



Universidade Estadual da Paraíba
Campus I - Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática



Állisson Henrique Leite Cabral

Poliedros duais e algumas aplicações

Campina Grande - PB
Dezembro/2019

Állisson Henrique Leite Cabral

Poliedros duais e algumas aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luciana Roze de Freitas

Campina Grande - PB

Dezembro/2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

C117p Cabral, Állisson Henrique Leite.
Poliedros duais e algumas aplicações [manuscrito] /
Állisson Henrique Leite Cabral. - 2019.
101 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2020.

"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Ensino de Geometria. 2. Poliedros. 3. GeoGebra. I.

Título

21. ed. CDD 516

Állisson Henrique Leite Cabral

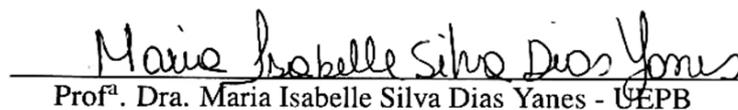
Poliedros duais e algumas aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 20/12/2019


Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira - UFCG


Prof^a. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes - UEPB


Prof^a. Dra. Luciana Roze de Freitas - UEPB

Orientadora

Dedicatória

Dedico, primeiramente, a Deus, que iluminou meus passos durante toda esta caminhada.

A toda minha família e amigos, que sempre estiveram comigo me dando forças para continuar.

A todos os meus professores, que contribuíram para a construção do conhecimento que tenho hoje.

À minha esposa, que sempre me ensinou a ser confiante e nunca desistir.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por toda a sabedoria concedida e por todas as bênçãos recaídas sobre a minha vida. Foi ele o responsável por motivar em meu coração o amor que tenho pela matemática e por me guiar durante toda esta jornada.

A toda minha família e amigos, que sempre estiveram ao meu lado me incentivando e dando conselhos que foram essenciais para a realização deste trabalho. Sou grato por todo o afeto e consideração que todos sempre tiveram para comigo.

A todos os meus professores, que compartilharam comigo o seu conhecimento e deixaram em mim uma parte do que são, o que foi de fundamental importância para a formação da pessoa que sou hoje. Mais do que conhecimento científico, vocês me passaram experiência de vida e me mostraram o que significa ser íntegro. Sou grato, especialmente, à minha orientadora, que sempre se mostrou ser uma ótima professora e amiga; que durante a realização do trabalho, sempre esteve disponível e disposta a me ajudar no que fosse necessário, contribuindo imensamente para a construção das ideias abordadas, sem falar nos conselhos, que certamente vou levar comigo tanto para a vida profissional como pessoal.

Aos meus colegas e companheiros de estudo do mestrado, que sempre estiveram comigo tirando dúvidas e compartilhando conhecimentos, sobretudo trocando experiências de vida e conselhos valorosos. Na formatação deste trabalho para o \LaTeX , vocês (meus amigos verdadeiros) juntamente com meu primo, mostraram-se sempre dispostos a me auxiliar sempre que precisei. Por isso, sou eternamente grato a todos pela força que me concederam.

À minha esposa, que me mostrou que quando queremos conquistar algo, devemos enfrentar as batalhas que aparecem em nosso caminho com muita paciência e humildade, mas sempre com a certeza de que vamos conseguir alcançar nossos objetivos; reconhecendo que sem aqueles que estão ao nosso lado nos dando força, nada teria acontecido.

À banca examinadora, por aceitar participar deste trabalho e pelas sugestões que foram dadas para o aperfeiçoamento do mesmo. Obrigado a todos pela avaliação feita e pelas ideias propostas, realmente são todas pertinentes e, como não poderia deixar de ser, foram seguidas à risca nas correções. Que Deus os abençoe!

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, pela idealização e realização deste curso de pós-graduação em rede nacional, e à Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, por ofertá-lo em minha cidade, Campina Grande. Tenho um carinho especial por essa instituição porque também foi nela onde realizei minha graduação.

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

(Johannes Kepler)

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo sobre a dualidade de poliedros, destacando o ensino de geometria e o contexto histórico do seu surgimento. Apresentamos quatro classes de poliedros bastante interessantes: a dos poliedros regulares, a dos poliedros de Kepler-Poinsot, a dos sólidos de Arquimedes e a dos sólidos de Catalan, descrevendo uma breve bibliografia sobre as contribuições desses grandes matemáticos, incluindo Platão. Evidenciamos todas as definições e resultados pertinentes ao estudo, enfatizando a importância da abordagem desse tópico em sala de aula. Além disso, introduzimos algumas transformações envolvendo poliedros e realizamos a planificação dos poliedros estudados a fim de facilitar a visualização e compreensão do leitor. No capítulo dedicado às aplicações, sugerimos alguns problemas que podem ser trabalhados nas aulas de geometria espacial, sobretudo pelo professor do ensino básico. Finalmente, ensinamos o passo a passo da construção de um sólido arquimediano com a utilização do Geogebra.

Palavras-chave: Poliedros. Transformações. Dualidade. GeoGebra.

Abstract

In this paper, we study the duality of polyhedra, highlighting the teaching of geometry and the historical context of its emergence. We present four very interesting classes of polyhedra: regular polyhedra, Kepler-Poinsot polyhedra, Archimedes solid, and Catalan solid, describing a brief bibliography on the contributions of these great mathematicians, including Plato. We highlighted all definitions and results relevant to the study, emphasizing the importance of addressing this topic in the classroom. In addition, we introduced some transformations involving polyhedra and made the planning of the studied polyhedra in order to facilitate the reader's understanding and understanding. In the chapter devoted to applications, we suggest some problems that can be addressed in spatial geometry classes, especially by the elementary school teacher. Finally, we teach the step by step of building an Archimedean solid using Geogebra.

Keywords: Polyhedra. Transformations. Duality. GeoGebra.

Lista de figuras

Figura 1.1 – Associação entre poliedros regulares e elementos da natureza	17
Figura 1.2 – Pintura do rombicuboctaedro	19
Figura 2.1 – É poliedro	23
Figura 2.2 – Não é poliedro	23
Figura 2.3 – Prisma sem uma de suas faces laterais	24
Figura 2.4 – Poliedro convexo	25
Figura 2.5 – Poliedro não convexo	25
Figura 2.6 – Platão	26
Figura 2.7 – Poliedro de Platão	28
Figura 2.8 – Tetraedro regular: constituído de 4 faces triangulares	30
Figura 2.9 – Hexaedro regular: constituído de 6 faces quadrangulares	30
Figura 2.10 – Octaedro regular: constituído de 8 faces triangulares	30
Figura 2.11 – Dodecaedro regular: constituído de 12 faces pentagonais	30
Figura 2.12 – Icosaedro regular: constituído de 20 faces triangulares	30
Figura 2.13 – Dois tetraedros duais entre si	31
Figura 2.14 – Hexaedro e octaedro duais entre si	31
Figura 2.15 – Dodecaedro e icosaedro duais entre si	31
Figura 2.16 – Kepler	32
Figura 2.17 – Poincot	33
Figura 2.18 – Pequeno dodecaedro estrelado	34
Figura 2.19 – Grande dodecaedro estrelado	34
Figura 2.20 – Grande dodecaedro	34
Figura 2.21 – Icosaedro estrelado	34
Figura 2.22 – Arquimedes	35
Figura 2.23 – Tetraedro truncado	36
Figura 2.24 – Cuboctaedro	36

Figura 2.25 – Cubo truncado	36
Figura 2.26 – Octaedro truncado	37
Figura 2.27 – Rombicuboctaedro	37
Figura 2.28 – Cuboctaedro truncado	37
Figura 2.29 – Icosidodecaedro	37
Figura 2.30 – Dodecaedro truncado	37
Figura 2.31 – Icosaedro truncado	37
Figura 2.32 – Rombicosidodecaedro	37
Figura 2.33 – Icosidodecaedro truncado	37
Figura 2.34 – Cubo snub	38
Figura 2.35 – Icosidodecaedro snub	38
Figura 2.36 – Cuboctaedro inscrito no hexaedro e octaedro regulares	39
Figura 2.37 – Catalan	39
Figura 2.38 – Tetraedro triakis	41
Figura 2.39 – Dodecaedro rômbo	41
Figura 2.40 – Octaedro triakis	41
Figura 2.41 – Hexaedro triakis	41
Figura 2.42 – Icositetraedro deltoidal	41
Figura 2.43 – Dodecaedro disdiakis	41
Figura 2.44 – Triacontaedro rômbo	42
Figura 2.45 – Icosaedro triakis	42
Figura 2.46 – Dodecaedro pentakis	42
Figura 2.47 – Hexecontaedro deltoidal	42
Figura 2.48 – Triacontaedro disdiakis	42
Figura 2.49 – Icositetraedro pentagonal	42
Figura 2.50 – Hexencotaedro pentagonal	42
Figura 2.51 – Octaedro triakis inscrito no cubo truncado	43
Figura 2.53 – Dual topológico do cuboctaedro	46

Figura 2.54 – Processo de inscrição do cuboctaedro no dodecaedro rômico	46
Figura 2.55 – Planificação do tetraedro regular	49
Figura 2.56 – Planificação do hexaedro regular	49
Figura 2.57 – Planificação do octaedro regular	49
Figura 2.58 – Planificação do dodecaedro regular	49
Figura 2.59 – Planificação do icosaedro regular	49
Figura 2.60 – Planificação do pequeno dodecaedro estrelado	50
Figura 2.61 – Planificação do grande dodecaedro estrelado	50
Figura 2.62 – Planificação do grande dodecaedro	50
Figura 2.63 – Planificação do icosaedro estrelado	50
Figura 2.64 – Planificação do tetraedro truncado	51
Figura 2.65 – Planificação do cuboctaedro	51
Figura 2.66 – Planificação do cubo tetraedro truncado	51
Figura 2.67 – Planificação do octaedro truncado	51
Figura 2.68 – Planificação do rombicuboctaedro	51
Figura 2.69 – Planificação do cuboctaedro truncado	51
Figura 2.70 – Planificação do icosidodecaedro	51
Figura 2.71 – Planificação do dodecaedro truncado	51
Figura 2.72 – Planificação do icosaedro truncado	51
Figura 2.73 – Planificação do rombicoidodecaedro	52
Figura 2.74 – Planificação do icosidodecaedro truncado	52
Figura 2.75 – Planificação do cubo snub	52
Figura 2.76 – Planificação do icosidodecaedro snub	52
Figura 2.77 – Planificação do tetraedro triakis	53
Figura 2.78 – Planificação do dodecaedro rômico	53
Figura 2.79 – Planificação do octaedro triakis	53
Figura 2.80 – Planificação do hexaedro triakis	53
Figura 2.81 – Planificação do icositetraedro deltoidal	53

Figura 2.82 – Planificação do dodecaedro disdiakis	53
Figura 2.83 – Planificação do triacontaedro rômico	53
Figura 2.84 – Planificação do icosaedro triakis	53
Figura 2.85 – Planificação do dodecaedro pentakis	53
Figura 2.86 – Planificação do hexecontaedro deltoidal	54
Figura 2.87 – Planificação do triacontaedro disdiakis	54
Figura 2.88 – Planificação do icositetraedro pentagonal	54
Figura 2.89 – Planificação do hexecontaedro pentagonal	54
Figura 2.90 – Planificação do poliedro 3-tórico	55
Figura 3.1 – Cuboctaedro tracejado	56
Figura 3.2 – Quadrado inscrito	57
Figura 3.3 – Triângulo inscrito	57
Figura 3.4 – Dodecaedro rômico tracejado	59
Figura 3.5 – Triângulo retângulo no interior da pirâmide de base quadrangular	60
Figura 3.6 – Recordação do octaedro truncado	62
Figura 3.7 – Recordação do hexaedro triakis	63
Figura 3.8 – Recordação do rombicuboctaedro	64
Figura 3.9 – Recordação do icositetraedro deltoidal	64
Figura 3.10 – Tetraedro regular de aresta 3.	65
Figura 3.11 – Tetraedro triakis inscrito no tetraedro truncado	66
Figura 3.12 – Cálculo da aresta menor do tetraedro triakis	67
Figura 3.13 – Cálculo da aresta maior do tetraedro triakis	68
Figura 3.14 – Cálculo do ângulo diédrico do tetraedro triakis	69
Figura 3.15 – Dodecaedro regular com alguns elementos destacados	72
Figura 3.16 – Icosaedro regular com alguns elementos destacados	75
Figura 3.17 – Triângulo retângulo sobre o pentágono regular.	75
Figura 3.18 – Ângulo diédrico do icosaedro regular	78
Figura 3.19 – Aresta do dodecaedro inscrito destacada em azul.	79

Figura 5.1 – Janela de visualização inicial do GeoGebra	85
Figura 5.2 – Círculo de raio 2 centrado na origem	86
Figura 5.3 – Ponto B marcado sobre o círculo	86
Figura 5.4 – Pontos B' e B" marcados sobre o círculo	87
Figura 5.5 – Triângulo equilátero inscrito no círculo	87
Figura 5.6 – Janela de visualização 3D	88
Figura 5.7 – Icosaedro regular fomentado	88
Figura 5.8 – Icosaedro regular ampliado	89
Figura 5.9 – Comprimento do segmento KL	89
Figura 5.10 – Quadrinho branco desaparecido	90
Figura 5.11 – Esfera sobre um dos vértices do icosaedro regular	90
Figura 5.12 – Cinco pontos sobre a superfície da esfera	91
Figura 5.13 – Pentágono regular destacado em azul	92
Figura 5.14 – Pentágonos regulares destacados em azul	92
Figura 5.15 – Icosaedro desmarcado	93
Figura 5.16 – Pontos desmarcados	93
Figura 5.17 – Icosaedro truncado	94
Figura 5.18 – Icosaedro truncado “limpo”	94
Figura 5.19 – Ponto D_3 marcado sobre a face hexagonal do icosaedro truncado	95
Figura 5.20 – Todos os centros das faces do icosaedro truncado marcados	96
Figura 5.21 – Segmentos de reta devidamente traçados.	96
Figura 5.22 – Dodecaedro pentakis em evidência	97
Figura 5.23 – Faces do dodecaedro pentakis realçadas	97
Figura 5.24 – Todos os centros das faces do dodecaedro pentakis marcados	98
Figura 5.25 – Todos os vértices do dodecaedro pentakis marcados	99
Figura 5.26 – Faces pentagonais traçadas	99
Figura 5.27 – Faces hexagonais traçadas	100
Figura 5.28 – Icosaedro truncado “limpo”	100

Lista de tabelas

Tabela 2.52 – Dualidade entre os sólidos arquimedianos e os sólidos catalanienses . . 44

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Ensino de geometria	15
1.2	Estudo dos poliedros: contexto histórico	17
1.3	Objetivos	21
1.3.1	Objetivo geral	21
1.3.2	Objetivos específicos	21
1.4	Organização do trabalho	21
2	POLIEDROS	22
2.1	Poliedros de Platão	26
2.2	Poliedros de Kepler-Poinsot	31
2.3	Poliedros de Arquimedes	35
2.4	Poliedros de Catalan	39
2.5	Transformações	47
2.6	Planificações	48
3	APLICAÇÕES	56
4	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	83
5	APÊNDICE - CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA	85

1 Introdução

1.1 Ensino de geometria

Iniciaremos este trabalho fazendo uma breve discussão sobre o ensino de matemática, dando ênfase à aprendizagem dos conceitos geométricos. Sabemos que os alunos estão cada vez mais desmotivados para aprender matemática; para falar a verdade, a educação de uma maneira geral está um tanto quanto desinteressante aos olhos dos alunos. Por isso, entendemos que os professores de matemática têm de se atualizar no sentido de aperfeiçoar suas práticas pedagógicas e conhecer novas ferramentas didáticas para tentar atingir a compreensão efetiva dos alunos em sala de aula. Mais do que isso, devemos mostrar que a matemática tem um papel importante no desenvolvimento do educando como um ser crítico e social. Sobre isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais mencionam que

(...) a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (Brasil, 1998)

Nesse sentido, a matemática não pode mais ser vista simplesmente como uma disciplina que prioriza os cálculos, as fórmulas e as figuras de uma maneira estagnada; pelo contrário, os conhecimentos matemáticos devem ser utilizados em nosso cotidiano para resolver problemas, entender comportamentos e visualizar formas, evidenciando, assim, as suas aplicações e comprovando a sua relevância no que diz respeito ao desenvolvimento de competências e habilidades para uma melhor interpretação e investigação de situações com as quais nos deparamos.

Quando se fala em geometria, as dificuldades apresentadas pelos alunos são imensas e para tentar reverter esse quadro, devemos lançar mão de novas alternativas para trabalhar essa área da matemática em sala de aula. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam a importância dos conceitos geométricos, permitindo que

O aluno desenvolva um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 39)

A Base Nacional Comum Curricular, estabelecida em 2016, regulamenta quais são os conhecimentos imprescindíveis aos estudantes de todas as escolas brasileiras públicas e particulares que oferecem os três primeiros níveis de ensino, com o objetivo de garantir o direito à aprendizagem e o desenvolvimento pleno, colaborando para a construção de uma sociedade mais democrática e inclusiva. No campo da matemática, a geometria constitui uma das cinco unidades de conhecimento e cumpre um papel importante na construção de competências e habilidades que visam a uma nova forma de pensar e fazer matemática.

Em consonância com os objetivos traçados pelo professor, as representações possibilitam que o aluno construa, visualize e explore os elementos e as propriedades das figuras geométricas, as quais vão perdendo a sua abstração à medida que a aprendizagem matemática vai se consolidando. Fürkotter e Morelatti (2009, p. 29) apontam que “é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno”.

Por isso, a geometria pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial. E quando esses conceitos são motivados pelas situações vivenciadas pelo aluno, facilitam o entendimento e permitem que ele perceba a relação entre os objetos estudados e o espaço que os cerca. Dessa forma, percebe-se a importância de fazer com que os educandos desenvolvam um olhar geométrico investigativo sobre a realidade e, assim, compreendam que a abstração de alguns elementos geométricos pode ser superada quando fazemos uma associação entre eles e as formas que estão ao nosso redor.

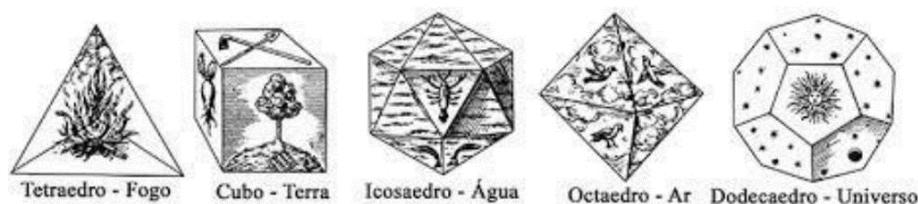
É sabido que nem todos os alunos têm o mesmo nível de compreensão, nem muito menos a mesma capacidade de observação. E quando se trata de conteúdos relacionados à geometria espacial, são muitas as dificuldades apresentadas no que diz respeito ao entendimento das representações dos objetos geométricos estudados. Tomando isso por base, chamamos a atenção dos professores do ensino básico para tentarem trabalhar os tópicos de geometria em sala de aula - quando possível - aliados a um material concreto ou a um aplicativo como forma de tentar propiciar aos alunos uma nova e mais significativa oportunidade de aprendizagem. Tendo em vista essa observação, procuramos construir algumas das figuras do trabalho utilizando o GeoGebra, um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra, permitindo-nos uma melhor compreensão do que estamos estudando a partir da visualização. Também fizemos uso do aplicativo Poly, em sua versão 1.12.

1.2 Estudo dos poliedros: contexto histórico

Antigas civilizações, como a babilônica e a egípcia, foram pioneiras na criação dos conhecimentos matemáticos, pois tinham a necessidade de demarcar os limites de suas propriedades, e para tanto precisavam medir as suas terras. Para projetar os templos e as pirâmides, os egípcios se viam obrigados a construir a geometria, palavra de origem grega - que tem por significado “medida de terra”. Sendo assim, observamos que na Grécia a geometria se desenvolveu de uma maneira organizada; surgiu para resolver problemas relativamente simples e serviu de base para a construção de verdadeiras descobertas da humanidade, como a construção da roda, que só foi possível a partir do conhecimento sobre a circunferência. O homem aprendeu que soluções retilíneas eram mais econômicas e que as figuras regulares tinham bastantes peculiaridades. A geometria espacial já estava presente em construções primitivas em modelos como cones e cilindros, que eram formas utilizadas nas cabanas dos nativos e em poços artesanais. Ainda por volta do ano 1000 a.C., as primeiras pirâmides já começavam a ser erguidas, passando a ser verdadeiros monumentos históricos reconhecidos até os dias atuais por sua engenharia.

Desde os tempos mais antigos da história da humanidade, há registros de objetos, gravuras e esculturas que tinham a forma de poliedros. Na Grécia Antiga, os pitagóricos¹ já mostravam ter conhecimento sobre alguns poliedros e os estudavam de maneira sistemática; enquanto que Platão concebia os poliedros sob uma perspectiva mais filosófica, fazendo a associação de cada um dos quatro elementos básicos da natureza - terra, água, ar e fogo - com um poliedro regular; além disso, o dodecaedro regular representava o cosmos do universo.

Figura 1.1 - Associação entre poliedros regulares e elementos da natureza



Fonte: BIDA, M. C. S.; SANTOS, P. A. S. (2015, p. 18).

Mais tarde, os poliedros regulares passaram a ser estudados por Euclides, no Livro XIII de sua famosa obra *Os elementos*. Tempos depois, Arquimedes, no século III a.C., constrói poliedros semirregulares a partir dos poliedros de Platão. É feita

¹ Os pitagóricos foram pré-socráticos que deram origem a uma influente corrente da filosofia grega, a qual tinha como mestre: Pitágoras. Esses pensadores manifestavam ao mesmo tempo tendências místico-religiosas e tendências científico-rationais. Uma das mais marcantes descobertas da escola pitagórica foi o famoso Teorema de Pitágoras.

uma correspondência entre os treze poliedros de Arquimedes e os treze poliedros de Catalan. Muitos anos mais tarde, apenas no século XIX, Cauchy demonstrou que há apenas nove poliedros regulares: os cinco poliedros de Platão - que são convexos - e os quatro poliedros de Kepler-Poinsot - que são não convexos.

A relação de dualidade² entre poliedros, a qual será formalmente definida e abordada no próximo capítulo, já fora percebida por Johannes Kepler, com a publicação do seu livro *A harmonia dos mundos*, em 1619. Porém, o sistema idealizado por Kepler apresentava alguns equívocos quando aplicado a poliedros convexos mais gerais, o que não desmerece o trabalho desenvolvido por ele. Mais tarde, outros matemáticos deram sua contribuição no que diz respeito à correção desses deslizos. Mais à frente, destacaremos quais equívocos são esses, porém, de antemão, adiantamos que trata-se da inscrição de poliedros.

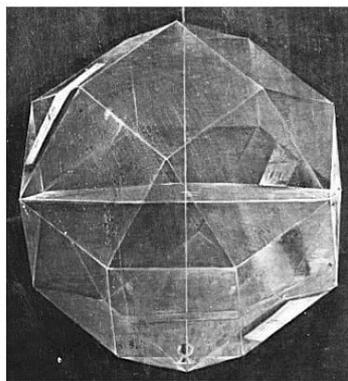
A beleza dos poliedros regulares despertou o interesse de vários artistas e arquitetos clássicos. Não era difícil se observar a expressão de poliedros regulares em obras de arte e na arquitetura de diversas culturas ao longo das épocas. Essas formas geométricas inspiravam a ordem e a beleza, favorecendo o lúdico. Em [7], há relatos que comprovam que em 1885, no monte Loffa - Itália, foi encontrado um artefato semelhante a um brinquedo de origem etrusca (500 a.C.) na forma de um dodecaedro regular. Portanto, inferimos que foram muitas as contribuições dessas antigas civilizações para o estudo dos poliedros.

Com o surgimento do Renascimento no Ocidente, pensamentos gregos das mais variadas áreas do conhecimento vieram à tona, o que despertou o interesse dos artistas italianos pelos poliedros, espalhando-se por toda a Europa. Foram construídos vários “esqueletos” de poliedros, na tentativa de retratar a vida como parte de suas investigações em perspectiva. Leonardo da Vinci fez modelos esqueléticos de alguns poliedros e pintou ilustrações deles para um livro de Pacioli. Em uma das publicações feitas por Pacioli, um artista anônimo descreve um rombicuboctaedro³ por meio de uma pintura que ilustra um vidro cheio de água, conforme figura 1.2.

Com o advento da revolução industrial na Europa em meados do século XVIII, houve uma transição que foi um verdadeiro divisor de águas quanto aos processos de manufatura praticados até então pelos pequenos produtores. Os métodos de produção artesanais deram lugar ao eficiente trabalho das máquinas, transformando as relações de trabalho e influenciando o estilo de vida da humanidade, visto que a produção de mercadorias foi acelerada e a exploração dos recursos naturais, intensificada. A revolução industrial foi o estopim para a consolidação do novo modelo econômico: o capitalismo.

² Dualidade de poliedros consiste na possibilidade de inscrição de um poliedro em outro de modo que os vértices do primeiro coincidam com os centros das faces do segundo e vice-versa.

³ Rombicuboctaedro é um sólido de Arquimedes constituído de oito faces triangulares e dezoito, quadrangulares.

Figura 1.2 - Pintura do rombicuboctaedro

Fonte: Fundação Zeri.

Os poliedros têm grande destaque no processo de produção nas indústrias, especialmente na confecção das embalagens dos produtos. As formas mais utilizadas são as prismáticas (sobretudo, paralelepípedos retos), por otimizarem o espaço ocupado e serem de fácil armazenamento e transporte, assegurando economia e segurança. Geralmente, essas embalagens são produzidas com papelão, o que facilita bastante a sua montagem. Esse tipo de papel se mostra ser um interessante material concreto para ser trabalhado em sala de aula para a produção de alguns poliedros, pois é um material de fácil reciclagem. Há outros materiais que são bastante adotados por professores na construção de poliedros, como canudos de plástico com linha de nylon ou até mesmo a utilização de papéis mais maleáveis para a confecção de origamis. Nada melhor do que o aluno ter a experiência de estudar um objeto matemático construído por ele próprio, em que é possível mais claramente a observação do comportamento de seus elementos. Por isso, sugerimos aos professores que se dispuserem a trabalhar essa temática em sala de aula, lance mão de materiais concretos como forma de instigar os alunos a explorar os poliedros significativamente, a partir da construção e manipulação.

Sem sombra de dúvidas, esse tipo de abordagem do conteúdo “poliedro” em sala de aula pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem, contudo, não podemos negar que toda nova aprendizagem requer conhecimentos anteriores para que ela seja bem fundamentada. E aqui não é diferente, para uma aprendizagem bem consolidada sobre os poliedros, faz-se necessário o mínimo de conhecimento acerca dos conceitos relativos à geometria plana, que vão desde a definição de polígonos (principalmente, os regulares) até relações métricas e noção de área determinada pelo contorno de um polígono. Os poliedros nos permite abordar vários conceitos de geometria espacial, como área de superfície, ângulos poliédricos e volume, sem falar na contagem dos elementos de cada um desses sólidos. O aluno tem o direito de despertar sua curiosidade para aprender a matéria, vislumbrando as possibilidades de se abordar tal conteúdo aliadas à motivação pela intuição.

Portanto, a teoria dos poliedros aborda vários conceitos e resultados interessantes pouco explorados em sala de aula no ensino básico e que pode contribuir, de maneira geral, para reforçar o aprendizado de alguns tópicos de geometria plana e espacial. A proposta deste trabalho é fazer um estudo sobre os poliedros, analisando-se algumas de suas classes especiais: os poliedros regulares, os de Kepler-Poinsot, os de Arquimedes e os de Catalan. Pretende-se estudar os conceitos de dualidade de poliedros, planificações, transformações envolvendo poliedros entre os outros aspectos. No capítulo dedicado às aplicações, são apresentados alguns problemas que podem ser trabalhados em atividades desenvolvidas pelo professor em sala de aula.

