UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JORGE DE LIMA ASSIS

ENSINO DE PROBABILIDADE: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

CAMPINA GRANDE - PB
2018

JORGE DE LIMA ASSIS

ENSINO DE PROBABILIDADE: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo

CAMPINA GRANDE – PB

2018

A848e Assis, Jorge de Lima.
Ensino de Probabilidade [manuscrito] : Análise de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental / Jorge de Lima Assis. - 2018.
129 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ens. de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo , Departamento de Matemática e Estatística - CCT."

1. Educação Matemática. 2. Ensino de Probabilidade. 3. Pensamento probabilístico. I. Título

21. ed. CDD 519.2

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

JORGE DE LIMA ASSIS

ENSINO DE PROBABILIDADE: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovado em 07/05/2018

Profa. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo

Orientadora - DM/CCEN/UFPB

Profa. Dra. Jaqueline A. Foratto Lixandrão Santos (Avaliadora Externa)

UFCG

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Avaliador Interno)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família, em especial, ao meu pai, minha mãe, meu avô e ao meu padrinho (*in memoriam*), minha tia e minha avó, bem como aqueles que contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento desta obra.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida que me proporcionou, pois sem Ele eu não seria nada.

Aos meus pais, que sempre acreditaram em mim e foram essenciais para minha evolução nos estudos.

Aos meus avós, pela motivação e contribuição na minha criação familiar, os quais foram os maiores responsáveis pela minha formação pessoal.

A minha Tia, que se dedicou incansavelmente nos cuidados familiares e culturais da minha formação pessoal e escolar.

Ao meu primo Rômulo, que muito contribuiu com seu conhecimento de informática.

Ao amigo e professor Adriano, o qual contribuiu bastante com o desenvolvimento deste trabalho.

Ao amigo e professor Sandro, por sempre me incentivar a seguir em frente.

Ao amigo e professor Luiz Antônio, que muito me ajudou durante os estudos do Mestrado.

A amiga Maria da Luz, pelas palavras de motivação e ao amigo Willamy, que sempre me incentivou.

A minha professora orientadora Rogéria, que foi essencial para o desenvolvimento desse trabalho, e aos demais professores do Mestrado, que contribuíram para o meu desempenho e conclusão desta obra.

E a todos aqueles que contribuíram direta e indiretamente para o desenvolvimento desse trabalho.

Acreditamos que os desafios existem e com eles nascem os vencedores. Sandro Onofre Cavalcante

RESUMO

A presente pesquisa insere-se em uma perspectiva qualitativa, de natureza bibliográfica, tendo como recorte o ensino de Probabilidade nos quatro anos finais do Ensino Fundamental. Foi desenvolvido em uma visão analítica e crítica, tendo como objetivo geral analisar uma proposta de ensino de elementos da Teoria das Probabilidades, considerando os diferentes modelos teóricos a ela vinculados, em trabalhos de pesquisadores que tratam do tema, bem como as recomendações presentes em documentos oficiais, relativas ao conteúdo destacado, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular. Com base na análise dos quatro livros da coleção, ressaltamos, como aspectos negativos da proposta sob análise a pouca proposição de atividades experimentais; ausência de explicações de elementos básicos da teoria; pouca variedade de contextos exploratórios do conteúdo, com prevalência do uso de dados, moedas, baralho e urnas com bolas; e predominância do significado Clássico de Probabilidade, na maioria das atividades propostas. Destacamos como sendo um aspecto positivo o fato de a coleção de livros didáticos de Matemática por nós analisada abordar o conteúdo de Probabilidade em todos os volumes direcionados aos quatros anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º Anos). Com base nos resultados de nossa análise elaboramos recomendações gerais que entendemos auxiliarem o ensino de elementos da Teoria das Probabilidades nos quatro anos finais do Ensino Fundamental, independentemente da coleção de Matemática que seja adotada na escola.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade; Pensamento probabilístico; Matemática no Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The present research is inserted in a qualitative perspective, of bibliographic nature, having as a cutback the teaching of Probability in the final four years of Elementary School. It was developed in an analytical and critical view, with the general aim of analyzing a proposal of teaching elements of Probability Theory, considering the different theoretical models linked to it, in the works of researchers that deal with the subject, as well as the recommendations present in documents related content, such as the National Curricular Parameters and the Curricular Common National Base. Based on the analysis of the four books of the collection, we emphasize, as negative aspects of the proposal under analysis the little proposition of experimental activities; absence of explanations of basic elements of theory; little variety of exploratory contexts of content, with prevalence of data use, coins, playing cards and ballot boxes; and predominance of the Classic meaning of Probability, in most of the proposed activities. We highlight as a positive aspect the fact that the collection of Mathematics textbooks analyzed by us addresses the content of Probability in all volumes directed to the final four years of Elementary School (Grade 6 to Grade 9). Based on the results of our analysis we have elaborated general recommendations that we intend to assist in teaching elements of Probability Theory in the final four years of elementary school, regardless of the Mathematics collection textbooks adopted at school.

Keywords**:** Probability Teaching; Probabilistic thinking; Mathematics in Elementary School.

SUMÁRIO

1. SITUANDO NOSSA TEMÁTICA 9
1.1. UMA BREVE JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DE NOSSA TEMÁTICA.........10
1. 2. OBJETIVOS DA PESQUISA..12
1.2.1 OBJETIVO GERAL...12
1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS..12
1.3. METODOLOGIA DA PESQUISA..12
1.4. CRITÉRIOS DE ANÁLISE 12
1.5. ESTRUTURA DE NOSSO TRABALHO 12
2. DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO PROBABILÍSTRICO 15
2.1 CONCEPÇÕES SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADE........................15
2.2. BREVE DISCUSSÃO SOBRE O PENSAMENTO PROBABILÍSTICO EM DOCUMENTOS OFICIAIS 28
2.3 SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE 32
2.4 ALGUMAS INVESTIGAÇÕES SOBRE A TEMÁTICA DE NOSSA PESQUISA...35
3.1. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA 40
3.2. PESQUISAS QUE RELACIONAM PROBABILIDADE E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 45
4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DA PROPOSTA DE ENSINO DE PROBABILIDADE EM UMA COLEÇÃO DIDÁTICA DE MATEMÁTICA...50
4.1. ANÁLISE DO CAPÍTULO 8 DO LIVRO DO 6º ANO...50
4.2. ANÁLISE DO CAPÍTULO 8 DO LIVRO DO 7º ANO..66
4.3. ANÁLISE DO CAPÍTULO 9 DO LIVRO DO 8º ANO..89
4.4. ANÁLISE DO CAPÍTULO 5 DO LIVRO DO 9º ANO......................................103
4.5. SÍNTESE DA ANÁLISE E RECOMENDAÇÕES...1034
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 119
REFERÊNCIAS 122

1. SITUANDO NOSSA TEMÁTICA

1.1 UMA BREVE JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DE NOSSA TEMÁTICA

O direcionamento de nosso trabalho de investigação no campo da Educação Matemática se baseia em duas justificativas. A primeira delas considera a escolha do conteúdo Teoria das Probabilidades, que tradicionalmente é abordado com maior frequência no Ensino Médio, ignorando as sugestões de documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), que, embora não tivessem força de lei, têm orientado muitas ações educacionais no país, desde sua publicação.

No bloco intitulado Tratamento da Informação, o documento recomenda que sejam desenvolvidas atividades de formação do pensamento probabilístico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo em vista a construção/formação cidadã e profissional dos alunos, como veremos em detalhes, adiante.

Já a segunda justificativa, respaldada/corroborada pelos PCN, visa justificar a adoção da Resolução de Problemas como uma metodologia alternativa ao ensino tradicional, focado na transmissão de conhecimentos prontos e acabados, e centralizado na atividade do professor. Predomina, ainda, em nossas escolas a valorização da memorização de respostas a questões padrão, que não colaboram para o pleno desenvolvimento intelectual dos estudantes, limitando seu raciocínio lógico e seu senso crítico.

Na perspectiva atual, em geral, estão ausentes da sala de aula condições/situações favoráveis que estimulem os alunos a perguntarem e se questionarem, enfatizando-se a memorização de fórmulas despidas de sentido pessoal para eles. Retira-se ainda, a relevância e o valor historicamente construído do conteúdo ensinado, que passa a ser desenvolvido com pouca ou nenhuma utilidade aplicacional no cotidiano ou a outras áreas de conhecimento.

Para superar essas limitações, os PCN (BRASIL, 1998) sugerem o uso da Resolução de Problemas como metodologia para o ensino de Matemática, em oposição à forma de ensino mencionada. A partir da implementação desta metodologia em sala de aula, o professor poderá desenvolver um processo de ensino e aprendizagem de Matemática, eivado de sentido para os alunos.

Nessa direção, enfatiza-se a necessidade de que os alunos se tornem sujeitos ativos e autônomos na elaboração de meios, estratégias e técnicas que viabilizem a construção do seu próprio conhecimento matemático. Cabe ao professor valorizar os diferentes caminhos tomados pelos alunos em seu processo de aprendizagem e de descobertas, mediante a aplicação de ideias embasadas em um raciocínio livre, mas por ele mediado e encorajado.

Alguns conteúdos matemáticos são privilegiados, em termos de possibilidades de associação direta a situações do cotidiano ou a outros campos de conhecimento. A Teoria das Probabilidades é um campo de estudo muito importante para a compreensão da Matemática e da realidade, sendo um ramo que tem como base teórica os conceitos probabilísticos relacionados aos experimentos aleatórios.

Acaso, incerteza, aleatoriedade, sorte, azar, evento e espaço amostral são muito comuns em seu estudo e bastante recorrentes em nosso dia a dia, pois estão associados aos fenômenos naturais e sociais. Conforme os PCN (BRASIL, 1998), o principal objetivo desta teoria é mostrar aos alunos que os experimentos aleatórios fazem parte do contexto social e que é possível prever com um certo grau de incerteza o seu resultado.

Os PCN (BRASIL, 1998, p.90) recomendam, quanto ao ensino de Probabilidade, a “[E]laboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas”. Assim, entendemos que o processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade deve ocorrer mediante a implementação/construção de atividades práticas/problemas de forma que os alunos vivenciem situações pedagógicas que possibilitem o desenvolvimento do seu pensamento probabilístico.

É preciso confrontá-los com situações que requeiram a previsão de acontecimentos e fenômenos naturais e sociais presentes no cotidiano, capacitando-os para que exerçam influência nas esferas profissional, econômica, social e política do seu país. Trataremos, em nosso estudo, da Teoria das Probabilidades, discutindo a importância de os alunos desenvolverem o pensamento probabilístico, o qual é essencial para que estes exerçam a sua cidadania, tanto na perspectiva pessoal quanto profissional, uma vez que a nossa sociedade é cada vez mais dinâmica e tecnológica, demandando dos alunos capacidade de adaptação e de tomada rápida de decisões.

Com o propósito de investigarmos o processo de ensino e aprendizagem da Teoria das Probabilidades através da Resolução, da Exploração e da Proposição de Problemas, tomamos como base para nossa pesquisa, a seguinte indagação: *Como podemos promover o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos do Ensino Fundamental com foco na Resolução, Exploração e Proposição de Problemas?*

1. 2. OBJETIVOS DA PESQUISA

Considerando a questão de investigação apresentada, delimitamos o Objetivo central de nosso trabalho.

1.2.1 OBJETIVO GERAL:

Analisar uma proposta de ensino de elementos da Teoria das Probabilidades, considerando os diferentes modelos teóricos a ela vinculados.

Para materializarmos nosso Objetivo Geral, traçamos uma sequência de ações, elencadas em nossos Objetivos Específicos.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Levantar os tópicos relativos ao ensino de elementos da Teoria das Probabilidades, presentes em uma coleção de Livros Didáticos dirigida aos quatro anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º Anos);
- Avaliar os tópicos levantados considerando os diferentes modelos teóricos relativos à Teoria das Probabilidades e as recomendações de documentos oficiais;
- Identificar os elementos básicos recomendados para o ensino de Probabilidade na Educação Básica, considerando a avaliação da coleção de Livros Didáticos de Matemática.

Como resultado da pesquisa, elaboramos um roteiro de orientações gerais sobre o Ensino de Probabilidade, dirigido a professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental, em particular na etapa compreendida entre o 6º e 9º Anos.

1.3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Quanto à abordagem, nossa pesquisa situa-se em uma perspectiva qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. Para D'Ambrosio (2006, p.10), a pesquisa qualitativa, também chamada pesquisa naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos diversos de participantes.

Como destacam Gerhardt e Silveira (2007), "[A] pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais". Suas características centrais são:

> [...] objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências. (GERHARDT e SILVEIRA, 2007, p.32)

Em particular, buscamos estruturar nossa investigação considerando o diálogo entre os elementos básicos que adotamos em nossa fundamentação teórica e os resultados obtidos em nossos dados empíricos, em uma perspectiva analítica e crítica, visando promover uma reflexão sobre a temática que proporcionasse contribuições para a área de Educação Matemática.

Quanto à natureza, nosso estudo se estrutura como uma pesquisa aplicada, uma vez que "[O]bjetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos" (GERHARDT e SILVEIRA, 2007, p.32), no caso, proporcionar contribuições para as discussões sobre a melhoria do ensino do conteúdo Teoria das Probabilidades.

Em razão da natureza dos objetivos que delimitamos para nossa investigação, ela se caracteriza como uma pesquisa exploratória, uma vez que visamos obter uma maior aproximação com a temática, buscando contribuir para torná-la mais explícita e passível de ser submetida ao levantamento de hipóteses.

Em particular, nossa pesquisa pode ser classificada como sendo bibliográfica (GIL, 2007), tendo como foco a análise de Livros Didáticos de Matemática.

Como afirma Fonseca (2002), a pesquisa bibliográfica se baseia em referência bibliográficas que já se tornaram públicas, como livros, revistas, artigos científicos ou outras fontes textuais, “[...] com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta” (FONSECA, 2002, p. 32).

A investigação foi desenvolvida com base em uma coleção de Livros Didáticos de Matemática dirigida aos quatro anos finais do Ensino Fundamental, tendo como critério para sua escolha o fato de serem as únicas coleções utilizadas nas duas escolas que oferecem o Ensino Fundamental no município onde reside o autor desta pesquisa.

1.4 CRITÉRIOS DE ANÁLISE

Os critérios que foram utilizados na análise da coleção de livros didáticos serão indicados no final do próximo Capítulo, após a exposição de alguns aspectos considerados em nossa investigação, relativos aos diferentes significados da Probabilidade; às ideias fundamentais que permeiam esse conceito e às orientações presentes em documentos oficiais brasileiros.

1.5 ESTRUTURA DE NOSSO TRABALHO

O presente texto está estruturado em três Capítulos, sendo o primeiro deles dirigido à uma breve apresentação de nossa temática; de nossos objetivos e da Metodologia de nossa pesquisa,

O segundo Capítulo foi reservado para a apresentação dos elementos teórico que fundamentaram nossa investigação, considerando, em especial, as contribuições de autores que se dedicaram especificamente ao estudo da Teoria das Probabilidades e seu ensino, bem como um breve recorte acerca do ensino de Probabilidade em documentos oficiais.

No terceiro Capítulo trazemos o resultado de nossa análise da proposta de uma coleção de livros didáticos de Matemática dirigida aos quatro anos finais do

Ensino Fundamental, tendo como fundamento os elementos teóricos delimitados no Capítulo anterior.

Encerramos o texto com nossas Considerações Finais, destacando o delineamento de futuros trabalhos de pesquisa que surgiram ao longo de nosso estudo, na busca de respostas para nossos questionamentos iniciais.

2. O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO PROBABILÍSTICO

2.1 CONCEPÇÕES SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADE

A Probabilidade, como muitos outros conceitos matemáticos, possui mais de um significado e, para compreendermos sua amplitude, precisamos conhecer os diferentes significados que podem ser a ele associados. Em razão da natureza de nossa pesquisa, interessa-nos, ainda, discutir a importância do conceito destacado e o lugar dos diferentes significados da Probabilidade no ensino desse conteúdo na Educação Básica, fazendo um recorte para o Ensino Fundamental.

Em nosso texto trataremos de sete significados distintos relativos ao conceito de Probabilidade, tratados por Batanero e Díaz (2007): Intuitivo; Clássico; Frequentista; da Propensão; Subjetivo; Axiomático e Lógico. Batanero (2005), citando Perrez-Echeverría (1990), reforça que essa distinção seria um reflexo das diferentes concepções que surgem quando da resolução de problemas de Probabilidade e ajudariam a entender as dificuldades que ocorrem nesse processo.

Discutimos esses diferentes significados, destacando suas características centrais, embora tenhamos considerado apenas alguns deles na análise da coleção didática de Matemática do Ensino Fundamental, em razão do nível de escolaridade ao qual ela é dirigida. Somados às características dos significados de Probabilidade que assumimos como centrais na fase de análise, consideramos as orientações de documentos oficiais dirigidos ao Ensino Fundamental (PCN e BNCC), relativas ao desenvolvimento do pensamento probabilístico.

O primeiro significado, o Intuitivo, aborda o conceito de Probabilidade sob uma perspectiva puramente qualitativa. Como exemplo desta concepção probabilística, temos a utilização de expressões como “é pouco provável”, para nos referirmos à probabilidade de um evento ocorrer, quando esta é muito pequena, ou “é muito provável”, para qualificar a probabilidade de ocorrência de um evento quando esta é muito alta.

Estes são apenas alguns exemplos da utilização de expressões que podem ser utilizadas como ferramentas/recursos linguísticos que buscam expressar qualitativamente a probabilidade de ocorrência de um determinado evento para uma criança que está iniciando os estudos sobre Probabilidade. Neste caso, Van de

Walle (2009), sugere o desenvolvimento de atividades que envolvam a ideia de Probabilidade como uma quantidade contínua, como a classificação de eventos, pelas crianças, como Certos, possíveis ou Impossíveis, justificando suas escolhas.

"A ideia básica de desenvolver o conceito de chance ou probabilidade como uma quantidade contínua é ajudar as crianças a perceber que alguns desses possíveis eventos são mais ou menos prováveis do que outros" (VAN DE WALLE, 2009, p.510). Para refinar essa ideia, o autor sugere a proposição de atividades que explorem a classificação de eventos indo do impossível ao certo, com roletas ou outros dispositivos.

O modelo Intuitivo está intimamente relacionado com as preferências do indivíduo. Para Van de Walle (2009), esta noção intuitiva de probabilidade leva a criança, baseada unicamente na sua intuição ou até mesmo na sua afetividade/simpatia para com um determinado evento, a afirmar prévia e categoricamente que este irá ocorrer com certeza absoluta, no próximo experimento aleatório, justamente pelo fato de aquele evento ter um significado especial para aquela criança.

Para trabalhar essa problemática, Van de Walle (2009) sugere o desenvolvimento de atividades em sala de aula que envolvam situações cotidianas para os alunos e que os levem a começar a desenvolver, por meio do julgamento de sentenças, o significado probabilístico de um evento, em uma escala contínua. Busca-se, com base no Modelo Intuitivo, expressar qualitativamente/linguisticamente a probabilidade de um evento ocorrer, a partir de uma leitura intuitiva de acaso, despido de qualquer formalismo matemático. Limita-se meramente a qualificar o conceito/ideia de Probabilidade, sem representar suas chances numericamente.

Na análise que fizemos dos PCN e da BNCC, recomenda-se que o trabalho com Probabilidade seja iniciado explorando-se as ideias intuitivas dos estudantes sobre as chances de um determinado evento ocorrer, associando a ele termos como "é possível", "é impossível", ou outros.

O segundo significado, denominado de Probabilidade Clássica ou Laplaciana, envolve a conceituação da Probabilidade com base no rigor científico e matemático, de acordo com Batanero et al. (2016). Neste modelo, a probabilidade de ocorrência de um evento é entendida como a razão entre o número de resultados favoráveis à ocorrência do evento estudado e o número de todos os resultados possíveis produzidos pelo experimento considerado aleatório.

A Probabilidade Clássica tem a sua validade limitada a duas condições, a saber, a finitude do Espaço Amostral e a equiprobabilidade dos seus eventos. De acordo com Morgado et al. (2204):

> [...] a definição de probabilidade como quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra Liber de Ludo Aleae de Jerônimo Cardano (1501-1576)" (MORGADO et al., 2004, p. 119).

Com esse significado restringe-se o âmbito de aplicação da Teoria das Probabilidades, uma vez que ele se aplica apenas a eventos equiprováveis, isto é, a experimentos aleatórios onde todos os eventos possíveis são simétricos, com espaço amostral finito. Esse modelo não se aplica a experimentos que têm infinitas possibilidades, ou seja, é relativo a uma variável contínua, ou não é equiprovável e, desse modo, há poucas situações em que ele se aplicaria para além das situações envolvendo jogos de azar (BATANERO, HENRY e PARZYSZ, 2005).

É um significado predominantemente teórico, onde o indivíduo que deseja calcular a probabilidade de um determinado evento precisa conhecer, de antemão, todos os resultados possíveis, isto é, o espaço amostral associado a um experimento aleatório em questão. Portanto, é *a priori*, já que a sua sistematização teórica não se fundamenta em práticas/observações experimentais, mas em um conhecimento prévio do número de eventos favoráveis e do número de eventos possíveis do experimento aleatório, como afirma Van de Walle (2009).

O terceiro significado, denominado de Frequentista, é de base experimental e, portanto, definido *a posteriori*. Nessa perspectiva, o cálculo da probabilidade de um evento se fundamenta na observação experimental e por meio de simulações. A sistematização teórica do conceito de Probabilidade é extraída a partir da frequência observável de um determinado evento, materializada no número regular de sua ocorrência, à medida em que ele se repete várias vezes, sob as mesmas condições experimentais (BATANERO, 2005).

Assim, este significado de Probabilidade não pode ser utilizado para o estudo de fenômenos raros ou que não se repetem. Além disso, deixa margem para algumas problemáticas, tais como a necessidade de se estabelecer um exato número de vezes para se repetir um determinado experimento aleatório, ou, pelo menos, um número de repetições razoáveis, para que não se obtenha conclusões precipitadas e equivocadas quando se calcula sua probabilidade.

A esse respeito, Torres, Contrera e Batanero (2015) destacam o que constituiriam limitações do significado Frequentista: o valor obtido da Probabilidade não é exato, mas uma aproximação; não há como determinar o número exato de experimentos que se precisaria realizar para que a estimativa possa ser aceita; e em muitos casos não é possível reproduzir com exatidão as condições do experimento, o que comprometeria a medição da Probabilidade.

Os autores ressaltam, ainda, que outra limitação é o fato desse significado não poder ser aplicado a fenômenos de natureza histórica ou econômica, por exemplo, o seguro de um carro, que não se repetem, dada a sua natureza. Defendem, porém, sua vantagem didática, na medida em que ele possibilita a ligação entre Estatística e Probabilidade. Essa conexão se materializaria por meio da Lei dos Grandes Números, segundo a qual à medida que se aumenta o número de repetições de um mesmo experimento aleatório, submetidas às mesmas condições, mais a frequência relativa do evento que se deseja calcular a probabilidade se aproxima da sua probabilidade teórica.

Para Van de Walle (2009), a Lei dos Grandes Números garante uma maior representatividade aos dados colhidos e utilizados no cálculo da probabilidade experimental, proporcionando maior confiabilidade aos estudos probabilísticos e mais confiança aos pesquisadores/professores/estudantes em suas predições/projeções ao longo do desenvolvimento dos experimentos.

O autor destaca que

> [P]ensando em estatísticas, uma pesquisa com 1.000 pessoas fornece mais confiança e dados mais convincentes sobre a população do que uma pesquisa com apenas 5 pessoas. Quanto maior o número de testes (pessoas entrevistadas), mais confiante você pode estar de que os dados reflitam a população maior. O mesmo é verdadeiro quando você determinar a probabilidade de um evento através da coleta de dados. (VAN DE WALLE, 2009, p.515).

Do ponto de vista didático, Van de Walle lembra que para compararem frações em uma experiência probabilística, os estudantes precisariam compreender o raciocínio proporcional correspondente, o que nem sempre é fácil. Como exemplo, argumenta: “[...] como 3 entre 7 se compara a 250 entre 1.000?” (VAN DE WALLE, 2009, p.515), e, como sugestão para superação dessa dificuldade, sugere que sejam propostas comparações visuais, com base em retas numéricas.

O significado da Propensão corresponderia à tendência de um sistema aleatório se comportar de determinada maneira. O estudo da Teoria das Probabilidades a partir da concepção baseada no significado da Propensão nos dá uma visão a priori acerca de um sistema probabilístico. Com base neste significado, um valor probabilístico não deve ser interpretado necessariamente como sendo a probabilidade de ocorrência de um evento qualquer no lançamento, por exemplo, de um dado, isto é, do evento propriamente dito, mas deve ser compreendido como sendo uma expressão em termos de probabilidade de uma propriedade que caracteriza um dispositivo experimental em um experimento aleatório, segundo (LOPES & SOUZA, 2016).

Ainda conforme estes autores, o valor de uma propensão não pode ser empiricamente demonstrado ou obtido, dando margem para uma interpretação acerca de um valor de probabilidade que se afasta de uma perspectiva objetiva.

Batanero e Díaz trazem o seguinte exemplo, para ilustrar esse significado: "[1][...] a fair die has an *extremely strong* tendency (propensity) to produce a 5 with long run relative frequency of 1/6. The probability value 1/6 is small, so it does *not* measure this strong tendency". Esse significado expressaria a dificuldade de se tratar um evento quando se pressupõe uma uniformidade que seria muito difícil de testar, seja a priori ou empíricamente.

No caso do significado Lógico de Probabilidade, Batanero e Díaz (2007) afirmam que ele definiria a Probabilidade como sendo o grau de implicação que seria definido com base em alguma evidência E para uma hipótese H, dada. Para isso, utilizaríamos a lógica dedutiva na definição dessa relação, tomando as situações extremas de implicação e impossibilidade com graus 1 e 0, respectivamente.

Citando Keynes (1921, in BATANERO; DÍAZ, 2007), as autoras informam que ele representava a certeza e a impossibilidade como 1 e 0, respectivamente, e outros graus de probabilidade estariam situados dentre desses limites. Como a certeza poderia ser associada à implicação e a impossibilidade à incompatibilidade,

[1] Um dado justo tem uma tendência extremamente forte (propensão) para produzir um número 5 com uma frequência relativa de longo prazo igual a 1/6. O valor de probabilidade 1/6 é pequeno, portanto, não reflete essa tendência extremamente forte

casos extremos da escala, a Lógica Dedutiva seria amplificada, caso consideremos esse significado. Assim, *o grau de confirmação* dependeria das propriedades tanto lógicas quanto semânticas das relações entre evidência e hipótese, que estariam explicitadas em alguma linguagem formal específica.

Batanero e Díaz, citando Carnap, afirmam que "[2]The degree of confirmation of one hypothesis *H*, given some evidence *E*, depends entirely on the logical and semantic properties of and relations between *H* and *E*, and therefore it is only defined for the particular formal language in which these relations are made explicit. This degree of confirmation is just the conditional probability of *H* given *E* and allows inductive learning from experience" (BATANERO; DÍAZ, 2007, p.114).

O significado Lógico retém, segundo Batanero e Díaz (2007), a ideia Clássica de que a probabilidade pode ser determinada *a priori,* examinando-se o espaço de possibilidades, podendo-se, neste caso, atribuir-se pesos desiguais às possibilidades. De acordo com essas autoras, nessa abordagem a probabilidade seria definida como um *grau de implicação* ou *confirmação*, que corresponderia ao suporte dado por uma evidência E a uma hipótese H.

Batanero e Díaz (2006) observam que o principal problema no uso desse significado é que existiriam várias funções para a determinação desse grau *de confirmação* dependendo das escolhas feitas para a linguagem na qual evidência e hipótese seriam expressas e que uma mudança de linguagem poderia acarretar na invalidação de uma determinada confirmação de uma teoria. Destacam, ainda, que outro problema seria termos que ser objetivos na escolha de uma evidência E, uma vez que essa escolha pode variar de pessoa para pessoa. Neste caso, como garantir essa objetividade?

Outro modelo associado à Probabilidade é o Subjetivista, que resulta da força e da influência das crenças, das subjetividades dos indivíduos e das experiências que vão adquirindo ao longo de suas vidas. Com base neste modelo probabilístico, o indivíduo busca expressar numericamente/matematicamente a probabilidade da ocorrência de um determinado evento através de suas percepções e crenças pessoais, sendo esta uma de suas fragilidades, pois, na prática surgem muitas dificuldades na hora de se buscar uma relação matemática que traduza

---

[2] O grau de confirmação de uma hipótese H, dada alguma evidência E, depende inteiramente das propriedades lógicas e semânticas das relações entre H e E, e, portanto, só é definido para a linguagem formal particular em que essas relações são explicitadas. O grau de confirmação é apenas a probabilidade condicional de H, dado E, e permite a aprendizagem indutiva a partir da experiência

fielmente as percepções e crenças pessoais por meio de números, como afirma Batanero (2005).

Assim, o conceito de Probabilidade é elaborado e organizado pelo indivíduo a partir de uma leitura subjetiva e pessoal ancorada/firmada no seu conhecimento a respeito de um determinado fenômeno, sobre o qual se deseja calcular a probabilidade. Esse modelo probabilístico se revela profundamente relativo e mutável, uma vez que está condicionado às percepções e crenças do indivíduo, às quais naturalmente mudam o tempo todo, de modo que o indivíduo, com o passar do tempo, acaba atribuindo distintas probabilidades para um mesmo evento, como asseveram Batanero et al. (2016).

O Modelo Subjetivista normalmente é usado para calcular a probabilidade de eventos que estão associados a acontecimentos históricos, políticos e econômicos, os quais, dada a sua impossibilidade de serem repetidos no tempo e no espaço, tornam impossível buscar alguma regularidade que possa facilitar um trabalho experimental do pesquisador, em simulações que pudessem ser utilizadas, por exemplo, em sala de aula.

Esse significado de Probabilidade amplia o campo de aplicação da Teoria das Probabilidades para a Sociologia, Política, História e outras áreas, mas, dada a sua natureza, tem o seu status científico questionado, conforme declara Batanero (2005), embora seja com base nele que a intuição e as experiências podem ser encaradas como fonte de aprendizagem, em uma perspectiva formal, de acordo com Gómez (2015).

Por fim, o sétimo significado, denominado de Axiomático, Matemático, Normativo ou Objetivo de Probabilidade surge da necessidade de se ampliar o âmbito de aplicação da Teoria das Probabilidades estabelecida pelo modelo clássico e está fundamentado na Teoria dos Conjuntos (CARVALHO; OLIVEIRA, 2002). Godino, Batanero e Cañizares (1996) e Santos (2011) afirmam que, a partir de mecanismos/ferramentas/instrumentos matemáticos, este modelo possibilita calcular a Probabilidade de eventos não simétricos pertencentes a um espaço amostral infinito.

Para Carvalho e Oliveira (2002), dado um experimento aleatório, dele podemos extrair um espaço amostral E e, deste último, podemos extrair um subconjunto A constituído/referente a/de todos os sucessos/resultados favoráveis de

E. Conforme estes autores, a função P definida sobre A, será uma medida de probabilidade de E, se: 1).

Todo sucesso S∈ A corresponde um número P(S), tal que 0 < P(S) < 1; 2) A probabilidade do sucesso certo é dado por P(E)=1 e 3) A probabilidade de um sucesso impossível é dado por P(E)=0. De acordo com Batanero (2005), o significado Axiomático, de natureza estrutural, satisfaria a demanda por uma organização que é imposta pelos demais significados parciais de Probabilidade.

