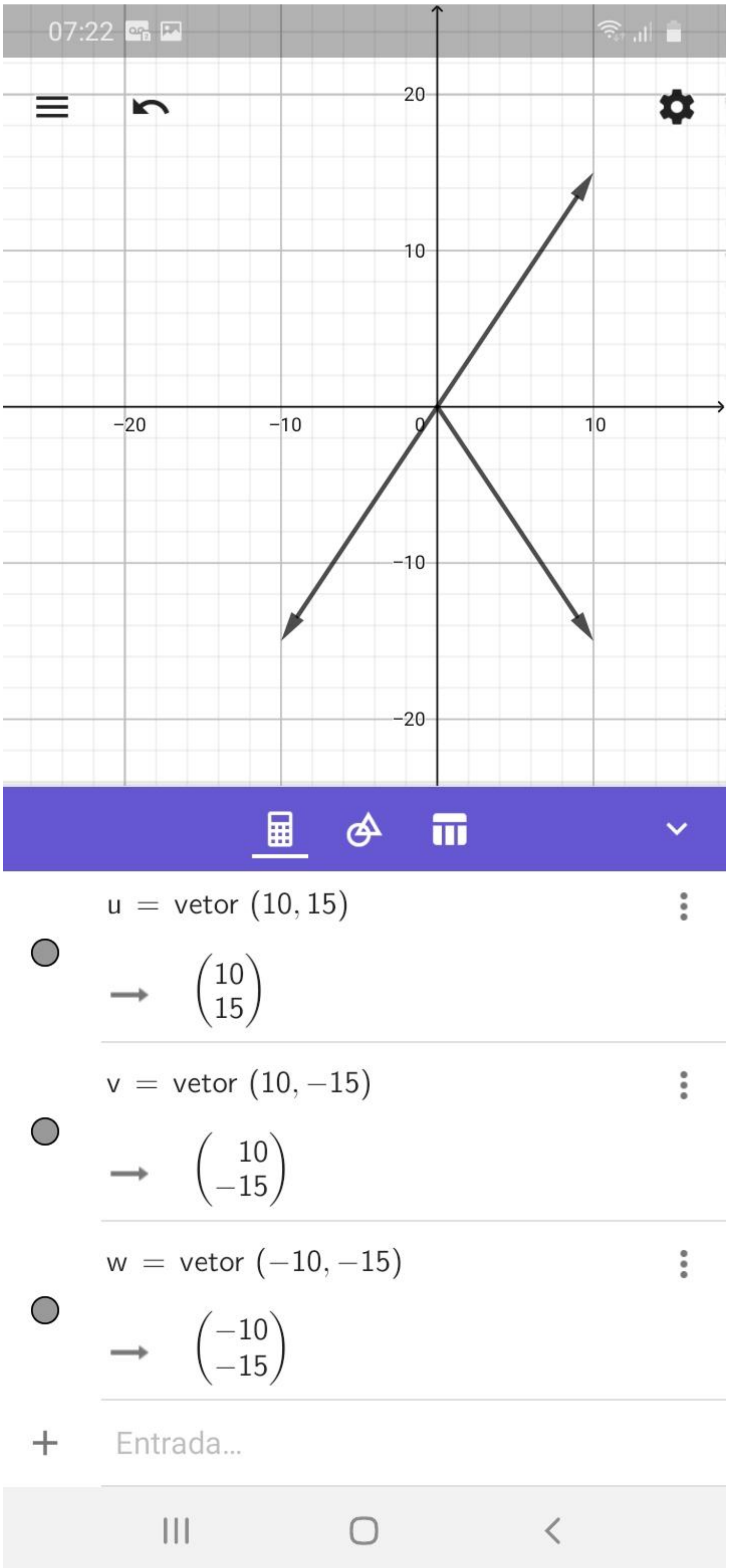
Figura 42 - Segunda parte da Resposta de A2 do problema 6.



Fonte: dados da pesquisa.

A2: E depois o x negativo.

Figura 43 - Terceira parte da Resposta de A2 do problema 6.



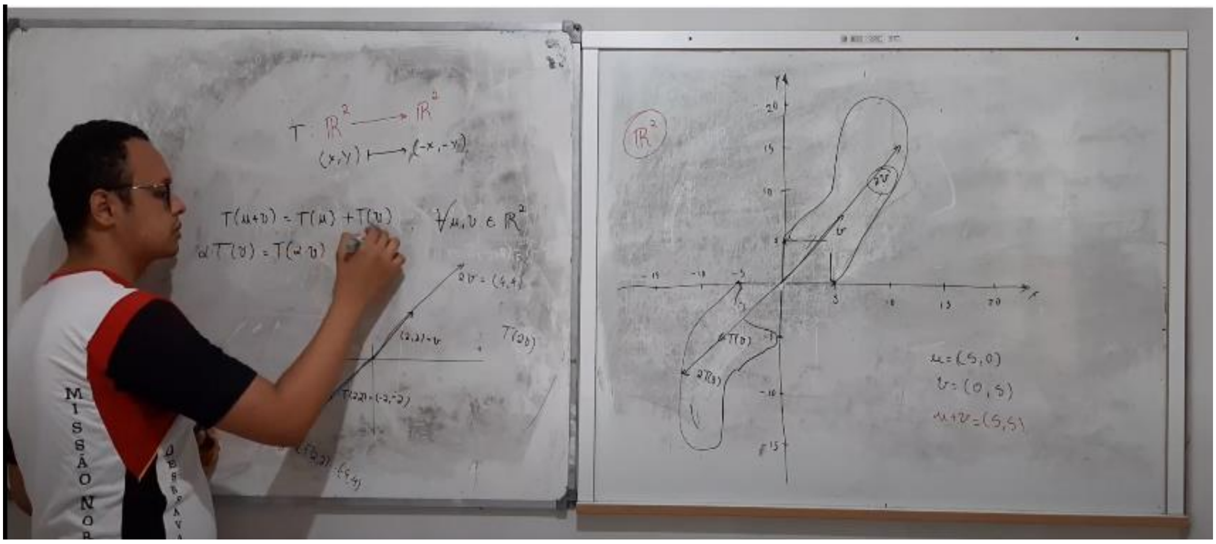
Fonte: dados da pesquisa.

A1: Arrasou, parabéns.

P: Parabéns a ambas, pela resolução.

Comentário: O pesquisador, nesse ínterim, procurou cada aluna no inbox para saber se estavam com alguma dúvida acerca do problema, então, as alunas A1 e A3 alegaram que não poderiam postar porque estavam sobrecarregadas com congressos, coordenação de centros acadêmicos estudantis, disciplinas dos cursos de graduação, mas ambas declararam que entenderam perfeitamente o problema e as resoluções que foram postadas no grupo. Neste momento, o pesquisador formalizou, por intermédio de um vídeo pelo YouTube, os conceitos de Transformação Linear e Operador Linear, a partir das resoluções que foram expostas pelas alunas.

Figura 44 - pesquisador construindo o conceito de Operador Linear.



Fonte: dados da pesquisa.

Após uma explanação acerca do que significa as propriedades que caracterizam se uma aplicação é uma transformação linear ou não e após a identificação dessas propriedades na aplicação em questão, o pesquisador resolveu formalizar primeiro o conceito de Operador Linear e, posteriormente, o de Transformação Linear. Mesmo sabendo que não é habitual entre os docentes, Dorier (2000) discorre que o entendimento deve ser do particular para o geral, logo, para facilitar a compreensão do conceito, definiu-se, primeiramente, o que é um operador linear.

P: Vocês conseguiram encontrar essa aplicação

$$T : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

Onde U é o conjunto que simboliza os vetores que contém a região enfatizada, ou melhor o desenho da mulher fazendo Rapel. E conseguimos juntos encontrar as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &i)\ T(v+u) = T(v) + T(u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2; \\ &ii) \alpha T(v) = T(\alpha v) \quad \forall \alpha \in \mathbf{R} \text{ e } \forall \in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

Então, vamos formalizar este conceito?

Comentário: A partir deste momento, o pesquisador formalizou os conceitos de Operador Linear e Transformação Linear: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$, dizemos que uma aplicação $T: V \to V$ é uma **Operação Linear** se satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &i)\ T(v+u) = T(v) + T(u) \quad \forall u, v \in V; \\ &ii) \alpha T(v) = T(\alpha v) \quad \forall \alpha \in \mathbf{R} \text{ e } \forall \in V. \end{aligned}$$

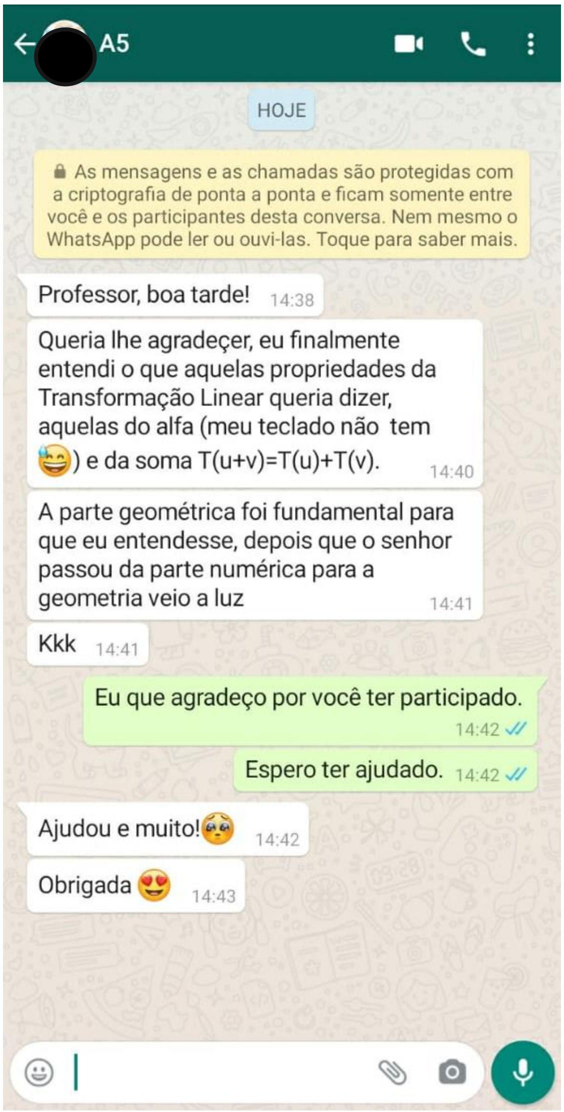
Seguiu-se, então, outros exemplos em outros espaços vetoriais na Educação Básica. Posteriormente, foi definido o conceito de Transformação Linear: Sejam $V\ e\ W$ dois espaços vetoriais sobre $\mathbf{R}$, dizemos que uma aplicação $T: V \to W$ é uma **Transformação Linear** se satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &i)\ T(v+u) = T(v) + T(u) \quad \forall u, v \in V; \\ &ii) \alpha T(v) = T(\alpha v) \quad \forall \alpha \in \mathbf{R} \text{ e } \forall \in V. \end{aligned}$$

Foi explanado que os Operadores Lineares são um caso particular de Transformações Lineares e foi explanado, através de vídeos (gravados pelo próprio pesquisador), que elas estão muito presentes na Educação Básica, tais como a simetria axial, rotação no plano e projeção. Em caráter de exemplo, foi trabalhado a simetria axial através do operador linear $\begin{matrix} T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, -y) \end{matrix}$.

Comentarista: No último encontro, não tivemos a participação de todos devido a outras atividades extracurriculares (segundo a afirmação das discentes), todavia, a ERP, juntamente com as Representações Múltiplas, se mostrou, mais uma vez, útil para a compreensão de mais conceitos no estudo dos Espaços Vetoriais, construindo o conceito de quem ainda não havia tido contato com a disciplina e "reparando brechas" em discentes que já haviam cursado a disciplina, mas, mesmo assim, ainda não compreendiam bem o assunto. Em consonância com essa descrição, segue uma conversa realizada no inbox do WhatsApp sobre a formalização dos conceitos de Transformação Linear e Operador Linear.

Figura 45 - print de uma conversa com A5.



Fonte: dados da pesquisa.

Com esse diálogo, finalizamos as descrições das atividades e avaliamos a oficina, ministrada ainda que de maneira remota, positivamente. Foi percebido que a metodologia de ERP, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, tornou o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico e reflexivo.

Ao decorrer da oficina, conseguimos perceber a importância no processo de ensino-aprendizagem da mediação-refutação, através desse processo os discentes conseguiram alcançar os conceitos propostos e ir além. Por exemplo, quando o terceiro problema foi aplicado, na oficina, era esperado construir o conceito de Espaços Vetoriais, mas, em uma exploração por parte da aluna A2, foi construída uma ideia de operação binária e de estrutura algébrica.