Quando os conteúdos matemáticos estudados em sala de aula são relacionados com a sua história, suas descobertas e motivações, os alunos se veem curiosos em compreender como se deu o surgimento e o desenvolvimento daquele saber científico. Sobre isso, D'Ambrosio menciona que

As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (1999, p. 97)

Ainda sobre a perspectiva da construção do conhecimento e suas ampliações, as Diretrizes Curriculares Nacionais destacam que

O ensino da matemática trata a construção do conhecimento matemático sob uma visão histórica, de modo que os conceitos são apresentados, discutidos, construídos e reconstruídos e também influenciam na formação do pensamento humano e na produção de sua existência por meio das ideias e tecnologias. (2006, p.24)

Dessa forma, inferimos que a matemática desempenhou um papel importante dentro da sociedade ao longo dos anos, de tal maneira que vários povos deram sua contribuição para o aperfeiçoamento das técnicas utilizadas para facilitar a vida e organizar a sociedade. Em alguns momentos, as ciências exatas uniram-se à filosofia na tentativa de busca do conhecimento e no desenvolvimento dos saberes já adquiridos.

Tivemos a preocupação de realizar uma breve bibliografia sobre a vida e contribuições de Platão, Arquimedes, Kepler, Poinsot e Catalan, segundo uma ordem cronológica de tempo para facilitar a compreensão do leitor. Esses estudiosos tiveram importância não apenas para a matemática, mas também, para várias outras áreas do conhecimento, que perpassam as ciências exatas chegando até a filosofia. Veremos que essas ciências têm certa relação, sobretudo quando se fala em poliedros. Platão, por exemplo, afirmava que a matemática era a chave de compreensão do universo.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Objetivamos, com a produção deste trabalho, realizar um estudo sobre a teoria dos poliedros, com ênfase na dualidade, e apresentar uma proposta didática de problemas que podem ser aplicados em atividades desenvolvidas em sala de aula.

1.3.2 Objetivos específicos

- Apresentar os principais conceitos e resultados pertinentes aos poliedros;
- Abordar algumas classes especiais de poliedros: regulares, de Kepler-Poinsot, arquimedianos e catalanienses;
- Analisar a relação de dualidade entre poliedros;
- Exibir algumas transformações sobre poliedros, planificações e construções;
- Propor problemas que possam ser trabalhados em sala de aula como forma de enfatizar a importância dos conceitos estudados.

1.4 Organização do trabalho

Este trabalho se encontra organizado em quatro capítulos. Como vimos, o primeiro capítulo trata do ensino da geometria e do contexto histórico dos primeiros estudos sobre os poliedros. O segundo capítulo traz duas definições para poliedros, a apresentação de alguns resultados sobre os mesmos e um estudo sobre quatro classes de poliedros. No terceiro capítulo, fazemos algumas aplicações sobre os poliedros estudados, propondo alguns problemas que podem ser trabalhados pelo professor em sala de aula, sobretudo no ensino básico, nas aulas de geometria espacial. Nas conclusões, destacamos as considerações finais do estudo realizado, apontando os resultados almejados e sugerindo possíveis tópicos para pesquisas futuras. Por fim, no apêndice mostramos minuciosamente como é feita a construção do icosaedro truncado⁴ com a utilização do aplicativo GeoGebra, permitindo-nos combinar conceitos de geometria e álgebra de modo a facilitar a visualização das figuras e proporcionar uma melhor compreensão do que estamos estudando.

⁴ O icosaedro truncado é um sólido de Arquimedes que possui 60 vértices, 90 arestas e 32 faces, sendo 12 pentagonais e 20 hexagonais. Como o próprio nome sugere, ele é obtido a partir do truncamento do icosaedro regular.

2 Poliedros

Alguns autores atribuíram significados variados para o termo poliedro ao longo das épocas, e esses significados nem sempre eram compatíveis entre si; o que para um autor era poliedro poderia não ser para outros e vice-versa, com base na definição adotada por cada um. Existem algumas definições mais gerais de poliedros, como por exemplo, a dada por Cauchy, a qual se distingue um pouco da que será considerada neste trabalho por ser mais geral.

Na matemática, como em todas as áreas do conhecimento, termos e expressões ganham novos significados e diferentes interpretações à medida que os estudos vão se desenvolvendo. Por isso, é importante que sejam estabelecidas as definições a serem assumidas no decorrer de todo o trabalho, no intuito de que interpretações equivocadas não se consolidem. Essa questão é discutida por Grünbaum (2003) quando ele afirma que

Desde a Grécia antiga, matemáticos tentam determinar o número de poliedros regulares. Um estudo dos cinco “sólidos platônicos” é o tópico final dos Elementos de Euclides. Embora esta lista de poliedros regulares fosse considerada completa, dois milênios depois, Kepler encontrou dois outros poliedros regulares e, no início do século XIX, Poincaré encontrou mais dois; Cauchy então demonstrou que não existiam outros. Mas, na década de 1920, Petrie e Coxeter encontram três novos poliedros regulares e provaram a completude desta enumeração. Contudo, em 1977 eu descobri uma nova classe de poliedros regulares e, em seguida, Dress provou que acrescentando mais um poliedro, a lista de poliedros regulares estava completa. Então, cerca de dez anos atrás, eu encontrei mais uma nova categoria de poliedros regulares e, até agora, ninguém afirmou que todos os poliedros regulares foram finalmente encontrados.

Como a contagem do número de poliedros regulares estabelecida por matemáticos distintos como Euclides, Cauchy, Coxeter e Dress é logo desmentida a seguir? A resposta é muito simples - todos os resultados estão corretos; o que mudou é o significado do termo “poliedro” adotado por cada um destes matemáticos. Enquanto pessoas diferentes interpretarem o conceito (de poliedro) de maneira diferente, sempre existirá a possibilidade de que resultados sejam verdadeiros sob uma interpretação e sejam falsos sobre outra interpretação. De fato, mesmo variações sutis na definição podem produzir mudanças significativas na validade dos resultados.

Além dos poliedros regulares, apresentamos também alguns sólidos estudados por Arquimedes, matemático, físico, engenheiro e astrônomo grego, durante o século III a.C., em Siracusa. Infelizmente, os trabalhos originais os quais tratavam desses sólidos desenvolvidos por Arquimedes foram perdidos, segundo o geômetra e historiador

norte-americano Howard Eves. Veremos que existe uma dualidade entre esses sólidos e os sólidos de Catalan, matemático belga do século XIX. Observamos que os sólidos estudados por Catalan são recentes; é tanto que os primeiros trabalhos desenvolvidos foram apresentados pela primeira vez apenas em 1865.

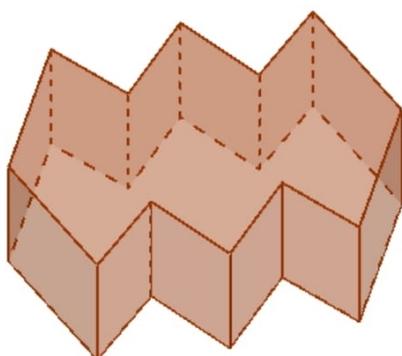
Como trataremos dos poliedros, é necessário que os conhecimentos referentes à geometria plana sejam minimamente dominados pelo leitor; entretanto, sempre que preciso, daremos destaque à formalização de alguns resultados da mesma. Desde muitos anos, estudamos os poliedros e conhecemos a sua importância para o estudo da geometria espacial. Os poliedros de Platão e seus elementos essenciais como face, vértice e aresta já começam a ser apresentados em livros destinados a séries do ensino fundamental, como em [5]; tendo seu estudo intensificado no ensino médio, como em [13]. Apresentaremos uma definição para poliedros que geralmente é encontrada em livros didáticos e será adotada no decorrer de todo o trabalho.

Definição 2.1. (Poliedro). *Chamamos de poliedro a toda reunião de um número finito de polígonos, faces do poliedro, satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Cada lado de um desses polígonos, aresta do poliedro, é também lado de um, e somente um, outro polígono;*
2. *A interseção de duas faces quaisquer ou é uma aresta, ou é um ponto, vértice do poliedro, ou é vazia.*

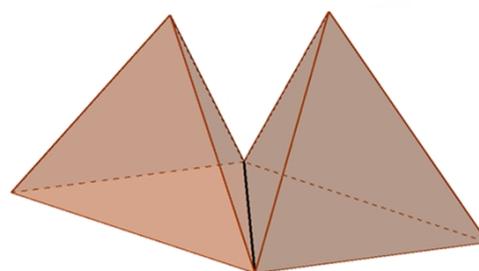
Observe que a figura 2.1 define um poliedro, contudo a figura 2.2 não o define, pois percebemos claramente que a aresta destacada em preto é lado comum a exatamente quatro faces do nosso sólido, contrariando o item 1 da definição anterior.

Figura 2.1 - É poliedro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.2 - Não é poliedro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

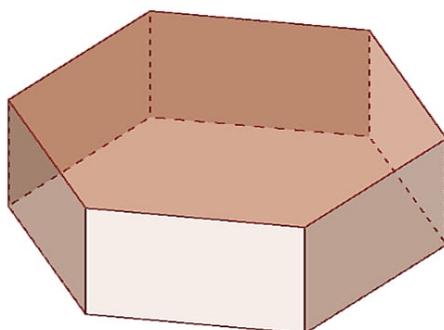
A seguir, exibimos a definição de poliedros dada por Cauchy. Observe que ela é bem mais geral quando comparada com a definição anterior. Isso se deve ao simples

fato de que não é mais necessário que cada aresta do poliedro seja lado de duas, e somente duas, faces.

Definição 2.2. (Definição de Cauchy para poliedros). *Um poliedro P é a reunião de um número finito de polígonos, chamados de faces de P . Os lados desses polígonos são chamados de arestas de P . Os vértices do poliedro são os vértices de suas faces. Exige-se, ainda, que as faces do poliedro P estejam regularmente dispostas, ou seja, que a interseção de duas faces distintas quaisquer de P seja uma aresta comum ou um vértice comum a elas, ou mesmo, vazia.*

Exemplo 2.3. Com base na definição anterior, entendemos que o poliedro não precisa limitar o espaço em duas regiões - uma interior e outra exterior - para existir. Ou seja, não precisamos mais de uma superfície completamente “fechada” para caracterizarmos um conjunto como poliedro. Por exemplo, o prisma sem uma de suas faces laterais da figura 2.3 é um exemplo de um poliedro que não tem sua superfície completamente “fechada”.

Figura 2.3 - Prisma sem uma de suas faces laterais



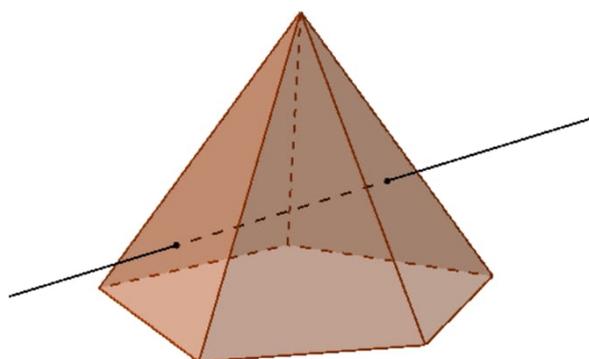
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Definição 2.4. (Poliedro Convexo). *Se o interior de um poliedro é convexo, então dizemos que o poliedro é convexo. Em geral, dado um subconjunto C do plano ou do espaço, denominamo-lo convexo quando todo segmento de reta com extremos em C está completamente contido em C .*

De maneira particular, em nossos estudos diremos que: “Um poliedro é convexo, se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos”. Tal definição pode ser encontrada em [14].

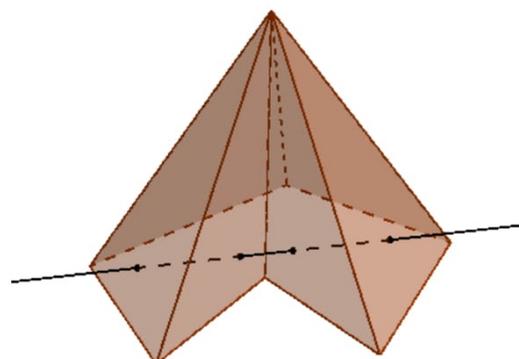
Percebemos que o poliedro da figura 2.4 é convexo, porém o da figura 2.5 é claramente não convexo.

Figura 2.4 - Poliedro convexo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.5 - Poliedro não convexo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Enunciamos, a seguir, o teorema de Euler para poliedros convexos. A sua demonstração pode ser feita utilizando-se a soma dos ângulos internos das faces do poliedro ou indução sobre o número de faces do poliedro. Ambas as demonstrações podem ser encontradas em [4]. Ainda sobre o teorema de Euler, essa referência discute sobre a ocorrência de alguns poliedros não convexos para os quais ainda é válido o resultado, mas apenas sob algumas hipóteses. Indicamos essa referência para quem deseja se aprofundar um pouco mais sobre o tema.

Teorema 2.5. (Teorema de Euler). *Em todo poliedro convexo, é satisfeita a relação*

$$V - A + F = 2,$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Note que o poliedro da figura 2.5 satisfaz o teorema de Euler, mesmo sendo não convexo. De fato,

$$V - A + F = 7 - 12 + 7 = 2.$$

A definição que segue diz respeito à dualidade de poliedros. Dois poliedros duais também são chamados de poliedros conjugados. Veremos que ela é bem intuitiva no sentido de que envolve simplesmente a ideia de inscrição e circunscrição de poliedros.

Definição 2.6. (Poliedros Duais). *Chamamos de poliedros duais aos poliedros em que um se encontra inscrito no outro de tal forma que os vértices de um coincidem com os centros das faces do outro.*

Podemos definir poliedros duais de uma maneira mais geral e com maior rigor matemático, segundo [11]. A saber,

Definição 2.7. (Poliedros Duais) Dizemos que dois poliedros convexos P e Q são duais um do outro se existe uma bijeção f da família de vértices e faces de P na família de vértices e faces de Q , que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se V é um vértice de P , então $f(V)$ é uma face de Q ;
2. Se F é uma face de P , então $f(F)$ é um vértice de Q ;
3. V é vértice da face F de P se, e somente se, $f(F)$ é vértice da face $f(V)$ de Q .

Há alguns resultados bastante interessantes e conhecidos que relacionam o número de vértices, faces e arestas de um poliedro. Dentre os quais se destacam as desigualdades, como a proposição a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [15].

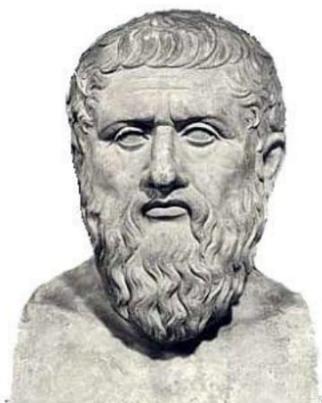
Proposição 2.8. Seja P um poliedro com A arestas, F faces e V vértices. Então,

- a) $2A \geq 3F$;
- b) $2A \geq 3V$.

Resultados semelhantes ao colocado acima são bem intuitivos no sentido de que necessitam apenas de uma efetiva interpretação sobre os elementos do poliedro.

2.1 Poliedros de Platão

Figura 2.6 - Platão



Fonte: Teociência.

O grego Platão nasceu em Atenas, por volta de 427 a.C., e veio de uma família nobre. Foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, escreveu

diversos diálogos filosóficos e fundou a Academia em Atenas, a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental. Sua vida filosófica teve início a partir do contato com os pensamentos filosóficos de Crátilo, mas ganhou força mesmo após conhecer Sócrates, quando tinha por volta de seus 20 anos de idade. Este último tornou-se seu grande mestre. Seus pensamentos eram fundamentados em um período em que as antigas concepções passavam a dar lugar a uma nova visão de mundo.

Muitas de suas ideias inspiraram a filosofia na busca pela inovação das concepções da época com o diálogo escrito e as formas dialéticas, sendo um dos pioneiros da filosofia política ocidental. Dentre as suas contribuições, destacam-se o realismo platônico e a doutrina das formas, em que a razão pura era vista como meio para fornecer uma solução realista para o problema dos universais. Ele afirmava que o homem vive no mundo das ideias antes de sua encarnação e as contempla em seu estado puro. Uma de suas mais famosas obras é *A República*, a qual contém teorias sobre a imortalidade da alma, a política e a dialética.

Platão era um entusiasta da matemática e teve contato com os grandes matemáticos da época; colocou na entrada da Academia a seguinte frase: “Que não entre quem não saiba geometria”. Para ele, a matemática era a chave de compreensão do universo, o modelo de todo o processo de entendimento. A missão da filosofia era descobrir a verdade além da opinião, das aparências e ilusões do mundo temporal, a matemática era o conhecimento de verdades eternas e necessárias independentes da experiência dos sentidos. Ele afirmava que o filósofo deve saber matemática porque “ela tem um efeito muito grande na elevação da mente compelindo-a a raciocinar sobre entidades abstratas”. Platão faleceu no ano de 347 a.C., por causas naturais.

A seguir, apresentamos uma definição para poliedros regulares, os quais são erroneamente chamados de poliedros de Platão. Apesar de esses sólidos receberem o nome de Platão, é provável que alguns deles já fossem conhecidos pelos pitagóricos muitos anos atrás, como relatado em [7].

Definição 2.9. (Poliedro regular). *Chamamos de poliedro regular ao poliedro convexo que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares e congruentes entre si;*
2. *O número de arestas que concorrem em cada vértice do poliedro é sempre o mesmo.*

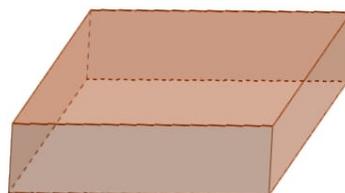
É importante que fique clara a diferença entre poliedros regulares e poliedros de Platão, pois é frequente o erro de algumas pessoas em considerar essas duas expressões como sendo equivalentes. Esses últimos são bem mais gerais, pois não se necessita que suas faces sejam polígonos regulares. Vejamos a próxima definição.

Definição 2.10. (Poliedros de Platão). Chamamos de poliedro de Platão ao poliedro convexo que satisfaz as seguintes condições:

1. Todas as suas faces possuem o mesmo número de lados;
2. O número de arestas que concorrem em cada vértice do poliedro é sempre o mesmo.

Por exemplo, o poliedro da figura 2.7 é de Platão.

Figura 2.7 - Poliedro de Platão



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Assim, concluímos que todo poliedro regular é também um poliedro de Platão, mas a recíproca não é verdadeira - a figura anterior é um exemplo disso.

A proposição a seguir trata da prova da existência de apenas cinco poliedros regulares. Aqui, estamos considerando apenas os poliedros convexos, pois há outra classe de poliedros regulares não convexos, os famosos poliedros de Kepler-Poinsot. Além disso, existe ainda outra classe de poliedros semirregulares, os chamados sólidos de Arquimedes, que é constituída de poliedros cujas faces são apenas polígonos regulares, porém de mais de uma natureza (número de lados).

Proposição 2.10. *Existem apenas cinco poliedros regulares.*

Demonstração. Faremos uma prova bastante conhecida. Seja P um poliedro regular com V vértices, A arestas e F faces. No poliedro P , chamaremos de n o número de lados de cada uma de suas faces e de k , o número de arestas que concorrem em cada um de seus vértices. Note que cada aresta é lado comum de duas faces adjacentes. Assim, conseguimos duas importantes relações: $2A = nF$ e $2A = kV$. Ou seja,

$$A = \frac{nF}{2} \quad e \quad V = \frac{2A}{k}.$$

Substituindo os valores de A e V na relação de Euler, obtemos:

$$V - A + F = 2$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{nF}{k} - \frac{nF}{2} + F &= 2 \\ \frac{2nf - knF + 2kF}{2k} &= 2 \\ (2n - kn + 2k)F &= 4k\end{aligned}$$

Daí,

$$F = \frac{4k}{2n - kn + 2k}. \quad (2.1)$$

Como F e k denotam o número de faces e o número de arestas que concorrem em cada vértice, respectivamente, então são números naturais, isto é,

$$2n - kn + 2k > 0 \Leftrightarrow 2n > nk - 2k \Leftrightarrow 2n > (n - 2)k \Leftrightarrow \frac{2n}{n - 2} > k.$$

Além disso, observe que o valor de k deve ser maior ou igual a 3. Logo,

$$\frac{2n}{n - 2} > 3 \Leftrightarrow 2n > 3n - 6 \Leftrightarrow 6 > n.$$

Agora, é natural que n também seja maior ou igual a 3, pois trata-se do número de lados de um polígono. Com isso,

$$2 < n < 6. \quad (2.2)$$

A desigualdade acima nos diz que os possíveis valores para n são 3, 4 ou 5, ou seja, os polígonos regulares possuem faces triangulares, quadrangulares ou pentagonais.

Agora, basta analisarmos os possíveis valores de k e F que satisfazem a desigualdade (2.2). Prossigamos substituindo os possíveis valores de n na igualdade (2.1).

$$\text{Para } n = 3, \text{ temos: } F = \frac{4k}{6 - k} \Rightarrow 6 - k > 0 \Rightarrow 6 > k \Rightarrow 3 \leq k < 6.$$

$$\text{Para } k = 3, \text{ temos: } F = \frac{12}{3} = 4.$$

$$\text{Para } k = 4, \text{ temos: } F = \frac{16}{2} = 8.$$

$$\text{Para } k = 5, \text{ temos: } F = \frac{20}{1} = 20.$$

Para $n = 4$, temos: $F = \frac{4k}{8 - 2k} \Rightarrow 8 - 2k > 0 \Rightarrow 8 > 2k \Rightarrow 4 > k \Rightarrow 3 \leq k < 4$.

Para $k = 3$, temos: $F = \frac{12}{2} = 6$.

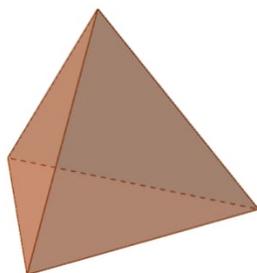
Para $n = 5$, temos: $F = \frac{4k}{10 - 3k} \Rightarrow 10 - 3k > 0 \Rightarrow \frac{10}{3} > k \Rightarrow 3 \leq k < \frac{10}{3}$.

Para $k = 3$, temos: $F = \frac{12}{1} = 12$.

Portanto, os possíveis valores para F são 4, 6, 8, 12 ou 20, concluindo a prova de que realmente só existem cinco poliedros regulares.

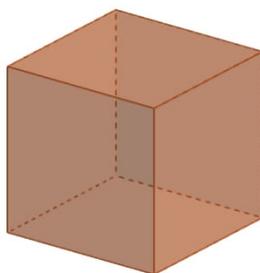
No que segue, observamos os cinco poliedros regulares com seus respectivos nomes.

Figura 2.8 - Tetraedro regular: constituído de 4 faces triangulares



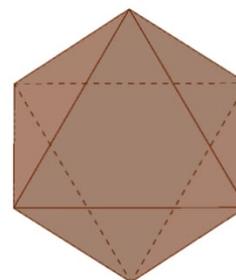
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.9 - Hexaedro regular: constituído de 6 faces quadrangulares



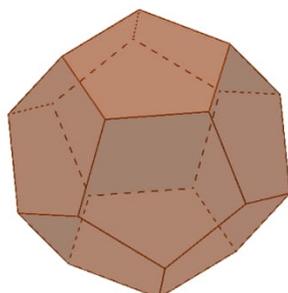
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.10 - Octaedro regular: constituído de 8 faces triangulares



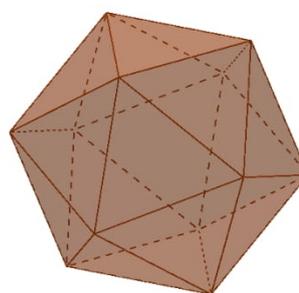
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.11 - Dodecaedro regular: constituído de 12 faces pentagonais.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

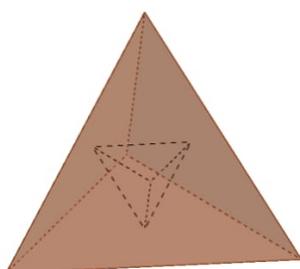
Figura 2.12 - Icosaedro regular: constituído de 20 faces triangulares.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

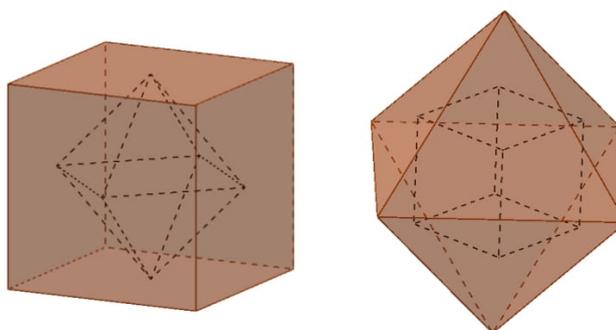
O hexaedro regular geralmente é chamado de cubo. Também o denominaremos assim daqui para frente. A seguir, observamos a dualidade que há entre os poliedros regulares. O tetraedro regular é dito hermafrodita, pois tem ele próprio como dual.

Figura 2.13 - Dois tetraedros duais entre si



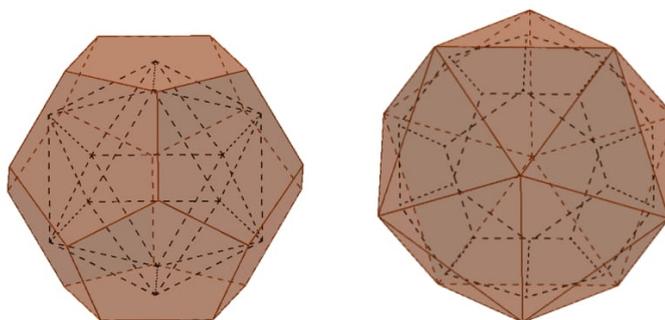
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.14 - Hexaedro e octaedro duais entre si



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.15 - Dodecaedro e icosaedro duais entre si



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Através das figuras acima, percebemos claramente que o número de faces (consequentemente, o número de centros das faces) de um poliedro coincide com o número de vértices do seu dual. Portanto, o teorema de Euler nos garante que o número de arestas de um poliedro sempre coincide com o número de arestas do seu dual.

2.2 Poliedros de Kepler-Poinsot

O alemão Johannes Kepler nasceu em uma pequena cidade perto de Stuttgart, em 27 de dezembro de 1571. Com apenas quatro anos de idade, perdeu parcialmente a visão por causa de uma infecção de varíola. Ele queria se tornar luterano, mas o seu grande

sonho de estudar astronomia falou mais alto. Estudou matemática na Universidade de Tübingen, que tinha em sua grade curricular disciplinas como aritmética, astronomia, geometria e música. Na disciplina de astronomia, estudou o sistema geocêntrico, que estabelece a terra como o centro do universo e os planetas ficam girando em órbitas circulares ao seu redor. Esse sistema havia sido proposto por Ptolomeu, no século II.

Figura 2.16 - Kepler



Fonte: Wikipédia.

Kepler pode se aprofundar mais nos estudos astronômicos quando passou a aprender grego e latim, em que teve conhecimento sobre o sistema heliocêntrico proposto por Nicolau Copérnico, em 1543. Nesse sistema, o sol é o centro e os planetas descrevem trajetórias circulares ao seu redor. No ano de 1594, passou a trabalhar na universidade de Grätz, na Áustria. Cinco anos mais tarde, teve início o seu trabalho como assistente do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, em Praga. Nessa época, Kepler aprendeu muito com as observações realizadas por Brahe sobre o movimento dos planetas. Em 1601, Brahe deu lugar a Kepler como matemático imperial do sagrado imperador romano Rudolph II, e o disponibilizou todos os seus estudos, o que permitiu que ele formulasse as três leis do movimento planetário, entre 1609 e 1619.