No Quadro 01 trazemos uma síntese dos diferentes significados da Probabilidade, destacando suas características centrais, como o campo de problemas a que cada um se aplica, dentre outros aspectos destacados por Batanero e Díaz (2007) e Batanero et al. (2016).

Quadro 01: Síntese dos significados de Probabilidade.

SIGNIFICADO	CAMPO DE PROBLEMAS	ALGORITMOS E PROCEDIMENTOS	ELEMENTOS LINGUÍSTICOS	DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES	CONCEITOS RELACIONADOS
Intuitivo	Sorteios e adivinhações.	Manuseio de jogos de azar: dados e cartas.	Linguagem ordinária	Opinião; crença; imprevisibilidade.	Sorte; destino.
Clássico	Cálculo de expectativa e risco em jogos de azar.	Combinação; proporção; Análise a priori da estrutura do experimento.	Triângulo aritmético; Lista de sucessos; Fórmulas combinatórias.	Quociente entre casos favoráveis e possíveis; Equiprobabilidade de sucesso simples.	Esperança; Equitatividade; Independência.
Frequencial	Estimativa de parâmetros em populações.	Registro de dados a posteriori; Ajuste de curvas matemáticas; Análise matemática; simulação.	Tabelas e gráficos estatísticos; Curva de densidade; Tabelas de números aleatórios; Tabelas de distribuições.	Limite das frequências relativas; Caráter objetivo baseado na evidência empírica.	Frequência relativa; Universo; Variável aleatória; Distribuição de Probabilidade.
Propensão	Situações físicas, incluindo casos únicos.	Análise *a priori* dos resultados do experimento		Disposição física ou tendência; Caráter objetivo; Aplicável a casos únicos; Relativo a condições experimentais	Propensão; Tendência causal probabilística; Frequência Virtual
Subjetivo	Melhoria do conhecimento sobre sucessos incertos, incluindo os não repetíveis.	Teorema de Beyes; Atribuição subjetiva de probabilidade.	Notação de probabilidade condicional; Gráficos de distribuições anteriores e posteriores.	Caráter subjetivo; Passível de revisão com a experiência.	Probabilidade condicional; Distribuição a priori e a posteriori.
Lógico	Ampliação	Análise *a priori* do	Linguagem	Grau objetivo de	Evidência;

	de inferências	espaço de possibilidades; Lógica Proposicional; Lógica Indutiva	Formal; Notação de probabilida de condicional	crença; Relação entre duas sentenças; Atribuição de pesos diferentes às possibilidades; Generaliza implicações; Pode ser revisto com a experiência.	Hipótese; Grau de Implicação
Axiomático	Quantificar a incerteza de resultados em experimento s aleatórios abstratos.	Teoria dos conjuntos; Álgebra de conjuntos; Teoria da Medida.	Símbolos da Teoria dos Conjuntos.	Função mensurável.	Espaço amostral; Espaço d e probabilidade;Con juntos de Borel.

Fonte: Traduzido e adaptado de Batanero e Días (2007) e Batanero et al. (2016).

Ao analisar os sete Significados de Probabilidade percebemos que apesar de serem distintos, eles apresentam algumas características em comum ou guardam algumas semelhanças entre si, com destaque para, a) (1) Significados Intuitivo, Propensão e Subjetivo: São modelos probabilísticos que abordam o estudo da Teoria das Probabilidades numa perspectiva subjetiva ou que possuem o seu caráter objetivo contestado; (2) Significados Clássico, Propensão e o Lógico: São modelos probabilísticos a priori; (3) Significados Subjetivo e o Lógico: Podem ser reformulados com a experiência; (4) Significados, Clássico, Frequentista, Lógico e o Axiomático: Possuem status científico e caráter objetivo.

Com relação as diferenças queremos salientar que, b) (1) Significados Intuitivo, Clássico, Frequentista, Propensão, Subjetivo, Lógico e Axiomático: Possuem diferentes objetos de investigação no campo das Probabilidades, baseando-se na utilização de procedimentos e algoritmos distintos. São caracterizados por definições, propriedades, elementos linguísticos e conceitos específicos, embora haja pontos de contato entre determinados modelos teóricos em alguns momentos, como já mencionamos.

Destacamos de modo específico que os Significados Intuitivo, Clássico e o Frequentista são os modelos recomendados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela Base Nacional Comum Curricular para o estudo das Probabilidades nos quatro anos finais do Ensino Fundamental.

O Significado Intuitivo não possui uma fundamentação teórica baseada em estudos científicos, de modo que se utiliza de mecanismos meramente linguísticos, influenciando-se essencialmente por crenças e superstições, onde a sorte, o azar e o destino são os agentes que determinam a ocorrência ou não dos fatos e eventos futuros do cotidiano.

Já o Significado Clássico se baseia na existência de elementos teóricos e objetivos, requerendo o prévio conhecimento científico acerca dos conceitos de evento e de espaço amostral no que diz respeito ao estudo de um fenômeno probabilístico por meio dos conceitos de evento e de espaço amostral. Não exige uma prévia observação da ocorrência ou não de eventos por meio do desenvolvimento e da análise de situações probabilísticas empíricas que lhe dê posteriormente uma sustentação teórica para o cálculo de uma probabilidade.

Por fim, o Significado Frequentista se alicerça teoricamente na prévia observação e na análise de cenários probabilísticos empíricos controlados cientificamente que buscam descrever mesmo que de forma aproximada a ocorrência ou não de eventos reais, realizadas mediante experimentos aleatórios, simulações ou sorteios ou atividades práticas como sendo uma condição essencial para o posterior cálculo de uma probabilidade.

Assim, entendemos que o ensino de Probabilidades pode ser iniciado partindo-se da adoção do Significado Frequentista, levando os alunos a perceberem as fragilidades e equívocos inerentes as suas crenças e intuições, e mostrando as diferenças e aproximações por meio comparações entre a probabilidade empírica e a probabilidade teórica, promovendo-se deste modo um confronto entre a prática e as crenças/opiniões e entre a prática e a teoria.

Conhecer os diferentes significados atribuídos à Teoria das Probabilidades é importante para ampliar a compreensão dos estudantes acerca da complexidade deste campo de estudo da Matemática o qual guarda fortes relações com outros campos de estudo e outros ramos do saber como a Estatística, a Filosofia, a Geometria, a Análise Combinatória, as Funções, a Teoria dos Conjuntos, por exemplo.

Ao estudarmos as diferentes visões atinentes as Probabilidades constatamos que as suas diversas concepções se complementam, é recomendável que a abordagem deste conteúdo se desenvolva levando sempre em consideração a articulação entre diferentes modelos teóricos de probabilidade, sendo esta uma sugestão feita por documentos oficiais que tratam do ensino de Matemática, onde destacamos a discussão promovida para o estudo das Probabilidades. Além disso, pesquisas recentes a respeito da temática apontam na mesma direção, de uma abordagem pedagógica que seja desenvolvida a partir da articulação de diferentes significados probabilísticos. Daí, a razão de buscarmos condensar em um quadro informativo as principais ideias que caracterizam os sete significados probabilísticos apresentados mesmo que brevemente em nossa discussão a respeito do pensamento probabilístico, como forma de fornecer aos professores de Matemática, aos pesquisadores e aos estudantes não uma fonte de ampla discussão teórica dos diferentes modelos teóricos de probabilidade, mas apenas uma visão geral a respeito das principais características sobre as quais se fundamentam os diferentes significados de Probabilidade presentes em nossas considerações gerais relativas à Teoria das Probabilidades.

Na análise que fizemos da coleção de livros didáticos de Matemática, alguns significados de Probabilidade apresentados em nosso texto, não foram considerados, dado o nível de escolaridade ao qual ela era dirigida (6º ao 9º Anos), ou seja, procuramos evidências das características de cada significado, manifestadas na proposta da coleção, condizentes com o Ensino Fundamental, verificando se ela satisfaz o que sugere Batanero (2005): diferentes significados parciais são explorados ao longo da coleção; se eles progridem e se relacionam, partindo-se das ideias intuitivas dos estudantes sobre possibilidades e chances, até conceitos matematicamente mais elaborados.

Outro aspecto relevante, relacionado ao desenvolvimento do pensamento probabilístico, é considerar quais são as ideias centrais que precisam ser trabalhadas para lhe dar suporte, por meio de atividades diversificadas, associadas a diferentes significados de Probabilidade, e propostas ao longo da Educação Básica.

O primeiro elemento, destacado por Batanero et al. (2016), é a ideia de aleatoriedade. Para esses autores, ela não é simples e, além disso, nem sempre está definida explicitamente nos livros didáticos, lacuna que precisaria ser preenchida pelo professor. Um argumento por eles apresentado nessa direção é embasado em resultados de pesquisas que apontam a diversidade de interpretações e de equívocos de estudantes, sobre aleatoriedade.

O segundo elemento apontado pelos mesmo autores são as ideias relativas a evento e espaço amostral que seriam dificuldades pela natureza determinística do pensamento das crianças. Elas em geral focam em resultados particulares de um evento e não se atém à diversidade de possibilidades para ele. Segundo Van de Walle (2009, p.510),

> [O] conceito inicial das crianças sobre a probabilidade de um evento futuro geralmente é desnorteante para um adulto. AS crianças podem estar absolutamente seguras de que o próximo lance de um dado será um 3 simplesmente porque “eu sei que vai acontecer” ou porque “3 é meu número da sorte”.

Para Van de Walle, um fator complicador é a experiência anterior da criança em jogos de azar, que dificultaria a compreensão de que a aleatoriedade tornaria iguais as chances de todos os jogadores ganharem. Ele afirma, ainda, que a determinação do espaço amostral de um evento independente deveria ser simples, mas nem todos os alunos têm facilidade para isso, o que seria causado pela “[...] sua convicção no azar que certos resultados de uma experiência podem não parecer possíveis até mesmo quando eles são claramente possíveis”. (VAN DE WALLE, 2009, p.518).

A terceira ideia fundamental apontada por Batanero et al. (2016), envolve o uso de estratégias de contagem e de Combinatória. Os autores alertam que não precisamos usar Combinações na delimitação de um espaço amostral associado a muitos eventos, em especial quando tratamos com o significado Frequentista, mas elas são necessárias em muitas situações em que seria difícil determinar a quantidade de elementos daquele conjunto, por contagem.

Uma sugestão seria, de acordo com os mesmos autores, estimular o uso de árvores de possibilidades, na promoção de estartégias de generalização, sem ser preciso usar Combinação, em razão de sua complexidade. Podem surgir problemas relacionados à essa ideia, ainda, em virtude de os professores dos anos iniciais trabalharem Probabilidade “[...] limitando-se a situações de jogo, ou escolhas de uma entre várias possibilidades de resultados de uma contagem” (SANTANA; BORBA, 2016, p.12).

As ideias de dependência e independência de eventos seria mais um importante elemento constituinte do pensamento probabilístico, em razão da demanda de sua compreensão para a apreensão, em especial, do significado Frequentista de Probabilidade (BATANERO et al., 2016). Para Van de Walle (2009), a dificuldade para identificar se um evento tem ou não influência sobre outro é comum, em especial quando se trata de eventos combinados em jogos relacionados à soma de pontos de dois dados ou o lançamento de duas moedas.

Outro fundamento para o pensamento probabilístico envolve a distribuição e expectativa de Probabilidade e, segundo Batanero et al. (2016), apesar de já terem sido feitas muitas investigações relacionadas à essas ideias, poucas foram ligadas à variáveis aleatórias, noção chave em Probabilidade. Como experiências e crenças pessoais interferem nesses elementos, são demandadas pesquisas que possibilitem uma melhor compreensão desse fenômeno e seus desdobramentos no ensino.

A convergência e a Lei dos Grandes Números são apontados pelos mesmos autores como também importantes para a apreensão do conceito de Probabilidade. Batanero et al. (2016) afirmam que essas ideias são exploradas em sala de aula em associação com o significado frequentista, mas que é importante identificar se os alunos realmente compreendem que a probabilidade de um evento é sempre imprevisível, sendo alguma regularidade percebida apenas quando lidamos com longas cadeias de observação desse evento.

Van de Walle (2009, p.515) lembra que "[U]sar as frações geradas em uma experiência probabilística e fazer comparações pressupõe que os alunos compreendem o raciocínio proporcional envolvido: Mas como 3 entre 7 se compara a 250 entre 1.000?". Para evitar problemas dessa ordem, o autor sugere que os alunos comparem os resultados visualmente, evitando trabalharem com a comparação de frações. Outra sugestão é que a comparação seja feita por meio de porcentagens, caso os alunos já as compreendam.

Um outro aspecto importante do pensamento probabilístico envolve, segundo Batanero et al. (2016), as ideias de amostragem e de distribuição amostral, ou seja, é fundamental que o aluno entenda que, em muitos casos, a probabilidade de um evento é estimada considerando-se uma parte do espaço amostral, fazendo-se a extrapolação dos resultados para o todo.

O desafio reside, nesse caso, em fazer uma escolha adequada da amostragem, de modo a representar o todo, quando da extrapolação. Sobre esse aspecto os mesmos autores alertam que é preciso ter cuidado quando se trabalha com a distribuição amostral empírica, uma vez que ela representa apenas uma aproximação da distribuição amostral teórica e os alunos precisam compreender bem essa distinção.

Finalmente, o último aspecto apontado por Batanero et al. (2016), diz respeito à modelagem e à simulação de eventos. Ambos seriam importantes para promover a aproximação dos estudantes ao conceito de Probabilidade e seu uso ajudaria o estudante a perceber a diferença entre realidade e sua representação por meio de modelos matemáticos. Em relação à atividade de simulação, Van de Walle (2009) afirma que às vezes nem é necessário que o aluno realmente a realize, sendo suficiente que ele avalie e explique cada passo na tomada de decisão do projeto da simulação.

2.2 BREVE DISCUSSÃO SOBRE O PENSAMENTO PROBABILÍSTICO EM DOCUMENTOS OFICIAIS

O estudo da Teoria das Probabilidades é relevante para todos os estudantes da Educação Básica, sendo o seu ensino recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática desde os anos iniciais. É um conteúdo que pode/deve ser abordado em sala de aula de forma contextualizada, dado que, no cotidiano, nós nos deparamos com relativa frequência com eventos aleatórios, cujas chances de sucesso ou de fracasso são atribuídas à sorte ou ao azar. Esses fenômenos podem ser melhor compreendidos a partir do estudo das Probabilidades.

Experimentos aleatórios são aqueles que se repetem ou podem ser repetidos, desde que nas mesmas condições, produzindo resultados distintos, na imensa maioria das vezes, como salientam Morgado et al. (1991). São experimentos desta natureza o principal objeto de estudo da Teoria das Probabilidades, logo, ele se volta para a investigação dos experimentos aleatórios, os quais não se confundem com os experimentos determinísticos.

Os experimentos determinísticos não são objetos de estudo da Teoria das Probabilidades, dado que teremos sempre os mesmos resultados quando estes são realizados nas mesmas condições, como destacam Morgado et al. (1991). Nas Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (OCEM) (BRASIL, 2006), a Teoria das Probabilidades se debruça na quantificação/mensuração das possibilidades de incerteza quanto ao resultado de um experimento aleatório.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática dirigidos ao Ensino Fundamental, tanto no documento dirigido ao primeiro e segundo ciclos, à época correspondente ao período entre o 2º e 5º anos, na denominação atual, quanto no direcionado ao terceiro e quarto ciclos, correspondente ao período entre o 6º e 9º anos, na nomenclatura de hoje, o pensamento probabilístico está inserido no bloco do Tratamento da Informação. Nos dois documentos, a informação sobre esse bloco é a mesma:

> Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos. (BRASIL, 2008, p.52).

Quanto à Probabilidade, especificamente, o documento destaca que o principal objetivo do trabalho com esse conteúdo para todo o Ensino Fundamental, à época organizado em quatro ciclos, é:

> [...] que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 2008, p.52).

No documento dirigido aos anos iniciais os PCN destacam como conteúdos conceituais e procedimentais explorar "[...] a idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de "sorte" (BRASIL, 1997).

Dentre os Objetivos do ensino desse conteúdo, para o 6º e 7º anos, os PCN sugerem "[...] explorar a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão" (BRASIL, 1998, p.65). Os objetivos para o 8º e 9º ano são ampliados: "[...] construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos". (BRASIL, 1998, p.82).

A explicação do que seria o espaço amostral é apresentada apenas no final do documento, nas orientações metodológicas, quando trata do trabalho com Probabilidade, em relação ao qual afirma ser fundamental "[...] que os alunos compreendam o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis, utilizando-se do princípio multiplicativo e de representações como uma tabela de dupla entrada ou um diagrama de árvore. Desse modo, será possível indicar o sucesso de um evento utilizando-se de uma razão".

Quando discutem sobre o trabalho com os conteúdos sugeridos para os diferentes campos de pensamento matemático, afirmam:

> O estudo da probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para tanto, terão de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão. (BRASIL, 1998, p.86)

A conexão entre Probabilidade e razão é reforçada no documento quando, ao tratar do conceito de número racional, destaca os diversos significados que podem ser atribuídos a uma fração, dentre eles, o de probabilidade. Os PCN trazem a seguinte situação, como exemplo: “[...] a chance de sortear uma bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores é de 2/10” (BRASIL, 1998, p.102). Neste caso, o Espaço Amostral seria constituído pelo total de bolas, ou seja, 10, enquanto o Evento seria constituído pelas duas bolas verdes.

A relação aqui destacada é muito importante para a promoção da associação de diferentes campos Matemáticos, no caso, o campo dos Números e Operações e o campo denominado de Tratamento da Informação nos PCN de Matemática, em uma perspectiva de contextualização interna dessa área de conhecimento, que possibilita a ampliação da compreensão dos conceitos envolvidos.

Desde os anos iniciais do Ensino Fundamental recomenda-se adotar metodologias de ensino em sala de aula que criem condições para a promoção do pensamento probabilístico. Concordamos com Lopes quando este autor afirma que:

> [O] desenvolvimento do pensamento probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como, a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. A partir dessas considerações, pode-se organizar situações didáticas que envolvam a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises, possibilitando a integração entre a Probabilidade e a Estatística. (LOPES, 2003, p. 65)

.

Ou seja, o ensino de Probabilidade potencializa a realização de atividades que conectam diversos conteúdos de diferentes campos da Matemática, como afirmamos anteriormente, e entre conteúdos diversos de um mesmo campo, como Probabilidade e estatística, ambos relativos ao tratamento da Informação (BRASIL, 1998).

Como apontamos anteriormente, a orientação relativa à introdução ao pensamento probabilístico é a mesma para todo o Ensino Fundamental, nos PCN, ou seja, que "[A]s noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis) (BRASIL, 1997, p.40). Esta recomendação está presente, de maneira explícita, na versão que atualmente está disponível para avaliação da comunidade, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com relação aos conteúdos a serem trabalhados no Ensino Fundamental, embora esse documento não seja elemento de discussão em nosso texto.

Nele, o campo denominado de Tratamento da Informação nos PCN, passa a ser denominado de Probabilidade e Estatística, e, para o 1º Ano do Ensino Fundamental, o objeto de conhecimento desse campo, especificamente relativa ao campo da Probabilidade, que está sendo indicado, é "Noção de acaso", cuja habilidade associada a ser desenvolvida é "(EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como "acontecerá com certeza", "talvez aconteça" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano". (BRASIL, 2017, p.237).

Para o 2º Ano, o objeto de conhecimento de nosso foco de estudo, na Base, é: "Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano", estando ele associado à seguinte habilidade: "(EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como "pouco prováveis", "muito prováveis", "improváveis" e "impossíveis"" (BRASIL, 2017, p.240).

No 3º Ano, o destaque, na mesma área é: "Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral", associada à habilidade "(EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência". (BRASIL, 2017, p.244).

No 4º Ano, o objetivo destacado é: "Análise de chances de eventos aleatórios", associada à habilidade "(EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações". (BRASIL, 2017, p.249).

Para o 5º Ano, há dois objetos de aprendizagem destacados no texto, relativos à Probabilidade: "Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios", associado à habilidade "(EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não"; e "Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis", relacionado à habilidade "(EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis)". (BRASIL, 2017, p.253).

Para o 6º Ano, destacam-se os seguintes objetos de conhecimento: "Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável" e "Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)". Esses dois objetos estão relacionados no documento à seguinte habilidade: "(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos". (BRASIL, 2017, p.302).

No 7º Ano a Base destaca, como objeto de conhecimento relativo à Probabilidade: "Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências", ao qual está vinculado a habilidade "(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências". (BRASIL, 2017, p.308).

Para o 8º Ano do Ensino Fundamental, o destaque da Base como objeto de conhecimento probabilístico são: "Princípio multiplicativo da contagem" e "Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral", os quais estão conectados à habilidade "(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1". (BRASIL, 2017, p. 312).

Finalmente, para o 9º Ano, a Base propõe como objeto de conhecimento relativo à Probabilidade a "[A]nálise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes", associados à habilidade "(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos”. (BRASIL, 2017, p.316)

Assim, tanto os PCN quanto a BNCC orientam no sentido de que o pensamento probabilístico seja desenvolvido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, e ao longo de todo esse nível de escolaridade, em uma abordagem na qual o conceito é ampliado, considerando o aumento da complexidade dos elementos associados à Probabilidade.

De maneira geral, podemos afirmar que, nos dois documentos, defende-se que o ensino de Probabilidade pode levar os alunos a não apenas perceberem a utilidade do conhecimento matemático construído na escola para a compreensão dos fenômenos naturais e sociais do dia a dia, mas, também, a utilizarem formas especiais de raciocínio, ajudando-os a pensarem matematicamente, incorporando a noção de incerteza a um campo que é, em geral, associado à ideia de exatidão.

Vale ressaltar, ainda, que os significados de Probabilidade sugeridos para o trabalho no Ensino Fundamental, tanto nos PCN quanto na BNCC, restringem-se basicamente à Probabilidade Intuitiva, à Probabilidade Clássica e à Probabilidade Frequentista, considerando-se a exploração das ideias de espaço amostral; eventos equiprováveis; princípio multiplicativo da contagem; eventos dependentes e independentes.

A orientação é na direção da criação de um ambiente propício à observação dos fenômenos da realidade, à experimentação e à simulação de situações do cotidiano, muitas vezes corriqueiras, em uma perspectiva matemática ampla, mas que desencadeiem questionamentos sobre os conceitos probabilísticos.

Deverão ser estimuladas, nesse ambiente, discussões em grupos sobre a aleatoriedade dos experimentos e a previsão dos seus resultados; a socialização de descobertas; a apresentação de dificuldades; a construção de novos caminhos; e a interação entre aluno-aluno, professor-alunos e entre alunos-professor-objeto do conhecimento.

2.3 SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE

Coutinho (2013) defende que o ensino de Probabilidade seja desenvolvido em sala de aula de modo a considerar em sua abordagem os enfoques Clássico ou laplaciano; Frequentista; e o bayesiano, ou subjetivo, criticando os processos de ensino e aprendizagem de Probabilidade que se limitem exclusivamente a explorar este conteúdo sob a perspectiva Clássica.

Para a autora, esse modelo somente pode ser aplicado às situações probabilísticas que possuam um espaço amostral equiprobabilístico, isto é, onde todos os seus eventos possuam a mesma probabilidade de ocorrer. A equiprobabilidade dificulta a aplicação da Teoria das Probabilidades às situações reais, já que, para a citada autora, há muitos fenômenos em nosso cotidiano que não possuem um espaço amostral equiprobabilístico e, sendo assim, não podem ter a sua probabilidade calculada a partir da aplicação do significado clássico. (COUTINHO, 1994)

Ainda de acordo com a autora, quando o professor desenvolve um processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade focado unicamente no significado Clássico, ele pode levar o aluno a cometer dois erros, quais sejam: a) Conceber como impossível o cálculo da probabilidade de fenômenos probabilísticos cotidianos, caracterizados por eventos que estejam associados a experimentos aleatórios não equiprováveis; e b) Aplicar a concepção Clássica no cálculo da probabilidade de eventos aleatórios do dia a dia, que não possuam um espaço amostral finito.

Conforme a autora, a utilização do modelo probabilístico Frequentista amplia o âmbito de aplicação da Teoria das Probabilidades para o estudo dos fenômenos aleatórios que envolvem espaços amostrais não equiprováveis, possibilitando o cálculo da probabilidade de situações probabilísticas que não poderia ser obtido sob o viés do significado Clássico.

Para Coutinho (2013), os autores de livros didáticos, ao abordarem a Teoria das Probabilidades, quase não discutem determinados conceitos probabilísticos elementares, quais sejam: experimento aleatório; experimento determinístico; espaço amostral; espaço amostral equiprovável; espaço amostral não equiprovável; evento elementar; evento impossível e evento certo. Para ela, é importante que estes conceitos sejam explicitamente apresentados aos discentes.

Acreditamos que estas ideias são relevantes porque ajudam os educandos a desenvolverem o raciocínio probabilístico, de modo progressivo e com poucas lacunas em relação à compreensão de termos básicos da linguagem utilizada no tratamento de problemas envolvendo Probabilidade.

Com relação às diferenças entre o pensamento matemático não determinístico e o pensamento matemático determinístico, percebemos em Coutinho

(2013) que o que os diferencia é que nesta última forma de pensamento somente podemos categoricamente atribuir a uma proposição unicamente/exclusivamente dois valores extremos, exatos, diametralmente opostos e mutuamente exclusivos, a saber, verdadeiro ou falso, não havendo meio termo.

Já quando estamos diante da sistematização de ideias ligadas às situações aleatórias, ainda conforme a autora, é impossível fazermos afirmações categóricas. Em relação às variáveis que descrevem os fenômenos aleatórios, mesmo que busquemos o amparo matemático que fundamenta a Teoria das Probabilidades, ainda assim, não conseguiremos afastar a margem de incerteza que caracteriza a formação do pensamento estocástico.

2.4 ALGUMAS INVESTIGAÇÕES SOBRE A TEMÁTICA DE NOSSA PESQUISA

Com o intuito de delimitarmos o diferencial de nosso trabalho de investigação, fazemos o registro e discussão, em nosso texto, de algumas investigações já realizadas sobre a mesma temática de nossa pesquisa. A primeira delas é a dissertação de Mestrado de Canaveze (2013), na qual alerta sobre as consequências do ensino tradicional de Probabilidade, na medida em que levaria os alunos a terem muito cedo um contato com uma linguagem essencialmente técnica e formal de Probabilidade, o que acabaria gerando grandes dificuldades de aprendizagem para os alunos.

A explanação teórica desenvolvida a partir do modelo clássico ou teórico de Probabilidade tornaria o processo de ensino e aprendizagem limitado e produziria impactos inibidores de uma real aprendizagem do conteúdo de Probabilidade pelos alunos. Por esta razão, a autora defende a necessidade de um ensino de Probabilidade sob um viés também prático, partindo-se da realização ou simulação de experimentos aleatórios, o que significa que o professor deve também abordar, no estudo de Probabilidade, o modelo Frequentista.

Em sua pesquisa, a autora menciona que, na abordagem do conteúdo de probabilidade feita pelo livro didático “Conexões com a Matemática”, por ela analisado, foram utilizadas atividades que enfatizaram o formalismo matemático, em prejuízo do desenvolvimento de situações que possibilitassem a construção do conhecimento matemático pelo estudante. Estas atividades eram os exercícios de fixação.

Como Canaveze (2013), defendemos uma prática docente que explore as potencialidades dos problemas no estudo da Teoria das Probabilidades, resolvendo, explorando e propondo situações que possibilitem aos alunos uma atuação efetivamente ativa e autônoma no desenvolvimento do raciocínio probabilístico, de forma interativa, participativa, socializadora e dinâmica. Ou seja, defendemos um processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade que não esteja comprometido somente com o significado Clássico, mas que incorpore outros significados, a exemplo do Intuitivo e Frequentista.

Santos (2010), em sua pesquisa de Mestrado, destaca que a intervenção do professor mediante a implementação de práticas didáticas em sala de aula é um fator fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Teoria das Probabilidades, já que ele é responsável por estimular o desenvolvimento do pensamento probabilístico, a partir de situações didáticas organizadas com este fim.

De acordo com a pesquisa feita por Carvalho, Silva e Paraíba (2016), os livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental enfatizam quase que absolutamente o uso do modelo Clássico em suas atividades e na forma como o conteúdo de Probabilidade é apresentado para o ensino em sala de aula, ficando em segundo plano o uso do modelo Frequentista.

A conclusão dos autores foi baseada na análise de três coleções de livros didáticos voltados para os anos finais do Ensino Fundamental, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), de 2014.Os autores categorizaram as atividades de Probabilidade, tomando como critério os conceitos, as representações e os contextos propostos.

Ao analisarem as pesquisas de Souza, Coutinho e Souza (2014), de Azcárate e Serradó (2006), Carranza e Kuzniak (2009) e Diaz-Levicoy e Roa (2014), Carvalho, Silva e Paraíba (2016) constataram que, das 31 pesquisas voltadas para o ensino e para a aprendizagem de Probabilidade localizadas no banco de teses da CAPES, somente duas tiveram como foco os livros didáticos de Matemática. Concluíram ainda, com base nesses materiais, que nos livros didáticos analisados os exercícios de Probabilidade enfatizavam o cálculo, em detrimento de interpretações, além de perceberem a predominância de exercícios rotineiros e essencialmente matemáticos.

Com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, os autores da pesquisa defendem que, no processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade, deve haver uma constante articulação entre as diversas representações e contextos, procurando introduzir paulatinamente o conceito de Probabilidade por meio de diversos significados, com o que concordamos.

Foram analisadas todas as atividades em todos os volumes e em todas as partes que envolviam o conceito de Probabilidade, isto é, todas aquelas situações que, de alguma forma, pudessem estimular a reflexão e a prática de Probabilidade, sendo contabilizado um total de 179 atividades, sendo 167 presentes nos capítulos destinados ao estudo da Estatística e Probabilidade e 12 atividades de Probabilidade presentes fora deste eixo específico.

Em sua pesquisa, Carvalho, Silva e Paraíba (2016) perceberam que as coleções não seguem uma tendência quanto à distribuição das atividades por volumes. Notaram, também, que as coleções analisadas apresentam poucas atividades de Probabilidade no 6º Ano, o que, para estes pesquisadores, se justificaria pelo fato de haver a necessidade do conhecimento de outros conteúdos, tais como fração, porcentagem e números decimais, o que dificultaria a introdução do conteúdo neste nível de escolaridade.

Em contrapartida, vemos que os documentos oficiais, como os PCN ou a versão atual da BNCC, defender ser importante trabalhar com noções básicas de Probabilidade, a saber, a diferenciação entre experimentos aleatórios e determinísticos, eventos certos e impossíveis, eventos pouco ou muito prováveis, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Entendemos que a construção do diagrama de árvores e tabelas, tendo em vista a construção do espaço amostral e também trabalhar a probabilidade experimental, são atividades possíveis de serem realizadas por estudantes do 6º Ano.

