



Universidade Estadual da Paraíba
Campus I Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática



Maxwell Aires da Silva

Equações que reverberam: compreendendo o funcionamento do ouvido humano

Campina Grande - PB
Dezembro/2019

Maxwell Aires da Silva

**Equações que reverberam: compreendendo o
funcionamento do ouvido humano**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof^ª Dr^ª Maria Isabelle Silva Dias Yanes

Campina Grande - PB

Dezembro/2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586e Silva, Maxwell Aires da.
Equações que reverberam [manuscrito] : compreendendo o funcionamento do ouvido humano / Maxwell Aires da Silva. - 2019.
86 p. : il. colorido.
Digitado.
Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa , 2020.
"Orientação : Profa. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."
1. Ondas sonoras. 2. Mínimos quadrados. 3. Séries de Fourier. 4. Audição humana. I. Título
21. ed. CDD 512.94

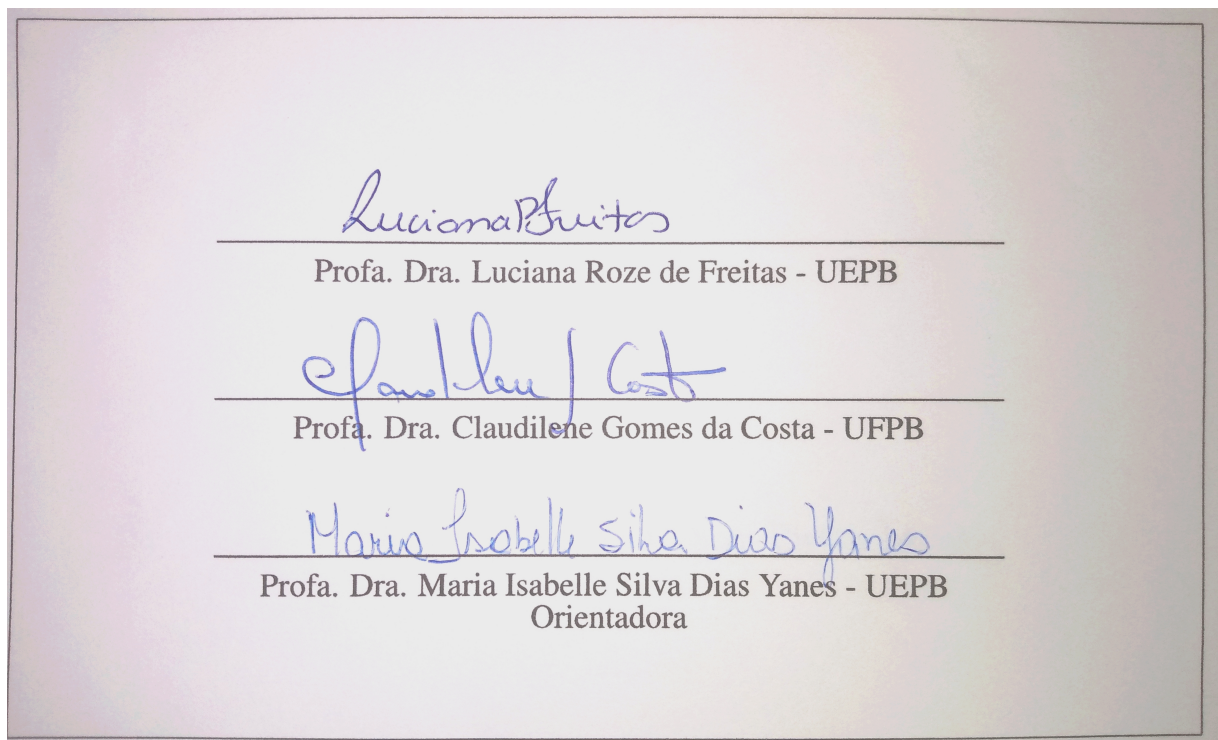
Maxwell Aires da Silva

Equações que reverberam: compreendendo o funcionamento do ouvido humano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 16/12/2019



Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, **Jéssica Millena Figueirêdo Martins**, esposa amada e presente sempre nos momentos em que preciso, pessoa em quem confio, amo e quero findar meus dias ao seu lado. **Enoque Martins Aires**, filho abençoado dado por Deus e que desde seu nascimento, me serve de inspiração diária e aprendizado constante.

Agradecimentos

São muitas as pessoas que passam por nossa vida, que nos ajudam, que nos inspiram, que nos trazem valiosos aprendizados para a vida. Dividirei estes agradecimentos por etapas da minha vida.

Ao Criador: Agradeço imensamente ao meu Deus, por me dar a vida, a saúde, o ar que respiro e tudo o mais que Ele me fornece todos os dias. Obrigado meu Deus, pois tu és digno de toda honra, glória, louvor, adoração e exaltação. Coloco o Senhor em primeiro lugar não somente na minha lista de agradecimentos, mas Te coloco em primeiro lugar na minha vida, pois tu és o Dono dela, uma vez que todas as coisas tu criastes, com absurda sabedoria tu fizestes todas as coisas, bastou a Tua palavra “haja” e tudo se fez.

Quando contemplo a natureza, os céus, e agora através deste trabalho, contemplei um pouco da beleza do processo de audição humana, quão espantado fiquei em entender que tudo fizestes com perfeição, montastes todo o sistema do nosso organismo de tal modo que tudo funciona perfeitamente, de modo que fico embasbacado com tamanha sabedoria, inteligência, criatividade e beleza na Tua criação.

Diante de tudo isso, só consigo pensar na declaração do apóstolo Paulo sobre tua sabedoria. . . “Ó profundidade da riqueza, da sabedoria e do conhecimento de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e quão inescrutáveis os seus caminhos! Pois, quem conheceu a mente do Senhor? Quem se tornou seu conselheiro? Quem primeiro lhe deu alguma coisa, para que Ele lhe recompense? Portanto dele, por Ele e para Ele são todas as coisas. A Ele seja a glória perpetuamente! Amém.” Rm 11.33-36.

Além disso, mesmo tu sendo o Criador de tudo, quando falhamos virando as costas para ti, desde o Éden, tu através de Teu amor incondicional enviastes ao mundo o Teu filho **Jesus Cristo** para pagar a dívida que tínhamos contigo. Muito obrigado pelo dia 31 de dezembro de 2006, em que confessei que Jesus Cristo é meu amigo, meu Senhor, meu Rei, meu Redentor e meu Salvador pessoal. Desde aquele dia minha vida mudou completamente, de modo que do mesmo jeito que a humanidade, especialmente os ocidentais, dividem a história em *antes de Cristo* a.C e *depois de Cristo* d.C, a

minha história também é assim dividida.

Família: Separei uma parte destes agradecimentos para as pessoas que considero mais especiais na minha vida, saber, a minha esposa **Jéssica Millena Figueirêdo Martins**, mulher de Deus, esposa extraordinária, companheira diária, conselheira, mãe espetacular, professora cuja didática e sensibilidade me inspiram na minha profissão. Quero que você saiba que desde o dia em que conheci você nos encontros da igreja, pude notar inicialmente que você era uma pessoa especial, com toda a sua simpatia, simplicidade, facilidade de fazer amizades, e principalmente, temor a Deus, isso me encantou de imediato.

Com o passar dos meses notei que você realmente se destacara entre todas as mulheres que havia conhecido e feito amizade, pois todas aquelas qualidades que anteriormente mencionei eram de fato reais e princípios que você possui firmemente, de modo que a amizade começou a se transformar em amor. Pouco tempo depois começamos a namorar, a saber, em 11 de novembro de 2007. Quatro anos se passaram e no dia 08 de outubro de 2011 fiz minha segunda melhor escolha na vida, que foi me tornar seu esposo. Saiba que todos os dias sou feliz por ter você como minha outra metade, você me completa, e sou grato a Deus pelo privilégio de ter você comigo.

Em 2018, ganhamos do Senhor Deus um lindo presente chamado **Enoque Martins Aires**, nosso filho, e este ano foi muito especial pra nós, sou grato a Deus pelo privilégio de ser pai, e ser pai de um filho seu me dá mais alegria ainda. Amo você!

Familiares: Existem também algumas pessoas que merecem fazer parte desse texto, pessoas que de modo algum poderiam ficar de fora deste momento, e começo louvando a Deus pela vida dos meus pais **Manoel Marcene Dias da Silva** e **Josevânia Aires**, pessoas que amo e respeito demais, pessoas que me educaram, que me mostraram o caminho certo a percorrer na vida para ser um homem digno de fazer parte da sociedade. Muito obrigado pela existência de vocês na minha vida.

Agradeço também a uma pessoa que me incentivou demais, mesmo estando distante fisicamente, suas orações, seus conselhos e nossas conversas me davam forças para prosseguir. Louvo a Deus pela vida da minha irmã **Sheilla Suely Aires da Silva Santana**, muito obrigado por tudo, amo você profundamente minha irmã.

Gostaria também de deixar meus agradecimentos ao meu sogro **José Martins dos Santos** e minha sogra **Mônica Maria Figueirêdo Martins**, por me apoiarem nos estudos, por me darem o suporte necessário, por cuidarem do pequeno Enoque sempre que precisávamos nos ausentar para estudar. Estou recebendo hoje o título de mestre em matemática, mas a contribuição que vocês deram na minha vida e na da filha de vocês faz de vocês merecedores de um título de doutores *honoris causa*, vocês são pessoas impressionantes.

Aos mestres: Tornar-me um matemático foi um longo processo, e como é de se esperar, esse processo teve um início. No ano de 2008 decidi seguir carreira de matemático, enquanto fazia ainda ensino médio, na ocasião. Agradeço a Deus por colocar na minha vida o professor **Mozart Edson Lopes Guimarães**, professor que investiu na minha carreira. Professor Mozart, quero publicamente agradecer ao senhor pelo investimento feito na minha pessoa, aquelas tardes de domingo na minha casa fazendo aulas de reforço certamente mudaram minha vida profissional para sempre. Muito obrigado por tudo.

Ao entrar na graduação, apareceram no meu caminho muitos bons professores, que são também excelentes pessoas, e minha formação profissional teve contribuição direta deles. Portanto, deixo aqui os meus agradecimentos aos professores e professoras do departamento de matemática da Universidade Estadual da Paraíba, especialmente, Kátia Suzana, Fernando Luís, Joselma Soares, Vandenberg Lopes, Thiciany Matsudo, Aldo Trajano, Davis Matias, Samuel Carvalho, Manuel Milla, Luciana Roze (Orientadora de Monografia), vocês são profissionais excelentes. Deus os abençoe.

Agradeço também aos professores que estiveram conosco nas disciplinas do mestrado, a saber, Davis Matias (MA 11 e MA 23), Diana Maia (MA 12), Luciana Roze (MA 13), Vandenberg Lopes (MA 14), Silvio, Sibério, Vandenberg e Diana (MA 21), Manuel Milla (MA 22), Aldo Trajano (MA 33) e Maria Isabelle Silva (MA 40) e orientadora de dissertação. Sou grato pelo conhecimento que vocês me passaram e pelo incentivo diário. Deus os abençoe.

Aos nobres mestres: Durante o curso do PROFMAT, montamos um grupo de estudos, composto por apenas três pessoas, incluindo eu, tais estudos semanais foram, sem a menor sombra de dúvida, o segredo do sucesso durante o curso. Portanto, gostaria de agradecer pela amizade construída com os mestres **Raimundo João dos Santos Júnior**, algebrista de primeira qualidade e pessoa extraordinária, louvo a Deus por sua vida, sua amizade, seus conselhos, e tenho certeza de que essa amizade construída durante o curso durará o resto de nossas vidas, e ao mestre **Állisson Herinque Leite Cabral**, matemático brilhante, com uma capacidade de resolver problemas extraordinária, muito obrigado por sua vida, sua amizade, seus conselhos, sua forma ímpar de motivar-nos. Muito obrigado por tudo.

Banca: Gostaria imensamente de agradecer a minha orientadora, a professora Isabelle Silva por sua disponibilidade, sua atenção e por orientar-me neste trabalho. Suas leituras do meu trabalho e seus conselhos o tornaram bem melhor do que ele seria sem a sua ajuda. Também agradeço aos membros da banca examinadora, a saber, a professora Luciana Roze e a professora Claudilene Gomes, agradeço por aceitarem

compor a banca da minha defesa, pelos conselhos e dicas que muito me ajudaram.

SBM e UEPB: Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, pelo oferecimento do programa em seus domínios.

Resumo

Neste trabalho foi apresentado como funciona o processo pelo qual nosso sistema auditivo interpreta sons, esse processo é chamado de *Transdução Auditiva*. Constitui-se como objetivo principal desta pesquisa apresentar do ponto de vista biológico e matemático, o funcionamento do nosso aparelho auditivo, desde o momento em que recebemos as ondas sonoras provenientes do meio externo, até o momento em que esta é transformada em pulsos elétricos que são enviados ao cérebro fazendo-nos reconhecer os sons à nossa volta. Para que tal objetivo fosse cumprido, foram utilizadas ferramentas provenientes da Álgebra Linear e da Análise Real, tais como: espaços vetoriais munidos de um produto interno; Aproximação por mínimos quadrados e as Séries de Fourier, as quais descrevem adequadamente como as ondas sonoras se comportam nos meios pelos quais se propagam.

Palavras-chave: Audição humana. Mínimos quadrados. Séries de Fourier.

Abstract

In this work was have presented how the process by which our auditory system interprets sounds works, this process is called *Auditory Transduction*. The main objective of this research is to present, from a biological and mathematical point of view, the functioning of the our hearing aids, from the moment we receive the sound waves coming from the external environment, until the moment it is transformed into electrical pulses they are sent to the brain making us recognize the sounds around us To achieve this goal, tools from Linear Algebra and Real Analysis were used, such as: Vector Spaces munided with an internal product; approximation for Least squares and the Fourier series, which adequately describe how sound waves behave in the medium by which they propagate.

Keywords: Human audition. Least squares. Fourier Series.

Sumário

Introdução	12
1 UM POUCO SOBRE AS ONDAS SONORAS	14
1.1 Introdução	14
1.2 Definição e classificação das ondas	14
1.3 Grandezas físicas associadas às ondas	16
1.4 Construção da equação da onda	19
1.5 Ondas sonoras	21
2 O OUVIDO HUMANO SOB A PERSPECTIVA FISIOLÓGICA	26
2.1 Introdução	26
2.2 Componentes e funcionamento do ouvido humano	27
2.3 A orelha e o equilíbrio	33
3 UM POUCO DE ÁLGEBRA LINEAR	36
3.1 Introdução	36
3.2 Espaços vetoriais	36
3.3 Subespaços vetoriais	39
3.4 Conjuntos LI e LD, base e dimensão	39
3.5 Espaços vetoriais com produto interno	40
3.6 A desigualdade de Cauchy-Schwarz	43
3.7 Vetores ortogonais	44
4 O MÉTODO DE APROXIMAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS	52
4.1 O teorema da melhor aproximação	52
4.2 Aproximação funcional	54
4.3 Polinômios trigonométricos e as Séries de Fourier	56
5 APROXIMAÇÃO DE UMA ONDA SENOIDAL PARA UMA ONDA DENTE DE SERRA	74
5.1 Introdução	74
5.2 A onda dente de serra	74
5.3 Aproximação de uma onda senoidal para uma onda dente de serra	77
5.4 Como usar este trabalho no ensino médio?	83

REFERÊNCIAS	85
--------------------------	----

Introdução

A Matemática é uma ciência que trabalha com elementos abstratos, como por exemplo, números, funções, espaços vetoriais, etc. Não obstante, esta possui diversas aplicações e estreita relação com as demais áreas do conhecimento. Sendo assim, torna-se indispensável para a boa formação do ser humano, um bom conhecimento da matemática.

Neste trabalho fez-se uma relação entre Matemática, Biologia e Física com o intuito de entender como funciona o processo de audição do ser humano, processo este denominado pelos anatomistas de *Transdução Auditiva*.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar do ponto de vista biológico e matemático como funciona o processo de audição do ser humano, desde o momento em que recebemos as ondas sonoras provenientes do meio externo, até esta onda ser transformada em pulsos elétricos que são enviados ao cérebro fazendo com que reconheçamos os sons à nossa volta.

Ao final do trabalho apresenta-se uma proposta de como se pode aplicar esta pesquisa em uma turma do ensino médio, uma vez que, alguns assuntos aqui tratados são de nível universitário, havendo assim a necessidade de se fazer uma adaptação para o público do ensino médio.

Nosso trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo o primeiro dedicado à parte de ondulatória. Apresentamos o conceito de onda, suas classificações, seus tipos, as propriedades matemáticas de uma onda e as grandezas associadas a estas.

No capítulo dois, faz-se um estudo do ouvido humano sob a perspectiva da Fisiologia e da Anatomia, campos de pesquisa pertencentes à Biologia. Mostramos as divisões, os elementos e as funções de cada componente do nosso sistema auditivo, explicando também as duas principais funções do nosso ouvido como um todo.

No terceiro capítulo, entramos na parte matemática do nosso trabalho, apresentando alguns conceitos preliminares de Álgebra Linear, conceitos estes que nos dão todo o suporte teórico que precisamos para os demais capítulos.

No capítulo quatro apresentamos um método de aproximação de funções denominado *método dos mínimos quadrados*, que consiste em determinar qual a função g que melhor se aproxima da função f dada inicialmente. O termo *aproximação* é explicado neste capítulo, dando o seu real sentido neste contexto.

No capítulo cinco, tomamos uma onda denominada *dente de serra*, a qual é localmente linear e, usando o método dos mínimos quadrados, encontramos qual a onda senoidal que melhor se aproxima da onda dente de serra, uma vez que o nosso aparelho auditivo é capaz interpretar sons de ondas tipo senoidal, porém as ondas senoidais não

são lineares, dificultando bastante o seu cálculo de amplitude, comprimento de onda, período, etc.

Por fim, apresentamos uma proposta de como recortar esta pesquisa a fim de aplicá-la em uma turma do ensino médio, propondo assim a interdisciplinaridade, a aplicação da Matemática nos processos presentes no dia a dia das pessoas, trazendo portanto, um sentido prático desta ciência e enriquecendo nossos alunos de conhecimento científico.

1 Um pouco sobre as ondas sonoras

1.1 Introdução

Neste capítulo inicial, tratamos de forma breve alguns conceitos e propriedades das ondas, especificamente das ondas sonoras, conceito fundamental em nosso trabalho. A parte de ondulatória é estudada no 2º ano do ensino médio, e constitui-se em um conteúdo de importância central na Física, uma vez que possui muitas aplicações tanto na vida cotidiana, quanto em áreas mais específicas da ciência.

Inicialmente, definimos o que vem a ser uma onda, suas características, classificações, tipos e propriedades. Em seguida, falamos um pouco sobre as grandezas associadas a uma onda, grandezas estas que nos permitem fazer um estudo quantitativo mais preciso do comportamento das ondas. Dando continuidade, construímos a equação de uma onda, tipo senoidal, que nos permite no capítulo 5, aplicá-la a fim de obter informações mais precisas do funcionamento do ouvido humano, com respeito à captação de ondas e transformação das mesmas em pulsos elétricos.

O leitor com interesse em buscar mais detalhes com respeito aos conteúdos vistos nesse capítulo pode consultar as referências [6] e [12] que encontrará um tratamento adequado para o conteúdo.

Por fim, trataremos de um tipo mais específico de onda, qual seja, a onda sonora, e explicar quais são as frequências das ondas que são perceptíveis pelo nosso sistema auditivo.

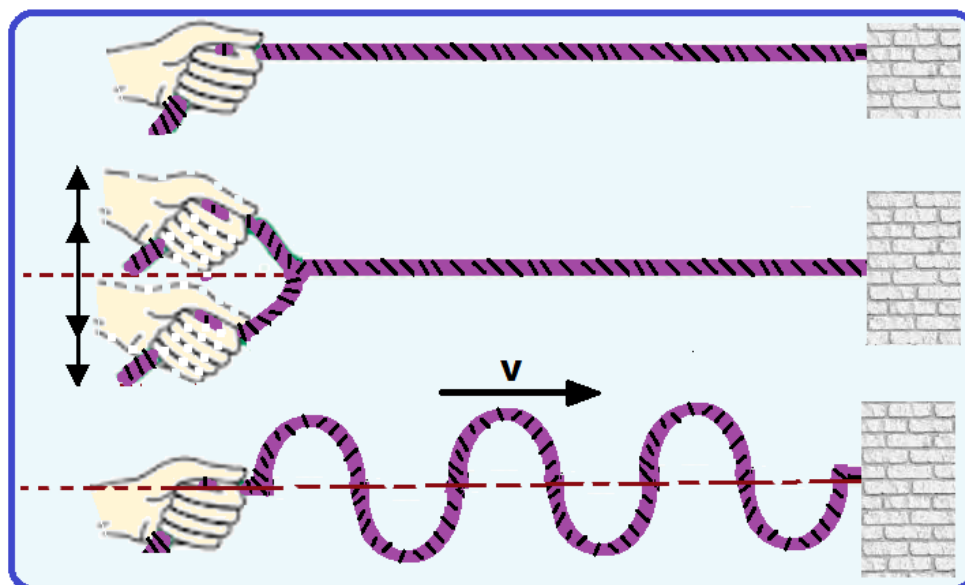
1.2 Definição e classificação das ondas

Um dos principais sentidos do corpo humano é a audição, que é formada inicialmente no nosso aparelho auditivo e concluído, de fato, no cérebro. A entidade física responsável pela emissão de, entre outras coisas, sons à nossa volta é o que chamamos de ondas, que serão objeto principal de estudo deste capítulo.

Definição 1.1 *Define-se **onda** como sendo uma perturbação, ou oscilação em um meio, que se propaga sem que haja transporte de matéria, apenas de energia.*

Para que fique claro para o leitor que uma onda se propaga transportando apenas energia, e não matéria, observe a figura a seguir:

Figura 1 – Formação de uma onda.