Entre as várias contribuições de Kepler para a matemática, estão a descoberta de dois novos poliedros regulares e uma prova sobre os logaritmos. Ele propunha que o tamanho de cada órbita planetária poderia ser estabelecido por um sólido geométrico circunscrito à órbita imediatamente anterior, o que possibilitava a previsão dos tamanhos relativos das órbitas. Ele faleceu aos 58 anos durante uma viagem a Regensburg.

Agora, apresentamos um pouco da vida e contribuições de Poincaré. O francês Louis Poincaré nasceu em Paris, em 1859, e é um dos 72 cientistas que têm o privilégio de ter seu nome escrito no primeiro andar da Torre Eiffel. No ano de 1880, ele ingressou na École Polytechnique, mas em 1881, já a abandonou para iniciar os estudos na École

des Ponts et Chaussée com o objetivo de se tornar engenheiro. No decorrer do curso, percebeu que não tinha tanta vocação para as disciplinas mais práticas, ao contrário do que acontecia com as de matemática abstrata, o que o fez deixar de lado a ideia de se tornar engenheiro; investindo na profissão de professor de matemática.

Figura 2.17 - Poinot



Fonte: Goodreads.

Em 1804, começou a lecionar matemática no Lycée Bonaparte e em 1809, tornou-se professor assistente de análise e mecânica na École Polytechnique. Nesse período, publicou vários trabalhos relacionados à geometria e à estatística, entre os quais, destacam-se a composição de áreas, polígonos e poliedros; e a teoria do equilíbrio e movimento em sistemas. Mais tarde, foi indicado para substituir Lagrange na Académie des Science. Além disso, a partir de suas investigações sobre sistemas de forças que atuam sobre corpos rígidos, iniciou os estudos no campo da mecânica geométrica.

Suas contribuições para a matemática têm grande importância para a teoria dos números, especialmente na área das equações diofantinas, com aplicação da álgebra a essa teoria. Uma de suas mais brilhantes descobertas para a matemática consiste no teorema sobre o movimento de um sólido abandonado a si mesmo. No campo da geometria, as pesquisas desenvolvidas por Poinot são sobre polígonos e poliedros regulares - reconhecendo a existência de quatro novos sólidos - seções angulares e cones circulares. Poinot faleceu em 5 de dezembro de 1859, em Paris.

Definição 2.11. (Sólidos de Kepler-Poinot). *Chamamos de sólidos de Kepler-Poinot aos poliedros não convexos que satisfazem as seguintes condições:*

1. *Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares e congruentes entre si;*
2. *O número de faces que se encontram em cada vértice do poliedro é sempre o mesmo.*

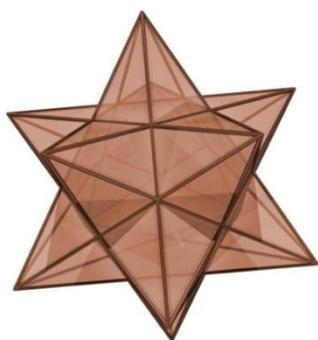
Os sólidos de Kepler-Poinsot são em quantidade de apenas quatro, dentre os quais dois foram descobertos por Kepler e os outros dois por Poinsot. A preposição que segue estabelece essa existência.

Proposição 2.12. *Existem apenas quatro sólidos de Kepler-Poinsot.*

A referência [12] faz uma discussão sobre a construção desses poliedros.

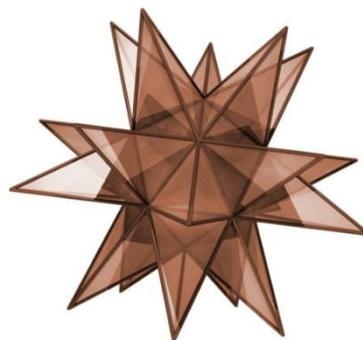
As figuras que seguem são referentes aos quatro sólidos de Kepler-Poinsot com seus respectivos nomes. Esses sólidos também são conhecidos como poliedros estrelados por serem obtidos a partir de uma transformação denominada estrelamento, a qual consiste em estender os planos definidos pelas faces do poliedro até se intersectem, fomentando um novo sólido.

Figura 2.18 - Pequeno dodecaedro estrelado



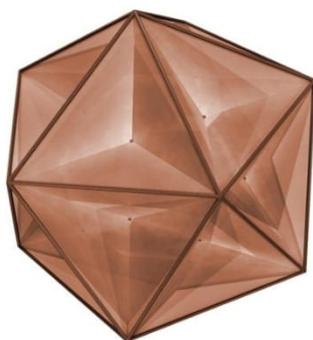
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.19 - Grande dodecaedro estrelado



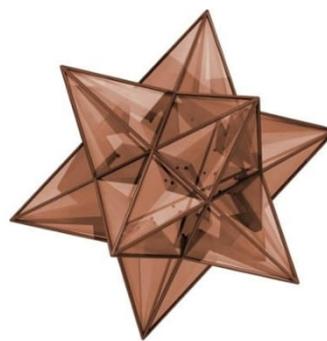
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.20 - Grande dodecaedro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.21 - Icosaedro estrelado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Observe que o pequeno dodecaedro estrelado constitui-se de 12 pentagramas¹. Os sólidos de Kepler-Poinsot são tais que o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro formam um par de poliedros duais. Evidentemente, o outro par se dá entre o grande dodecaedro estrelado e o icosaedro estrelado (ou grande icosaedro).

2.3 Poliedros de Arquimedes

Figura 2.22 - Arquimedes



Fonte: Mil enigmas.

O siciliano Arquimedes nasceu na Siracusa, no ano de 287 a.C., e era filho de um astrônomo. É considerado um dos maiores matemáticos que viveram antes do Renascimento, sendo muitas de suas descobertas utilizadas até hoje no campo das ciências. Frequentou a universidade de Alexandria no período em que ela era o centro do conhecimento. Suas contribuições tiveram destaque nas áreas da matemática, astronomia, física e engenharia. Entre suas descobertas matemáticas, as geometrias dos círculos, cones, cilindros, planos, esferas e parábolas foram de extrema importância.

Mais do que estudos científicos, Arquimedes também foi responsável pela criação de armas bélicas. Alguns historiadores dizem que na época em que o exército romano estava em guerra com a Siracusa, ele inventou várias armas para que a sua cidade pudesse se defender dos ataques sofridos. Dentre essas invenções, estão as catapultas e os espelhos que refletiam os raios solares provocando incêndios nas bases inimigas. Siracusa resistiu às investidas romanas por quase três anos com a ajuda de Arquimedes, porém os romanos tinham um exército mais preparado e conseguiram invadir Siracusa em 216, o que culminou na sua morte, logo após gritar com um soldado romano que

¹ Pentagramas são estrelas de cinco pontas compostas por cinco retas. Os pentagramas são obtidos pela união dos pontos de um pentágono regular com cinco triângulos isósceles congruos.

lhe interrompera quando realizava alguns cálculos. O mais curioso é que a ordem dada foi para que o matemático fosse poupado.

Arquimedes tinha uma admiração especial pela geometria. Desenvolveu diversos trabalhos relativos a esferas e cilindros, em que eram apresentadas fórmulas para cálculo de área da superfície e volume. Ele mostrou que a esfera é o sólido mais eficiente que existia e foi responsável por desenvolver o método da exaustão, que consiste em encontrar um valor aproximado para a solução de um problema a partir de limites especificados. Aplicando esse princípio aos polígonos regulares, ele conseguiu calcular uma aproximação para o número π .

Já comentamos um pouco sobre os chamados sólidos de Arquimedes, entretanto, a próxima definição estabelece mais formalmente essa classe de poliedros.

Definição 2.13. (Sólidos de Arquimedes). *Chamamos de sólidos de Arquimedes aos poliedros convexos que satisfazem as seguintes condições:*

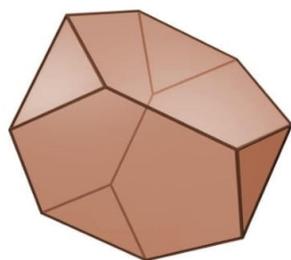
1. *Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares de mais de uma natureza;*
2. *O número de arestas que concorrem em cada vértice do poliedro é sempre o mesmo.*

A proposição 2.14 destaca a existência de apenas treze sólidos arquimedianos, em que todos podem ser obtidos a partir de “transformações” sobre os poliedros regulares.

Proposição 2.14. *Existem apenas treze sólidos arquimedianos.*

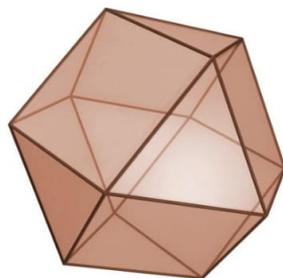
As figuras que seguem são referentes aos treze sólidos arquimedianos com seus respectivos nomes. Dentre os quais, onze são obtidos a partir de truncamento e dois, de snubificação sobre os poliedros regulares. A construção passo a passo de todos esses poliedros pode ser encontrada em [15], inclusive a demonstração da proposição anterior.

Figura 2.23 - Tetraedro truncado



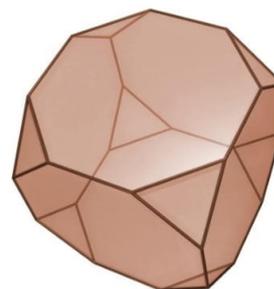
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.24 - Cuboctaedro



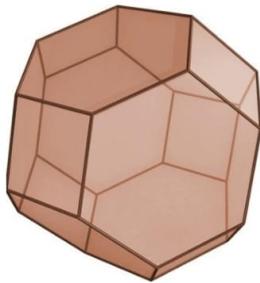
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.25 - Cubo truncado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.26 - Octaedro truncado



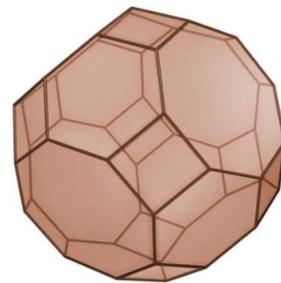
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.27 - Rombicuboctaedro



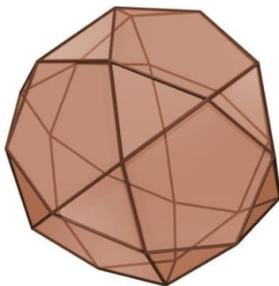
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.28 - Cuboctaedro truncado



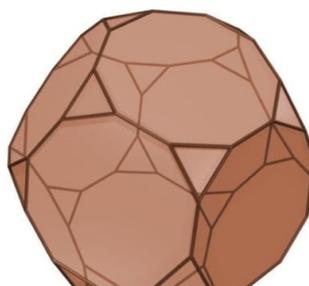
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.29 - Icosidodecaedro



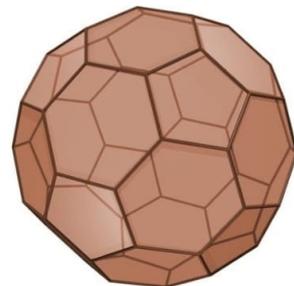
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.30 - Dodecaedro truncado



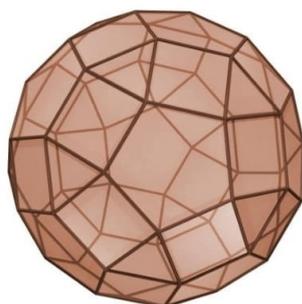
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.31 - Icosaedro truncado



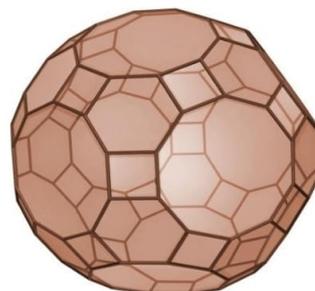
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.32 - Rombicosidodecaedro

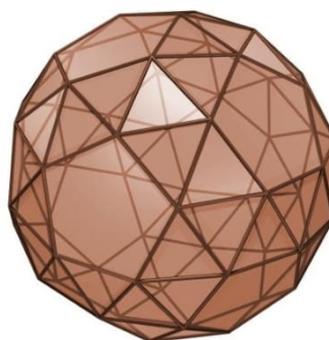


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.33 - Icosidodecaedro truncado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.34 - Cubo snub**Figura 2.35** - Icosidodecaedro snub

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: o cubo snub e o icosidodecaedro snub têm duas representações distintas, porém decidimos apresentar apenas uma delas neste trabalho, uma vez que essas representações são como a imagem de espelho uma da outra, isto é, a diferenciação entre essas duas representações é quase que imperceptível. Ainda assim, achamos interessante deixar claro esse fato.

Mas a final, o que seriam essas “transformações” colocadas acima? Seriam, basicamente, truncamentos (cortes com planos sobre os vértices do poliedro, originando o surgimento de novas faces - polígonos regulares) ou snubificação (separação das faces do poliedro seguida do preenchimento dos espaços formados com polígonos regulares). No processo de snubificação, às vezes, faz-se necessária a rotação de algumas faces para a formação do novo poliedro. Abaixo, descrevemos como é feita a construção de dois sólidos arquimedianos: um obtido por truncamento e outro por snubificação.

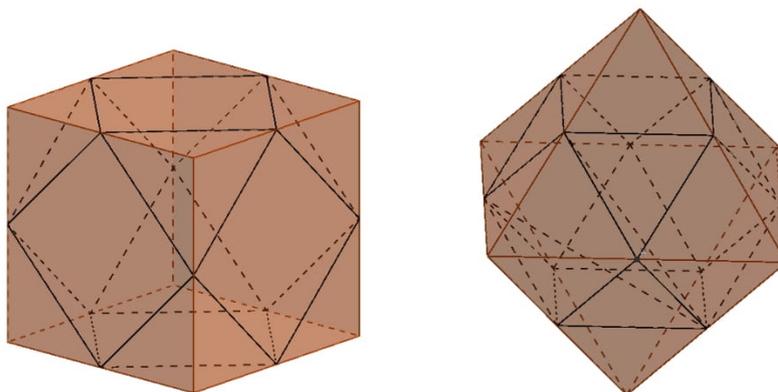
Primeiramente, vamos realizar o truncamento do cubo. Considere um cubo qualquer. Note que em cada um de seus 8 vértices, concorrem 3 arestas e, portanto, há 3 faces ligadas a cada um deles. Sobre cada um de seus vértices, faremos um corte com um plano sob um terço da medida de sua aresta, de modo a obtermos um triângulo equilátero e um octógono regular. Realizando esse procedimento sobre todos os vértices do cubo, teremos o surgimento de um novo poliedro convexo, formado por 8 faces triangulares e 6 faces octogonais, ou seja, o cubo truncado. Ver figura 2.25. Observe que o cubo truncado possui 24 vértices e 36 arestas.

Agora, vamos realizar a snubificação do cubo. Mais uma vez, considere um cubo qualquer. Vamos separar as 6 faces do cubo e girar algumas delas convenientemente até o momento em que for perfeitamente possível preencher os espaços originados por triângulos equiláteros de lado com medida igual à aresta do cubo. Realizando esse procedimento, teremos o surgimento de um novo poliedro convexo, formado por 32 faces triangulares e 6 faces quadrangulares, ou seja, o cubo snub. Ver figura 2.34. Observe

que o cubo snub possui 24 vértices e 60 arestas.

Algo bastante curioso acontece quando ligamos os pontos médios das arestas do hexaedro regular e do octaedro regular, obtendo-se o cuboctaedro em ambos os casos. Veja as figuras adiante.

Figura 2.36 - Cuboctaedro inscrito no hexaedro e octaedro regulares



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Talvez isso ocorra por conta de o número de arestas do hexaedro regular ser igual ao número de arestas do octaedro regular, que é doze unidades; ou quem sabe por que tais poliedros são duais. Mais tarde, veremos que esse sólido arquimediano possui uma inconsistência em sua dualidade.

2.4 Poliedros de Catalan

Figura 2.37 - Catalan



Fonte: Wikipédia.

O belga Eugène Charles Catalan nasceu em Bruges, em 30 de Maio de 1814, e era filho único de um joalheiro francês, Joseph Catalan, cuja paternidade só foi reconhecida em 1821. Catalan foi para Paris estudar matemática na École Polytechnique, em 1825; onde conheceu o matemático Joseph Liouville. Anos mais tarde, em dezembro de 1834, foi expulso da escola juntamente com outros colegas por questões políticas, contudo, em janeiro do ano seguinte já recebeu novamente a permissão para continuar os estudos, formou-se e, em seguida, tornou-se professor de matemática na École des Arts et Métiers em Châlons-en-Champagne. Mais tarde, em 1841, voltou para École Polytechnique e formou-se em matemática com a ajuda de seu amigo Liouville. Depois, foi ensinar geometria descritiva na Charlemagne College.

Catalan era bastante interessado em política e fortemente de esquerda, o que o levou inclusive a participar da revolução de 1848. Ele chegou até a frequentar a Câmara dos Deputados da França. Em 1849, a polícia francesa recebeu uma denúncia de que Catalan estava portando algum tipo de material didático ilícito, mas para a surpresa dos policiais, nada foi encontrado em sua residência.

Suas contribuições para a matemática se destacaram nas áreas das frações contínuas, geometria descritiva, teoria dos números e combinatória. Em 1844, ele publicou a famosa conjectura de Catalan, que só veio a ser provada em 2002, pelo matemático romeno Preda Mihailescu. Também uma classe de números, chamados números de catalan, para resolver problemas de combinatória. Quando sua esposa Eugénie adoeceu, Catalan entrou em colapso e foi levado ao hospital com crises de pneumonia. Catalan faleceu em Liège, em 14 de fevereiro de 1894, três dias após a morte da sua esposa, que não resistiu às complicações da doença.

Outra classe de poliedros bastante importante é a dos sólidos de Catalan, a qual será definida a seguir. Veremos que diferentemente dos poliedros de Platão e dos sólidos de Arquimedes, os sólidos de Catalan são poliedros cujas faces não são polígonos regulares e cujo número de arestas que concorrem em cada vértice não é sempre o mesmo. Ainda assim, os ângulos diédricos são iguais em todo o poliedro, ou seja, os ângulos determinados por duas faces adjacentes quaisquer são congruentes. E o mais curioso é que todas as faces dos sólidos de Catalan são congruentes entre si.

Definição 2.15. (Sólidos de Catalan). *Chamamos de sólidos de Catalan aos poliedros convexos que satisfazem as seguintes condições:*

1. *As suas faces não são formadas por polígonos regulares, mas são todas congruentes entre si;*
2. *Os ângulos determinados por duas faces adjacentes são sempre congruentes.*

A proposição adiante enfatiza a existência de apenas treze sólidos catalanienses.

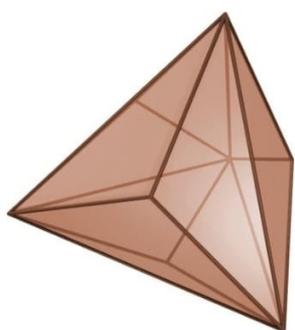
Essa quantidade de poliedros não é uma mera coincidência, é devida à dualidade existente entre os sólidos de Arquimedes e os sólidos de Catalan.

Proposição 2.16. *Existem apenas treze sólidos catalanienses.*

Essa quantidade se deve à dualidade que há entre os sólidos catalanienses e os sólidos arquimedianos, que também são em mesma quantidade.

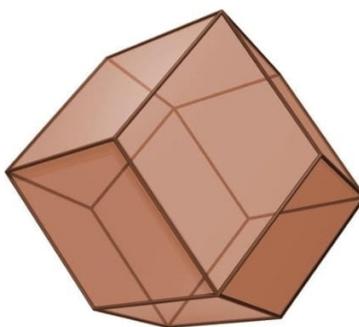
As figuras que seguem são referentes aos treze sólidos catalanienses com seus respectivos nomes. Todos eles podem ser obtidos analisando-se o dual de cada um dos sólidos arquimedianos.

Figura 2.38 - Tetraedro triakis



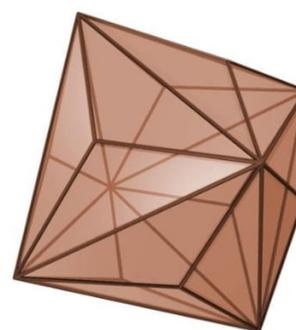
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.39 - Dodecaedro rômbo



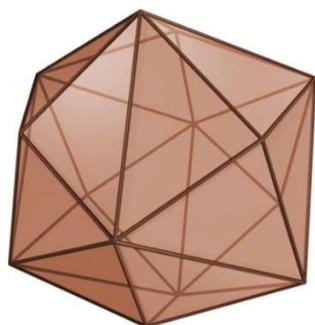
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.40 - Octaedro triakis



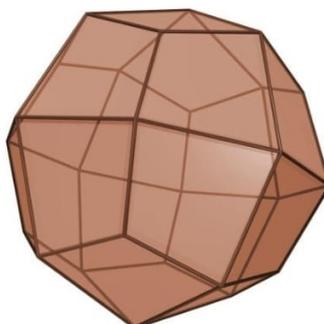
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.41 - Hexaedro triakis



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.42 - Icositetraedro deltoidal



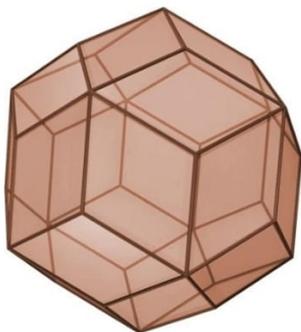
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.43 - Dodecaedro disdiakis



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.44 - Tricontaedro rômboico



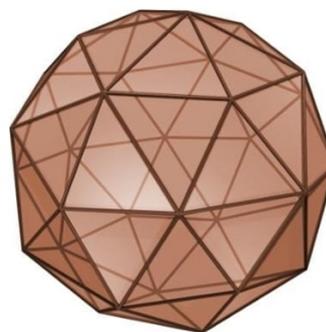
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.45 - Icosaedro triakis



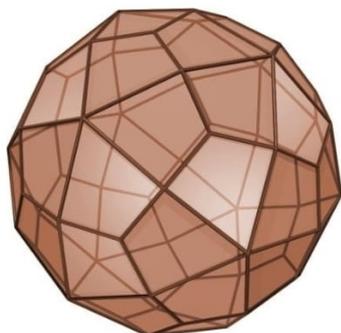
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.46 - Dodecaedro pentakis



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.47 - Hexecontaedro deltoidal



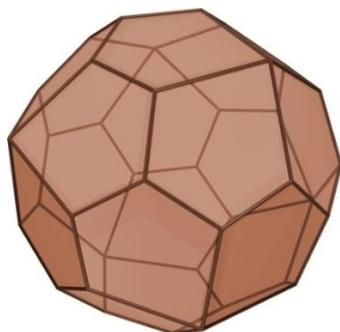
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.48 - Tricontaedro disdiakis



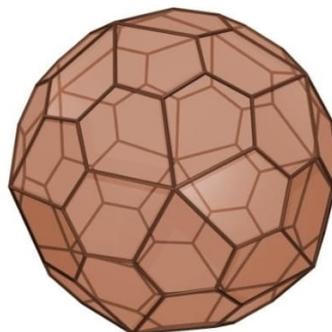
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.49 - Icositetraedro pentagonal



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.50 - Hexecontaedro pentagonal



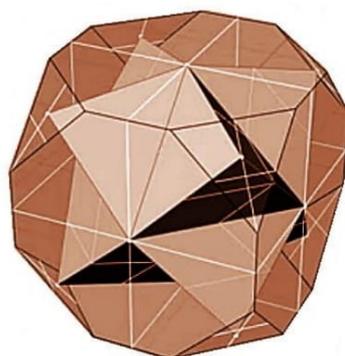
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Em seguida, apresentamos - por meio de um exemplo particular - como se dá a dualidade entre dois sólidos, sendo um arquimediano e outro catalaniense.

Vamos constatar que o poliedro dual do cubo truncado é o octaedro triakis. Antes de qualquer coisa, perceba que o octaedro triakis (figura 2.40) possui 24 faces (triângulos isósceles), 36 arestas e 14 vértices. Por outro lado, já vimos que o cubo truncado possui 14 faces, 24 vértices e 36 arestas. Assim, observamos que o número de faces e o número vértices do octaedro triakis coincidem, nessa ordem, com o número de vértices e o número de faces do cubo truncado.

A figura que segue nos mostra que o octaedro triakis realmente pode ser inscrito no cubo truncado.

Figura 2.51 - Octaedro triakis inscrito no cubo truncado

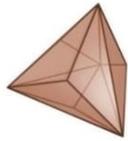
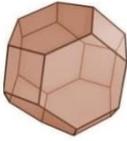


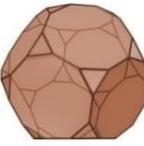
Fonte: Print screen no YouTube (2019, com adaptações).

Também não é difícil, teoricamente, imaginarmos a inscrição do cubo truncado no octaedro triakis. Basta considerarmos uma redução (por semelhança) do cubo truncado de modo que os seus vértices coincidam com os centros das faces do octaedro triakis. Entretanto, na prática, veremos que isso nem sempre é possível. Portanto, fica mostrada a construção da dualidade existente entre os poliedros em questão. Analogamente, podemos mostrar que todos os treze poliedros arquimedianos são duais com os respectivos poliedros catalanienses.

A tabela seguinte ilustra a relação de dualidade entre os treze poliedros de Arquimedes e os treze poliedros de Catalan. Salientamos que todas essas dualidades podem ser mais bem visualizadas utilizando-se o aplicativo oferecido em [19].

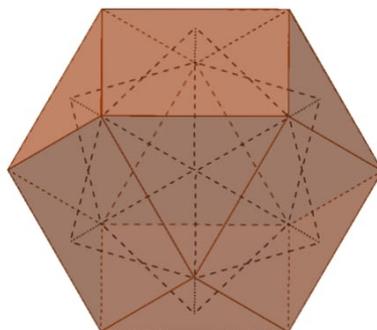
Tabela 2.52 - Dualidade entre os sólidos arquimedianos e os sólidos catalanienses

SÓLIDOS DE ARQUIMEDES			SÓLIDOS DE CATALAN		
Nome	Nº de faces	Figura	Nome	Nº de faces	Figura
Tetraedro truncado	8		Tetraedro triakis	12	
Cuboctaedro	14		Dodecaedro rômico	12	
Cubo truncado	14		Octaedro triakis	24	
Octaedro truncado	14		Hexaedro tetrakis	24	
Rombicuboctaedro	26		Icositetraedro deltoidal	24	
Cuboctaedro truncado	26		Dodecaedro disdiakis	48	
Icosidodecaedro	32		Triacontaedro rômico	30	

Dodecaedro truncado	32		Icosaedro triakis	60	
Icosaedro truncado	32		Dodecaedro pentakis	60	
Rombicosidodecaedro	62		Hexecontaedro deltoidal	60	
Icosidodecaedro truncado	62		Triacontaedro disdiakis	120	
Cubo snub	38		Icositetraedro pentagonal	24	
Icosidodecaedro snub	92		Hexecontaedro pentagonal	60	

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

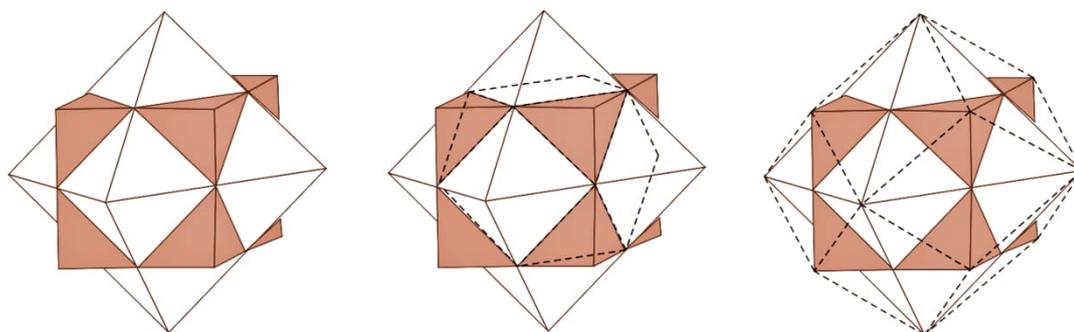
Um fato bastante curioso e que é pouco comentado nos trabalhos que serviram de base para a nossa pesquisa, com exceção de [19], é o seguinte: “De um modo geral, nem sempre quando unimos os centros das faces de um poliedro conseguimos construir uma figura espacial que é um poliedro. Neste caso, dizemos simplesmente que a figura obtida é o dual topológico da primeira”. Ver figura 2.53.