Se considerarmos o que está sendo proposto na BNCC, para o 6º Ano, no que diz respeito à Probabilidade, temos, como anteriormente indicamos, um objetivo que envolve o trabalho com a Probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável, ou seja, o significado Clássico, e a recomendação de trabalho com a Probabilidade Frequentista, comparando-se os resultados obtidos, realizando-se experimentos sucessivos. (BRASIL, 2017). Ou seja, se, a partir da aprovação da Base, os livros didáticos devem levar em consideração suas indicações, a

Probabilidade Frequentista deverá estar presente nas coleções didáticas de Matemática futuras.

Carvalho, Silva e Paraíba (2016) citam Coutinho (2002) e Amâncio (2012), para enfatizar a relevância dos significados Clássico e Frequentista em uma abordagem introdutória do conteúdo de Probabilidade, destacam que existe uma grande ênfase no uso do significado Clássico de Probabilidade, com 156 atividades (87,15% do total), em detrimento dos demais significados.

Em particular, a perspectiva Frequentista foi pouco abordado nas coleções analisadas, embora os pesquisadores defendam a necessidade de os livros didáticos trabalharem com um número maior de atividades que envolvam esse significado, o que naturalmente implicaria em propor atividades com um número maior de representações e de contextos.

Os autores da pesquisa observaram a ausência de atividades de caráter experimental, que possibilitassem a transição do significado Frequentista para o Clássico, e não foram catalogadas atividades envolvendo os significados Intuitivo, Subjetivo e Lógico. A ausência do significado Subjetivo está relacionada ao fato de que este demandaria um pensamento probabilístico mais aprofundado e, quanto à ausência do significado Lógico, os pesquisadores citam como justificativa o argumento de Batanero (2005), de que este só deve ser trabalhado no Ensino Médio, uma vez que requer maturidade matemática.

Para Carvalho, Silva e Paraíba (2016), as coleções de livros didáticos deveriam apresentar uma abordagem em espiral, de tal maneira que em todos os seus volumes apresentassem atividades de Probabilidade, com um grau de aprofundamento progressivo, uma vez que as coleções analisadas por estes pesquisadores não abordam de forma adequada o conteúdo de Probabilidade através dos seus diferentes significados. Os autores defendem que as coleções de livros didáticos devem abordar o conceito de Probabilidade, de modo a atender as sugestões feitas pelas orientações curriculares e pela literatura atual, buscando promover a articulação entre diversos significados, representações e contextos.

A terminologia figura-suporte e figura não-suporte são nomenclaturas adotadas por Carvalho, Silva e Paraíba (2016) para categorizar os diferentes tipos de representação simbólica na abordagem do conteúdo de Probabilidade desenvolvida por uma coleção de livros didáticos analisados na mencionada pesquisa. As figuras-suporte são aquelas que fornecem elementos importantes e que auxiliarão na resolução das atividades, e as figuras não-suporte exercem apenas um mero papel ilustrativo, estando presente na atividade, porém, não contribuindo em nada na resolução da atividade.

A presença de tais figuras na estrutura das atividades pode enriquecer um enunciado e/ou facilitara resolução de problemas, levando o aluno a enxergá-las sobre outras perspectivas e oferecendo recursos que ampliam as possibilidades efetivas de aprendizagem e desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Além disso, estimula o aluno a aplicar o raciocínio na interpretação de outras formas de expressão, não se limitando à comunicação textual como também estimula a construção de imagens mentais fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático.

A nomenclatura aqui destacada foi utilizada por nós quando da análise da proposta de trabalho com o conteúdo de Probabilidade, em uma coleção de livros didáticos de Matemática dirigido ao 6º ao 9º Anos do Ensino Fundamental. Considerando as recomendações gerais, decorrentes dos resultados das pesquisas aqui destacadas, relativas ao ensino de Probabilidade, nossa análise da coleção didática de Matemática ateve-se, em particular, à natureza dos problemas relativos ao conteúdo em foco, neta propostos, por entendermos a importância dessa metodologia de ensino de Matemática, da qual tratamos no próximo item.

3. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Onuchic (1999) destaca a eficácia da Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática, a partir de dois aspectos. O primeiro, como uma metodologia capaz de levar os alunos a uma aprendizagem autônoma da Matemática, com o auxílio da mediação do professor. É neste contexto que os problemas conduziriam os alunos à construção de conceitos probabilísticos. Em segundo lugar, Onuchic afirma que, para a construção de um novo conhecimento, os alunos necessariamente utilizam conceitos matemáticos que já possuem antes de se depararem com a nova situação sugerida pelo professor, sendo este novo conhecimento fundamental para a formação de conceitos mais elaborados.

Observa-se, porém, conforme salientam os PCN (BRASIL, 1998), que a metodologia tradicional tem norteado preponderantemente o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, limitando-se a focar na reprodução de procedimentos mecânicos na resolução das questões propostas, encaradas como uma mera aplicação do conteúdo estudado por meio de definições e fórmulas prontas, acompanhadas de alguns exemplos resolvidos pelo professor.

Para Van de Walle (2009), o processo de ensino e aprendizagem de Matemática a partir da Resolução de Problema é a metodologia mais eficaz para o ensino dessa disciplina, na medida em que coloca o aluno como o autor da sua aprendizagem.

A Resolução de Problemas como metodologia de ensino somente passou a ser defendida de modo destacado a partir do final da década de 1980, como afirma Andrade (1998). Com o uso desta metodologia é possível confrontar os alunos com as suas próprias concepções matemáticas, conferindo a eles a autonomia necessária para a descoberta dos seus próprios caminhos, cabendo ao professor, nesse processo, mediar e articular as situações de aprendizagem.

Em consonância com os PCN (BRASIL, 1998), a Resolução de Problemas é relevante porque proporciona entendermos a Matemática como um conjunto de conhecimentos historicamente construídos a partir da necessidade de se resolver os problemas que surgiam na vida diária dos povos e comunidades, diante das circunstâncias impostas pela natureza e pelas próprias limitações humanas.

Neste cenário escolar, cria-se um contexto potencializador e motivador, que pode levar os alunos a perceberem que o conhecimento matemático se constrói a partir das necessidades estabelecidas pelo cotidiano e que devem ser simuladas na escola, por meio de problemas contextualizados. Além disso, realça a utilidade do conhecimento matemático para o dia a dia do aluno e aponta também para a importância dos problemas como veículos de construção do conhecimento matemático.

O desenvolvimento do conhecimento matemático pressupõe ação, movimento e aplicação prática e a Matemática deve ser vista como uma ferramenta social. Ela deve ser utilizada como um meio e não como um fim em si mesma, isto é, não pode ser encarada como um simples acúmulo de conhecimentos acabados, sistematizados e complexos, sem nenhuma aplicação/prática. O conhecimento matemático deve estar atrelado a um contexto de solução de problemas práticos do dia a dia.

Os problemas não se confundem com os exercícios. Estes últimos consistem basicamente na mera aplicação de algoritmos, técnicas, formulas e processos mecânicos (POZO, 1998). Os PCN (1998) descrevem os problemas matemáticos como situações abertas, provocantes, desafiantes e que exigem dos alunos a elaboração de estratégias, não possuindo um procedimento pronto a ser adotado para a sua solução. Os problemas estimulariam a elaboração de possíveis estratégias e de caminhos a serem seguidos para sua resolução.

Van de Walle (2009) defende que a qualidade de um bom problema pode ser identificada a partir das diversas possibilidades de resolução que ele apresenta. Um bom problema é uma tarefa que promove a integração do educando, fazendo todos se sentirem pertencentes a uma só turma e possibilitando que alunos com diferentes níveis de conhecimento construam um conhecimento novo através de um mesmo problema. Eles partem de diferentes pontos e estratégias e empregam os mais variados métodos de resolução.

Além do mais, levam o professor a perceber a importância e a validade do conhecimento prévio de cada aluno. Esta característica é fundamental para a aprendizagem dos estudantes, sobretudo, quando estes integram uma turma essencialmente heterogênea, como são todas as turmas de estudantes de qualquer nível de escolaridade.

Pozo (1998), ao tratar do significado de conhecimento prévio, destaca que este não se restringe exclusivamente ao conhecimento que o aluno construiu no ambiente escolar. É um conhecimento bem mais amplo e que abarca também todas as situações extraescolares que, de alguma forma, proporcionaram aos indivíduos condições para que eles desenvolvessem algum tipo de conhecimento.

Van de Walle (2009) destaca que o problema matemático deve ser selecionado e apresentado pelo professor a partir de critérios alicerçados no conhecimento prévio dos estudantes. Esse aspecto possibilitaria, ao professor, propor problemas que demandariam aos alunos a necessidade de resolução, devido ao seu caráter desafiador, mas possível. Desta forma, percebemos o seu viés potencializador, onde os alunos utilizarão o seu conhecimento de mundo, suas experiências e ideias acumuladas, como auxílio na leitura, na interpretação e na organização dos dados apresentados pelo problema, levando-os à construção de novos conhecimentos matemáticos.

Na medida em que o aluno busca elaborar estratégias para a solução dos problemas que lhe são apresentados em sala de aula pelo professor, estando este na condição de mediador do processo, o educando está, algumas vezes, até inconscientemente, construindo novos conhecimentos matemáticos, como afirma Van de Walle (2009).

Além da aprendizagem com compreensão, promovida pelas necessidades impostas pelo próprio problema, Van de Walle (2009) defende a utilização da escrita como elemento fundamental no contexto da Resolução de Problemas. Ela fortalece a compreensão dos alunos a respeito da solução do problema e dos métodos utilizados para se chegar até a resposta e os ajuda a refletirem sobre as ideias que fundamentaram o desenvolvimento do(s) raciocínio(s)empregado(s) por eles.

Segue-se, para o mencionado autor, que a escrita facilita a socialização das ideias, servindo como material de apoio ou como suporte desenvolvido pelo estudante para o auxiliar na socialização do seu raciocínio, podendo ser também utilizada pelo professor como um instrumento de auxílio para o planejamento de suas aulas e para identificar as dificuldades e as potencialidades dos alunos, bem como um instrumento avaliativo.

É preciso que o professor tenha este olhar mais amplo sobre a inserção da escrita na Metodologia de Resolução de Problemas, de modo que o educador matemático a considere como fator potencializador da aprendizagem, em termos qualitativos. Nesse âmbito, o desenvolvimento da escrita dos alunos será importante no momento em que lhes for proposta a elaboração de problemas.

Para Breuckmann (1998), a formação de um conceito requer o desenvolvimento de situações desencadeadoras de aprendizagem. Nessa direção, entendemos que a Resolução de Problemas é uma metodologia que pode tornar a sala de aula um ambiente propício para a formação de conceitos, na medida em que o professor, em seu papel de mediador, estimula os alunos a assumirem uma postura ativa e criativa, diante da necessidade de construírem novos conhecimentos matemáticos, como defende Andrade (1998), tendo em vista problemas que os desafiem.

Entretanto, devemos buscar mais que a simples solução de um problema. Para Andrade (1998), o propósito de um problema não se esgota em sua resolução, ou seja, é importante explorar um problema considerando a possibilidade de geração de novos problemas e de situações desencadeadoras de novos conhecimentos, e que podem estar ocultas no problema inicialmente proposto. Um bom problema possibilita muito mais que uma resposta. Ele esconde situações exploratórias que devem ser trazidas à tona, por meio da mediação do professor, para que possa proporcionar o desenvolvimento de conhecimentos novos.

A resolução de um problema não deve ser compreendida apenas pela resposta obtida, ou o resultado final encontrado após a aplicação de métodos e estratégias de resolução, pessoais ou não, mas abarca todo o processo de raciocínio lógico e matemático envolvidos e que constituem parte integrante da própria solução. Um problema deve desencadear no aluno uma inquietação intelectual e, preferencialmente, simularem sala de aula problemas que podem ser encontrados no cotidiano ou em outras áreas de conhecimento, para que ele descubra, na resolução de problemas, motivação para estudar Matemática, concebendo-a não somente como uma disciplina teórica e abstrata, mas como uma ferramenta que pode ajudá-lo a solucionar problemas também fora do âmbito matemático.

As situações-problema propostas na escola devem levar o discente a um processo de reflexão amplo e profundo, extrapolando os limites de pensar apenas em cumprir um dever em sala de aula ou ganhar alguma pontuação, por exemplo, mas levá-lo a ver a Matemática como uma construção social, alicerçada sobre necessidades humanas.

Para Boavida et al. (2008), a Matemática gravita em torno dos problemas. Resolver e propor problemas são práticas e habilidades centrais que fundamentaram a construção do conhecimento matemático ao longo do tempo. Tal conhecimento nasceu da necessidade humana de resolver os problemas sociais que surgiam à medida que a sociedade crescia e as relações sociais se tornavam cada vez mais complexas.

Apoiados em Chica (2001), podemos afirmar que a concepção dos alunos acerca de um problema matemático e da própria Matemática se amplia e assume uma nova dimensão, mais prática e útil para o cotidiano, quando propomos que elaborem os seus próprios problemas. Para a citada autora, quando o educando é estimulado a criar os seus próprios problemas matemáticos ele desenvolve uma visão global acerca da estrutura de um problema.

Desta forma, ao formular um problema, eles passam a se preocupar com a forma como vão comunicar as suas ideias e como problematizarão o seu novo conhecimento mediante a formulação de enunciados. Quando o aluno elabora problemas, ele se sente obrigado a sistematizar as suas ideias, desenvolvendo clareza, objetividade e capacidade de síntese e o seu raciocínio matemático passa a fluir com maior espontaneidade e precisão, à medida em que ele é encorajado a ser criativo e questionador.

Formular problemas ajuda o estudante a perceber que fazer Matemática é bem mais que resolver mecanicamente listas de exercícios do tipo padrão, fazendo a aplicação de fórmulas prontas, de procedimentos e métodos memorizados e pré-estabelecidos por meio de exercícios resolvidos.

Concordamos com Chica (2001) que, ao propormos aos alunos que formulem os seus próprios problemas, devemos estar conscientes de que esta é uma proposta diferente das que lhe são habitualmente propostas. É natural, portanto, que os alunos inicialmente sintam dificuldade, por ser comum serem convidados apenas para resolverem e não para formularem problemas. O professor precisa ser flexível e procurar se colocar no lugar do aluno, buscando ser paciente, para evitar que ele se frustre e se sinta desmotivado.

Ainda conforme Chica (2001), antes de sugerirmos que os estudantes formulem os seus próprios problemas, é fundamental que o professor crie situações que encorajem os alunos a vivenciarem múltiplas experiências matemáticas a partir da resolução de diferentes tipos de problemas ou a resolução de um mesmo problema, de várias maneiras distintas.

Em ambos os casos, eles fortalecerão sua compreensão a respeito da estrutura que os mais variados problemas podem ter, e das muitas ferramentas e estratégias que podemos usar para abordá-los. Para Chica (2001), somente após ser superada esta etapa, é recomendável que o educador matemático coloque o estudante na condição de formulador de problemas.

Destacamos em Boavida et al. (2008) duas estratégias que podem nortear a formulação de problemas em sala de aula. A primeira estratégia denominada de "E se em vez de?", refere-se à reformulação de um problema dado por meio da alteração de um ou mais elementos que compõem a sua estrutura básica, enquanto a segunda estratégia consiste na criação de novos problemas, partindo-se de uma condição pré-estabelecida.

3.2 PESQUISAS QUE RELACIONAM PROBABILIDADE E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Considerando a importância que atribuímos à Resolução de Problemas, na análise que realizamos da coleção didática selecionada, buscamos levantar algumas investigações que adotaram o mesmo viés. A primeira pesquisa analisada foi a dissertação de Stefane Layana Gaffuri (GAFFURI, 2012), sobre o ensino-aprendizagem dos conceitos iniciais de Probabilidade, através da Resolução de Problemas, nas aulas de Estatística do curso de graduação em Administração. A pesquisa foi baseada no desenvolvimento de atividades organizadas em sessões, com o objetivo de criar um ambiente didático que possibilitasse aos alunos construir os conceitos de experimento aleatório, determinístico, espaço amostral e evento.

A justificativa para a escolha do tema se deu com base nas dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo de Probabilidade, uma vez que este conteúdo, conforme a pesquisa, não é quase trabalhado nos Ensinos Fundamental e Médio e, quando trabalhado, o processo se dá de forma rápida e por meio da memorização de fórmulas. A pesquisadora buscou na metodologia de Resolução de Problemas uma alternativa/metodologia de ensino que tornasse o ensino de Probabilidade compreensível, fazendo uso de materiais manipulativos, com o objetivo de facilitar a visualização e a experimentação.

Como resultado da pesquisa, concluiu que a Resolução de Problemas ampliou as imagens conceituais dos alunos referentes ao conteúdo de Probabilidade e contribuiu para a construção de conceitos probabilísticos. Cabe destacar que, para a autora, a combinatória é tida como aplicação e não como pré-requisito para construção de conhecimento probabilístico. A autora observou, ainda, que nos processos de resolução dos problemas propostos os estudantes não utilizaram diagramas, gráficos ou árvores de possibilidades, o que era esperado por ela.

O segundo trabalho analisado foi uma dissertação intitulada “O Acaso, o Provável, o Determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental”, de Michaelle Renata Moraes de Santana (SANTANA, 2011), que teve como objetivo analisar concepções e conhecimentos de professores do Ensino Fundamental sobre Probabilidade. A autora defende que se deve estimular, desde o Ensino Fundamental, a formação de conceitos probabilísticos, entendendo que o estudo da Probabilidade ajuda os alunos a aplicarem a Matemática na resolução de problemas da vida real.

Como resultado da pesquisa, constatou que as experiências vivenciadas no cotidiano influenciam fortemente na resolução dos problemas/situações, mas que o conteúdo de Probabilidade, quando é trabalhado, não é devidamente enfatizado. A fala dos professores participantes do estudo, considerando o contexto das diversas situações-problema que foram apresentadas, evidenciou que, para eles, na base do pensamento probabilístico sempre estavam presentes outros conceitos matemáticos tais como porcentagem, chance, acaso, fração, números cardinais, ordinais, estimativa, previsão, possibilidade, lógica e combinatória.

Também foi constatado no estudo que alguns professores confundem o conteúdo de Probabilidade com o de Análise Combinatória, nos casos em que há a necessidade de enumerar/descrever as possibilidades, e que não houve consenso entre os professores participantes quanto ao trabalho com Probabilidade ter início ainda no Ensino Fundamental. Um professor defendeu essa possibilidade, enquanto outro afirmou não ser adequado, em razão da necessidade de se vivenciar experiências diferenciadas em sua prática, argumentando que esse conteúdo deve ser explorado apenas no Ensino Médio.

Os professores entrevistados atuavam em diferentes níveis de ensino, dos anos iniciais aos anos finais do Ensino Fundamental, e alguns no Ensino Médio, ficando evidente, na pesquisa, a influência direta do nível de escolaridade na formação da concepção do professor em relação ao ensino de Probabilidade.

O terceiro trabalho analisado foi a Dissertação intitulada "Ensino-Aprendizagem de Probabilidade no Ensino Médio: uma experiência usando jogos de loterias", de Venâncio Barros Correa (CORREA, 2016), realizada com alunos do 2º Ano do Ensino Médio, tendo como base a Teoria da Resolução de Problemas, de George Polya. Os problemas propostos envolviam jogos de loteria, intitulada "Lotofacinha", como meio de contextualizar o conteúdo de Probabilidade e proporcionar aos alunos uma prática diferenciada ao utilizar jogos como metodologia de ensino nesse nível de escolaridade.

De acordo com o relato dos professores da escola pesquisa, o ensino de Matemática usando a metodologia de Resolução de Problemas não é uma prática comum entre eles, os quais argumentaram não ter o conhecimento aprofundado a respeito desta metodologia, justificando assim o fato de não a utilizarem em sala de aula. Como resultado da pesquisa, evidenciou-se o uso da Análise Combinatória, especificamente o conceito de combinação simples, na obtenção do espaço amostral e do evento a este associado para a resolução dos problemas probabilísticos da pesquisa. Alguns alunos se equivocaram ao usar diretamente a probabilidade, sem previamente calcular as combinações, e outros ainda se equivocaram nos cálculos das combinações.

De modo geral, os alunos tiveram um desempenho que oscila entre regular e bom na resolução dos problemas, tendo a maioria obtido suas respostas de acordo com a Teoria da Resolução de Problemas de Polya, demonstrando que compreenderam todas as quatro etapas do processo (Compreensão do problema; Delimitação de um plano de Ação; Execução do plano; Verificação da pertinência da solução) (CORREA, 2016).

A maior dificuldade dos estudantes que não tiveram um bom desempenho na resolução dos problemas propostos na pesquisa foi com relação à primeira etapa, a qual se refere à compreensão do problema, isto é, tiveram dificuldade em entender o que se pedia no enunciado, comprometendo, portanto, a execução do seu plano de ação e, consequentemente, a obtenção da resposta do problema.

Como resultado central da pesquisa ficou evidente que a metodologia da Resolução de Problemas é essencial para ser utilizada pelos professores em sala de aula, uma vez que o resultado da pesquisa foi satisfatório, onde a maioria dos alunos responderam os problemas corretamente e seguindo as quatro etapas da metodologia de Resolução de Problemas proposto por Polya.

O quarto trabalho analisado também foi uma dissertação de Mestrado, intitulada “Uma proposta de ensino de Probabilidade no Ensino Médio”, de autoria de Rossano Evaldt Steinmetz Ribeiro (RIBEIRO, 2012), que teve como objetivo elaborar, investigar e validar uma sequência didática para o ensino de Probabilidade, dirigida a estudantes do 3º Ano do Ensino Médio.

O estudo seguiu as seguintes questões norteadoras: Como desenvolver um ensino de Probabilidade de forma interessante e contextualizada? A compreensão de conceitos de Probabilidade pode auxiliar o aluno na compreensão de sua realidade? É possível desenvolver o ensino de Probabilidade através da Resolução de Problemas em um cenário para investigação com referências na realidade?

A pesquisa foi desenvolvida na sala de aula em que o pesquisador era o professor titular da turma. Para o autor, a participação ativa dos alunos era um dos objetivos principais da sequência didática, porém, defende que não basta apenas criar situações que abram espaço para que os alunos façam questionamentos e colocações, sendo fundamental que o professor desenvolva uma postura que o leve a considerar as intervenções dos alunos.

O autor destaca que o professor nunca deve responder diretamente ou rapidamente as perguntas dos estudantes, mas trabalhar e administrar as situações criadas em sala de aula, de modo a que eles mesmos respondam os questionamentos que forem surgindo. O autor cita Polya ao afirmar a necessidade de se utilizar como estratégia problemas correlatos que possam ajudar os alunos a compreender um problema mais complexo.

Ainda segundo o autor, a participação dos alunos é importante e deve ser considerada na preparação da sequência didática, isto é, na escolha das atividades e em sua abordagem. Quando o trabalho didático se dá de forma tradicional, ou seja, na forma de exercícios, definições e procedimentos são memorizados e aplicados mecanicamente, evidenciando uma concepção de utilização em curto prazo, visando uma possível avaliação. De acordo com Ribeiro (2012), é fundamental no estudo de Probabilidade a exploração da Lei dos Grandes Números.

Nossa pesquisa converge na direção das investigações aqui destacadas, na medida em que valoriza, em uma proposta de ensino de Probabilidade, a exploração adequada da resolução de problemas, considerando, ainda, o que foi exposto em relação aos significados de Probabilidade que são recomendados para o trabalho com o conteúdo destacado, no Ensino Fundamental; às ideias fundamentais que permeiam esse conceito e às orientações presentes em documentos oficiais brasileiros.

Assim, em virtude do exposto no presente Capítulo, utilizamos como critérios de análise na coleção de livros didáticos de Matemática dirigida aos quatro anos finais do Ensino Fundamental a exploração de vários significados de Probabilidade na proposta da coleção, conforme Batanero e Díaz (2006), e das ideias fundamentais relacionadas à Probabilidade, apontadas por Batanero et al. (2016). Além disso, consideramos as recomendações de documentos brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental e a Base Nacional Comum Curricular para esse mesmo nível, em vias de implantação.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DA PROPOSTA DE ENSINO DE PROBABILIDADE EM UMA COLEÇÃO DIDÁTICA DE MATEMÁTICA

Neste Capítulo trazemos os resultados da análise de uma coleção de livros didáticos de Matemática, dirigida aos quatro anos finais do Ensino Fundamental, cuja seleção seguiu os requisitos indicados na Metodologia de nossa pesquisa, no Capítulo inicial. A coleção, intitulada “Matemática: Compreensão e Prática”, é de autoria de Ênio Silveira e publicada pela Editora Moderna. A versão que analisamos foi pulicada no ano de 2015.

4.1. ANÁLISE DO CAPÍTULO 8 DO LIVRO DO 6º ANO

O primeiro livro da coleção analisada é o volume dirigido ao 6º Ano, sendo composto de 12 capítulos. Nossa análise, entretanto, será direcionada especificamente ao Capítulo 8, uma vez que é nele em que é abordado o tema: Porcentagem, Possibilidade e Estatística. Porém, antes de começarmos a analisar o Capítulo 8, cabe destacarmos que o Capítulo 2 do volume 1 no tópico 6, que trata da multiplicação com números inteiros, é utilizada a árvores de possibilidades como uma ferramenta para a obtenção da resposta de determinadas situações-problema que envolvem o cálculo do número de possibilidades de um evento.

Entendemos, como sugerido nos PCN (BRASIL, 1998), ser importante explorar o funcionamento e aplicação do diagrama de possibilidades, levando o aluno a perceber que tal ferramenta facilita os cálculos para os casos em que se tem um número muito grande de possibilidades a serem calculadas, na medida em que proporciona a percepção de padrões de contagem. Com a utilização da árvore de possibilidades, ele fica menos propenso a cometer erros e desenvolve a sua resposta em um intervalo de tempo consideravelmente menor.

Destacamos especificamente, dentre os objetivos do autor traçados para o Capítulo 2, a necessidade de levar o aluno a compreender os significados da multiplicação na resolução de problemas inseridos em contextos que envolvam a adição de números naturais com parcelas iguais, bem como o cálculo do número de possibilidades de um determinado evento ocorrer.

No Capítulo 8 são abordados: o cálculo de porcentagem; o cálculo do número de possibilidades; organização de dados em tabelas de dados brutos e em tabelas de distribuição de frequências; construção e leitura de gráficos de barras. No livro do professor, no espaço destinado às orientações complementares para o trabalho com os conteúdos, o objetivo do Capítulo 8, quanto à abordagem do conteúdo de Probabilidade é que o estudante seja capaz de determinar o número de possibilidades de ocorrência de um evento por meio de enumeração simples.

O conteúdo de Probabilidade está presente no item 2 do Capítulo 8, mas no item 1 o conteúdo de porcentagem é apresentado por meio de uma ideia geral, utilizando-se um pequeno texto informativo e dois exemplos, visando inserir sua representação simbólica, por meio de uma fração com denominador 100 e como um número decimal. O item traz, ainda, uma aplicação do conceito de porcentagem, considerando grupos sanguíneos brasileiros em um gráfico de setores.

O item é encerrado com duas situações-problema que têm como foco evidenciar como fazer o cálculo de porcentagens, destacando o autor a sinonímia existente entre os termos percentagem e porcentagem, deixando claro para o estudante que as duas formas são corretas, apesar de o termo porcentagem ser o mais usual.

O autor apresenta, ainda, duas observações no que diz respeito ao fato de uma porcentagem sempre fazer referência a um determinado valor e com relação a tecla que deve ser utilizada em uma calculadora para calcular a porcentagem de um número. Não fica clara, porém, qual a justificativa para a colocação do conteúdo de porcentagem no Capítulo dedicado ao estudo de possibilidades.

No tópico 2, do mesmo Capítulo, o autor destaca a diferença existente entre os conceitos de possibilidade e de Probabilidade, tomando por base a proposição de duas situações-problema, que envolvem o cálculo do número de possibilidades. Esse cálculo será base para a determinação de espaços amostrais, baseada, em raciocínio combinatório. Como destacam Batanero et al. (2016), esse tipo de raciocínio não é simples de ser compreendido pelo estudante, sendo possível usar inicialmente, para ajudá-lo a desenvolver esse tipo particular de pensamento, os diagramas de árvore.

Usa como exemplo introdutório a primeira situação-problema na qual é sugerida ao aluno que ele calcule o número de possibilidades que uma pessoa de nome Cláudio tem para formar números de três algarismos com a utilização de cartões com os algarismos 4, 5 e 6. O autor não impõe no enunciado da questão nenhuma restrição sobre a repetição, ou não, de algarismos.

O próprio autor apresenta a solução da situação-problema, ao explicitar que Cláudio tem 6 possibilidades para formar tais números. O autor considera, portanto, apenas os casos em que não é permitida a repetição de algarismos, posição que entendemos ser equivocada, uma vez que não foi mencionada essa restrição no enunciado, logo, não há impedimentos para que formemos números de três algarismos, tendo dois algarismos ou três algarismos repetidos. Assim, para resolvermos a questão proposta deveríamos considerar todas as possibilidades para a formação de números compostos pelos algarismos 4, 5 e 6, de modo que possamos incluir, na constituição de um número, a possibilidade de repetir duas ou três vezes o mesmo algarismo.

A identificação de todas as possibilidades será fundamental para a determinação de espaços amostrais, quando for explorado o conceito de Probabilidade, posteriormente, como destacam Batanero et al. (2016), ao defenderem a importância de os estudantes entenderem a necessidade de serem determinadas todos os possíveis resultados em um experimento.

Para facilitar não somente a descrição de todas as possibilidades, mas, também, a visualização destas e a compreensão do raciocínio empreendido para a elaboração da resposta, agrupamos todas as possibilidades em três grupos distintos, identificados pelas letras “A”, “B” e “C”: A) 456, 445, 446, 444, 455, 466, 465; 454, 464 B) 546, 554, 556, 555, 544, 564, 545, 565, 566 e C) 645, 654, 664, 655, 666, 644, 656, 665, 646.

Ao analisar a descrição de todas as possibilidades, elas foram divididas em grupos, de acordo com a fixação dos algarismos 4, 5 e 6 na ordem das centenas. Assim, todos os números do grupo “A” começam com o algarismo 4; todos os números do grupo “B” começam com o algarismo 5 e todos os números do grupo “C” começam com o algarismo 6. Logo, temos três grupos com nove possibilidades de formação de números com três algarismos, totalizando 27 possibilidades.

No trabalho com a identificação das possibilidades de ocorrência de um evento, o professor deve dar destaque à organização desse processo, o que possibilitará a identificação de estratégias gerais, generalizadoras, que permitirão que se determine o valor total, sem a necessidade de serem explicitadas todas as unidades. Em casos como esse, o uso de um diagrama de árvore facilita a visualização das possibilidades, pelo estudante, e pode ajudá-lo a identificar estratégias gerais de contagem. Além disso, como destaca Van de Walle (2009, p.519), os diagramas de árvore constituem um "[...] método de criar espaços de amostra que podem ser usados com qualquer número de eventos".

A resposta seria seis possibilidades, como indicado no livro, se o enunciado da atividade tivesse condicionado expressamente a formação de números de três algarismos com a utilização dos cartões de algarismos 3, 4 e 5, sem a repetição de algarismos no mesmo número, afastando, desta maneira, todas as possibilidades que correspondessem a números constituídos de três algarismos com elementos repetidos.

No entanto, diante da necessidade de explorar o problema visando ampliar o aprendizado do aluno, sugerimos que o professor considere também o explore considerando a inclusão dos casos em que pode haver a repetição de algarismos. Isso ajuda a desenvolver as ideias probabilísticas dos estudantes, levando-os a enxergarem um problema por diferentes ângulos ou a pensarem em novos problemas a partir daquele que estão explorando.