Fonte: <http://fisicaevestibular.com.br/novo/ondulatória/acústica/cordas-vibrantes/>

Note que, existe uma pessoa movimentando a corda para cima e para baixo, e esse movimento oscilante é responsável por gerar a onda, no entanto, nem a corda nem a pessoa estão saindo do lugar, isto é, a pessoa não se desloca de posição, assim como a corda continua segura em sua mão. Contudo, a onda se desloca em sentido horizontal em direção à parede. Donde pode-se concluir que na formação de uma onda, não há transporte de matéria, apenas de energia.

Observe que a oscilação (movimento da mão) possui sentido vertical, enquanto que a propagação (movimento da onda) possui sentido horizontal, e isto nos permite classificar, segundo a sua forma, uma onda pelos sentidos observados da oscilação e da propagação.

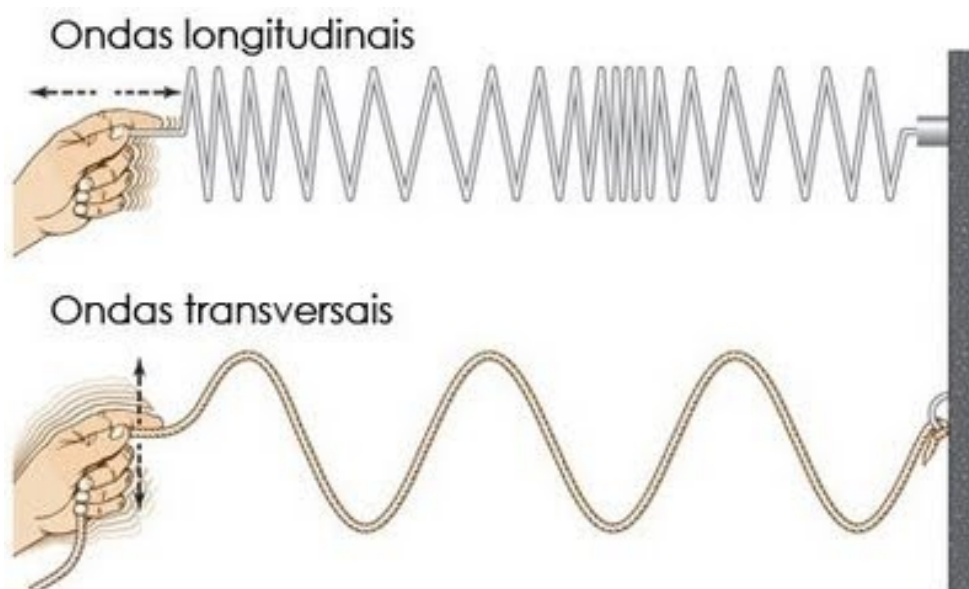
Definição 1.2 Chamam-se *ondas longitudinais* às ondas que possuem o sentido de oscilação paralelo ao sentido de propagação.

Neste trabalho, damos ênfase a um tipo específico de onda, qual seja, *onda sonora*. Estas ondas que são mecânicas e longitudinais serão objeto principal de estudo deste capítulo.

Definição 1.3 Chamam-se *ondas transversais* às ondas que possuem o sentido de oscilação transversal ao sentido de propagação.

Existe uma outra forma de classificar uma onda, segundo a sua natureza, e esta classificação é feita com base na forma como a onda é formada, o que está mostrado na figura a seguir:

Figura 2 – Ondas longitudinais e transversais.



Fonte: <http://demezcalaparaelmundo.blogspot.com/2012/06/ondas-se-podria-definir-uma-onda>

Definição 1.4 Chamam-se **ondas mecânicas** às ondas que necessitam da existência de um meio material para que possam se propagar.

Definição 1.5 Chamam-se **ondas eletromagnéticas** às ondas que não necessitam da existência de um meio material para que possam se propagar.

1.3 Grandezas físicas associadas às ondas

Quando se analisa o processo de formação de uma onda, nota-se que estas possuem certas características que nos permitem estudá-las com mais exatidão. Com base nisso, vamos definir algumas grandezas que estão associadas às ondas.

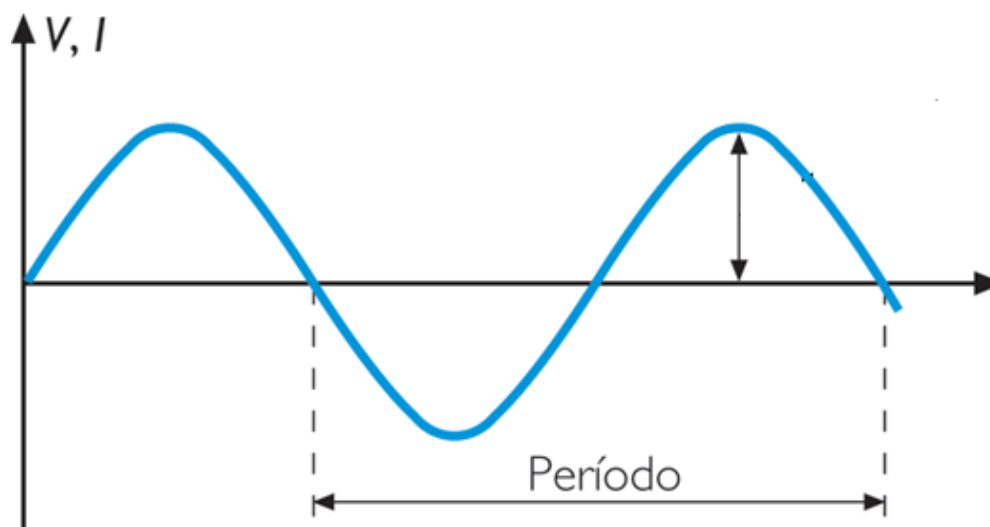
Definição 1.6 Chama-se **frequência** ao número de ciclos que a onda completa em um único intervalo de tempo.

Vale salientar que, no Sistema Internacional de Medidas (SI), o tempo t é medido em segundos (s), e a frequência, a qual denotaremos por f , é medida em Hertz¹ (Hz).

¹ Após **Heinrich Rudolf Hertz** (1857 - 1894), físico alemão nascido em Hamburgo que, dentre outras coisas, demonstrou a existência de ondas eletromagnéticas.

Definição 1.7 Chama-se **período**, denotado por T , ao intervalo de tempo que a onda leva para completar um ciclo.

Figura 3 – Período de uma onda.



Fonte: <http://colectivo05904.blogspot.com/2016/05/partes-de-una-onda.html>

É importante frisar que o período pode ser determinado a partir de qualquer ponto da onda, por exemplo, da crista da onda que é o seu ponto de máximo, do vale da onda que é o seu ponto de mínimo, e assim sucessivamente.

Também é importante que o leitor perceba que a frequência é a quantidade de ciclos por unidade de tempo, enquanto que o período é o tempo que a onda leva para realizar um único ciclo. Logo, frequência e período são grandezas inversamente proporcionais, isto é,

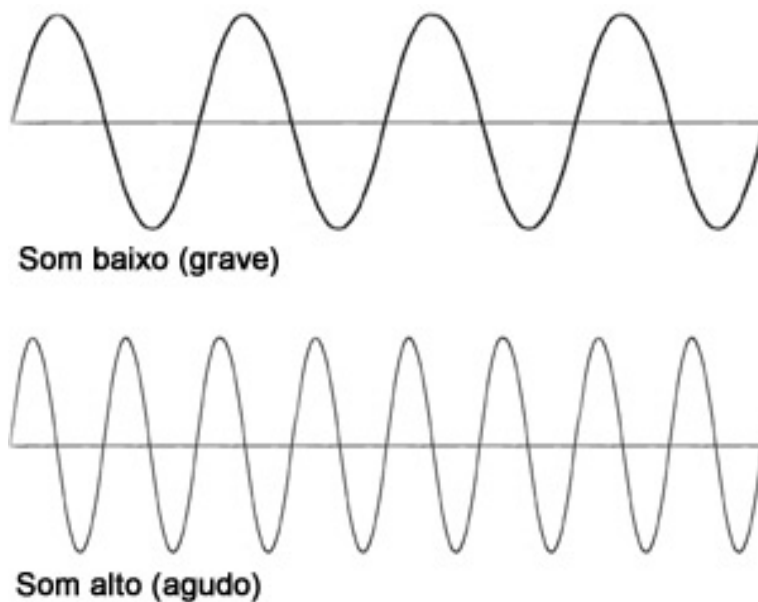
$$f = \frac{1}{T}.$$

Definição 1.8 Chama-se **altura** à grandeza que está diretamente ligada à frequência e nos permite diferenciar sons graves de sons agudos.

Segundo Villas [12], sons de baixa frequência são interpretados pelo nosso sistema auditivo como sons graves, enquanto que sons de alta frequência são interpretados pelo nosso sistema auditivo como sons agudos. Vale salientar também, que a altura do som *não é o volume*, pois o volume do som é uma grandeza interpretada pelos nossos ouvidos a partir da amplitude do mesmo, conforme falaremos a seguir.

A figura que segue, mostra como uma onda se comporta em função da sua altura, isto é, mostra o comportamento de uma onda de alta frequência (som agudo) e uma onda de baixa frequência (som grave).

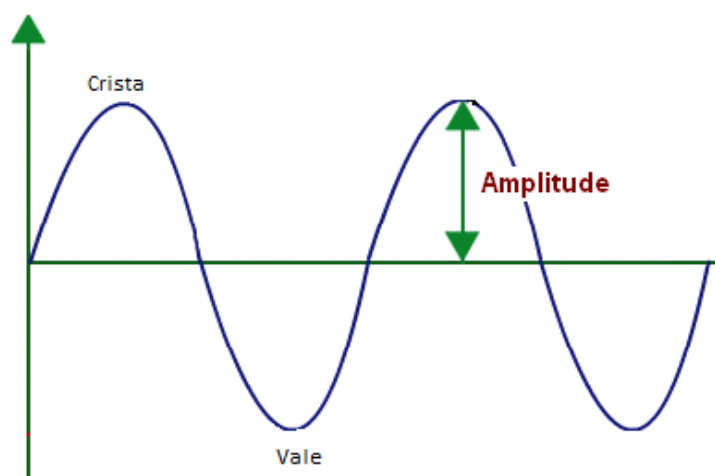
Figura 4 – Sons graves e agudos.



Fonte: <http://institutomusicaldarezzo.com.br/>

Definição 1.9 Chama-se *amplitude*, designada por A , ao valor absoluto do deslocamento máximo dos elementos a partir da posição de equilíbrio.

Figura 5 – Amplitude de uma onda.



Fonte: <https://www.quora.com/How-do-we-perceive-the-amplitude-of-a-sound-wave>

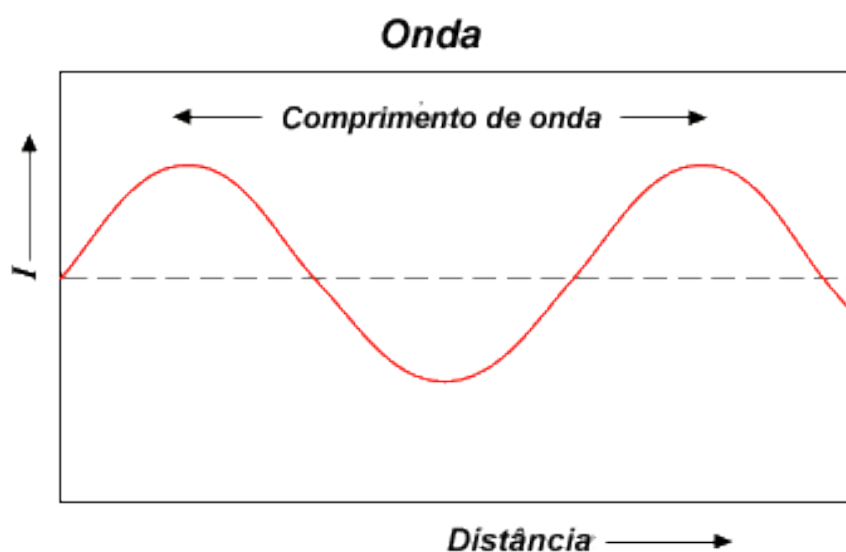
Sons de alta amplitude são sons de alta intensidade, enquanto que sons de baixa amplitude são sons de baixa intensidade. Amplitude sim, *é o volume* do som que se escuta. Uma interpretação geométrica da amplitude é a distância entre o ponto de equilíbrio e a crista, ou a distância entre o ponto de equilíbrio e o vale da onda, conforme mostra a figura anterior:

Definição 1.10 Chama-se **comprimento de onda**, denotado por λ , à distância percorrida pela onda quando esta realiza um ciclo completo.

Analogamente ao período T , o comprimento de onda λ pode ser calculado a partir de qualquer ponto da onda, ou seja, é possível determinar o comprimento de onda a partir dos pontos de equilíbrio, dos vales, das cristas, ou de quaisquer pontos correspondentes na onda, desde que seja realizado um ciclo completo.

A figura a seguir nos mostra o comprimento de onda sendo obtido a partir dos pontos de máximo da mesma.

Figura 6 – Comprimento de onda.



Fonte: <http://maraeducare.blogspot.com/2012/05/qual-o-tamanho-de-uma-onda-sinal-do-seu.html>

1.4 Construção da equação da onda

Nesta seção nos dedicamos a construir, passo a passo, a equação que modela uma onda do tipo senoidal, este tipo da onda já nos diz sugestivamente que função

trigonométrica iremos utilizar para tal construção, qual seja, a função $\text{sen } x$. Sabemos da trigonometria que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, contudo, a fim de possamos trabalhar com a amplitude A da onda, vem

$$y = A \cdot \text{sen } x.$$

Agora, sabemos que $\text{sen } 0 = 0$, isto nos diz que a equação que temos até o presente momento é de uma onda que passa pela origem do sistema. Para termos uma onda um pouco mais geral, façamos

$$y = A \cdot \text{sen}(x - a),$$

em que a denota a distância horizontal entre a origem do sistema e a nova origem da onda. Note também que uma translação horizontal em a unidades de comprimento pode ser remodelada pela equação da velocidade média como sendo $a = vt$, obtendo

$$y = A \cdot \text{sen}(x - vt),$$

e agora a nossa equação da onda depende não apenas da posição x , mas também do tempo t . Continuando, sabemos que a função $\text{sen } x$ possui período $T = 2\pi$, pois $\text{sen } 0 = \text{sen } 2\pi = 0$. Contudo, uma onda em geral possui período $T > 0$, e sabendo que o período T é exatamente igual ao comprimento de onda λ , ambos definidos na seção anterior, adaptaremos mais uma vez nossa equação para que esta admita qualquer período possível, a saber,

$$\begin{aligned} y &= A \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right) \\ &= A \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi vt}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Vamos agora realizar uma simplificação nesta equação, e para isso, lançaremos mão de alguns conceitos e grandezas relacionados com as ondas, a saber, o número de onda, denotado por κ , dado por

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda},$$

e além disso, a frequência angular, denotada por ω é

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda},$$

nos fornecendo agora a seguinte equação

$$y = A \cdot \text{sen}(\kappa x - \omega t). \tag{1.1}$$

É com esta equação que iremos trabalhar na aplicação que daremos no capítulo final deste trabalho. Agora, entrando um pouco na dinâmica do Cálculo Diferencial, note

que a função $y = A \cdot \text{sen}(\kappa x - \omega t)$, depende da posição x e do tempo t , isto é, $y(x, t) = A \cdot \text{sen}(\kappa x - \omega t)$. Além disso,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A\kappa \cdot \cos(\kappa x - \omega t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\kappa^2 \cdot \text{sen}(\kappa x - \omega t),$$

e ainda

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cdot \cos(\kappa x - \omega t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\kappa x - \omega t).$$

Agora, note que

$$\frac{\omega^2}{\kappa^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

e como $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$ e $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\kappa} &= \frac{2\pi v/\lambda}{2\pi/\lambda} \\ &= \frac{2\pi v}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \\ &= v. \end{aligned}$$

E portanto,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

esta equação é chamada de equação da onda, a qual é amplamente estudada em uma área da Matemática chamada Equações Diferenciais Parciais (EDP's).

1.5 Ondas sonoras

Como iremos tratar sobre ondas sonoras na presente seção, então é de se esperar que inicialmente definamos o que é uma onda sonora, e apresentaremos tal definição a seguir:

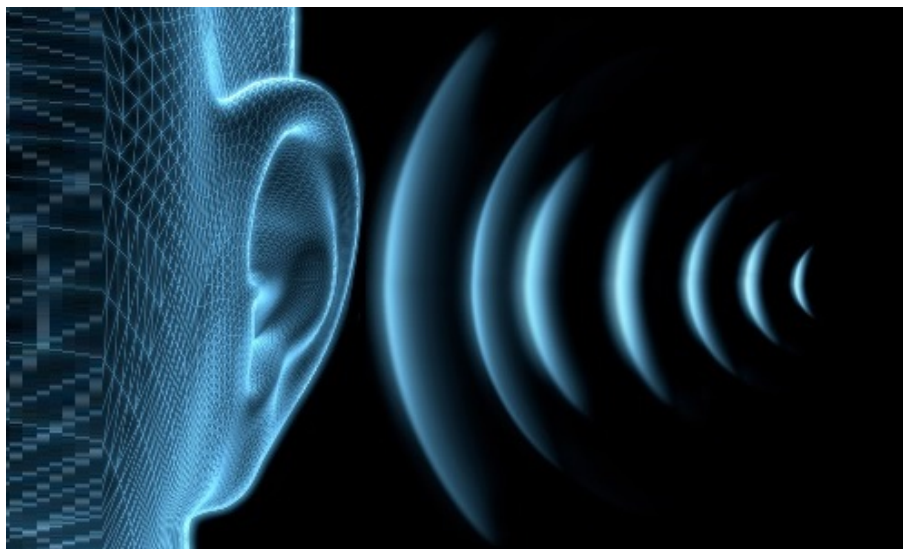
Definição 1.11 *Uma **onda sonora** é uma onda mecânica, longitudinal e tridimensional.*

Note que as ondas sonoras necessitam de um meio para se propagar, elas têm direção de oscilação e propagação paralelas e além do mais, propagam-se em todas as direções. Sabemos também que uma onda sonora possui uma certa velocidade, no entanto, tal velocidade depende do meio pelo qual a onda está sendo propagada. Segundo Halliday [6], a velocidade do som (onda sonora) pode ser calculada pela expressão

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}},$$

em que τ é a propriedade elástica da onda e μ é a propriedade inercial da onda. Esta equação pode ser demonstrada usando a segunda Lei de Newton e pode ser encontrada em [6].

Figura 7 – Propagação de uma onda sonora.



Fonte: <https://www.cienciasresumos.com.br/fisica/ondas-sonoras-resumo/>

A figura anterior representa a propagação do som, e conforme mencionamos anteriormente, esta velocidade muda de acordo com o meio pelo qual a onda se propaga. A seguir, apresentamos uma tabela em que temos a velocidade do som em alguns meios materiais

Tabela 1 - Velocidade do som

Velocidade do som (m/s)	Meio material
331	Ar ($0^{\circ}C$)
343	Ar ($20^{\circ}C$)
965	Hélio
1284	Hidrogênio
1402	Água ($0^{\circ}C$)
1482	Água ($20^{\circ}C$)
1522	Água Salgada
5941	Aço
6000	Granito
6420	Alumínio

Fonte: Halliday [6]

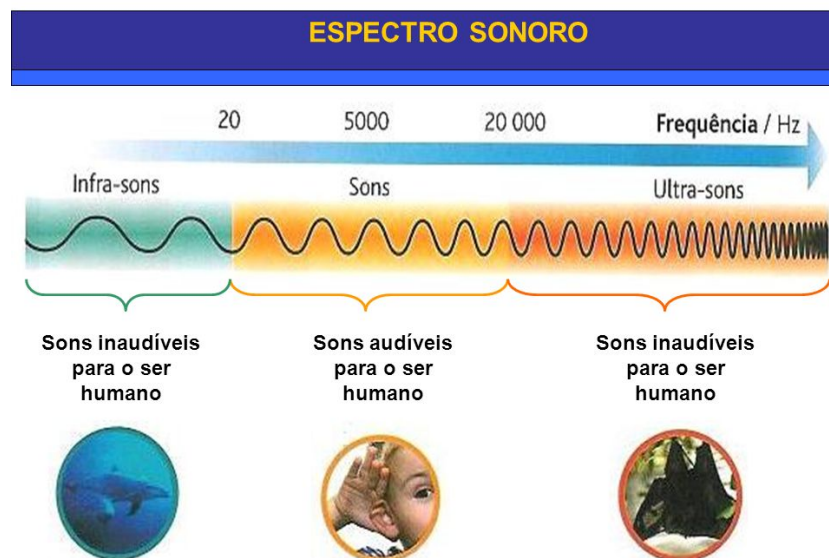
Perceba que os 4 primeiros valores da tabela anterior correspondem a meios gasosos, os 3 posteriores, meios líquidos e os 3 últimos, meios sólidos. Observe também, que as velocidades fornecidas são crescentes na tabela, de modo que valem as seguintes desigualdades:

$$V_{gas.} < V_{liq.} < V_{sol.}$$

Note que, a densidade do meio de propagação de uma onda, interfere na velocidade que a onda se propaga no referido meio. Podemos dizer, a grosso modo, que a densidade do meio é diretamente proporcional à velocidade da onda naquele meio, ou seja, quanto mais denso for o meio, maior será a velocidade da onda neste.