Figura 2.53 - Dual topológico do cuboctaedro

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Note que os centros das faces do cuboctaedro (consequentemente, os vértices da figura obtida) não são coplanares, o que faz com que as faces da figura obtida não sejam planas. Ora, anteriormente vimos que o dual do cuboctaedro é o dodecaedro rômbo, e como é que a figura obtida unindo-se os centros das faces do cuboctaedro pode nem sequer ser um poliedro? Pois é, essa é a inconsistência à qual nos referíamos. Por outro lado, quando unimos os centros das faces do dodecaedro rômbo, obtemos perfeitamente o cuboctaedro. Vamos entender melhor como isso acontece.

Já vimos que o cuboctaedro pode ser obtido unindo-se os pontos médios das arestas tanto do cubo quanto do octaedro regular. Então, nada mais justo do que imaginarmos que o cuboctaedro seja a interseção entre esses dois poliedros regulares de tal maneira que esses pontos médios coincidam, conforme figura 2.54. Nessa perspectiva, conseguimos enxergar claramente essa dualidade.

Figura 2.54 - Processo de inscrição do cuboctaedro no dodecaedro rômbo

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Com isso, concluímos que não está “bem definida” a dualidade entre o cuboctaedro e o dodecaedro rômbo. Para falar a verdade, a inscrição dos sólidos arquimedianos

nos catalanienses sempre pode ser realizada sem problema algum, em contrapartida, a inscrição contrária nem sempre é possível, de modo que os vértices do poliedro catalaniense não coincidem com os centros das faces do arquimediano. Por isso, alguns autores costumam chamar tais poliedros simplesmente de duais topológicos. No apêndice deste trabalho, veremos um exemplo no qual acontece a inscrição mútua entre dois poliedros, sendo um arquimediano e outro catalaniense.

Na natureza, alguns minerais como a granada possuem cristais que têm a forma de um dodecaedro rômico. No reino animal, algumas abelhas constroem mosaicos de células que têm a forma de um prisma hexagonal cobertas com metade de um dodecaedro rômico.

2.5 Transformações

Como já destacamos, existem algumas operações de transformações sobre os poliedros. Vejamos as mais importantes para o desenvolvimento do nosso estudo.

Truncamento: Consiste na remoção de partes de um sólido colocadas simetricamente no mesmo. Especificamente em nosso contexto, daremos ênfase ao truncamento dos vértices, que nada mais é do que cortar parcialmente todos os vértices do poliedro. Geralmente, esse corte é feito sobre um terço da aresta do poliedro. A operação dual do truncamento é a acumulação, a qual será descrita a seguir. Um exemplo de truncamento é o cubo truncado. (Ver figura 2.25).

Acumulação: Consiste em substituir as faces do poliedro por outros sólidos, geralmente pirâmides. Nada mais justo do que dizermos que operação dual da acumulação é o truncamento. Um exemplo de acumulação é o hexaedro triakis. (Ver figura 2.41).

Snubificação: Consiste em afastar todas as faces do poliedro, rotacioná-las sob certo ângulo (normalmente, 45°) e preencher os espaços vazios resultantes com polígonos. Veremos que o caso particular da snubificação é a expansão. Um exemplo de snubificação é o cubo snub. (Ver figura 2.34)

Expansão: Consiste em afastar todas as faces do poliedro e preencher os espaços vazios resultantes com polígonos. Um exemplo de expansão é o rombicuboctaedro. (Ver figura 2.27)

Estrelamento: Consiste em prolongar as arestas do poliedro até que se encontrem. Nesse processo, surgem pirâmides sobre as faces do poliedro. Tal operação de transformação foi descrita pela primeira vez, em 1619, por Kepler. Um exemplo de estrelamento é o pequeno dodecaedro estrelado. (Ver figura 2.18)

Em [19], constatamos que existe um algoritmo que nos permite obter o dual de qualquer poliedro convexo. A ideia utilizada nesse trabalho consiste no conceito de

inversão² com relação a uma esfera. Chama-se a atenção para o fato de que dependendo da esfera considerada, podemos obter mais de um poliedro como resultado da aplicação do algoritmo. Nesse trabalho, é disponibilizado um aplicativo interativo - chamado “Uma Pletora de Poliedros” - que possibilita a visualização e manipulação de vários poliedros, entre os quais estão os estudados aqui. Também é possível realizar algumas das transformações sobre poliedros descritas acima através de cortes por seções, de modo que pode ser determinado o dual de qualquer poliedro disponível em sua plataforma. Tal aplicativo ainda apresenta o número de vértices, faces e arestas dos poliedros trabalhados, bem como a sua característica de Euler-Poincaré³. A realização desse trabalho é fruto do projeto de iniciação científica desenvolvido pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ.

2.6 Planificações

Nesta seção, faremos a planificação de alguns poliedros para uma melhor compreensão do leitor sobre os elementos dos poliedros apresentados, principalmente para facilitar a visualização da disposição e quantidade de suas faces.

A planificação de um poliedro é o resultado de um processo de corte ao longo de sua superfície de modo que seja possível abri-lo e dispô-lo sobre uma superfície plana sem que haja sobreposições ou deformação de suas faces. Em particular, a planificação por arestas é aquela obtida a partir de cortes ao longo das arestas do poliedro. Nesta seção, faremos uso das planificações por arestas.

O tetraedro regular possui apenas 2 planificações distintas. O cubo e o octaedro regulares possuem 11 planificações distintas. Já o icosaedro e o dodecaedro regulares possuem exatamente 43380 planificações distintas. De modo geral, não se sabe se todo poliedro convexo admite planificações por arestas, entretanto, existem poliedros não convexos que não admitem esse tipo de planificação.

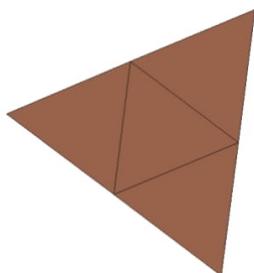
Dependendo do poliedro, o processo de planificação do mesmo pode gerar a sobreposição de algumas faces. Neste caso, dizemos que a planificação não é estrita. Abruptamente, os poliedros que apresentam buracos apresentam sobreposição de faces em sua planificação. Ver figura 2.90.

A seguir, veremos as planificações dos poliedros regulares.

² A inversão de um poliedro com relação a uma esfera é dada escolhendo-se uma esfera de centro O e raio r . O inverso de um vértice V com relação a essa esfera é o ponto V' sobre a semirreta de origem em O que passa por V tal que $d(O, V) \cdot d(O, V') = r^2$.

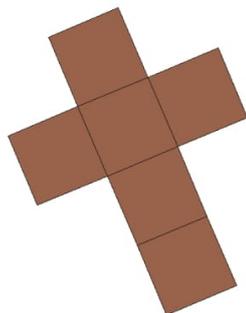
³ A característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico, ou seja, um número natural que descreve a forma de um espaço topológico independentemente da maneira como ela é deformada. A característica de Euler-Poincaré de um poliedro P com V vértices, A arestas e F faces é indicada por $X(P) = V - A + F$.

Figura 2.55 - Planificação do tetraedro regular



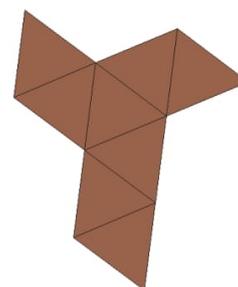
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.56 - Planificação do hexaedro regular



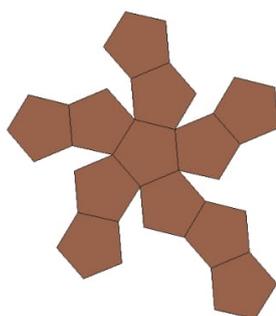
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.57 - Planificação do octaedro regular



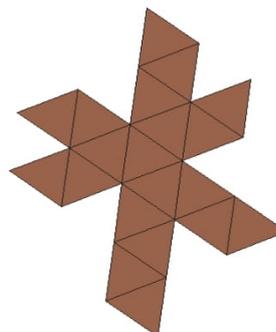
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.58 - Planificação do dodecaedro regular



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

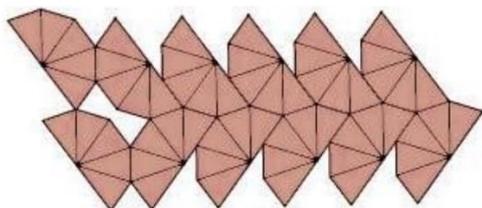
Figura 2.59 - Planificação do icosaedro regular



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

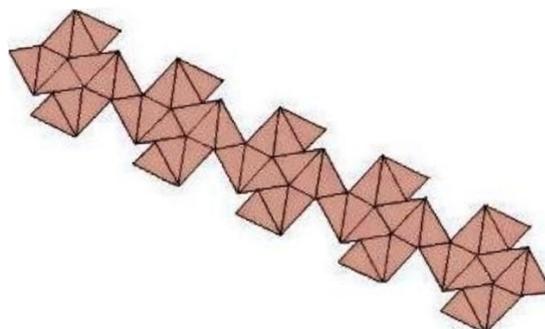
Em seguida, observamos as planificações dos sólidos de Kepler-Poinsot.

Figura 2.60 - Planificação do pequeno dodecaedro estrelado



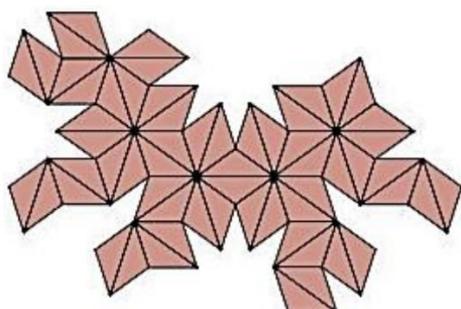
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.61 - Planificação do grande dodecaedro estrelado



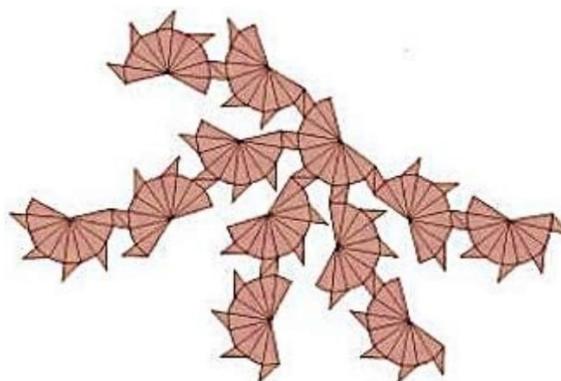
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.62 - Planificação do grande dodecaedro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

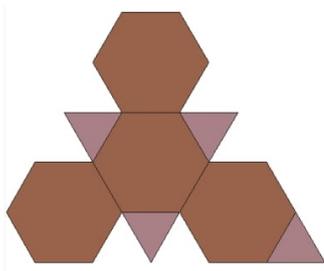
Figura 2.63 - Planificação do icosaedro estrelado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

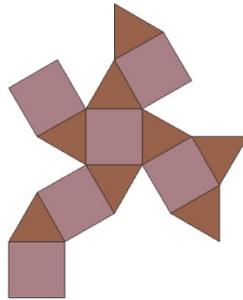
Agora é a vez das planificações dos sólidos de Arquimedes. Note que as faces de mesma natureza (que são congruentes) estão pintadas de uma mesma cor.

Figura 2.64 - Planificação do tetraedro truncado



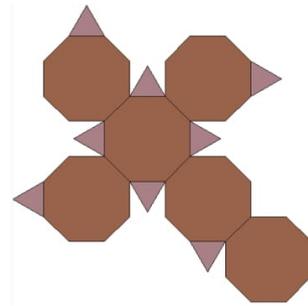
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.65 - Planificação do cuboctaedro



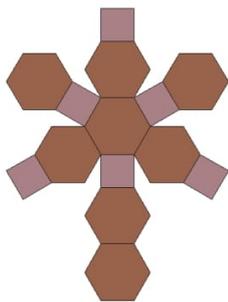
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.66 - Planificação do cubo truncado



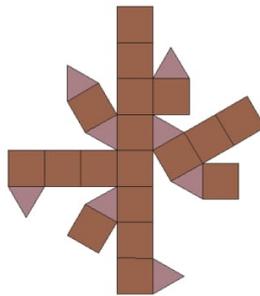
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.67 - Planificação do octaedro truncado



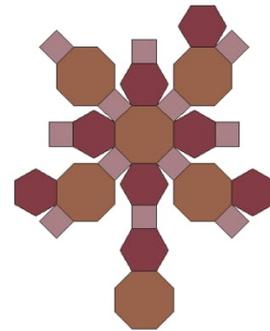
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.68 - Planificação do rombicuboctaedro



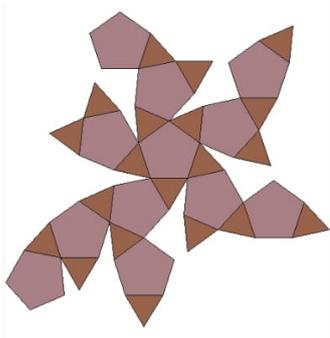
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.69 - Planificação do cuboctaedro truncado



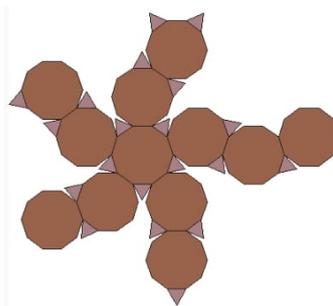
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.70 - Planificação do icosidodecaedro



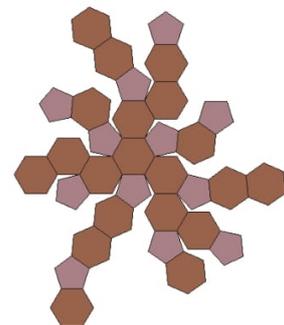
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.71 - Planificação do dodecaedro truncado



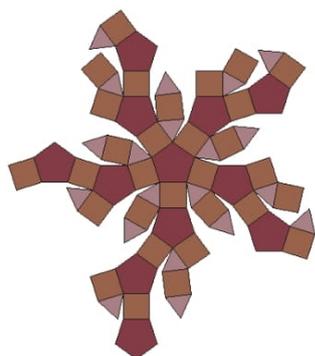
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.72 - Planificação do icosaedro truncado



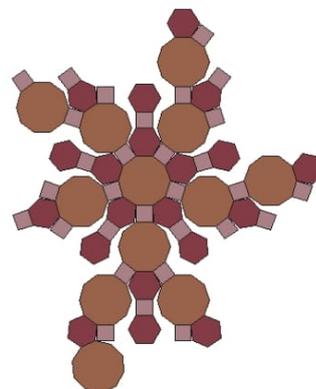
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.73 - Planificação do rombicosidodecaedro



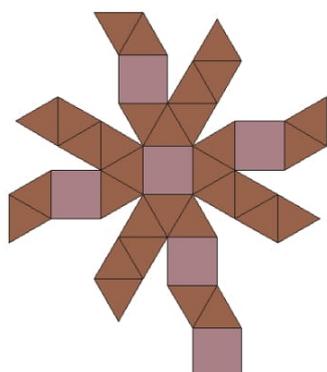
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.74 - Planificação do icosidodecaedro truncado



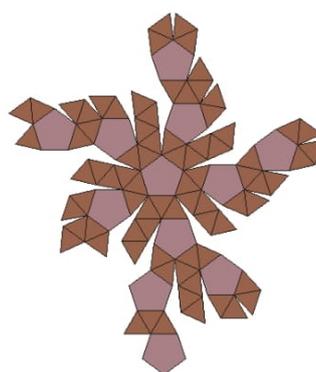
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.75 - Planificação do cubo snub



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

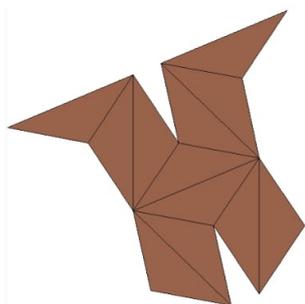
Figura 2.76 - Planificação do icosidodecaedro snub



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

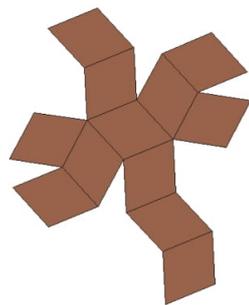
Finalmente, deparamo-nos com as planificações dos sólidos de Catalan.

Figura 2.77 - Planificação do tetraedro triakis



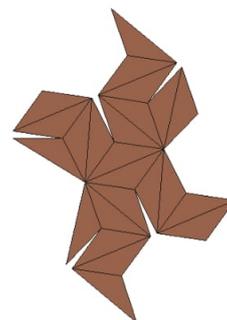
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.78 - Planificação do dodecaedro rômbo



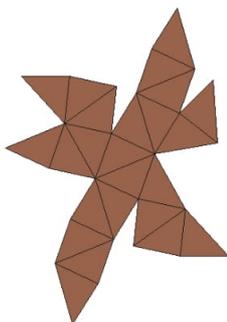
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.79 - Planificação do octaedro triakis



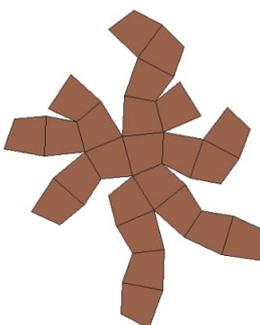
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.80 - Planificação do hexaedro triakis



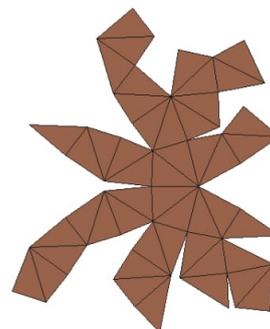
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.81 - Planificação do icositetraedro deltoidal



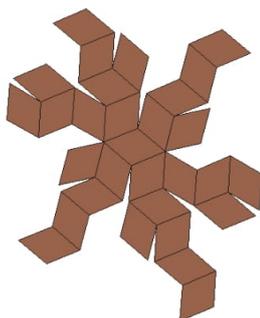
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.82 - Planificação do dodecaedro disdiakis



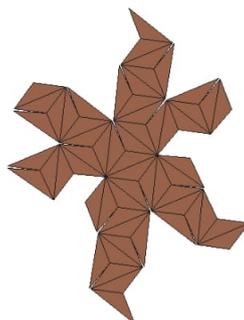
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.83 - Planificação do triacontaedro rômbo



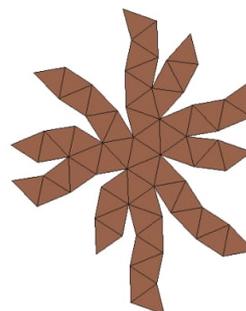
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.84 - Planificação do icosaedro triakis



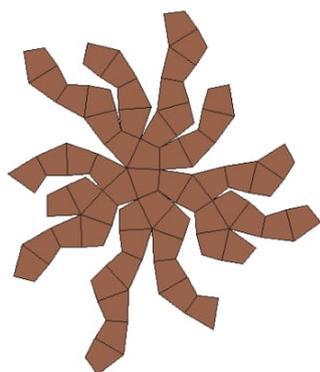
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.85 - Planificação do dodecaedro pentakis



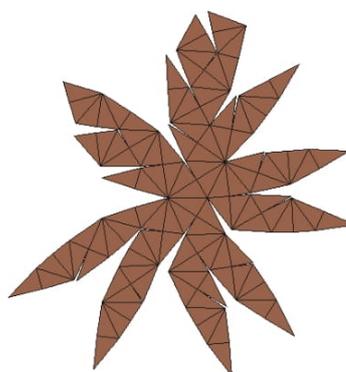
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.86 - Planificação do hexecontaedro deltoidal



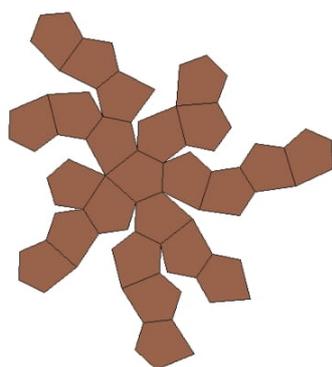
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.87 - Planificação do triacontaedro disdiakis



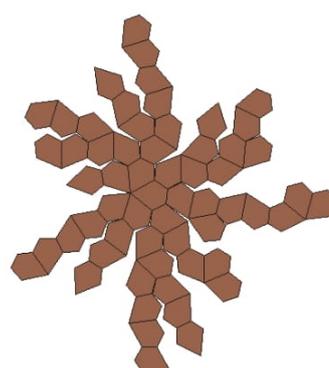
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.88 - Planificação do icositetraedro pentagonal



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 2.89 - Planificação do hexecontaedro pentagonal

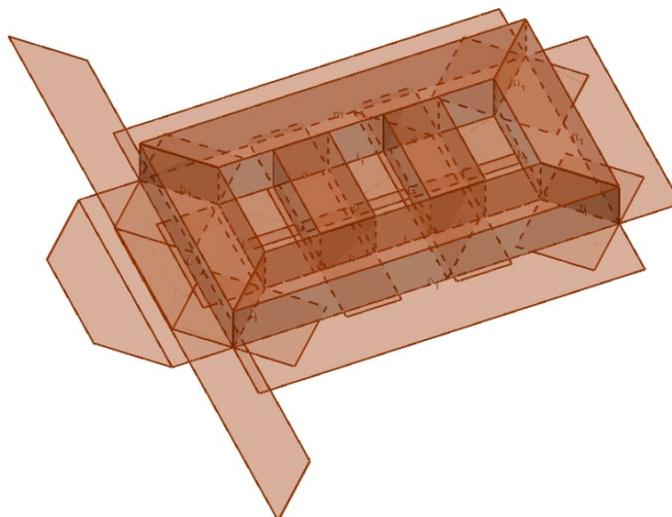


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Não poderíamos nos esquecer de exemplificar um poliedro cuja planificação não é estrita. O poliedro⁴ que segue é chamado de 3-tórico pelo fato de possuir três buracos. A explicação para a ocorrência desse fato é simples: o poliedro 3-tórico não é homeomorfo à esfera, ou seja, não possui propriedades topológicas equivalentes às da esfera. De maneira geral, os únicos poliedros cuja planificação não apresenta sobreposição de faces são aqueles deformáveis⁵ a uma esfera. Neste caso, tudo nos leva a crer que não poderíamos construir o 3-tórico utilizando apenas uma folha de papel.

⁴ Chamamos de poliedros n -tóricos a todos os poliedros com n buracos.

⁵ Dizemos que um poliedro é deformável a uma esfera quando, imaginando-se que ele seja feito de borracha, ao o inflarmos, injetando ar, conseguimos transformá-lo em uma esfera.

Figura 2.90 - Planificação do poliedro 3-tórico

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Para quem se interessar e desejar conhecer um pouco mais sobre o homeomorfismo de figuras, indicamos a referência [4]. Nesse trabalho, é feita uma discussão sobre a característica de Euler-Poincaré, a qual é uma generalização do Teorema de Euler para poliedros.

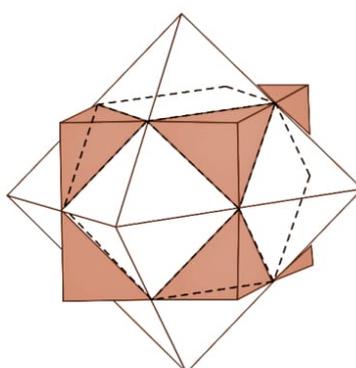
3 Aplicações

Este capítulo é dedicado às aplicações da dualidade de poliedros. Consiste em alguns problemas que podem estimular o pensamento do aluno sobre particularidades referentes aos poliedros duais, favorecendo no desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, instigando-os a explorar os elementos e as propriedades das figuras geométricas estudadas. Enfatizamos que tais problemas podem ser abordados nas aulas de geometria espacial, sobretudo pelo professor do ensino básico. Tentamos realizar as resoluções da maneira mais clara possível, visando ao entendimento do leitor.

1) *Considere um cubo e um octaedro regular com arestas de medida x . O cuboctaedro obtido a partir do cubo tem aresta de medida igual ao obtido a partir do octaedro regular? Calcule a área da superfície e o volume do cuboctaedro. Faça o mesmo para o seu dual.*

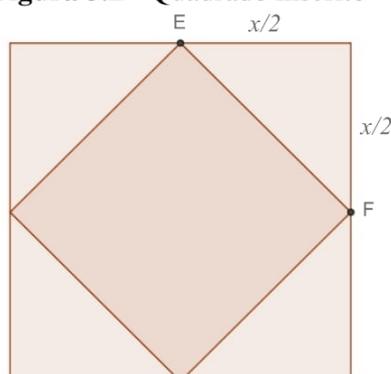
Solução: Antes de iniciarmos a resolução do problema proposto, vamos destacar uma importante particularidade dos sólidos arquimedianos que pode ter passada despercebida: todas as suas arestas são congruentes entre si, em decorrência da regularidade dos polígonos de suas faces. Primeiramente, vamos considerar o caso em que o cuboctaedro é obtido a partir do cubo. Recordemos a representação desse sólido visualizando a próxima figura.

Figura 3.1 - Cuboctaedro tracejado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

As faces quadrangulares do cuboctaedro têm seus vértices como sendo os pontos médios das faces do cubo. Dessa forma, obteremos o seguinte:

Figura 3.2 - Quadrado inscrito

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Observe que o comprimento do segmento de reta \overline{EF} é exatamente a medida da aresta do cuboctaedro. Aplicando o teorema de Pitágoras e percebendo que x é não negativo, uma vez que é a medida da aresta do cubo, teremos

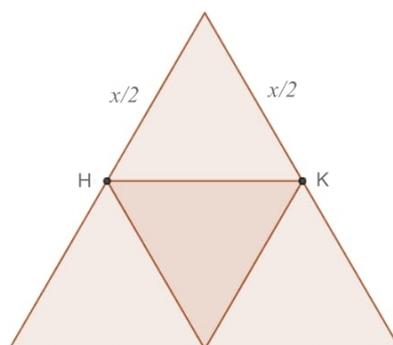
$$\overline{EF}^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

o que nos diz que

$$\overline{EF} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Racionalizando esse valor, encontramos $\overline{EF} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Logo, a medida da aresta do cuboctaedro obtido a partir de um cubo de aresta x é igual a $\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Prosseguimos considerando o caso em que o cuboctaedro é obtido a partir do octaedro regular. Neste caso, pela figura 3.1, vemos que as faces triangulares do cuboctaedro têm seus vértices como sendo os pontos médios das faces do octaedro. Assim,

Figura 3.3 - Triângulo inscrito

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Sabemos que esse triângulo menor inscrito é chamado de triângulo medial. Mais do que isso, como o triângulo maior é equilátero (por ser face de um octaedro regular), então esse tal triângulo medial é também equilátero, utilizando-se da congruência de triângulos. Logo, o comprimento do segmento de reta HK é igual a $\frac{x}{2}$. Daí, a medida de cada uma das arestas do cuboctaedro será $\frac{x}{2}$, o que difere do valor encontrado anteriormente. Portanto, concluímos que a medida da aresta do cuboctaedro quando obtido a partir do cubo não é a mesma de quando obtido a partir do octaedro regular. Além disso, para que haja aquele “encaixe perfeito” entre os três poliedros constatado na figura 3.1, precisamos que a aresta do octaedro regular seja ligeiramente maior do que a do cubo. Mas, sobre que razão? Vejamos!

Vamos assumir que a aresta do cuboctaedro seja igual a $\frac{x\sqrt{2}}{2}$, como verificado no primeiro caso considerado. Nesse caso, a medida da aresta do octaedro regular deve ser o dobro dessa medida, ou seja, $x\sqrt{2}$. Sendo assim, a razão procurada é $\sqrt{2}$. Coincidência ou não, essa medida é exatamente a medida da diagonal da face do cubo. No proceder da resolução, consideraremos que a aresta do cuboctaedro será $\frac{x\sqrt{2}}{2}$, isto é, que o cuboctaedro está sendo determinado pelo cubo.