O professor pode também trabalhar com outros algarismos diferentes dos considerados no problema inicial, a saber, 4, 5 e 6. Além do mais, pode propor aos alunos que formem números com mais de três algarismos, por exemplo, com quatro, cinco ou sete algarismos, a partir de uma estratégia de generalização do procedimento de contagem utilizado por eles nos problemas mais simples.

Um problema não precisa ser visto como uma situação matemática estanque, mas como uma possível fonte de novos problemas, os quais, a princípio, podem parecer ocultos aos alunos. Assim, cabe ao professor encorajar os alunos a fazerem conexões com novos contextos e outros conteúdos matemáticos a partir da exploração de problemas dados.

A segunda situação-problema apresenta duas caixas com quatro bolas de cores diferentes em cada uma delas e pede que o aluno encontre o número de pares de bolas diferentes que Brenda pode formar, sendo uma bola de cada caixa. O próprio livro apresenta a resolução da situação-problema por meio da utilização de uma árvore de possibilidades, a partir da qual é calculado que Brenda pode formar 16 pares distintos de bolas.

Esta situação-problema pode ser explorada substituindo-se as duas caixas de bolas contendo quatro bolas de cores diferentes por duas roletas divididas em quatro partes iguais cada uma. Esta intervenção é relevante e necessária, uma vez que remete o aluno a fazer conexão com o conteúdo de frações abordado anteriormente no volume 1 desta coleção de livros didáticos, atendendo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, 1998).

É importante que o aluno tenha esta compreensão e perceba que os conteúdos não são estanques, não se esgotam em si mesmos, pelo contrário, a sua abordagem em um capítulo anterior tem uma razão de ser, pois os diferentes assuntos abordados em diferentes capítulos seguem, ou pelo menos deveriam seguir, uma sequência matemática que não seja aleatória, mas lógica.

Ao se deparar com uma roleta dividida em quatro partes iguais, o aluno será levado a retomar o conceito de frações já abordado, ajudando-o a entender a interligação dos conteúdos matemáticos. O estudo das possibilidades por meio da utilização de roletas pode ainda auxiliar o aluno a ter um conhecimento preliminar a respeito da determinação da Probabilidade Clássica como um modelo de área (VAN DE WALLE, 2009), o qual será abordado em um capítulo posterior deste volume.

Depois de apresentar duas situações-problemas e as respectivas respostas, a título de exemplos, são propostos seis problemas, sendo o primeiro problema relacionado à escolha de bolas de sorvete (Figura 1).

Figura 1 – Enunciado da Atividade 1

Em uma sorveteria são vendidos sorvetes de três sabores: chocolate, morango e baunilha. Faça uma árvore de possibilidades com todos os tipos de sorvete de duas bolas que podem ser montados.

Fonte: SILVEIRA, 2015, p.196

No enunciado da questão, percebemos que não há nenhuma informação que restrinja a montagem do sorvete a apenas àqueles com sabores diferentes ou que determine que apenas devem ser consideradas as possibilidades que consistem em sorvetes montados com sabores diferentes. Perceber a ausência desta imposição/condicional/informação é muito importante, pois ela é decisiva para a correta resolução desta atividade, uma vez que abre espaço para a inserção de outras possibilidades na elaboração da resposta. Temos uma quantidade maior de sorvetes que podem ser montados, sem essa restrição, já que podemos incluir os sorvetes com duas bolas iguais, ou seja, aqueles formados com um único sabor.

Todas as possibilidades podem ser descritas por meio da utilização da árvore de possibilidades, cuja apresentação já ocorreu no Capítulo 2, o que é feito no livro didático, que faz apresenta a solução da questão por meio desse recurso, listando todos os itens de cada ramo, incluindo as possibilidades em que os sorvetes diferem entre si apenas pela ordem em que os sabores estão dispostos, como, por exemplo, quando consideramos que o sorvete formado por chocolate e morango está representado no diagrama como sendo diferente do sorvete constituído por morango e chocolate.

Portanto, ao observamos todas as possibilidades ou todos os tipos de sorvetes constituídos de duas bolas, descritos no diagrama de árvore de possibilidades presente na resposta do livro didático, notamos que o autor enumerou nove possibilidades, incluindo, inclusive, aqueles tipos de sorvetes de duas bolas formados por sabores iguais. Se os sabores tivessem que ser diferentes, as possibilidades seriam seis, e não nove.

Nos dois casos aqui apresentados é importante destacar a importância de trabalhar com os alunos as duas situações, com repetição e sem repetição, discutindo o que deveria estar presente no enunciado, em um e outro caso, para que o aluno possa comparar os resultados e perceber a diferença de raciocínio requerido para resolver cada uma das situações, sem ambiguidades. A problematização pode ser ampliada utilizando-se outras situações presentes no cotidiano do estudante, visando ampliar seu interesse pelo estudo do conteúdo e possibilitar que ele atribua sentido ao conhecimento escolar.

Podemos ainda explorar também se faz diferença ou não a ordem dos sabores, bem como se devem ser consideradas ou não como possibilidades diferentes. O professor deve procurar aprofundar as ideias probabilísticas aqui discutidas, elevando o nível da discussão promovida pelo problema para outros contextos com uma maior diversidade de elementos, por exemplo: a montagem de uma pizza com três, quatro ou cinco ingredientes iguais e/ou diferentes, tendo em vista reforçar a compreensão dos alunos a respeito das ideias de evento e de espaço amostral (BATANERO al al, 2016).

Além disso, é necessário que o professor seja criativo ao explorar o problema, de modo a não o transformar em um simples exercício, evidenciando procedimentos que possam mecanizar ou engessar os processos de resolução, tornando-os previsíveis. O diagrama de árvore de possibilidades deve, na medida do possível, ser utilizado, porque ele favorece a visualização das possibilidades que compõem o cenário probabilístico desenvolvido para a resolução do problema.

Van de Walle (2009) destaca a importância dessa estratégia, principalmente quando se está trabalhando com espaços amostrais de dois eventos independentes, na medida em que os dois são mantidos separados na árvore e as combinações explicitadas em seus ramos, principalmente quando se trata de apenas dois eventos.

O segundo problema traz como contexto uma placa de carro com letras (Figura 2), desafiando o aluno a calcular a quantidade de números de quatro algarismos diferentes que podem ser formados a partir dos algarismos expostos na placa

Figura 2 – Placa do Carro

Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 196

O enunciado estabelece que os números devem ser constituídos por algarismos obrigatoriamente distintos entre si. Neste caso, a análise da figura-suporte é essencial para a descrição de todas as possibilidades, respeitada a imposição feita no enunciado. O aluno deve descrever todas as possibilidades de formação de números com algarismos diferentes, organizando a lista com quatro blocos de números, onde cada bloco seja constituído por números iniciados por cada um dos algarismos presentes na placa.

Essa organização pode ser feita por meio de um diagrama de árvore, examinando-se o espaço amostral, para determinação da solução, o que posteriormente poderá ajudá-lo a identificar quando um problema descreve, ou não, uma distribuição binomial, ou seja, quando há apenas duas opções, ou não, para cada ramo (SMALL; LIN, 2010). Em seguida, basta permutar os três últimos algarismos, já que os números serão compostos por quatro algarismos, como indicado no enunciado do problema e o primeiro algarismo está fixo, em cada um dos quatro blocos. Esta sistematização pode ajudar o aluno a elaborar a sua resposta.

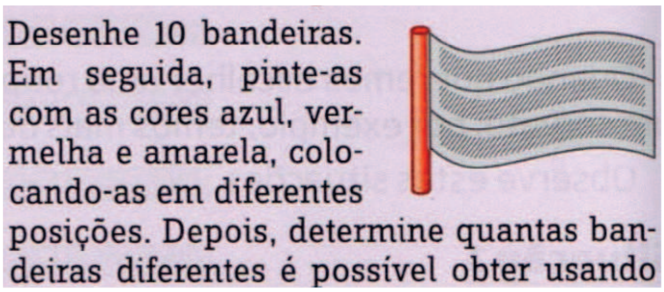
Seguindo este padrão vamos ter o Bloco A: 1687, 1678, 1768, 1786, 1867 e 1876; Bloco B: 6178, 618, 6718, 6781, 6817, 6871; Bloco C: 7168, 7186, 7618, 7681, 7816 e 7861 e Bloco D: 8167, 8176, 8617, 8671, 8716 e 8761.Ao analisar todas as possibilidades descritas, percebe-se que cada um dos quatro blocos de números possui seis possibilidades de números.

Os números 1687, 1678, 1768, 1786, 1867 e 1876 do Bloco A foram organizados de modo que cada um dos números começa com o algarismo 1. O segundo algarismo fixado nos dois primeiros números deste bloco, a saber, 1687 e 1678 foi o algarismo 6, permutando-se entre si o 7 e o 8 na condição de terceiro e quarto algarismo destes dois números.

Para formar os números 1768 e 1786 do Bloco A foi fixado como sendo o segundo algarismo o 7 e permutou-se entre si o 6 e o 8 na terceira e quarta posição. Os números 1867 e 1876 do Bloco A foram formados a partir da fixação do algarismo 8 na condição de segundo algarismo e permutou-se entre a terceira e quarta posição os algarismos 6 e 7. Este mesmo raciocínio foi aplicado na formação de todos os números dos demais blocos. Portanto, podemos formar 24 números com quatro algarismos diferentes constituindo cada um destes números.

O terceiro problema requer como suporte para a sua resolução a utilização de uma figura-suporte (Figura 3), fundamental para que o aluno possa calcular o número de bandeiras diferentes que podem ser obtidas.

Figuras 3 – Atividade 3


Desenhe 10 bandeiras. Em seguida, pinte-as com as cores azul, vermelha e amarela, colocando-as em diferentes posições. Depois, determine quantas bandeiras diferentes é possível obter usando

Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 196

Na figura-suporte as bandeiras devem ter três listras e a maneira mais fácil de obter a resposta para este problema seria o aluno usar letras para codificar as cores azul, vermelha e amarela, por exemplo: Az, Vm e Am, respectivamente. Em seguida, organizaria estas codificações em grupo de três, de modo que cada grupo de três codificações representa uma bandeira diferente obtida por meio do uso destas três cores. Descrevendo todas as possibilidades vamos encontrar as bandeiras B_1: Am, Az e Vm; B_2: Am, Vm e Az; B_3: Az, Am e Vm; B_4: Az, Vm e Am; B_5: Vm, Az, Am; B_6: Vm, Am e Az.

Para conseguirmos diferençar uma bandeira da outra é preciso que percebamos que a ordem das cores é o critério de diferenciação entre as bandeiras. Por exemplo: ao analisarmos as bandeiras (Am, Az e Vm) e (Am, Vm e Az) precisamos considerar as diferentes disposições/posições ocupadas pelas cores azul e vermelha nas duas, para que fique claro que se tratam de duas bandeiras diferentes.

O aluno também pode desenhar as 10 bandeiras e pintá-las com as cores Azul, Amarela e Vermelha, dispondo-as de diversas maneiras diferentes. À medida que ele for pintando as 10 bandeiras, perceberá que vai chegar o momento em que a maneira como ele dispôs as três cores em uma determinada bandeira vai se repetir exatamente igual em uma outra bandeira, indicando que não há mais opções ou formas diferentes de dispor as três cores em uma bandeira que tenha o formato de listras indicado na figura. Logo, é possível obter apenas seis bandeiras diferentes, utilizando as cores azul, vermelha e amarela.

O professor deve propor ao aluno a utilização de diferentes estratégias para se obter uma mesma resposta para um determinado problema. É uma forma de ampliar a capacidade de raciocínio do estudante, incentivando-o a descobrir outras estratégias de resolução para um problema, não deixando que o aluno se limite apenas a utilizar a estratégia sugerida pelo livro didático. Neste caso, o estudante poderia usar a multiplicação ou, ainda, exaurir todas as possibilidades, desenhando e pintando bandeiras ou escrevendo as ternas de cores.

Não podemos nos esquecer que o livro didático não é o único recurso/material de apoio que o professor tem à sua disposição para lhe auxiliar no desenvolvimento de sua prática docente. Então, defendemos que nem o aluno e tampouco o professor deve se limitar a utilizar exclusivamente o livro didático no estudo de Probabilidade. Ambos devem buscar outras fontes de informação e outros materiais de apoio que possibilitem o desenvolvimento de um processo de ensino comprometido com a aprendizagem dos alunos.

O quarto problema solicita que o aluno determine todas as possíveis adições com resultado igual a 6, com apenas dois números naturais. A resposta para este problema deve descrever todas as adições possíveis envolvendo dois números naturais com a soma indicada. O enunciado do problema não faz nenhuma consideração acerca da ordem dos números na soma ser ou não importante para a constituição das possibilidades.

Apesar disto, a resposta apresentada no livro didático é: 0 + 6; 1 + 5; 2 + 4; 3 + 3; 4 + 2; 5 + 1; 6 + 0, onde a ordem dos números foi levada em consideração para a obtenção de uma nova possibilidade, pois, mudando-se a ordem de 0 + 6 para 6 + 0 considera-se como outra possibilidade para a soma 6. A mesma coisa ocorre com as demais composições mencionadas. Em situações de adição as ordens devem ser consideradas devido à ordem das parcelas. É importante o professor explorar isso.

Então, mesmo que o enunciado do problema não tenha deixado claro que a mudança da ordem de dois números naturais em adições cuja soma fosse 6 devia ser considerada como uma possibilidade diferente, o livro didático o faz na resposta, ao considerar a ordem dos números na exposição de todas as possibilidades. Portanto, a resposta corresponde a sete possibilidades de adições de soma 6.

Se a ordem não importasse para a composição de uma nova possibilidade, a resposta seria apenas 0 + 6; 1 + 5; 2 + 4; 3 + 3, isto é, quatro possibilidades de adições de dois números naturais com soma igual a 6. O problema, como percebemos, não foi claro em seu enunciado, pois deixou margem para uma dupla interpretação pelo aluno, o que pode gerar dificuldades de compreensão do conteúdo.

A quinta atividade sugere a produção, pelo aluno, de uma situação com várias possibilidades (Figura 4).

Figura 4 – Enunciado da Atividade 5

Escreva um exemplo de situação com várias possibilidades.

Fonte: SILVEIRA, 2015, p.196

Embora o enunciado não seja muito claro, entendemos que o estudante tenderá a se guiar pelo último exemplo destacado (combinação de pares de números naturais, com soma igual a seis), ou basear-se nas situações já trabalhadas por ele anteriormente, entendendo ser importante solicitar que ele elabore problemas, entendendo que será esperado que, como afirma Chica (2001), inicialmente sinta dificuldades para formular os seus próprios problemas.

Cabe ao professor, em casos como esse, avaliar se os problemas criados pelos alunos são de fato problemas matemáticos, se estão dentro do conteúdo abordado, se são solucionáveis e se são adequados ao nível de escolaridade considerado, não sendo fáceis ou difíceis demais.

Entendemos que os problemas elaborados pelos alunos podem ajudar o professor a avaliar seu nível de conhecimento e de compreensão, considerando, ainda, as discussões feitas em sala de aula. O professor deve verificar se a abordagem do conteúdo se refletiu ou contribuiu de alguma forma para a formulação dos problemas. Espera-se que o aluno problematize o conhecimento que está sendo construído, articulando-o com outros conhecimentos prévios.

A elaboração de problemas ajuda o estudante a refletir sobre o seu conhecimento, possibilitando que perceba a estrutura de um problema matemático por meio de uma perspectiva mais ampla, tendo a preocupação com a construção do enunciado, de modo que este seja objetivo, claro e adequado quanto à expressão de suas ideias.

A sexta atividade envolve a escolha de uma refeição, considerando-se três tipos de macarrão; quatro tipos de molho e dois tipos de sobremesa. Assim, o aluno deve calcular o número total de possibilidades que alguém chamado Roberto tem para escolher um macarrão com um molho e uma sobremesa.

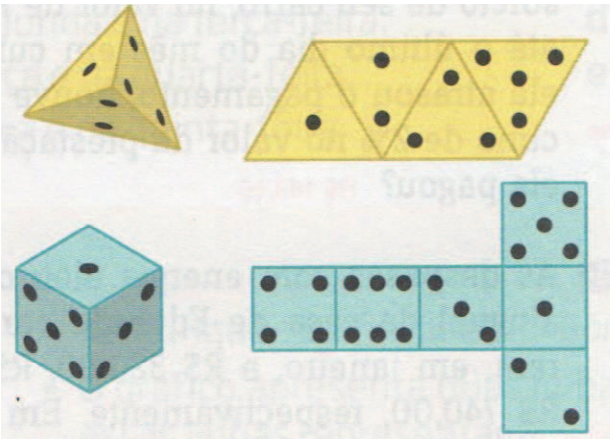
O aluno deve procurar descobrir uma estratégia que possibilite a descrição de todas as possibilidades, sendo uma delas estabelecer códigos para representar cada um dos componentes da refeição, usando por exemplo, suas iniciais. Como são três tipos de macarrão, ele pode denominá-los de $Ma_{1,}$ Ma_2 eMa_3; os quatro tipos de molhos serão Mo_1, Mo_2, Mo_3 e Mo_4; e os dois tipos de sobremesa serão identificados por So_1 e So_2. As refeições serão representadas pela letra R, seguida de um índice natural. A partir daí o aluno pode formar as refeições utilizando tais códigos.

Pode ser também utilizado o diagrama de árvore de possibilidades, que permite dispor todas as informações de modo organizado, oferecendo ao estudante condições de visualização completa de todas as possibilidades, sendo, por esta razão, a estratégia mais fácil, usando a multiplicação. Usando-se um ou outro método, espera-se que o estudante encontre as 24 possibilidades que Roberto possui de escolher um macarrão com molho e uma sobremesa.

No final do Capítulo 8 é apresentada uma seção intitulada “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”, composta de 16 atividades e dois desafios, destas apenas uma atividade referente à Probabilidade, a saber, a atividade 9. As atividades de 1 a 8 são referentes ao conteúdo de porcentagem, abordado no tópico 1. As atividades 10 a 16 envolvem ainda porcentagem, representação dos dados de uma tabela em um gráfico de barras horizontais; leitura, análise e interpretação de gráficos. Os dois desafios também tratam de porcentagem

Na atividade 9 solicita-se que sejam observadas as duas imagens da Figura 5, sendo uma de um dado convencional (numerado de 1 a 6) e a outra de um dado tetraédrico (numerado de 1 a 4).

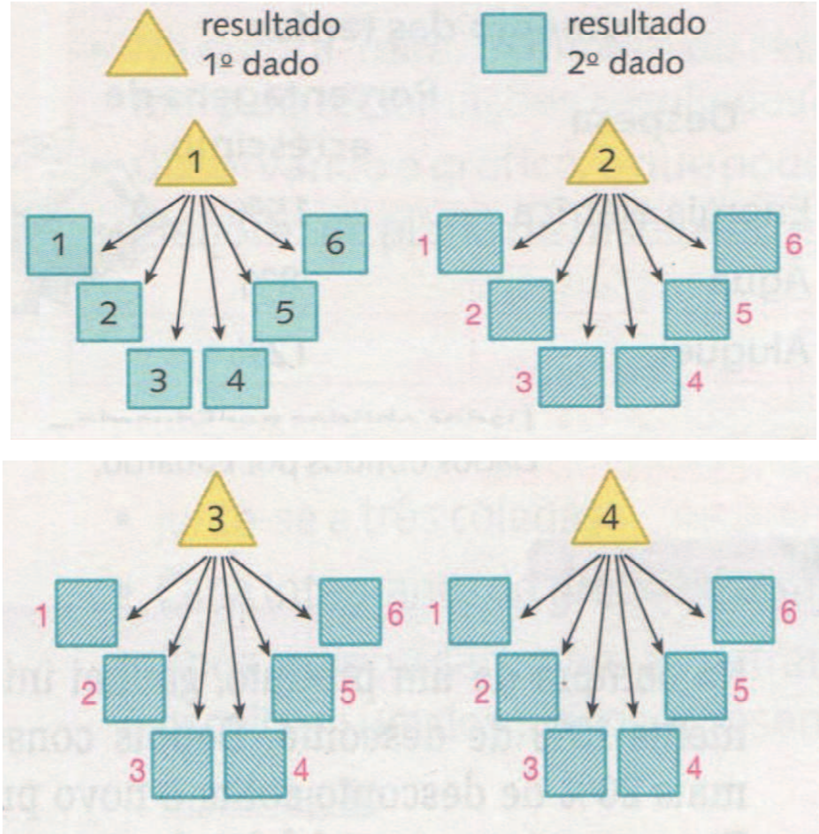
Figura 5 – Dados Tetraédrico e Convencional Com Suas Respectivas Planificações



Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 204

Pede-se a complementação de uma árvore de possibilidades referente ao lançamento dos dois dados, para os casos em que podem ser obtidas soma 5 e soma 10 (Figura 6).

Figura 6 – Árvore de Possibilidades



Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 204

Apesar de o contexto adotado ser um dado, este problema se diferencia dos demais que até agora analisamos, por se referir a um dado tetraédrico, isto é, um dado não convencional, implicando em uma mudança de situação. Isso amplia as condições de desenvolvimento do pensamento probabilístico dos discentes, levando-os a comparar o total de possibilidades possíveis existentes em cada um dos dados. Além disso, ajuda a despertar o interesse do aluno, na medida em que envolve contextos novos, a exemplo do dado tetraédrico, que não é tão comum no dia a dia.

Além disso a solução envolve um diagrama diferente, como podemos ver nas figuras-suporte, construído a partir da utilização das faces dos dois dados, possibilitando que os alunos se familiarizem com o dado tetraédrico e vivencie novas situações de aprendizagem.

Ao analisarmos o diagrama de possibilidades, perceberemos que há quatro casos com soma 5, a saber: 1 + 4; 2 + 3; 3 + 2; e 4 + 1. Com soma 10, temos somente um caso, qual seja: 4 + 6. O professor pode ampliar a discussão abordando outros tipos de dados como, por exemplo, dado com oito faces, e problematizar outras situações que envolvam três dados ou quatro dados, estipulando outras somas ou outras operações aritméticas, por exemplo, a multiplicação.

De modo geral, percebemos, em nossa análise do livro do 6º Ano, que a proposta do trabalho com o conteúdo de Probabilidade é que este seja iniciado a partir do seu aspecto teórico mais básico, ou seja, através do estudo das possibilidades, sendo introduzido por meio de duas situações que visam exemplificar a diferença entre possibilidade e probabilidade.

As questões propostas em seguida envolvem a determinação do número de possibilidades em diferentes contextos e visam o uso de diferentes estratégias, como a contagem direta de soluções, o traçado de árvores de possibilidades e o princípio multiplicativo, embora o enunciado de alguns problemas não tenha sido suficientemente claro, uma vez que não foi explicitado se certas variáveis podiam, ou não, ser repetidas na enumeração das possibilidades.

Quando um problema possui um enunciado mal elaborado, incompleto, contraditório, confuso ou ambíguo, mesmo que o aluno o releia diversas vezes, é difícil definir o que fazer para elaborar uma resposta, em razão da ausência ou insuficiência de informações e dados contidos e que seriam necessários para a sua resolução.

Pais (2013) destaca a relevância da interpretação do enunciado de um problema como sendo uma necessidade que se impõe diante do desafio de se resolver um problema matemático adequadamente. Sendo assim, sugerimos ao professor que procure apresentar para os alunos problemas matemáticos que possuam um enunciado bem elaborado, uma vez que a sua redação poderá interferir direta ou indiretamente na resolução de um problema.

Conforme o mencionado autor, a interpretação de um enunciado envolve basicamente duas problemáticas. A primeira delas pode decorrer diretamente da própria construção ou da estrutura do enunciado, isto é, a forma como o enunciado foi redigido, gerando para o educando dúvidas com relação a sua correta interpretação, abrindo-se margem para mais de uma interpretação. Isso dificulta a compreensão do aluno, de modo que ele não consegue resolver o problema que lhe foi proposto. E a segunda dificuldade com relação a interpretação do enunciado de um problema matemático pode ser o nítido reflexo de alunos que não leem com habitualidade.

Diante disso, o autor sugere aos professores que procurem explorar a interpretação de enunciados problemas matemáticos com os seus alunos, estimulando os discentes a explicarem a sua interpretação. O professor pode também promover discussões em sala de aula, levando em consideração as diferentes interpretações de um mesmo enunciado.

Seguindo o pensamento de Hiebert et al. (1997), citado por Walle (2009), entendemos que, de modo geral, o autor utiliza situações e atividades matemáticas que demandam dos alunos o desenvolvimento de estratégias vinculadas ao pensamento probabilístico para obter a solução das questões propostas, apesar das ressalvas que apresentamos.

Como ficou evidente ao longo da nossa análise, o livro não abordou o conceito de Probabilidade, mas apenas introduziu o conceito de possibilidade, a partir da apresentação de situações-problema resolvidas ou propostas ao aluno, sem, no entanto, explorar as situações de um modo que promovesse um aprofundamento conceitual com relação à composição de cada possibilidade na exposição das soluções.

No espaço direcionado às orientações ao professor, o autor trata das duas ideias, embora se limite apenas a informar que elas são distintas, mas não há uma discussão detalhada a respeito da natureza e da organização dos elementos que compõem cada possibilidade, e o autor não descreve os detalhes ou as particularidades que devem ser considerados para a constituição dessas possibilidades

Ao abordar o conteúdo de Probabilidade no 6º Ano, o professor deve considerar, portanto, a necessidade de diferenciar incialmente os conceitos de Probabilidade e de possibilidade. Considerando a coleção de livros didáticos adotada pela escola, é importante que o professor comece a abordar o conteúdo a partir da análise do problema por meio de três vias, a saber, resolução, exploração e proposição de novos problemas.

Desta forma, não deve se limitar a propor aos alunos que simplesmente resolvam um problema, o que implicaria na perda de oportunidade de explorar/trabalhar as potencialidades de uma questão proposta. Do mesmo modo, é fundamental propor a articulação entre diferentes modelos probabilísticos, para que o estudante passe a enxergar a Probabilidade por meio de diferentes ângulos e fortaleça a sua compreensão acerca deste conteúdo, como sugerem Batanero e Días (2006).

Recomendamos que o educador encoraje os estudantes a argumentarem por escrito sobre os procedimentos adotados por eles na resolução dos problemas, pois a escrita ajuda no processo de aprendizagem, na medida em que auxilia a organização do pensamento. Ao explorar um problema probabilístico defendemos que o professor promova o surgimento de novas situações probabilísticas empíricas e contextualizadas não contempladas no problema inicial, fazendo deste modo desencadear novas possibilidades de aprendizagem.

Propomos que o professor antes de abordar o conteúdo de Probabilidade verifique quais conhecimentos podem ser retomados e fortalecidos, de modo a considerar as abordagens feitas em capítulos anteriores e que de alguma maneira possam ajudar o aluno no entendimento do que está estudando. Recomendações específicas sobre o estabelecimento do cálculo de Probabilidade e Frações são explicitadas, por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

Por esta razão, é importante avaliar a localização do conteúdo de Probabilidade nos livros da coleção adotada, verificando quais conteúdos antecedem e sucedem seu estudo. Isso se justifica devido à necessidade de despertarmos nos estudantes uma percepção mais ampla do conhecimento matemático e suas conexões internas e, especificamente, do conhecimento probabilístico em relação a outros conteúdos matemáticos trabalhados na Educação Básica.

É importante que o professor busque sempre que possível explorar os problemas probabilísticos em uma perspectiva prática ou empírica (BRASIL, 1998), abrindo o leque de possibilidades quando se analisa um problema de probabilidade levando em consideração a interação entre os diversos modelos probabilísticos.

Para este nível escolar e observando a proposta do volume 1 ora analisada, entendemos que a Metodologia de Resolução, Exploração e Proposição de problemas é recomendável porque cria condições favoráveis para que o professor explore as potencialidades das atividades em forma de problema e que possibilitam destacar para o aluno a diferença entre o significado de possibilidade e de Probabilidade.

Em nossa análise, destaca-se a importância da utilização do princípio multiplicativo para a obtenção do número de possibilidades, no entanto, este dispositivo não deve ser apresentado pronto para o estudante fazer o uso mecânico deste mecanismo na resolução de um problema. A exploração dos problemas de Probabilidade do livro didático deve estimular os estudantes a elaborarem diagramas de árvore de possibilidades e a utilizarem o princípio multiplicativo como uma decorrência lógica do procedimento de solução de determinados tipos de problema.

4.2. ANÁLISE DO CAPÍTULO 8 DO LIVRO DO 7º ANO

O segundo livro analisado é o dirigido a estudantes do 7º Ano do Ensino Fundamental, da mesma coleção. Ele possui 11 Capítulos e apenas no Capítulo 8 são abordados conteúdos de Educação Estatística: o conceito de probabilidade e a noção de experimento aleatório; o cálculo de probabilidades; gráficos de barras verticais e barras horizontais; média aritmética simples; média aritmética ponderada; mediana e moda.

Os objetivos deste Capítulo referentes especificamente à Probabilidade são, segundo o autor: a) levar o estudante a compreender o que é probabilidade; adquirir a noção de experimento aleatório e saber diferenciar um experimento aleatório de outro não aleatório; b) Capacitar o estudante para calcular probabilidades; identificar situações nas quais esse tipo de cálculo é necessário e mobilizar os conhecimentos construídos para a resolução de problemas.

No que se refere à Probabilidade, no Capítulo o autor defende a relevância e a necessidade de se introduzir o pensamento probabilístico a partir de uma discussão a respeito do significado da palavra “aleatório” e da realização de um experimento aleatório. Para Batanero et al. (2016), a aleatoriedade é um conceito fundante para a Probabilidade e nem sempre é definido em livros didáticos.

O autor do livro didático sugere que o professor procure simular sorteios em sala de aula; desenvolver experimentos; explorar o significado Frequentista de probabilidade por meio do lançamento de dados e moedas e fazer perguntas referentes aos lançamentos, tendo em vista mobilizar os conhecimentos prévios dos estudantes, demandados para o estudo de Probabilidade, embora não explicite quais são eles.

O autor sugere que o professor faça perguntas a respeito da chance de se obter “cara” ou “coroa”, no lançamento de uma moeda, antes de sua realização, por exemplo, uma vez que esta seria uma maneira de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca de elementos básicos associados à Probabilidade. É sugerido, também, que o professor estimule os alunos a socializarem as respostas de suas atividades e a desenvolverem pesquisas atinentes à gênese do termo Probabilidade, como também a respeito do seu desenvolvimento histórico.

Neste último caso, entendemos ser essa tarefa muito complexa para estudantes do Ensino Fundamental, uma vez que a evolução histórica do conceito de Probabilidade envolve aspectos de natureza linguística e mesmo filosófica, como ressaltam Batanero et al. (2016), que implicaram no desenvolvimento dos vários significados discutidos pelos autores, para esse conceito.

Para o autor, o professor deve incentivar os seus alunos a desenvolverem um espírito investigativo, sugerindo aos estudantes que utilizem a Internet como fonte de pesquisa. Entretanto, entendemos que o autor deveria ter sido mais claro com relação aos objetivos a serem alcançados com tais pesquisas, esboçando, mesmo que brevemente, algumas diretrizes para a prática dessa atividade.