O ouvido humano não é capaz de detectar todo tipo de som que existe na natureza, antes, este possui um certo limite inferior e superior de frequências que podem ser interpretadas pelo nosso aparelho auditivo. O limite mínimo de percepção de sons nos seres humanos, embora este não seja um valor absoluto, é de 20Hz, enquanto que o limite máximo é de 20.000Hz, ou 20kHz. Sons que possuem frequências abaixo de 20Hz são chamados de *infrassons* e, embora não seja percebido pelo ouvido humano pode ser notado por alguns animais, a exemplo de cães. Sons com frequência acima de 20.000Hz são chamados de *ultrassons*, e estes podem ser percebidos por alguns animais, por exemplo, morcegos, e estes limites podem ser notados na figura a seguir:

Figura 8 – Limites da audição humana.



Fonte: <http://francisco-moura-cfq.blogspot.com/2013/06/audicao.html>

Com estas informações conhecidas, entendemos o porquê das grávidas se submeterem a um exame chamado *ultrassonografia*, pois a máquina utiliza o eco gerado através de ondas ultrassônicas com frequência acima de 20.000Hz para visualizar, em tempo real, as estruturas internas do organismo.

Figura 9 – Exame de ultrassonografia.



Fonte: <https://www.dailymail.co.uk/news/article-6556131/Mother-sues-doctors-syndrome-baby-born-aborted-fetus.html>

A seguir apresentamos uma tabela em que mostramos os diferentes limites de audição de alguns animais para comparar com o do ser humano.

Tabela 2 - Espectro auditivo do ser humano e de alguns animais

	Mínimo (Hz)	Máximo (Hz)
Humanos	20	20.000
Elefante	20	10.000
Pássaro	100	15.000
Gato	30	45.000
Cão	10	40.000
Chimpanzé	100	30.000
Baleia	40	80.000
Morcego	20	160.000
Aranha	20	45.000

Fonte: Halliday [6]

O espectro auditivo é um fator que daremos especial atenção no nosso trabalho, pois no capítulo 5, tomaremos uma onda tipo senoidal, a saber, uma onda dada por (1.1) e aproximá-la por meio de um polinômio trigonométrico para uma onda mais simples, chamada onda dente de serra. Por fim, mostraremos que a aproximação gera uma onda dente de serra que possui frequências dentro dos limites de audição do ser humano, mostrando assim que podemos trabalhar com uma onda mais simples, ao invés de trabalharmos com uma onda mais complicada. Porém, no tempo certo chegaremos a essa discussão, e o que acabamos de explicar brevemente ficará mais claro para o leitor.

2 O ouvido humano sob a perspectiva fisiológica

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos de forma breve o funcionamento do ouvido humano, do ponto de vista da Biologia. Neste sentido, os conceitos aqui explorados podem ser estudados com maior riqueza de detalhes nas referências [10], [11] e [14] que tratam de maneira mais sistemática dos temas aqui expostos.

O corpo humano é dotado de cinco sentidos, a saber, o olfato, o paladar, a audição, a visão e o tato. Esses sentidos são desenvolvidos pelo bebê ainda no útero materno e o primeiro deles a desenvolver-se é o tato, o qual desenvolve-se quando a criança possui entre 5 e 6 semanas de vida, possuindo já uma certa sensibilidade ao toque.

Figura 10 – Os 5 sentidos do corpo humano.



Fonte: <https://www.psicologo-milano.it/newblog/intelligenza-fisica/5-sensi/>

O segundo sentido que o bebê desenvolve, sentido este que trataremos aqui é a audição. A partir da semana de número 12, o bebê já consegue detectar alguns sons e ruídos como por exemplo, os batimentos cardíacos da mãe, sua voz, músicas ambientes, dentre outros sons ou ruídos.

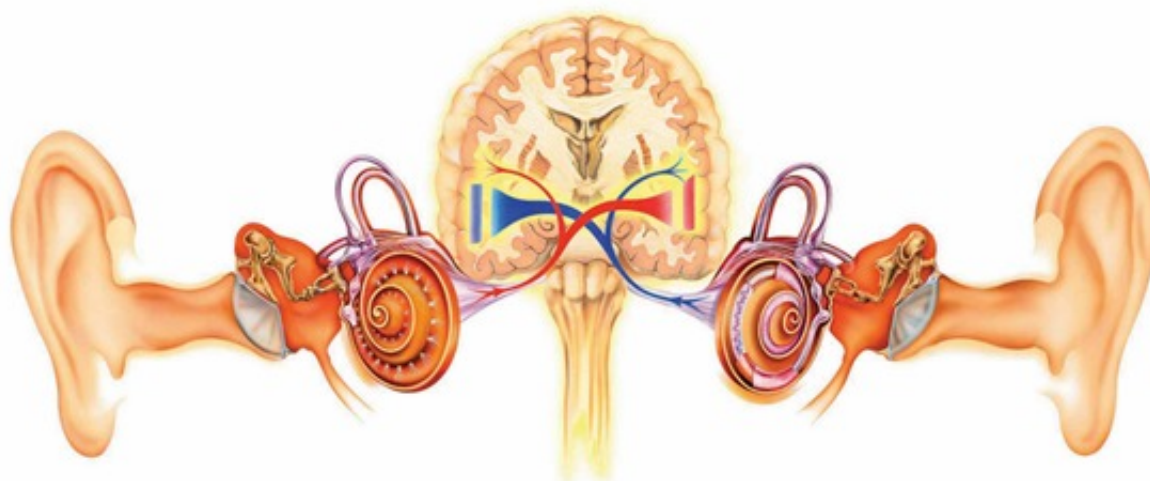
Os demais sentidos são desenvolvidos no segundo e terceiro trimestre de gestação, sendo o último deles a visão, um recém-nascido consegue enxergar, mesmo de forma

embaçada, objetos a uma distância de até 30cm, aproximadamente, desenvolvendo tal sentido com o passar do tempo.

O ouvido humano é o único órgão do corpo humano que possui duas finalidades bem diferentes, sendo uma delas a de nos dar o senso de equilíbrio através de um processo que explicaremos nas próximas seções, e a outra, a de transformar as ondas sonoras que são recebidas pelo ambiente à nossa volta em pulsos elétricos que são enviados para o cérebro, que o interpreta como som e nos permite escutar.

Note que, é interessante percebermos nesse momento que nós, seres humanos, não escutamos com o ouvido, e sim com o cérebro. No decorrer deste capítulo iremos explicar, passo a passo, como funciona o sentido da audição, o qual é chamado pelos fisiologistas de *transdução auditiva*. Na figura a seguir, podemos notar a conexão entre os nossos ouvidos e o nosso cérebro.

Figura 11 – Nossos ouvidos e o cérebro.



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/116530709093559371/>

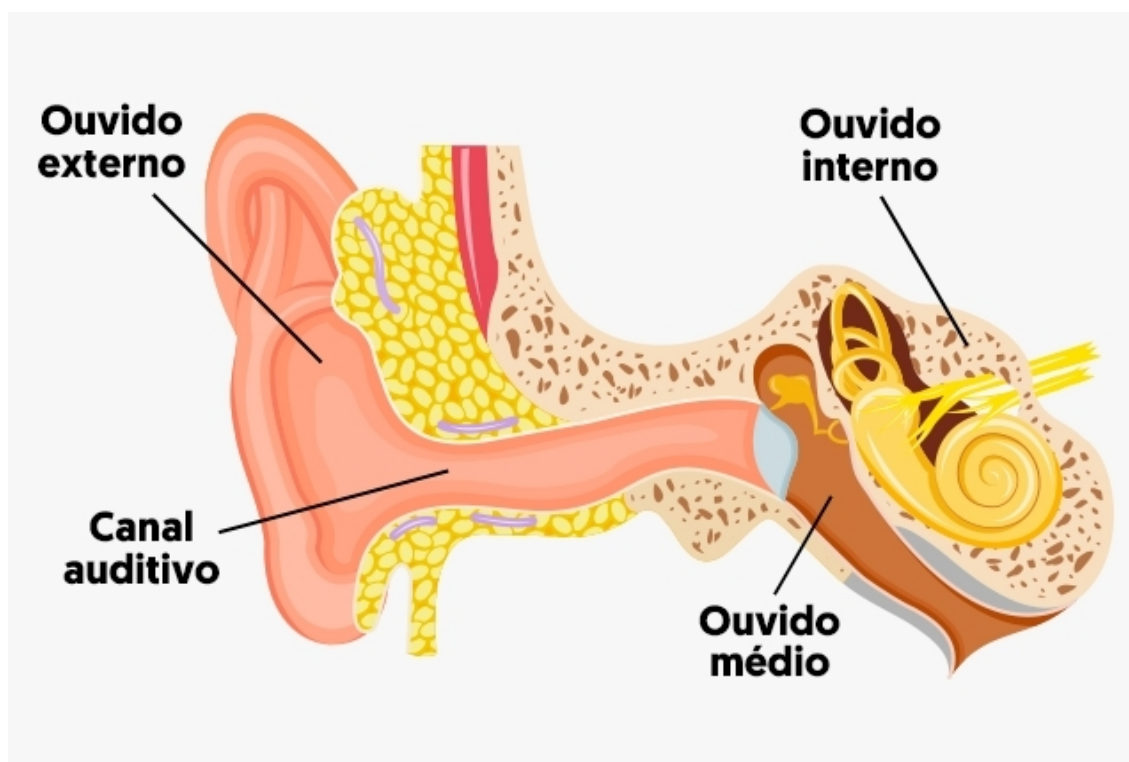
2.2 Componentes e funcionamento do ouvido humano

Na seção anterior, apresentamos de maneira introdutória que a audição é um dos 5 sentidos do corpo humano, e que é o segundo sentido a ser desenvolvido por nós, seres humanos. Também mencionamos que o processo de audição é denominado transdução auditiva, e na presente seção falaremos um pouco sobre o órgão em si, isto é, apresentaremos os componentes do nosso sistema auditivo explicando, na medida do

possível, a função de cada um.

Inicialmente, podemos dividir o nosso ouvido em três partes básicas, a saber, *ouvido externo*, *ouvido médio* e *ouvido interno*. Na figura a seguir, vemos claramente essa divisão desse órgão.

Figura 12 – Ouvido externo, médio e interno.



Fonte: <https://www.miamientdoctors.com/learn/ear-anatomy/>

O ouvido externo é constituído, basicamente, pelo *pavilhão auditivo*, também chamada de *pina*, popularmente conhecida como orelha, e esta possui esse formato, bem modelado para facilitar a captação das ondas sonoras provenientes do mundo exterior, as ondas recebidas pelo pavilhão auditivo, são encaminhadas diretamente para a segunda componente do ouvido externo, qual seja, o canal auditivo, também chamado de *meato acústico externo*, o qual tem início na orelha e fim em uma fina membrana chamada *membrana timpânica*, popularmente chamada de tímpano, que separa o ouvido externo do médio. Quando uma onda sonora passa pelo canal auditivo externo e chega até a membrana timpânica, esta vibra de acordo com a frequência e a intensidade da onda, e é nesse momento que dá-se início ao processo de transdução auditiva, ou seja, a vibração da membrana timpânica constitui-se na *primeira transdução*.

O ouvido médio é uma cavidade preenchida com ar que está conectada com a nossa faringe, isto é, garganta, através da tuba auditiva denominada *tuba de Eustáquio*.¹ A tuba auditiva isola a orelha média, porém, abre-se momentaneamente durante nossa mastigação, bocejo e deglutição, a fim de equilibrar a pressão da orelha média com a pressão atmosférica.

Além da tuba auditiva, o ouvido médio é formado por três minúsculos ossos chamados *martelo*, *bigorna* e *estribo*, a membrana timpânica está ligada diretamente ao martelo, que por sua vez está ligado à bigorna, e este liga-se com o estribo, tal sistema encerra com a conexão entre o estribo e a *janela oval*, de quem falaremos um pouco mais adiante.

Figura 13 – Martelo, bigorna e estribo.



Fonte: <https://www.timpanyaparelhosauditivos.com.br/>

Segundo Silverthorn [10], a disposição dos três ossos da orelha média conectados cria uma espécie de “alavanca” a fim de multiplicar a força da vibração, e desse modo pouca energia sonora é perdida devido ao atrito. Se um som possui alta frequência, de modo que possa causar danos à orelha interna, os pequenos músculos da orelha média puxam os ossos para reduzir seus movimentos a fim de proteger nosso sistema auditivo

¹ Após **Bartolomeo Eustachi** (c.a 1500 - 1574), médico e anatomista italiano, ficou famoso por suas descrições do ouvido e do coração do ser humano.

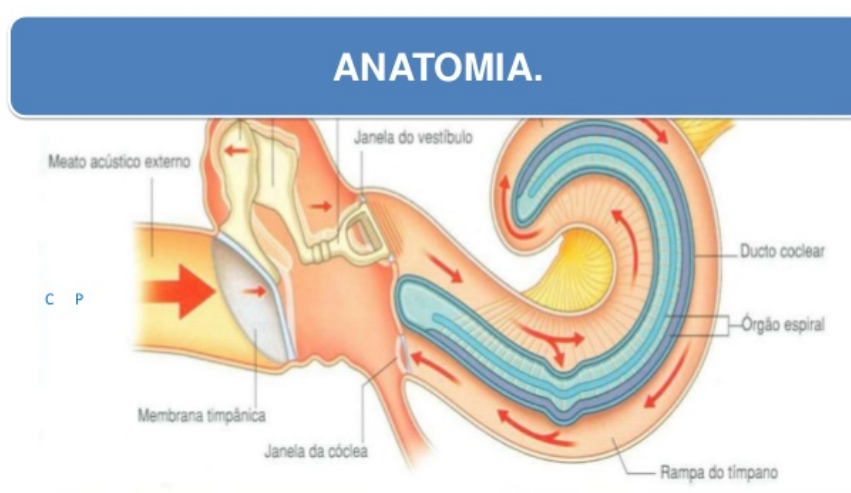
de danos maiores.

A janela oval é uma pequena abertura coberta por membrana que separa o ouvido médio do ouvido interno. É importante notar que a área da janela oval é bem menor do que a área da membrana timpânica, e como área e pressão são grandezas inversamente proporcionais, segue que quanto menor for a área, maior será a pressão exercida. Logo, a força aplicada por unidade de área é aumentada, segundo estudos, de 15 a 20 vezes, promovendo assim uma melhor recepção da onda.

O ouvido interno é formado pela *cóclea*, a qual é uma passagem totalmente preenchida de um fluido, ou líquido, denominado *perilíngua*. A cóclea tem o formato de um caracol e está subdividida em três segmentos por onde as ondas caminham, chamados de *escala vestibular*, *escala timpânica* e um caminho intermediário chamado *escala média*.

Segundo Van de Graaff [11], o fluido presente na escala média é chamado de *endolíngua*. Quando a onda passa pela janela oval e entra na cóclea, esta passa inicialmente pela escala vestibular, em uma espécie de subida. Chegando ao final desta escala, a onda retorna pela escala timpânica, e nesse processo de ir e voltar, a escala média vibra com a passagem da onda pela escala vestibular e pela escala timpânica, esta vibração ocorre em pontos específicos, dependendo claro, da frequência da onda recebida.

Figura 14 – Caminho da onda no interior da cóclea.



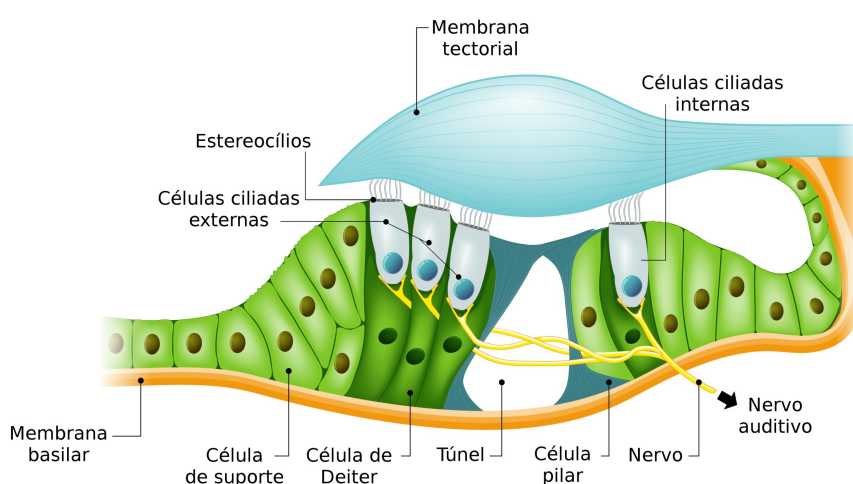
Fonte: <https://www.slideshare.net/lucas cruzreis3/diapositivo-sobre-audio/7>

A figura anterior, mostra todo o caminho percorrido pela onda até que a mesma se dissipa no ar por meio de uma segunda membrana chamada *janela redonda*, que fica ligeiramente abaixo da janela oval, e esse processo de vibração da janela oval, levando a onda para o interior da cóclea é denominado *segunda transdução*.

Segundo Widmaier [14], a cóclea é quase que completamente dividida em seu comprimento longitudinal por um tubo membranoso denominado *ducto coclear*, e este possui receptores sensoriais do nosso sistema auditivo. O lado do ducto coclear mais próximo da escala timpânica é formado por uma outra membrana denominada *membrana basilar*, e nesta membrana existe o chamado *órgão de Corti*², o qual contém as células receptoras sensitivas do nosso ouvido.

O órgão de Corti, está parcialmente coberto por uma membrana denominada *membrana tectória*, que são tecidos bem flexíveis e que se movem em forma de resposta às ondas que percorrem a escala vestibular, de forma que, à medida que as ondas percorrem a cóclea, estas movimentam as membranas basilar e tectória, gerando oscilações (vibrações) para cima e para baixo. Este movimento faz com que a membrana basilar entre em contato com minúsculos cílios, denominado *estereocílios* e que são responsáveis por transformar a onda sonora em pulsos elétricos, que em seguida são encaminhados ao cérebro.

Figura 15 – Transformação de uma onda em pulsos elétricos.



Fonte: <https://www.infoescola.com/audicao/celulas-ciliadas-auditivas/>

² Após Alfonso Giacomo Gaspare Corti (1822 - 1876), anatomista italiano.

Esse processo de transformação de uma onda em pulsos elétricos chamamos de *terceira transdução*, na figura anterior, pode-se perceber de azul a membrana tectória em contato com os estereocílios, que por sua vez estão conectados ao *nervo coclear*, de quem falaremos a seguir.

Quando a cóclea transforma a energia proveniente da onda em pulsos elétricos, esse sinal é enviado diretamente para o nervo coclear, este por sua vez envia ao nosso cérebro o sinal, onde o mesmo interpreta-o como som, e daí a onda é enfim, reconhecida como o som tal qual escutamos no dia dia.

O processo de enviar pulsos nervosos ao cérebro para que o mesmo o interprete como som é o que chamamos de *quarta transdução*. A ligação do neurotransmissor aos neurônios sensoriais auditivos inicia potenciais de ação, e esse processo chamamos de *quinta transdução*.

Resumindo, o nosso aparelho auditivo recebe as ondas sonoras provenientes de meios externos através do pavilhão auditivo, que são encaminhados pelo canal auditivo externo para a membrana timpânica.

A membrana timpânica vibra em resposta à onda recebida e começa a vibrar o sistema dos três ossículos que estão no ouvido médio. Após esse processo a onda chega até o interior da cóclea onde a onda percorre todo o líquido lá presente e chega até a membrana tectória, esta por sua vez vibra em resposta à onda que chega até ela.

Quando a membrana tectória vibra, entra em contato com os estereocílios, que são minúsculos cílios ligados ao nervo coclear, e este atrito entre membrana tectória e estereocílios transforma a onda sonora em pulsos nervosos que, por meio do nervo coclear são enviados até o cérebro, e este interpreta a onda como o som como o conhecemos.

Todo esse processo é denominado *transdução auditiva* e mostra do ponto de vista fisiológico como o nosso sistema auditivo funciona.

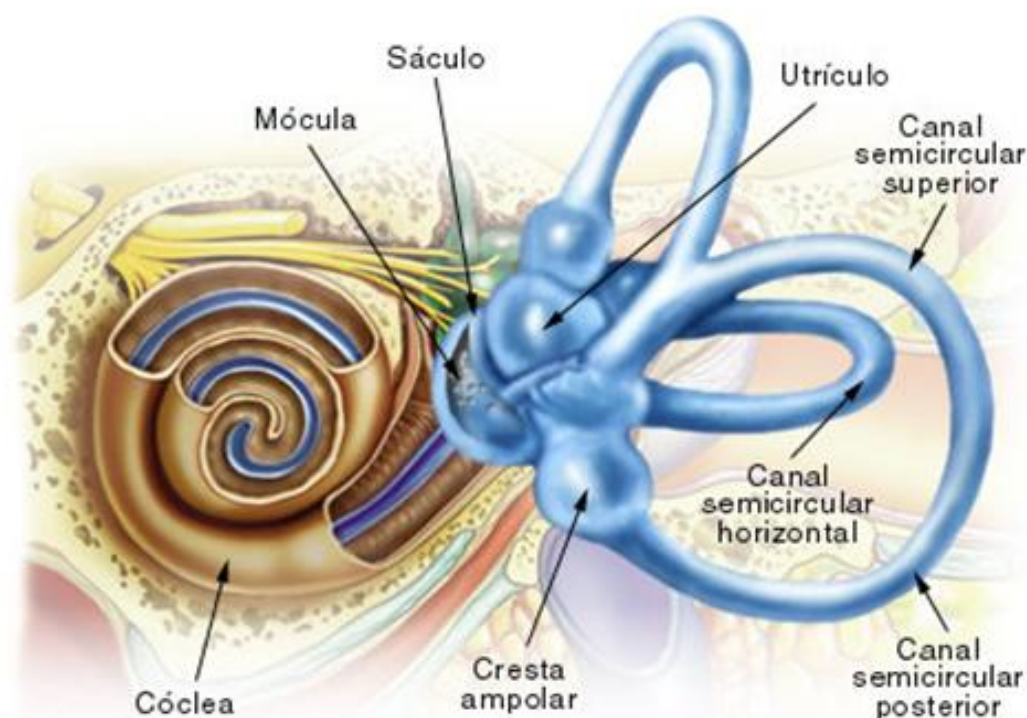
Uma observação que julgamos importante de se fazer é que, caso alguns dos estereocílios estejam com algum tipo de defeito, a pessoa com esse tipo de problema possuirá, conseqüentemente, algum tipo de perda auditiva. Caso estes estejam totalmente danificados, isto é, caso não haja atrito entre a membrana tectória e os estereocílios, o cérebro não consegue interpretar nenhum som, causando automaticamente a surdez.