Agora, daremos início ao cálculo da área da superfície do cuboctaedro. Como já sabemos, esse poliedro possui 8 faces triangulares e outras 6 quadrangulares. Da geometria plana, é bem conhecido que as áreas de um triângulo equilátero e de um quadrado de lados l são dadas, respectivamente, por

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \text{ e } l^2.$$

Neste caso, segue-se que a área total da superfície do cuboctaedro será

$$8 \cdot \frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{2x^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{2x^2}{4} = x^2\sqrt{3} + 3x^2 = (3 + \sqrt{3})x^2.$$

De modo geral, se um cuboctaedro tem aresta com medida igual a l , então a fórmula para o cálculo da área da sua superfície será

$$A_{\text{cuboctaedro}} = (6 + 2\sqrt{3})l^2.$$

Perceba que o volume do cuboctaedro pode ser obtido subtraindo-se do volume do cubo o volume de 8 tetraedros trirretangulares (cada um sobre os vértices do cubo). Da geometria espacial, sabemos que o volume de uma pirâmide qualquer é dada por

$$\frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h,$$

em que A_{base} representa a área da base e h a altura da pirâmide.

A base de cada tetraedro trirretangular é um triângulo retângulo e isósceles cujos

lados congruentes medem $\frac{x}{2}$ (metade da aresta do cubo). Logo, a área desse triângulo será

$$\frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{8},$$

de modo que o volume de cada tetraedro trirretangular valerá

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{8} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^3}{48}.$$

Com isso, concluímos que o volume do cuboctaedro será igual a

$$x^3 - 8 \cdot \frac{x^3}{48} = x^3 - \frac{x^3}{6} = \frac{5x^3}{6}.$$

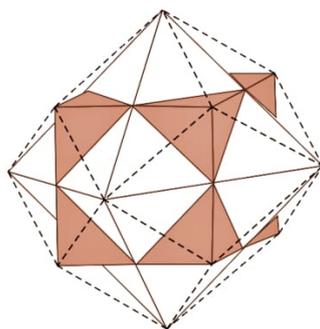
Daí, constatamos uma importante relação: “O volume de um cuboctaedro determinado por um cubo vale $\frac{5}{6}$ do volume desse último”.

De modo geral, se um cuboctaedro tem aresta com medida igual a l , então a fórmula para o cálculo do seu volume será

$$V_{\text{cuboctaedro}} = \frac{5\sqrt{2}l^3}{3}.$$

Finalmente, determinemos a área da superfície e o volume do dodecaedro rômbo, o dual do cuboctaedro. Já que o dodecaedro rômbo é um sólido catalaniense, então possui todas as faces congruentes. Daí, basta encontrarmos a área de uma de suas 12 faces. De acordo com a figura 3.4, cada uma dessas faces é um losango cujas diagonais são x (aresta do cubo) e $x\sqrt{2}$ (aresta do octaedro regular que realiza o denominado “encaixe perfeito”).

Figura 3.4 - Dodecaedro rômbo tracejado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Assim, a área de cada um desses losangos será

$$\frac{x \cdot x\sqrt{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2},$$

de modo que a área da superfície do dodecaedro rômico valerá

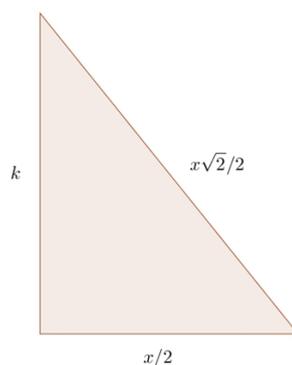
$$12 \cdot \frac{x^2\sqrt{2}}{2} = 6x^2\sqrt{2}.$$

De modo geral, se um dodecaedro rômico tem aresta com medida igual a l , então a fórmula para o cálculo da área da sua superfície será

$$A_{\text{dodecaedro rômico}} = 8\sqrt{2}l^2.$$

Com base na figura acima, temos que o volume do dodecaedro rômico pode ser obtido somando-se o volume do cubo com o de 6 pirâmides regulares retas de base quadrangular (cada qual sobre as faces do cubo). Como já é conhecido o volume do cubo, resta-nos encontrar a medida da altura dessas pirâmides. Considere o triângulo retângulo a seguir.

Figura 3.5 - Triângulo retângulo no interior da pirâmide de base quadrangular



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Sendo k a medida da altura da pirâmide de base quadrangular considerada, temos que

$$\begin{aligned} k^2 &= \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \\ &= \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$k = \frac{x}{2}.$$

Daí, segue-se que o volume de cada uma dessas 6 pirâmides será

$$\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^3}{6},$$

de modo que o volume do dodecaedro rômboico será dado por

$$x^3 + 6 \cdot \frac{x^3}{6} = x^3 + x^3 = 2x^3.$$

De modo geral, se um dodecaedro rômboico tem aresta com medida igual a l , então a fórmula para o cálculo do seu volume será

$$V_{\text{dodecaedro rômboico}} = \frac{16\sqrt{3}l^3}{9}.$$

2) *Determine a soma das medidas dos ângulos das faces de um octaedro truncado. Faça o mesmo para o seu dual.*

Solução: Em primeiro lugar, vamos encontrar uma expressão que nos forneça a soma das medidas dos ângulos das faces de qualquer poliedro convexo, digamos P. Suponhamos que n_1 seja o número de lados do polígono que representa a primeira face do poliedro, n_2 , o número de lados do polígono que representa a segunda face do poliedro, n_3 , o número de lados do polígono que representa a terceira face do poliedro, e assim sucessivamente, até n_f , o número de lados do polígono que representa a f -ésima face do poliedro. Como o poliedro P é convexo, então todas as suas faces são polígonos convexos e sendo a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados dada por $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$, temos que a soma S das medidas dos ângulos internos de todas as faces de P é dada pela expressão:

$$S = (n_1 - 2) \cdot 180^\circ + (n_2 - 2) \cdot 180^\circ + (n_3 - 2) \cdot 180^\circ + \dots + (n_f - 2) \cdot 180^\circ.$$

Assim,

$$S = 180^\circ[(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_f) - (2 + 2 + 2 + \dots + 2)].$$

Como já foi discutido, cada lado de um desses polígonos, aresta do poliedro, é lado de exatamente duas faces de P. Daí, a soma $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_f$ resulta em $2A$, em que A representa o número de arestas de P. Além disso, a soma $2 + 2 + 2 + \dots + 2$ é igual a $2F$, pois o poliedro P tem F faces. Com isso, obtemos o seguinte:

$$S = 180^\circ \cdot (2A - 2F).$$

Dessa maneira,

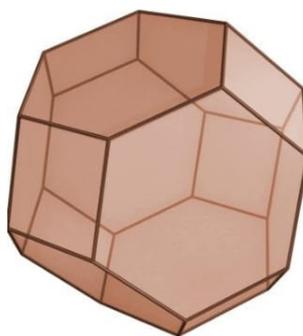
$$S = 360^\circ \cdot (A - F).$$

Do teorema de Euler, temos que $V - A + F = 2$, ou seja, $A - F = V - 2$. Portanto, concluímos que

$$S = 360^\circ(V - 2), \text{ em que } V \text{ é o número de vértices do poliedro.}$$

Retornando ao octaedro truncado, sabemos que tal poliedro possui 6 faces quadrangulares e 8 faces hexagonais. Recordemos a representação desse sólido visualizando a próxima figura.

Figura 3.6 - Recordação do octaedro truncado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

O seu número F de faces é $6 + 8 = 14$ e o seu número A de arestas é dado por

$$A = \frac{4F_4 + 6F_6}{2} = \frac{4 \cdot 6 + 6 \cdot 8}{2} = 36.$$

Fazendo uso do teorema de Euler, obtém-se

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 36 + 14 = 2 \Rightarrow V = 24,$$

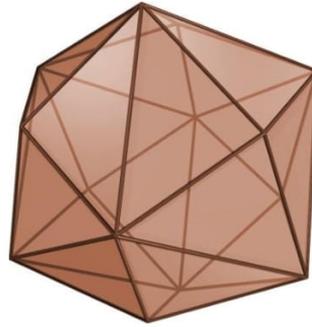
o que nos diz que o octaedro truncado possui 24 vértices.

Portanto, a soma das medidas dos ângulos das faces de um octaedro truncado será

$$360^\circ \cdot (24 - 2) = 360^\circ \cdot 22 = 7920^\circ.$$

Para findarmos, façamos o mesmo para o hexaedro triakis, o dual do octaedro truncado. Ora, visualizando a figura 3,7, observamos que as faces do sólido são triângulos isósceles em quantidade de 24, o que nos diz que a soma das medidas dos ângulos das faces de um hexaedro triakis vale

$$180^\circ \cdot 24 = 4320^\circ.$$

Figura 3.7 - Recordação do hexaedro triakis

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Também, poderíamos ter aplicado a fórmula obtida anteriormente. Com efeito, sendo 14 o número de vértices do hexaedro triakis, então

$$360^\circ \cdot (14 - 2) = 360^\circ \cdot 12 = 4320^\circ \text{ é o valor procurado.}$$

3) Calcule o número de diagonais do rombicuboctaedro. Faça o mesmo para o seu dual.

Solução: Este é um clássico problema de combinatória, que consiste em determinar o número de segmentos de reta determinados por dois vértices de um poliedro, excluindo os casos em que ambos os vértices pertencem a uma mesma face, ou seja, precisamos descartar os casos em que os segmentos considerados são arestas ou diagonais das faces do poliedro.

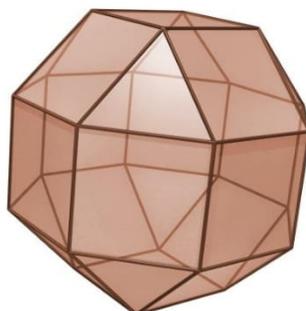
De antemão, vamos estabelecer que um poliedro convexo qualquer tenha V vértices, A arestas e F faces. Como um segmento de reta é determinado por dois pontos distintos, então o número de segmentos de reta determinados pelos vértices no nosso poliedro é $C_v^2 = \frac{v!}{2!(v-2)!}$. Denotando por d_f o número de diagonais das faces, inferimos que o número de diagonais do poliedro em questão pode ser obtido por

$$C_v^2 - A - \sum d_f. \quad (3.1)$$

Voltando ao poliedro proposto no enunciado do problema, o rombicuboctaedro, sabemos que ele apresenta 8 faces triangulares e 18 faces quadrangulares, segundo a figura 3.8.

Nesse caso, o número de faces do rombicuboctaedro é $8 + 18 = 26$ e o seu número de arestas é

$$A = \frac{3F_3 + 4F_4}{2} = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 18}{2} = 48.$$

Figura 3.8 - Recordação do rombicuboctaedro

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Fazendo uso do teorema de Euler, obtém-se

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 48 + 26 = 2 \Rightarrow V = 24,$$

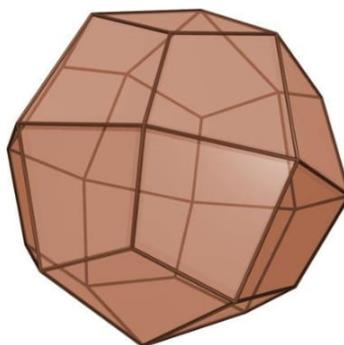
o que nos diz que o rombicuboctaedro possui 24 vértices.

As faces triangulares do rombicuboctaedro não têm diagonais, mas cada uma das faces quadrangulares possuem 2 diagonais, de tal maneira que o número de diagonais das faces do rombicuboctaedro é dado por $2 \cdot 18 = 36$.

Aplicando a fórmula (3.1), estamos aptos a determinar o número de diagonais do rombicuboctaedro. A saber,

$$C_{24}^2 - 48 - 36 = \frac{24!}{2!(24-2)!} - 84 = 276 - 84 = 192 \text{ é o valor procurado.}$$

Por fim, calculemos o número de diagonais do icositetraedro deltoidal, o dual do rombicuboctaedro. Na figura 3.9, vemos que o poliedro catalaniense possui 24 faces quadrangulares.

Figura 3.9 - Recordação do icositetraedro deltoidal

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Assim, o número de arestas do icositetraedro deltoidal será

$$A = \frac{4F_4}{2} = 2 \cdot 24 = 48,$$

acarretando em um número de vértices igual a

$$V - 48 + 24 = 2 \Rightarrow V = 26.$$

Cada uma das faces do nosso poliedro apresenta 2 diagonais, de modo que o número de diagonais das faces do mesmo é $2 \cdot 24 = 48$.

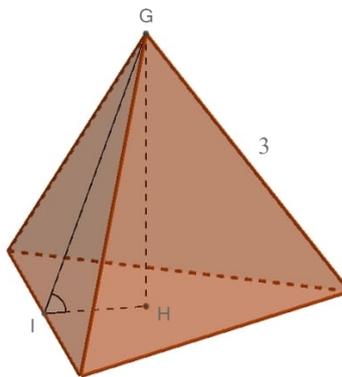
Aplicando a fórmula (3.1), encontramos que o icositetraedro deltoidal possui tantas diagonais quanto

$$C_{26}^2 - 48 - 48 = \frac{26!}{2!(26-2)!} - 96 = 325 - 96 = 229.$$

4) Calcule a medida do ângulo formado por duas faces adjacentes quaisquer do tetraedro triakis.

Solução: Inicialmente, calculemos o ângulo diédrico do tetraedro regular, ou seja, o ângulo determinado por duas faces adjacentes quaisquer. É claro que a medida desse ângulo independe do comprimento da aresta do tetraedro regular. Por conveniência, vamos considerar um tetraedro regular de aresta medindo 3 unidades de comprimento, como na figura abaixo. O motivo pelo qual termos escolhido essa medida para a aresta do tetraedro será revelado mais à frente.

Figura 3.10 - Tetraedro regular de aresta 3



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Traçamos a altura HG do tetraedro, a altura IG da face lateral e o apótema IH da base. Essa segunda altura tem medida igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Da geometria plana, sabemos

que a medida do segmento de reta IH vale $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo equilátero da base do tetraedro. Logo,

$$\overline{IH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

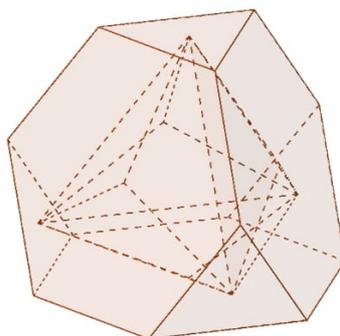
Tomando o cosseno do ângulo $H\hat{I}G$ do triângulo retângulo IHG , obtemos:

$$\cos(H\hat{I}G) = \frac{\overline{IH}}{\overline{IG}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow H\hat{I}G = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,52^\circ$$

como sendo a medida do ângulo diédrico de um tetraedro regular.

Agora, vamos levar em conta o tetraedro truncado obtido a partir do truncamento sobre a terça parte da aresta do tetraedro regular considerado anteriormente. Nesse caso, a medida da aresta do sólido arquimediano será unitária, o que facilitará nossos cálculos. Em seguida, unamos os pontos médios das faces do tetraedro truncado de modo a fomentarmos o tetraedro triakis, conforme figura 3.11.

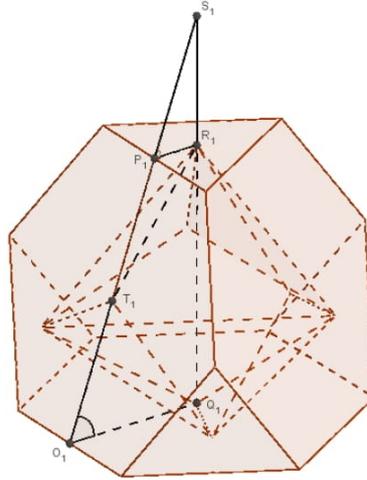
Figura 3.11 - Tetraedro triakis inscrito no tetraedro truncado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Note que o ângulo determinado pelas faces hexagonais do tetraedro truncado é igual àquele promovido a ângulo diédrico do tetraedro regular. Nosso objetivo, aqui, é encontrar a medida do ângulo formado entre as faces adjacentes do tetraedro triakis. Para tanto, precisamos calcular as medidas de suas arestas maior e menor. Para facilitar o entendimento, deixemos à mostra um dos vértices do tetraedro regular, o ponto S_1 . (Ver figura 3.12)

Figura 3.12 - Cálculo da aresta menor do tetraedro triakis



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na figura, destacamos alguns elementos importantes, tais como os centros Q_1 , R_1 e T_1 das faces e os pontos médios O_1 e P_1 das arestas do tetraedro truncado. Com isso, pretendemos determinar a medida da aresta menor T_1R_1 do tetraedro triakis. O quadrilátero $O_1Q_1R_1P_1$ é um trapézio retângulo de bases O_1Q_1 e P_1R_1 , haja vista que as faces opostas do sólido arquimediano são paralelas. Sendo assim, os ângulos $Q_1\hat{O}_1P_1$ e $O_1\hat{P}_1R_1 = T_1\hat{P}_1R_1$ são suplementares. Por resultados de trigonometria, sabemos que $\cos(Q_1\hat{O}_1P_1) = -\cos(O_1\hat{P}_1R_1)$, pois estamos lidando com ângulos suplementares. Como $\cos(Q_1\hat{O}_1P_1) = \frac{1}{3}$ (já que $Q_1\hat{O}_1P_1$ é o ângulo diédrico do tetraedro regular), então $\cos(O_1\hat{P}_1R_1) = \frac{-1}{3}$.

Observe que o apótema T_1P_1 da face hexagonal é a altura de um triângulo equilátero de lado 1, ou seja, sua medida é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por outro lado, o apótema P_1R_1 da face triangular tem comprimento $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Apliquemos a lei dos cossenos ao triângulo $T_1P_1R_1$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \overline{T_1R_1}^2 &= \overline{T_1P_1}^2 + \overline{P_1R_1}^2 - 2 \cdot \overline{T_1P_1} \cdot \overline{P_1R_1} \cdot \cos(T_1\hat{P}_1R_1) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \cos(T_1\hat{P}_1R_1) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{36} - \frac{3}{6} \left(\frac{-1}{3}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

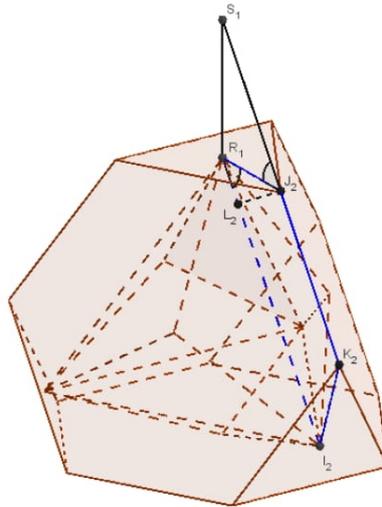
Logo,

$$\overline{T_1 R_1} = 1,$$

o que nos diz que a medida da aresta menor do tetraedro triakis é 1.

Prossigamos à procura da medida da aresta maior. Para tal, foquemos na figura 3.13, a qual recebeu alguns novos elementos, como o trapézio isósceles $R_1 I_2 K_2 J_2$ destacado em azul.

Figura 3.13 - Cálculo da aresta maior do tetraedro triakis



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Pela natureza da construção do tetraedro truncado, o segmento $S_1 J_2$ mede 1. No triângulo retângulo $S_1 R_1 J_2$, tomemos o cosseno do ângulo $R_1 \hat{J}_2 S_1$, vislumbrando que o comprimento do segmento $R_1 J_2$ vale $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ou seja,

$$\cos(R_1 \hat{J}_2 S_1) = \frac{\overline{R_1 J_2}}{\overline{S_1 J_2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Seja L_2 o pé da perpendicular baixada por J_2 relativamente ao lado $R_1 I_2$. Note que os ângulos $R_1 \hat{J}_2 S_1$ e $L_2 \hat{R}_1 J_2$ são alternos internos e, portanto, congruentes. No triângulo retângulo $R_1 L_2 J_2$, tomemos o cosseno do ângulo $L_2 \hat{R}_1 J_2$. Dessa maneira,

$$\cos(L_2 \hat{R}_1 J_2) = \frac{\overline{R_1 L_2}}{\overline{R_1 J_2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{R_1 L_2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Portanto,

$$\overline{R_1L_2} = \frac{1}{3}.$$

Analogamente, mostramos que o pé da perpendicular baixada por K_2 relativamente ao lado R_1I_2 determina outro segmento cuja medida vale $\frac{1}{3}$, de modo que o comprimento do segmento R_1I_2 é dado por

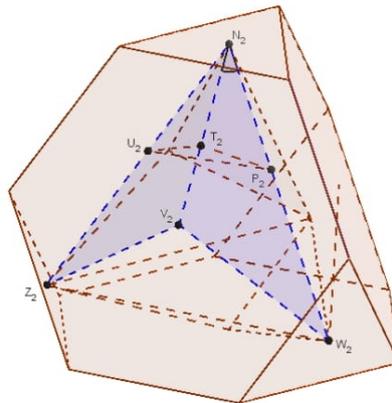
$$\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

em que o número 1 se refere à medida da projeção de J_2K_2 sobre R_1I_2 .

Dessa forma, obtemos que a medida da aresta maior do tetraedro triakis é $\frac{5}{3}$.

Uma vez conhecidas as medidas das arestas do tetraedro triakis, estamos aptos a calcular o ângulo entre duas faces adjacentes do mesmo, digamos as destacadas em azul na figura 3.14. Consideremos um ponto sobre a aresta N_2W_2 , digamos P_2 , de tal maneira que o segmento N_2P_2 meça $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{9}$. (Ver figura 3.14)

Figura 3.14 - Cálculo do ângulo diédrico do tetraedro triakis



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Traçamos os segmentos P_2T_2 e T_2U_2 perpendiculares à aresta menor V_2N_2 . Pela regularidade do triângulo $N_2Z_2W_2$, temos que os segmentos N_2P_2 e N_2U_2 são congruentes. Daí, o triângulo $N_2U_2P_2$ é equilátero de lado $\frac{5}{9}$. Voltemos nossos olhares para o triângulo isósceles $W_2V_2N_2$ e apliquemos a lei dos cossenos a ele, a fim de calcularmos a medida do ângulo $V_2\hat{N}_2W_2$. Ou seja,

$$\overline{V_2W_2}^2 = \overline{V_2N_2}^2 + \overline{N_2W_2}^2 - 2 \cdot \overline{V_2N_2} \cdot \overline{N_2W_2} \cdot \cos(V_2\hat{N}_2W_2)$$

$$1^2 = 1^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{3} \cdot \cos(V_2\hat{N}_2W_2)$$

$$\frac{10}{3} \cdot \cos(V_2\hat{N}_2W_2) = \frac{25}{9}.$$

Logo,

$$\cos(V_2\hat{N}_2W_2) = \frac{5}{6}.$$

Pela relação fundamental da trigonometria, segue-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(V_2\hat{N}_2W_2) &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{6}. \end{aligned}$$

Agora, tomemos o seno do ângulo $T_2\hat{N}_2P_2 = V_2\hat{N}_2W_2$ do triângulo retângulo $N_2T_2P_2$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(T_2\hat{N}_2P_2) &= \frac{\overline{T_2P_2}}{N_2P_2} \\ \frac{\sqrt{11}}{6} &= \frac{\overline{T_2P_2}}{\frac{5}{9}} \\ \overline{T_2P_2} &= \frac{5\sqrt{11}}{54}, \end{aligned}$$

o que nos diz que o tamanho do segmento T_2U_2 também é $\frac{5\sqrt{11}}{54}$.

Para finalizarmos, consideremos o triângulo isósceles $U_2T_2P_2$ e apliquemos a lei dos cossenos a ele, no intuito de encontrarmos o valor do ângulo $U_2\hat{T}_2P_2$. Já justificamos por que $\overline{U_2P_2} = \frac{5}{9}$. Teremos o seguinte:

$$\begin{aligned} \overline{U_2P_2}^2 &= \overline{U_2T_2}^2 + \overline{T_2P_2}^2 - 2 \cdot \overline{U_2T_2} \cdot \overline{T_2P_2} \cdot \cos(U_2\hat{T}_2P_2) \\ \left(\frac{5}{9}\right)^2 &= \left(\frac{5\sqrt{11}}{54}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{11}}{54}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5\sqrt{11}}{54} \cdot \frac{5\sqrt{11}}{54} \cdot \cos(U_2\hat{T}_2P_2) \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{25}{81} &= \frac{275}{2916} + \frac{275}{2916} - \frac{275}{1458} \cdot \cos(U_2\hat{T}_2P_2) \\ \frac{275}{1458} \cdot \cos(U_2\hat{T}_2P_2) &= \frac{550 - 900}{2916}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\cos(U_2\hat{T}_2P_2) = \frac{-350}{2916} \cdot \frac{1458}{275} = \frac{-7}{11}.$$

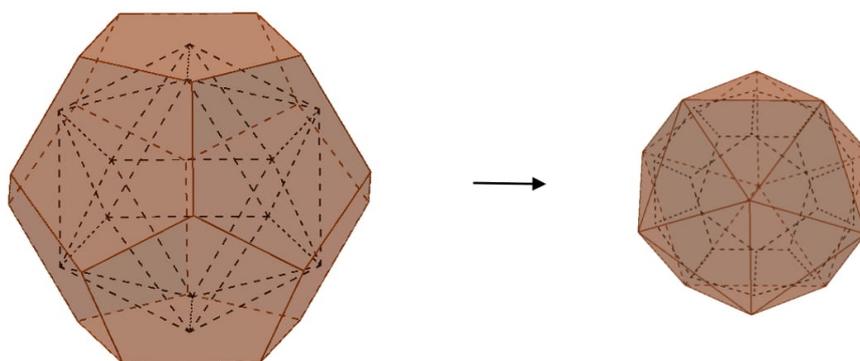
Daí,

$$U_2\hat{T}_2P_2 = \arccos\left(\frac{-7}{11}\right).$$

Portanto, chegamos à seguinte conclusão: a medida do ângulo formado por duas faces adjacentes quaisquer do tetraedro triakis corresponde a $\arccos\left(\frac{-7}{11}\right)$. Em graus, esse valor equivale a uma abertura de $129,52^\circ$, aproximadamente.

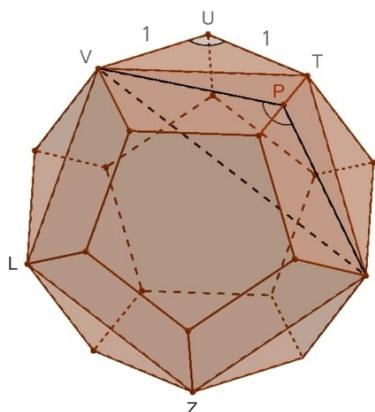
5) Considere um icosaedro regular inscrito em um dodecaedro regular. Qual deve ser a redução sobre o dodecaedro regular para que ele passe a se mostrar inscrito no icosaedro regular?

Solução: A ilustração a seguir nos orienta, geometricamente, sobre o que devemos fazer para resolver o problema.



Como se trata de um problema que envolve o conceito de semelhança de figuras - no caso, de sólidos - certamente encontraremos uma constante de proporcionalidade que realiza essa redução, a qual independe da medida da aresta considerada. Para facilitar nossos cálculos, vamos supor que o dodecaedro regular tenha aresta de medida igual a 1 unidade de comprimento.

Preteritamente, devemos calcular a medida do ângulo diédrico do dodecaedro regular. Para tanto, considere o dodecaedro regular da figura 3.15.

Figura 3.15 - Dodecaedro regular com alguns elementos destacados

Fonte: Elaborada por autor, 2019.