O professor deve ainda, de acordo com as orientações do autor referentes a esse Capítulo, trabalhar o conceito clássico ou teórico de Probabilidade remetendo os alunos ao conceito de razão, trabalhado no Capítulo anterior do mesmo livro, procurando deixar evidente para os alunos que a Probabilidade, por ser uma razão expressa como uma fração irredutível, pode também ser representada como um número decimal ou, então, como uma porcentagem. A utilização das três formas numéricas de representação do conceito de Probabilidade ajudaria o aluno a ampliar sua compreensão acerca deste conteúdo.

O autor do livro analisado orienta ainda o professor a abrir uma discussão com seus alunos acerca da impossibilidade de trabalharmos com probabilidade negativa, bem como de obtermos uma probabilidade maior que 1, enfatizando para o aluno que o valor de uma probabilidade sempre estará compreendido no intervalo fechado que varia de 0 a 1, característica central da Probabilidade Lógica (BATANERO; DÍAZ, 2005).

De acordo com as sugestões do autor, cabe ao professor induzir os alunos a tirarem suas conclusões sozinhos, porém, mediados por ele, mediante o implemento de situações probabilísticas em sala de aula que retomem o conceito de razão, abordado no capítulo anterior do livro. Deste modo, os alunos seriam levados a perceber que a probabilidade pode ser dada na forma de uma razão, por meio da comparação de dois valores numéricos, correspondentes às possibilidades favoráveis e ao número total de possibilidades de um determinado experimento.

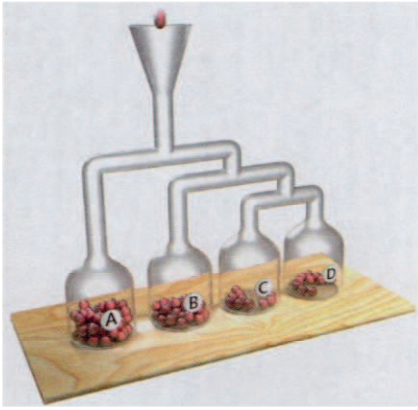
Estas orientações abrem espaço para que o professor use a metodologia de Resolução de Problemas, levando o aluno a participar ativamente/efetivamente e de forma livre das atividades desenvolvidas em sala de aula, fazendo uso de conhecimentos prévio e da elaboração de estratégias que possibilitem a compreensão de elementos pertinentes ao conceito de Probabilidade, de modo gradativo.

Sugerem, desta forma, uma alternativa ao ensino tradicional de Probabilidade o qual possui como um dos seus aspectos centrais no ensino da Teoria das Probabilidades a preocupação com o uso mecânico, por exemplo, de fórmulas ou com a aplicação autômata de relações matemáticas de resolução, sem que seja exigido do aluno um raciocínio anterior, analítico e crítico que lhe possibilite a construção de estratégias de resolução por meio do seu conhecimento prévio juntamente com os dados matemáticos fornecidos pelo problema.

Assim, percebemos que não se trata aqui apenas da mera obtenção da razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades, evidenciada nos livros didáticos, sem que se observe se os estudantes entenderam a natureza dos elementos essenciais ao pensamento probabilístico, como a ideia de aleatoriedade; o que é um evento e um espaço amostral; como determinar procedimentos efetivos e práticos de contagem; dentre outros (BATANERO et al., 2016), embora neste volume o autor não tenha ainda formalizado estes conceitos.

Quanto ao Capítulo 8, são apresentadas três questões iniciais envolvendo fenômenos do cotidiano, relativas a previsões de situações diversas. Os dois primeiros casos envolvem as seguintes questões: (1) Será menino ou menina? (2) Será que amanhã vai fazer sol?" (SILVEIRA, 2015, p.164). No terceiro caso, são dados quatro recipientes interligados entre si e identificados pelas letras A, B, C e D (Figura 7). Questiona-se, em relação à figura dada, se é maior a chance de a bolinha cair no recipiente A do que nos outros três recipientes.

Figura 7. Ilustração de recipientes interligados.



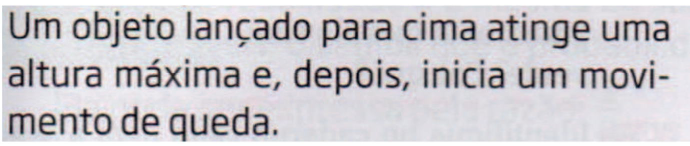
Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 164

Ao discutir sobre “O que é probabilidade”, o autor destaca os casos em que o resultado final já é previsto de antemão, isto é, antes do mesmo acontecer, e de outros tipos de experimentos, denominados de experimentos aleatórios, os quais somente conhecemos antecipadamente os seus possíveis resultados, mas não podemos afirmar previamente qual será o seu resultado final.

Neste segundo caso, podemos apenas medir as chances de certo resultado acontecer por meio do cálculo de sua Probabilidade. Segundo o autor, trata-se de experimentos que podem ser repetidos à exaustão e sob as mesmas condições, mas quase sempre apresentarão resultados imprevisíveis, os quais são determinados pelo acaso. A ideia de aleatoriedade não é de fácil compreensão e precisa ser definida e discutida nos livros didáticos, como defendem Batanero et al. (2016) e retomada sempre que necessário.

Dois experimentos apresentados no tópico citado se referem a um objeto em movimento. O primeiro experimento trata de uma situação que envolve o lançamento de um objeto qualquer para o alto (Figura 8). Ao analisarmos este experimento percebemos que o seu agente precisa saber, de antemão, que o objeto lançado para cima iniciará um movimento de queda, pelo fato de estar submetido à força da gravidade.

Figura 8 – Enunciado do Experimento 1


Um objeto lançado para cima atinge uma altura máxima e, depois, inicia um movimento de queda.

Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 165

O outro exemplo é o de um bloco que foi impulsionado em uma superfície plana, tendo o fim do seu deslocamento de antemão conhecido (Figura 9).

Figura 9 – Enunciado do Experimento 2

Um bloco impulsionado sobre uma superfície plana se desloca e, depois, para.

Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 165

A mesma coisa ocorre com o segundo experimento, onde o agente necessita saber, antecipadamente, isto é, antes mesmo de pôr o bloco em movimento, que o bloco, ao se deslocar sobre uma superfície plana, voltará ao estado inercial, em razão da força de atrito e outras forças exercidas sobre o objeto, como sua massa.

Os outros dois experimentos se referem às seguintes situações: (1) ao número que sairá quando lançamos um dado; e (2) às opções que obtemos (cara ou coroa) ao lançarmos uma moeda. Nestes dois últimos experimentos conhecemos todos os resultados possíveis de cada experimento, entretanto, não podemos assegurar previamente qual resultado teremos de fato.

Entendemos que a diferença da natureza dos dois conjuntos de exemplos não é de fácil compreensão, em especial para estudantes do Ensino Fundamental, não apenas por demandarem conhecimentos da Física, mas, também, por envolverem variáveis de natureza distintas, como possíveis resultados. No primeiro caso, estão envolvidas unidades de comprimento, que são contínuas, e, no segundo caso, unidades discretas de contagem.

Conforme o autor, se forem utilizados um dado e uma moeda simétricos em relação ao seu centro, os eventos que os envolvem são equiprobabilísticos, isto é, todos os possíveis resultados têm a mesma probabilidade de sucesso. Desta forma, no dado, as probabilidades de obtermos quaisquer dos números 1, 2, 3, 4, 5 ou o 6 são iguais, a saber, 1/6 ou 16, 666...% cada. A mesma coisa ocorre no caso do lançamento da moeda, isto é, as probabilidades de obtermos cara ou coroa é sempre a mesma, a saber, 1/2 ou 50% cada.

Sabemos, entretanto, da complexidade que está por trás dessa discussão, na medida em que ela pode envolver um significado complexo da Probabilidade, que é o de Propensão. Como destacam Batanero et al. (2016), quando você lança um dado como o descrito pelo autor, não há uma forte tendência (propensão) de 1/6 de obtermos o número 5 quando lançamos o dado um grande número de vezes, e esse valor, equivalente a cerca de 16%.

Em seguida são propostas seis atividades, apresentando a primeira delas quatro experimentos que o aluno deve indicar como aleatórios ou não. Morgado et al. (1991) discutem os conceitos de experimento aleatório e de experimento determinístico, sendo o primeiro aquele que produz resultados diferentes, dependendo das condições de desenvolvimento do evento, e o segundo o que apresenta sempre o mesmo resultado quando repetidos e submetidos às mesmas condições. Entendemos que essa distinção não seja fácil de ser compreendida pelo estudante e necessita ser retomada várias vezes.

Os quatro experimentos que o aluno deve classificar como aleatórios, ou não, são: (a) obtenção de um número ímpar no lançamento de um dado; (b) acertar o lançamento de uma bola ao cesto; (c) obter coroa, após o lançamento de uma moeda; e (d): observar o Sol durante o período de 24 horas e averiguar se ele se põe ou não.

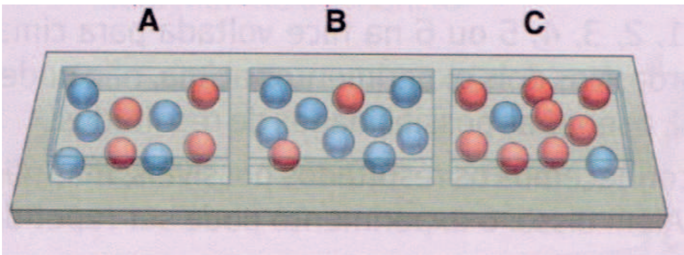
As alternativas correspondentes a eventos aleatórios são os itens “a” e “c”. A alternativa “a” descreve um experimento aleatório, já que, apesar de conhecermos previamente todas as possibilidades, não podemos afirmar de antemão se de fato o resultado obtido após o lançamento de um dado será um número ímpar, uma vez que o valor da face voltada para cima depende exclusivamente do acaso.

A alternativa “c” também descreve um experimento aleatório, pois é impossível afirmamos antes do lançamento de uma moeda qual a face obtida, pois, mesmo que este experimento fosse repetido várias vezes, sob as mesmas condições, ainda assim, seria impossível afirmamos com certeza se sairia o resultado cara. Os outros dois itens descrevem situações que não dependem do acaso, uma vez que acertar, ou não, uma bola ao cesto dependerá de vários fatores, como a experiência do jogador, distância do cesto, dentre outros, e, no segundo caso, sabemos, antecipadamente, que o sol irá se por. Ressaltamos, porém, que nem sempre é fácil distinguir expectativa de distribuição de Probabilidade, ideias que compõem o conjunto das que são fundamentais para o pensamento probabilístico (BATANERO et al., 2016).

A segunda atividade solicita que o aluno dê exemplos de dois experimentos aleatórios e três não aleatórios. Nela, o autor não impõe nenhuma restrição quanto ao uso ou não de exemplos presentes na apresentação do conteúdo e das questões já resolvidas. A resposta para esta atividade é pessoal e não são dados exemplos de possíveis respostas, para o professor.

A terceira atividade é um problema no qual são dadas bandejas nomeadas de A, B e C para que uma criança de nome Luís, de olhos vendados, sorteie uma bola de uma delas ao acaso (Figura 10).

Figura 10 – Bandejas com bolas



Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 166

O problema consiste em saber de qual bandeja é mais provável que Luís retire uma bola vermelha e de qual é menos provável. Destacamos que, neste problema, os espaços amostrais correspondentes a cada bandeja são dados por uma figura-suporte, contendo a quantidade de bolas de cada bandeja, em duas cores diferentes. Como podemos observar, pela imagem, é mais provável que Luís tire uma bola vermelha da bandeja C, uma vez que, das nove bolas da bandeja A, somente quatro são vermelhas; das 10 bolas existentes na bandeja B, somente duas são vermelhas; e das 10 bolas contabilizadas na bandeja C, oito bolas são vermelhas.

Assim, é mais provável que Luís retire uma bola vermelha da bandeja C, pois tal bandeja possui o maior número de bolas vermelhas em relação ao número total de bolas e, portanto, o maior número de possibilidades propícias a ocorrência de tal evento. Usando o mesmo raciocínio, conclui-se que é menos provável que Luís retire uma bola vermelha é a bandeja B, pois é a bandeja onde há o menor número de bolas vermelhas em relação ao número total de bolas presentes na bandeja B. O fato de Luís estar de olhos vendados garante que as bolas sejam retiradas de maneira aleatória, sem que haja qualquer interferência pessoal.

A presença de figuras-suporte em um problema de probabilidade estimula o aluno a explorar outras formas de representação. De acordo com Carvalho, Silva e Paraíba (2016), as figuras-suporte propiciam o estabelecimento de condições que ajudam o aluno a compreender melhor os problemas probabilísticos, trazendo elementos importantes que auxiliam o educando a resolver a atividade, não se constituem, portanto, em uma mera ilustração.

Ainda com base na mencionada pesquisa, entendemos que não devemos nos restringir a utilizar somente as categorias textos e figuras nas atividades de Probabilidade, já que a não utilização de outras formas de representação pode limitar o desenvolvimento da compreensão conceitual dos estudantes. Por isso, sugere tal pesquisa, que é preciso o emprego também de tabelas, gráficos e diagramas, por exemplo, de modo a ampliar o conceito de Probabilidade e estimular o pensamento probabilístico dos educandos.

A pesquisa citada ainda sugere que os livros didáticos abordem o conteúdo de probabilidade a partir do modelo empírico ou Frequentista, como uma forma de concepção conceitual que pode desencadear a exploração de novas situações matemáticas mediante problemas que ensejem o uso de outras formas de representação.

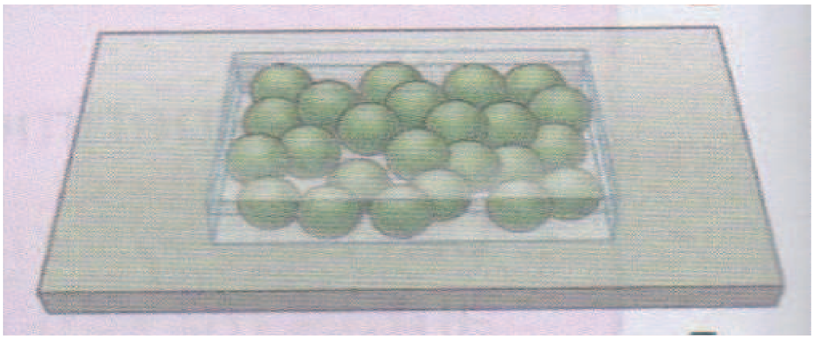
A não compreensão pelo aluno dos significados das expressões "mais provável" e "menos provável" pode dificultar a resolução da atividade. Sendo assim, é uma atividade que explora o conceito de Probabilidade a partir de uma perspectiva Intuitiva, embora o aluno precise lançar mão do significado Clássico, associando uma fração a cada bandeja, e, comparando-as, indicar qual é a maior delas.

Na resolução da atividade o aluno pode utilizar os conhecimentos elaborados acerca de eventos equiprobabilísticos, onde foi apresentada uma breve discussão acerca da probabilidade de sair "cara" ou "coroa" no lançamento de uma moeda ou de sair qualquer um dos números 1,2,3,4,5 ou 6 no lançamento de um dado. Ela não exige a repetição de nenhum procedimento pré-estabelecido como método de resolução. Ao contrário, é necessário que o aluno amplie uma ideia que já foi discutida, só que, neste caso, sob uma perspectiva mais informal, uma vez que não se solicita o valor numérico da Probabilidade.

Na quarta atividade também é dada uma figura-suporte em forma de bandeja com uma certa quantidade de bolas de mesma cor (verde) (Figura 11), solicitando-se que o aluno responda, justificando sua resposta, se é possível assegurar com certeza que, ao retirar uma bola, esta será verde.

Figura 11 – Bandeja com bolas de mesma cor.

:



Fonte: SILVEIRA 2015, p.166

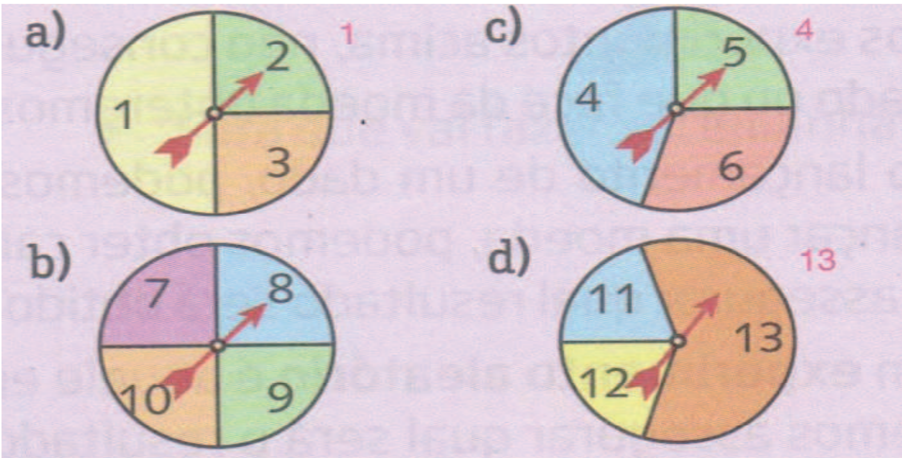
Podemos determinar a solução deste problema a partir do significado Lógico de Probabilidade (BATANERO; DÍAZ, 2005), uma vez que podemos afirmar categoricamente que a bola retirada será verde, podendo o aluno argumentar que o fato de todas as bolas da bandeja serem verdes lhe garante isso. O fato de a atividade exigir do aluno uma justificativa, e não apenas a resposta, estimula-o a desenvolver uma linguagem argumentativa matemática e sua capacidade de escrita, ações que ajudam a romper com a ideia de a Matemática se resumir ao desenvolvimento de algoritmos, cálculos e operações.

Na quinta atividade solicita-se que o aluno denomine os três experimentos que são apresentados como “certo”, “provável” ou “improvável”. A letra (a) afirma que, após um dado numerado de 1 a 6 ser lançado, é possível conseguir o número 7; A letra (b) afirma que não haverá empate em um jogo de futebol; e, a letra (c) afirma que lançados dois dados, obteremos dois números distintos.

Ao analisar o item (a) concluímos que é improvável que ocorra o número 7. No item (b), é improvável que não haja empate. E no item (c), temos que é provável que sejam obtidos no lançamento de dois dados numerados de 1 a 6 dois números distintos.

Na última atividade solicita-se que os alunos identifiquem, ao girarem a flecha de cada uma das quatro roletas dadas, qual valor seria mais provável de ser sorteado. A roletas são dadas em forma de figura-suporte (Figura 12).

Figura 12 – Roletas numeradas



Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 166

Para que os alunos consigam resolver esta atividade é fundamental a leitura da figura-suporte, pois ela fornecerá todas as informações necessárias para que eles, a partir de uma aplicação da Probabilidade Clássica associada à ideia de área, compreendam que uma área maior está associada a uma maior probabilidade de obtenção do número considerado.

Nesta atividade o professor pode explorar a noção de probabilidade geométrica por meio do conceito de área presente nas roletas, porém, não com o status de um novo significado probabilístico distinto daqueles que já foram apresentados por nós neste trabalho, uma vez que a probabilidade geométrica não se refere a mais um modelo de probabilidade, mas se trata de uma outra forma de representação a qual pode estar associada a quaisquer dos diferentes significados probabilísticos que discutimos em nosso texto.

O que irá determinar o significado probabilístico abordado a partir do qual será explorada a probabilidade geométrica será o tipo de abordagem desenvolvida pelo professor, bem como a natureza das atividades de probabilidade trabalhadas por ele em sala de aula.

Conforme Coutinho (2007) a probabilidade geométrica foi abordada por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon e matemático francês do século XVIII, em um momento histórico onde os jogos de azar estavam em pleno desenvolvimento. De acordo com a mencionada autora, este matemático explorou a noção de probabilidade geométrica por meio de um jogo desenvolvido a partir do lançamento de uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas idênticas, de modo que os participantes apostavam acerca da posição final da modela, em que se discutia se a moeda ficaria totalmente posicionada sobre uma única lajota ou se ficaria entre mais de uma lajota juntas.

De acordo com Van de Walle (2009, p.519), a abordagem de Probabilidade como área "[...] é fácil dos estudantes usarem e compreenderem em experiências envolvendo dois eventos independentes quando a probabilidade de cada um é conhecida". Os casos representados pelas roletas da Figura 12 envolvem mais de dois eventos independentes, mas seriam ainda de compreensão bastante razoável, segundo o mesmo autor.

Para responder à questão proposta, os estudantes não precisariam calcular o valor da probabilidade de cada número, em cada roleta, mas apenas usar sua capacidade de comparar áreas de figuras planas, o que é facilitado pela forma da roleta, que no item (a) foi dividida em 3 partes, representadas pelos números 1,2 e 3, sendo o número 1 associado à maior área, sendo, por isso, o valor mais provável de se obter.

No item (b), o aluno deve constatar que nenhum dos valores é mais provável de ser obtido, tomando-se por base as informações fornecidas pela figura-suporte deste item, uma vez que a roleta foi dividida em quatro partes iguais, o que significa que os valores 7, 8, 9 e 10 possuem a mesma probabilidade de serem obtidos, ou seja, são eventos equiprováveis.

No item (c), percebemos que a roleta foi dividida em três partes, representadas pelos números 4,5 e 6, sendo que o número 4 está associado à parte de maior área. Logo, afirmamos que é mais provável neste item que o número 4 seja obtido. Finalmente, No item (d), percebemos que a roleta, ao ser dividida em três partes, representadas pelos números 11,12 e 13, teve o número 13 relacionado à porção de maior área, portanto, o valor 13 é o mais provável de ser obtido.

O tópico 2, intitulado "Cálculo de probabilidades", é introduzido a partir de um problema que se refere ao sorteio de um aparelho de som entre os 1000 alunos de uma determinada escola, cujos sextos anos têm cerca de 80 alunos, e os terceiros anos, cerca de 50 alunos. Na resolução apresentada no livro temos que a probabilidade de o ganhador ser do 6º ano é de 80/1000 e do 3º ano é de 50/1000, ou seja, o resultado é obtido usando-se o significado Clássico de Probabilidade, o qual consiste na razão entre o número de elementos favoráveis e o número total de possibilidades.

Ao citar o exemplo de um único lançamento de um dado, o autor traz duas perguntas referentes a esse experimento. A primeira pergunta é qual será a probabilidade de se obter o número 6, cuja resposta é dada seguindo a linha de raciocínio exigida pelo significado Clássico de Probabilidade. O autor apresenta o conjunto de resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 e explica que a probabilidade de sair qualquer um destes números é igual a 1/6, isto é, o sorteio dos números são eventos equiprobabilísticos.

A segunda pergunta se refere à probabilidade de, no supracitado experimento, sair um valor par. Seguindo a mesma lógica, o autor desenvolve a resolução para esta pergunta descrevendo que são três os resultados favoráveis, a saber, 2, 4 ou 6, entre o número total de seis possibilidades. Assim, o valor da probabilidade em questão, com base no significado Clássico, seria igual a 3/6. Nesta segunda pergunta, o autor informa que é possível também expressar esta mesma probabilidade mediante a utilização do número decimal (0,5), como também através da porcentagem de 50%.

Vale destacar que não caberia discutir com os estudantes o significado de Probabilidade como Propensão (BATANERO; DÍAZ, 2005), por ser muito complexo, mas é importante que o professor entenda os desdobramentos de situações como a proposta, na medida em que o evento é considerado isoladamente, ou em uma cadeia de lançamentos, no caso de um dado.

Para fechar o tópico 2, o livro traz sete atividades. A primeira delas propõe ao aluno que ele calcule, considerando o contexto de um único lançamento de um dado, a probabilidade de: (a) sair um número ímpar; (b) um número maior que 4; e (c) de sair o número 8.

Para calcularmos as probabilidades sugeridas nesta atividade basta aplicarmos a definição associada à Probabilidade Clássica, ou seja, calcularmos a razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades. Assim, para a resposta do item (a), temos que considerar que as possibilidades favoráveis são representas pelos números ímpares 1, 3, e 5, e a quantidade total dos possíveis resultados em um único lançamento de um dado são os números de 1 a 6.

Dessa maneira, devemos calcular a probabilidade de sair um número ímpar num único lançamento de um dado por meio da razão 3/6 que, simplificada, é reduzida a 1/2. Embora o autor, na resolução apresentada no livro, expresse a probabilidade de sair um número ímpar em um único lançamento de um dado somente por meio da razão 3/6=1/2, seria importante apresenta-la também por meio de sua representação decimal, que corresponde a 0,5; ou, ainda, expressar esta mesma resposta a partir de sua representação percentual, que equivale a 50%, como o próprio autor havia sugerido em situação anterior, na coleção.

No item (b), seguindo a mesma lógica, devemos calcular a probabilidade de, em um único lançamento de um dado, sair um número maior que 4. Para isso, devemos considerar que as possibilidades favoráveis são 5 e 6 e o total de possibilidades são seis. Deste modo, a probabilidade a ser calculada é de 2/6 = 1/3, resposta presente no livro do professor, que poderia ainda ser expressa como 0,33333333... ou 33,33%, pelas razões já expostas.

Para que o aluno consiga calcular a probabilidade de sair o número 8 em um único lançamento de um dado (Item c), basta perceber que não há nenhuma possibilidade favorável para esta ocorrência, ou seja, em um dado os únicos resultados possíveis de ocorrer em um lançamento são os números de 1 a 6, ou seja, a probabilidade de sair o número 8 é igual a 0. Essa é a primeira situação em que se apresenta a possibilidade de se obter o valor zero como resultado da razão, o que relaciona os significados Clássico e Lógico da Probabilidade.

Na segunda atividade, considerando a roleta da Figura 13, pergunta-se: quando a giramos uma única vez, qual a probabilidade de: (a) a flecha parar na cor amarela; (b) a probabilidade de parar na cor verde; e (c) a probabilidade de parar na cor vermelha.

Figura 13 – Roleta de três cores

Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 167

A resposta desta atividade requer do aluno a análise da figura-suporte, já que esta contém os dados indispensáveis para a obtenção da resposta e, para calcular a probabilidade de a flecha parar na cor amarela (item a), ele deve perceber que a roleta da figura-suporte foi dividida em 10 partes iguais e pintadas nas cores indicadas, mas, dessas 10 partes, apenas três foram pintadas na cor amarela. A partir de tais informações o aluno deve aplicar o significado Clássico de Probabilidade, obtendo a razão 3/10, ou seja, a probabilidade de a flecha parar na cor amarela ao girarmos a roleta uma só vez é 3/10, resposta apresentada pelo autor.

No item (b), o aluno deve ao analisar a figura-suporte e perceber que das 10 partes iguais nas quais a roleta foi dividida, somente quatro delas foram pintadas na cor verde. Desta forma, o aluno obterá a razão 4/10, ou, após a simplificação, 2/5, como a probabilidade de a flecha parar na cor verde.

Para responder o item (c) é necessário, mais uma vez, a correta leitura da figura-suporte, que foi dividida em 10 partes iguais e das quais apenas três foram pintadas de vermelho. Assim, a probabilidade de a flecha parar na cor vermelha após girada uma só vez a roleta é de 3/10 ou 3 em 10. Em todos os casos, as respostas são dadas apenas na forma fracionária.

Na terceira atividade pergunta-se quais são os resultados possíveis e qual é a probabilidade de se obter cara, após um único lançamento de duas moedas, simultaneamente. Para resolvê-la, o aluno precisa identificar o total de possibilidades e as possibilidades favoráveis na realização deste experimento. Para identificar todos os resultados possíveis é preciso que o aluno tenha uma visão ampla do cenário que envolve o lançamento simultâneo das duas moedas. Assim, os possíveis resultados são “Cara” e “Cara”; “Cara” e “Coroa”; “Coroa” e “Coroa”; e “Coroa” e “Cara”.

Esse tipo de questão não é simples para o aluno. Em pesquisa realizada com problema semelhante, envolvendo o lançamento de moedas, Santos (2010) observou o caso de uma estudante que se equivocava em relação à delimitação do espaço amostral, ao ignorar a inversão dos resultados de dois dados como uma nova possibilidade, ou seja, ele não identificava o par “cara, coroa”, como sendo distinto do par “coroa, cara”. O mesmo pode ocorrer em relação aos pares de resultados do lançamento de uma moeda, duas vezes consecutivas.

Van de Walle (2009), exemplifica essa dificuldade por meio de um jogo com moedas, cujos resultados contrariariam a intuição dos estudantes. Nele, três participantes lançam duas moedas e recebem pontuação de acordo com os resultados obtidos: O participante A ganha 1 ponto se saírem duas caras; B ganha um ponto se caírem duas coroas e C ganha um ponto se forem sorteadas na jogada, uma cara e uma coroa. Após 21 lançamentos, ganha o jogo quem tiver acumulado mais pontos.

O autor afirma que os estudantes inicialmente pensam que o jogo é justo, pois consideram que os resultados são igualmente prováveis. Para que eles entendam que isso não vale, é recomendável utilizar duas moedas de valores diferentes e organizar os pares de resultados, nas duas moedas, que seriam, no caso, quatro, e não apenas três, como poderiam pensar incialmente, levando-os a perceberem a distinção entre os resultados “cara e coroa” e “coroa e cara”.

Como destaca Van de Walle (2009, p.514), “[E]ssa probabilidade teórica é baseada em uma análise lógica da experiência e não em resultados experimentais”. Neste caso, porém, seria preciso intervir nos elementos envolvidos na experiência, por meio do uso de moedas de tipos diferentes, por exemplo, uma moeda de 25 centavos e uma de 50 centavos, evitando que o estudante tivesse uma compreensão equivocada do espaço amostral e, portanto, errasse a solução.

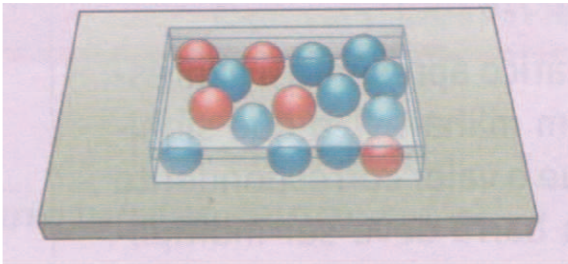
Na quarta atividade pergunta-se qual é a probabilidade de se extrair ao acaso uma carta de um baralho com 52 cartas e esta ser um dois. O autor traz uma informação adicional nesta atividade ao mencionar que em um baralho existem quatro cartas com o número dois, sendo um de cada naipe (espadas; copas; paus e ouros). Vale destacar que a imagem que ilustra a questão não serve de suporte para sua resolução, pois apresenta apenas quatro cartas de um baralho.

A solução da atividade se resume à aplicação direta da definição de probabilidade como sendo a razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades. O aluno deve, portanto, extrair estas informações do próprio enunciado, que afirma que um baralho possui 52 cartas (resultados possíveis) e que no baralho há 4 cartas com o número 2 (resultados favoráveis). Assim, a resposta será 4/52, ou 1/13, em sua forma simplificada.

O professor pode aproveitar o momento de correção dessa atividade para apresentar aos alunos um baralho, uma vez que pode haver estudantes que nunca viram um ou, se o viram, não tiveram a oportunidade de jogar com essas cartas ou observar sua organização em naipes e quantidade de cartas. Pode, ainda, criar novas situações que não só levassem os alunos a se familiarizarem com o baralho, mas, também, fortalecer o seu pensamento probabilístico por meio das discussões promovidas a respeito das ideias envolvidas nas situações propostas.