Nesta oficina, percebeu-se que a Proposição de Problemas, na perspectiva de Andrade (1998, 2017), favoreceu muito o ensino-aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear. Quando nos deparamos com esta proposta em que o aluno vai propor um problema e que através desse problema o professor construirá o conceito em questão, foi desafiador, todavia, essa metodologia, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, se mostrou, nesta oficina, muito favorável, pois possibilitou mais oportunidade de o pesquisador fazer conexões com os conceitos da educação básica e mais flexibilidade na forma de indagar aos discentes, fazendo com que eles não chegassem apenas à solução do problema, mas à construção do conceito matemático. A junção de indagações, explorações e proposições, aliadas à mudança de representações, principalmente, da numérica para a algébrica, da representação algébrica de primeiro nível para a algébrica de segundo nível e sempre que possível para a geométrica, foi muito favorável para o processo.

No decorrer da oficina, observou-se que os alunos conseguiram entender importância do conceito de Espaço Vetorial (e de outros que foram ministrados) tanto para uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, quanto para a Educação Básica, como também em relação a outras disciplinas da graduação.

Foi percebido que, mesmo aplicando de maneira remota, através das tecnologias de informação e comunicação, o objetivo do curso foi alcançado, entretanto, cabe, para futuras pesquisas, refletir sobre o aplicar tal metodologia de uma forma presencial, pois, de maneira remota, a comunicação fica limitada, haja vista que o usuário, antes de postar seu comentário, tem a possibilidade de digitar, apagar antes que alguém leia, postar apenas o resultado final de suas reflexões. Todavia, também foi percebida as potencialidades, uma vez que as tecnologias trazem muitos benefícios, tais como a comunicação não limitada ao tempo nem ao espaço e o dispor de vários softwares para uma melhor compreensão (como o Geogebra, que se mostrou um potencializador para a compreensão de certos conceitos na representação geométrica).

Para uma melhor compreensão sobre a experiencia dos discentes no curso, segue uma análise do questionário respondido pelos discentes na forma de Discurso do Sujeito Coletivo.

4.2 Análise dos Questionários através do DSC

As **respostas ao questionário foram analisadas utilizando o Discurso do Sujeito Coletivo – DSC desenvolvido** por Lefèvre & Lefèvre (2005) com o intuito entender a concepção do discurso do sujeito coletivo que participou da nossa oficina. Para cada questão apresentaremos as ideias centrais juntamente com o discurso gerado para cada uma delas, seguido da discussão dos resultados de cada pergunta.

Questão 1- Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Quais dessas contribuições que essa oficina pôde dar à sua formação sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

Ideias Centrais

Aplicação dos Espaços Vetoriais a Física	Compreensão do conceito de Estrutura.

IC- Aplicação dos Espaços Vetoriais à Física

Sim, eu percebi que ele pode ser aplicado em diversas situações na Física, trazendo um melhor entendimento dos problemas.

IC- Compreensão do conceito de Estrutura

DSC
Sim, com certeza, eu considero importante o conceito de Espaços Vetoriais. Eu acredito que enquanto Educação Básica ajuda muito para nós introduzirmos um conceito, pois o curso contribuiu para que eu entendesse que funções e matrizes estão conectadas e matrizes e polinômios se comportam de maneira similar abre um leque maior para o professor ter exemplos para o professor ter de exemplos e de situações que ele pode evidenciar em sala de aula. O curso me ajudou a compreender que cada objeto matemático que eu ensinarei lá no ensino fundamental ou no ensino médio não é uma coisa solta, mas é como se fosse uma rede, é uma estrutura. Além de me ajudar a enxergar outras maneiras de ensinar determinados conteúdos, abrindo assim um espaço maior para auxiliar em uma compreensão melhor dos alunos.

Questão 2 - Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

Ideias Centrais

A PP proporciona um processo de ensino-aprendizagem da Matemática mais proveitoso.	A PP impulsiona tanto o docente quanto o discente a sair da Zona de Conforto.

IC- A PP proporciona um processo de ensino-aprendizagem da Matemática mais proveitoso.

DSC
Sobre a Proposição de Problemas, em seus Prós, evidencia bastante, dá bastante clareza se o aluno compreendeu ou não o assunto, ajuda a você refletir sobre os detalhes do conteúdo matemático antes de você fazer o problema, o propor problemas colocou a gente para pensar, para refletir sobre a matemática que está por traz do problema, leva o aluno a entender o conteúdo melhor, isso se torna uma motivação para a aprendizagem e não um problema, você vai estimulando o raciocínio dele (do aluno), que vai se sentir confortável para fazer da maneira mais conveniente, e induzem situações do cotidiano esclarecendo melhor algumas possibilidades. O propor problemas foi útil para que eu finalmente entendesse a Álgebra Linear. Quando você cria um problema, quando você cria uma questão você sai daquela mesmice de só reproduzir de só mecanicamente responder exercícios e você coloca sua mente para pensar, e nesse pensar que você vê se o aluno realmente compreendeu.

IC- A PP impulsiona tanto o docente quanto o discente a sair da Zona de Conforto.

DSC
Os contras é que você (como professor) tem cada aluno deve ser dado atenção de maneira individual, pois eu acho que os alunos sintam uma certa insegurança de propor um problema ou fiquem presos em problemas mecânicos, o que traz ao professo a responsabilidade e o jogo se cintura de passar essa segurança para o aluno de que ele consegue, é a pessoa ter que sair da zona de conforto (risos), pense numa coisa chata é sair da zona de conforto, mas foi útil para que eu finalmente entendesse a Álgebra Linear. É um desafio para o professor sair dessa zona de conforto. Também acho que você tem que estudar antes a turma em algumas turmas essa metodologia talvez não dê certo.

Questão 3- Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

Ideias Centrais

A Exploração de Problemas proporciona um ensino-aprendizagem de matemática com mais compreensão e motivação.	A Exploração de Problemas proporciona que o professor vá além do conceito matemático inicial.

IC - A Exploração de Problemas proporciona um ensino-aprendizagem de matemática com mais compreensão e motivação.

DSC
A Exploração de Problemas facilita a compreensão, trazendo diversas formas de pensar, nós conseguimos perceber outras coisas, a gente consegue pensar como aquilo (o conceito matemático) está sendo aplicado, conseguimos refletir o que poderia ser feito, se poderia ser resolvido de outra maneira, Exploração de Problemas você entende de onde vem a necessidade daquele conceito para depois conceitua-lo, e assim fica mais claro e interessante, um modo mais diferente de se aprender, não fica aquele negócio (processo de ensino-aprendizagem) mecânico, robotizado. Quando você está resolvendo um problema ou quando você está propondo um problema, faz com que os discentes se sintam confortáveis e isso pode fazer com que eles comecem a gostar de determinado assunto e isso para Álgebra Linear é muito legal, por se tratar de algo tão abstrato.

IC - A Exploração de Problemas proporciona que o professor vá além do conceito matemático inicial.

DSC
Levando em consideração o curso que você fez, eu achei muito bacana porque me relembrou alguns conceitos que eu á tinha esquecido, quando menos esperamos vem novas perguntas e isso resulta em mais conceitos matemáticos onde você só esperava no mínimo um, aquele problema do skate foi bastante interessante nesse sentido.

Questão 4- Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

Ideias Centrais

Faria uso devido a dinamicidade que essa metodologia proporciona em sala de aula.	Faria uso, pois ela potencializa o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

IC - Faria uso devido a dinamicidade que essa metodologia proporciona em sala de aula.

DSC
Sobre explorar problemas é algo que abre a mente da pessoa, o ensino fica dinâmico, torna as coisas mais dinâmicas e isso quebra a barreira que a matemática é só conta. Como eu vi no curso e como eu já tinha vista em outras disciplinas da Universidade, não de uma forma tão aprofundada como eu vi no curso. Fazer com que os alunos se sintam mais interessados pelas aulas.

IC - Faria uso, pois ela potencializa o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

DSC
Eu utilizaria sim, é um método que auxilia no processo de aprendizagem do aluno, proporciona mais entendimento a pessoa, aumentando as chances desse aluno não esquecer aquele assunto, ainda como um meio de avaliação é uma prática viável. Ser professor é também sair da zona de conforto.

Questão 5- O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

Ideia Central

As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas.

IC - As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas.

Faria uso devido a dinamicidade que essa metodologia proporciona em sala de aula.

DSC
Prioritário no ensino não só de Álgebra Linear, mas de quantas disciplinas matemáticas forem possíveis, você (como professor) deve usar em sala de aula, porque tem alguns alunos que possuem dificuldade na Álgebra, alguns tem na Geometria, então se você tem diversas representações e isso facilita a maneira como o aluno vê a matéria, a visualização se torna mais ampla. Você não consegue entender tudo de um conteúdo matemático só vendo algebricamente ou só geometricamente, pois quando você não enxerga um detalhe na geometria você enxerga nas outras e vice-versa. Assim vendo várias formas de uma mesma coisa você compreende melhor, você tem melhor entendimento. Possibilita que o aluno enxergue o problema de diversas maneiras, tornando a visualização mais ampla e compreensível e nós não ficamos presos achando que um conceito abrange uma só representação. Portanto a junção dessas representações que fazem o todo e isso foi sensacional para que eu entendesse o que significa as exigências para saber o que é uma transformação linear ou não.

Questão 6- Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

Ideia Central

Usaria, porque potencializa o processo de ensino-aprendizagem de Matemática

IC - Usaria, porque potencializa o processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

DSC
Sim, eu vou usar, eu achei muito importante essas representações e os alunos precisam ter essa visualização. Se eu aprendi melhor Álgebra Linear com essa variedade de representações, imagina meus alunos com funções ou outras coisas que vou ensinar? Agora se queremos uma representação gráfica, mas não sabemos desenhar muito bem os softwares, os celulares ou outros mecanismos podem auxiliar para isso, a depender da realidade a gente consegue.

Questão 7 - Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

Ideais Centrais

A compreensão dos conceitos do ensino básico através das lentes da Álgebra Linear.	A compreensão de outras disciplinas do ensino superior através da Álgebra Linear como base.

IC - A compreensão dos conceitos do ensino básico através das lentes da Álgebra Linear.

DSC
Os professores tem que saber mais, considero importantes os conceitos de Espaço Vetorial, Transformações Lineares, Matrizes entre outros. Eles são importantes para entender a estrutura da matemática do ensino fundamental e médio.

IC - A compreensão de outras disciplinas do ensino superior através da Álgebra Linear como base.

DSC
Acho fundamental que o professor tenha também essa base de Álgebra Linear para entender outras disciplinas como Estruturas Algébricas e Equações Diferenciais, que podem descrever o mundo lá fora, ajuda a compreender diversos outros campos da matemática mais avançada e mais básica também como foi mostrado no curso.

Análise dos questionários

De acordo com Ferreira (2017a, 2017b) e Prado (2016), o conhecimento de Estruturas Algébricas pode ser usado como principal instrumento para se fazer justificativas formais de propriedades e, até mesmo, de definições trabalhadas na Educação Básica. Ambos os autores ainda afirmam que as Estruturas Algébricas, tais como o Espaço Vetorial, se apresentam de forma bastante significativa nos conteúdos matemáticos da Educação Básica, e que o ensino dessas estruturas, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais criteriosos em relação às hipóteses de propriedades matemáticas e a se preocuparem com a composição da estrutura e dos elementos com que eles estiverem trabalhando.

Essas conclusões, tanto de Ferreira (2017a, 2017b) quanto de Prado (2016), convergem com as conclusões dos discentes que participaram da oficina. Nos DSC's da questão 1 e da questão 7, podemos ver que os alunos, após o desenvolvimento da oficina, consideram importante o conceito de Espaços Vetoriais, uma vez que, para os licenciandos, o conhecimento da Estrutura de Espaço Vetorial proporciona ao futuro professor de Matemática a compreensão acerca da disciplina que ministrará na Educação Básica e, assim, auxiliará no processo de ensino-aprendizagem-avaliação que desenvolverá em sua futura sala de aula, pois esses conceitos (Espaço Vetorial, Transformações Lineares, Matrizes entre outros) são importantes para entender a estrutura da matemática do ensino fundamental e médio.

Os discentes ainda afirmaram que é importante que o futuro professor de matemática tenha, também, essa base de Álgebra Linear para entender outras disciplinas, como Estruturas Algébricas e Equações Diferenciais, que podem descrever o mundo lá fora, ajudar a compreender diversos outros campos da matemática mais avançada e mais básica, como também foi mostrado na oficina, convergindo, ainda, com os trabalhos de Ferreira (2017a, 2017b), Prado(2016) e Dorier (2000).

No que tange à licencianda em Física, que participou da nossa oficina, a mesma dissertou que o conceito de Espaços Vetoriais foi essencial para a compreensão de fenômenos físicos, além de matemáticos (haja vista que este conceito é a base para a física moderna).