É sabido que a medida de cada ângulo interno de um pentágono regular é 108° . De posse disso, apliquemos a lei dos cossenos no triângulo isósceles UVT. Temos:

$$\overline{VT}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 108^\circ = 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ.$$

Logo,

$$\overline{VT} = \sqrt{2 - 2 \cdot \cos 108^\circ}.$$

No triângulo retângulo VPT, apliquemos o teorema de Pitágoras para descobriremos o comprimento da altura VP da face pentagonal do dodecaedro regular. Ou seja,

$$\overline{VT}^2 = \overline{VP}^2 + \overline{PT}^2$$

$$2 - 2 \cdot \cos 108^\circ = \overline{VP}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$8 - 8 \cdot \cos 108^\circ = 4\overline{VP}^2 + 1.$$

Dessa forma,

$$\overline{VP}^2 = \frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{4}.$$

Daí,

$$\overline{VP} = \sqrt{\frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{4}}.$$

Agora, foquemos no pentágono regular VTIZL e calculemos a medida da sua diagonal VI, observando que $\overline{VT} = \overline{TI}$. Ou seja,

$$\overline{VI}^2 = \overline{VT}^2 + \overline{TI}^2 - 2 \cdot \overline{VT} \cdot \overline{TI} \cdot \cos(\widehat{VTI})$$

$$\overline{VI}^2 = 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ + 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ - 2 \cdot (2 - 2 \cdot \cos 108^\circ) \cdot \cos 108^\circ.$$

Sendo assim,

$$\overline{VI}^2 = 4 - 8 \cdot \cos 108^\circ + 4 \cdot \cos^2 108^\circ = (2 - 2 \cdot \cos 108^\circ)^2.$$

Com isso,

$$\overline{VI} = 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ.$$

Mais uma vez, apliquemos a lei dos cossenos; desta vez ao triângulo isósceles VPI , na tentativa de encontrarmos a medida do ângulo $V\hat{P}I$. Note que $\overline{VP} = \overline{PI}$. Nesse caso,

$$\overline{VI}^2 = \overline{VP}^2 + \overline{PI}^2 - 2 \cdot \overline{VP} \cdot \overline{PI} \cdot \cos(V\hat{P}I)$$

$$4 - 8 \cos 108^\circ + 4 \cos^2 108^\circ = \frac{7 - 8 \cos 108^\circ}{4} + \frac{7 - 8 \cos 108^\circ}{4} - 2 \cdot \left(\frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{4} \right) \cdot \cos(V\hat{P}I)$$

$$4 - 8 \cdot \cos 108^\circ + 4 \cdot \cos^2 108^\circ = \frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{2} - \left(\frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{2} \right) \cdot \cos(V\hat{P}I)$$

$$8 - 16 \cdot \cos 108^\circ + 8 \cdot \cos^2 108^\circ = 7 - 8 \cdot \cos 108^\circ - (7 - 8 \cdot \cos 108^\circ) \cdot \cos(V\hat{P}I)$$

$$(7 - 8 \cdot \cos 108^\circ) \cdot \cos(V\hat{P}I) = 8 \cos 108^\circ - 8 \cos^2 108^\circ - 1.$$

Portanto,

$$\cos(V\hat{P}I) = \frac{8 \cos 108^\circ - 8 \cos^2 108^\circ - 1}{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}.$$

Como 108° não é um arco notável, temos que $\cos 108^\circ$ é um número irracional. Vamos utilizar o fato de que $\cos 108^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\cos(V\hat{P}I) &= \frac{8\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) - 8\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1}{7 - 8\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)} \\
&= \frac{2 - 2\sqrt{5} - \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{2}\right) - 1}{7 - (2 - 2\sqrt{5})} \\
&= \frac{1 - 2\sqrt{5} - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{2}\right)}{5 + 2\sqrt{5}} \\
&= \frac{2 - 4\sqrt{5} - 6 + 2\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{5 + 2\sqrt{5}} \\
&= \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2(5 + 2\sqrt{5})} \\
&= \frac{-2 - \sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \cdot \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} \\
&= \frac{-10 + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 10}{25 - 20}.
\end{aligned}$$

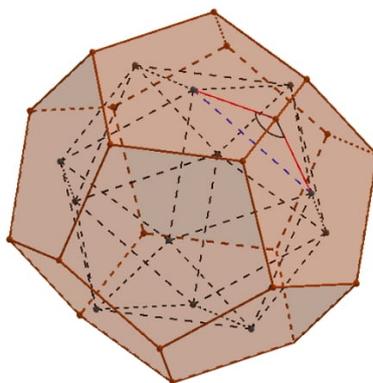
Daí,

$$\cos(V\hat{P}I) = \frac{-\sqrt{5}}{5},$$

o que nos diz que a medida do ângulo formado por duas faces adjacentes do dodecaedro regular vale

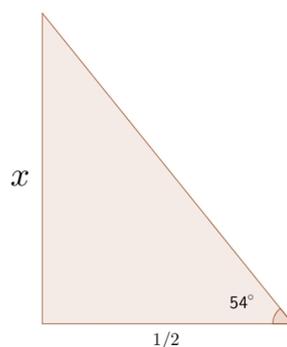
$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) \approx 116,56^\circ.$$

Além disso, devemos determinar a medida do ângulo diédrico do icosaedro regular. Para tanto, precisamos conhecer o comprimento da aresta do icosaedro regular inscrito em nosso dodecaedro regular de aresta 1. Calculemos a medida da aresta do icosaedro regular destacada em azul na figura 3.16.

Figura 3.16 - Icosaedro regular com alguns elementos destacados

Fonte: Elaborada por autor, 2019.

Perceba que os segmentos destacados em vermelho na figura acima são apótemas das faces pentagonais do dodecaedro regular e o ângulo em evidência é exatamente o ângulo diédrico do mesmo. Lançando mão, novamente, da medida do ângulo interno de um pentágono regular, construímos o triângulo retângulo que segue sobre a face do dodecaedro regular.

Figura 3.17 - Triângulo retângulo sobre o pentágono regular

Fonte: Elaborada por autor, 2019.

Na figura 3.17, o segmento de medida x corresponde ao apótema da face pentagonal do dodecaedro regular. Tomando a tangente de 54° , obtemos

$$\tan 54^\circ = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{\tan 54^\circ}{2}. \quad (3.2)$$

Recordemos o fato de que $\cos 108^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ e façamos uso da fórmula do cosseno do arco duplo. Teremos o seguinte:

$$\cos 108^\circ = \cos(2 \cdot 54^\circ) = \cos^2 54^\circ - \sin^2 54^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}. \quad (3.3)$$

Mas, da relação fundamental da trigonometria, sabemos que

$$\cos^2 54^\circ = 1 - \operatorname{sen}^2 54^\circ. \quad (3.4)$$

Daí, substituindo (3.4) em (3.3):

$$1 - \operatorname{sen}^2 54^\circ - \operatorname{sen}^2 54^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Isto é,

$$2\operatorname{sen}^2 54^\circ = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}.$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2 54^\circ = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}, \quad (3.5)$$

o que nos revela que

$$\cos^2 54^\circ = 1 - \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{8} \right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}. \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6), segue-se que

$$\tan^2 54^\circ = \frac{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}.$$

Ou seja,

$$\tan 54^\circ = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}. \quad (3.7)$$

Dessa forma, substituindo (3.7) em (3.2):

$$x = \frac{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}}{2} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}.$$

Agora, apliquemos a lei dos cossenos ao triângulo isósceles destacado na figura 3.16. Sendo y a medida do segmento tracejado destacado em azul (aresta do icosaedro regular), então

$$\begin{aligned}
y^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{5} \right) \\
&= \frac{5 + 2\sqrt{5}}{20} + \frac{5 + 2\sqrt{5}}{20} - 2 \cdot \left(\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20} \right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{5} \right) \\
&= \frac{5 + 2\sqrt{5}}{10} - \left(\frac{-5\sqrt{5} - 10}{50} \right) \\
&= \frac{25 + 10\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 10}{50} \\
&= \frac{35 + 15\sqrt{5}}{50} \\
&= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}.
\end{aligned}$$

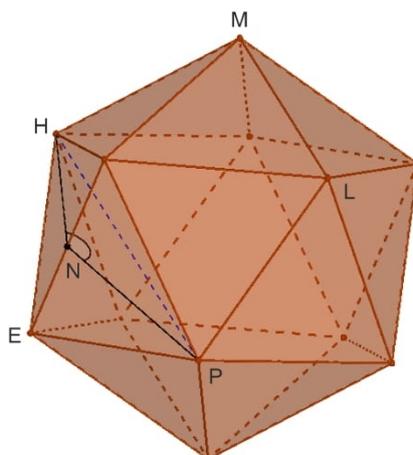
Portanto,

$$y = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}}.$$

Com isso, a medida da aresta do icosaedro regular inscrito em um dodecaedro regular de aresta 1 é igual

$$\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}}.$$

Retornemos ao cálculo do ângulo diédrico de um icosaedro regular. Consideremos o icosaedro regular da figura que segue e encontremos, inicialmente, a medida do segmento tracejado destacado em azul (diagonal do pentágono regular EHMLP). Já sabemos que a abertura do ângulo interno $H\hat{E}P$ vale 108° . Nesse caso, devemos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo isósceles HEP, cujos lados congruentes medem $\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}}$ (aresta do icosaedro regular).

Figura 3.18 - Ângulo diédrico do icosaedro regular

Fonte: Elaborada por autor, 2019.

Temos que

$$\begin{aligned}
 \overline{HP}^2 &= \overline{HE}^2 + \overline{EP}^2 - 2 \cdot \overline{HE} \cdot \overline{EP} \cdot \cos(\widehat{HEP}) \\
 &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{10} + \frac{7 + 3\sqrt{5}}{10} - 2 \cdot \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\
 &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{5} - \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right) \\
 &= \frac{28 + 12\sqrt{5} - 7 + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 15}{20} \\
 &= \frac{36 + 16\sqrt{5}}{20}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{HP} = \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{5}}{5}}.$$

Prossigamos fixando os olhares sobre o triângulo isósceles HNP, levando em consideração o fato de que os lados HN e PN são alturas das faces do icosaedro regular. Ou seja,

$$\overline{HN} = \overline{PN} = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando a lei dos cossenos a esse último triângulo mencionado, segue-se que

$$\overline{HP}^2 = \overline{HN}^2 + \overline{PN}^2 - 2 \cdot \overline{HN} \cdot \overline{PN} \cdot \cos(\widehat{HNP})$$

$$\frac{9 + 4\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10} \right) + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10} \right) - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10} \right) \cdot \cos(\widehat{HNP})$$

$$\frac{72 + 32\sqrt{5}}{40} = \frac{21 + 9\sqrt{5} + 21 + 9\sqrt{5} - 6(7 + 3\sqrt{5})}{40} \cdot \cos(\widehat{HNP})$$

$$6(7 + 3\sqrt{5}) \cdot \cos(\widehat{HNP}) = -30 - 14\sqrt{5}.$$

Dessa forma,

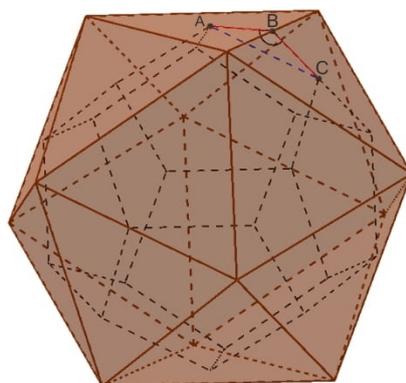
$$\begin{aligned} \cos(\widehat{HNP}) &= \frac{-30 - 14\sqrt{5}}{6(7 + 3\sqrt{5})} \cdot \frac{7 - 3\sqrt{5}}{7 - 3\sqrt{5}} \\ &= \frac{-210 + 90\sqrt{5} - 98\sqrt{5} + 210}{6(49 - 45)} \\ &= \frac{-\sqrt{5}}{5}, \end{aligned}$$

o que nos diz que o ângulo formado por duas faces adjacentes do icosaedro regular mede

$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) \approx 138,18^\circ.$$

Finalmente, estamos aptos a calcular a redução sobre a aresta do dodecaedro regular a fim de que ele passe a se mostrar inscrito no icosaedro regular. Basta considerarmos a inscrição do dodecaedro regular no icosaedro regular, conforme figura 3.19.

Figura 3.19 - Aresta do dodecaedro inscrito destacada em azul



Fonte: Elaborada por autor, 2019.

Observe que os segmentos destacados em vermelho são apótemas das faces do icosaedro regular, cuja medida da aresta é $\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}$. Lembre-se que esse icosaedro regular, por sua vez, encontra-se inscrito no dodecaedro regular de aresta 1. Como já salientamos algumas vezes ao longo das aplicações, o comprimento dos apótemas AB e BC vale um terço da medida da altura das faces triangulares, isto é,

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

E, pela última vez, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo isósceles ABC, obtém-se:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\hat{ABC}) \\ &= \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \frac{3}{36} + \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \frac{3}{36} - 2 \cdot \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \frac{3}{36} \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) \\ &= \frac{21+9\sqrt{5}+21+9\sqrt{5}+14\sqrt{5}+30}{360} \\ &= \frac{9+4\sqrt{5}}{45}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{45}},$$

que é exatamente a medida da aresta do dodecaedro regular inscrito no icosaedro regular o qual outrora estava inscrito no dodecaedro regular.

Para encontrarmos a redução desejada, é suficiente calcularmos a razão entre as medidas das arestas do dodecaedro regular em ambas as situações. Portanto, fazendo

$$\frac{\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{45}}}{1} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{45}} \approx 0,6314,$$

verificamos que essa redução consiste em aproximadamente 63,14%.

Neste capítulo, vimos alguns problemas bastante interessantes, os quais foram pensados e elaborados por nós mesmos, e contemplam vários níveis de dificuldade; desde abordagens mais simples até algumas mais sofisticadas. Com o intuito de dar continuidade às aplicações, propomos outros problemas que também podem ser tranquilamente trabalhados pelo professor de matemática nas aulas de geometria espacial. A saber:

- 6) *Determine a razão entre os volumes de dois tetraedros duais entre si.*
- 7) *Retornando à quinta aplicação, se invertermos os “papéis iniciais” entre o icosaedro regular e o dodecaedro regular (ou seja, se considerarmos que o dodecaedro regular está inscrito no icosaedro regular), a redução obtida será a mesma?*
- 8) *Um cubo cuja área da superfície vale $4\sqrt{10}$ cm² encontra-se inscrito em um octaedro regular. Calcule a área da superfície do cubo sobre o qual se encontra inscrito esse octaedro regular.*

4 Conclusão

Neste trabalho, entendemos como surgiram os primeiros estudos sobre os poliedros e como se dá a dualidade entre eles. Preocupamo-nos em trazer uma discussão quanto ao ensino de geometria e o contexto histórico do seu surgimento. Apresentamos quatro classes de poliedros bastante interessantes: a dos poliedros regulares, a dos poliedros de Kepler-Poinsot, a dos sólidos de Arquimedes e a dos sólidos de Catalan, descrevendo uma breve bibliografia sobre as contribuições desses grandes matemáticos, incluindo Platão. Vimos que foram contribuições relevantes para diversas áreas do conhecimento, perpassando as ciências exatas.

Evidenciamos todas as definições e resultados pertinentes ao estudo, enfatizando a importância da abordagem desse tópico em sala de aula. Além disso, introduzimos algumas transformações envolvendo poliedros e realizamos a planificação dos poliedros estudados a fim de facilitar a visualização e compreensão do leitor sobre os elementos dos mesmos. No capítulo dedicado às aplicações, sugerimos alguns problemas que podem ser trabalhados nas aulas de geometria espacial, sobretudo pelo professor do ensino básico. São problemas que podem favorecer os alunos no desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, instigando-os a explorar os elementos e as propriedades das figuras geométricas envolvidas.

Além disso, no apêndice, mostramos em detalhes como é feita a construção do icosaedro truncado com a utilização do aplicativo GeoGebra, versão 5.0, permitindo-nos combinar conceitos de geometria e álgebra de modo a facilitar a visualização das figuras e proporcionar uma melhor compreensão do que estamos estudando.

Finalmente, almejamos que este trabalho possa ser utilizado por professores e alunos para facilitar o estudo sobre a dualidade de poliedros, servindo como material de apoio para sanar eventuais dúvidas sobre esse tópico, o qual é tão importante para o ensino de geometria espacial. Deixamos algumas sugestões para aprofundamento do estudo sobre poliedros duais. Existem algumas outras classes de poliedros bastante interessantes e conhecidas, como a dos prismas, que têm como duais as dipirâmides (ou bipirâmides) - poliedros obtidos pela união de duas pirâmides congruentes base a base. Há, também, a classe dos antiprismas, que têm como duais os deltoedros ou trapezoedros - poliedros cujas faces são deltoides¹.

¹ Deltoides são quadriláteros que contêm dois pares disjuntos de lados adjacentes congruentes. Os deltoides são usualmente chamados de pipas, em referência à sua semelhança com o brinquedo aéreo que recebe o mesmo nome.

Referências

- [1] BIDA, M. C. S.; SANTOS, P. A. S. **Os cinco sólidos de Platão no campo da geometria**. Trabalho de Conclusão de Estágio - Faculdades Integradas do Vale do Ivaí. Paraná, 2015.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- [4] CABRAL. Állisson Henrique Leite. **O teorema de Euler para poliedros**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2017.
- [5] DANTE L. R. **Matemática** - Volume 7, 1ª edição. São Paulo. Editora ÁTICA. 2013
- [6] D'AMBROSIO, U. **História da Matemática e Educação**. In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996, pp. 7-17.
- [7] EVES, H. **Introdução à história da matemática** - Campinas: Editora Unicamp, 2008.
- [8] FÜRKOTTER, M.; MORELATTI, M. R. M. **A Geometria da Tartaruga: uma introdução à Linguagem LOGO**. In: SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA, 4, 2009, Presidente Prudente, Anais. Presidente Prudente, 2009, pp. 1-29.
- [9] GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1991.
- [10] GRÜNBAUM, B. **Are Your Polyhedra The Same as My Polyhedra?** Em Aronov, B.; Basu, S.; Pach, J.; Sharir, M. (editores). Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift. Springer-Verlag, 2003, pp. 461-588.
- [11] GRÜNBAUM, B.; Shephard G. **Duality of Polyhedra**. Em Senechal, M; Fleck, G. (editores). Shaping Space - A Polyhedral Approach. Burkhouse, 1988.
- [12] Histórias de geometria. **Os poliedros**. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/mat1131/Historias%20Geometria.pdf>>. Acesso em: 06 jan. 2020.

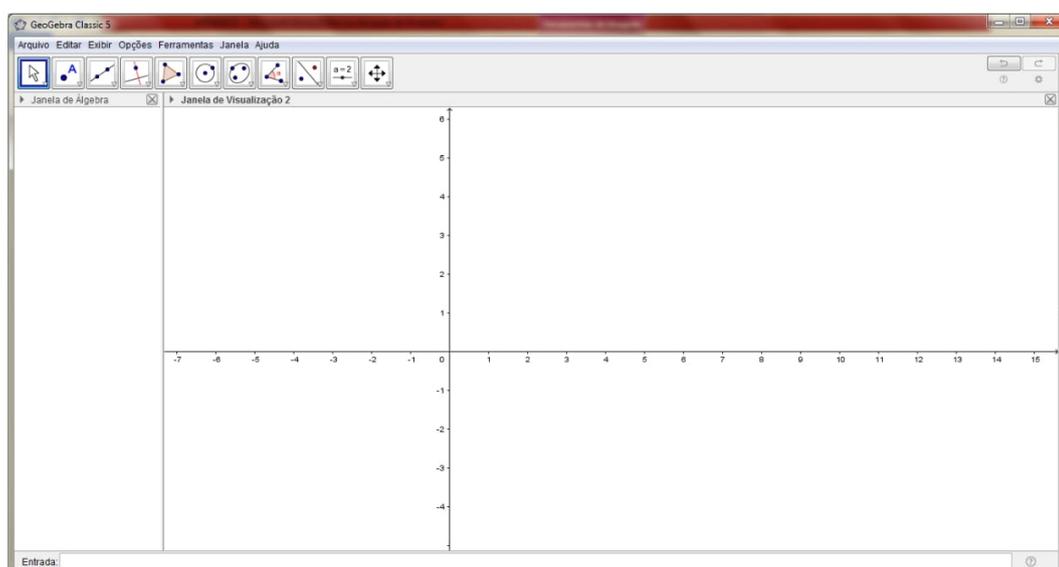
- [13] IEZZI, G. **Conecte Matemática** - Volume 2, 2ª edição. Editora SARAIVA. 2014.
- [14] LIMA, E. L., et al. **A Matemática do Ensino Médio** - Volume 2. Rio de Janeiro, SBM. 2006. 308 p.
- [15] NEVES, José Ribamar de Souza. **Poliedros Arquimedianos**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2017.
- [16] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública do Estado do Paraná** - DCE, 2006.
- [17] Só Matemática **Johannes Kepler**. Bibliografia de matemáticos. Disponível em: <<https://www.somatematica.com.br/biograf/kepler.php>>. Acesso em: 29 set. 2019.
- [18] Só Matemática: Platão. **Virtuous Tecnologia da Informação**, 1998-2019. Disponível em: <<https://www.somatematica.com.br/biograf/platao.php>>. Acesso em: 27 set. 2019.
- [19] Universidade Federal Fluminense. **Uma Pletora de Poliedros**. Disponível em: <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/pdp/pdp-html/definicoes-br.html>>. Acesso em: 13 out. 2019.
- [20] **Wikipédia**: Eugène Charles Catalan. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Eugène_Charles_Catalan. Acesso em: 29 set. 2019.
- [21] YERNE, Bill. **Cem homens que mudaram a história do mundo**. São Paulo: Ediouro, 2004.

5 Apêndice - Construções no GeoGebra

Neste apêndice, mostramos em detalhes como é feita a construção do icosaedro truncado e do seu dual com a utilização do aplicativo GeoGebra, versão 5.0, permitindo-nos combinar conceitos de geometria e álgebra de modo a facilitar a visualização das figuras e proporcionar uma melhor compreensão do que estamos estudando.

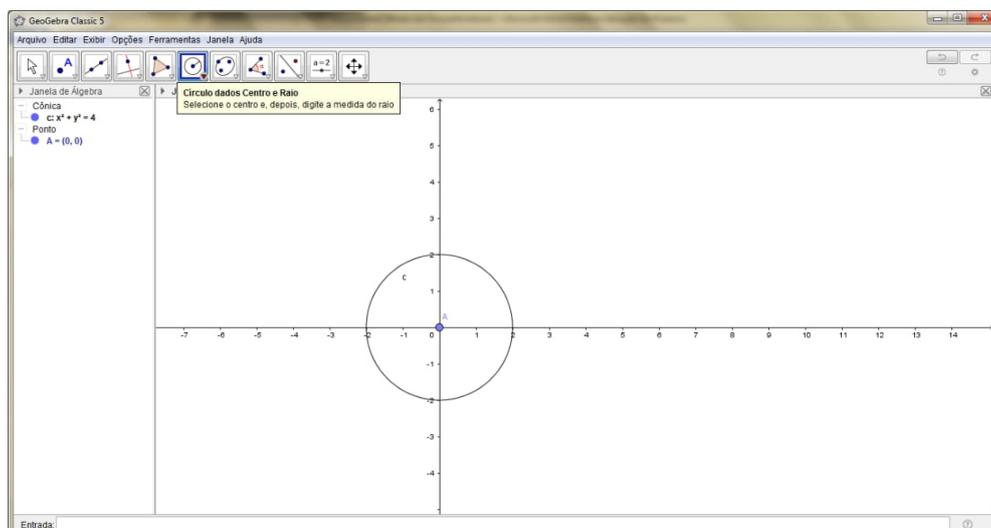
Para fomentarmos o icosaedro truncado, como o próprio nome sugere, faremos uso da transformação de truncamento, ou seja, iremos realizar seções, sob um terço da medida da aresta, sobre os vértices do icosaedro regular. Começamos “abrindo” o GeoGebra e observando uma janela de visualização em duas dimensões, que é o plano cartesiano.

Figura 5.1 - Janela de visualização inicial do GeoGebra



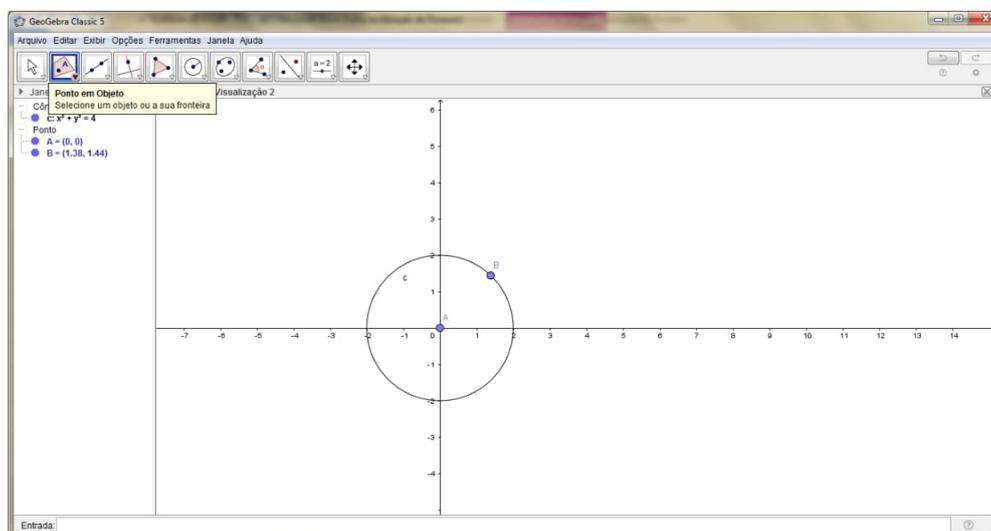
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Prosseguimos clicando com o botão esquerdo do mouse sobre a opção “círculo dados centro e raio”. Com isso, podemos marcar o centro A do círculo na origem no plano cartesiano e colocar raio igual a 2 no local indicado na aba que será aberta.

Figura 5.2 - Círculo de raio 2 centrado na origem

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

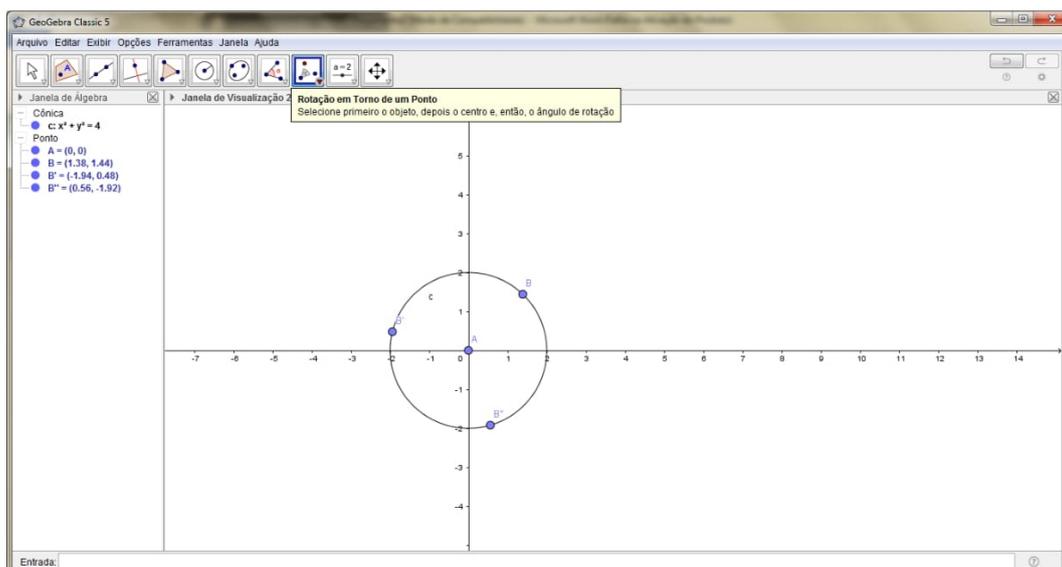
Para marcarmos um ponto B sobre o círculo, basta clicarmos com o botão esquerdo do mouse sobre a opção “ponto em objeto”. Em seguida, marque o ponto B onde preferir.