A quinta atividade apresenta uma bandeja com 5 bolas vermelhas e 10 bolas azuis (Figura 14) e pergunta-se qual é a probabilidade de ser extraída uma bola vermelha dessa bandeja.

Figura 14 - Bandeja



Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 167

Com base na observação da figura-suporte, o aluno pode perceber que está diante de um cenário probabilístico que envolve 15 resultados possíveis, sendo que destes, apenas cinco deles são favoráveis. Assim, a probabilidade será dada pela razão 5/15, ou, na sua forma simplificada, 1/3, resposta presente no livro.

A sexta atividade apresenta a imagem de um dado tetraédrico, com faces numeradas de 1 a 4, perguntando: (a) qual é a probabilidade de se obter um número par; e (b) qual é a probabilidade de se extrair um número menor que 4, após um único lançamento do dado. Embora o contexto seja usual (jogo de dados), trata-se de um dado não convencional.

O raciocínio para resolver esta atividade é semelhante ao utilizado se a atividade tratasse de um dado convencional, sendo possível identificar a totalidade dos resultados possíveis no lançamento de um dado tetraédrico. É importante que o aluno tenha o conhecimento de que um sólido tetraédrico possui 4 faces, numeradas com 1, 2, 3 e 4, o que, no caso da atividade, é possível deduzir pela imagem apresentada no livro. Estes valores indicam a quantidade total de possibilidades na realização deste experimento aleatório e a solução envolve o significado Clássico de Probabilidade.

O item (a) tem como resposta a probabilidade 2/4, ou 1/2, correspondente à extração de um número par, após o lançamento de um dado tetraédrico, bastando perceber que em um dado tetraédrico só existem os números pares 2 e 4, sendo essas possibilidades as favoráveis. A probabilidade de obtermos um número menor que 4 seria 3/4 (item b), uma vez que as possibilidades de eventos favoráveis são os valores 1, 2 e 3.

Na sétima atividade temos a seguinte situação: em uma escola com 1000 estudantes, sendo 55 alunos do 1º ano, e 65 alunos do 2º ano, havendo um sorteio envolvendo todos os alunos da escola, pergunta-se: (a) Qual é a probabilidade de ser sorteado um aluno do 1º ano; (b) Qual é a probabilidade de ser sorteado um aluno do 2º ano; e (c) Qual é a probabilidade de não ser sorteado um aluno do 2º ano. Esta atividade apresenta uma figura- não suporte, ou seja, que não auxilia diretamente na resolução da questão, sendo ela meramente decorativa.

A resolução desta atividade envolve a uma aplicação direta da definição de Probabilidade como uma razão (significado Clássico), e a resposta do item (a) requer que o aluno note que o próprio enunciado da atividade traz de forma direta o número de possibilidades favoráveis, ao mencionar que a turma do 1º ano possui 55 alunos, como também traz o número total de possibilidades, quando cita que na escola há 1.000 alunos.

Então, para se calcular a probabilidade no item (a) de um aluno do 1º ano ser sorteado, o educando precisa encontrar a razão entre o número de alunos do 1º ano e o número total de alunos da escola: 55/1000. No item (b), a probabilidade a ser encontrada deve ser a razão 65/1000. O educando chegará a esta conclusão, observando que é dito que o 2º Ano possui 65 alunos.

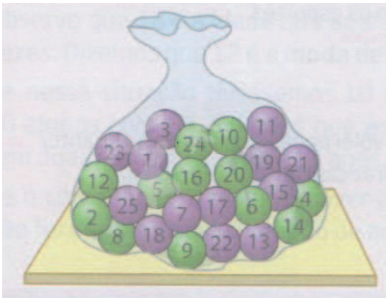
Na resposta ao item (c), temos que a probabilidade de um aluno do 2º Ano não ser sorteado é igual a 935/1000. O antecedente 935 se refere ao número de possibilidades favoráveis, ou seja, o número de alunos que há na escola, excluindo-se os alunos que cursam o 2º Ano, já que a pergunta está relacionada apenas à probabilidade de um aluno do 2º Ano não ser sorteado, o que significa dizer que qualquer aluno da escola pode ter a sua probabilidade de ser sorteado calculada, exceto os alunos do 2º Ano.

No final do Capítulo o autor apresenta uma seção de atividades intitulada “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”, composta de uma subseção denominada “Revisitando” constituída de cinco questões, sendo apenas a segunda atividade relativa à compreensão do conceito de experimento aleatório, pedindo-se que o aluno diga o que ele compreende por esse termo e apresente um exemplo.

As demais atividades são sobre Estatística; diferença entre os conceitos de média aritmética simples e média aritmética ponderada; diferença entre os métodos de obtenção da mediana de uma amostra de quantidade par de dados e de uma amostra de quantidade ímpar de dados e sobre se é ou não possível a inexistência de moda em uma série de dados.

A outra subseção, intitulada de “Aplicando”, é constituída de 16 atividades, mas aqui iremos analisar somente as cinco atividades que envolvem o conceito de Probabilidade, a saber, as atividades 1, 2, 3, 4 e 5. Na primeira atividade informa-se que em um saco existem 25 bolas numeradas de 1 a 25, e, extraindo-se uma bola ao acaso, pergunta-se: (a) se é mais provável que se obtenha um número ímpar ou par; e no item (b), qual é a probabilidade de se retirar um número par (Figura 16).

Figura 16 – Saco com Bolas



Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 176

Na figura, bolas numeradas com números ímpares estão pintadas com uma cor diferente daquelas que estão numeradas com números pares, o que poderia facilitar a contagem do número de bolas com cada tipo de número, ou seja, 13 bolas com números ímpares e 12 bolas com números pares. Então, ao se retirar uma bola ao acaso, é mais provável que saia um número ímpar, uma vez que há mais bolas com números ímpares que bolas com números pares. Portanto, a resposta do item (a) é “ímpar”.

Após esta análise é possível responder o item (b) (probabilidade de sair uma bola com número par), pois há 12 bolas numeradas com números pares no saco, ou seja, doze possibilidades favoráveis, de um total de 25 resultados possíveis. A resposta do item será, portanto, 12/25, forma indicada na resposta do livro, e que pode ser representada por 0,48 ou 48%.

Observa-se, porém, que a imagem que ilustra a questão pode induzir o estudante a pensar que é mais provável serem sorteadas as bolas que se encontram na parte superior da pilha, que as que estão nas camadas de baixo, provocando equívocos em sua interpretação de equiprobabilidade, em razão da disposição espacial das bolas, o que implica na necessidade de observação pelo professor.

Com base na atividade proposta seria recomendável explorar outras situações, restringindo o número de bolas, como, por exemplo: pedir que os alunos considerem apenas as bolas numeradas com números ímpares perguntar aos alunos, em relação ao item (a), se é um acontecimento certo ou impossível retirar uma bola com número par, condicionando a resposta do aluno a uma justificativa baseada no significado Lógico de Probabilidade (BATANERO; DÍAZ, 2007).

Esta nova situação, ao apresentar os termos “certo” e “impossível” associados ao conceito de Probabilidade, amplia a linguagem probabilística dos alunos e facilita a capacidade do estudante de expressar o seu raciocínio probabilístico mediante a necessidade de justificar a sua resposta. Em relação ao item (b), o professor poderia solicitar a probabilidade de se retirar um número ímpar menor que determinado valor, dentre outras variantes.

A segunda atividade trata de uma urna que contém seis bolas azuis, cinco bolas verdes, quatro amarelas, três roxas e duas laranjas, perguntando-se, caso se retire aleatoriamente uma bola da urna, qual a probabilidade de esta bola ser azul e a probabilidade de esta bola ser laranja. Sua resposta pode ser obtida pela aplicação da probabilidade como uma razão, sendo que o número de possibilidades favoráveis se refere ao número de bolas azuis.

Essa informação inicial pode ser obtida a partir da leitura do enunciado, enquanto que o número total de possibilidades pode ser obtido somando-se as seis bolas azuis, as cinco bolas verdes, as quatro bolas amarelas, as três bolas roxas e as duas bolas laranja, isto é, 20 bolas. Portanto, a probabilidade de sacarmos, de modo aleatório, uma bola azul desta urna é 3/10; a de sacarmos uma bola laranja é 1/10. Espera-se que no 8º ano o aluno consiga expressar por meio de uma fração irredutível.

Quanto às atividades 3, 4 e 5, o autor sugere que os alunos, em dupla, leiam e discutam a resolução, sendo a primeira vez que o autor propõe uma atividade dessa natureza, no trabalho com o conteúdo de Probabilidade. Porém, mais uma vez não foi dada nenhuma sugestão do autor com relação à postura que o professor deve adotar para a definição das duplas, ou o que fazer após a realização destas atividades pelos estudantes.

Van de Walle (2009) destaca que, tão importante como os momentos antes e durante a resolução de problemas, é o momento que vem depois, sugerindo que o professor liste ou discuta as respostas encontradas, solicitando a justificativa dos procedimentos adotados, dentre outras estratégias, considerando sempre o estabelecimento de um tempo adequado da aula para isto. Essa dinâmica poderá favorecer o desenvolvimento do pensamento probabilístico a partir da construção e da troca de ideias, incentivando a comunicação interpessoal e a capacidade de argumentação matemática dos alunos.

O texto da atividade 3 informa que em um baralho há 52 cartas, a saber, 13 cartas de ouros, 13 copas, 13 de paus e 13 de espadas, indagando, quando se extrair uma carta deste baralho: (a) qual é a probabilidade de esta carta ser de ouro; e (b) qual é a probabilidade de esta carta ser um rei. A orientação é que esta atividade deve ser desenvolvida em grupo de dois estudantes, onde a leitura, a discussão e resolução desta devem ocorrer de forma interativa entre eles.

Para calcular a probabilidade requerida no item (a), a quantidade de cartas de ouros existentes em um baralho já vem diretamente expressa no enunciado, o mesmo valendo para o número total de cartas (52). Deste modo, a probabilidade de se extrair uma carta de ouros de um baralho é de 13/52 = 1/4 = 0,25 = 25%.

Para responder ao item (b), o estudante deve identificar o número de possibilidades favoráveis, ou seja, o número de "reis" existentes em um baralho. Ao ler o enunciado ele precisa saber que cada naipe possui um "rei", um de cada naipe, num total de quatro reis, logo, a probabilidade de obtermos um rei ao extrairmos uma carta de um baralho é de 4/52 = 1/13 = 0,07 = 7%.

Na atividade 4 é dada uma figura-suporte (Figura 17), representando uma máquina que possui na base três recipientes denominados de A, B e C, indagando-se: (a) Em qual recipiente é mais provável que uma bolinha introduzida na máquina por Márcia caia e por que?; (b) Qual é a probabilidade de uma bolinha cair no recipiente C?

Figura 17 – A máquina construída por Márcia

Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 176

O estudante deve observar cuidadosamente a figura-suporte e verificar que a bolinha, ao ser introduzida na máquina, poderá seguir inicialmente por dois caminhos diferentes. Para cair no recipiente A só existe uma possibilidade favorável, que, no caso, seria a bolinha se deslocar pelo percurso situado à esquerda. Assim, é mais provável a bolinha cair no recipiente A, que é igual a 1/2, onde o antecedente 1 se refere à única possibilidade favorável de a bolinha cair no recipiente A. O consequente 2 significa que inicialmente a bolinha possui somente duas trajetórias possíveis, uma pela esquerda e outra pela direita, assim, é mais provável que a bolinha caia no recipiente A.

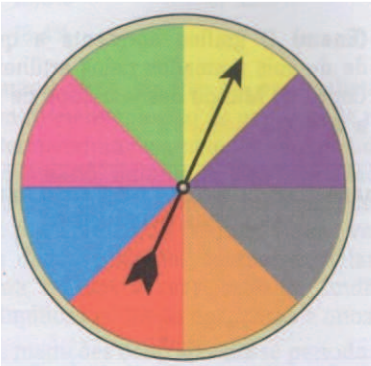
Como são três recipientes, e já constatamos que a metade das chances de a bolinha cair estão no recipiente A, resta a outra metade, que será igualmente dividida entre os dois outros recipientes, quais sejam, o B e o C. Logo, a probabilidade de a bolinha cair no recipiente B (ou C) é ¼ = 0,25 = 25%. Esse tipo de questão, que envolve eventos dependentes, precisaria ser trabalhado de maneira destacada com os estudantes.

Para Van de Walle (2009), essa passagem do trabalho com eventos independentes, para eventos dependentes compreende um aumento no nível de complexidade do conceito de Probabilidade, recomendando que estes últimos sejam abordados, inicialmente, por meio de experimentos práticos, de simulações.

Na última atividade, tem-se uma roleta constituída de 8 cores distintas (Figura 18) e, ao girarmos sua seta, ela possui a mesma probabilidade de parar em qualquer uma das cores, ou seja, o sorteio das cores são eventos equiprováveis.

No livro sugere-se que as duplas: (a) respondam qual é a probabilidade de a seta parar na cor rosa; (b) escolham duas cores e respondam qual é a probabilidade de a seta parar em uma delas; (c) respondam, tendo em vista as duas cores escolhidas, qual é a probabilidade de a seta não parar em nenhuma dessas cores; e (d) respondam qual é a soma das probabilidades obtidas em (b) e (c).

Figura 18 - Roleta



Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 177

As duplas devem observar que a roleta foi dividida em 8 partes iguais, portanto, o número total de possibilidades é 8. Além disso, temos somente uma possibilidade possível para cada cor, assim, no item (a) a probabilidade de a seta parar na cor rosa é 1/8 = 0,125 = 12,5%. No item (b), o autor impõe a escolha de duas cores, o que envolve um produto de probabilidades individuais e pode constituir um fator complicador para o estudante. Neste caso, a solução seria 2/8 = 1/4, correspondente à probabilidade de a seta da roleta parar em uma das duas cores escolhidas pelos estudantes.

No item (c) as duplas devem contabilizar como possibilidades favoráveis apenas aquelas cores que não foram escolhidas por elas na situação anterior. Logo, das oito cores devem ser desconsideradas as duas cores que já foram escolhidas, restando apenas 6 cores como possibilidades favoráveis. Assim, a probabilidade de a seta da roleta não parar em nenhuma das cores escolhidas no item (b) é de 6/8 = 3/4 = 0,75 = 75%. No item (d) as duplas devem juntar as probabilidades obtidas nos itens (b) e (c), quais sejam, 1/4 e ¾, respectivamente, obtendo: 1/4 + 3/4 = 4/4 = 1.

De modo geral, considerando a proposta de trabalho para o conteúdo de Probabilidade no Capítulo 8 do livro do 7º ano, concluímos que a maioria das atividades propostas envolve questões que tomam como base o conceito Clássico ou teórico de Probabilidade, sem discussões explícitas sobre elementos importantes relativos a esse conceito, como a independência ou dependência de eventos.

Embora a proposta de desenvolvimento do conteúdo de Probabilidade presente ao longo do Capítulo citado envolva o significado Clássico, o autor orienta o professor a desenvolver também uma abordagem mais prática no processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade, tal como sugerem os princípios traçados pelo modelo Frequentista, indicado como facilitador da compreensão de elementos que fazem parte do pensamento probabilístico (SILVEIRA, 2015).

Notamos, de modo negativo, uma enfática repetição no que se refere à utilização dos mesmos contextos em diferentes atividades, de jogo (dados, moedas, roleta e baralho), com pouco uso de situações que envolvam contextos como o de área, ou orientações na direção de promover simulações, ainda que semelhantes àquelas apresentadas nos problemas do livro

Do mesmo modo, observamos limitações quanto aos modelos probabilísticos explorados. Como na pesquisa realizada por Carvalho, Silva e Paraíba (2016), baseada na análise de três coleções de livros didáticos direcionados aos anos finais do Ensino Fundamental, destaca-se que o modelo Frequentista ou empírico, também não foi observado no Volume 2, em questões propostas ao aluno, mas apenas em recomendações no livro do professor, que este pode, ou não, seguir.

No Capítulo 8 do volume 2 da coleção analisada, o autor aborda a ideia de experimento aleatório, diferenciando-o dos experimentos não aleatórios e apresenta o conceito de Probabilidade em termos qualitativos, a partir da discussão sobre a imprevisibilidade do resultado final de um experimento aleatório e da exploração de situações que demandam a compreensão do que é aleatoriedade e o uso de expressões, tais como, mais provável, menos provável, provável, impossível e certo.

Entendemos ser este um aspecto positivo da proposta, uma vez que no dia a dia expressamos nossas ideias probabilísticas por meio de tais palavras. Enfatizamos que esse é um dos elementos que compõem o pensamento probabilístico, de acordo com Batanero et al. (2016), e que precisam ser explicitamente trabalhados em sala de aula.

No livro do 7º Ano o autor enfatiza, em sua proposta, a probabilidade de um resultado de um experimento aleatório ocorrer, como uma razão entre o número de resultados possíveis e o número total de possibilidades, empregando o significado Clássico de probabilidade, embora ainda de maneira informal, uma vez que, até então, a coleção não introduziu o uso da nomenclatura específica do cálculo de probabilidade com o emprego de símbolos e fórmulas ou a própria definição de evento. As atividades se limitam a exigir do aluno a aplicação direta da ideia de razão.

4.3. ANÁLISE DO CAPÍTULO 9 DO LIVRO DO 8º ANO

O terceiro livro da coleção “Matemática: Compreensão e Prática”, dirigido ao 8º Ano do Ensino Fundamental, possui 12 capítulos e no Capítulo 9 são abordados os conteúdos de Estatística: gráficos de segmentos, de barras e setores; cartograma e pictograma; e probabilidade. Assim, vamos nos ater em nossa análise apenas ao item que trata do conteúdo de Probabilidade. De acordo com informações do autor, nesse Capítulo, o objetivo é: (a) Ampliar e consolidar o conceito de probabilidade; e (b) Mobilizar os conhecimentos apreendidos para resolver situações-problema.

O Capítulo é iniciado com a proposição de uma situação-problema sobre os tipos sanguíneos, por meio da qual o autor discute sobre o significado Clássico do conceito de Probabilidade e da necessidade de se fazer cálculos probabilísticos no cotidiano.

Como ressaltamos em nosso referencial teórico, o estudo das Probabilidades é essencial para desenvolver a capacidade de interpretação dos alunos acerca do constante e intenso fluxo de informações de cunho aleatório e/ou determinístico presentes no cotidiano (SILVEIRA, 2015; BRASIL, 1998). Deste modo, é fundamental que os alunos tenham um pensamento probabilístico desenvolvido, para que consigam fazer uma leitura adequada da realidade, capacitando-o a entender previsões meteorológicas, riscos inerentes a investimentos financeiros ou a probabilidade de ocorrência de determinada doença, por exemplo.

Silveira (2015) sugere que o professor crie situações que possibilitem aos alunos vivenciarem a realização de lançamentos sucessivos de dados e de moedas, de sorteios, sob o enfoque do significado Frequentista de Probabilidade, tornando a sala de aula em um ambiente propício à construção do conhecimento probabilístico.

Isso implica dizer que o professor não deve se limitar em sua abordagem acerca do conteúdo de Probabilidade apenas à perspectiva clássica, uma vez que é sugerido levar os alunos a realizarem experimentos, fazerem observações e análises dos resultados, visando uma compreensão ampla do conceito, considerando diversos significados que a ele podem ser atribuídos, respeitando-se o nível de desenvolvimento do pensamento do aluno.

No início do tópico 5 do Capítulo 9, denominado “Probabilidade”, o autor caracteriza como experimento aleatório todo experimento cujos resultados dependam exclusivamente do acaso e que podem ser repetidos exaustivamente sob as mesmas condições, mas cujos resultados continuarão sendo imprevisíveis. Em seguida, são dados alguns exemplos típicos de experimentos aleatórios, tais como o lançamento de um dado, o lançamento de uma moeda, o lançamento de dois dados ou o sorteio de uma bola numerada de uma urna.

Podemos destacar, em relação a esse ponto, como limitação, mais uma vez, o uso excessivo do contexto de jogos e praticamente nenhuma proposta envolvendo situações de outra natureza. Como lembra Van de Walle (2009), a experiência pregressa da criança com jogos de azar, pode interferir em sua compreensão acerca da ideia de aleatoriedade, que constitui um dos elementos do pensamento probabilístico (BATANERO et al., 2016).

O tópico continua a abordagem de Probabilidade a partir de uma discussão acerca do conceito de espaço amostral, representado por S, referente ao lançamento de um dado, como sendo o conjunto de todos os resultados possíveis de se obter na realização deste experimento aleatório. Assim, ao lançarmos um dado comum, temos como espaço amostral o conjunto S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Seguem-se outros exemplos de espaço amostral, como S = {cara, coroa}, que é que aquele que temos em relação ao lançamento de uma moeda; e S = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)}, relativo ao lançamento de duas moedas.

Dando sequência à abordagem do conteúdo, o autor apresenta o conceito de evento, representado por E, como sendo qualquer conjunto de resultados possíveis extraídos do espaço amostral. Como exemplos, indica o lançamento de um dado, do qual podemos extrair alguns exemplos de eventos E do espaço amostral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, como E = {1, 3, 5}, o qual representa o conjunto de todos os resultados ímpares; ou o evento E = {1,2,3}, o qual representa o conjunto de todos resultados menores que 4; ou o evento E = {5}, que representa a resultado/face 5. Essa discussão é necessária e importante, uma vez que teve em vista a apresentação de dois elementos fundamentais, espaço amostral e evento, relacionadas ao conceito de Probabilidade (BATANERO, et al., 2016).

Uma vez definidos e exemplificados espaço amostral S e evento E, o tópico segue em direção da apresentação formal do significado Clássico de Probabilidade, porém, antes o autor explica o que significa um espaço amostral ser equiprovável, fundamentando de maneira mais formal esse conteúdo, o que é feito discutindo o fato de que todos os eventos de um espaço amostral obtido no lançamento de um dado possuem a mesma probabilidade de ocorrer, a partir das características físicas do dado, a saber, a simetria de suas faces.

Assim, o autor afirma que, dado um experimento aleatório com um espaço amostral equiprovável S e sendo E um evento deste experimento aleatório, tem-se que a probabilidade de E acontecer é: P(E) = n(E)/n(S), onde n(E) significa o número de elementos do evento E; n(S) significa o número de elementos do espaço amostral S; e P(E) a probabilidade do evento E ocorrer.

O tópico segue com a apresentação de um exemplo do significado Clássico de Probabilidade, solicitando a probabilidade de se obter um número menor que 4 no lançamento de um dado: o espaço amostral S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, não é mencionado no exemplo, por ter sido mencionado anteriormente no mesmo livro. Assim, E = {face menor que 4} = {1,2,3} e n(E) = 3; portanto, P(E) = n(E)/n(S) = 3/6 = ½.

O tópico segue, ainda, fornecendo um outro exemplo, com base na retirada de um cupom de uma urna que contém 1000 cupons, numerados de 1 a 1000. Indaga-se o aluno a respeito de qual é a probabilidade de se extrair dessa urna um número menor que 40. Na resolução apresentada no livro, o autor indica que o espaço amostral é S = {1,2,3, 4, ..., 999, 1000} e n(S) = 1000; o evento E é dado por E = {1, 2, 3, 4,...,38, 39}; e n(E) = 39. Assim, a probabilidade solicitada é P(E) = n(E)/n(S) = 39/1000 ou P(E) = 0,039 ou P(E)= 3,9%, expressando a solução nas formas fracionária, decimal e percentual.

Em um último exemplo pergunta-se qual é a probabilidade de se obter pelo menos uma coroa, com o lançamento de duas moedas, simultaneamente. Na resolução, o autor indica os elementos de S = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)} e n(S) = 4; o evento E = {pelo menos uma face “coroa”} = {(cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}; e n(E)=3. Portanto, a probabilidade P(E) = n(E)/n(S) = 3/4 = 0,75 ou P(E) = 75%.

Ao expressar de três maneiras distintas a probabilidade de um evento ocorrer, entendemos que o autor busca destacar a relação entre razão, números decimais e porcentagem, para facilitar e solidificar a compreensão/aprendizagem dos alunos com respeito ao conceito de Probabilidade numa perspectiva Clássica.

A representação decimal é importante de ser trabalhada no estudo da Probabilidade para ajudar o aluno a perceber que a probabilidade será sempre um valor compreendido no intervalo fechado que varia de 0 a 1 e a utilização da representação percentual do valor de uma probabilidade auxilia o educando a compreender a noção de probabilidade a partir da ideia do todo, ou seja, a certeza sendo representada por 100%, explorando-se, ainda que informalmente, elementos do significado Lógico de Probabilidade (BATANERO et al., 2016).

Analisamos exclusivamente as oito atividades referentes à Probabilidade, sendo a primeira delas correspondente ao questionamento sobre qual é a probabilidade de se obter no mínimo uma cara, ao se lançar duas moedas simultaneamente, cuja solução envolve, mais uma vez, o significado Clássico de probabilidade.

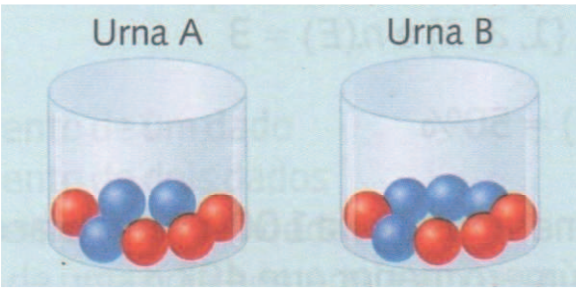
O mesmo procedimento de solução está presente na atividade 2, na qual temos o seguinte contexto: há 500 etiquetas numeradas de 1 a 500 em uma urna. Pergunta-se: qual é a probabilidade de se obter um número menor que 21 ao se retirar uma etiqueta. Na atividade 3, pergunta-se qual é a probabilidade de se obter a soma 6 no lançamento simultâneo de dois dados. Aqui novamente temos a utilização do lançamento de dados como contexto, como observamos nos volumes analisados anteriormente e, mais uma vez, demandando o significado Clássico na resolução.

Os mesmos contextos e procedimentos conceituais permeiam a atividade 4, na qual pergunta-se qual é a probabilidade de se obter uma “cara” e o número 6 ao lançarmos um dado e uma moeda ao mesmo tempo; e na atividade 5, quando se solicita a probabilidade de se obter uma “cara” e uma “coroa” no lançamento simultâneo de duas moedas. Elas envolvem as ideias de independência e probabilidade condicional, que, segundo Batanero et al. (2016), são ideias essenciais associadas ao pensamento probabilístico.

A independência seria importante para a compreensão de simulações, em especial envolvendo repetição de experimentos, enquanto a ideia de probabilidade condicional seria fundamental para a compreensão de conceitos estatísticos como intervalo de confiança (BATANERO et al., 2016). Entendemos, porém, que tais elementos precisam ser explicitamente explorados pelo professor, por não serem simples.

Na atividade 6, são dadas duas urnas (Figura 19) denominadas de urna A e urna B, tendo a primeiras sete bolas, quatro delas vermelhas e três azuis; na urna B, temos oito bolas, sendo quatro vermelhas e quatro azuis.

Figura 19 – Urnas A e B



Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 200

Nesta atividade pede-se que o aluno responda, justificando, em qual das duas urnas a probabilidade é maior de se retirar uma bola vermelha, sendo a resposta a urna A, uma vez que as probabilidades correspondentes seriam, respectivamente, iguais a 4/7 e 4/8. Para saber em qual urna a probabilidade de se extrair uma bola vermelha é maior, basta comparar as duas probabilidades por meio de uma desigualdade: 4/7 > 4/8, que também poderia ser expressa, estabelecendo uma desigualdade a partir de sua forma decimal 0,57 > 0,5 bem como utilizando a sua forma percentual 57% > 50%.

Na atividade 7, é descrita uma situação onde os números obtidos ao se lançar 10 vezes um dado foram: 1, 4, 3, 2, 5, 1, 6, 2, 5 e 4. Pergunta-se qual número será obtido se o dado for lançado mais uma vez. Entendemos que esta atividade traz em sua essência a necessidade de o professor trabalhar com os alunos a ideia de que a chance não tem memória, ou seja, “[...] Em repetidos testes de uma experiência simples, os resultados dos testes anteriores não têm impacto sobre os testes seguintes (VAN DE WALLE, 2009, p.509), tida como importante para o desenvolvimento do pensamento probabilístico.

A atividade 8 deve ser, segundo orientação do autor, realizada em dupla. A atividade diz que um dado foi lançado 1000 vezes e apresenta uma tabela com o número de vezes que cada uma das faces foi obtida. A tabela apresenta os seguintes dados em termos de frequência absoluta em sua primeira linha: Face 1:

164; Face 2: 168; Face 3: 166; Face 4: 162; Face 5: 172 e Face 6: 168. No item (a), os alunos devem copiar a tabela preenchendo a segunda linha com a frequência relativa correspondente. Devem, ainda, calcular a soma das frequências absolutas e das frequências relativas. E no item (b), os alunos devem justificar a razão de o espaço amostral desse lançamento de dado ser equiprovável.

A atividade é diferenciada, quando comparada com as anteriores, uma vez que apresenta uma ideia que ainda não havia sido abordada nas atividades de Probabilidade que a precederam no Capítulo sob análise e tampouco nas atividades de Probabilidade propostas no Capítulo 8 do livro do 6º e no capítulo 8 do livro do 7º ano da coleção, ou seja, as ideias de frequência absoluta e de frequência relativa.

Temos também, pela primeira vez, a proposta de utilização de uma tabela, que compreende uma forma de representação de informações diferente das que foram utilizadas nos exemplos anteriores em relação ao conceito de probabilidade. Nesse ponto, concordamos com Carvalho, Silva e Paraíba (2016), que defendem o uso de diferentes representações, não se limitando apenas à indicação de elementos de conjuntos ou de árvores de possibilidades.

Todavia, para que outras formas de representação sejam exploradas, é importante explorar mais outros significados de Probabilidade, em particular o Frequentista, o que implica na necessidade de desenvolverem uma proposta em que haja um maior número de atividades experimentais e que demandem dos alunos a simulação de situações práticas, como também a realização de experimentos aleatórios como condição que possibilitará, a partir de observações e de análise de dados, o desenvolvimento dos cálculos probabilísticos.

Concluída a análise da parte inicial do Capítulo 9 do livro do 8º ano, destacamos a ausência de propostas de exploração de mais de outros significados de Probabilidade, que não o Clássico, ou de diferentes formas de representação de elementos desse campo, como o uso de árvores de possibilidade, por exemplo, relevantes para uma compreensão mais ampla de Probabilidade e para o desenvolvimento do pensamento probabilístico (CARVALHO, SILVA e PARAÍBA, 2016).

Apenas uma atividade da seção “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”, composta de uma subseção denominada de “Revisitando”, dentre as cinco atividades propostas, uma é relativa à Probabilidade. As demais tratam de Estatística, tais como as fases do processo estatístico, a função exercida por uma amostra em uma pesquisa científica, o poder que as pesquisas estatísticas têm de influenciar a decisão das pessoas, e sobre a classificação das variáveis idade; altura; estado civil; sexo; massa e nacionalidade, em qualitativa ou quantitativa.

Na atividade 5 afirma-se que, na realização de um sorteio em que a professora escreveu em pedaços de papéis iguais o nome de cada aluno uma só vez, a turma deve responder se o sorteio de um aluno dessa classe é ou não um evento com espaço amostral equiprovável, justificando a sua resposta. Aqui temos uma evidente utilização de uma das principais características do significado Clássico de Probabilidade, que é a equiprobabilidade do espaço amostral.