Acerca das Representações Múltiplas no Ensino de Espaços Vetoriais, nos Discursos do sujeito coletivo 5 e 6, afirma-se que tais representações tornam o ensino mais compreensível. Os discentes alegam que tanto Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Combinações Lineares ou qualquer outro conceito matemático é bem compreendido se é visto a partir de mais de uma perspectiva, ou ainda, convergindo o que diz Friedlander e Tabach (2001), é na variedade dessas representações que o discente tem a possibilidade de compreender melhor os conceitos da Álgebra. O sujeito coletivo afirmou que não há como enxergar os conceitos de Álgebra Linear apenas com uma única representação, são necessárias outras e isso foi imprescindível para compreender o estudo dos Espaços Vetoriais.

Após a oficina sobre os Espaços Vetoriais, o sujeito coletivo afirmou que optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula, pois alega que, pelo auxílio das representações múltiplas, conseguiu aprender conceitos de Álgebra Linear. Então, o mesmo julgou que os seus futuros discentes também aprenderiam outros conceitos da Educação Básica. Alguns ainda afirmaram que, dependendo do recurso tecnológico, usaria a representação geométrica, mas buscaria sim outros meios.

Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas para o ensino de Espaços Vetoriais e outros conceitos que eles o tangenciam, houve um experiência não tão prolongada, a exemplo de uma disciplina de sessenta ou noventa horas, como regularmente se oferece nos cursos de graduação, mas pela experiência que os discentes tiveram, como se observou através do discursos do sujeito coletivo para as questões 2, 3 e 4, podemos inferir algumas informações sobre essa vivência.

Sobre a experiência dos discentes com a Exploração de Problemas, no que tange às indagações que fazíamos gerando novas dúvidas, novos problemas e novos conceitos, os discentes afirmaram que, ao estudar Espaços Vetoriais, a compreensão é facilitada. Mesmo considerando a Álgebra Linear um conceito abstrato, o sujeito coletivo afirma que conseguiu aprender de forma reflexiva, entendendo o conceito e compreendendo sua necessidade, ou seja, o porquê esse conceito veio a existir. Ainda sobre a experiência de se explorar problemas estudando Espaços Vetoriais, os discentes pontuaram que, quando menos esperavam, novas perguntas surgem e as mesmas resultam em novos conceitos matemáticos, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, fazendo com que os mesmos se interessassem mais pelos conceitos estudados, convergindo com o que Andrade (1998) disserta:

> há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola [...] e por isso pode ir outra vez e mais outra vez (ANDRADE, 1998, p. 27).

No que tange à experiência com a Proposição de Problemas, os discentes evidenciaram que torna o processo de ensino-aprendizagem de Matemática mais reflexivo. No DSC referente à questão 2, encontramos a seguinte fala:

> o propor problemas colocou a gente para pensar, para refletir sobre a matemática que está por traz do problema, leva o aluno a entender o conteúdo melhor, isso se torna uma motivação para a aprendizagem e não um problema. Você vai estimulando o raciocínio dele (do aluno), que vai se sentir confortável para fazer da maneira mais conveniente, e induzem situações do cotidiano, esclarecendo melhor algumas possibilidades. O propor problemas foi útil para que eu, finalmente, entendesse a Álgebra Linear.

Foi inferido pelo DSC que a PP impulsiona tanto o docente quanto o discente a sair da Zona de Conforto, isto é, passar a uma postura docente, na qual seja possível ocorrer riscos, podendo haver incerteza, haver uma disposição do professor em realizar um trabalho mais efetivo e do aluno em deixar de ser passivo para ser ativo no processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Isso, de acordo com o sujeito coletivo, foi essencial para que o mesmo entendesse os conceitos de Espaços Vetoriais e os outros que o tangenciam.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo analisar as contribuições da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, ao ensino de Espaços Vetoriais na licenciatura em Matemática. E, tendo como norte nosso percurso teórico-metodológico, cabe, novamente, fazermos o questionamento que impulsionou esta pesquisa: Que contribuições a Metodologia da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas (ERP), aliada à Teoria das Representações Múltiplas de Álgebra, pode proporcionar ao processo de ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais na licenciatura em Matemática?

Para fundamentarmos nosso trabalho e o situarmos nas pesquisas atuais, analisamos algumas pesquisas sobre o ensino de Álgebra Linear na formação inicial do professor de Matemática, bem como pesquisas que tinham como foco o ensino de Espaços Vetoriais. A partir dessa análise, foi possível identificar uma necessidade de um ensino de Espaços Vetoriais na Licenciatura mais compreensivo acerca da importância do estudo dessa Estrutura Algébrica para subsidiar suas futuras práticas docentes.

O ensino de Espaços Vetoriais, normalmente, compreende outros conceitos de Álgebra Linear que o tangenciam, tais como: Operações de Adição e Multiplicação por Escalar, Subespaços Vetoriais, Combinação Linear, Dependência Linear, Base e Transformações Lineares. Acerca das análises das pesquisas que trataram sobre esses conceitos, ficou perceptível a necessidade de um ensino que contemplasse as Representações Múltiplas de Álgebra apresentadas por Friedlander e Tabach (2001), a saber: a representação verbal, a representação algébrica, a representação numérica e a representação gráfica.

O levantamento de dados para atender aos objetivos desta pesquisa foi realizado por meio de uma Oficina ministrada através do aplicativo WhatsApp, devido a algumas restrições tendo em vista a Pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2. Os sujeitos da pesquisa, então, foram sete licenciandas do sexo feminino de Universidades do Estado da Paraíba. No que tange à formação acadêmica, são seis licenciandas em Matemática e uma licencianda em Física, apenas três delas já havia cursado a disciplina de Álgebra Linear e nenhum dos sujeitos já exerce a função de professor de Matemática. Das sete alunas, apenas seis concluíram a oficina, sendo que a última não participou do último momento, alegando que, infelizmente, não iria poder por causa de muitas atribuições extracurriculares.

Sobre a metodologia da pesquisa, foi utilizada uma abordagem qualitativa, na modalidade de pesquisa pedagógica, em que o professor/ministrante da oficina é o próprio pesquisador. Ao final da oficina, foi enviado um questionário, com o intuito de entender melhor a compreensão dos discentes para auxiliar no cumprimento dos objetivos da pesquisa. A fim de analisar este questionário, foi utilizado, como ferramenta, o Discurso do Sujeito Coletivo (DSC), desenvolvido por Fernando Lefèvre e Ana Maria Cavalcanti Lefèvre (LEFÈVRE; LEFÈVRE, 2005), ambos pesquisadores da Universidade de São Paulo (USP).

A partir da finalização da pesquisa de campo e análise dos Discursos do Sujeito Coletivo, foi possível constatar que a proposta metodológica de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas, juntamente com as Representações Múltiplas de Álgebra, contribui para a promoção de um processo educativo reflexivo e dinâmico de Espaços Vetoriais, voltado a futuros professores de Matemática.

Acreditamos, diante do que foi visto e vivenciado, que a ação pedagógica, ancorada na relação Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado, criada por Andrade (1998), foi fundamental para o processo de ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais. Os questionamentos/problematizações apresentados no decorrer do processo de codificação e descodificação dos problemas foram extremamente importantes para a realização de um trabalho reflexivo mais aprofundado sobre os conceitos da Álgebra Linear. Como destaca Andrade (2017, p. 388-389): “Nos primeiros momentos com a exploração de problemas, o professor-pesquisador precisa constantemente impulsionar o trabalho para que os alunos, com sua mediação-refutação, possam ir cada vez mais além da solução do problema”.

Destaca-se, então, a importância da mediação-refutação do pesquisador, que foi proporcionada às discentes na Oficina, sobretudo, nos diálogos, quando os alunos apontam que essas interações os fazem refletir sobre o seu próprio processo de ensino-aprendizagem e sobre sua futura atuação como docentes na Educação Básica. Como podemos observar no DSC da questão 4, “*como eu já tinha visto em outras disciplinas da Universidade, não de uma forma tão aprofundada como eu vi no curso. Fazer com que os alunos se sintam mais interessados pelas aulas*.” Essa reflexão é o que, muitas vezes, falta nas salas de aulas do Ensino Superior, não só em disciplinas pedagógicas e estágios ministrados por professores-pesquisadores de Educação Matemática, mas também nas disciplinas de Álgebra Linear, Análise Real, Equações Diferenciais, Álgebra Abstrata, dentre outras da área de Matemática.

No que concerne à exploração de problemas (no que diz respeito ao ato de gerar mais questionamentos durante e depois do processo de resolução do problema), foi possível notar, no desenvolver dos problemas e no aplicar da oficina, que uma pequena quantidade de problemas, aliada ao processo de exploração, pode gerar oportunidade de construir mais conceitos e ir além (além até daquilo que esperamos), como podemos verificar no DSC referente à questão 3: “quando menos esperamos, vem novas perguntas e isso resulta em mais conceitos matemáticos onde você só esperava no mínimo um”. Por exemplo, quando o terceiro problema foi aplicado na oficina, era esperado construir o conceito de Espaços Vetoriais, mas, em uma exploração por parte da aluna A2, foi construída uma ideia de operação binária e de estrutura algébrica. Tal ação proporcionou um melhor entendimento do que se tratava os Espaços Vetoriais e não foi esperado chegar a essa parte. Isso converge com o que discorre Andrade (1998, p.27) que há um prazer da parte tanto do discente quanto do docente envolvidos no processo de exploração, onde há um

> há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola [...] e por isso pode ir outra vez e mais outra vez (ANDRADE, 1998, p. 27).

Pelos Discursos do Sujeito Coletivo, se pode inferir que na experiência dos discentes, quando era explorado um problema em Álgebra Linear, tanto o conceito quanto o problema era melhor compreendido. Segundo o DSC da Questão 3, eles afirmam que, na exploração de problemas, “você entende de onde vem a necessidade daquele conceito para depois conceituá-lo”. Com isso, não se apresenta, de maneira direta, uma definição, como se a mesma viesse do nada, mas, sim, apresenta-se a necessidade do conceito, para, então, construí-lo e defini-lo.

Ainda acerca da experiência dos discentes ao explorar problemas em Álgebra Linear, pelos DSC, aferimos que tal vivência é um processo dinâmico, como também discorre Andrade (1998, 2017) em seus trabalhos, causando motivação e interesse pelo conceito que estava sendo construído.

No que se refere à Proposição de Problemas no decorrer da oficina, podemos admitir que foi um desafio, mas que se mostrou, tanto para o pesquisador quanto para os discentes, uma metodologia que potencializa o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Álgebra Linear, tornando-o mais reflexivo. A PP, nesta pesquisa, algumas vezes, foi realizada no início da atividade, outras vezes, no final, mas, de acordo com as próprias discentes, podemos aferir, partindo do DSC referente à questão 2 que: “*dá bastante clareza se o aluno compreendeu ou não o assunto, ajuda a você refletir sobre os detalhes do conteúdo matemático, antes de você fazer o problema, o propor problemas colocou a gente para pensar, para refletir sobre a matemática que está por traz do problema*”. Além desse aspecto, as próprias discentes afirmaram que a PP é vista como um método avaliativo e aconselhável nas aulas sobre Espaços Vetoriais, como podemos verificar no mesmo DSC citado anteriormente: “*o propor problemas* *foi útil para que eu finalmente entendesse a Álgebra Linear [...] você coloca sua mente para pensar, e, nesse pensar, que você vê se o aluno realmente compreendeu*".

A respeito das Representações Múltiplas de Álgebra de Friedlander e Tabach (2001), vimos que elas se mostraram de grande valia para o ensino dos conceitos aqui propostos. Como pesquisadores, podemos perceber que a introdução do conceito através de uma representação numérica foi muito favorável para a compreensão dos conceitos e dos problemas, assim como a transição entre as demais representações, quando são usadas de maneira reflexiva e dialogada.

No que se refere à voz do sujeito coletivo a respeito das RMA, o mesmo discorre, no DSC da questão 5, que o ensino tendo a RMA como ferramenta no ensino-aprendizagem é prioritário não só no ensino de Espaços Vetoriais, mas em quantas disciplinas na área de Matemática forem possíveis a aplicação. Segundo o sujeito coletivo, "*a visualização (dos conceitos matemáticos) se torna mais ampla [...], pois, quando você não enxerga um detalhe na geometria, você enxerga nas outras e vice-versa. Assim, vendo várias formas de uma mesma coisa, você compreende melhor, você tem melhor entendimento*".