2.3 A orelha e o equilíbrio

Na seção anterior, mostramos como funciona o processo de transdução auditiva, ou seja, o processo de transformar uma onda sonora em um pulso elétrico que o nosso cérebro interpreta como som. Nesta seção, trataremos de explicar a outra função do nosso ouvido, qual seja, a de nos dá a noção de direção e de equilíbrio.

Primeiramente, vamos apresentar a parte do nosso ouvido que é responsável por essa função, e esta é formada por canais semicirculares ligados à cóclea igualmente preenchidos por fluido, e com uma estrutura tão complexa, que algumas vezes é chamado de *labirinto*. Na figura a seguir, mostramos essa estrutura.

Figura 16 – O labirinto.



Fonte: <https://vencendoavertigem.com/o-que-e-sistema-vestibular/>

Esse mecanismo é capaz de nos informar o local das diferentes partes do nosso corpo, uns em relação aos outros e em relação a meio externo. Segundo Silverthorn [10], a nossa sensação de equilíbrio é mediada por células pilosas, as quais revestem o aparelho vestibular cheio de líquido da orelha interna. Estes receptores não neurais respondem a mudanças na aceleração rotacional, vertical e horizontal, e no posicionamento. Os três canais semicirculares denominados *canal anterior*, *canal posterior* e

lateral, possui as seguintes finalidades:

Canal anterior: É responsável por detectar a rotação da cabeça em movimentos do tipo para a frente e para trás;

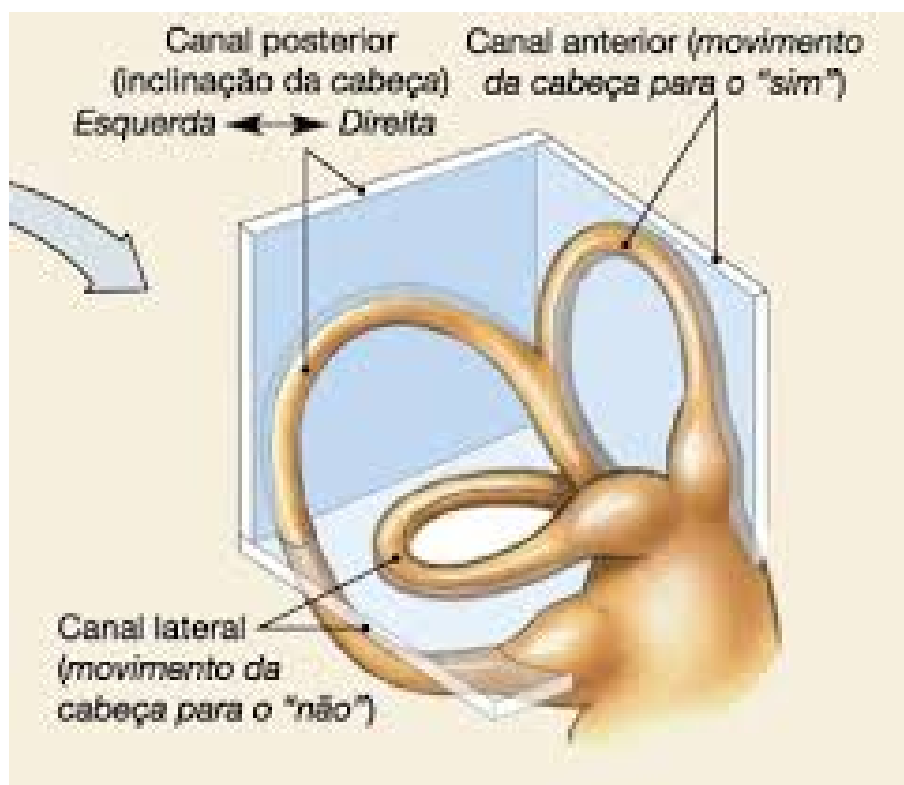
Canal posterior: É responsável por detectar a inclinação da cabeça em movimentos feitos em direção ao ombro direito ou esquerdo;

Canal lateral: É responsável por detectar a rotação da cabeça em movimentos do tipo para a direita ou para a esquerda.

Esse é um sistema bem interessante do nosso aparelho auditivo pois é como se tivéssemos um sistema de coordenadas do tipo *XYZ* em nossa cabeça que nos dá uma sensação de direção e de equilíbrio que são noções de extrema importância para que possamos realizar com eficiência nossas atividades do dia dia.

Na figura a seguir, temos uma ilustração de como o labirinto se comporta dentro de um sistema de coordenadas.

Figura 17 – Canal anterior, posterior e lateral.



Fonte: <http://20.joy.preishitz.de/semicircular-canals-detect.html>

Nosso aparelho auditivo é o único órgão que possui duas funções completamente distintas, contudo, são funções de grande importância na nossa vida cotidiana. A nossa noção de equilíbrio é indispensável para que possamos executar atividades como andar, dirigir, e até mesmo para que possamos nos manter de pé, de modo que se uma pessoa possui algum tipo de dano nessa função, suas atividades diárias ficariam seriamente comprometidas.

Uma das funções da audição é a aquisição da linguagem. Esta acontece desde o dia em que nascemos e começamos a nos comunicar com os nossos pais e parentes. Conforme ouvimos as palavras pronunciadas repetidamente pelas pessoas à nossa volta, somos capazes de aprendê-las e, com o passar do tempo, pronunciá-las.

Uma pessoa que possui algum tipo de perda auditiva, o que chamamos de *Deficiente Auditivo* (DA) possui uma certa dificuldade em pronunciar algumas palavras, justamente pela porcentagem de audição que não tem, o que atrasa um pouco a sua aquisição de linguagem. Contudo, com o acompanhamento de um profissional como um fonoaudiólogo, a pessoa com deficiência auditiva pode, por meio de tratamento, falar fluentemente.

Existe uma outra forma de tratar pessoas com deficiência auditiva, por meio de um procedimento cirúrgico chamado *implante coclear*, que é um dispositivo eletrônico, parcialmente implantado na pessoa e que proporciona ao usuário uma sensação auditiva próxima à fisiológica.

Agora, uma pessoa que tenha perda total da audição, o que chamamos de *Surdo*, possui um grau a mais de dificuldade no que diz respeito à aquisição da linguagem, pois como não escuta, o aprendizado da parte fonética de sua língua materna fica comprometida. Mesmo assim, uma pessoa surda pode, mediante tratamento com um especialista, adquirir a linguagem falada.

Uma outra forma de comunicação com pessoas surdas é através da língua de sinais, no nosso país chamada de LIBRAS (Língua Brasileira de Sinais). A comunicação por meio da LIBRAS é feita através de sinais feitos principalmente com as mãos, em que cada sinal corresponde a uma palavra, ou conjunto de palavras, e que possui toda uma estrutura gramatical com sintaxe, semântica, literatura, etc.

3 Um Pouco de Álgebra Linear

3.1 Introdução

No presente capítulo, introduzimos alguns dos principais conceitos e resultados da Álgebra Linear, conceitos e resultados estes que são de importância fundamental para que tenhamos um referencial teórico necessário a fim de aplicá-los nos capítulos posteriores.

A Álgebra Linear constitui-se como uma importante área de estudos da matemática, uma vez que generaliza a álgebra de vetores, estudada de um ponto de vista bem particular, a saber, o plano \mathbb{R}^2 e o espaço \mathbb{R}^3 . Tratamos aqui sobre espaços vetoriais, que são conjuntos não vazios munidos de duas operações e que cumprem um certo conjunto de axiomas; Falamos também sobre subespaços vetoriais, conjuntos LI e LD , base e dimensão de um espaço vetorial. Acrescentamos a estrutura de produto interno sobre os espaços vetoriais, gerando assim o que chamamos de espaços vetoriais com produto interno, e introduzimos também a ideia de vetores ortogonais. Todos esses conceitos serão úteis e no momento certo, serão utilizados a fim de cumprir os objetivos desse trabalho.

Para o desenvolvimento deste capítulo nos baseamos pelas referências [1] e [8], onde se pode encontrar uma exposição detalhada e elegante sobre a Álgebra Linear e suas aplicações.

3.2 Espaços vetoriais

Definição 3.1 *Um conjunto $V \neq \emptyset$ munido de duas operações, a saber, uma **Adição** e um **Multiplicação**, definidos a seguir:*

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$(u, v) \longmapsto u + v$$

e

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$(\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot v,$$

é um **espaço vetorial** sobre \mathbb{R} quando os seus elementos, chamados **vetores**, cumprem 8 **axiomas** que estão listados a seguir:

- (i) **Associatividade:** $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V;$
- (ii) **Comutatividade:** $u + v = v + u, \forall u, v \in V;$
- (iii) **Elemento neutro aditivo:** $\exists \mathbf{0} \in V ; u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u, \forall u \in V;$
- (iv) **Elemento inverso aditivo:** $\forall u \in V, \exists (-u) \in V ; u + (-u) = \mathbf{0};$
- (v) **Associatividade:** $\forall u \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (\beta u) = (\alpha\beta) \cdot u;$
- (vi) **Elemento neutro multiplicativo:** $\exists 1 \in \mathbb{R} ; u \cdot 1 = 1 \cdot u = u, \forall u \in V;$
- (vii) **Distributividade 1:** $\forall u, v \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v;$
- (viii) **Distributividade 2:** $\forall u \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha u + \beta u.$

Exemplo 3.1 Seja o conjunto $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é uma função}\}$ munido das operações

$$\begin{aligned} f + g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x). \end{aligned}$$

Então, $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

Solução: De fato, basta mostrar que este conjunto munido destas operações verifica os 8 axiomas. Sejam $f, g, h \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

(i)

$$\begin{aligned} [f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + g(x) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= [(f + g) + h](x); \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= g(x) + f(x) \\ &= (g + f)(x); \end{aligned}$$

(iii) Seja $\mathbf{0}$ a função identicamente nula, isto é, $\mathbf{0}(x) \equiv 0$, com isso

$$\begin{aligned}(f + \mathbf{0})(x) &= f(x) + \mathbf{0}(x) \\ &= \mathbf{0}(x) + f(x) \\ &= (\mathbf{0} + f)(x) \\ &= f(x);\end{aligned}$$

(iv) Seja $(-f)$ a função inverso aditivo de $f(x)$, isto é, $(-f)(x) = -f(x)$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}[f + (-f)](x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= (f - f)(x) \\ &= \mathbf{0}(x);\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) \cdot f(x) &= \alpha\beta f(x) \\ &= \alpha \cdot (\beta f)(x);\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}(1 \cdot f)(x) &= 1 \cdot f(x) \\ &= f(x);\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}[(\alpha + \beta) \cdot f](x) &= [(\alpha f) + (\beta f)](x) \\ &= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x);\end{aligned}$$

(viii)

$$\begin{aligned}[\alpha \cdot (f + g)](x) &= [(\alpha \cdot f) + (\alpha \cdot g)](x) \\ &= (\alpha \cdot f)(x) + (\alpha \cdot g)(x) \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x).\end{aligned}$$

Concluindo que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

□

3.3 Subespaços vetoriais

Definição 3.2 *Seja V um espaço vetorial. Um conjunto $\emptyset \neq W \subset V$ é um **subespaço vetorial** de V se:*

- (i) $\mathbf{0} \in W$;
- (ii) $u + v \in W, \forall u, v \in W$;
- (iii) $\alpha u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}, e \forall u \in W$.

Exemplo 3.2 *O subconjunto $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações usuais de adição e multiplicação é um subespaço de $V = \mathbb{R}^2$.*

Solução: Com efeito,

- (i) $u = (x_1, 0) \in W$ e, em particular, $x_1 = 0$ produz o vetor $u = (0, 0)$. Logo, $\mathbf{0} \in W$;
- (ii) $u = (x_1, 0), v = (y_1, 0) \in W \Rightarrow u + v = (x_1 + y_1, 0) \in W$;
- (iii) $\alpha \in \mathbb{R}, u \in W \Rightarrow \alpha u = \alpha(x_1, 0) = (\alpha x_1, \alpha 0) = (\alpha x_1, 0) \in W$.

Portanto, W é um subespaço de $V = \mathbb{R}^2$.

□

3.4 Conjuntos LI e LD, base e dimensão

Definição 3.3 *Sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Diz-se que $u \in V$ é **combinação linear** de $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ quando*

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Definição 3.4 *Seja V um Espaço Vetorial e $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$. Diz-se que A é um conjunto **Linearmente Independente**, ou simplesmente **LI**, quando a equação*

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \mathbf{0}$$

admite apenas a solução trivial $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Caso pelo menos um desses escalares for não nulo, isto é, $\exists a_i \neq 0$ com $1 \leq i \leq n$, diz-se que A é um conjunto *Linearmente Dependente*, ou simplesmente *LD*.

Sejam u_1, u_2, \dots, u_n vetores de um espaço vetorial V . O conjunto denotado por

$$G(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

é o conjunto de todas as combinações lineares de u_1, u_2, \dots, u_n e é chamado de *subespaço gerado* por u_1, u_2, \dots, u_n .

Definição 3.5 *Seja V um espaço vetorial. Um conjunto de vetores de V*

$$A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

*é uma **base** para V se:*

- (i) A é LI;
- (ii) $V = G(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Definição 3.6 *Seja V um espaço vetorial. Define-se por **dimensão** de V ao número de vetores que pertencem a uma base de V . Representamos a dimensão de V por*

$$\dim V.$$

Uma base importante para o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$ é a chamada *base canônica* dada por

$$C = \{(1, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1, 0), (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

que possui n vetores, e isto nos diz que $\dim \mathbb{R}^n = n$.

3.5 Espaços vetoriais com produto interno

Definição 3.7 *Seja V um espaço vetorial. Define-se por **produto interno** a aplicação*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

que possui as seguintes propriedades:

- (i) $\langle u, u \rangle \geq 0, \forall u \in V$;
- (ii) $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$;

$$(iii) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V;$$

$$(iv) \langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

$$(v) \langle u + v, z \rangle = \langle u, z \rangle + \langle v, z \rangle, \forall u, v, z \in V.$$

Com isso, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dito um *espaço vetorial com produto interno*. É importante também frisar que, como $\langle u, u \rangle \geq 0$, então o número $\sqrt{\langle u, u \rangle}$ é um número real bem definido, chamado *norma* do vetor u , e possui as seguintes propriedades:

$$(i) \|u\|^2 = \langle u, u \rangle, \forall u \in V;$$

$$(ii) \|u\| \geq 0, \forall u \in V;$$

$$(iii) \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0;$$

$$(iv) \|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in V;$$

$$(v) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V. \text{ (Desigualdade Triangular)}$$

Exemplo 3.3 Seja $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ o espaço das funções reais contínuas no compacto $[a, b]$, e sejam $f, g \in V$ funções. Seja também a aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \, dx. \end{aligned}$$

Então, $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno.

Solução: Sejam $f, g, h \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

(i)

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \int_a^b f(x)f(x) \, dx \\ &= \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \\ &\geq 0; \end{aligned}$$

(ii) Suponha que $\langle f, f \rangle = 0$. Então,

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0 \Rightarrow f \equiv \mathbf{0},$$

pois como f é uma função contínua em $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x) dx = 0$, então $f \equiv \mathbf{0}$. Esse é um resultado da Análise Matemática.

(iii)

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x)g(x) dx \\ &= \int_a^b g(x)f(x) dx \\ &= \langle g, f \rangle;\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\langle \lambda f, g \rangle &= \int_a^b \lambda f(x)g(x) dx \\ &= \lambda \int_a^b f(x)g(x) dx \\ &= \lambda \langle f, g \rangle;\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\langle f + g, h \rangle &= \int_a^b [f + g](x)h(x) dx \\ &= \int_a^b [f(x) + g(x)]h(x) dx \\ &= \int_a^b [f(x)h(x) + g(x)h(x)] dx \\ &= \int_a^b f(x)h(x) dx + \int_a^b g(x)h(x) dx \\ &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle.\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno.

□

O leitor interessado em maiores detalhes, indicamos a referência [8], que possui um tratamento elegante sobre este conteúdo. Agora, como $\|u\|$ é um número real bem definido, qualquer que seja o vetor $u \in V$, faz sentido falar em vetores $u \in V$, tais que $\|u\| = 1$, e tais vetores são ditos *normalizados*, ou ainda, *vetores unitários*.

Para normalizar um vetor u , basta tomar sua norma $\|u\|$ e definir $w = \frac{u}{\|u\|}$. Daí, w é um vetor tal que $\|w\| = 1$.

3.6 A desigualdade de Cauchy-Schwarz

Na seção anterior, falamos sobre produto interno e sobre norma. Esta seção será dedicada à demonstração de uma importante desigualdade que relaciona o produto interno e a norma entre vetores de um espaço vetorial V . Esta desigualdade é chamada de *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*¹ e seu enunciado, bem como sua demonstração, estão apresentados a seguir:

Proposição 3.1 *Sejam $u, v \in V$. Então, vale que*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Demonstração: De fato, sejam $u, v \in V$ de forma que $\|u\| = \|v\| = 1$. Então, por um lado, $\|u + v\|^2 \geq 0$, e por outro lado

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2 + 2\langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned} 2 + 2\langle u, v \rangle \geq 0 &\Rightarrow 2\langle u, v \rangle \geq -2 \\ &\Rightarrow \langle u, v \rangle \geq -1; \end{aligned}$$

Analogamente, como $\|u - v\|^2 \geq 0$, pelo mesmo cálculo feito para $\|u + v\|^2$, temos

$$\|u - v\|^2 = 2 - 2\langle u, v \rangle,$$

obtendo

$$\begin{aligned} 2 - 2\langle u, v \rangle \geq 0 &\Rightarrow -2\langle u, v \rangle \geq -2 \\ &\Rightarrow 2\langle u, v \rangle \leq 2 \\ &\Rightarrow \langle u, v \rangle \leq 1. \end{aligned}$$

Então, $-1 \leq \langle u, v \rangle \leq 1 \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq 1$. Ora, tomando agora $u, v \in V$ vetores não nulos quaisquer, pelo fato destes poderem ser normalizados, o valor absoluto do produto interno entre tais vetores é menor do que ou igual a 1, ou seja,

¹ Após **Augustin Louis Cauchy** (1789, 1857), matemático francês e **Karl Hermann Amandus Schwarz** (1843, 1921), matemático alemão.

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right| \leq 1 &\Rightarrow \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \\ &\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \end{aligned}$$

e segue a desigualdade. ■

Essa desigualdade desempenha um importante papel para determinar o ângulo entre dois vetores. De fato, sejam $u, v \in V$, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz vale

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| &\Rightarrow \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1, \end{aligned}$$

e perceba que existe uma relação entre as funções $\sin \theta$, $\cos \theta$ e a desigualdade anterior, e como a função $\cos \theta$ é bijetiva no intervalo $[0, \pi]$, para todo $u, v \in V$ existe um $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

e isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.8 *Sejam $u, v \in V - \{0\}$, o **ângulo** entre os vetores u e v é determinado pela expressão*

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

3.7 Vetores ortogonais

Na seção anterior, vimos que o ângulo entre vetores está bem definido, de modo que faz sentido falar em vetores cujo ângulo formado é de 90° , tais vetores são ditos *ortogonais*, o que motiva a seguinte definição:

Definição 3.9 *Dados $u, v \in V$, diz-se que u e v são **ortogonais**, o que denotamos por*

$$u \perp v,$$

quando o ângulo entre u e v é de 90° .

Uma consequência interessante das definições anteriores é o que demonstramos a seguir:

Proposição 3.2 *Dados $u, v \in V - \{0\}$ vale que u e v são ortogonais se, e somente se, o produto interno entre estes for igual a zero.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponha que $u, v \in V - \{0\}$ sejam ortogonais. Então,

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

ou equivalentemente

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta.$$

Mas, $u \perp v$, por hipótese, o que nos dá o valor de $\theta = 90^\circ$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta \\ &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos 90^\circ \\ &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Suponha que $\langle u, v \rangle = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \\ &= \frac{0}{\|u\| \cdot \|v\|} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e com isso

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \arccos 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ.$$

Logo, $u \perp v$. ■

É claro que dado um vetor $u \in V$ não existe um único vetor $v \in V$ tal que $u \perp v$, pois se $u \perp v$ vale também que $u \perp (-v)$ assim como $u \perp 0$, por convenção. Então, dado um vetor em um espaço vetorial existe um conjunto que vetores que são ortogonais a u , e isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.10 *Seja V um espaço vetorial e $W \subset V$ um subespaço de V . Define-se por **complemento ortogonal** de W ao conjunto*

$$W^\perp = \{u \in V ; \langle u, w \rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

Um resultado clássico sobre o complemento ortogonal é o que demonstraremos a seguir:

Proposição 3.3 *Seja V um espaço vetorial e $W \subset V$ um subespaço de V . Então, W^\perp é um subespaço de V .*

Demonstração: De fato, note primeiramente que

$$(i) \langle u, 0 \rangle = 0, \forall u \in W \Rightarrow 0 \in W^\perp;$$

(ii) Sejam $u, v \in W^\perp$ e $w \in W$. Então,

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e portanto, $u + v \in W^\perp$.