Espera-se que os estudantes percebam que o tamanho do espaço amostral varia conforme o número de alunos da turma considerada, ou seja, sua extensão depende da mutabilidade, ou não, de seus elementos. A situação dada é caracterizada por um espaço amostral equiprovável, o que implica dizer que todos os eventos associados a ele possuem probabilidades iguais.

Isto fica claro quando o enunciado da atividade diz que a professora escreveu apenas uma única vez o nome de cada aluno em pedaços de papeis iguais. Esta é uma característica indispensável para que seja possível a aplicação do significado Clássico no cálculo da probabilidade de um evento E. O professor poderia comparar os diferentes resultados desta atividade para discutir a restrição da aplicação desse significado, já que poucos fenômenos do dia a dia podem ser identificados como experimento aleatório de espaço amostral equiprovável. Essa discussão pode compreender um momento fértil para o surgimento e a consequente construção de ideias que possibilitem o amadurecimento do pensamento probabilístico dos alunos.

Dentro desta seção temos ainda a subseção denominada “Aplicando”, constituída de 11 atividades, além de três desafios. Analisamos apenas as atividades 3, 7, 8, 9 e os três desafios, por se tratarem especificamente ao cálculo de Probabilidade. As demais atividades envolviam a leitura, análise e extração de informações contidas em um gráfico; a exploração de dados de uma tabela e sua representação em um gráfico de setores; a representação de dados extraídos de um gráfico de barras, em um gráfico de setores; e o cálculo dos ângulos em um gráfico de setores.

Na atividade 3, informa-se que alguém de nome Luís está brincando com o seu dominó de 28 peças e pede-se para que seja calculada a probabilidade de, ao se extrair uma peça ao acaso, esta ser um “seis duplo” e, colocando-se essa peça sobre a mesa, qual é a probabilidade de a peça seguinte, também retirada ao acaso, ser encaixável no “seis duplo”.

Para resolvê-la é preciso que o aluno conheça bem todas as peças de um dominó, para poder solucionar a questão. Retirando-se a peça com o “seis duplo”, restam 27 peças, dentre as quais, seis têm pelo menos um dos lados igual a seis, logo, P(encaixe) = 6/27 = 2/9 = 0,2222...= 22,22%. Neste caso, seria recomendável que, antes da proposição da questão, o professor disponibilizasse jogos de dominó para exploração livre das peças pelos alunos.

Na atividade 7, que tem como fonte o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), é dito que José, Paulo e Antônio estão envolvidos em um jogo de dados não viciados, onde cada um dos jogadores jogará dois dados ao mesmo tempo. José acredita que, depois de jogar seus dados, obterá soma 7; Paulo acredita que a sua soma será 4; e Antônio acredita que a sua soma será 8. Assim, o aluno deve marcar o item que corresponde ao jogador que tem a maior probabilidade de acertar a sua soma.

Os itens para escolha são: (a) Antônio, uma vez que a sua soma é a maior dentre todas as escolhidas; (b) José e Antônio, pois existem 6 possibilidades para a escolha de cada um deles, enquanto que para Paulo, há apenas 4 possibilidades; (c) José e Antônio, já que existem 3 possibilidades para a escolha de cada um deles, havendo somente 2 possibilidades para a escolha de Paulo; (d) José, uma vez que existem 6 possibilidades para formar a sua soma, 5 possibilidades para se formar a soma de Antônio e somente 3 possibilidades para formar a soma de Paulo; e (e) Paulo, pois a sua soma é a menor de todas.

Cabe destacar que esta é a primeira vez na coleção que o autor menciona o uso de “dados não viciados”, o que significa dizer que não há irregularidades físicas que possam influenciar o resultado do lançamento. Esta informação é importante, porque garante que nenhum fator além do acaso, afetaria as probabilidades associadas ao jogo.

Para chegar à solução, o aluno deve construir o espaço amostral S, sendo recomendável solicitar o preenchimento de uma tabela de dupla entrada com os números de 1 a 6, registrando-se nela as somas de todas as combinações, obtendo-se n(S) = 36. Nesse momento terá reunido as informações necessárias para obter o resultado da razão P(E) = n(E)/n(S). Assim, a probabilidade de José acertar a sua soma é P (obter soma igual a 7) = 6/36; a probabilidade de Paulo acertar a soma por ele escolhida é P (obter soma igual a 4) = 3/36 e a probabilidade de Antônio acertar a soma dele é P (obter a soma igual a 8) = 5/36. A resposta desta atividade é, portanto, o item (d).

Esta é a primeira vez que aparece uma atividade de múltipla escolha abordando o conceito de Probabilidade, na Coleção, e o professor poderia solicitar aos alunos para discutirem sobre a probabilidade de alguém acertar aleatoriamente a alternativa correta de uma questão de múltipla escolha, como essa. Neste caso, E = {acertar o item correto} e n(E) = 1, já que há somente um item correto; S = {o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer} e n(S) = 5. Daí, P (acertar o item correto) = 1/5. É importante alertar os riscos de uso dessa estratégia em simulados ou concursos, já que se trata de uma probabilidade muito pequena de se obter sucesso.

Na atividade 8 é apresentada uma questão com uma urna como contexto: há 20 bolas numeradas de 1 a 20 e pergunta-se qual é a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso: (a) o número sorteado ser ímpar; (b) o número sorteado estar compreendido entre 7 e 11; (c) o número sorteado ser um múltiplo de 4; e (d) o número sorteado ser par e múltiplo de 5.

Para solucionar a questão, o estudante deve construir o espaço amostral S, no caso, S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20} e n(S) = 20. No item (a) temos o evento E = {o número sorteado ser ímpar} = {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19} e n (E) = 10. Portanto, P (o número sorteado ser ímpar) = 10/20 = ½ = 0,5= 50%. No item (b) o evento é E = {o número sorteado estar compreendido entre 7 e 11} = {8,9,10} e n (E) = 3. Por conseguinte, P (o número sorteado estar compreendido entre 7 e 11) = 3/20 = 0,15 = 15%.

Antes de discutir a resposta do item c, pode ser necessário verificar se todos os estudantes compreendem o que significa um número ser múltiplo do outro, para que possam identificar o evento. Assim, no item (c), temos: E = {O número sorteado ser um múltiplo de 4} = {4,8,12,16,20} e n(E) = 5. Deste modo, P (O número sorteado ser um múltiplo de 4) = 5/20 = 1/4= 0,25 = 25%.

Finalmente, no item (d), o evento E = {O número sorteado ser par e múltiplo de 5} = {10,20} e n (E) = 2; P (O número sorteado ser par e múltiplo de 5) = 2/20 = 1/10. Dizer que P (O número sorteado ser par e múltiplo de 5) = 1/10, significa que a cada 10 bolas retiradas, podemos ter um número sorteado que seja par e múltiplo de

5. Contudo, isso não quer dizer obrigatoriamente que a cada 10 bolas retiradas da urna teremos com certeza uma bola sorteada com um número par e múltiplo de 5.

Essa discussão é relevante e deve sempre ser retomada, para ajudar o aluno a ampliar e consolidar o seu entendimento a respeito do conceito de probabilidade como sendo uma razão que expressa um determinado grau de incerteza por meio de um número racional (ou suas formas matemáticas equivalentes).

Considerando-se o que orienta nosso referencial teórico em relação à Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999; POZO, 1998; CHICA, 2001), é importante que o professor busque ampliar a discussão relativa à solução de um problema, considerando outras questões potenciais desencadeadoras de novos conhecimentos e que reforcem ou ampliem os conceitos e as ideias probabilísticas que já foram ou serão discutidas.

A atividade 9 descreve a seguinte situação: uma universidade tem 10.000 alunos, dentre os quais 800 não praticam nenhum tipo de esporte. Pergunta-se qual é a probabilidade de um aluno que foi escolhido ao acaso praticar algum esporte. Para resolver esta questão, devemos interpretar S como sendo a quantidade de alunos da universidade, ou seja, S = {Número total de alunos da universidade} e n (S) = 10.000.

Com relação à identificação dos elementos que constituem o evento E, é preciso que a turma leia o enunciado com atenção, para não incorrer no erro de interpretar 800 como sendo a quantidade de elementos do evento, uma vez que esse número é o de alunos que não praticam nenhum tipo de esporte. Assim, E = {O aluno escolhido praticar algum tipo de esporte} e n(E) = 10.000 – 800 = 9.200, pois 9.200 alunos praticam algum tipo de esporte. Logo, P (E) = 9.200/10.000 = 92/100 = 0,92 = 92%.

Na questão seguinte, denominada de desafio, tem-se o lançamento simultâneo de dois dados e a solicitação para que se calcule a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos em pelo menos um dos dados. Mais uma vez é usado o dado como contexto da atividade e para a sua resolução é preciso a aplicação do conceito clássico ou teórico de probabilidade. Os mesmos elementos são explorados no segundo e terceiro desafios.

Inicialmente o aluno precisa saber que a expressão “pelo menos um” equivale a dizer “no mínimo um”. Também é importante destacar o diferencial desta atividade em forma de desafio por se tratar de uma situação que envolve mais de um espaço amostral. Temos aqui um caso de multiplicação da probabilidade de eventos independentes, primeiro caso observado na coleção analisada.

Quando estamos diante de uma situação que envolva dois eventos independentes, devemos multiplicar as probabilidades dos eventos, $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).\ P(E_2)$, onde $P\ (E_1 \cap E_2)$ significa a probabilidade do evento A e do evento B simultaneamente; P(A) consiste na probabilidade de A e P(B) denota a probabilidade de B. O fato de A e B serem eventos independentes significa que a ocorrência do evento B não altera a probabilidade de ocorrência do evento B.

Como são lançados dois dados, cada um possui um espaço amostral, S_1 e $S_{2,}$ onde S_1 é o espaço amostral referente ao D_1 e S_2 é o espaço amostral relativo ao D_2 Pede-se que o aluno calcule a probabilidade de ocorrência da face com cinco pontos em pelo menos um dos dados. Assim, devemos considerar como resposta da questão três situações.

Na situação 1, calculamos a probabilidade de ocorrer a face 5 no lançamento do $D_{1.}$ Logo, E_1 = {Ocorrer a face com cinco pontos} e $n(E_1) = 1$; S_1 = {Todas as faces possíveis de ocorrerem} e $n\ (S_1) = 6$, e, assim, a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos no D_1 é P_1 (Ocorrer a face com cinco pontos) = 1/6.

Ainda considerando a situação 1, temos E_2 = {Não ocorrer a face com cinco pontos} e $n\ (E_2) = 5$; S_2 = {Todas as faces possíveis de ocorrem no dado D_2} e $n(S_2) = 6$, portanto, aplicando $n\ (E_2) = 5$ e $n\ (S_2) = 6$ na relação P_2 (Não ocorrer a face com cinco pontos} = $n\ (E_2)/n\ (S_2)$, obtemos que a probabilidade de não ocorrer a face com cinco pontos no D_2 é P_2 (Não ocorrer a face com cinco pontos} = 5/6.

Finalmente devemos multiplicar as duas probabilidades P_1 e P_2, aplicando $P_1 = 1/6$ e $P_2 = 1/6$ na relação $P\ (E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2)$, teremos que a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos no D_1 e a probabilidade de não ocorrer a face com cinco pontos no D_2 é P (Ocorrer a face com cinco pontos no D_1 e Não ocorrer a face com cinco pontos no D_2) = 1/6 . 5/6 = 5/36.Esta multiplicação de probabilidades somente é válida porque os eventos E_1 e E_2 são independentes, isto é, a ocorrência da face com cinco pontos no D_1 não altera ou interfere na probabilidade da não ocorrência da face com cinco pontos, do E_2, no $D_{2.}$

No entanto, podemos também considerar uma situação 2, onde vamos calcular a probabilidade de ocorrência da face com cinco pontos no lançamento dos dois dados D_1 e $D_{2.}$ Já vimos que a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos no D_1 é P_1 (Ocorrer a face com cinco pontos) = 1/6 e que a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos no D_2 é P_2 (Ocorrer a face com cinco pontos) = 1/6. Agora devemos aplicar P_1 = 1/6 e P_2 = 16 na relação P ($E_1 \cap E_2$) = $P(E_1).P(E_2)$, de onde obteremos que a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos no D_1 e no D_2 é P (Ocorrer a face com cinco pontos e Ocorrer a face com cinco pontos no D_1 e Ocorrer a face com cinco pontos no D_2) = 1/6 . 1/6 = 1/36.

Podemos ainda ter uma situação inversa à situação 1, a qual denominaremos de situação 3. Nesta situação, devemos calcular a probabilidade de não ocorrer a face com cinco pontos no lançamento do D_1. Logo, temos que o E_1 = {Não ocorrer a face com cinco pontos no D_1} e n (E_1) = 5, já que concluímos que o dado D_1 é um dado não viciado. E que o dado D_1 possui como espaço amostral S_1 = {Todas as faces possíveis de ocorrerem no D_1} e n (S_1) = 6.Portanto, aplicando n(E_1) = 5 e n (S_1) = 6 na relação P_1 (Não ocorrer a face com cinco pontos no D_1) = n (E_1)/n (S_1), obtemos que a probabilidade de não ocorrer a face com cinco pontos no D_1 é P_1 (Não ocorrer a face com cinco pontos no D_1) = 5/6.

Ainda dentro da situação 3, vamos agora calcular a probabilidade de ocorrer a face 5 no lançamento do D_2. Logo, temos que o E_2 = {Ocorrer a face com cinco pontos no D_2} e n (E_2) = 1. E que o dado D_2 possui como espaço amostral S_2 = {Todas as faces possíveis de ocorrem no D_2} e n(S_2) = 6.Portanto, aplicando n (E_2) = 1 e n (S_2) = 6 na relação P_2 (Ocorrer a face com cinco pontos no dado D_2} = n (E_2)/n (S_2), obtemos que a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos no D_2 é P_2 (Ocorrer a face com cinco pontos} = 1/6.

Assim, mais uma vez devemos multiplicar as duas probabilidades P_1 e P_2 obtidas na situação 3, aplicando P_1 = 5/6 e P_2 = 1/6 na relação P ($E_1 \cap E_2$) = $P(E_1).P(E_2)$, teremos que a probabilidade de não ocorrer a face com cinco pontos no D_1 e a probabilidade de ocorrer a face com cinco pontos no D_2 é P (Não ocorrer a face com cinco pontos no D_1 e correr a face com cinco pontos no D_2) = 5/6 . 1/6 = 5/36.

Para obtermos a solução do desafio, devemos somar as probabilidades P (Ocorrer a face com cinco pontos no dado D_1 e Não ocorrer a face com cinco pontos no dado D_2) + P (Ocorrer a face com cinco pontos no dado D_1 e Ocorrer a face com cinco pontos no dado D_2) + P (Não ocorrer a face com cinco pontos no D_1 e ocorrer a face com cinco pontos no D_2) = 5/36 + 1/36 + 5/36 = 11/36. Além disso, é importante que o professor explique o porquê da soma dos produtos das probabilidades, argumentando que cada produto representa um evento.

No segundo desafio é mencionada uma situação onde são lançados três dados simultaneamente e pede-se o cálculo da Probabilidade de se obter números iguais de pontos nos três dados. Para solucionar a questão, podemos usar o conceito de eventos independentes e multiplicar a probabilidade de cada uma das três partes que constituem cada um dos três dados. Em uma situação 1, inicialmente devemos calcular a probabilidade de ocorrer a face com um ponto, separadamente, em cada um dos três dados.

Calculando a probabilidade de ocorrer a face com um ponto no $D_{1,}$ temos: E_1 = {Ocorrer a face com 1 ponto no D_1} = {1} e $n(E_1) = 1$, pois consideramos que o dado é não viciado, mesmo que isso não tenha sido mencionado no enunciado. Além disso, temos que no dado D_1 o espaço amostral é S_1 = {Todas as faces possíveis de ocorrer no dado D_1} = {1,2,3,4,5,6} e $n(S_1) = 6$.Aplicando $n(E_1) = 1$ e $n(S_1) = 6$ na relação $P(E_1) = n(E_1)/\ n(S_1)$ para o dado D_1, vamos obter que a probabilidade de ocorrer a face com 1 ponto no D_1 é P(Ocorrer a face com 1 ponto no D_1) = 1/6.

Para calcular a probabilidade de ocorrer a face com 1 ponto no dado $D_{2,}$ temos que o evento E_2 = {Ocorrer a face com 1 ponto no D_2} = {1} e $n(E_2) = 1$. O espaço amostral no dado D_2 é S_2 = {Todas as faces possíveis de ocorrer no D_2} = {1,2,3,4,5,6} e $n(S_2) = 6$.Aplicando $n(E_2) = 1$ e $n(S_2) = 6$ na relação $P(E_2) = n(E_2)/\ n(S_2)$ para o dado D_2, vamos constatar que a probabilidade de ocorrer a face com 1 ponto no D_2 é P(Ocorrer a face com 1 ponto no D_2) = 1/6.

E, por fim, para calcular a probabilidade de ocorrer a face com 1 ponto no dado D_3, tem-se: E_3 = {Ocorrer a face com 1 ponto no D_3} = {1} e $n(E_3) = 1$; S_3 = {Todas as faces possíveis de ocorrer no D_3} = {1,2,3,4,5,6} e $n(S_3) = 6$.Aplicando $n(E_3) = 1$ e $n(S_3) = 6$ na relação $P(E_3) = n(E_3)/\ n(S_3)$ para o dado D_3, vamos constatar que a probabilidade de ocorrer a face com 1 ponto no D_3 é P(Ocorrer a face com 1 ponto no D_3) = 1/6.

Para calcular P_1 na situação 1, com $P_1\ (E_1 \cap E_2\ \cap E_3) = P(E_1)\ .P(\ E_2).P(E_3)$, temos que a probabilidade de ocorrer a face com um ponto no dado D_1 e ocorrer a face com um ponto no dado D_2 e ocorrer a face com um ponto no dado D_3 é P_1 (ocorrer a face com um ponto no dado D_1 e ocorrer a face com um ponto no dado D_2 e ocorrer a face com um ponto no dado D_3) = 1/6 · 1/6 · 1/6 = 1/36. Este mesmo raciocínio vale para as demais faces do dado e, para concluir a solução para este desafio, devemos somar as probabilidades $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

No terceiro desafio informa-se que Pedro lança dois dados ao mesmo tempo e soma os resultados obtidos. Pede-se que se responda, justificando o procedimento de resolução, se é maior a probabilidade de se obter soma 11 ou soma 12. Neste caso temos dois espaços amostrais, sendo indicado que o aluno construa uma tabela de dupla entrada composta de 7 linhas e de 7 colunas, e a preencha com todas as somas possíveis das faces de dois dados. Esta tabela dará aos alunos amplas condições de visualização de toda a situação analisada.

Assim, n (S) = 36 e, observando-se a tabela, vê-se que há duas possibilidades de soma que equivalem ao valor 6, a saber, 5 + 6 e 6 + 5, e concluímos que o evento E = {Obter a soma 11} = {5 + 6; 6 + 5}, onde n (E) = 2. Logo, a probabilidade de se obter a soma 11 no lançamento de dois dados é P (Obter a soma 11) = 2/36 = 1/18 = 0,0555..., ou P (Obter a soma 11) = 5,55%.

Já para obter a soma 12 no lançamento de dois dados, notamos ao analisar a tabela acima que somente há uma possibilidade favorável para obtermos a soma 12, qual seja, (6 + 6). Daí, concluímos que o evento E = {Obter a soma 12} = {6 + 6}, em que n (E) = 1. Logo, para obtermos a soma 12 temos apenas 1 possibilidade favorável em 36 possibilidades possíveis. Portanto, a probabilidade de obtermos a soma 12 no lançamento de dois dados é P (Obter a soma 12) = 1/36 = 0,03 = 3%. Como P (Obter a soma 11) > P (Obter a soma 12), a probabilidade de obter a soma 11 no lançamento de dois dados simultaneamente é maior que a probabilidade de obter a soma 12.

Considerando a análise do Capítulo 9 do livro do 8º ano, destacamos que o autor aborda o conteúdo de Probabilidade sob a perspectiva do modelo Clássico em quase todas as situações que apresenta, seja na discussão do conteúdo ou na apresentação de exemplos, nos problemas ou desafios propostos.

Cabe destacar que apenas dois itens do capítulo citado envolveram a concepção Frequentista de Probabilidade. Notamos ainda a predominância do uso de moedas, dados e urnas em forma de contexto nas atividades sugeridas, e a exploração de poucas formas de representações, como a listagem de elementos de conjuntos e uso de tabela. Desta forma, fica clara a limitação na abordagem conceitual e a repetição dos mesmos contextos, o que pode induzir o estudante a pensar que o conhecimento só se aplica a situações de jogo.

4.4. ANÁLISE DO CAPÍTULO 5 DO LIVRO DO 9º ANO

O quarto e último livro analisado da Coleção foi o dirigido ao 9º Ano do Ensino Fundamental. Ele possui 11 Capítulos, mas nossa análise se voltou unicamente para o Capítulo 5, cuja temática é Estatística e Probabilidade, no qual são explorados os seguintes conteúdos: Processo Estatístico; Construção de Gráficos Estatísticos; Determinação de Parâmetros e Probabilidade (experimento aleatório, espaço amostral, evento de um experimento aleatório e probabilidade).

Os objetivos deste Capítulo, no que se refere especificamente à Probabilidade, segundo o autor, são: (a) Ampliar e consolidar as noções já estudadas referentes à Probabilidade; (b) Ampliar e consolidar as noções de experimento aleatório; espaço amostral, evento e probabilidade; e (c) Mobilizar os conceitos apreendidos para resolver situações-problema.

Apenas no tópico 4 tem início a abordagem do conteúdo de Probabilidade, sendo tratado, no tópico 1, das etapas de um processo estatístico, como a delimitação do objetivo de uma pesquisa; a seleção das variáveis; a coleta de dados e a organização e análise dos dados. Esse ponto merece ser positivamente ressaltado, no livro, uma vez que as pesquisas não têm merecido o destaque necessário nas coleções de livros didáticos de Matemática. (SILVA, 2013).

Em sua pesquisa, Silva (2013) constatou que na área de Matemática não identificou coleções didáticas que propusessem pesquisas envolvendo todas as fases do ciclo investigativo embora, várias atividades envolvessem o trabalho com mais de uma dessas fases, priorizando a análise e interpretação de representações gráficas de dados apresentados pelos autores.

É exatamente sobre a construção de gráficos que trata o tópico 2 do Capítulo 5, abordando gráficos de barras horizontais e barras verticais; histograma de frequência e polígono de frequências; gráficos de setores; gráficos de segmentos; Cartograma; Pictograma e Infográfico.

No tópico 3 é desenvolvida uma abordagem sobre determinação de parâmetros, sendo discutidos os conceitos de média aritmética simples e média aritmética ponderada; Mediana e Moda. Nele o autor sugere que o professor introduza o conteúdo de probabilidade por meio de contextualizações, discutindo a presença de elementos desse conteúdo no cotidiano dos alunos, por meio de situações que envolvam sorteios, previsões de cunho meteorológico e de experimentos ou de inferências relacionadas a uma população envolvendo os dados de uma amostra, por exemplo. Desse modo, a orientação é que sejam implementadas situações que envolvam a realização de experimentos, visando o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos educandos.

O tópico 4 tem início com uma revisão de explicações sobre experimento aleatório, espaço amostral e evento de um experimento aleatório, com exemplos e, depois desta breve revisão, é apresentada uma situação que objetiva discutir uma das principais características de um espaço amostral sob o viés do conceito clássico ou teórico de probabilidade, ou seja, de espaço amostral equiprovável. A situação trata da retirada de uma bola de uma urna giratória, que contém 100 bolas numeradas de 1 a 100.

São apresentados dois exemplos de aplicação do significado Clássico, envolvendo a retirada de uma bola de uma urna giratória, que contêm bolas numeradas. No exemplo (a) são 100 bolas numeradas de 1 a 100 e, no exemplo (b), são 80 bolas numeradas de 1 a 80. No primeiro caso, pede-se a probabilidade de se extrair um número par, ao se retirar ao acaso uma bola; e no exemplo (b), pergunta-se qual é a probabilidade de se extrair um número maior que 50, ao se retirar ao acaso uma bola.

Na primeira atividade do tópico 4 traz uma situação em que se deve calcular a probabilidade de se obter coroa no lançamento de uma moeda, com a utilização direta da razão, o mesmo se observando em relação às atividades seguintes. No caso dessa primeira atividade, entendemos que seu nível de dificuldade está aquém dos implementados nos exemplos que a precederam no item dedicado ao conteúdo de Probabilidade.

Espera-se que uma coleção de livros didáticos de Matemática aborde os conteúdos de modo gradativo e progressivo em nível de dificuldade e aprofundamento, tanto na perspectiva conceitual como no grau de conhecimento necessário para a elaboração de estratégias para a resolução das atividades e problemas propostos, o que não é o caso da atividade proposta.

Na atividade 2 é apresentada uma outra situação onde o aluno deve calcular a probabilidade de se obter, no lançamento de um dado, um número menor que 5.

Na atividade 3 é dada uma situação em que foram vendidas 200 cartelas numeradas de 1 a 200 de uma rifa de um tablet, e todos os números possuem probabilidades iguais entre si de serem sorteados. Informa-se que Ana comprou as cartelas de números 78, 79, 80, 81, 82 e 83 e é solicitada a probabilidade de um de seus números ser sorteado.

Na atividade 4 é apresentada uma situação onde são lançados, ao mesmo tempo, dois dados de cores diferentes, e se pergunta qual é a probabilidade de se obter soma: (a) igual a 7; (b) maior que 10; (c) maior que 15; e (d) menor ou igual a 12. O propósito do enunciado desta atividade ao mencionar que os dados são de cores diferentes é de por meio desta informação facilitar o entendimento do aluno, levando- o a perceber, por exemplo, que 5 + 1 é uma possibilidade diferente de 1 + 5. Portanto, entendemos que este elemento informativo presente no enunciado é relevante para ajudar o educando a diferenciar os eventos ou as possibilidades, de modo que tal informação interfere diretamente na resolução da atividade. Essa discussão precisa ser feita pelo professor, para que o aluno entenda o que pode, ou não, interferir nos resultados, quando resolvemos um problema dessa natureza.

Na seção "Trabalhando os conhecimentos adquiridos" temos a subseção denominada "Revisitando", composta de cinco atividades, e a subseção "Aplicando", constituída de 18 atividades e um desafio. Na primeira subseção citada, apenas a atividade 5 trata do conteúdo de probabilidade, sendo a apenas ela que iremos nos reportar. Nela pede-se que o aluno responda, explicando sua solução, sobre o lançamento de um dado ser ou não ser um evento com espaço amostral equiprovável.

Dar respostas e explicá-las é uma forma de levar os alunos a desenvolverem a capacidade de construção de argumentos claros acerca de como elaboraram sua resposta. Entendemos que essa competência é muito importante para a formação matemática de nossos estudantes, devendo ser incentivada ao longo da Educação Básica. Van de Walle (2009) destaca a importância da escrita no contexto da resolução de problemas, orientando que os professores estimulem os alunos a redigirem um texto explicando o raciocínio que os conduziu à solução.

Dentre as atividades que compõem a subseção "Aplicando" apenas as atividades de número 7, 10, 16 e 17 tratam de Probabilidade. As demais são direcionadas à leitura, análise e compreensão de gráficos; dos conceitos e dos cálculos de média, mediana e moda; da construção de tabela de distribuição de frequências, e construção de histograma e de polígonos de frequências, de gráfico de setores e cálculo do ângulo central de um setor circular.

A atividade 7, retirada do ENEM, tem um enunciado longo, sendo diferente, nesse aspecto, da maioria das questões propostas no volume em tela e nos analisados anteriormente. Ela descreve um jogo de sinuca com 16 bolas, sendo uma bola branca e 15 bolas coloridas, que valem de 1 a 15 pontos. É dito que o jogador deve usar a bola branca para lançar duas das quinze bolas em qualquer uma das caçapas, acertando-a com o taco. Os valores das duas bolas serão somados, devendo resultar no valor escolhido pelo jogador, antes do começo da jogada.

Considerando que foram escolhidos os números 12, 17 e 22 por Arthur, Bernardo e Caio, respectivamente, como resultados de suas somas, solicita-se que o aluno indique qual jogador tem maior probabilidade de ganhar, escolhendo uma dentre as seguintes respostas: (a) Arthur, uma vez que a soma que escolheu é a menor; (b) Bernardo, já que existem 7 possibilidades de compor a soma por ele escolhida, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha realizada por Caio; (c) Bernardo, pois existem 7 possibilidades de compor a soma por ele escolhida, contra 5 possibilidades para a soma escolhida por Arthur e 4 possibilidades para a escolha realizada por Caio; (d) Caio, já que há 10 possibilidades de compor a soma por ele escolhida, contra 5 possibilidades para a escolha feita por Arthur e 8 possibilidades para a escolha realizada por Bernardo; e (e) Caio, porque a soma por ele escolhida é a maior.

Para resolver a questão, o aluno deveria identificar as decomposições de cada soma em duas parcelas, para verificar qual admite mais soluções. No caso: 12 = 1 + 11; 2 + 10; 3 + 9; 4 + 8; 5 + 7 (5 possibilidades); 17 = 2 + 15; 3 + 14; 4 + 13; 5 + 12; 6 + 11; 7 + 10; 8 + 9 (7 possibilidades); e 22 = 7 + 15; 8 + 14; 9 + 13; 10 + 12 (4 possibilidades). A resposta seria, portanto, a letra (c).

A atividade 10 corresponde à mesma atividade 7 do livro do 8º ano da coleção, que já foi por nós discutida. A atividade 16 pede que o educando, considerando a quantidade total de alunos de sua classe e supondo que a professora vai fazer o sorteio de um aluno para fazer uma apresentação, calcule: (a) qual é a probabilidade dele ser o aluno sorteado; e (b) qual é a probabilidade de o aluno sorteado ser do sexo feminino.

Para o aluno resolver essa atividade deve conhecer o significado de espaço amostral equiprovável, que é a principal condição que torna possível a aplicação do conceito clássico ou teórico de probabilidade. Esta é uma oportunidade para que o professor discuta com a turma, a partir de quantidades hipotéticas, os conceitos de evento E e de espaço amostral S. Os alunos devem compreender que o número de elementos do espaço amostral está em função do número de alunos. O espaço amostral varia de acordo com o número de alunos da turma.

O mesmo acontece com relação a descrição do evento E, já que este se trata de um subconjunto do espaço amostral S. Os seus elementos serão retirados dos elementos que constituem o espaço amostral S. O número de elementos do evento E depende do espaço amostral, que, por sua vez, depende da quantidade de alunos da turma. Ao trabalhar com espaços amostrais e eventos hipotéticos, o professor cria diversas situações probabilísticas que ajudam os alunos ampliarem a sua compreensão a respeito dos conceitos de espaço amostral e de evento.

Portanto, as repostas para os itens (a) e (b), vão depender do número de alunos da classe e do sexo dos estudantes, pois o enunciado da atividade não fazem referência a tais informações.