Ainda sobre o uso da metodologia de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas aliada às RMA, foi percebido que os discentes conseguiram mesurar a importância do conceito de Espaço Vetorial tanto para uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos que serão ministrados na Educação Básica como também para a entendimento de outras disciplinas da graduação (sendo esta última conclusão advinda das próprias reflexões acerca do que as discentes vivenciaram na oficina e do que elas vivenciaram em seu curso de graduação). Segue um trecho do discurso do sujeito coletivo referente à primeira questão:

> Sim, com certeza, eu considero importante o conceito de Espaços Vetoriais. Eu acredito que, enquanto Educação Básica, ajuda muito para nós introduzirmos um conceito, pois o curso contribuiu para que eu entendesse que funções e matrizes estão conectadas a matrizes e polinômios [...] cada objeto matemático que eu ensinarei lá no ensino fundamental ou no ensino médio não é uma coisa solta, mas é como se fosse uma rede, é uma estrutura. Além de me ajudar a enxergar outras maneiras de ensinar determinados conteúdos, abrindo, assim, um espaço maior para auxiliar em uma compreensão melhor dos alunos. (DSC, questão 1).

Percebeu-se que a ERP foi muito válida para que, através de questionamentos da parte do docente e outros por parte dos próprios participantes, os discentes visualizassem a importância do estudo dos Espaços Vetoriais para a sua formação docente, tanto para os licenciando em Matemática quanto para a licencianda em Física, esta também optou por participar de nossa oficina e concluiu que a mesma a ajudou na compreensão de problemas na sua área, entendendo melhor a matemática que está por trás da Física.

Foi possível observar a concepção de estrutura dos Espaços Vetoriais, modificando o modo como os docentes visualizam os conceitos matemáticos ministrados na Educação Básica. Como foi dito anteriormente, foi possível notar que algo complexo, como Operadores Lineares, é essencial para que o futuro professor de matemática entenda mais profundamente conceitos como simetria, rotação e translação no plano cartesiano.

No que tange aos Operadores Lineares, é viável destacar que optamos por construir primeiro esse conceito, para, posteriormente, construir o conceito de Transformação Linear, visto que, de acordo com Dorier (2000), quando o professor estiver ministrando Álgebra Linear, deve partir de casos mais específicos para mais gerais. De maneira contrária ao que acontece em cursos de AL, ao optamos por construir primeiro o conceito de Operador Linear, isso se mostrou benéfico para o processo de ensino-aprendizagem do conceito.

Concluímos ainda que o que foi transmitido nesta oficina não ficará no passado ou apenas nas páginas de uma dissertação. Como uma afirma a aluna A4 em uma das respostas do questionário: "*vou levar para minha vida*". Foi perceptível, nos discursos do sujeito coletivo, que, além de uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos de Álgebra Linear desenvolvidos, os discentes afirmaram que os usarão em suas respectivas salas de aulas (quando assumirem as mesmas), que farão uso da metodologia que foi trabalhada com eles no decorrer da oficina, pois o que vivenciaram querem passar adiante para os seus discentes.

De acordo com o sujeito coletivo que participou da oficina, a única coisa que os fez refletir sobre o uso ou não dessa metodologia foi o impulsionamento atribuído aos discentes e ao docente, saindo da Zona de Conforto, isto é, da sensação de segurança e certeza que o ensino tradicional proporciona. Segundo o DSC da questão 2: "*pense numa coisa chata é sair da zona de conforto, mas foi útil para que eu, finalmente, entendesse a Álgebra Linear*". Todavia, o próprio sujeito declara que foi útil sair desse estado de "quase-inercia", para que compreendesse os conceitos que foram ministrados.

Sobre a nossa vivência como pesquisador ao desenvolver um trabalho em uma época pandêmica, podemos dizer que não foi fácil, mas o aplicativo WhatsApp se mostrou extremamente útil e eficaz. Foi percebido que os diálogos não ocorrem com tanta frequência, pois o aluno tem um tempo para pensar e postar no grupo o que ele acha como conclusivo em sua reflexão, omitindo os diversos diálogos que uma sala de aula regular e presencial poderia proporcionar. Foi possível notar que sem as tecnologias digitais de informação e comunicação esta pesquisa não poderia ser realizada, dentre as quais, destacamos o próprio WhatsApp e o

Geogebra, sendo o último uma ferramenta indispensável para a mudança de representação tanto do docente quanto de alguns discentes. Cabe a nós ou a outros pesquisadores aplicar os problemas com esta perspectiva metodológica em suas respectivas salas de aula, para que a comunidade científica saiba se os resultados seriam potencializados em um ambiente não remoto.

Nessas condições, acreditamos ter contribuído para a formação dos participantes da Oficina, ao proporcionarmos experiências com a utilização da Resolução-Exploração-Proposição de Problemas como Metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, possibilitando, assim, reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Espaços Vetoriais e por que não dizer da Álgebra Linear, aliada ao uso das Representações Múltiplas de Álgebra, como também reflexões acerca da construção de uma nova postura frente ao ensino desses conceitos.

Encerramos nossas considerações destacando o nosso contentamento em relação às contribuições que a pesquisa oportunizou ao nosso amadurecimento enquanto Educador Matemático e enquanto pessoa. Foi um caminho cheio de felicidades, tristezas, ganhos e perdas, noites em claro de digitação e leitura. Aqui, encontra-se uma parte de mim (pois foram dois anos de dedicação intensa), porém, muito gratificante, tendo em vista a vivência do Mestrado. Certos de que fizemos o nosso melhor para o desenvolvimento da pesquisa, deixamos, aqui, o nosso registro de que nunca deixaremos de buscar melhorias para o ensino-aprendizagem da Matemática onde quer que passemos.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

ANDRADE, S. **A pesquisa em educação matemática, os pesquisadores e a sala de aula: um fenômeno complexo, múltiplos olhares, um tecer de fios.** 2008 461 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2008.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via exploração de problemas e o uso do laboratório de ensino de matemática**. Conferência interamericana de educação matemática. 13. Pernambuco: CIEAM, 2011.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (orgs.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 355-396.

BARBOSA, A, A, S.; CARVALHO, R, N. **O uso do WhatsApp como ferramenta de pesquisa na ead**. CIET: EnPED, São Carlos, maio 2018. ISSN 2316-8722. Disponível em: <https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2018/article/view/148>. Acesso em: 10 out. 2020.

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. Recursos metamatemáticos para o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear: 14 anos de pesquisas do GPE. *In*: BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. (orgs). **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018, p. 50-63.

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Editora Porto, v. 12, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática**. Brasília: 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf >. Acesso em: 10 mar. 2020.

CAI, J.; HWANG, S.; JIANG, C.; SILBER, S. Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. *In*: SINGER, F. M.; ELLERTON, N.; CAI, J. (Orgs). **Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practive.** New York: Springer Science + Business Media New York, 2015, p. 03-32.

CAI, j.; HWANG, S. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. **International Journal of Educational Research**, v. 102, 2020.

CELESTINO, M. R. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

COIMBRA, J. L. **Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear**. 2008. 78 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

CRESPO, S. A collection of problem-posing experiences for prospective mathematics teachers that make a difference. In: SINGER, F. M.; ELLERTON, N.; CAI, J. (Orgs). **Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practive.** New York: Springer Science + Business Media New York, 2015, p. 493-511.

CURY, H. N. **Formação de professores de matemática:** uma visão multifacetada. Porto Alegre: Editora da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2001.

DORIER, J. L. **On the teaching of linear álgebra**. France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DUVAL. R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitive da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S.D.A. (Org). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). São Paulo: Livraria da Física, 2009. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

ELEUTÉRIO, L. F. **Um estudo sobre as concepções de licenciandos em relação ao ensino da matemática**. 2016. 140f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2016.

FERREIRA, N. C. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática**. 2017. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017a.

FERREIRA, N. C.; SILVA, L. E.; MARTINS, E. R. Resolução de Problemas no Ensino Superior. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (orgs.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017b, p. 189-220.
FIORENTINI, D. (Org.) **Formação de professores de matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n.1 (10), p. 78-91, 1993.

FREITAS, T. S. **Um olhar para a resolução de problemas nos encontros nacionais de educação matemática (ENEMs):** delineamento de uma tendência. 2019. 183 f. Tese (Doutorado em Ciência, Tecnologia e Educação) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2019.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting Multiple Representations in Álgebra. *In*: Cuoco, A. A. (org.). **The roles of representation in school mathematics**/ Albert A. Cuoco, Frances R. Curcio. p. cm. — (Yearbook; 2001).

KILPATRICK, J. Variáveis metodológicas em pesquisa sobre resolução de problemas. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (orgs.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 85-108.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica:** do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LEFÉVRE, F.; LEFÉVRE, A. M. C. **O discurso do sujeito coletivo**: um enfoque em pesquisa qualitativa (desdobramentos). 2. ed. Caxias do Sul: Educs, 2005.

LEIVAS, J. C. P. Resolução de problemas envolvendo soma e intersecção de subespaços vetoriais. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 17, 2020, p.01-22.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear.** 3ª ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de matemática via exploração, resolução e proposição de problemas.** 138 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2019.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: Para onde Pende o Pêndulo? **Pró-Posições**, v. 3, n. 1(7), p. 39 – 54, mar. 1992.

MUTAMBARA, H. N.L.; BANLILAL, S. Dealing with the Abstraction of Vector Space Concepts. In: **ICME Monographs: Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra/** Sepideh Steart, Christine Andrews-Larson, Avi Berman, Michelle Zandieh (Organizadores) - Springer International Publishing, 2018.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p.199-218.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F. C. H. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. *In*: ONUCHIC, L. R. *et al*. (Orgs.) **Resolução de Problemas**: teoria e prática. São Paulo: Paco, 2014, p. 53-68.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA -** Boletim de Educação Matemática, v. 25, n. 41, 2011. p. 73–98.

PRADO, E. A. **Álgebra linear na licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da educação básica.** 254. f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2016.

PRADO, E. A.; BIANCHINI, B. L. A Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática. *In*: BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. (orgs). **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018, p. 75-91.

PONTE, J. P.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC, 2009.

POLYA, G**. A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático / G. Polya (1945); tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

SANTOS, E. V. **Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental.** 228. f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2019.

SAVIOLI, A. M.; BERTOLAZI, K. Sistemas de Equações Lineares: perspectivas conceituais e teóricas. In: *In*: BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. (orgs). **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018, p. 33-50.

SBEM. **A formação do professor de matemática no curso de licenciatura**: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Boletim no 21, fevereiro, p. 1-42, 2013.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

SERRAZINA, L. Resolução de Problemas e Formação de Professores: um olhar sobre a situação em Portugal. In: *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (orgs.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 55-84.

SILVA, R. D. **A formação do professor de matemática:** um estudo das representações sociais. Campina Grande: Editora da Universidade Estadual da Paraíba, 2013.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado de Letras, 2014.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. - 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

YIIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim.** Tradução Daniel Bueno. Revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016.

ANEXOS

Anexo 1- Questionário Utilizado

1) Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Se sim, quais as contribuições que essa oficina sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

2) Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

3) Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

4) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

5) O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

6) Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

7) Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

Anexo 2- Respostas de A1 ao Questionário.

1) Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Se sim, quais as contribuições que essa oficina sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

   R: Sim, eu percebi que ele pode ser aplicado em diversas situações na Física, trazendo um melhor entendimento dos problemas.

2) Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

   R: De fato, é muito interessante envolver situações-problemas, já que estas induzem situações do cotidiano, esclarecendo melhor, algumas possibilidades que não visualizamos quando só praticamos cálculos soltos.

3) Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

   R: É muito útil, pois facilita a compreensão, trazendo diversas formas de pensar.

4) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

   R: Sim, o ensino fica dinâmico e assim os alunos aprendem mais, além de aumentar as chances desse mesmo aluno não esquecer aquele assunto.

5) O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

   R: A visualização torna mais ampla e mais compreensível.

6) Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

R: Sim, os alunos precisam ter essa visualização, e pra isso é bom usar de diversas formas.

7) Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

R: O conceito de Espaço Vetorial, transformações lineares, matrizes, entre outros.

Anexo 3- Respostas de A2 ao Questionário.

1) Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Quais dessas contribuições que essa oficina pôde dar à sua formação sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

   R: Sim com certeza. Inúmeras, através da compreensão de Espaço Vetorial eu posso entender que cada coisa, ou melhor, cada objeto matemático que eu ensinarei lá no ensino fundamental ou no ensino médio não é uma coisa solta mas é como se fosse uma rede, está tudo interligado, como você disse naquele vídeo, é uma estrutura. E o curso me proporcionou isso.

2) Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

   R: Eu achei muito diferente sabe, nunca tinha feito isso, porque normalmente os professores pedem pra você resolver e não para você fazer o problema e isso é diferente, mas ao mesmo tempo legal, porque isso ajuda você refletir sobre os detalhes do conteúdo matemático antes de você fazer o problema.

3) Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

   R: É algo bacana, porque quando menos esperamos vem novas perguntas e isso resulta em mais conceitos matemáticos, acho que se a pessoa não para parece que não vai ter fim. (risos).

4) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

   R: Sim, com certeza. Porque torna as coisas mais dinâmicas, dá mais entendimento a pessoa.