(iii) Finalmente, sejam $u \in W^\perp$, $w \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} \langle \alpha u, w \rangle &= \alpha \langle u, w \rangle \\ &= \alpha \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e portanto, $\alpha u \in W^\perp$. Logo, W^\perp é um subespaço de V . ■

Exemplo 3.4 *Seja $V = \mathbb{R}^3$ e*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = 0\}.$$

Determine W^\perp .

Solução: Por definição, temos

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{u \in V ; \langle u, w \rangle = 0, \forall w \in W\} \\ &= \{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x_0, y_0, z_0), (x, y, 0) \rangle = 0, \forall (x, y, 0) \in W\}. \end{aligned}$$

Agora tome o conjunto $U = \{(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 ; x_1 = y_1 = 0\}$, e mostremos que $U = W^\perp$. De fato, dado $u \in U$ e $w \in W$ vem

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= \langle (0, 0, z_1), (x, y, 0) \rangle \\ &= 0 \cdot x + 0 \cdot y + z \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e com isso $u \in W^\perp$, e portanto, $U \subset W^\perp$. Para mostrar a inclusão contrária, se $v \in W^\perp$, então, v é um vetor ortogonal ao plano XY , ou seja, $v = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow v = w_1 \times w_2$ com $w_1, w_2 \in W$. Portanto, $v_1 = v_2 = 0$, ou seja, $v \in U$, e portanto $W^\perp \subset U$. Ora, as duas inclusões nos permite concluir que $W^\perp = U$. Logo,

$$W^\perp = \{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 ; x_0 = y_0 = 0\}.$$

□

Se W é um subespaço de V , então, qualquer que seja $u \in V$, este é escrito de forma única na forma $u = w + w_1$, em que $w \in W$ e $w_1 \in W^\perp$. Desse modo, o vetor w é chamado de *projeção ortogonal* de u sobre w , denotado por

$$\text{proj}_w(u),$$

e determinamos tal vetor pela seguinte expressão:

$$\text{proj}_W(u) = \frac{\langle u, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$

Agora, seja $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base para o espaço vetorial V . Existe um processo que permite tomar tal base que, em geral, é formada por vetores que não são ortogonais entre si e torná-la uma base de vetores ortogonais dois a dois. Então, a nova base será chamada de *base ortogonal*, e o processo de obtenção desta base é denominado *Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt*.²

Seja $w_1 = u_1$, queremos determinar o valor do escalar λ de modo que o vetor w_2 seja ortogonal a w_1 com

$$w_2 = u_2 - \lambda w_1;$$

Para que $w_2 \perp w_1$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle w_2, w_1 \rangle = 0 &\Rightarrow \langle u_2 - \lambda w_1, w_1 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle u_2, w_1 \rangle - \lambda \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle u_2, w_1 \rangle = \lambda \langle w_1, w_1 \rangle \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}; \end{aligned}$$

Daí, vem

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1,$$

² Após **Jørgen Pedersen Gram** (1850 - 1916), matemático dinamarquês e **Erhard Schmidt** (1876 - 1959) matemático alemão.

o qual é um vetor ortogonal a w_1 . Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \langle w_2, w_1 \rangle &= \left\langle u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1, w_1 \right\rangle \\
 &= \langle u_2, w_1 \rangle - \left\langle \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1, w_1 \right\rangle \\
 &= \langle u_2, w_1 \rangle - \left\langle \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, w_1 \right\rangle \\
 &= \langle u_2, w_1 \rangle - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle \\
 &= \langle u_2, w_1 \rangle - \langle u_2, w_1 \rangle \frac{\langle w_1, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \\
 &= \langle u_2, w_1 \rangle - \langle u_2, w_1 \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Continuando o processo, queremos encontrar um terceiro vetor w_3 ortogonal a w_2 e w_1 , isto é,

$$w_3 \perp w_2 \text{ e } w_3 \perp w_1,$$

e para isso considere o vetor

$$w_3 = u_3 - \lambda_2 w_2 - \lambda_1 w_1;$$

Precisamos determinar os valores de λ_1, λ_2 de forma que w_3 seja ortogonal a w_1, w_2 .

$$\begin{aligned}
 \langle w_3, w_1 \rangle = 0 &\Rightarrow \langle u_3 - \lambda_2 w_2 - \lambda_1 w_1, w_1 \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \langle u_3, w_1 \rangle - \langle \lambda_2 w_2, w_1 \rangle - \langle \lambda_1 w_1, w_1 \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \langle u_3, w_1 \rangle - \lambda_2 \langle w_2, w_1 \rangle - \lambda_1 \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \langle u_3, w_1 \rangle - \lambda_1 \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \langle u_3, w_1 \rangle = \lambda_1 \langle w_1, w_1 \rangle \\
 &\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle},
 \end{aligned}$$

agora perceba que, da terceira para a quarta implicação, o termo $\lambda_2 \langle w_2, w_1 \rangle$ simplesmente desaparece, isso se dá pelo fato $w_2 \perp w_1$ conforme já sabemos da primeira construção. Assim sendo, obtemos

$$\lambda_1 = \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}.$$

Vamos agora determinar λ_2 :

$$\begin{aligned}
 \langle w_3, w_2 \rangle = 0 &\Rightarrow \langle u_3 - \lambda_2 w_2 - \lambda_1 w_1, w_2 \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \langle u_3, w_2 \rangle - \langle \lambda_2 w_2, w_2 \rangle - \langle \lambda_1 w_1, w_2 \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \langle u_3, w_2 \rangle - \lambda_2 \langle w_2, w_2 \rangle - \lambda_1 \langle w_1, w_2 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle u_3, w_2 \rangle - \lambda_2 \langle w_2, w_2 \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle u_3, w_2 \rangle &= \lambda_2 \langle w_2, w_2 \rangle \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}, \end{aligned}$$

e novamente da terceira para a quarta implicação o termo $\lambda_1 \langle w_1, w_2 \rangle$ desaparece devido a ortogonalidade entre w_1 e w_2 . Portanto, tem-se

$$\lambda_2 = \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle},$$

e daí

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2,$$

e com esta igualdade os vetores w_1, w_2, w_3 são dois a dois ortogonais, isto é,

$$w_1 \perp w_2, \quad w_1 \perp w_3, \quad w_2 \perp w_3.$$

Usando Indução Matemática, pode-se concluir esse processo chamando

$$w_n = u_n - \lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 - \dots - \lambda_{n-1} w_{n-1},$$

e basta determinar os valores de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ de forma que o vetor w_n seja ortogonal a cada um dos vetores w_1, w_2, \dots, w_{n-1} . Repetindo o mesmo processo encontra-se

$$\lambda_1 = \frac{\langle u_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}, \dots, \lambda_{n-1} = \frac{\langle u_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2};$$

Os escalares

$$\lambda_i = \frac{\langle u_n, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$$

são denominados *coeficientes de Fourier*³ de u_n em relação a w_i . Além disso, vale

$$\begin{aligned} w_n &= u_n - \lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 - \dots - \lambda_{n-1} w_{n-1} \\ &= u_n - \frac{\langle u_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle u_n, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \dots - \frac{\langle u_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}. \end{aligned}$$

Por fim, como todo vetor não nulo pode ser normalizado, após o fim deste processo, podemos normalizar cada um dos vetores da *base ortogonal* e gerar uma *base ortonormal*. Esse processo é chamado de *Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt*.

Ainda sobre projeções, bases ortogonal e ortonormal temos os seguintes resultados:

³ Após **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (1768 - 1830), matemático francês

Proposição 3.4 *São verdadeiras as seguintes afirmativas:*

(a) Se $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal de um espaço vetorial V com produto interno e $u \in V$. Então,

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n;$$

(b) Se $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de um espaço vetorial V com produto interno e $u \in V$. Então,

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Demonstração:

(a) De fato, como $u \in V$ e A é uma base para V , existem escalares $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n,$$

e como A é uma base ortogonal, vale

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \|v_i\|^2, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e daí, segue

$$\begin{aligned} \langle u, v_i \rangle &= \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_i v_i + \dots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= \langle c_1 v_1, v_i \rangle + \langle c_2 v_2, v_i \rangle + \dots + \langle c_i v_i, v_i \rangle + \dots + \langle c_n v_n, v_i \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + c_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle \\ &= c_i \|v_i\|^2. \end{aligned}$$

e com isso, conclui-se que $\langle u, v_i \rangle = c_i \|v_i\|^2 \Rightarrow c_i = \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$. Logo,

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n;$$

(b) Como A é uma base ortonormal, vale $\|v_i\| = 1$ para $1 \leq i \leq n$. Logo, do item anterior, segue

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

■

Proposição 3.5 *Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial V com produto interno. Então,*

(a) Se $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal de W e $u \in V$, então

$$\text{proj}_W(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n;$$

(b) Se $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de W e $u \in V$, então

$$\text{proj}_W(u) = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Demonstração:

(a) Como sabemos, dado $u \in V$, este pode ser escrito na forma $u = w + w_1$ em que $w = \text{proj}_W(u) \in W$ e $w_1 \in W^\perp$. Além disso, de $w \in W$ e A ser uma base ortogonal para W , obtemos do resultado anterior

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(u) &= \frac{\langle w, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle w, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle w, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \\ &= \frac{\langle u - w_1, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u - w_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u - w_1, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \\ &= \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \\ &\quad - \frac{\langle w_1, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \dots - \frac{\langle w_1, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \\ &= \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n, \end{aligned}$$

pois $\langle w_1, v_i \rangle = 0$ com $1 \leq i \leq n$, uma vez que $w_1 \perp v_i$, e segue o resultado.

(b) Como A é uma base ortonormal, segue que $\|v_i\| = 1$ para $1 \leq i \leq n$. Então, pelo item anterior, resulta

$$\text{proj}_W(u) = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

■

4 O método de aproximação por mínimos quadrados

No presente capítulo, vamos aplicar os conceitos vistos nos capítulos precedentes utilizando um método denominado *método dos mínimos quadrados* para tratar sobre *aproximações* de funções $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ para uma outra função $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ que seja, relativamente, “mais simples” de se trabalhar. Contudo, precisamos dar sentido matemático ao que acabamos de apresentar com palavras, e nas próximas linhas e seções vamos construir matematicamente tal ideia.

4.1 O teorema da melhor aproximação

Inicialmente, considere V um espaço vetorial e W um subespaço de V . Conforme vimos no capítulo anterior, cada vetor $u \in V$ é escrito de maneira única na forma $u = w + w_1$ em que $w \in W$ e $w_1 \in W^\perp$, e agora vamos resolver o seguinte problema:

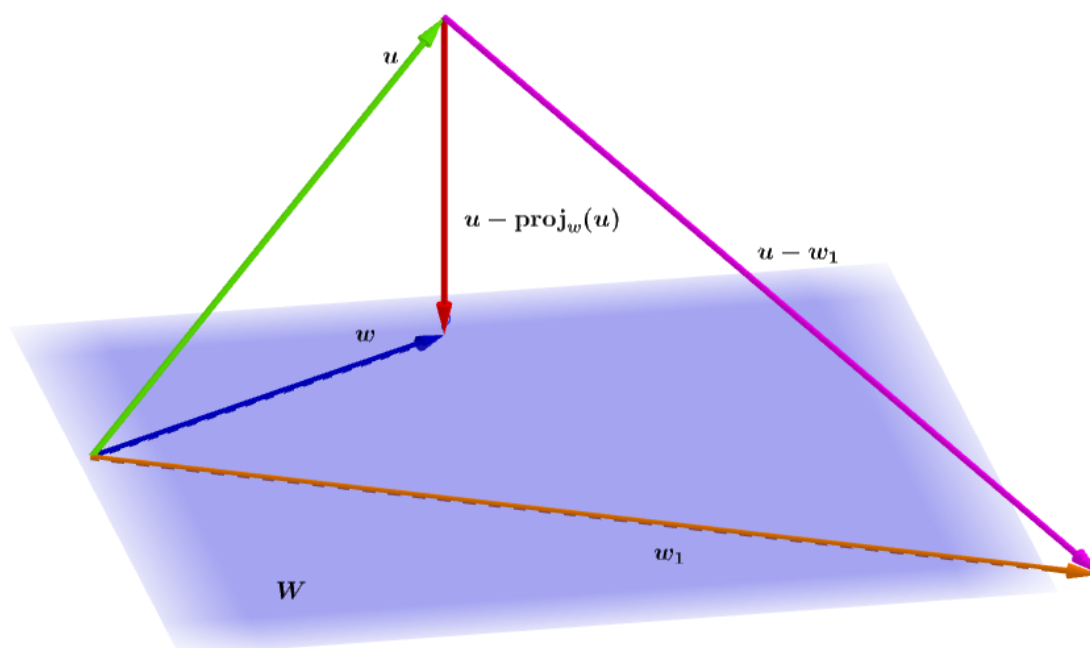
Problema: Seja $u \in V$ um vetor fixado. Determine o vetor que **Melhor Aproxima** u por algum vetor $w \in W$.

Vamos dar um sentido ao termo “melhor aproxima” anteriormente mencionado. Considere, por exemplo, um plano W no espaço \mathbb{R}^3 e um vetor não paralelo a W . Para cada vetor w_1 paralelo a W o vetor $u - w_1$ está bem definido, e este $(u - w_1)$ é o vetor cuja origem é a extremidade do vetor u e a extremidade coincide com a extremidade do vetor w_1 , isso está ilustrado na figura a seguir:

O vetor $u - w$ é chamado de *vetor erro* e uma pergunta que se pode fazer é a seguinte: *dentre todos os vetores erro, qual deles possui a menor norma?*

A figura a seguir também nos ajuda a identificar tal vetor, e este é o vetor projeção ortogonal, vetor de cor vermelha e indicado por $u - \text{proj}_W(u)$.

Com ajuda da ilustração, podemos identificar um vetor candidato a melhor aproximação, e este candidato é o vetor $u - \text{proj}_W(u)$. Contudo, sabemos que uma figura nos serve apenas como uma ilustração para o que se quer provar, pois para validar o resultado é preciso justificar matematicamente a veracidade de tal afirmação.

Figura 18 – Projeção de u sobre W .

Fonte: Elaborada pelo autor

Baseado nessa ideia, demonstramos o resultado a seguir, o qual extraímos da referência [1]

Teorema 4.1 (Teorema da Melhor Aproximação) *Se W é um Subespaço de um Espaço Vetorial V de dimensão finita com produto interno e $u \in V$, então o vetor $u - \text{proj}_W(u)$ é a **Melhor Aproximação** de u em W , no sentido de que*

$$\|u - \text{proj}_W(u)\| < \|u - w\|, \quad \forall w \in W.$$

Demonstração: De fato, qualquer que seja $w \in W$ podemos escrever $u - w$ da seguinte forma:

$$u - w = [u - \text{proj}_W(u)] + [\text{proj}_W(u) - w],$$

e como $\text{proj}_W(u) \in W$, vem

$$\begin{aligned} \langle (u - \text{proj}_W(u)), (\text{proj}_W(u) - w) \rangle &= \langle u, \text{proj}_W(u) \rangle - \langle u, w \rangle \\ &= \langle \text{proj}_W(u), \text{proj}_W(u) \rangle + \langle \text{proj}_W(u), w \rangle \\ &= \frac{\langle u, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \langle u, w \rangle - \langle u, w \rangle \\ &= \left(\frac{\langle u, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \right)^2 \langle w, w \rangle + \frac{\langle u, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\langle u, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} - \langle u, w \rangle - \frac{\langle u, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} + \langle u, w \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e isto nos diz que $[u - \text{proj}_W(u)] \perp [\text{proj}_W(u) - w]$. Por fim, note o seguinte

$$\begin{aligned}
\|u - w\|^2 &= \|(u - \text{proj}_W(u)) + (\text{proj}_W(u) - w)\|^2 \\
&= \langle [u - \text{proj}_W(u)] + [\text{proj}_W(u) - w], [u - \text{proj}_W(u)] + [\text{proj}_W(u) - w] \rangle \\
&= \|u - \text{proj}_W(u)\|^2 + 2 \langle [\text{proj}_W(u) - w], [u - \text{proj}_W(u)] \rangle + \|\text{proj}_W(u) - w\|^2 \\
&= \|u - \text{proj}_W(u)\|^2 + 2 \cdot 0 + \|\text{proj}_W(u) - w\|^2 \\
&= \|u - \text{proj}_W(u)\|^2 + \|\text{proj}_W(u) - w\|^2 \\
&> \|u - \text{proj}_W(u)\|^2,
\end{aligned}$$

nos permitindo concluir que

$$\|u - \text{proj}_W(u)\|^2 < \|u - w\|^2 \Rightarrow \|u - \text{proj}_W(u)\| < \|u - w\|.$$

■

4.2 Aproximação funcional

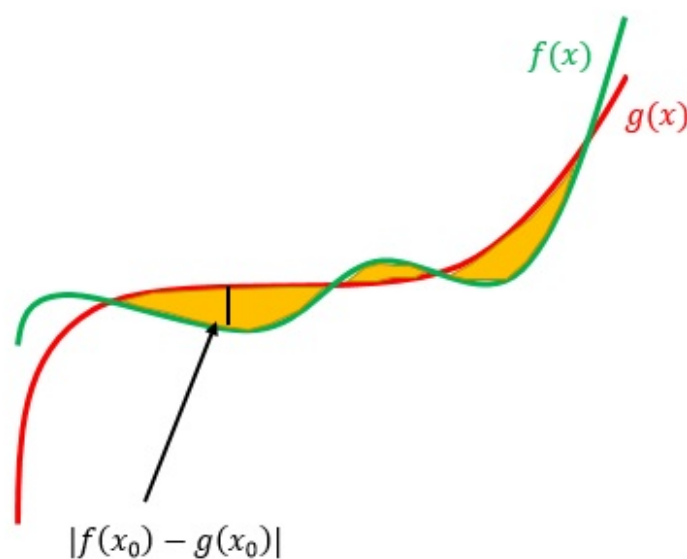
O Teorema da seção anterior nos garante que um problema de aproximação sempre possui solução, a qual é obtida por meio do vetor projeção. Agora, pretendemos tomar uma função f que modela um determinado problema e aproximar f por uma g que seja mais fácil de se trabalhar, ou seja, estamos querendo encontrar uma solução para o seguinte problema:

Problema: Dada uma função $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Determine a **Melhor Aproximação** de f dentre todas as funções g de um Subespaço $W \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dado.

Para o caso de funções, a ideia que está por trás do termo “melhor aproximação” está ligada ao gráfico das funções f e g . Uma função f será uma aproximação de g quando o gráfico das funções f e g forem, num certo sentido, parecidos, ou seja, quando a área compreendida entre os gráficos de f e g for tão pequena quanto se queira.

Antes de construirmos a solução do problema propriamente dita, precisamos fazer com que o termo *melhor aproximação* ganhe um sentido matemático mais preciso, e para tal, vamos determinar uma maneira de quantificar o erro cometido quando se aproxima a função f por uma outra função g . Caso a medição do erro que se queira fazer seja localmente, por exemplo, em um ponto $x_0 \in [a, b]$, intuitivamente pode-se definir o erro cometido como sendo

$$\text{erro} = |f(x_0) - g(x_0)|.$$

Figura 19 – Aproximação de $f(x)$ por $g(x)$.

Fonte: Elaborada pelo autor

O segmento vertical de preto da figura anterior, ilustra o que estamos chamando de erro. Contudo, nosso interesse não é o de medir o erro cometido na aproximação em um único ponto $x_0 \in [a, b]$, antes, queremos medir o erro cometido em todo o intervalo $[a, b]$, o que torna a definição do erro dada anteriormente imprecisa, pois o erro cometido no ponto x_0 pode ser bem pequeno, enquanto que em um outro ponto, por exemplo, $x_1 \in [a, b]$ o erro pode ser bem diferente do encontrado anteriormente, e sendo assim, necessitamos de uma outra forma de efetuar tal medição.

Uma maneira bem interessante, e em particular, eficaz de efetuar uma medida do erro no intervalo inteiro seria, calcular a área compreendida entre os gráficos das funções f e g em todo o intervalo $[a, b]$, e com isso, quanto menor for a área resultante, menor será o erro cometido, e conseqüentemente, melhor será a aproximação obtida. A área que estamos interessados em calcular é a região hachurada de laranja na figura anterior. Assim, podemos agora definir o erro cometido como sendo

$$\text{erro} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

A definição anterior de erro já seria suficiente para resolver o problema da melhor aproximação. Contudo, os matemáticos têm optado, há dois séculos aproximadamente, por trabalhar não com essa medida de erro que acabamos de apresentar, antes, preferem

trabalhar com o chamado *erro quadrático médio*, definido da seguinte forma:

$$\text{erro quadrático médio} = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx,$$

e pretendemos dar duas justificativas para o uso dessa expressão, e não da anterior. A primeira justificativa é de cunho mais intuitivo, e se dá pelo fato de que, se o erro

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

for pequeno, então o erro quadrático médio $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$ será também pequeno, uma vez que um número muito próximo de zero quando elevado ao quadrado gera um outro número também muito próximo de zero. Logo, minimizar $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ equivale a minimizar $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$.

A segunda justificativa é mais técnica, porém, mais convincente. Note que tomando o erro $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$ ganhamos automaticamente uma estrutura de produto interno sobre o espaço vetorial $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Com efeito, do **Exemplo 3.3** temos

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

e como

$$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle,$$

segue

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle &\Rightarrow \|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot [f(x) - g(x)] dx \\ &\Rightarrow \|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

que é exatamente o erro quadrático médio anteriormente definido. Portanto, utilizar o erro quadrático médio é uma boa ferramenta matemática para se chegar na solução do problema, pois nos permite usar todas as ferramentas da Álgebra Linear que foram apresentadas no capítulo anterior.