Figura 5.3 - Ponto B marcado sobre o círculo

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na parte superior da página, clique na opção “rotação em torno de um ponto”. Com o botão esquerdo do mouse clique sobre o centro A e, pressionando a tecla *ctrl*, clique sobre o ponto B. Depois, basta inserir um ângulo de 120° no local solicitado. Surgirá um ponto B' sobre o círculo. Aplique mais uma vez esse processo ao centro A e o novo ponto B' do círculo. Você dará origem a outro novo ponto B”, também pertencente ao círculo.

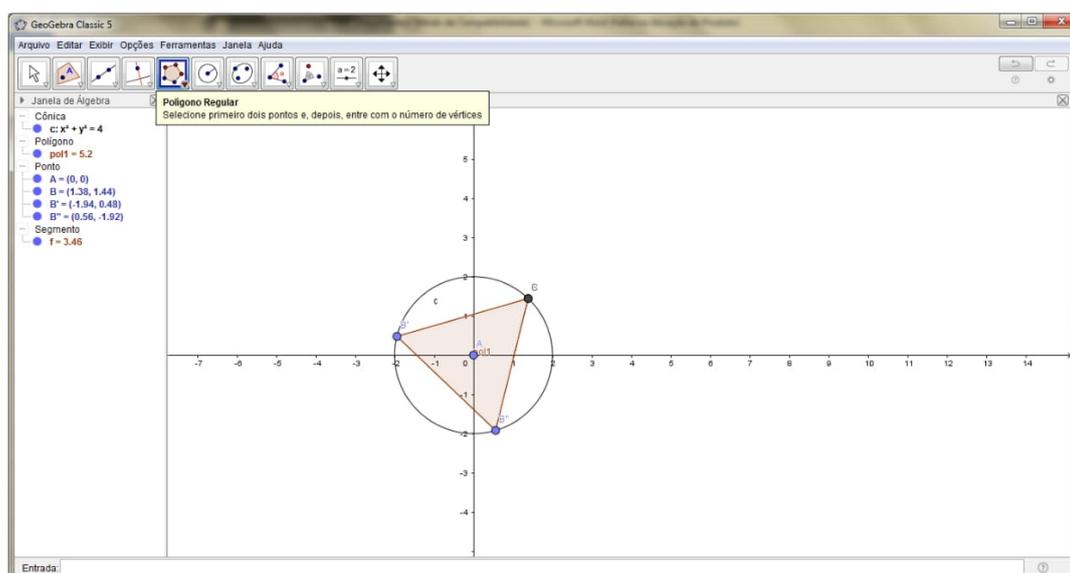
Figura 5.4 - Pontos B' e B'' marcados sobre o círculo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Selecione a opção “polígono regular” e clique sobre os pontos B' e B'', nessa ordem. No local indicado na aba que será aberta, digite 3. Você dará origem a um triângulo equilátero inscrito no círculo.

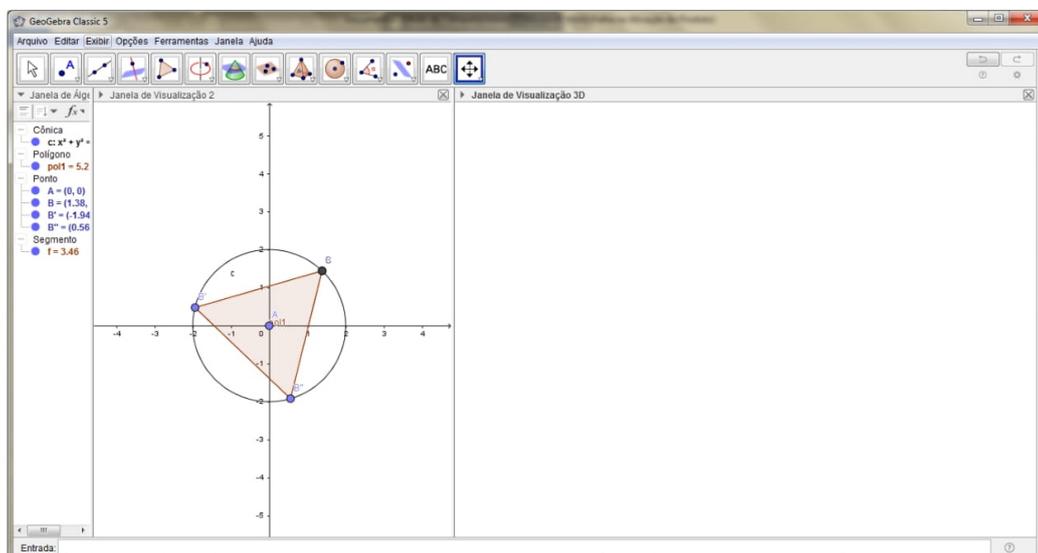
Figura 5.5 - Triângulo equilátero inscrito no círculo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Agora, vamos ativar a janela de visualização 3D selecionando a opção “exibir” na parte superior do layout. Arranje as duas janelas de visualização como achar melhor.

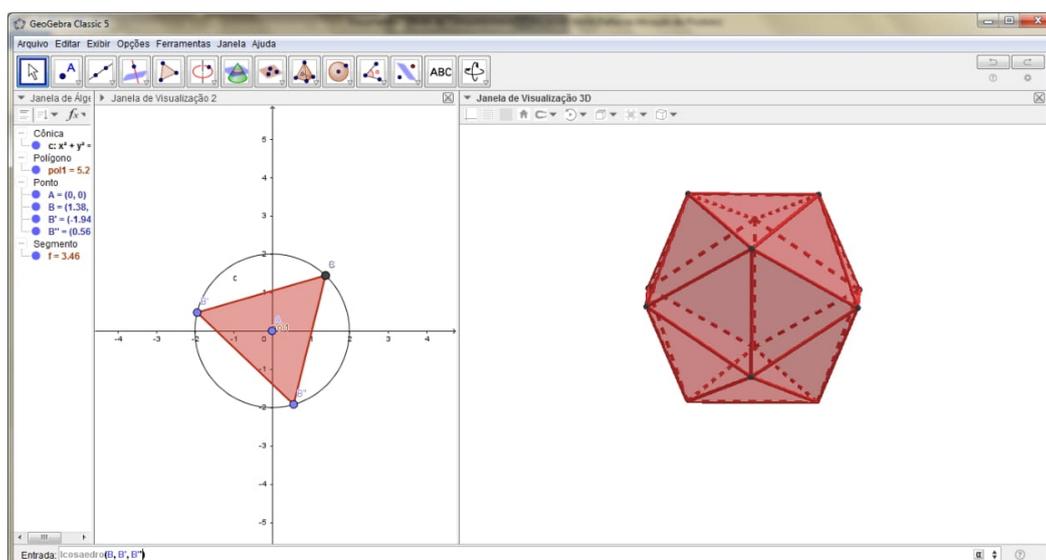
Figura 5.6 - Janela de visualização 3D



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na parte inferior do layout, no campo “entrada”, digite a palavra icosaedro e selecione a opção definida por três pontos; no caso, insira os pontos B, B' e B". Você dará origem a um icosaedro regular.

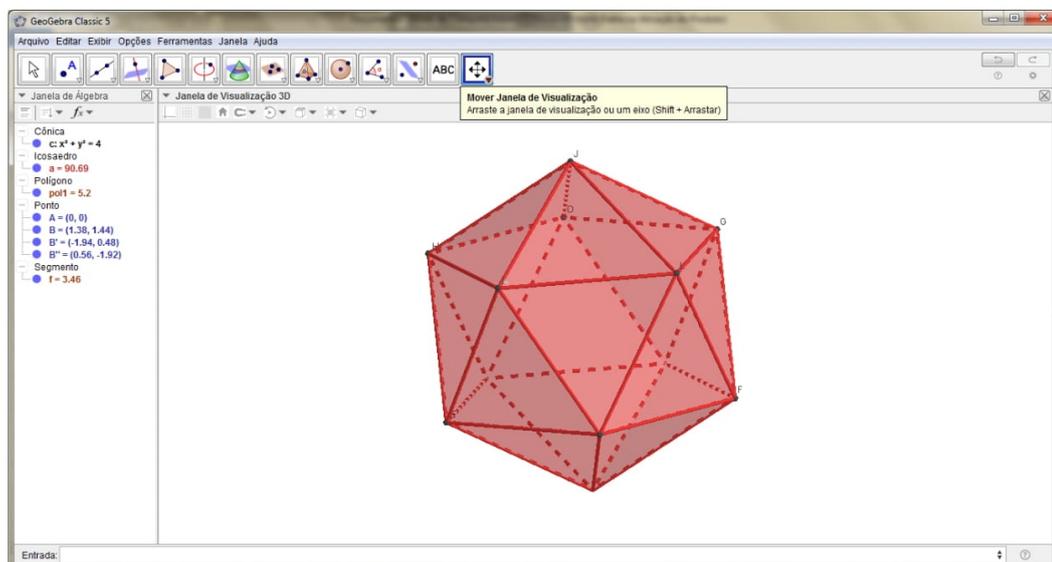
Figura 5.7 - Icosaedro regular fomentado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Já podemos fechar a janela de visualização 2D, pois iremos trabalhar apenas com a janela 3D daqui para frente. Se necessário, você pode ampliar sua figura rolando o mouse para cima. Também é possível mover a figura utilizando a opção “mover janela de visualização”.

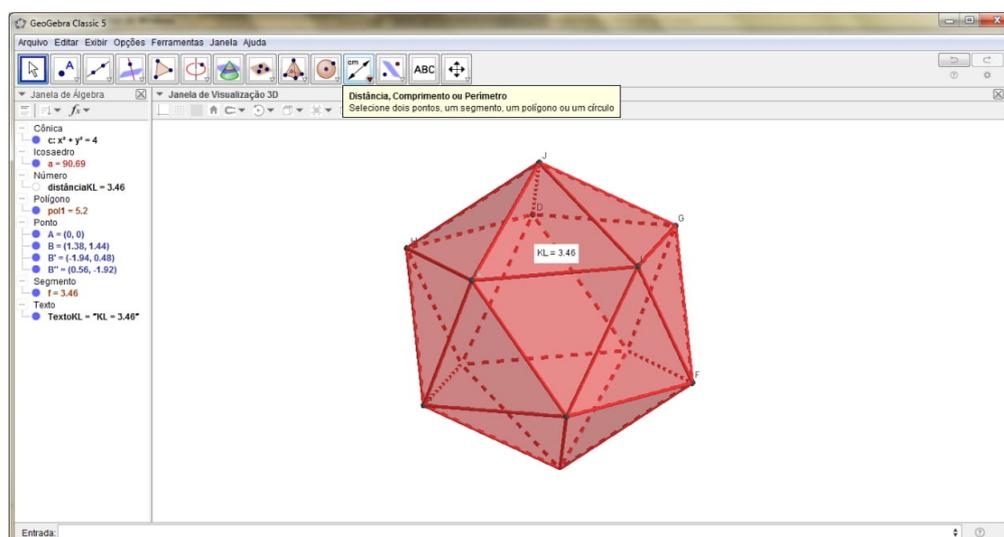
Figura 5.8 - Icosaedro regular ampliado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Prosseguimos selecionando a opção “distância, comprimento ou perímetro”. Meça o comprimento do segmento KL, clicando no ponto K e, pressionando a tecla *ctrl*, clicando sobre o ponto L. Você irá obter 3,46 como resultado.

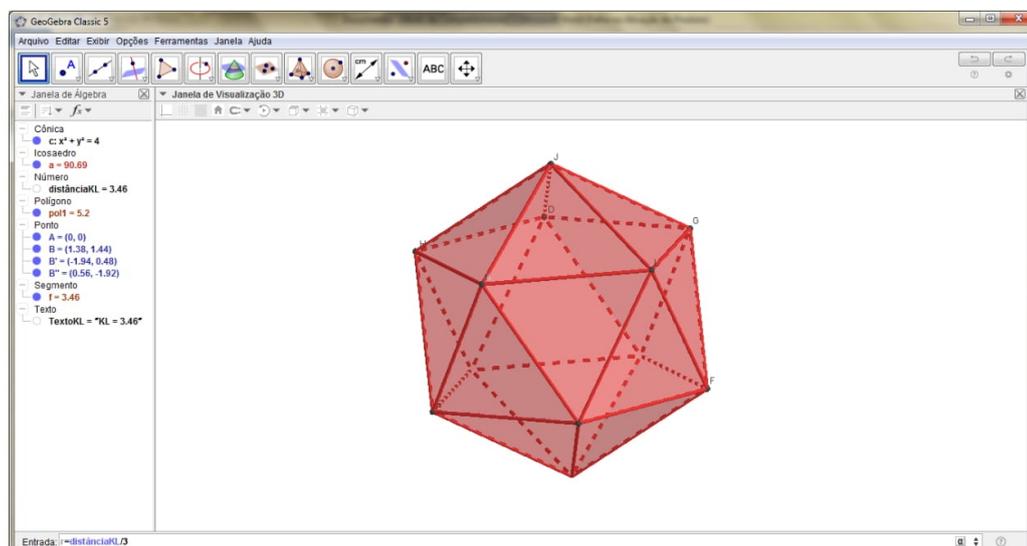
Figura 5.9 - Comprimento do segmento KL



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Se preferir, você pode omitir esse quadrinho branco clicando sobre ele com o botão esquerdo do mouse e selecionando a opção “exibir objeto”. Novamente, no campo entrada, digite a expressão “ $r = \text{distância KL}/3$ ”.

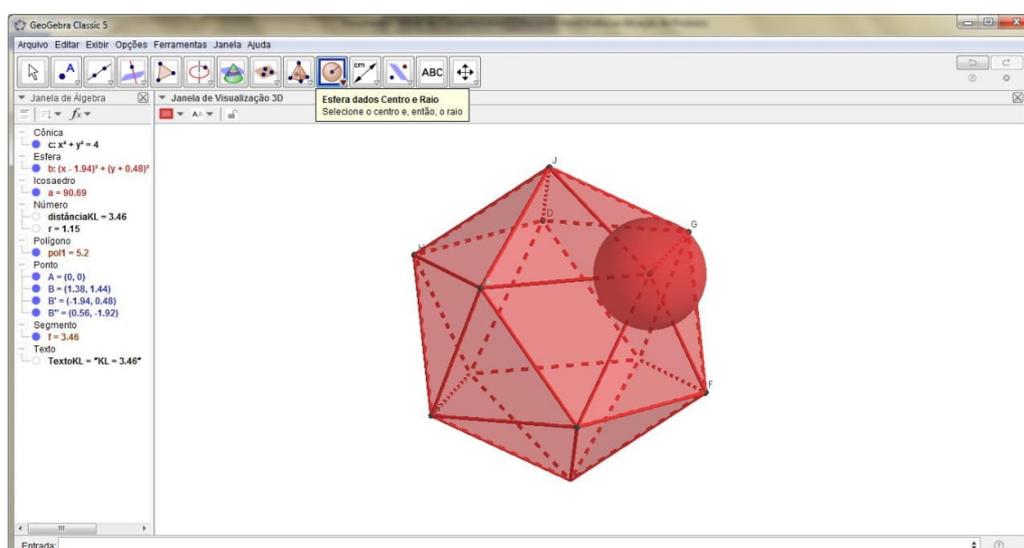
Figura 5.10 - Quadrinho branco desaparecido



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Selecione a opção “esfera dados centro e raio”. Escolha um dos vértices do icosaedro regular, clique com o botão esquerdo do mouse e digite r na aba que será aberta.

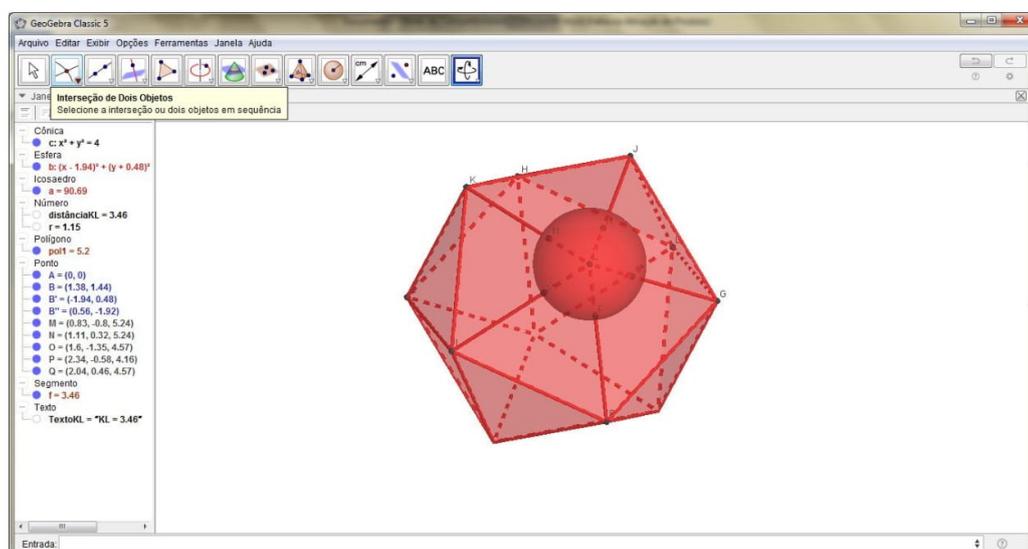
Figura 5.11 - Esfera sobre um dos vértices do icosaedro regular



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Agora, vamos clicar na opção “interseção de dois objetos”. Para uma melhor visualização, você pode selecionar a opção “girar janela de visualização 3D” (última opção no layout superior). Para determinar a interseção entre a esfera e os cinco segmentos secantes a ela, clique com o botão esquerdo do mouse sobre a esfera e, pressionando a tecla *ctrl*, clique sobre um desses segmentos. Repita o processo aos quatro segmentos restantes. Você verá que aparecerão cinco novos pontos na superfície da esfera.

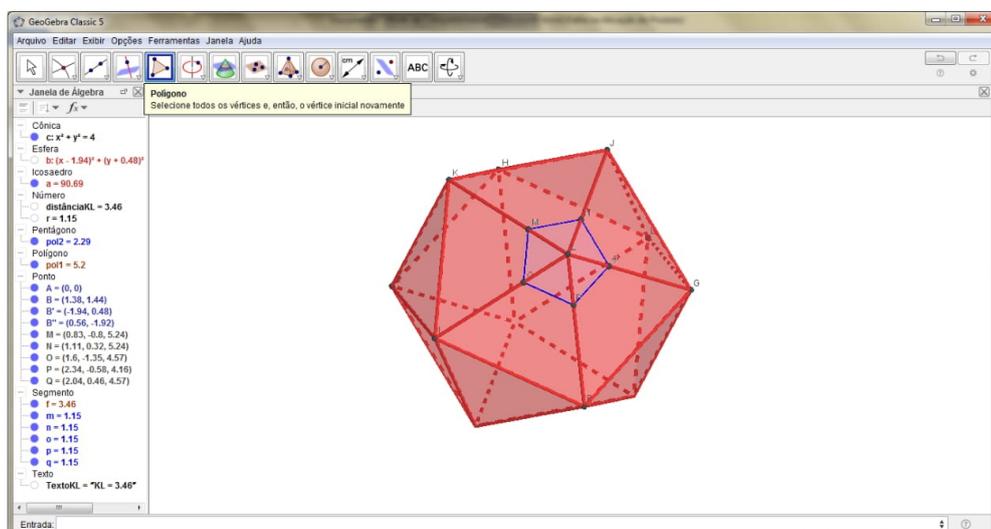
Figura 5.12 - Cinco pontos sobre a superfície da esfera



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Você pode omitir a esfera indo até a janela de álgebra e desmarcando a opção “esfera”. Clicando na opção “polígono”, você pode traçar um pentágono regular unindo os cinco pontos obtidos anteriormente. Escolha a cor que preferir para essa figura, acessando as propriedades do objeto.

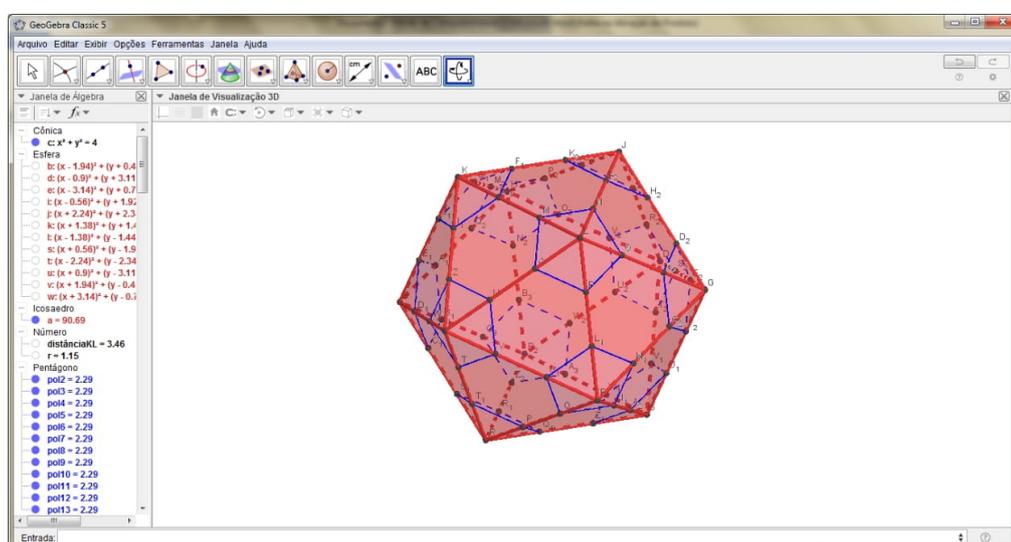
Figura 5.13 - Pentágono regular destacado em azul



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Repetindo esses últimos comandos a todos os demais onze vértices do icosaedro regular, iremos obter uma figura conforme 5.14.

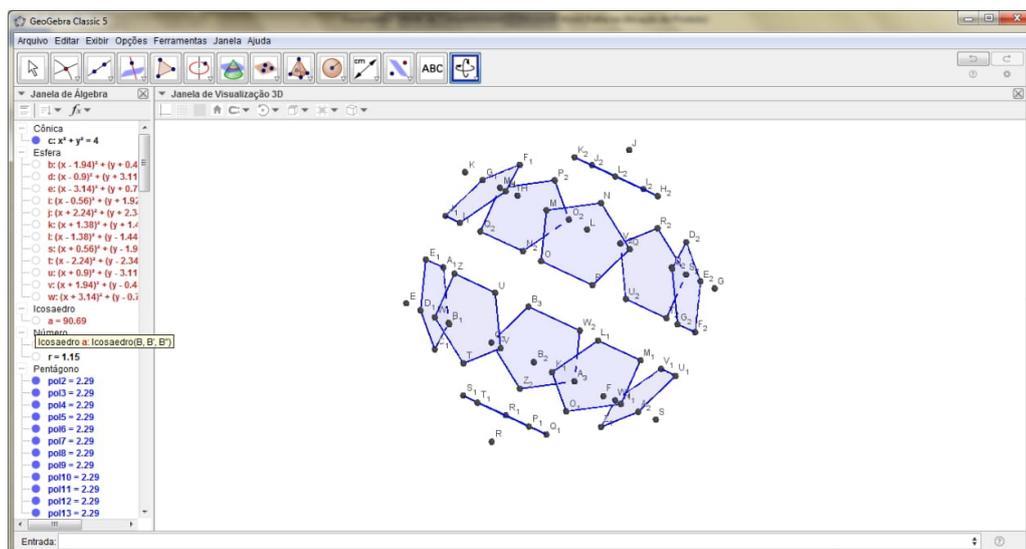
Figura 5.14 - Pentágonos regulares destacados em azul



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Neste momento, devemos ir até a janela de álgebra e desmarcar a opção “icosaedro”.

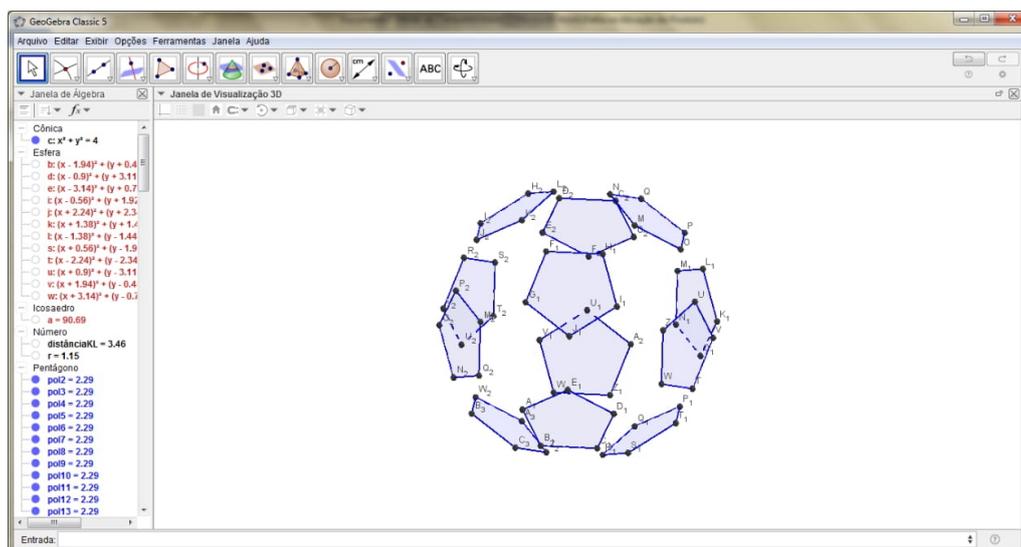
Figura 5.15 - Icosaedro desmarcado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Você irá perceber que haverá doze pontos “livres”, que são exatamente os doze vértices do icosaedro regular. Podemos omiti-los clicando com o botão esquerdo do mouse sobre eles e selecionando a opção “exibir objeto”. Ver figura a seguir.

Figura 5.16 - Pontos desmarcados

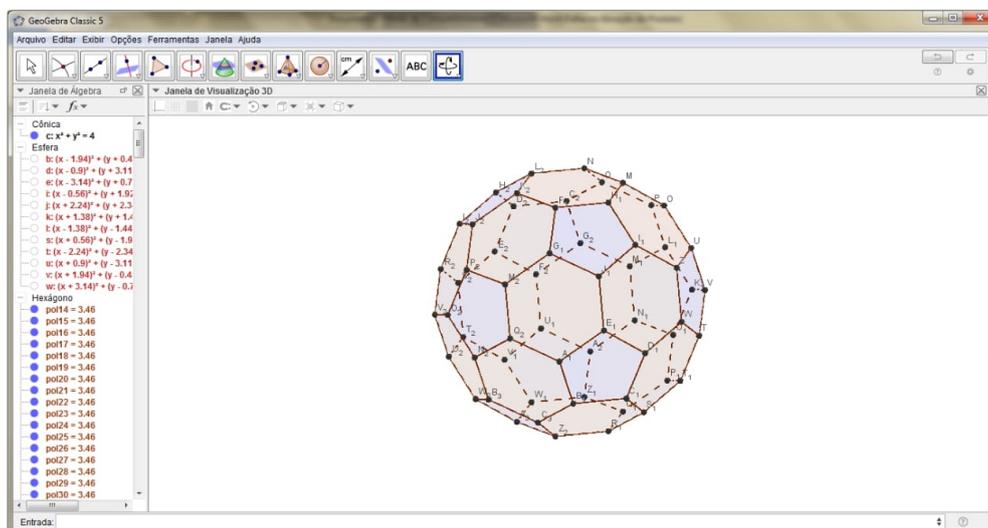


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Como podemos observar, já temos a formação de doze pentágonos regulares. Resta-nos construir vinte hexágonos regulares. Para tanto, seguimos as mesmas ins-

truções dadas para a construção dos pentágonos. É interessante fomentarmos os hexágonos com uma cor diferente da utilizada para os pentágonos, por questão de estética e uma melhor visualização. Feito isso, já iremos nos deparar com o icosaedro truncado.