5) O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

R: Eu não acho que você “pode” usar em sala de aula, eu acho que você deve usar em sala de aula, pois é algo que abre a mente, porque quando você não enxerga um detalhe na geometria você enxerga nos outros e vice-versa.

6) Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

R: Sim, eu vou usar, com certeza. Se eu aprendi melhor Álgebra Linear com essa variedade de representações, imagina meus alunos com funções ou outras coisas que vou ensinar? Com certeza.

7) Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

R: Além de entender essa estrutura de espaço vetorial que fundamental para entender a estrutura da matemática do ensino fundamental e médio, acho fundamental que o professor tenha também essa base da álgebra linear para entender outras disciplinas como Equações Diferenciais Ordinárias e Estruturas Algébricas.

Anexo 4- Respostas de A3 ao Questionário.

1) Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Quais dessas contribuições que essa oficina pôde dar à sua formação sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

   R: Eu acredito que sim, que seja importante para minha formação, independente se eu for ministrar aulas na educação básica ou não. Qualquer conceito ou qualquer formação ou estudo é importante pra mim. Enquanto Educação Básica eu acredito que ajuda muito para agente introduzir um conceito, seja de função, ou até como você estava fazendo nos problemas que você mandava, de matrizes, ou de outros conceitos interessantes. Eu acredito que é importante sim.

2) Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

   R: Eu gosto, inclusive eu pretendo ter essa metodologia, eu gosto que eles percebam que eles precisam de um conceito a mais. Isso se torna uma motivação para a aprendizagem e não um problema, que normalmente o uso dos exercícios é algo ruim. Induzindo eles para o problema pra colocar o conteúdo, eu acredito que seja uma ótima metodologia, mas possa ser que não dê certo, depende da turma. Acho que você tem que estudar antes a turma porque em algumas turmas essa metodologia talvez não dê certo.

3) Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

   R: Levando em consideração o curso que você fez, eu achei muito bacana porque me relembrou alguns conceitos que eu já tinha esquecido. Aquele problema do skate foi bastante interessante. E isso é muito bom porque dá pra gente ver o que agente conhece do assunto.

4) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

R: Eu sim, apoio gosto, acho que resolução de problemas, a exploração no ensino-aprendizagem e ainda como um meio de avaliação é uma prática viável, mesmo eu ainda não tenha uma turma minha de maneira própria, mas quando tiver vou usar sim como prática pras minhas aulas, porque acredito que é diferente, eu gosto do ensino tradicional até certo ponto, que acho que não devo deixar de lado o ensino tradicional, mas mesclar com estratégias de ensino e ensino exploratório seria a união perfeita para uma boa, aprendizagem. Eu só vou saber se teoria está certa quando eu for para sala de aula, mas eu espero que sim.

5) O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

R: Eu acho que ajuda né, porque tem alguns alunos tem dificuldade na álgebra, alguns tem na geometria, então se você tem diversas representações isso facilita a maneira como aluno vê a cadeira, a matéria. Então acho que é muito bom, uma ótima forma de ter um recurso já que cada aluno compreende de forma distinta. Se um não entendeu essa parte algébrica, vamos para a geométrica. É muito bom ter mais de uma opção.

6) Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

R: Acho muito importante essas representações, eu usaria sim.

7) Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

R: Não respondeu.

Anexo 5- Respostas de A4 ao Questionário.

1) Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Quais dessas contribuições que essa oficina pôde dar à sua formação sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

   R: Sim, eu considero o conceito de Espaços Vetoriais importante para minha formação quanto professora. E o curso trouxe muitas contribuições no sentido de eu enxergar outras maneiras de ensinar determinados conteúdos e ver também que por trás da Álgebra tem muitas coisas que podem ser estudas, além dos conceitos você pode explorar um problema de diversas outras formas e você pode instigar o aluna a refletir sobre o problema, dentre outras coisas. Ele contribuiu (o curso) de uma maneira muito positiva e eu acredito que vou levar isso pra minha vida, que é você sempre estimular que o aluno pense como sair, deixar o aluno livre, não determinar uma fórmula de como vai ser resolvido o problema, porque assim tanto o aluno aprende como você pode aprender com o aluno, pois o aluno pode chegar com uma resposta que você não daria e a resposta pode estar correta.

2) Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

   R: A proposição de problema quando introduzida no assunto tentar fazer aquele problema, você vai estar estimulando o raciocínio dele, vai se sentir confortável para ele fazer da maneira mais conveniente, não isso de você seguir aquela regra para chegar naquele resultado, e mesmo que nesse processo o aluno faça algo errado ele mesmo vai corrigir esse erro. Os contras é que eu acho que cada aluno deve ser dado atenção de maneira individual, mas tirando isso é uma ótima ferramenta para auxiliar na aprendizagem dos alunos.

3) Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

R: A gente sabe que o ensino da Álgebra Linear em si, tanto no ensino fundamental, médio ou superior é visto como algo técnico e abstrato, uma vez que nós introduzimos essa exploração de problemas, nós conseguimos perceber outras coisas, a gente consegue pensar como aquilo está sendo aplicado, a gente consegue refletir o que poderia ser feito, se poderia ser resolvido de outra maneira, aí isso trás muitos pontos positivos porque não fica aquele negócio mecânico robotizado, em que você só vai lá e responde. E isso pode trazer muitos benefícios no sentido de que muitas pessoas, quando você está resolvendo um problema ou quando você está propondo um problema, se sintam mais confortáveis isso pode fazer com que elas comecem a gostar de determinado assunto, ai eu acredito que isso pra Álgebra Linear é muito legal, por se tratar de algo tão abstrato.

4) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

R: Utilizaria sim, porque como eu vi no curso e como eu já tinha visto em outras disciplinas da Universidade, não de uma forma tão aprofundada como eu vi no curso, nós podemos tirar muito proveito disso e fazer com que os alunos se sintam mais interessados pelas aulas e nós conseguimos quebrar a barreira que a matemática é só conta, uma vez que nós estamos propondo que os alunos pensem por si só, que eles se saiam daquele problema. Na resolução de problemas encontramos outras dinâmicas fazendo com que a aula fique mais leve e até mais divertida, tanto para o aluno quanto para o professor.

5) O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

R: Quando a gente usa diversas representações, aquela algébrica, numérica, geométrica e tantas outras que a gente tem, nós possibilitamos que o aluno enxergue o problema de diversas maneiras e isso é legal, porque você pode resolver o problema só por continhas e o outro aluno pode encontrar uma solução correta em uma representação gráfica. Então o aluno verá que não possui apenas um caminho para ver aquele problema, para saber como ele se comporta. Então é muito legal nós trabalharmos com mais de uma ferramenta para um determinado assunto, para um determinado conteúdo que assim os alunos eles vão conseguir enxergar de diversas maneiras e não de uma maneira isolada.

6) Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

R: A depender da realidade a gente consegue partir para essas diversas representações, mas aí é tudo uma questão social, uma questão de econômica, eu diria que a palavra certa é, podemos tentar readaptar o uso dessas representações de acordo com a realidade da escola, por exemplo, nós queremos uma representação gráfica, mas não sabemos desenhar muito bem os softwares, os celulares ou outros mecanismos podem nos auxiliar para isso, mas não é toda escola que teremos esse material, aí as outras representações podem sim ser utilizadas, mas sim de maneira correta.

7) Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

R: Os pontos positivos da Álgebra Linear na formação de professores é que você começa a enxergar a matemática abstrata entre si, é um mundo que você não está adaptado quando você está no ensino médio, por exemplo, porque a Álgebra do ensino médio para a do ensino superior é completamente diferente, agora os pontos negativos é que a Álgebra em si carrega um peso que não deveria carregar de ser complicada, mas acredito que ela não é complicada pelo conteúdo em si, mas sim da maneira como ela é passada. Poderia pensar como readaptar o ensino da Álgebra pare que mais pessoas se identifiquem a área.

Anexo 6- Respostas de A5 ao Questionário.

1) Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Quais dessas contribuições que essa oficina pôde dar à sua formação sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

   R: Considero importante sim, o curso contribuiu para que eu entendesse que funções e matrizes estão conectadas sabe, acho isso muito legal, tipo, coisas nada haver, quem diria que matrizes e polinômios se comportam de maneira similar, é aquilo que você falou no vídeo, a ideia de estrutura.

2) Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

   R: De primeira foi algo muito estranho, porque você ter que dar o problema e não resolver um, nossa foi diferente, mas foi legal, foi bacana, colocou a gente para pensar, para refletir sobre a matemática que está por traz do problema. Os prós foi isso que falei anteriormente e os contras é a pessoa ter que sair da zona de conforto (risos), pense numa coisa chata é sair da zona de conforto, mas foi útil para eu entendesse e finalmente entendesse a Álgebra Linear.

3) Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

   R: Sobre explorar problemas é algo tipo que abre mente da pessoa, não só abre mais explode, porque quando você pensa que acabou, na verdade ainda não acabou e cada vez aparece mais conceitos matemáticos onde você só esperava no mínimo um.

4) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

   R: Sim, vou usar sim, por todos os motivos que falei anteriormente.

5) O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

R: Prioritário no ensino não só de Álgebra Linear, mas de quantas disciplinas matemáticas forem possíveis, por que, tipo, você não consegue entender tudo de um conteúdo matemático só vendo algebricamente ou só geometricamente, a junção desse mais as das outras representações que fazem o todo e isso foi sensacional para eu entender o que significava as exigências para saber o que é uma transformação linear ou não.

6) Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

R: Sim, pelo mesmo motivo que falei anteriormente, elas dão uma completude no ensino, na aprendizagem e eu acho que também da avaliação, pois tipo, se você realmente entendeu o que é uma transformação linear de forma algébrica você consegue explicar ela de maneira geométrica, assim como nós fizemos no curso.

7) Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

R: Além dessa ideia de estrutura o professores ele tem que saber mais sabe, tipo, entender que a Álgebra Linear ela auxilia na compreensão das Equações Diferenciais, que podem descrever o mundo lá fora, ajuda a compreender diversos outros campos da matemática mais avançada e mais básica também como foi mostrado no curso.

Anexo 7- Respostas de A6 ao Questionário.

1) Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Quais dessas contribuições que essa oficina pôde dar à sua formação sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

R: Eu considero importante o conceito de Espaços Vetoriais, porque abre um leque maior para o professor ter de exemplos, e de situações que ele pode evidenciar em sala de aula, não ficando preso a um tipo de representação só, a um tipo de exemplo só, abrindo assim um espaço maior para auxiliar em uma compreensão melhor dos alunos. Então acho esse conceito muito importante para os professores aprenderem, tanto é que está na nossa grade curricular em Álgebra Linear.

2) Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

R: O método de proposição de problema ele se torna um método bastante interessante, pois leva o aluno a entender o conteúdo melhor, porque quando você cria um problema, quando você cria uma questão você sai daquela mesmice de só reproduzir de só mecanicamente responder exercícios e você coloca sua mente para pensar, e nesse pensar que você vê se o aluno realmente compreendeu, porque quando conseguimos propor um problema, quando conseguimos fazer uma pergunta sobre determinado assunto, compreendendo o processo de resolução daquela pergunta, então você evidencia e você prova que você realmente e que aquele conceito está bem fixo na sua mente.

Sobre os prós e os contras, evidencia bastante, dá bastante clareza se o aluno compreendeu ou não o assunto e os contras eu acho que os alunos sintam uma certa insegurança de propor um problema ou fiquem presos em problemas mecânicos, o que trás ao professor a responsabilidade e o jogo de cintura de passar essa segurança para o aluno de que ele consegue, que vá, que não é algo tão difícil, que ele vai conseguir e de valorizar as simples perguntas dos alunos e que eles possam se acostumar com esse método, que é um método novo que os alunos já estão acostumados a fazer exercícios mecânicos, então tudo que é novo tira a gente do conforto então é um desafio para o professor sair dessa zona de conforto.

3) Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

R: O método de exploração de problemas no ensino da Álgebra Linear se tornou bastante interessante, eu já havia cursado a disciplina de Álgebra Linear, inclusive meu trabalho de conclusão de curso ele é em Álgebra Linear. E a exploração de problemas foi um método novo, foi um método bastante interessante de se aprender os conceitos, foi um método diferente de se ver aqueles conceitos e assim, que de certa forma empolga, de certa forma sai aquela mesmice de você ver, definição, exemplo, e novamente definição, exemplo. Você quando explora como um exemplo antes para você entender aquele conceito, entender de onde vem a necessidade daquele conceito para depois conceitua-lo, e assim mais claro e assim fica mais interessante, um modo mais diferente de se aprender.

4) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

R: Sim, eu utilizaria do método em sala de aula, porque como eu disse é um método bastante interessante, é um método que traz uma novidade, um modo diferente de se aprender e um método que auxilia no processo de aprendizagem do aluno, então eu utilizaria sim, tendo em vista que iriam surgir dificuldades por ser um método que a maioria dos professores não utilizam, mas ser professor é também sair da zona de conforto.