4.3 Polinômios trigonométricos e as Séries de Fourier

O teorema da melhor aproximação, demonstrado na primeira seção do presente capítulo, nos garante que a melhor aproximação para $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ é a função

$$g(x) = \text{proj}_W[f(x)],$$

em que W é um subespaço de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Definição 4.1 Duas funções $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ são ditas **ortogonais** quando o produto interno entre f e g for igual a zero.

No capítulo anterior, **Exemplo 3.3**, mostramos que se $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, então

$$\int_a^b f(x)g(x) dx,$$

define um produto interno. Então, no decorrer deste capítulo, quando nos referirmos a produto interno, será sempre este. Logo, mostrar que duas funções f e g são ortogonais, será equivalente a mostrar que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Vamos agora nos dedicar um pouco ao estudo das *funções trigonométricas*, que serão de fundamental importância para o que pretendemos fazer no capítulo seguinte, quais sejam, $\sin x$ e $\cos x$, que estão bem definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 4.2 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **periódica** quando existe $T > 0$ tal que

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fica implícito na definição anterior, mas o período é precisamente, o *menor* $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$. Um resultado interessante sobre funções periódicas é o apresentado a seguir:

Proposição 4.1 Seja f uma função periódica de período T . Então,

$$f(x + kT) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: De fato, mostremos o resultado por indução sobre k . Para $k = 1$ não há o que se provar, pois f é periódica por hipótese. Suponha que para certo $k \in \mathbb{N}$ dado arbitrariamente vale a igualdade

$$f(x + kT) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e mostremos que para $k + 1 \in \mathbb{N}$ a igualdade também é verificada. De fato, note o seguinte

$$\begin{aligned} f(x + (k + 1)T) &= f(x + kT + T) \\ &= f((x + kT) + T) \\ &= f(x + kT) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, segue o resultado ■

Lembre que para dois números reais dados x, y vale as seguintes identidades trigonométricas chamadas *fórmulas de transformação*:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x \pm y) &= \operatorname{sen} x \cdot \cos y \pm \operatorname{sen} y \cdot \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y.\end{aligned}$$

e com tais fórmulas, podemos determinar o período das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Proposição 4.2 *As funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são periódicas de período $T = 2\pi$.*

Demonstração: De fato, pelas fórmulas de transformação temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + 2\pi) &= \operatorname{sen} x \cdot \cos 2\pi + \operatorname{sen} 2\pi \cdot \cos x \\ &= \operatorname{sen} x \cdot 1 \pm 0 \cdot \cos x \\ &= \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

Analogamente, veja o seguinte

$$\begin{aligned}\cos(x + 2\pi) &= \cos x \cdot \cos 2\pi - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2\pi \\ &= \cos x \cdot 1 - \operatorname{sen} x \cdot 0 \\ &= \cos x.\end{aligned}$$

■

Tratamos um pouco mais a frente com polinômios cujos termos serão funções trigonométricas de arcos múltiplos, isto é, arcos na forma $x, 2x, 3x, \dots, mx$ com $m \in \mathbb{N}$, e para mostrar que o conjunto lá definido é uma base ortogonal, necessitamos ainda dos seguintes resultados auxiliares:

Lema 4.1 *Sejam $\operatorname{sen} x, \cos x$ funções trigonométricas e $x, y \in \mathbb{R}$. Então, vale*

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)].$$

Demonstração: De fato, perceba o seguinte

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) &= \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \operatorname{sen} y \cdot \cos x \\ &= 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos y,\end{aligned}$$

e disto obtemos

$$2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) \Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)] \blacksquare.$$

Esse resultado pode ser generalizado para arcos múltiplos, conforme mostraremos a seguir:

Lema 4.2 *Sejam $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$ funções trigonométricas, $x, y \in \mathbb{R}$, e sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então, vale*

$$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{cos} ny = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(mx + ny) + \operatorname{sen}(mx - ny)].$$

Demonstração: De fato, note

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(mx + ny) + \operatorname{sen}(mx - ny) &= \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{cos} ny + \operatorname{sen} ny \cdot \operatorname{cos} mx \\ &+ \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{cos} ny - \operatorname{sen} ny \cdot \operatorname{cos} mx \\ &= 2 \cdot \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{cos} ny, \end{aligned}$$

donde vem

$$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{cos} ny = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(mx + ny) + \operatorname{sen}(mx - ny)].$$

■

Lema 4.3 *Sejam $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$ funções trigonométricas, $x, y \in \mathbb{R}$, e sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então, vale*

$$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} ny = \frac{1}{2}[\operatorname{cos}(mx - ny) - \operatorname{cos}(mx + ny)].$$

Demonstração: De fato, observe

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(mx - ny) - \operatorname{cos}(mx + ny) &= \operatorname{cos} mx \cdot \operatorname{cos} ny + \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} ny \\ &- \operatorname{cos} mx \cdot \operatorname{cos} ny + \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} ny \\ &= 2 \cdot \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} ny, \end{aligned}$$

acarretando na igualdade

$$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} ny = \frac{1}{2}[\operatorname{cos}(mx - ny) - \operatorname{cos}(mx + ny)].$$

■

Lema 4.4 *Sejam $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$ funções trigonométricas, $x, y \in \mathbb{R}$, e sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então, vale*

$$\operatorname{cos} mx \cdot \operatorname{cos} ny = \frac{1}{2}[\operatorname{cos}(mx - ny) + \operatorname{cos}(mx + ny)].$$

Demonstração: De fato, perceba o seguinte

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(mx - ny) + \operatorname{cos}(mx + ny) &= \operatorname{cos} mx \cdot \operatorname{cos} ny + \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} ny \\ &+ \operatorname{cos} mx \cdot \operatorname{cos} ny - \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} ny \\ &= 2 \cdot \operatorname{cos} mx \cdot \operatorname{cos} ny, \end{aligned}$$

e segue o resultado.



Baseado em todos esses conceitos e resultados, definiremos agora um polinômio cujas entradas serão funções trigonométricas de arcos múltiplos, ao invés de números reais, como se costuma trabalhar.

Definição 4.3 *Um polinômio na forma*

$$\begin{aligned} T(x) &= c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \dots + c_n \cos nx \\ &+ d_1 \sin x + d_2 \sin 2x + \dots + d_n \sin nx \end{aligned}$$

é denominado **polinômio trigonométrico**.

De maneira análoga aos polinômios tradicionalmente estudados, se $c_n, d_n \neq 0$ diz-se que $T(x)$ é de *ordem* n . Perceba que $T(x)$ é formado por $2n + 1$ termos e, caso seja um conjunto de vetores linearmente independentes, forma-se assim uma base para um espaço vetorial de dimensão $2n + 1$, e pretendemos agora mostrar que o conjunto

$$A = \{c_0, c_1 \cos x, c_2 \cos 2x, \dots, c_n \cos nx, d_1 \sin x, d_2 \sin 2x, \dots, d_n \sin nx\},$$

é, de fato, LI.

Proposição 4.3 *O conjunto*

$$A = \{c_0, c_1 \cos x, c_2 \cos 2x, \dots, c_n \cos nx, d_1 \sin x, d_2 \sin 2x, \dots, d_n \sin nx\},$$

é uma base ortogonal para um Subespaço W de dimensão $2n + 1$ de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Demonstração: De fato, seja W um subespaço de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ tal que $W = G(A)$. Para mostrar que A é uma base ortogonal de um espaço vetorial de dimensão $2n + 1$, basta mostrar que o produto interno entre dois vetores quaisquer de A é sempre igual a zero, pois isso mostra-se que A será também LI. Com efeito, dados $m, n \in \mathbb{N}$ note

$$\begin{aligned} \langle d_m \sin mx, c_n \cos nx \rangle &= c_n d_m \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx \\ &= c_n d_m \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx)] \, dx \\ &= \frac{c_n d_m}{2} \int_a^{2\pi} [\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx)] \, dx \\ &= -\frac{c_n d_m}{2} \left[\frac{\cos(mx + nx)}{m + n} + \frac{\cos(mx - nx)}{m - n} \right] \Big|_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{c_n d_m \cos 2\pi m \cdot \cos 2\pi n}{2} \frac{1}{m+n} + \frac{c_n d_m \operatorname{sen} 2\pi m \cdot \operatorname{sen} 2\pi n}{2} \frac{1}{m+n} \\
&+ \frac{c_n d_m \cos 0m \cdot \cos 0n}{2} \frac{1}{m+n} - \frac{c_n d_m \operatorname{sen} 0m \cdot \operatorname{sen} 0n}{2} \frac{1}{m+n} \\
&- \frac{c_n d_m \cos 2\pi m \cdot \cos 2\pi n}{2} \frac{1}{m-n} - \frac{c_n d_m \operatorname{sen} 2\pi m \cdot \operatorname{sen} 2\pi n}{2} \frac{1}{m-n} \\
&+ \frac{c_n d_m \cos 0m \cdot \cos 0n}{2} \frac{1}{m-n} + \frac{c_n d_m \operatorname{sen} 0m \cdot \operatorname{sen} 0n}{2} \frac{1}{m-n} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{c_n d_m \cos 0m \cdot \cos 0n}{2} \frac{1}{m-n} &= \frac{c_n d_m \cos 2\pi m \cdot \cos 2\pi n}{2} \frac{1}{m-n} \\
\frac{c_n d_m \operatorname{sen} 0m \cdot \operatorname{sen} 0n}{2} \frac{1}{m-n} &= \frac{c_n d_m \operatorname{sen} 2\pi m \cdot \operatorname{sen} 2\pi n}{2} \frac{1}{m-n} \\
\frac{c_n d_m \cos 0m \cdot \cos 0n}{2} \frac{1}{m+n} &= \frac{c_n d_m \cos 2\pi m \cdot \cos 2\pi n}{2} \frac{1}{m+n} \\
\frac{c_n d_m \operatorname{sen} 0m \cdot \operatorname{sen} 0n}{2} \frac{1}{m-n} &= \frac{c_n d_m \operatorname{sen} 2\pi m \cdot \operatorname{sen} 2\pi n}{2} \frac{1}{m-n}
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$d_m \operatorname{sen} mx \perp c_n \cos nx.$$

Continuando, note que

$$\begin{aligned}
\langle d_m \operatorname{sen} mx, d_n \operatorname{sen} nx \rangle &= d_n d_m \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx \, dx \\
&= d_n d_m \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)] \, dx \\
&= \frac{c_n d_m}{2} \int_a^{2\pi} [\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)] \, dx \\
&= \frac{c_n d_m}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(mx - nx)}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}(mx + nx)}{m+n} \right] \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\operatorname{sen} x$ na expressão anterior em 0 e em 2π tem valor igual a zero, resultando em

$$d_m \operatorname{sen} mx \perp d_n \operatorname{sen} nx.$$

Analogamente, perceba o seguinte

$$\begin{aligned}
 \langle c_m \cos mx, c_n \cos nx \rangle &= c_m c_n \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx \\
 &= c_m c_n \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx)] \, dx \\
 &= \frac{c_m c_n}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx)] \, dx \\
 &= \frac{c_m c_n}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(mx - nx)}{m - n} + \frac{\operatorname{sen}(mx + nx)}{m + n} \right] \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

pela mesma observação feita anteriormente, e portanto

$$c_m \cos mx \perp c_n \cos nx.$$

Vamos agora trabalhar o produto interno entre o termo constante c_0 e as funções $\operatorname{sen} mx$ e $\cos mx$ com $1 \leq m \leq n$. Note

$$\begin{aligned}
 \langle c_0, c_m \cos mx \rangle &= \int_0^{2\pi} c_0 c_m \cos mx \, dx \\
 &= c_0 c_m \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx \\
 &= \frac{c_0 c_m}{m} \operatorname{sen} mx \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

e isto nos diz que $c_0 \perp c_m \cos mx$. Por fim,

$$\begin{aligned}
 \langle c_0, d_m \operatorname{sen} mx \rangle &= \int_0^{2\pi} c_0 d_m \operatorname{sen} mx \, dx \\
 &= c_0 d_m \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \, dx \\
 &= -\frac{c_0 d_m}{m} \cos mx \Big|_0^{2\pi} \\
 &= -\frac{c_0 d_m}{m} [\cos 2\pi m - \cos 0] \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

e isto nos diz que $c_0 \perp d_m \operatorname{sen} mx$. Daí, como $W = G(A)$ e A é um conjunto ortogonal, em particular LI, obtemos que A é uma base ortogonal de um Subespaço W de dimensão $2n + 1$ de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.



Como cada vetor de A é não nulo, podemos normalizar cada um desses vetores para formar assim uma base ortonormal de um subespaço W de dimensão $2n + 1$ de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Inicialmente, vamos trabalhar com o conjunto

$$B = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\},$$

que também é uma base ortogonal, pois não depende do valor das constantes

$$c_i \text{ com } 0 \leq i \leq n \text{ e } d_j \text{ com } 1 \leq j \leq n$$

conforme vimos na demonstração anterior. Agora, chamando $f = \sin nx$ e $g = \cos nx$

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx, \end{aligned}$$

chamando $nx = u$, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin^2 u \, du,$$

e como $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$, segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin^2 u \, du &= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2u}{2} \, du \\ &= \frac{1}{2n} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2u) \, du \\ &= \frac{1}{4n} (2u - \sin 2u) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4n} (2nx - \sin 2nx) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4n\pi}{4n} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|f\|^2 = \pi \Rightarrow \|f\| = \sqrt{\pi}.$$

Efetuada o processo análogo para $g = \cos nx$ vale o seguinte

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \langle g, g \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx, \end{aligned}$$

chamando $nx = u$, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du,$$

e como $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$, segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du &= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2u}{2} \, du \\ &= \frac{1}{2n} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2u) \, du \\ &= \frac{1}{4n} (2u + \operatorname{sen} 2u) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4n} (2nx + \operatorname{sen} 2nx) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4n\pi}{4n} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|g\|^2 = \pi \Rightarrow \|g\| = \sqrt{\pi}.$$

Por fim, sendo $h = 1$ vale

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \langle h, h \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, dx \\ &= x \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Logo, $\|h\|^2 = 2\pi \Rightarrow \|h\| = \sqrt{2\pi}$, e então o conjunto

$$C = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx \right\}$$

é uma base ortonormal de um Subespaço W de dimensão $2n + 1$ de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Diante do exposto até aqui, podemos enunciar o seguinte problema de melhor aproximação:

Problema: Seja $f(x) \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, vamos determinar o polinômio trigonométrico de ordem menor do que ou igual a n , que melhor aproxima-se de $f(x)$.

Ora, sabemos que a melhor aproximação é a projeção ortogonal, e no capítulo anterior, mostramos que se $C = \{g_0(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_{2n}(x)\}$ é uma base ortonormal para W , então

$$\operatorname{proj}_W(f) = \langle f(x), g_0(x) \rangle g_0(x) + \langle f(x), g_1(x) \rangle g_1(x) + \dots + \langle f(x), g_{2n}(x) \rangle g_{2n}(x),$$

e pelo que foi construído anteriormente, a base ortonormal é

$$C = \left\{ g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dots, g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots, g_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen } nx \right\},$$

e pondo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle f(x), g_0(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \\ a_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f(x), g_1(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f(x), g_n(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f(x), g_{n+1}(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen } x \, dx \\ &\vdots \\ b_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f(x), g_{2n}(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen } nx \, dx, \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(f) &= \langle f(x), g_0(x) \rangle g_0(x) + \langle f(x), g_1(x) \rangle g_1(x) + \dots + \langle f(x), g_{2n}(x) \rangle g_{2n}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle + \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos x \right\rangle \cos x + \dots \\ &\quad + \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos nx \right\rangle \cos nx + \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sen } x \right\rangle \text{sen } x \\ &\quad + \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sen } 2x \right\rangle \text{sen } 2x + \dots + \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sen } nx \right\rangle \text{sen } nx \\ &= \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx] \\ &\quad + [b_1 \text{sen } x + b_2 \text{sen } 2x + \dots + b_n \text{sen } nx] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \text{sen } kx, \end{aligned}$$

em que os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ são denominados *Coefficientes de Fourier*.

Agora, iremos tomar todos esses conceitos e coloca-los em prática nos exemplos que seguem

Exemplo 4.1 *Determine a melhor aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados da função $f(x) = x$ em $[0, 2\pi]$ por um*

- (a) Polinômio Trigonométrico de Ordem menor do que ou igual a 5;
- (b) Polinômio Trigonométrico de Ordem menor do que ou igual a n .

Solução:

(a) Precisamos determinar os valores dos coeficientes a_i , b_j com $0 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$ e para tal, basta usar as expressões desses coeficientes anteriormente obtidas, ou seja,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx \\ &= \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4\pi^2}{2\pi} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Determinemos agora os coeficientes a_k , b_k de maneira análoga à anterior

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx, \end{aligned}$$

chamando $x = u$ e $\cos kx = dv$, obtemos

$$\begin{aligned} x = u &\Rightarrow dx = du \\ dv = \cos kx dx &\Rightarrow v = \frac{\text{sen } kx}{k}, \end{aligned}$$

e daí, vale

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(x \frac{\text{sen } kx}{k} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen } kx}{k} dx \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(x \text{sen } kx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \text{sen } kx dx \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(x \text{sen } kx \Big|_0^{2\pi} + \frac{\cos kx}{k} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e para b_k temos

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} kx \, dx, \end{aligned}$$

chamando $x = u$ e $\operatorname{sen} kx = dv$, obtemos

$$\begin{aligned} x = u &\Rightarrow dx = du \\ dv = \operatorname{sen} kx &\Rightarrow v = -\frac{\cos kx}{k}, \end{aligned}$$

e daí, vale

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos kx}{k} \, dx - x \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos kx - x \cos kx \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} kx}{k} - x \cos kx \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{k\pi} (-2\pi) \\ &= -\frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos a aproximação

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_W(f) &\approx \frac{2\pi}{2} - \frac{2}{1} \operatorname{sen} x - \frac{2}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{4} \operatorname{sen} 4x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} 5x \\ &= \pi - 2 \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \right); \end{aligned}$$

Vamos denotar cada aproximação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ g_1(x) &= \pi - 2 \operatorname{sen} x \\ g_2(x) &= \pi - 2 \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right) \\ g_3(x) &= \pi - 2 \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} \right) \\ g_4(x) &= \pi - 2 \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} \right) \\ g_5(x) &= \pi - 2 \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \right) \end{aligned}$$

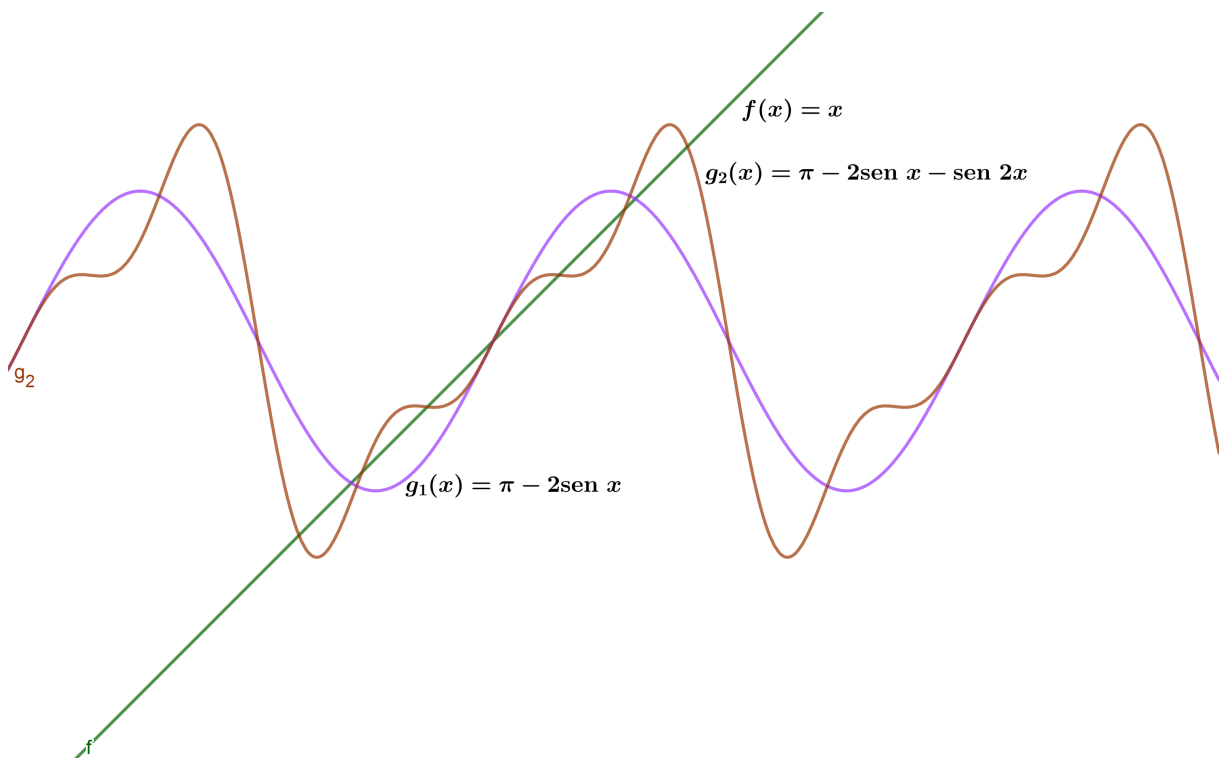
(b) Pelo item anterior, resulta

$$\text{proj}_W(f) \approx \pi - 2 \left(\text{sen } x + \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \dots + \frac{\text{sen } nx}{n} \right).$$

□

As aproximações de $f(x) = x$ podem ser percebidas na figura a seguir:

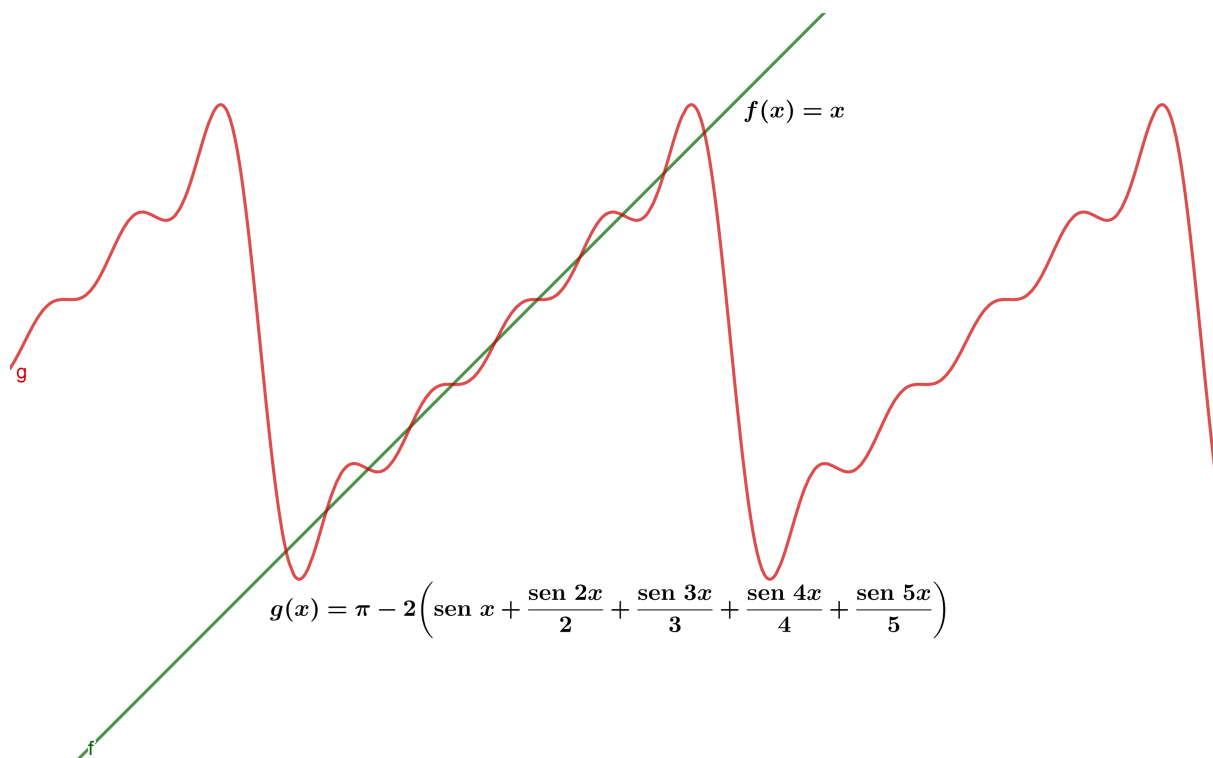
Figura 20 – Aproximação de $f(x) = x$ por polinômios trigonométricos de ordem 1 e 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

O polinômio trigonométrico cujo gráfico é lilás possui ordem 1, enquanto que o polinômio trigonométrico cujo gráfico é marrom possui ordem 2. Observe que a ordem aumento implica em uma melhor aproximação, pois o gráfico de lilás possui três pontos de interseção com a reta $y = x$, enquanto que o gráfico de marrom possui 7 desses pontos.