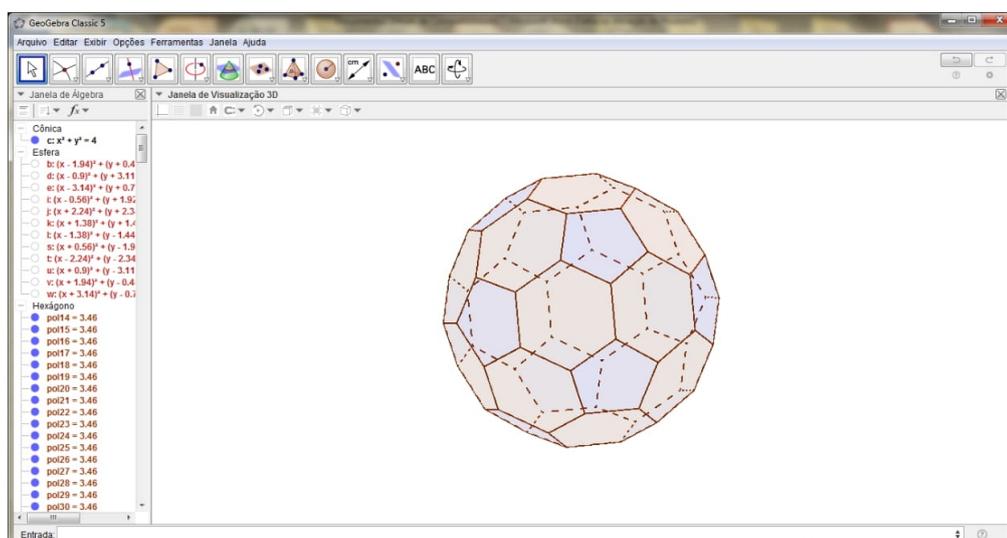
Figura 5.17 - Icosaedro truncado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Podemos promover uma “limpeza” sobre o icosaedro truncado. Para tal, clicamos com o botão esquerdo do mouse sobre cada uma dessas pequenas bolinhas que representam os vértices do nosso poliedro e selecionamos a opção “exibir objeto”.

Figura 5.18 - Icosaedro truncado “limpo”

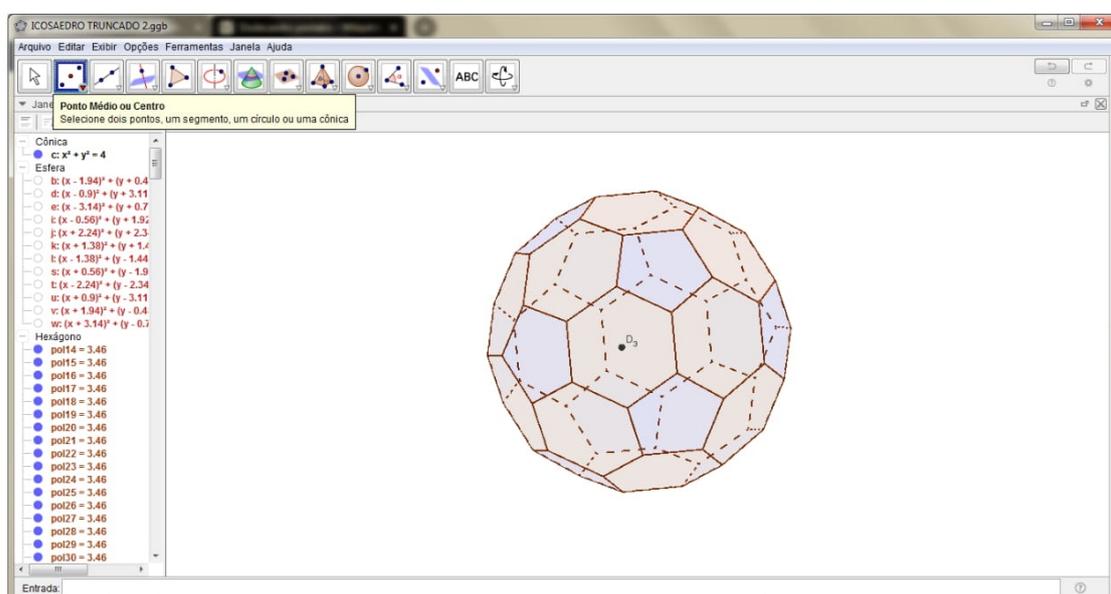


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Não poderíamos deixar de realizarmos a construção do poliedro dual do icosaedro truncado, o dodecaedro pentakis. Para verificarmos essa dualidade, basta mostrarmos que é possível inscrevermos um desses sólidos no outro e vice-versa. Nesse caso, veremos que as duas inscrições estão “bem definidas”.

Em primeiro lugar, clicamos com o botão esquerdo do mouse sobre a opção “ponto médio ou centro” e marcamos o centro de uma face qualquer do nosso sólido arquimediano, digamos D_3 .

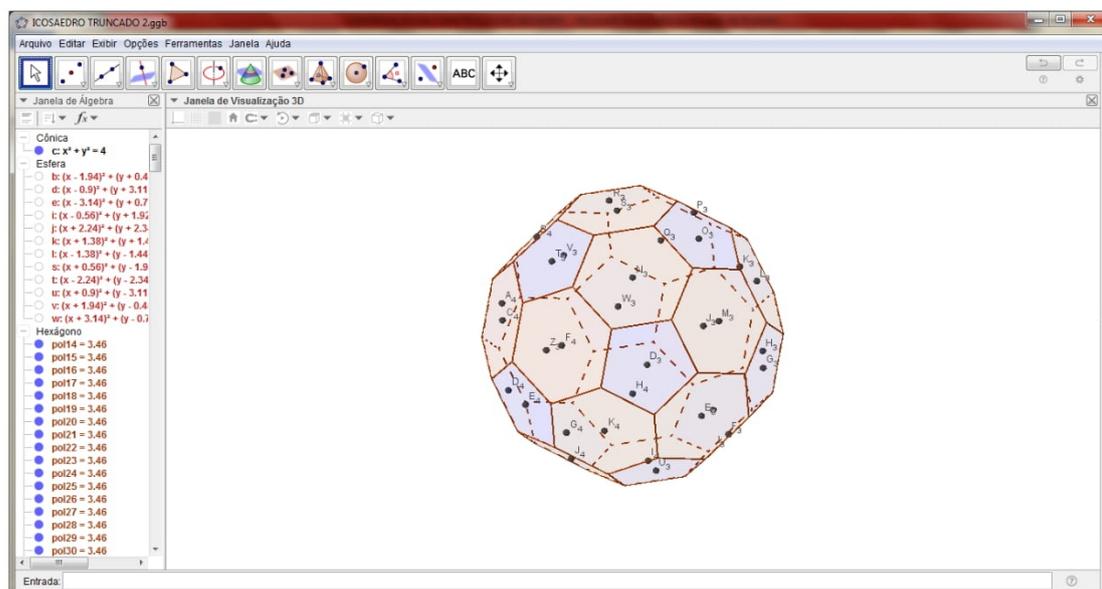
Figura 5.19 - Ponto D_3 marcado sobre a face hexagonal do icosaedro truncado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Semelhantermente, marcamos todos os demais centros das faces do icosaedro truncado. Com isso, encontraremos a figura que segue.

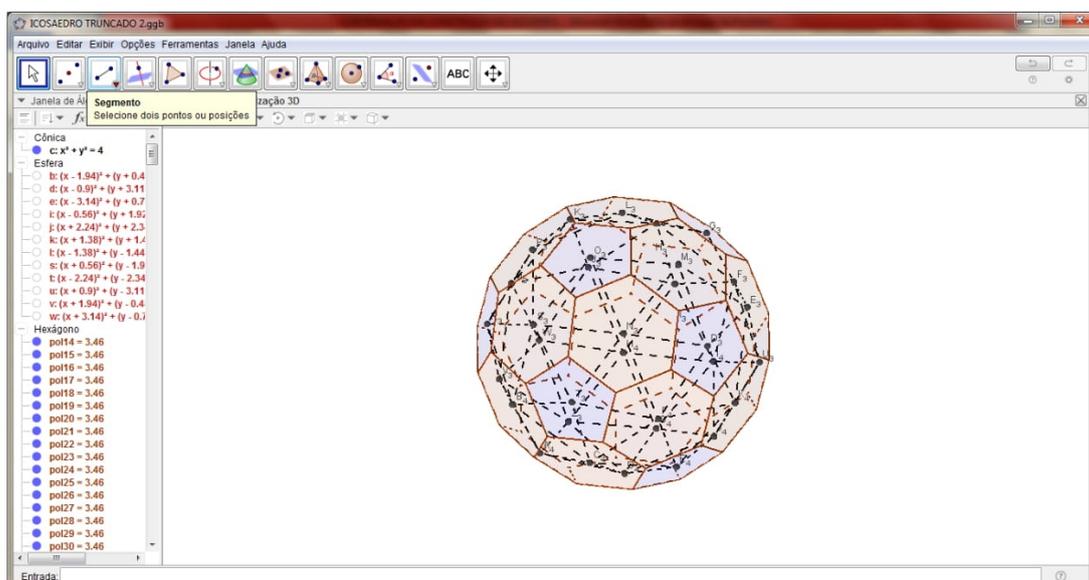
Figura 5.20 - Todos os centros das faces do icosaedro truncado marcados



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Fazendo uso da ferramenta “segmento”, podemos traçar todos os segmentos de reta determinados pelos centros de faces cuja interseção é um lado em comum. Assim, conseguimos traçar todas as arestas do poliedro dual do icosaedro truncado.

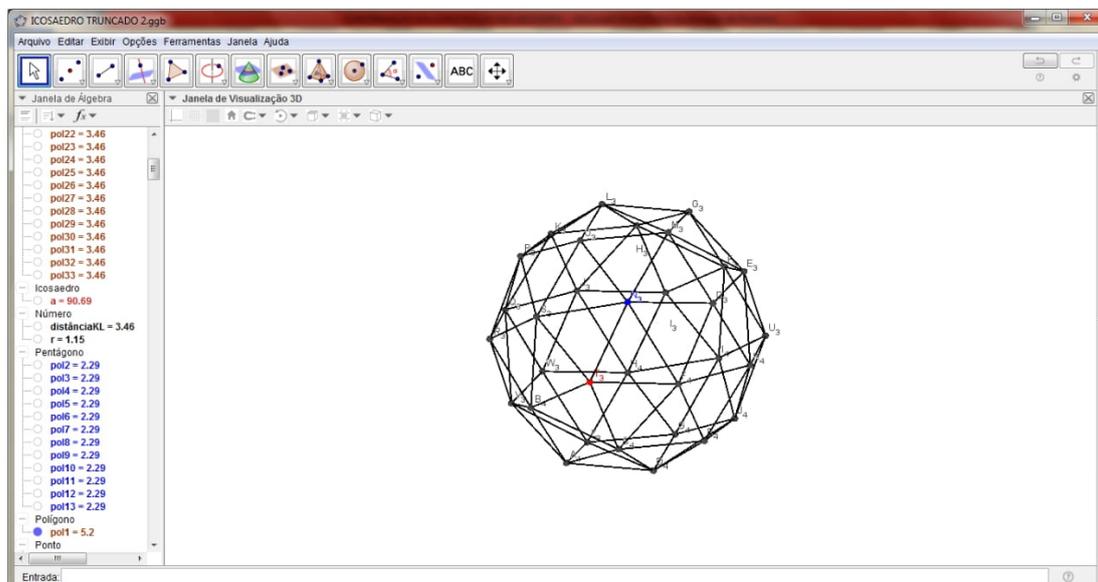
Figura 5.21 - Segmentos de reta devidamente traçados



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Agora, devemos ir até a janela de álgebra e desmarcar todos os pentágonos e hexágonos regulares, para que o dodecaedro pentakis fique em evidência. Note que nos vértices destacados em vermelho e azul, respectivamente, concorrem 5 e 6 arestas, quantidades que coincidem exatamente com a natureza das faces do icosaedro truncado.

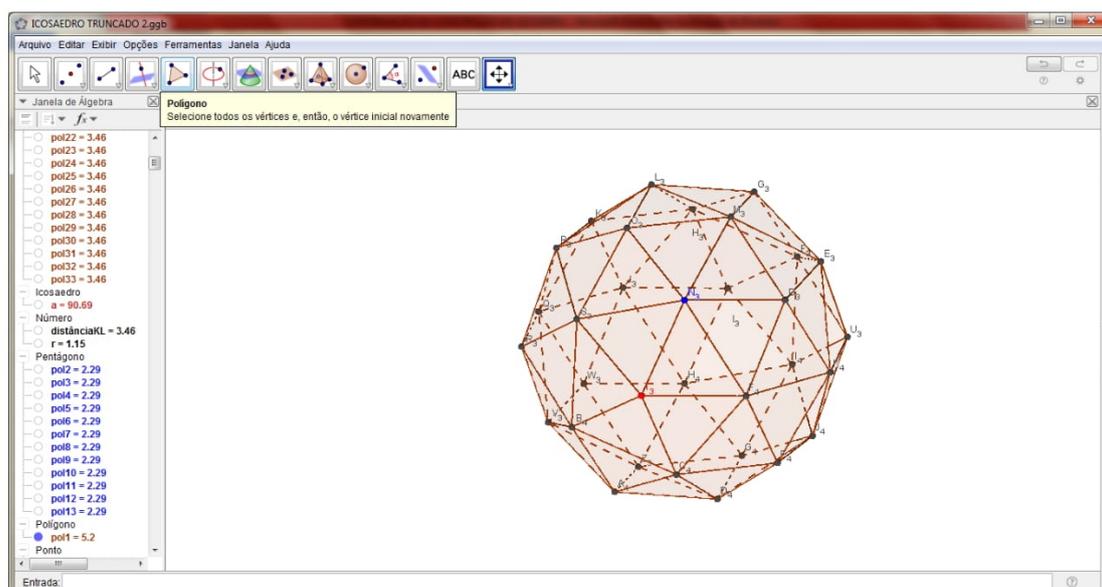
Figura 5.22 - Dodecaedro pentakis em evidência



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Utilizando a opção “polígono”, podemos realçar cada uma das 60 faces do nosso poliedro, as quais são triângulos isósceles.

Figura 5.23 - Faces do dodecaedro pentakis realçadas

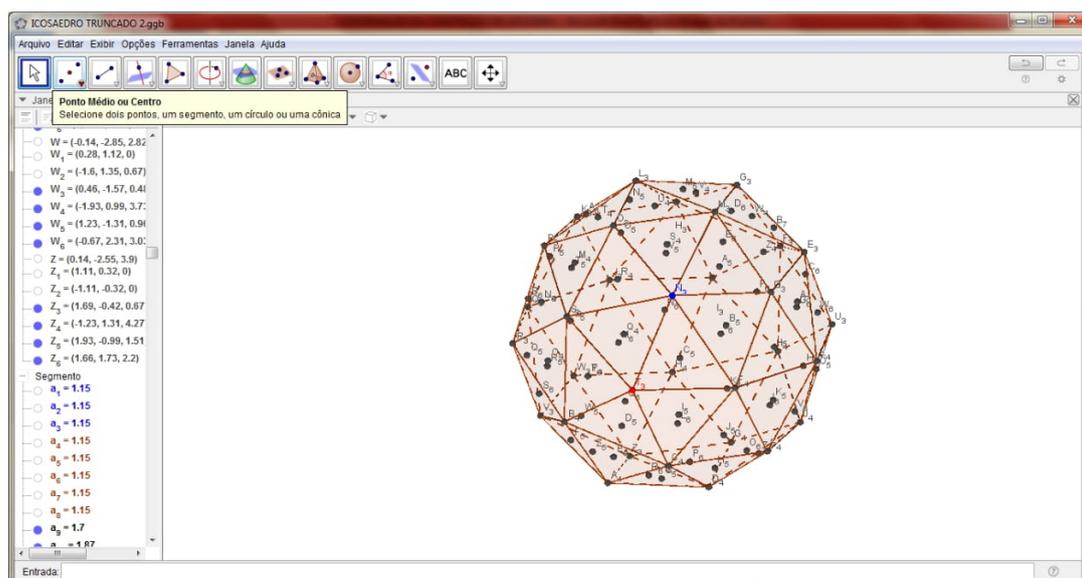


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Neste caso, conseguimos obter uma figura que de fato é um poliedro, o que nos diz que é possível inscrevermos o dodecaedro pentakis no icosaedro truncado. Agora, vamos mostrar que a inscrição contrária também é possível.

Para tanto, devemos considerar os centros das faces do dodecaedro pentakis da mesma maneira que fizemos com o icosaedro truncado outrora.

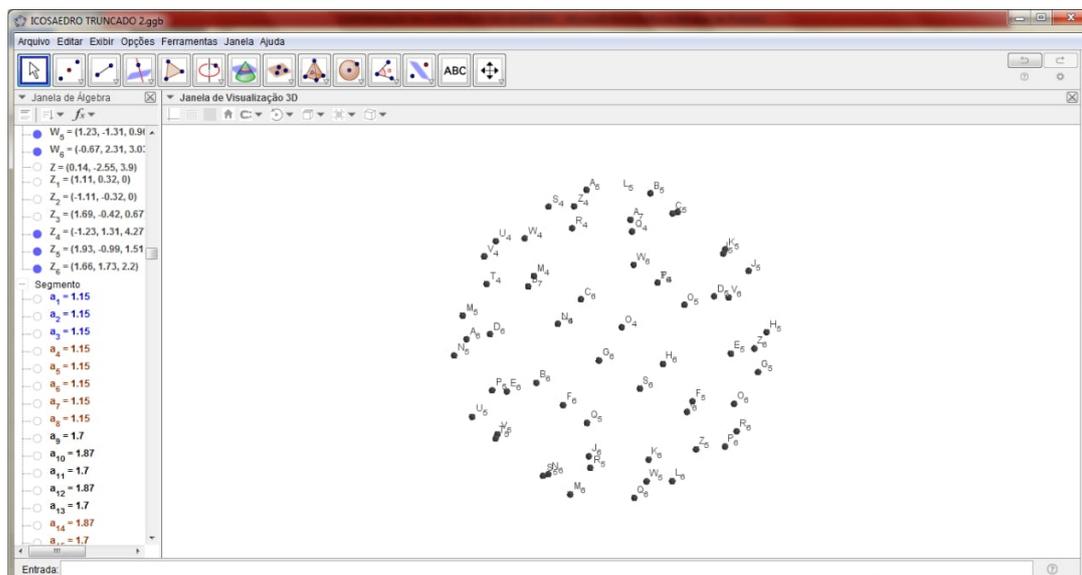
Figura 5.24 - Todos os centros das faces do dodecaedro pentakis marcados



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Podemos “despoluir o ambiente” omitindo as faces (juntamente com as arestas) do dodecaedro pentakis, bem como os seus vértices. Para tal, devemos acessar a janela de álgebra e desmarcar todas as faces triangulares. Além disso, precisamos selecionar cada um dos seus vértices e clicar na opção “exibir objeto”. Após isso, ficaremos com o seguinte:

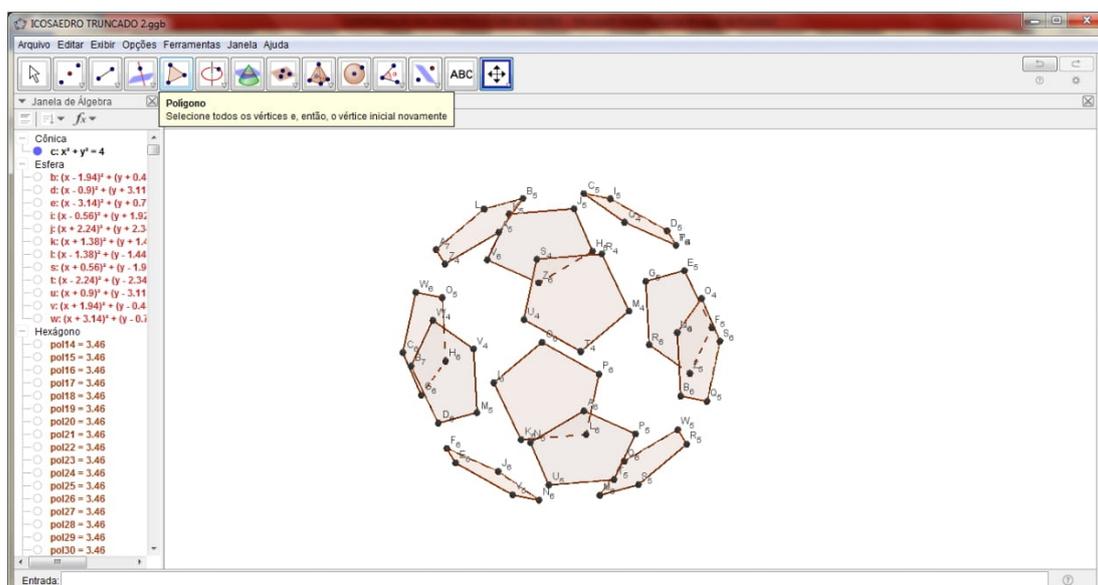
Figura 5.25 - Todos os vértices do dodecaedro pentakis marcados



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Novamente, usemos a ferramenta “polígono” a fim de fomentarmos todas as faces do poliedro dual do dodecaedro pentakis. Para uma melhor compreensão, inicialmente construímos as faces pentagonais, conforme figura a seguir.

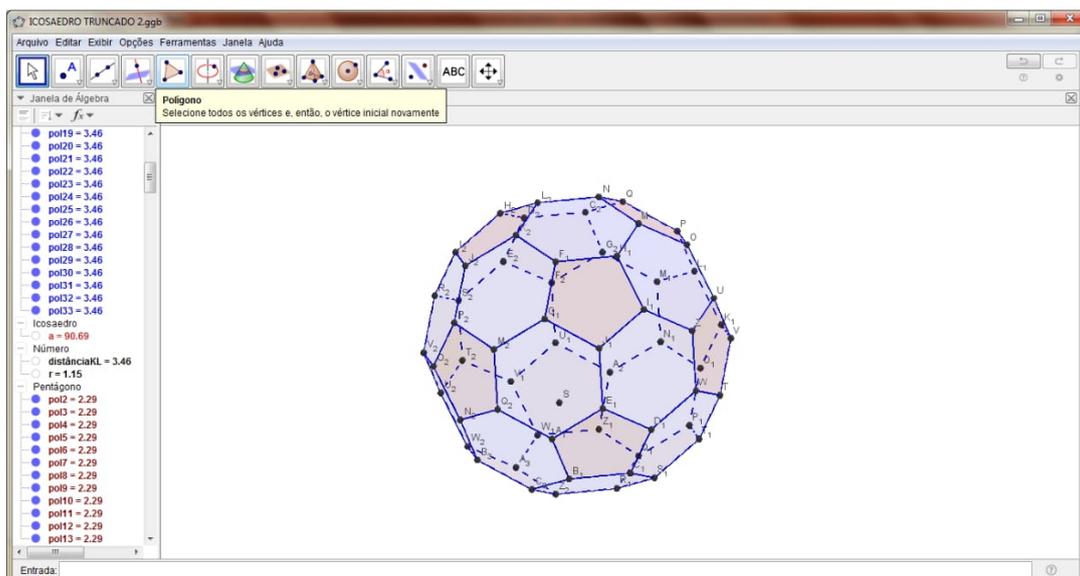
Figura 5.26 - Faces pentagonais traçadas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Finalmente, é suficiente construirmos as faces hexagonais do nosso poliedro utilizando essa mesma última ferramenta. Destaquemos de azul a essas faces. Dessa forma, observamos o surgimento do nosso icosaedro truncado, o que comprova a inscrição que restava, isto é, a inscrição desse poliedro no dodecaedro pentakis.

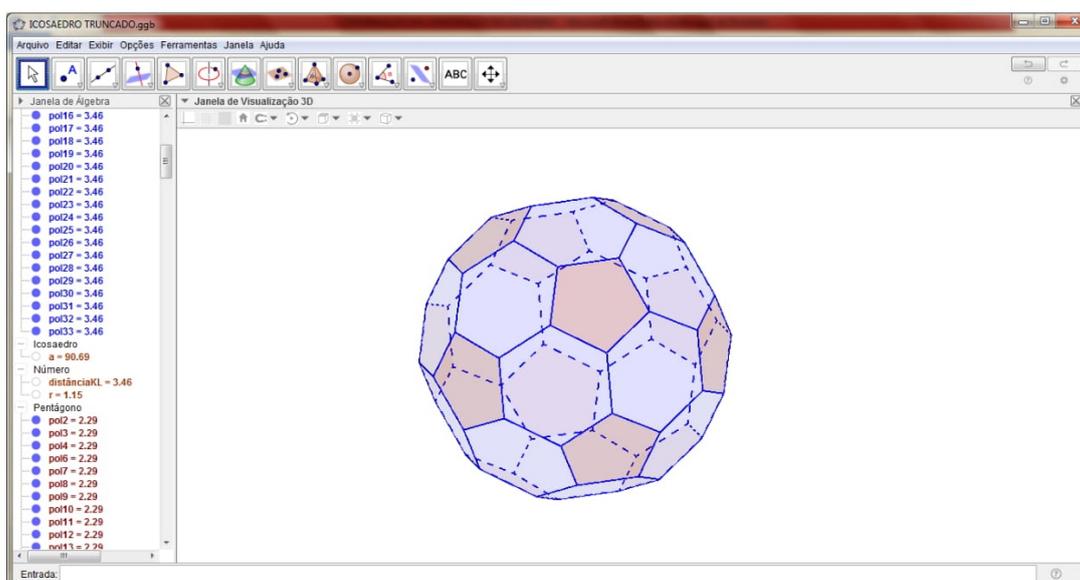
Figura 5.27 - Faces hexagonais traçadas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Ainda podemos “limpar” o icosaedro truncado, realizando os mesmos procedimentos destacados para obtermos a figura 5.18.

Figura 5.28 - Icosaedro truncado “limpo”



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

É inevitável não nos indagarmos sobre o motivo pelo qual foi possível realizarmos a inscrição do dodecaedro pentakis, que é um sólido catalaniense, no icosaedro truncado, que é um sólido arquimediano, haja vista que constatamos uma inconsistência na inscrição do dodecaedro rômbo no cuboctaedro, segundo a figura 2.53. A explicação para esse fato é bastante simples: as faces do dodecaedro pentakis são triângulos, o que impossibilita a não coplanaridade entre os centros das faces adjacentes do icosaedro truncado, diferentemente do que ocorreu no outro caso descrito.

O GeoGebra ainda nos permite animar o objeto. Essa pode ser uma ferramenta interessante para uma melhor visualização dos elementos do poliedro estudado. Em nosso caso, no estudo dos poliedros, a contagem do número de faces, vértices e arestas do sólido pode ser facilitada com o uso dessa ferramenta.

Vamos entender um pouco sobre algumas das mais conhecidas aplicações do icosaedro truncado. A primeira consiste em ser a figura geométrica que deu origem à bola de futebol usada na Copa do Mundo do México, em 1970. Essa bola tinha sua superfície constituída apenas por pentágonos e hexágonos regulares. Quando cheia de ar, a bola passava a ter um formato esférico, pois suas faces eram mais flexíveis. A partir de então, a maioria das bolas utilizadas em jogos oficiais de futebol têm exatamente essa forma. Outra aplicação bastante relevante do icosaedro truncado consiste em ser a representação geométrica da famosa molécula de fulereno, a terceira forma mais estável do carbono, após o grafite e o diamante. A descoberta dessa molécula é recente, dada apenas em 1985. Os fulerenos são moléculas formadas por 60 átomos de carbono, quantidade que coincide exatamente com a quantidade de vértices do icosaedro truncado. Devido à sua forma tridimensional, essas moléculas apresentam propriedades físicas e químicas bem particulares, fazendo com que elas tenham grande importância para a bioquímica e a medicina. Sua disponibilidade na natureza é bastante reduzida.