5) O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

R: O uso de diversas representações é muito eficiente, no meu trabalho de conclusão de curso eu tento também fazer essas diversas representações, para que nós não fiquemos presos achando que um conceito ele abrange uma só representação, mas você mostrando todas as formas de representação você abre a mente do aluno de que está estudando aquele conceito para uma melhor compreensão, você vendo várias formas de uma mesma coisa você compreende melhor, você tem um melhor entendimento.

6) Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

R: Com certeza eu utilizaria de diversas representações em sala de aula, porque como eu disse anteriormente, auxilia no processo de entendimento do aluno, auxilia na compreensão dos conceitos, você vê várias formas de uma mesma coisa. Então com toda certeza me utilizaria. Às vezes você com uma expressão numérica você não entende bem, aí você vê a representação gráfica então você compreende, diz "ahh então é isso", você dá um norte, já clareia sua mente. Então com certeza me utilizaria, e me utilizarei.

7) Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

R: Não respondeu.

Anexo 8- Instrumentos de análise do discurso (IAD-1 e IASD-2)

Questão 1- Você considera o conceito de Espaços Vetoriais importante para sua formação como professor da Educação Básica? Quais dessas contribuições que essa oficina pôde dar à sua formação sobre Espaços Vetoriais pôde dar à sua formação?

Ideias Centrais

Aplicação dos Espaços Vetoriais a Física	Compreensão do conceito de Estrutura.

Questão 1 – IAD1

Expressões-Chave	Ideias Centrais	Ancoragem
A1: Sim, eu percebi que ele pode ser aplicado em diversas situações na Física, trazendo um **melhor entendimento dos problemas**.	Melhor compreensão de problemas físicos. A	Aplicabilidade dos Espaços Vetoriais a Física. A
A2: Sim, com certeza. Inúmeras, através da **compreensão de Espaço Vetorial eu posso entender** que cada coisa, ou melhor, cada objeto matemático que eu ensinarei lá no ensino fundamental ou no ensino médio não é uma coisa solta mas é como se fosse uma rede, está tudo interligado, como você disse naquele vídeo, **é uma estrutura.** E o curso me proporcionou isso.	Compreensão da estrutura dos conceitos que lecionará B	O fato de entender a estrutura de Espaço Vetorial através do método utilizado no curso fará a mesma fazer uso dessa metodologia quando for lecionar. B
A3: Eu acredito que sim, que seja importante para minha formação, independente se eu for ministrar aulas na educação básica ou não. Qualquer conceito ou qualquer formação ou estudo é importante pra mim. Enquanto Educação Básica eu acredito que ajuda muito para agente **introduzir um conceito**, seja de função, ou até como você estava fazendo nos problemas que você mandava, de matrizes, ou de outros conceitos interessantes. Eu acredito que é importante sim.	Melhor compreensão dos conceitos que serão ministrados na Educação Básica e maneiras de ensiná-los. B	
A4: Sim, eu considero o conceito de Espaços Vetoriais importante para minha formação quanto professora. E o curso trouxe muitas contribuições no sentido de **eu enxergar outras maneiras de ensinar** determinados	Uma nova metodologia de ensino e melhor compreensão da Álgebra. B	O curso maneira com a qual enxerga não só os EV, mas também a matemática e seu ensino.

conteúdos e ver também que **por trás da Álgebra tem muitas coisas que podem ser estudas**, além dos conceitos você pode explorar um problema de diversas outras formas e você pode instigar o aluna a refletir sobre o problema, dentre outras coisas. Ele contribuiu (o curso) de uma maneira muito positiva e eu acredito que vou levar isso pra minha vida, que é você sempre estimular que o aluno pense como sair, deixar o aluno livre, não determinar uma fórmula de como vai ser resolvido o problema, porque assim tanto o aluno aprende como você pode aprender com o aluno, pois o aluno pode chegar com uma resposta que você não daria e a resposta pode estar correta.		B
A5: Considero importante sim, o curso contribuiu para que eu entendesse que funções e matrizes estão conectadas sabe, acho isso muito legal, tipo, coisas nada haver, quem diria que matrizes e polinômios se comportam de maneira similar, é aquilo que você falou no vídeo, a **ideia de estrutura**.	Compreensão do conceito de estruturas entre diversos conceitos matemáticos. B	
A6: Eu considero importante o conceito de Espaços Vetoriais, porque **abre um leque maior para o professor ter de exemplos e de situações que ele pode evidenciar em sala de aula**, não ficando preso a um tipo de representação só, a um tipo de exemplo só, abrindo assim um espaço maior para auxiliar em uma compreensão melhor dos alunos. Então acho esse conceito muito importante para os professores aprenderem, tanto é que está na nossa grade curricular em Álgebra Linear.	Melhor compreensão do que lecionará na Educação Básica. B	

IAD-2

Grupo A: Aplicação dos Espaços Vetoriais a Física

Expressões-Chave	DSC
A1: Sim, eu percebi que ele pode ser aplicado em diversas situações na Física, trazendo um melhor entendimento dos problemas.	Sim, eu percebi que ele pode ser aplicado em diversas situações na Física, trazendo um melhor entendimento dos problemas.

Grupo B: Compreensão do conceito de Estrutura.

Expressões-Chave	DSC
A2: Sim, com certeza. Cada objeto matemático que eu ensinarei lá no ensino fundamental ou no ensino médio não é uma coisa solta, mas é como se fosse uma rede, é uma estrutura. **A3**: sim. Enquanto Educação Básica eu acredito que ajuda muito para a gente introduzir um conceito. **A4:** Sim, Eu enxergar outras maneiras de ensinar determinados conteúdos. **A5: S**im. O curso contribuiu para que eu entendesse que funções e matrizes estão conectadas. Matrizes e polinômios se comportam de maneira similar, Ideia de estrutura. **A6:** Eu considero importante o conceito de Espaços Vetoriais, Abre um leque maior para o professor ter de exemplos e de situações que ele pode evidenciar em sala de aula, Abrindo assim um espaço maior para auxiliar em uma compreensão melhor dos alunos.	Sim, com certeza, eu considero importante o conceito de Espaços Vetoriais. Eu acredito que enquanto Educação Básica ajuda muito para nós introduzirmos um conceito, pois o curso contribuiu para que eu entendesse que funções e matrizes estão conectadas e matrizes e polinômios se comportam de maneira similar abre um leque maior para o professor ter exemplos para o professor ter de exemplos e de situações que ele pode evidenciar em sala de aula. O curso me ajudou a compreender que cada objeto matemático que eu ensinarei lá no ensino fundamental ou no ensino médio não é uma coisa solta, mas é como se fosse uma rede, é uma estrutura. Além de me ajudar a enxergar outras maneiras de ensinar determinados conteúdos, abrindo assim um espaço maior para auxiliar em uma compreensão melhor dos alunos.

Questão 2- Faça um comentário sobre a Proposição de Problemas para introduzir um assunto matemático, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

Ideias Centrais

A PP proporciona um processo de ensino-aprendizagem da Matemática mais proveitoso.	A PP impulsiona tanto o docente quanto o discente a sair da Zona de Conforto.

Questão 2 – IAD1

Expressões-Chave	Ideias Centrais	Ancoragem
A1: De fato, é muito interessante envolver situações-problemas, já que estas **induzem situações do cotidiano**, esclarecendo melhor algumas possibilidades que não visualizamos quando só praticamos cálculos soltos.	Possibilita a introdução de situações do cotidiano. A	
A2: Eu achei muito diferente sabe, nunca tinha feito isso, porque normalmente os professores pedem pra você resolver e não para você fazer o problema e isso é diferente, mas ao mesmo tempo legal, porque isso ajuda você **refletir sobre os detalhes do conteúdo matemático** antes de você fazer o problema.	Proporciona mais reflexão acerca do conteúdo estudado. A	
A3: Eu gosto, inclusive eu pretendo ter essa metodologia, eu gosto que eles percebam que eles precisam de um conceito a mais. Isso se torna uma **motivação** para a aprendizagem e não um problema, que normalmente o uso dos exercícios é algo ruim. Induzindo eles para o problema pra colocar o conteúdo, eu acredito que seja uma ótima metodologia, **mas possa ser que não dê certo, depende da turma**. Acho que você tem que estudar antes a turma porque em algumas turmas essa metodologia talvez não dê certo.	(1ª Ideia) A proposição de problemas possibilita motivação a turma. A (2 Ideia) A proposição de problemas depende da turma. B	Um despertar para o ensino exploratório. A
A4: A proposição de problema quando introduzida no assunto tentar fazer aquele problema, você vai estar **estimulando o raciocínio** dele, vai se sentir confortável para ele fazer da maneira mais conveniente, não isso de você seguir aquela regra para chegar	(1ª Ideia) A proposição de problemas estimula o raciocínio do aluno, proporcionando reflexão e até autocorreção da parte do aluno.	O sair da Zona de Conforto. B

naquele resultado, e mesmo que nesse processo o aluno faça algo errado **ele mesmo vai corrigir esse erro**. Os contras é que eu acho que cada aluno deve **ser dado atenção de maneira individual**, mas tirando isso é uma ótima ferramenta para auxiliar na aprendizagem dos alunos.	A (2ª Ideia) A proposição de problemas impulsiona o docente a sair da Zona de Conforto. B	
A5: De primeira foi algo muito estranho, porque você ter que dar o problema e não resolver um, nossa foi diferente, mas foi legal, foi bacana, **colocou a gente para pensar,** para refletir sobre a matemática que está por traz do problema. Os prós foi isso que falei anteriormente e os contras é a pessoa ter que sair da zona de conforto (risos), pense numa coisa chata é **sair da zona de conforto**, mas foi útil para eu entendesse e finalmente **entendesse a Álgebra Linear**.	(1ª Ideia) A proposição de problemas proporciona o pensamento reflexivo. A (2ª Ideia) A proposição de problemas impulsiona o docente a sair da Zona de Conforto. B (3ª Ideia) A proposição de problemas é favorável ao processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. A	O sair da Zona de Conforto. B
A6: O método de proposição de problema ele se torna um método bastante interessante, pois **leva o aluno a entender o conteúdo** melhor, porque quando você cria um problema, quando você cria uma questão você sai daquela mesmice de só reproduzir de só mecanicamente responder exercícios e você coloca sua mente para pensar, e nesse pensar que **você vê se o aluno realmente compreendeu**, porque quando conseguimos propor um problema, quando conseguimos fazer uma pergunta sobre determinado assunto, compreendendo o processo de resolução daquela pergunta, então você evidencia e você prova que você realmente e que aquele conceito está bem fixo na sua mente. Sobre os prós e os contras, evidencia bastante, dá bastante clareza	(1ª Ideia) A proposição de problemas proporciona uma melhor compreensão do conceito matemático trabalhado. A (2ª Ideia) A proposição de problemas é um ótimo método de avaliação do conceito matemático. A (3ªIdeia) A proposição de problemas impulsiona o docente a sair da Zona de Conforto.	. O sair da Zona de Conforto. B

se o aluno compreendeu ou não o assunto e os contras eu acho que os alunos sintam uma certa insegurança de propor um problema ou fiquem presos em problemas mecânicos, o que traz ao professor a responsabilidade e o jogo de cintura de passar essa segurança para o aluno de que ele consegue, que vá, que não é algo tão difícil, que ele vai conseguir e de valorizar as simples perguntas dos alunos e que eles possam se acostumar com esse método, que é um método novo que os alunos já estão acostumados a fazer exercícios mecânicos, então tudo que é novo tira a gente do conforto então é um desafio para o **professor sair dessa zona de conforto.**	B	

IAD-2

Grupo A: A PP proporciona um processo de ensino-aprendizagem da Matemática mais proveitoso.

Expressões-Chave	DSC
A1: Estas induzem situações do cotidiano, esclarecendo melhor algumas possibilidades. **A2**: Isso ajuda você refletir sobre os detalhes do conteúdo matemático antes de você fazer o problema. **A3:** Isso se torna uma motivação para a aprendizagem e não um problema. **A4:**você vai estar estimulando o raciocínio dele, vai se sentir confortável para ele fazer da maneira mais conveniente. **A5:** Colocou a gente para pensar, para refletir sobre a matemática que está por traz do problema. Mas foi útil para eu entendesse e finalmente entendesse a Álgebra Linear. **A6:** Leva o aluno a entender o conteúdo melhor. Quando você cria um problema, quando você cria uma questão você sai daquela mesmice de só reproduzir de só mecanicamente responder exercícios e você coloca sua mente para pensar, e nesse pensar	Sobre a Proposição de Problemas, em seus Prós, evidencia bastante, dá bastante clareza se o aluno compreendeu ou não o assunto, ajuda a você refletir sobre os detalhes do conteúdo matemático antes de você fazer o problema, o propor problemas colocou a gente para pensar, para refletir sobre a matemática que está por traz do problema, leva o aluno a entender o conteúdo melhor, isso se torna uma motivação para a aprendizagem e não um problema, você vai estimulando o raciocínio dele (do aluno), que vai se sentir confortável para fazer da maneira mais conveniente, e induzem situações do cotidiano esclarecendo melhor algumas possibilidades. O propor problemas foi útil para que eu finalmente entendesse a Álgebra Linear. Quando você cria um problema, quando você cria uma questão você sai daquela mesmice de só reproduzir de só mecanicamente responder exercícios e você coloca sua mente

que você vê se o aluno realmente compreendeu. Prós e os contras, evidencia bastante, dá bastante clareza se o aluno compreendeu ou não o assunto.	para pensar, e nesse pensar que você vê se o aluno realmente compreendeu.