A figura a seguir, mostra a aproximação de f por um polinômio de ordem 5, mostrando que quanto maior for a ordem do polinômio trigonométrico, melhor será a aproximação da função em questão. Note que agora temos 11 pontos de interseção entre a reta $y = x$ e o polinômio trigonométrico em questão.

Figura 21 – Aproximação de $f(x) = x$ por um polinômio trigonométrico de ordem 5.

Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 4.2 Determine a melhor aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados da função $f(x) = e^x$ em $[0, 2\pi]$ por um

- (a) Polinômio Trigonométrico de Ordem menor do que ou igual a 3;
- (b) Polinômio Trigonométrico de Ordem menor do que ou igual a n .

Solução:

(a) Precisamos determinar os valores dos coeficientes a_i , b_j com $0 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$ e para tal, basta usar as expressões desses coeficientes anteriormente obtidas, ou seja,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} (e^x) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Determinemos agora os coeficientes a_k , b_k de maneira análoga à anterior

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx, \end{aligned}$$

chamando $e^x = u$ e $\cos kx = dv$, obtemos

$$\begin{aligned} e^x = u &\Rightarrow e^x \, dx = du \\ dv = \cos kx \, dx &\Rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} kx}{k}, \end{aligned}$$

e daí, vale

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(e^x \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \, dx \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(e^x \operatorname{sen} kx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx \right), \end{aligned}$$

vamos fazer separadamente $\int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx$, novamente por partes chamando

$$\begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} kx \, dx &\Rightarrow v = -\frac{\cos kx}{k} \end{aligned}$$

obtendo

$$\int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx = -\frac{e^x \cos kx}{k} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{e^x \cos kx}{k};$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx &= \frac{1}{k\pi} \left(e^x \operatorname{sen} kx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx \right) \\ &= \frac{e^x \operatorname{sen} kx}{k\pi} \Big|_0^{2\pi} + \frac{e^x \cos kx}{k^2\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx \end{aligned}$$

e daí

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx + \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} kx}{k\pi} + \frac{e^x \cos kx}{k^2\pi} \Big|_0^{2\pi}$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx = \frac{ke^x \operatorname{sen} kx + e^x \cos kx}{k^2 + 1} \Big|_0^{2\pi}$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{e^{2\pi}}{k^2 + 1} - \frac{1}{k^2 + 1} \\ &= \frac{e^{2\pi} - 1}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Para b_k temos

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx, \end{aligned}$$

chamando $u = e^x$ e $\operatorname{sen} kx = dv$, obtemos

$$\begin{aligned} e^x = u &\Rightarrow e^x \, dx = du \\ dv = \operatorname{sen} kx \, dx &\Rightarrow v = -\frac{\cos kx}{k}, \end{aligned}$$

e daí, vale

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^x \frac{\cos kx}{k} \, dx - e^x \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx - e^x \cos kx \Big|_0^{2\pi} \right) \end{aligned}$$

vamos agora fazer $\int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx$ separadamente, por partes novamente, chamando $u = e^x$ e $dv = \cos kx \, dx$, obtendo

$$\begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \cos kx \, dx &\Rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} kx}{k}, \end{aligned}$$

donde segue

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} kx}{k} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^x \operatorname{sen} kx}{k},$$

substituindo novamente na expressão de b_k obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx &= \frac{1}{k\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^x \cos kx \, dx - e^x \cos kx \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(\frac{e^x \operatorname{sen} kx}{k} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^x \operatorname{sen} kx}{k} - e^x \cos kx \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{e^x \operatorname{sen} kx}{k^2 \pi} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^x \operatorname{sen} kx}{k^2 \pi} - \frac{e^x \cos kx}{k\pi} \Big|_0^{2\pi}, \end{aligned}$$

e daí

$$\frac{k^2 + 1}{k^2 \pi} \int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} kx - k e^x \cos kx}{k^2 \pi} \Big|_0^{2\pi},$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} e^x \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} kx - k e^x \cos kx}{k^2 + 1} \Big|_0^{2\pi},$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos finalmente

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{ke^{2\pi}}{k^2 + 1} + \frac{k}{k^2 + 1} \\ &= \frac{k(1 - e^{2\pi})}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos a aproximação

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(f) &\approx \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} + \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \cos x + \frac{e^{2\pi} - 1}{5} \cos 2x + \frac{e^{2\pi} - 1}{10} \cos 3x \\ &+ \frac{1 - e^{2\pi}}{2} \text{sen } x + \frac{2(1 - e^{2\pi})}{5} \text{sen } 2x + \frac{3(1 - e^{2\pi})}{10} \text{sen } 3x; \end{aligned}$$

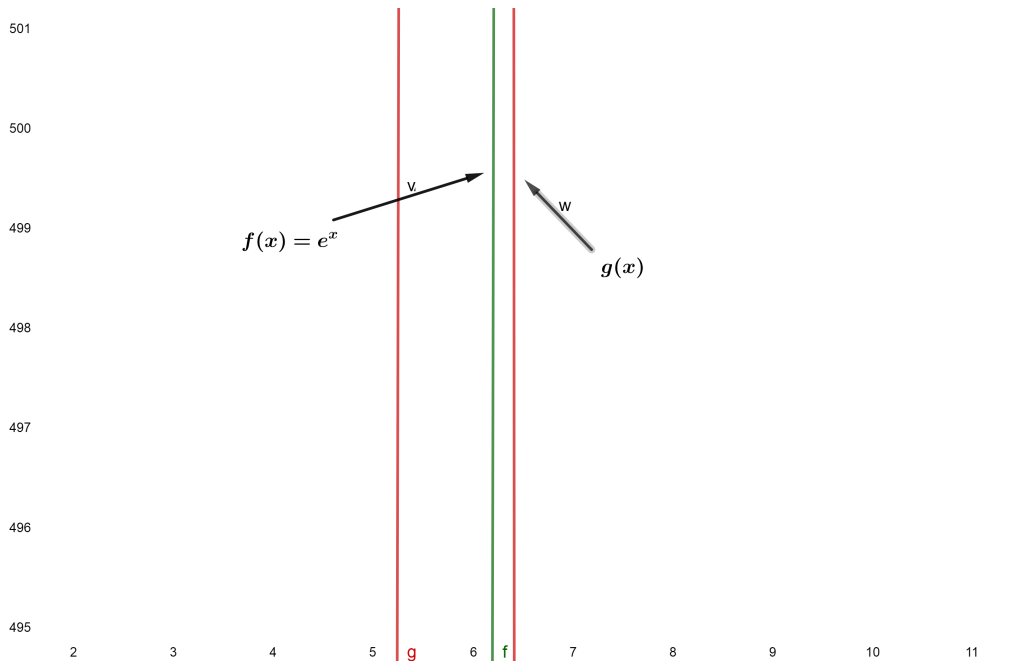
(b) Pelo item anterior, resulta

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(f) &\approx \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} + \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \cos x + \dots + \frac{e^{2\pi} - 1}{n^2 + 1} \cos nx \\ &+ \frac{(1 - e^{2\pi})}{2} \text{sen } x + \dots + \frac{n(1 - e^{2\pi})}{n^2 + 1} \text{sen } nx. \end{aligned}$$

□

As aproximações de $f(x) = e^x$ podem ser percebidas na figura a seguir, aproximamos por um polinômio trigonométrico de ordem 10.

Figura 22 – Aproximação de $f(x) = e^x$ por um polinômio trigonométrico de ordem 10.



Fonte: Elaborada pelo autor

Diante desses dois exemplos, podemos notar que quanto maior for a ordem do polinômio trigonométrico, melhor será a aproximação obtida. A ideia é que quando $n \rightarrow \infty$ obtemos a igualdade a seguir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen} kx$$

chamada de *Série de Fourier*.

Vamos apresentar, no final deste capítulo, sob que condições podemos obter tal igualdade, iremos apenas apresentar duas definições e um resultado, porém sem demonstrá-lo, pois fugiria dos objetivos do nosso trabalho. Porém, o leitor interessado pode consultar as referências [5] e [7], nas quais encontrará um tratamento adequado e elegante para o assunto.

Em Séries de Fourier, são importantes os seguintes conceitos:

Definição 4.4 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é **Seccionalmente Contínua** quando esta possui uma quantidade finita de pontos de descontinuidade.*

Definição 4.5 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é **Seccionalmente Diferenciável** quando f e f' são funções seccionalmente contínuas.*

Teorema 4.2 (Teorema de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2T$. Então, a Série de Fourier da função f , dada por*

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{T} \right),$$

converge, em cada ponto x , para

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{T} \right).$$

5 Aproximação de uma onda senoidal para uma onda dente de serra

5.1 Introdução

Neste último capítulo, iremos tomar uma onda dente de serra, que é um tipo de onda não senoidal, e vamos determinar qual a onda senoidal (polinômio trigonométrico) que melhor se aproxima desta, desde que as frequências destas ondas estejam dentro do espectro auditivo do ser humano. Com isso, pretendemos tomar um problema que seria inicialmente de difícil solução e simplificá-lo para um problema que seja mais facilmente resolvível. Para a construção desse capítulo, nos baseamos na referência [1].

Feito isso, daremos ao final do capítulo uma proposta de como trabalhar com alunos do ensino médio o conteúdo exposto aqui nesse trabalho, explicando o que deve ser omitido, o que pode ser explicado e como apresentar os conteúdos e resultados de modo que, o processo de ensino aprendizagem flua de uma maneira mais natural possível.

5.2 A onda dente de serra

Na seção anterior mencionamos que uma onda dente de serra é um tipo de onda não senoidal, e isso se dá pelo simples fato da expressão que define a onda não depender do seno do número real que está variando. Vamos inicialmente construir um tipo de onda dente de serra, e em seguida, vamos tomar um tipo específico dela para aplicar no problema que desejamos.

Inicialmente, tome a função identidade

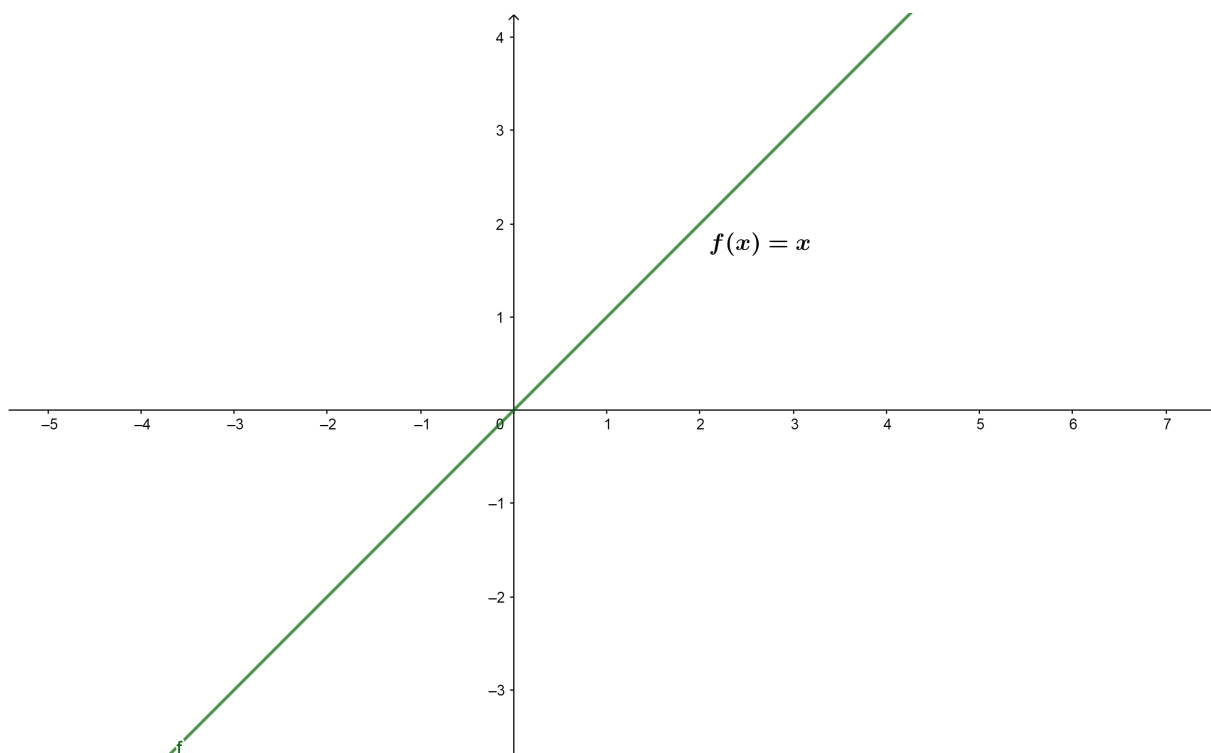
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x, \end{aligned}$$

o gráfico dessa função é uma reta crescente, e é dado na figura a seguir:

Agora, definamos a seguinte função:

Definição 5.1 *Define-se a função **parte inteira de**, indicada por*

$$\lfloor x \rfloor,$$

Figura 23 – Gráfico da função dada por $f(x) = x$.

Fonte: Elaborada pelo autor

a função que a cada número real associa à sua parte inteira, ou seja,

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto g(x) = \lfloor x \rfloor$$

A parte inteira de x ainda pode ser lido como “o maior inteiro que não supera x ”, por exemplo,

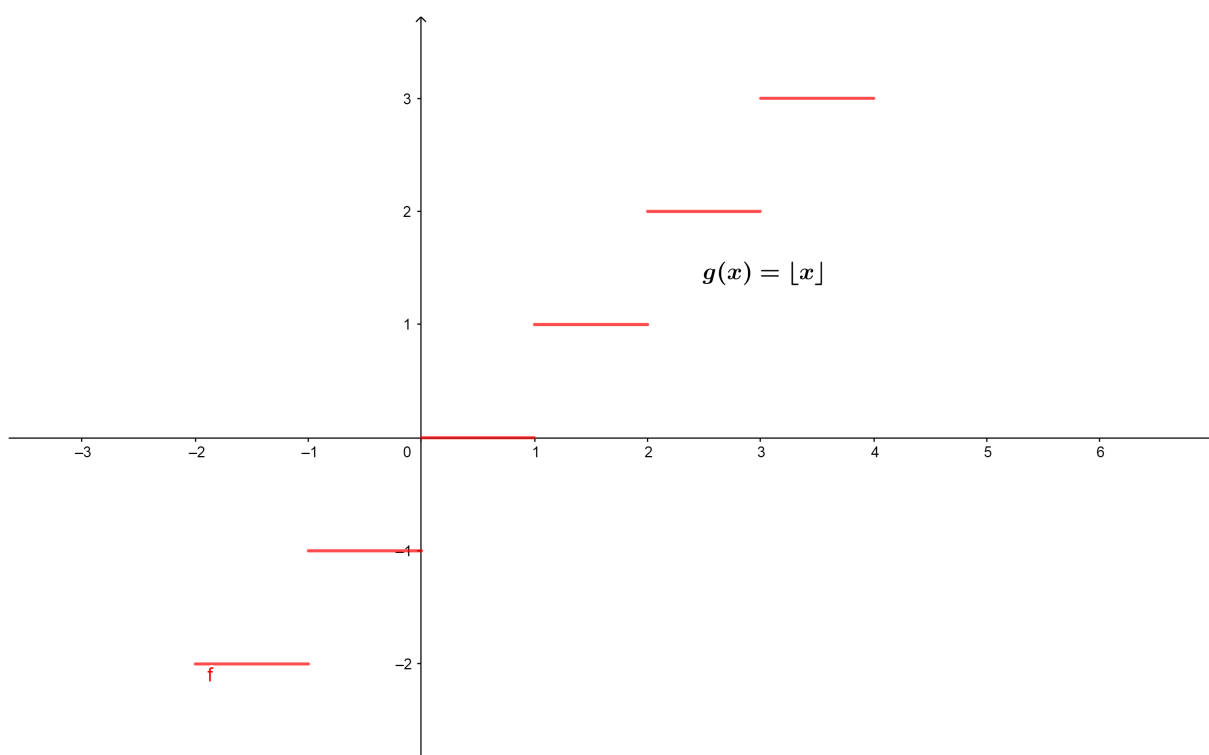
$$\lfloor 1,33 \rfloor = 1$$

$$\lfloor 5,999999 \rfloor = 5$$

$$\lfloor 3,00000001 \rfloor = 3,$$

ou seja, despreza-se a parte decimal do número e toma-se apenas a sua parte inteira, derivando dessa ideia o nome da função. Claramente g não é injetiva, pois $g(1,2) = g(1,3) = 1$ por exemplo, e seu gráfico possui um comportamento bem peculiar, pois dado $x \in \mathbb{Z}$ vale que $g(x) = x$ no intervalo $[x, x + 1)$, dando a ideia de uma escada quando seu gráfico é traçado. Este está mostrado na figura a seguir:

Figura 24 – Gráfico da função escada.



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, defina a função $h(x) = f(x) - g(x)$, ou seja,

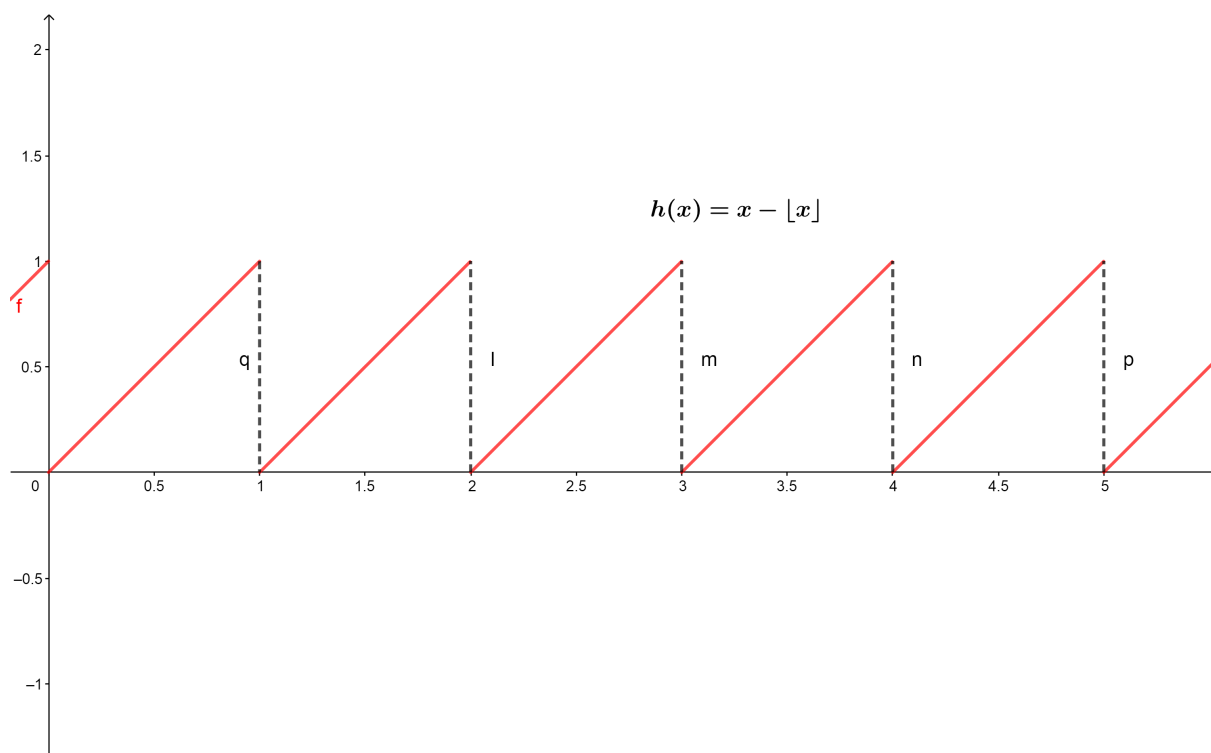
$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = x - [x] \end{aligned}$$

observe que

$$\begin{aligned} 1,33 - [1,33] &= 0,33 \\ 5,999999 - [5,999999] &= 0,999999 \\ 3,00000001 - [3,00000001] &= 0,00000001 \end{aligned}$$

nos dando a ideia de que $x - [x]$ poderia ser descrito como a *parte decimal* de x . Perceba que $h(x)$ possui imagem dada pelo intervalo $[0, 1)$, e seu gráfico possui a semelhança de um *dente de serra*, por isso é descrito de tal forma. Também chamamos tal função de uma onda, a saber, a *onda dente de serra*, que claramente não é uma onda senoidal. A figura a seguir, denota o comportamento de $h(x)$.

Figura 25 – Onda dente de serra



Fonte: Elaborada pelo autor

5.3 Aproximação de uma onda senoidal para uma onda dente de serra

Como vimos no capítulo 2, a audição humana inicia seu processo com a recepção das ondas sonoras provenientes de meios externos pelo pavilhão auditivo, o qual caminha a onda pelo canal auditivo externo até a membrana timpânica, que por sua vez, vibra em resposta à onda recebida.

Nesse processo a pressão atmosférica e a pressão no tímpano são levadas em consideração, pois estas exercem papel importante na forma como a onda é recebida e como esta será transportada para os ossículos martelo, bigorna e estribo, e assim continuar o processo de transdução auditiva. Desse modo, uma onda sonora senoidal pode ser descrita em função do tempo t pela equação

$$q(t) = A_0 + A \sin(\omega t - \kappa) \quad (5.1)$$

em que A_0 descreve a pressão atmosférica normal, A é a variação máxima da pressão em relação à pressão normal A_0 , o número ω é a frequência angular e κ é o número de onda.

Também vimos no capítulo 2 que para uma onda senoidal ser percebida pelo nosso ouvido, sua frequência deve estar compreendida no intervalo entre 20Hz e 20.000 Hertz, intervalo este que é chamado de espectro auditivo humano.

Segundo Anton [1], pode-se afirmar com algum grau de exatidão que o nosso ouvido é um sistema linear, significando que uma onda é uma soma finita de componentes senoidais de diferentes amplitudes, frequências angulares e números de onda, o que pode ser descrito pela equação

$$q(t) = A_0 + A_1 \text{sen}(\omega_1 t - \kappa_1) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t - \kappa_2) + \dots + A_n \text{sen}(\omega_n t - \kappa_n) \quad (5.2)$$

Agora, vamos tomar uma onda $p(t)$ periódica e arbitrária, a qual não é uma soma finita de ondas senoidais, e vamos resolver o seguinte problema:

Problema: Analisando a resposta do ouvido à onda $p(t)$, essa resposta coincide com algum grau de precisão à resposta do ouvido por alguma onda que é a soma finita de componentes senoidais.

Em outras palavras: vamos tomar uma onda sonora que é descrita pela equação (5.2) e mostrar que podemos aproximá-la para uma onda que não é descrita nos moldes de (5.2), ou seja, a aproximação será tal que ambas as ondas produzirão a mesma sensação de som no nosso ouvido.

Seja $p(t)$ a onda periódica não senoidal e $q(t)$ a onda senoidal dada por (5.2), se ambas as ondas produzem a mesma sensação de som no nosso aparelho auditivo, é razoável esperar que $p(t)$ possua o mesmo período T de $q(t)$, dessa forma as frequências angulares de $p(t)$ devem ser múltiplas de $\frac{1}{T}$, que é a frequência de $q(t)$, ou seja,

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{T}, \text{ com } 1 \leq k \leq n.$$

Agora, como nosso ouvido não percebe ondas com frequência acima de 20.000 Hz, podemos omitir de $q(t)$ os termos tais que suas frequências estejam fora deste intervalo, ou seja, a equação

$$q(t) = A_0 + A_1 \text{sen}(\omega_1 t - \kappa_1) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t - \kappa_2) + \dots + A_n \text{sen}(\omega_n t - \kappa_n)$$

é tal que $n \in \mathbb{N}$ é o maior número tal que $\frac{n}{T}$ não é maior do que 20.000 Hz.

Vamos agora tomar uma onda dente de serra $p(t)$ e determinar qual o polinômio trigonométrico $q(t)$ que melhor aproxima $p(t)$ e mostrar que ambas são perceptíveis pelo nosso ouvido, e além disso, produzem a mesma sensação sonora com algum grau

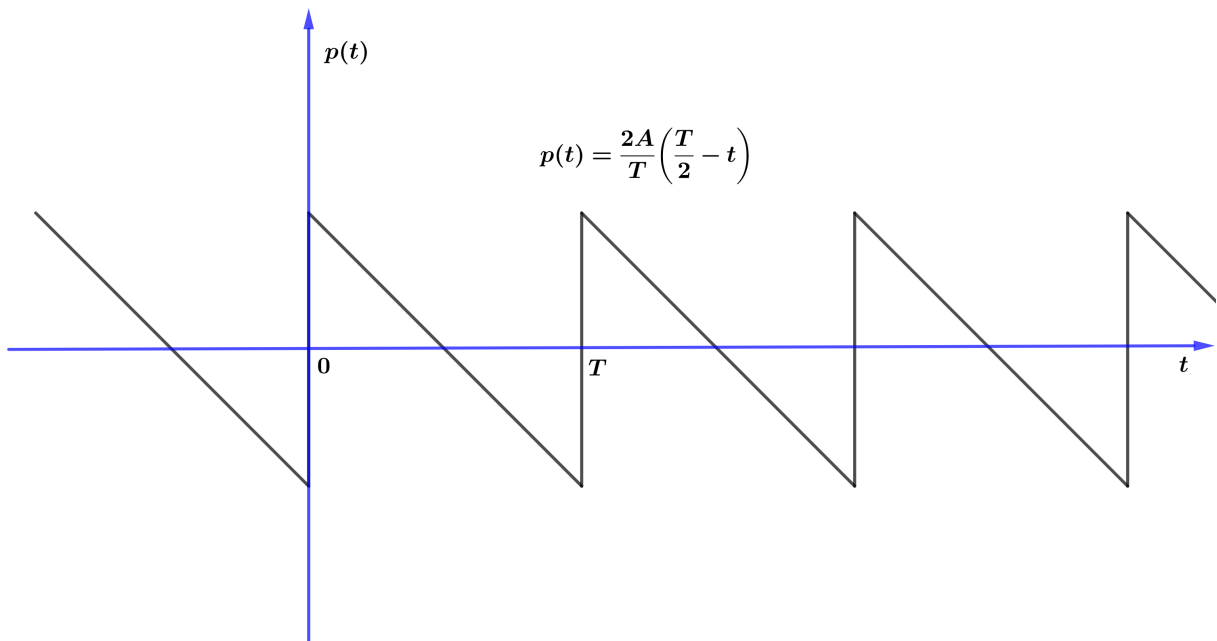
de precisão.

Seja $p(t)$ uma onda dente de serra de período $T = 2A$ e cuja frequência básica seja 5.000 Hz. Suponha também que as unidades de medida foram escolhidas de tal sorte que a pressão atmosférica normal ocorra no nível zero. Suponha também que a amplitude da onda seja A . Veja que a equação é tal que $p(0) = A$ e $p(T) = -A$, o que nos dá a equação

$$p(t) = A - \frac{2A}{T}t = \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \quad (5.3)$$

cujo gráfico está exibido na figura a seguir:

Figura 26 – A onda dente de serra $p(t)$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Pretendemos determinar o polinômio trigonométrico que melhor aproxima-se de $p(t)$; para tal, precisamos determinar os coeficientes de Fourier, e para isso faremos uso do seguinte teorema:

Teorema 5.1 (Minimizando o erro quadrático médio) *Se $f(t)$ é contínua em $[0, T]$, então a função trigonométrica dada por*

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + b_1 \sin \frac{2\pi}{T}t + \dots + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t,$$

que minimiza o erro quadrático médio

$$\int_0^T [f(t) - g(t)]^2 dt,$$

tem coeficientes

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt,$$

e

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt.$$

A versão simplificada desse teorema foi apresentada e demonstrada no capítulo anterior, a saber, o **Problema** de aproximação resolvido nas páginas 62 a 64 deste trabalho. A demonstração deste resultado segue a mesma ideia lá proposta, e o leitor interessado em maiores detalhes sobre o conteúdo pode consultar as referências [5] e [7] que encontrarão um tratamento mais completo sobre as Séries de Fourier.

Voltando ao problema, pelo teorema anterior, os coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left(At - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^T, \end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \left(AT - \frac{T^2}{2} \right) \\ &= 2A - T \\ &= 2A - 2A \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt, \end{aligned}$$

chamando $u = \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right)$ e $dv = \cos \frac{2k\pi t}{T} dt$ temos

$$\begin{aligned} u &= \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \Rightarrow du = -\frac{2A}{T} dt \\ dv &= \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \Rightarrow v = \frac{T}{2k\pi} \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt &= \frac{2}{T} \left[\frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \frac{T}{2k\pi} \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \Big|_0^T + \frac{A}{k\pi} \int_0^T \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt \right] \\
 &= \frac{2A}{Tk\pi} \left(\frac{T}{2} - t \right) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \Big|_0^T + \frac{2A}{Tk\pi} \int_0^T \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt \\
 &= \left[\frac{2A}{Tk\pi} \left(\frac{T}{2} - t \right) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} - \frac{A}{k^2\pi^2} \cos \frac{2k\pi t}{T} \right] \Big|_0^T \\
 &= -\frac{A}{k^2\pi^2} + \frac{A}{k^2\pi^2} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt,
 \end{aligned}$$

chamando $u = \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right)$ e $dv = \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt$ temos

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \Rightarrow du = -\frac{2A}{T} dt \\
 dv &= \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt \Rightarrow v = -\frac{T}{2k\pi} \cos \frac{2k\pi t}{T}
 \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt &= \frac{2}{T} \left[-\frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \frac{T}{2k\pi} \cos \frac{2k\pi t}{T} \Big|_0^T + \frac{A}{k\pi} \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \right] \\
 &= -\frac{2A}{Tk\pi} \left(\frac{T}{2} - t \right) \cos \frac{2k\pi t}{T} \Big|_0^T + \frac{2A}{Tk\pi} \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} dt
 \end{aligned}$$

integrando, temos

$$\left[-\frac{2A}{Tk\pi} \left(\frac{T}{2} - t \right) \cos \frac{2k\pi t}{T} + \frac{A}{k^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \right] \Big|_0^T$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos finalmente que

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt &= -\frac{2A}{Tk\pi} \left(\frac{T}{2} - T \right) + \frac{2A}{Tk\pi} \left(\frac{T}{2} \right) \\
 &= \frac{A}{k\pi} + \frac{A}{k\pi} \\
 &= \frac{2A}{k\pi}.
 \end{aligned}$$

Então, resumindo os coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_k &= 0 \text{ com } k \geq 1 \\ b_k &= \frac{2A}{k\pi} \text{ com } k \geq 1. \end{aligned}$$

Logo, o polinômio trigonométrico que melhor aproxima $p(t)$ é

$$q(t) = \frac{2A}{\pi} \sin \frac{2\pi}{T}t + \frac{A}{\pi} \sin \frac{4\pi}{T}t + \dots + \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{T}t.$$

Agora, perceba que $f = 5.000 \Rightarrow \frac{1}{T} = 5.000 \Rightarrow T = 0,0002$, isto é, uma frequência de 5.000 Hz equivale a um período de $T = 0,0002$ segundos. Além disso, note que

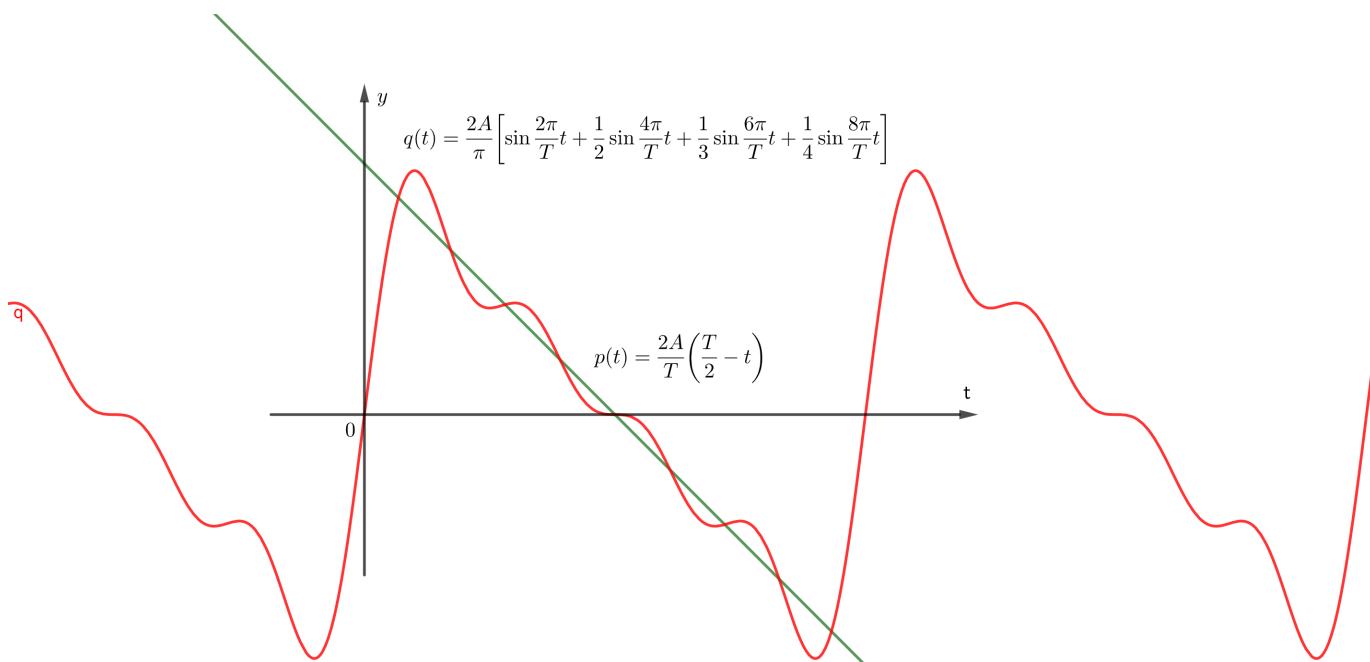
$$\frac{1}{T} = 5.000 \Rightarrow \frac{4}{T} = 20.000,$$

de modo que $p(t)$ deve ter ordem menor do que ou igual a 4, pois com uma ordem maior, a onda resultante teria uma frequência acima de 20.000 Hz, o que não seria interpretado como som pelo nosso ouvido. Logo,

$$q(t) = \frac{2A}{\pi} \left[\sin \frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{T}t + \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{T}t \right].$$

A aproximação de $p(t)$ por $q(t)$ pode ser notada na figura a seguir:

Figura 27 – Aproximação de $p(t)$ por $q(t)$.



Fonte: Elaborada pelo autor

5.4 Como usar este trabalho no ensino médio?

Para encerrar nosso trabalho vamos apresentar uma proposta de como utilizar este trabalho em uma turma de ensino médio, o que se pode omitir, o que se deve omitir, e que recursos utilizar de modo que o processo de ensino aprendizagem ocorra da maneira mais natural e eficiente possível.

Antes porém, devemos ressaltar a importância da pesquisa, e primeiramente damos o destaque para a proposta interdisciplinar presente nela, pois aqui foram trabalhados conteúdos de Matemática, Física e Biologia, de modo que estes profissionais podem trabalhar juntos, cada um expondo o conteúdo de sua disciplina, porém os três convergindo para uma mesmo fim, a saber, a expansão do conhecimento e o crescimento intelectual do aluno.

Chamamos a atenção também para o fato de que a Matemática aqui apresentada, embora seja de nível superior, pode ser apresentada de forma simplificada para um aluno do ensino médio, omitindo as formalidades desnecessárias assim como os conteúdos que não são próprios do ensino médio, e utilizando de recursos tecnológicos, como softwares que sejam capazes de traçar gráficos, a fim de mostrar para o aluno que os resultados obtidos são, de fato, verdadeiros.

Vamos agora, apresentar duas propostas de apresentação deste trabalho em uma turma de ensino médio.

1ª Forma: Os professores de Física, Biologia e Matemática apresentam juntos o trabalho, propondo assim a interdisciplinaridade da seguinte forma:

O professor de Matemática apresenta de maneira resumida o que se pretende fazer, a saber, compreender o funcionamento do ouvido humano do ponto de vista matemático. Em seguida, apresenta-se as áreas do conhecimento envolvidas na apresentação do trabalho, as quais são: Matemática, Física e Biologia e os conteúdos a serem trabalhados em cada área do conhecimento.

O professor de Física assume apresentando a parte de ondulatória, os conceitos, os tipos de ondas, as propriedades das ondas e as grandezas associadas.

Dando continuidade, o professor de Biologia apresenta a parte de fisiologia do aparelho auditivo humano, explicando seus componentes, suas funções e o funcionamento do ouvido humano do ponto de vista biológico.

Por fim, o professor de Matemática assume apresentando os conceitos matemáticos necessários, tais como as funções trigonométricas, os gráficos, a onda dente de serra dada por (5.3) e o polinômio trigonométrico $q(t)$ que o aproxima. Em seguida, o professor pode mostrar os gráficos de ambas as ondas em um software de matemática, ou mostrar as figuras de cada função e suas aproximações.

2ª Forma: A segunda possui a mesma dinâmica da primeira, porém é feita apenas com o professor de Matemática, exigindo mais do professor, pois este precisa ter o conhecimento necessário das três disciplinas, mas pode deixar a forma de apresentação mais homogênea, pois cada professor possui o seu estilo de aula.

Uma pergunta que pode ser feita aqui é a seguinte: *Em que momento apresentar?* Para responder a esta pergunta, também damos duas propostas que acreditamos serem satisfatórias. A primeira proposta de apresentação deste trabalho seria em aulas de prática experimental, as quais passaram a fazer parte do currículo do aluno do primeiro e segundo ano do ensino médio. Portanto, nesses encontros semanais, os professores (ou o professor) pode desenvolver esta pesquisa.

A segunda proposta, a qual acreditamos que se poderia desenvolver este trabalho é em uma amostra pedagógica, pois estes eventos promovem a interdisciplinaridade, a interação entre as turmas, o desenvolvimento de competências nos alunos, a expansão do conhecimento e a socialização dos alunos entre si, dos alunos com os professores, funcionários da escola e comunidade escolar.

Referências

- [1] Anton, Howard, *Álgebra Linear com Aplicações*, 10^a ed. Bookman, Porto Alegre, RS, 2012.
- [2] ————— *Cálculo, volume 1*, 10^a ed. Bookman, Porto Alegre, RS, 2014.
- [3] ————— *Cálculo, volume 2*, 10^a ed. Bookman, Porto Alegre, RS, 2014.
- [4] DE MORAIS FILHO, D. C.; *Manual de Redação Matemática, com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como escrever uma dissertação*, 2^a ed. Campina Grande - PB: Fábrica de Ensino, (2009), 151p.
- [5] Figueiredo, Djairo Guedes de *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 4^a ed. IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2014.
- [6] Halliday, David, 1916 *Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica*, 8^a ed. LTC, Rio de Janeiro, RJ, 2009.
- [7] Lacerda, José Hélio de *Análise de Fourier e a Transformada de Laplace* (Monografia) - Graduação - Departamento de Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.
- [8] Lourêdo, Aldo Trajano, Oliveira, Alexandro Marinho *Um primeiro Curso de Álgebra Linear*, 1^a ed. EDUEPB, Campina Grande, PB, 2015.
- [9] Normas da ABNT – NBR 6023: *ABNT: guia de normalização*, (2000). Disponível em <<http://biblioteca.uepb.edu.br/abnt-guia-de-normalizacao/>>. Acesso em 04 fev 2019.
- [10] Silverthorn, Dee Unglaub, *Fisiologia Humana: uma abordagem integrada*, 7^a ed. Artmed, Porto Alegre, RS, 2017.
- [11] Van de Graaff, Kent M. (Kent Marshall), 1942 – *Anatomia Humana*, 6^a ed. Manole, SP, 2003.
- [12] Villas Bôas, Newton. *Conecte Tópicos de física 2 - 2^a ed.* - São Paulo: Saraiva, 2014.
- [13] Viginéski, Iohanna Wielewski de Souza. *Modelo de Mínimos Quadrados para a Audição Humana*

-
- [14] Widmaier, Eric P. Vander, Sherman & Luciano, *Fisiologia Humana: os mecanismos das funções corporais*, 9^a ed. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 2006.