Grupo B: A PP impulsiona tanto o docente quanto o discente a sair da Zona de Conforto.

Expressões-Chave	DSC
A3: Depende da turma. Acho que você tem que estudar antes a turma porque em algumas turmas essa metodologia talvez não dê certo. **A4**: Os contras é que eu acho que cada aluno deve ser dado atenção de maneira individual. **A5:** É a pessoa ter que sair da zona de conforto (risos), pense numa coisa chata é sair da zona de conforto, mas foi útil para eu entendesse e finalmente entendesse a Álgebra Linear. **A6**: Contras eu acho que os alunos sintam uma certa insegurança de propor um problema ou fiquem presos em problemas mecânicos, o que traz ao professor a responsabilidade e o jogo de cintura de passar essa segurança para o aluno de que ele consegue. É um desafio para o professor sair dessa zona de conforto.	Os contras é que você (como professor) tem cada aluno deve ser dado atenção de maneira individual, pois eu acho que os alunos sintam uma certa insegurança de propor um problema ou fiquem presos em problemas mecânicos, o que traz ao professo a responsabilidade e o jogo se cintura de passar essa segurança para o aluno de que ele consegue, é a pessoa ter que sair da zona de conforto (risos), pense numa coisa chata é sair da zona de conforto, mas foi útil para que eu finalmente entendesse a Álgebra Linear. É um desafio para o professor sair dessa zona de conforto. Também acho que você tem que estudar antes a turma em algumas turmas essa metodologia talvez não dê certo.

Questão 3- Faça um comentário sobre a Exploração de Problemas no ensino de Álgebra Linear.

Ideias Centrais

A Exploração de Problemas proporciona um ensino-aprendizagem de matemática com mais compreensão e motivação.	A Exploração de Problemas proporciona que o professor vá além do conceito matemático inicial.

Questão 3 – IAD1

Expressões-Chave	Ideias Centrais	Ancoragem
A1: É muito útil, pois **facilita a compreensão**, trazendo diversas formas de pensar.	A exploração de problemas facilita a compreensão dos conceitos matemáticos. A	
A2: É algo bacana, porque quando menos esperamos vem novas perguntas e isso resulta em **mais conceitos matemáticos**, acho que se a pessoa não parar parece que não vai ter fim. (risos).	A exploração de problemas oportuniza ao professor o formalizar mais conceito matemáticos que o esperado. B	
A3: Levando em consideração o curso que você fez, eu achei muito bacana porque me relembrou alguns conceitos que eu já tinha esquecido. Aquele problema do skate foi bastante interessante. E isso é muito bom porque dá pra **gente ver o que a gente conhece do assunto**.	A exploração de problemas oportuniza o professor a revisar conceitos matemáticos com sua turma. B	
A4: A gente sabe que o ensino da Álgebra Linear em si, tanto no ensino fundamental, médio ou superior é visto como algo técnico e abstrato, uma vez que nós introduzimos essa exploração de problemas, nós conseguimos perceber outras coisas, a gente consegue pensar como aquilo está	A exploração de problemas proporciona um melhor aprendizado de matemática pois também proporciona um ensino reflexivo. A	

sendo aplicado, a gente consegue **refletir o que poderia ser feito**, se poderia ser resolvido de outra maneira, aí isso trás muitos pontos positivos porque não fica aquele negócio mecânico robotizado, em que você só vai lá e responde. E isso pode trazer muitos benefícios no sentido de que muitas pessoas, quando você está resolvendo um problema ou quando você está propondo um problema, se sintam mais confortáveis isso pode fazer com que elas comecem a gostar de determinado assunto, ai eu acredito que isso pra Álgebra Linear é muito legal, por se tratar de algo tão abstrato.		
A5: Sobre explorar problemas é algo tipo que abre mente da pessoa, não só abre mais explode, porque quando você pensa que acabou, na verdade ainda não acabou e cada vez aparece mais conceitos matemáticos **onde você só esperava no mínimo um**.	A exploração de problemas oportuniza ao professor o formalizar mais conceito matemáticos que o esperado. B	
A6: O método de exploração de problemas no ensino da Álgebra Linear se tornou bastante interessante, eu já havia cursado a disciplina de Álgebra Linear, inclusive meu trabalho de conclusão de curso ele é em Álgebra Linear. E a exploração de problemas foi um método novo, foi um método bastante interessante de se aprender os conceitos, foi um método diferente de se ver aqueles conceitos e assim, que de certa forma **empolga**, de certa forma sai aquela mesmice de você ver, definição, exemplo, e novamente definição, exemplo. Você quando explora como um exemplo antes para você entender aquele conceito, entender **de onde vem a necessidade daquele conceito** para depois conceitua-lo, e assim mais claro e assim fica mais interessante, um modo mais diferente de se aprender.	(1ª Ideia) A exploração de problemas é motivacional para o ensino de matemática. A (2ª Ideia) A exploração de problemas proporciona um ensino onde o discente compreende a necessidade do conceito. A	

IAD-2

Grupo A: A Exploração de Problemas proporciona um ensino-aprendizagem de matemática com mais compreensão e motivação.

Expressões-Chave	DSC
A1: facilita a compreensão, trazendo diversas formas de pensar. **A4:** Nós conseguimos perceber outras coisas, a gente consegue pensar como aquilo está sendo aplicado, a gente consegue refletir o que poderia ser feito, se poderia ser resolvido de outra maneira. Não fica aquele negócio mecânico robotizado. Quando você está resolvendo um problema ou quando você está propondo um problema, se sintam mais confortáveis isso pode fazer com que elas comecem a gostar de determinado assunto, Que isso pra Álgebra Linear é muito legal, por se tratar de algo tão abstrato. **A6:** Entender de onde vem a necessidade daquele conceito para depois conceitua-lo, e assim mais claro e assim fica mais interessante, um modo mais diferente de se aprender.	A Exploração de Problemas facilita a compreensão, trazendo diversas formas de pensar, nós conseguimos perceber outras coisas, a gente consegue pensar como aquilo (o conceito matemático) está sendo aplicado, conseguimos refletir o que poderia ser feito, se poderia ser resolvido de outra maneira, Exploração de Problemas você entende de onde vem a necessidade daquele conceito para depois conceitua-lo, e assim fica mais claro e interessante, um modo mais diferente de se aprender, não fica aquele negócio (processo de ensino-aprendizagem) mecânico, robotizado. Quando você está resolvendo um problema ou quando você está propondo um problema, faz com que os discentes se sintam confortáveis e isso pode fazer com que eles comecem a gostar de determinado assunto e isso para Álgebra Linear é muito legal, por se tratar de algo tão abstrato.

Grupo B: A Exploração de Problemas proporciona que o professor vá além do conceito matemático inicial.

Expressões-Chave	DSC
A2: Quando menos esperamos vem novas perguntas e isso resulta em mais conceitos matemáticos. **A3:** Levando em consideração o curso que você fez, eu achei muito bacana porque me relembrou alguns conceitos que eu já tinha esquecido. Problema do skate foi bastante interessante. **A5:** Algo tipo que abre mente da pessoa, Cada vez aparece mais conceitos matemáticos onde você só esperava no mínimo um.	Levando em consideração o curso que você fez, eu achei muito bacana porque me relembrou alguns conceitos que eu á tinha esquecido, quando menos esperamos vem novas perguntas e isso resulta em mais conceitos matemáticos onde você só esperava no mínimo um, aquele problema do skate foi bastante interessante nesse sentido.

Questão 4- Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas em sua prática docente? por quê?

Ideias Centrais

Faria uso devido a dinamicidade que essa metodologia proporciona em sala de aula.	Faria uso, pois ela potencializa o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Questão 4 – IAD1

Expressões-Chave	Ideias Centrais	Ancoragem
A1: Sim, o ensino fica **dinâmico** e assim os **alunos aprendem** mais, além de aumentar as chances desse mesmo aluno **não esquecer** aquele assunto.	(1ª Ideia) O ensino com esta metodologia se torna mais dinâmico. A (2ª Ideia) Os alunos retêm mais o conteúdo. B (3ª Ideia) O conceito aprendido é mais duradouro. B	
A2: Sim, com certeza. Porque torna as coisas mais **dinâmicas**, dá **mais entendimento** a pessoa.	(1ª Ideia) O ensino com esta metodologia se torna mais dinâmico. A (2ª Ideia) O processo de aprendizagem de matemática é potencializado. B	
A3: Eu sim, apoio gosto, acho que resolução de problemas, a exploração no ensino-aprendizagem e ainda como um **meio de avaliação** é uma prática viável, mesmo eu ainda não tenha uma turma minha de maneira própria, mas quando tiver vou usar sim como prática para as minhas aulas, porque acredito que é diferente, eu gosto do ensino	A ERP é um ótimo método de avaliação. B	

tradicional até certo ponto, que acho que não devo deixar de lado o ensino tradicional, mas mesclar com estratégias de ensino e ensino exploratório seria a união perfeita para uma boa, aprendizagem. Eu só vou saber se teoria está certa quando eu for para sala de aula, mas eu espero que sim.		
A4: Utilizaria sim, porque como eu vi no curso e como eu já tinha visto em outras disciplinas da Universidade, não de uma forma tão aprofundada como eu vi no curso, nós podemos tirar muito proveito disso e fazer com que os alunos se sintam mais **interessados** pelas aulas e nós conseguimos quebrar a barreira que a matemática é só conta, uma vez que nós estamos propondo que os **alunos pensem** por si só, que eles se saiam daquele problema. Na resolução de problemas encontramos outras dinâmicas fazendo com que a aula fique **mais leve** e até mais divertida, tanto para o aluno quanto para o professor.	(1ª Ideia) A ERP é uma metodologia que proporciona o interesse dos alunos pela matemática que está sendo ensinada. A (2ª Ideia) A ERP concede uma independência aos discentes. A	
A5: Sim, vou usar sim, **por todos os motivos que falei anteriormente**.	(1ª Ideia) A ERP é uma metodologia que proporciona o interesse dos alunos pela matemática que está sendo ensinada. A (2ª Ideia) A ERP concede uma independência aos discentes. A	
A6: Sim, eu utilizaria do método em sala de aula, porque como eu disse é um método bastante interessante, é um método que traz uma novidade, um modo diferente de se aprender e um método que **auxilia no processo de aprendizagem** do aluno, então eu utilizaria sim, tendo em vista que iriam surgir dificuldades por ser um método	(1ª Ideia) A ERP potencializa o processo de ensino-aprendizado. B (2ª Ideia) A ERP impulsiona o docente a	

que a maioria dos professores não utilizam, mas ser professor é também sair da zona de conforto.	sair da zona de conforto proporcionada pelo ensino tradicional. B	

IAD-2

Grupo A: Faria uso devido a dinamicidade que essa metodologia proporciona em sala de aula.

Expressões-Chave	DSC
A1: Sim, Ensino fica dinâmico. **A2:** torna as coisas mais dinâmicas. **A4:** Utilizaria sim. Como eu vi no curso e como eu já tinha visto em outras disciplinas da Universidade, não de uma forma tão aprofundada como eu vi no curso. Fazer com que os alunos se sintam mais interessados pelas aulas. Quebrar a barreira que a matemática é só conta. **A5:** Sobre explorar problemas é algo tipo que abre mente da pessoa.	Sobre explorar problemas é algo que abre a mente da pessoa, o ensino fica dinâmico, torna as coisas mais dinâmicas e isso quebra a barreira que a matemática é só conta. Como eu vi no curso e como eu já tinha vista em outras disciplinas da Universidade, não de uma forma tão aprofundada como eu vi no curso. Fazer com que os alunos se sintam mais interessados pelas aulas.

Grupo B: Faria uso, pois ela potencializa o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Expressões-Chave	DSC
A1: Alunos aprendem mais. Aumentar as chances desse mesmo aluno não esquecer aquele assunto. **A2**: Mais entendimento a pessoa. **A3:** Eu sim. A Exploração no ensino-aprendizagem e ainda como um meio de avaliação é uma prática viável. **A6:** Um método que auxilia no processo de aprendizagem do aluno. Mas ser professor é também sair da zona de conforto.	Eu utilizaria sim, é um método que auxilia no processo de aprendizagem do aluno, proporciona mais entendimento a pessoa, aumentando as chances desse aluno não esquecer aquele assunto, ainda como um meio de avaliação é uma prática viável. Ser professor é também sair da zona de conforto.

Questão 5- O que você tem a dizer sobre o uso de diversas representações (algébrica, numérica, geométrica, dentre outras) no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear?

Ideia Central

As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas.

Questão 5 – IAD1

Expressões-Chave	Ideias Centrais	Ancoragem
A1: A visualização torna mais ampla e mais **compreensível**.	As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível. A	Enxergar o conceito de diferentes perspectivas. A
A2: Eu não acho que você "pode" usar em sala de aula, eu acho que você deve usar em sala de aula, pois é algo que abre a mente, porque quando você não enxerga um detalhe na geometria você **enxerga nos outros** e vice-versa.	As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas. A	Enxergar o conceito de diferentes perspectivas. A
A3: Eu acho que ajuda né, porque tem alguns alunos tem dificuldade na álgebra, alguns tem na geometria, então se você **tem diversas representações** isso facilita a maneira como aluno vê a cadeira, a matéria. Então acho que é muito bom, uma ótima forma de ter um recurso já que cada aluno compreende de forma distinta. Se um não entendeu essa parte algébrica, vamos para a geométrica. É muito bom ter mais de uma opção.	As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas. A	Enxergar o conceito de diferentes perspectivas. A
A4: Quando a gente usa diversas representações, aquela algébrica, numérica, geométrica e tantas outras que a gente tem, nós possibilitamos que o aluno enxergue o problema de diversas maneiras e isso é legal, porque você pode resolver o problema só por continhas e o outro aluno pode encontrar uma solução correta em uma	As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas.	Enxergar o conceito de diferentes perspectivas. A

representação gráfica. Então o aluno verá que não possui apenas um caminho para ver aquele problema, para saber como ele se comporta. Então é muito legal nós trabalharmos com mais de uma ferramenta para um determinado assunto, para um determinado conteúdo que assim os **alunos eles vão conseguir enxergar de diversas maneiras** e não de uma maneira isolada.	A	
A5: Prioritário no ensino não só de Álgebra Linear, mas de quantas disciplinas matemáticas forem possíveis, por que, tipo, **você não consegue entender tudo de um conteúdo matemático só vendo algebricamente ou só geometricamente**, a junção desse mais as das outras representações que fazem o todo e isso foi sensacional para eu entender o que significava as exigências para saber o que é uma transformação linear ou não.	As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas. A	Enxergar o conceito de diferentes perspectivas. A
A6: O uso de diversas representações é muito eficiente, no meu trabalho de conclusão de curso eu tento também fazer essas diversas representações, para que nós não fiquemos presos achando que um conceito ele abrange uma só representação, mas você mostrando todas as formas de representação você abre a mente do aluno de que está estudando aquele conceito para uma melhor compreensão, você vendo várias formas de uma mesma coisa você compreende melhor, você tem um melhor entendimento.	As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas. A	Enxergar o conceito de diferentes perspectivas. A

IAD-2

Grupo A: As representações múltiplas tornam o ensino de Álgebra Linear mais compreensível ao passo que o discente consegue enxergar o objeto matemático sobre diferentes perspectivas. Faria uso devido a dinamicidade que essa metodologia proporciona em sala de aula.

Expressões-Chave	DSC
A1: A visualização torna mais ampla e mais compreensível. **A2**: Você deve usar em sala de aula. Quando você não enxerga um detalhe na geometria você enxerga nos outros e vice-versa. **A3:** Porque tem alguns alunos tem dificuldade na álgebra, alguns tem na geometria, então se você tem diversas representações isso facilita a maneira como aluno vê a matéria. **A4:** Possibilitamos que o aluno enxergue o problema de diversas maneiras. **A5:** Prioritário no ensino não só de Álgebra Linear, mas de quantas disciplinas matemáticas forem possíveis. A junção desse mais as das outras representações que fazem o todo e isso foi sensacional para eu entender o que significava as exigências para saber o que é uma transformação linear ou não. você não consegue entender tudo de um conteúdo matemático só vendo algebricamente ou só geometricamente. **A6:** Nós não fiquemos presos achando que um conceito ele abrange uma só representação. Você vendo várias formas de uma mesma coisa você compreende melhor, você tem um melhor entendimento.	Prioritário no ensino não só de Álgebra Linear, mas de quantas disciplinas matemáticas forem possíveis, você (como professor) deve usar em sala de aula, porque tem alguns alunos que possuem dificuldade na Álgebra, alguns tem na Geometria, então se você tem diversas representações e isso facilita a maneira como o aluno vê a matéria, a visualização se torna mais ampla. Você não consegue entender tudo de um conteúdo matemático só vendo algebricamente ou só geometricamente, pois quando você não enxerga um detalhe na geometria você enxerga nas outras e vice-versa. Assim vendo várias formas de uma mesma coisa você compreende melhor, você tem melhor entendimento. Possibilita que o aluno enxergue o problema de diversas maneiras, tornando a visualização mais ampla e compreensível e nós não ficamos presos achando que um conceito abrange uma só representação. Portanto a junção dessas representações que fazem o todo e isso foi sensacional para que eu entendesse o que significa as exigências para saber o que é uma transformação linear ou não.

Questão 6- Você optaria por usar as diversas representações em sua sala de aula? justifique?

Ideias Centrais

Usaria, porque potencializa o processo de ensino-aprendizagem de Matemática

Questão 6 – IAD1

Expressões-Chave	Ideias Centrais	Ancoragem
A1: Sim, os alunos precisam ter essa **visualização**, e pra isso é bom usar de diversas formas.	Optaria sim, para facilitar o aprendizado. A	
A2 Sim, eu vou usar, com certeza. Se eu **aprendi melhor Álgebra Linear** com essa variedade de representações, imagina meus alunos com funções ou outras coisas que vou ensinar? Com certeza.	(1ª Ideia) Optaria sim, para facilitar o aprendizado. A (2ª Ideia) Facilitou o aprendizado de Álgebra Linear por ser abstrato também facilitará outros conceitos. A	
A3: Acho muito importante essas representações, eu usaria sim.	Usaria por achar interessante. A	
A4: A depender da realidade a gente consegue partir para essas diversas representações, mas aí é tudo uma questão social, uma questão de econômica, eu diria que a palavra certa é, podemos tentar readaptar o uso dessas representações de acordo com a realidade da escola, por exemplo, nós queremos uma representação gráfica, mas não sabemos desenhar muito bem os softwares, os celulares ou outros mecanismos podem nos auxiliar para isso, mas não é toda escola que teremos esse material, aí as outras representações podem sim ser utilizadas, mas sim de maneira correta.	Usaria a depender os instrumentos tecnológicos disponíveis para esbouçar a representação geométrica. A	
A5: Sim, pelo **mesmo motivo que falei anteriormente**, elas dão uma completude no ensino, na	(1ª Ideia) Optaria sim, para facilitar o aprendizado.	

aprendizagem e eu acho que também da **avaliação**, pois tipo, se você realmente entendeu o que é uma transformação linear de forma algébrica você consegue explicar ela de maneira geométrica, assim como nós fizemos no curso.	A (2ª Ideia) As representações múltiplas proporcionam um ótimo método de avaliação. A	
A6: Com certeza eu utilizaria de diversas representações em sala de aula, porque como eu disse anteriormente, auxilia no processo de entendimento do aluno, **auxilia na compreensão dos conceitos,** você vê várias formas de uma mesma coisa. Então com toda certeza me utilizaria. Às vezes você com uma expressão numérica você não entende bem, aí você vê a representação gráfica então você compreende, diz “ahh então é isso”, você dá um norte, já clareia sua mente. Então com certeza me utilizaria, e me utilizarei.	(1ª Ideia) Optaria sim, para facilitar o aprendizado. A	

IAD-2

Grupo A: Usaria, porque potencializa o processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Expressões-Chave	DSC
A1: Sim, Alunos precisam ter essa visualização. **A2** eu vou usar. Se eu aprendi melhor Álgebra Linear com essa variedade de representações, imagina meus alunos com funções ou outras coisas que vou ensinar? **A3:** Muito importante essas representações, eu usaria sim. **A4:** A depender da realidade a gente consegue. Queremos uma representação gráfica, mas não sabemos desenhar muito bem os softwares, os celulares ou outros mecanismos podem nos auxiliar para isso. **A5:** Sim, elas dão uma completude no ensino, na aprendizagem e eu acho que também da avaliação. **A6:** Com certeza eu utilizaria de diversas representações em sala de aula, porque como eu disse anteriormente, auxilia no processo de entendimento do aluno. Auxilia na compreensão dos conceitos. Me utilizarei.	Sim, eu vou usar, eu achei muito importante essas representações e os alunos precisam ter essa visualização. Se eu aprendi melhor Álgebra Linear com essa variedade de representações, imagina meus alunos com funções ou outras coisas que vou ensinar? Agora se queremos uma representação gráfica, mas não sabemos desenhar muito bem os softwares, os celulares ou outros mecanismos podem auxiliar para isso, a depender da realidade a gente consegue.

Questão 7 - Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra Linear, na formação de professores.

Ideais Centrais

A compreensão dos conceitos do ensino básico através das lentes da Álgebra Linear.	A compreensão de outras disciplinas do ensino superior através da Álgebra Linear como base.

Questão 7 – IAD1

Expressões-Chave	Ideias Centrais	Ancoragem
A1: O conceito de Espaço Vetorial, transformações lineares, matrizes, entre outros.	Os conceitos trabalhados. A	
A2: Além de entender essa estrutura de espaço vetorial que fundamental para **entender a estrutura da matemática do ensino fundamental e médio**, acho fundamental que o professor tenha também essa base da álgebra linear para **entender outras disciplinas** como Equações Diferenciais Ordinárias e Estruturas Algébricas.	(1ª Ideia) A Álgebra Linear proporcionou uma melhor compreensão da matemática do ensino básico. A (2ª Ideia) A AL proporciona uma melhor compreensão de outras disciplinas do ensino superior. B	
A3: -	-	-
A4: Os pontos positivos da Álgebra Linear na formação de professores é que você começa a **enxergar a matemática abstrata entre si**, é um mundo que você não está adaptado quando você está no ensino médio, por exemplo, porque a Álgebra do ensino médio para a do ensino superior é completamente diferente, agora os pontos negativos é que a Álgebra em si carrega um peso que não deveria carregar de ser complicada, mas acredito que ela não é complicada pelo conteúdo em si, mas sim da maneira como ela é passada. Poderia pensar como readaptar o ensino da Álgebra para que mais pessoas se identifiquem a área.	Compreender a ideia de estrutura por traz dos conceitos matemáticos. A	

A5: Além dessa **ideia de <u>estrutura</u>** <u>o professores ele tem que saber mais</u> sabe, tipo, <u>entender que a Álgebra Linear ela auxilia na compreensão das Equações Diferenciais, que podem descrever o mundo lá fora, ajuda a</u> **<u>compreender diversos outros campos da matemática mais avançada e mais básica</u>** <u>também como foi mostrado no curso</u>.	(1ª Ideia) Compreender a ideia de estrutura por traz dos conceitos matemáticos. A (2ª Ideia) A AL proporciona uma melhor compreensão de outras disciplinas do ensino superior. B	
A6: -	-	

IAD-2

Grupo A: A compreensão dos conceitos do ensino básico através das lentes da Álgebra Linear.

Expressões-Chave	DSC
A1: O conceito de Espaço Vetorial, transformações lineares, matrizes, entre outros. **A2:** Além de entender essa estrutura de espaço vetorial. Entender a estrutura da matemática do ensino fundamental e médio. **A5:**Ideia de estrutura os professores ele tem que saber mais.	Os professores tem que saber mais, considero importantes os conceitos de Espaço Vetorial, Transformações Lineares, Matrizes entre outros. Eles são importantes para entender a estrutura da matemática do ensino fundamental e médio.

Grupo B: A compreensão de outras disciplinas do ensino superior através da Álgebra Linear como base.

Expressões-Chave	DSC
A2: Acho fundamental que o professor tenha também essa base da álgebra linear para entender outras disciplinas como Equações Diferenciais Ordinárias e Estruturas Algébricas. **A5:** Entender que a Álgebra Linear ela auxilia na compreensão das Equações Diferenciais, que podem descrever o mundo lá fora, ajuda a compreender diversos outros campos da matemática mais avançada e mais básica também como foi mostrado no curso.	Acho fundamental que o professor tenha também essa base de Álgebra Linear para entender outras disciplinas como Estruturas Algébricas e Equações Diferenciais, que podem descrever o mundo lá fora, ajuda a compreender diversos outros campos da matemática mais avançada e mais básica também como foi mostrado no curso.