Na atividade 17 informa-se que em uma urna existem 15 bolinhas vermelhas; 9 bolinhas amarelas e 6 verdes. Considerando um sorteio, ao acaso, de qualquer uma dessas bolinhas, o educando deve calcular a probabilidade de a bola sorteada ser: (a) verde; (b) vermelha; ou (c) amarela. Quanto ao item (a), temos que E = {Número de bolas verdes} e n(E) = 6. Como n (S) = 30 e n(E) = 6, P (Sortear uma bola verde) = $\frac{1}{5}$= 0,2 = 20%. A resposta apresentada no livro didático para o item (a) está expressa nas formas decimal e percentual, embora o autor tenha predominantemente apresentado a resposta na forma de uma fração, na coleção.

No item (b), o evento E será: E = {Número de bolas vermelhas} e n(E) = 15. Assim, P (Sortear uma bola vermelha) = $\frac{15}{30}$=$\frac{1}{2}$= 0,5 = 50%. E no item (c), o evento desejado é sortear uma bola amarela, onde E = {Número de bola amarela} e n(E) = 9 e, ao aplicarmos n(E) = 9 e n (S) = 30 na fórmula P (E) = $\frac{n(E)}{n(S)}$, obtemos P (Sortear uma bola vermelha) = $\frac{9}{30}$ = $\frac{3}{10}$= 0,3 = 30%.

Concluída a análise na abordagem do conteúdo de Probabilidade no capítulo 5 do livro do 9º Ano, ficou evidente que se seguiu, quase que exclusivamente, pela exploração do viés do significado Clássico de Probabilidade, e a utilização predominante do contexto de jogo, com o lançamento de dados e moedas, ou o sorteio em urnas. Foram apresentadas poucas figuras-suporte, que auxiliariam a resolução das questões, e apenas uma tabela.

Logo, destacamos como características negativas na abordagem do conteúdo de Probabilidade nos livros da coleção analisada, a exploração de formas limitadas e repetidas de representação, bem como dos contextos presentes nos exemplos e atividades propostas, mas, principalmente, a utilização de praticamente um único significado de Probabilidade, o que contraria a recomendação de vários autores (BATANERO, 2005; BATANERO; DÍAZ, 2006; BATANERO et al., 2016).

Cabe destacar que, mesmo que os exemplos e questões propostas envolvam a descrição do que poderia corresponder a eventos probabilísticos, praticamente não se sugere que os próprios estudantes vivenciem tais situações. É preciso considerar que muitos estudantes não têm vivência com jogos (dados, roletas ou baralho) e pressupor isso pode prejudicar a compreensão das ideias vinculadas ao conceito de Probabilidade.

Essa recomendação precisa ser complementada pelo processo de socialização de soluções e de expressão oral ou escrita do conhecimento, pelo aluno, por meio da exposição de suas ideias e estratégias. Além, disso, a mediação, pelo professor, em discussões direcionadas ao conceito de Probabilidade, deve estimular a participação e a criticidade.

A proposta do volume 4 consiste basicamente em uma revisão dos conceitos probabilísticos discutidos no volume 3 da coleção, uma vez que a exposição teórica dos conceitos, os exemplos resolvidos e as atividades propostas são bastante semelhantes, sem proposta de promoção de aprofundamento e ampliação do conceito de Probabilidade.

4.5 SÍNTESE DA ANÁLISE E RECOMENDAÇÕES

Nossa análise da proposta para o ensino de Probabilidade se deu com base em uma única coleção de livros didáticos de Matemática direcionada aos quatro últimos anos do Ensino Fundamental. Embora esse recorte apresente limitações, uma vez que certamente há uma grande diversidade de orientações nas muitas coleções disponíveis no mercado editorial, entendemos ser possível fazer generalizações quanto às orientações metodológicas para o professor, acerca do ensino do conteúdo em tela, qualquer que seja a coleção didática adotada na(s) escola(s) em que ele atua. Para isto, consideramos os critérios já expostos, delimitados em função de nosso referencial teórico.

O primeiro resultado que gostaríamos de ressaltar é positivo e trata da identificação do conteúdo de Probabilidade em todos os volumes da coleção analisada, o que é necessário ocorrer, em virtude da relevância de tal conceito para a formação dos estudantes. Como vimos anteriormente em nosso texto, nas orientações da BNCC para o Ensino Fundamental, o estudo de Probabilidade tem destaque e perpassa todo esse nível de escolaridade, do primeiro ao 9º Ano. Nossas sugestões, entretanto, estarão concentradas nos quatro anos finais do Ensino Fundamental, uma vez que fizemos esse recorte em nossa análise.

Entendemos que, mesmo que o livro didático adotado pela escola não aborde adequadamente o conteúdo de Probabilidade, por meio de contextualizações internas, ou seja, relativas à própria Matemática, o professor deve procurar explorar alguma possível conexão com outro conteúdo planejado, o que será fundamental para a ampliação do pensamento probabilístico dos alunos. Na coleção que analisamos, por exemplo, o autor traz atividades relacionadas à Probabilidade no livro do 6º Ano, mas focando na distinção de possibilidade e probabilidade, o que poderia ser feito quando do trabalho com os diferentes significados da multiplicação, caso o livro não trabalhe com elementos do pensamento probabilístico.

Um aspecto limitante observado na Coleção foi a natureza dos contextos das questões envolvendo o conteúdo em destaque. Na maior parte, envolviam jogos de dados, baralhos, lançamento de moedas e retirada de bolas de urnas o que, conforme destacamos em nossa discussão teórica, pode provocar erros de compreensão. A recomendação é que o professor não se limite à utilização desses contextos clássicos e que explore mais a utilização de roletas, com base nas quais podem ser discutidos eventos não equiprováveis, e situações do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento.

Como sugestões de atividades envolvendo o uso de roletas, indicamos algumas dentre as muitas sugeridas por Gage e Spielgelhalter (2016), apresentadas em seguida. As roletas podem ser feitas em papel ou cartão, usando-se um clip de papel pequeno preso na ponta do lápis, posicionado no centro do círculo. Deve-se orientar os estudantes que procurem imprimir sempre a mesma força ao girarem o clip, para evitar resultados direcionados. Podemos, ainda, Por exemplo, podemos explorar o jogo ajustável de roletas disponível em:

http://www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner.

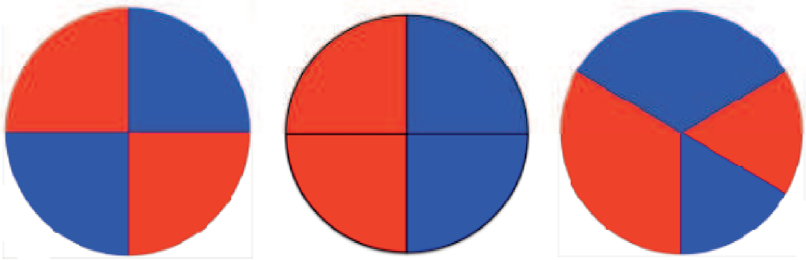
Em todas as atividades envolvendo roletas, estas devem ser entregues aos alunos em tamanho adequado e as discussões devem ser feitas em pequenos grupos e socializadas coletivamente, posteriormente, para que seja oportunizado o esclarecimento de dúvidas e a apresentação de elementos de natureza formal, como definições e notações. Vale ressaltar que, por ser complexo, o pensamento probabilístico demandará tempo para ser elaborado e precisa ser explorado ao longo de todo o Ensino Fundamental, em um movimento de espiral, retomando e ampliando ideias.

Nas Atividades indicadas em seguida, a orientação é que a turma seja dividida em grupos, fazendo-se registros de respostas e de argumentação, discussão dos registros e explanações teóricas necessárias. O tempo dedicado à cada Atividade dependerá do desempenho da turma, sendo recomendável programar uma ou duas aulas para isso.

As quatro Atividades aqui destacadas têm os seguintes objetivos: Explorar o significado Frequentista de Probabilidade, adotando a metodologia de resolução problemas; Discutir os conceitos de espaço amostral e de evento, através da resolução de problemas, bem como relacionar a ideia de jogo justo ou injusto com o conceito de espaço amostral equiprobabilístico ou não equiprobabilístico; Explorar a Lei dos Grandes Números; Estimular a capacidade de argumentação e de escrita dos alunos a partir da necessidade de se desenvolver algumas respostas em forma de pequenos textos apontando a suas próprias estratégias de resolução da atividade.

Na Atividade 1, para cada roleta, o jogador A da dupla ganha se o resultado for vermelho e o jogador B ganha se o resultado for azul. As roletas usadas na Atividade 1 são as indicadas na Figura 20. Todas estão representando a divisão do círculo em duas cores que têm a mesma área (metade da área do círculo).

Figura 20. Modelos de roletas da Atividades 1.

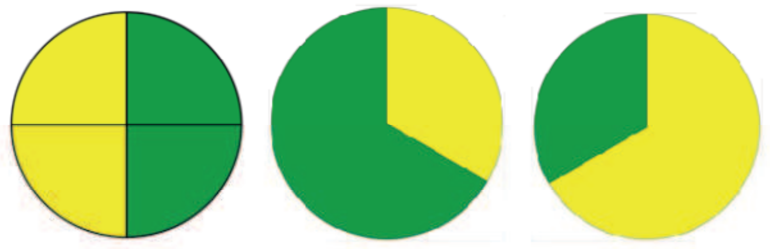


Fonte: GAGE, J.; SPIELGELHALTER, D. (2016, p.39)

Cada dupla deve receber uma das roletas e girá-la 12 vezes, registrando quem ganhou em cada rodada e, depois de concluir as jogadas, responder às seguintes questões: Quantas vezes ganhou cada jogador, em cada roleta? O que você esperaria que acontecesse se você jogasse por muito tempo? É importante considerar qual roleta você usa? Essas roletas são justas? Por que (sim ou não)?

Na Atividade 2 o jogador A ganha se o resultado for amarelo e o jogador B ganha se o resultado for verde. Os modelos das roletas que podem ser distribuídas entre as diversas duplas são os da Figura 21. A roleta da esquerda está dividida de modo que as duas cores correspondam à mesma área do círculo (metade dele) e nas outras duas roletas, uma das cores corresponde a 1/3 da área e a outra à 2/3.

Figura 21. Modelos de roletas da Atividade 2.

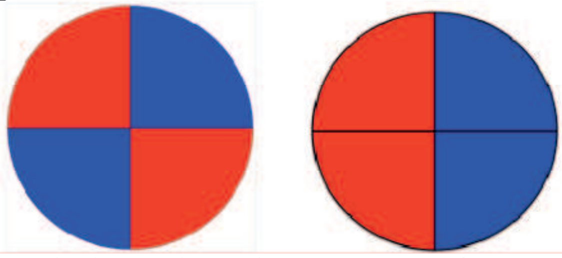


Fonte: GAGE, J.; SPIELGELHALTER, D. (2016, p.39)

Cada dupla deve girar sua roleta 12 vezes, registrando quem ganha cada rodada. Após concluir todas as jogadas, cada dupla discutirá e responderá as seguintes questões: Quantas vezes ganhou cada jogador, em cada roleta? O que você esperaria que acontecesse se você jogasse por muito tempo? É importante considerar qual roleta você usa? Essas roletas são justas? Por que (sim ou não)?

Na Atividade 3, o jogador A ganha se o resultado em ambas as roletas for o mesmo (vermelho-vermelho ou azul-azul), o jogador B ganha se eles forem diferentes (vermelho-azul ou azul-vermelho). Cada dupla deve trabalhar com as duas roletas, cujos modelos constam na Figura 22. Ambas estão representando a divisão do círculo em duas cores que têm a mesma área (metade da área do círculo).

Figura 22. Modelo de rolateas da Atividade 3.



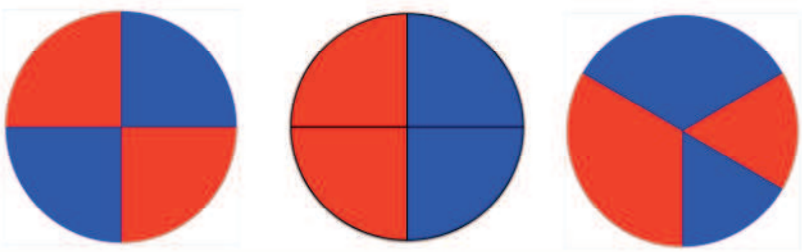
Fonte: GAGE, J.; SPIELGELHALTER, D. (2016, p.40)

Cada dupla deve girar as duas roletas, ao mesmo tempo, 24 ou 36 vezes, registrando quem ganha cada rodada. Após concluir todas as rodadas, devem discutir e reponder às seguintes questões: Quantas vezes ganhou cada jogador? Você ficou surpreso com os resultados? Por que (sim ou não)? O que você esperaria que acontecesse se você jogasse por muito tempo? Este é um jogo justo? Por que (sim ou não)?

Na Atividade 4, o jogador A ganha se o resultado em todos as três roletas for o mesmo (vermelho-vermelho-vermelho ou azul-azul-azul); o jogador B ganha se o resultado for dois azuis e um vermelho (vermelho-azul-azul ou azul-azul-vermelho ou azul-vermelho-azul) e o jogador C ganha se o resultado for dois vermelhos e um azul (vermelho-vermelho-azul ou vermelho-azul-vermelho ou azul-vermelho-vermelho).

Os modelos das três roletas a serem utilizadas por cada grupo estão indicadas na Figura 23. Todas estão representando a divisão do círculo em duas cores que têm a mesma área (metade da área do círculo).

Figura 23. Modelo de roletas da Atividade 4.



Fonte: GAGE, J.; SPIELGELHALTER, D.(2016, p.40)

Cada grupo deverá girar as três roletas ao mesmo tempo, 24 vezes, registrando quem ganha cada vez. Em seguida, devem discutir e responder às questões: Quantas vezes ganhou cada jogador? Você ficou surpreso com seus resultados? Por que (sim ou não)? O que você esperaria que acontecesse se você jogasse por muito tempo? Este é um jogo justo? Por que (sim ou não)?

Nas quatro Atividades aqui destacadas, é importante lembrar que o professor deve acompanhar a condução das jogadas pelos grupos, observando dúvidas e adequação do uso das roletas, uma vez que, dependendo da forma como a seta é girada, ou seja, da força imprimida no toque, o resultado pode ser orientado e o resultado não ser aleatório.

Outro aspecto a ser ressaltado é que, com base em nossa análise e o que indicam diversas pesquisas que foram destacadas em nosso referencial teórico, o significado que prevalece nas propostas de autores de Livros Didáticos é o Clássico, embora haja indicações de que outros significados sejam igualmente valorizados, em especial o Frequentista, no Ensino Fundamental.

É importante que o professor procure apresentar problemas probabilísticos aos alunos que possibilitem a articulação de diferentes significados de Probabilidade, observando a adequação destes ao nível de escolaridade dos estudantes. A indicação é que pelo menos os significados Intuitivo, Clássico e Frequentista sejam explicitamente explorados.

Pode-se, ainda, trazer elementos característicos dos significados Lógico e Subjetivista, ainda que informalmente. Nessa direção, Gage e Spielgelhalter (2016) propõem algumas atividades que podem ser utilizadas na exploração da relação entre diferentes significados da Probabilidade, duas das quais destacamos em seguida, que estão presentes e foram traduzidas da obra "Teaching Probability" (2016, pp.150-152).

As duas atividades possibilitam o estabelecimento de relações entre os significados Frequentista e Clássico, por meio da resolução, exploração e proposição de problemas. Seus objetivos são: Explorar os significados Frequentista e Clássico de Probabilidade através da resolução de problemas; Identificar padrões numéricos; Construir gráficos de barrras; Simular experimentos aleatórios utilizando a planilha Excel; Preencher e analisar dados de tabelas e fazer generalizações.

A primeira Atividade é intitulada: Cara ou coroa? Menino ou menina? Ela deve ser realizada preferencialmente com a turma dividida em duplas. Solicitar que os alunos lancem uma moeda 10 vezes e registrem quantas vezes obtiveram cara como resultado. O processo deve ser repetido 10 vezes, totalizando 100 lançamentos, e, em seguida, propor a construção de um gráfico de barras com os resultados, mostrando a frequência de caras obtidas.

Solicitar que os alunos estimem a Probabilidade de obter exatamente 5 caras e 5 coroas, apenas usando esses dados. Eles devem notar que a chance de obter 10 caras ou 10 coroas é $1/(2^{10}) = 1 / 1.024$ ou muito perto de 1 em mil, relação fácil de compreender e que representa bem as chances do evento, em uma linguagem acessível para o aluno.

Se possível, propor que o processo seja repetido, usando-se uma planilha eletrônica para os registros, como o Excel, fazendo-se 20 lançamentos em cada rodada e repetindo o procedimento 10 vezes. Solicitar que os alunos estimem a Probabilidade de obter 20 caras ou 20 coroas, que é dada por $1/(2^{20}) = 1 / 1.048.576$, ou, muito perto de um em um milhão. Propor reflexões por meio de questões como: Se essa experiência fosse repetida várias vezes, qual seria a forma do gráfico de barras? O que você observa quando compara os resultados dos dois procedimentos, com um número menr ou maior de lançamentos?

Para explicar aos estudantes como estabelecer uma relação entre os resultados obtidos por meio dos experimentos realizados, e o significado Clássico de Probabilidade, Gage e Spielgelhalter (2016) sugerem a segunda Atividade que destacamos, que procura identificar a Probabilidade de se obter, digamos, exatamente 5 caras em 10 lançamentos. Cada sequência específica de caras e coroas é igualmente provável, mas algumas sequencias têm mais caras do que outras, então precisamos contar quantas dessas seqüências únicas têm 5 caras e compará-las com o número total de seqüências possíveis para formar a proporção: Probabilidade de exatamente 5 caras = "Número de seqüências com 5 caras" / (Número total de seqüências possíveis).

Portanto, gostaríamos de uma fórmula geral, para qualquer resultado, tanto para o número total de seqüências possíveis quanto para o número contendo 0, 1, 2, ..., caras. Sugerir que cada dupla de estudantes registrem em uma tabela, para os casos de 1, 2, 3 e 4 lançamentos, completando a última linha (Quadro 2).

Quadro 02. Lançamentos e sequencias de caras e coroas.

Número de lançamentos	Sequencias possíveis de caras e coroas
1	H T
2	HH HT TH TT
3	HHH HHT HTH HTT THH THT TTH TTT
4	

Fonte: Traduzido de Gage e Spielgelhalter (2016, p.152)

Em seguida, propor que os alunos preencham as células em branco do Quadro 03, apresentada em seguida, procurando identificar e registrar padrões numéricos em suas linhas e colunas.

Quadro 03. Lançamentos e número de caras

	Número de sequencias com o número indicado de Caras						
No. de lançamentos	0	1	2	3	4	5	…
1	1	1					
2							
3							
4							

Fonte: Traduzido de Gage e Spielgelhalter (2016, p.154)

Solicitar que os estudantes estimem o que aconteceria nos casos em que fossem feitos cinco ou seis lançamentos. A primeira coluna é sempre composta pelo número 1, então, cada entrada é a soma da entrada diretamente acima e acima para a esquerda. Adicionando as contagens para cada linha, vemos que eles totalizam 2N, onde N é o número de lançamentos, então qual é a probabilidade teórica de obtermos 2 caras em 3 lançamentos? (3/8). E 5 caras em 10 lançamentos?

(252/1024 ≈25%), ou seja, há quase uma chance de 1 em 4 de obter exatamente 5 caras em 10 jogadas.

A primeira dentre as duas últimas Atividades aqui destacadas atende à recomendação de que sejam feitas simulações e atividades experimentais, ainda que envolvendo os contextos de jogos, o que oportuniza discutir fatos fundamentais como o de que a Probabilidade não tem memória (VAN DE WALLE, 2009).

É importante que os estudantes compreendam que, quando estamos jogando um dado, mesmo que seja sorteado o número 5 três vezes seguidas, isso não aumentará as chances de o 5 ser sorteado na quarta vez em que ele for lançado. A conexão com elementos do cotidiano pode ser feita por meio da ligação entre os dois resultados do lançamento da moeda e o nascimento de meninos e meninas, em uma perspectiva probabilística.

No caso de estudantes que ainda estão dando seus primeiros passos no campo do pensamento probabilístico, é fundamental que o professor não se limite ao uso de métodos ou de técnicas matemáticas focadas em números e regras, o que se destaca quando se explora o significado Clássico de Probabilidade. É fundamental transcender as fronteiras dos números, incidindo também no campo da escrita, por meio da qual os alunos podem registrar suas impressões sobre ideias básicas que permeiam o conceito de Probabilidade, como as apontadas por Batanero et al. (2016).

Nessa direção, destacamos as sugestões de Atividades de Gage e Spielgelhalter (2016), apresentadas em seguida. Ambas foram traduzidas e adaptadas da obra já citada e envolvem a exploração, resolução e proposição de problemas. Seus objetivos são: Explorar inicialmente o modelo intuitivo de probabalidade através da resolução de problemas; Relacionar os significados Intuitivo e Clássico de Probabilidade; Representar uma expressão probabilística em forma percentual; Interpretar enunciados de problemas probabilísticos.

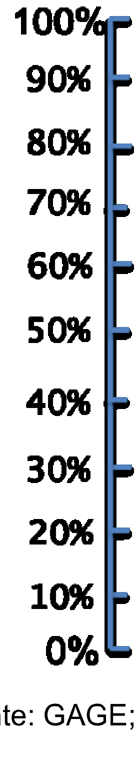
A primeira Atividade deste grupo é intitulada “Quão provável é o provável?”. A Atividade envolve a leitura do texto transcrito em seguida:

> Arthur estava preocupado. Era quase certo que haveria um teste de matemática hoje, e ele não estava prestando muita atenção às aulas, recentemente. Sally provavelmente obteria melhores resultados do que ele, e havia uma possibilidade considerável de que Zak se desse mal. A previsão do tempo informou que poderia chover, então Arthur pegou um casaco e, ao caminhar para a escola, ele achou que

provavelmente encontraria Zak, que sempre jogava e poderia jogar com ele até tarde. Se ele chegasse atrasado, certamente teria problemas. Talvez houvesse uma bomba ou incêndio para interromper o teste? Mas realmente havia poucas possibilidades disso acontecer e também era extremamente improvável que um asteróide atingisse a escola. Vai ser um dia difícil para Arthur. (Traduzido e adaptado de GAGE; SPIELGELHALTER, 2016, p.42)

Em seguida, propor aos alunos que sublinhem, no texto, as palavras ou frases que expressam incerteza, como "poderia", "provável", dentre outras, e que elaborem uma lista dessas palavras, classificando-as em termos de probabilidade mais alta a menor e as colocando na escala de probabilidade vertical ilustrada abaixo (Figura 24). Por exemplo, se o aluno achar que "quase certo" é próximo de 50%, deve escrever a expressão ao lado de 50%. Indicar a possíbilidade de que várias expressões podem ficar situadas na mesma posição e que algumas posições podem não ter associações a ela.

Figura 24. Escala percentual de Probabilidade



Fonte: GAGE; SPIELGELHALTER, 2016, p.142.

A próxima Atividade que destacamos tem os seguintes objetivos: Relacionar os significados Intuitivo e Clássico de Probabilidade; Compreender o valor probabilístico em sua forma percentual; Expressar ideias probabilísticas/pensamento probabilístico através da escrita ou da elaboração de pequenos textos. Ela foi traduzida e adaptada de Gage e Spielgelhalter (2016) e ampliada considerando a realidade da indústria farmacêutica brasileira.

A Atividade tem início, informando-se que algumas agências e organizações americanas têm tentado padronizar termos que expressam incerteza, a exemplo da escala criada para indicar condições/mudanças climáticas, intitulada de IPCC (*Intergovernmental Panel on Climate Change*), criada em 1988, tendo sofrido adaptações desde então.

De acordo com dados disponibilizados no endereço eletrônico do IPCC (https://www.ipcc.ch/publications_and_data/ar4/wg1/en/ch1s1-6.html), seu objetivo é tornar acessíveis dados relevantes de natureza científica, técnica e socioeconômica, para que as pessoas da comunidade entendam os riscos de ações humanas nas mudanças climáticas. Para tanto, foram definidas escalas relacionar níveis de confiança, na perspectiva científica, e as probabilidades de eventos específicos.

Esses níveis de confiança expressam tanto quando um evento é extremamente improvável quanto não. No endereço indicado, os autores reforçam que os termos confiança e probabilidade, embora sejam conceitos distintos, são ligados na prática. Uma Tabela contém os termos padrão usados para definir diferentes níveis de confiança utilizados em situações práticas do cotidiano, como previsão do tempo.

A primeira Tabela apresentada no endereço eletrônico citado é a destacada em seguida (Quadro 04).

Quadro 04. Níveis de confiança: terminologia e grau de confiança correspondente.

TERMINOLOGIA	GRAU DE CONFIANÇA
Confiança muito alta	Pelo menos uma chance de 9 em 10
Confiança alta	Cerca de 8 em 10 chances
Confiança média	Cerca de 5 em 10 chances
Baixa confiança	Cerca de 2 em 10 chances
Confiança muito baixa	Menos de 1 em 10 chances

Fonte: Adaptada de: https://www.ipcc.ch/publications_and_data/ar4/wg1/en/ch1s1-6.html

Na Atividade sugerida por Gage e Spielgelhalter (2016), os estudantes irão trabalhar com o Quadro 05, também apresentada no endereço do IPCC, já informado.

Quadro 05. Expressão verbal e probabilidade correspondente.

EXPRESSÃO VERBAL	PROBABILIDADE CORRESPONDENTE (%)
Virtualmente certo	99-100
Extremamente provável	95-100
Muito provável	90-100
Provável	66-100
Mais provável que não	50-100
Menos provável que sim	33-66
Improvável	0-33
Muito improvável	0-10
Extremamente improvável	0-5
Excepcionalmente improvável	0-1

Fonte: Traduzida e adaptada de GAGE, SPIELGELHALTER, 2016, pp.143-144

Os autores propõem que a Tabela seja explorada por meio de questões como:

1) O que você acha dessa escala?

2) Em uma reportagem recente, o apresentador afirmou: "É Extremamente provável que a influência humana seja a causa dominante do aquecimento global observado desde o século 20". Como interpretar essa informação? Que argumentos seriam necessários para garantir a procedência de uma afirmação dessa natureza?

Depois de discutidas as respostas, em duplas, socializar os resultados coletivamente. Questionar sobre o uso de termos como os indicados na Tabela no cotidiano ou em veículos de comunicação e os desdobramentos do uso dessa terminologia, caso as pessoas não a compreendam adequadamente.

Uma Atividade complementar que elaboramos, está relacionada a uma Tabela dessa natureza, utilizada no Brasil, em bulas de remédio. No Brasil é utilizada uma tabela de probabilidade percentual associada a efeitos adversos de Medicamentos (a mesma adotada pela Agência de Saúde Europeia) (Quadro 06), e é discutida no endereço eletrônico da Sociedade Brasileira de Profissionais em Pesquisa Clínica (SBPPC). No endereço citado, são informadas as condições específicas das fases de condução de um ensaio clínico com medicamentos, cujos resultados são acompanhados e avaliados pela Agência Nacional de Vigilância Sanitária (ANVISA).

Quadro 06. Relação expressão verbal x probabilidade percentual em bulas de remédio

EXPRESSÃO VERBAL	PROBABILIDADE CORRESPONDENTE (%)
Reações muito comuns	Ocorrem em 10% dos pacientes que usam o medicamento
Reações comuns	Ocorrem entre 1% e 10% dos pacientes que usam o medicamento
Reações incomuns	Ocorrem entre 0,1% e 1% dos pacientes que usam o medicamento
Reações raras	Ocorrem entre 0,01% e 0,1% dos pacientes que usam o medicamento
Reações muito raras	Ocorrem em menos de 0,01% dos pacientes que usam o medicamento
Outras reações adversas	Não informado

Fonte: http://www.sbppc.org.br/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=14&Itemid=37

A exploração do Quadro 06 envolve a reflexão acerca de questões como: i) O que você acha dessa escala? ii) Que informação foi omitida mas é muito importante para o consumidor saber o nível de confiança do produto? iii) O que você acha da padronização de escalas dessa natureza? iv) Em que outras situações você acredita que seria interessante serem estabelecidas tabelas de escala semelhantes a essas?

A informação omitida, citada no item ii, seria o número de pacientes em que o medicamento teria sido testado, o que é importante para garantir a segurança do consumidor. Esse quantitativo de participantes, segundo a SBPCC, depende do momento em que está o estudo do medicamento, divididos em dois: o dos Estudos Não Clínicos e o dos Estudos Clínicos.

No primeiro momento (fase Não-Clínica) a substância é testada em laboratórios e em animais de experimentação, como coelhos, e tem como principal objetivo avaliar como esta substância se comporta em um organismo vivo, seguindo-se normas de proteção aos animais de experimentação.

Na fase Clínica a substância é testada em seres humanos e é constituída por quatro fases sucessivas. Somente após ser aprovado em todas as fazes dos dois momentos, o medicamento é liberado para comercialização. Na Fase I a substância é testa pela primeira vez, em pequenos grupos de 10 a 30 pessoas que são, em geral, voluntários sadios. Se os resultados forem positivos, passa-se para a Fase II.

Na Fase II o número de pacientes aumenta para 70 a 100 voluntários, analisando-se segurança e toxicidade da substância analisada. Se os resultados forem bons, passa-se para a Fase III, quando o número de pacientes aumenta para 100 a 1.000. Nesta fase, em geral, são utilizados dois grupos: o grupo controle, que recebe o tratamento padrão; e o grupo denominado de investigacional, que recebe a nova medicação, cujos membros são escolhidos por meio de sorteio.

Finalmente, na Fase IV, são realizados testes para confirmar se os resultados obtidos na fase imediatamente anterior são aplicáveis à população em geral. Nesta fase, o medicamento já foi aprovado para comercialização, acompanhando-se os efeitos dos medicamentos a longo prazo.

Essas informações são, muitas vezes, negligenciadas pela maioria da população, que não faz a leitura adequada de suportes textuais como as bulas de remédio e que podem evitar problemas mais graves de saúde. A importância da orientação dos alunos para o domínio de conhecimentos dessa natureza é destacada em roteiros de aula dirigidos à leitura de Bulas, como importantes suportes textuais, disponibilizados no Portal do Professor, do Ministério da Educação (http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=58183; http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22463).

A ampliação do estudo dos conteúdos, considerando outros contextos, em particular envolvendo situações do cotidiano, em razão de seu apelo motivacional, é fundamental para a formação do pensamento probabilístico. Nessa direção, ressaltamos, a necessidade de análise do livro didático que está utilizando, observando se são definidos termos essenciais utilizados no estudo de Probabilidade; e se as explicações são claras e corretas; se é possível trazer novas situações e contextos, dentre outras possibilidades.

Como registramos ao longo da análise, em muitas ocasiões o autor da coleção que avaliamos não trazia informações acerca de elementos básicos dos quais tratava no texto. Entendemos que a utilização de textos explicativos complementares é, em alguns casos, recomendável, tendo-se o cuidado de selecioná-los considerando fontes confiáveis de informação, a exemplo de artigos publicados em periódicos científicos ou livros textos avaliados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), por exemplo. Deve-se evitar o uso de dados retirados de fontes que não sejam cientificamente reconhecidas, como blogs ou sites não acadêmicos da Internet.

Na discussão sobre enumeração das possibilidades, na construção de um espaço amostral, é importante que o professor procure fazer intervenções sempre que perceber que não está claro para os alunos a organização e natureza dos elementos que constituem cada uma das possibilidades de ocorrência de um determinado evento, uma vez que esta percepção é fundamental para que o estudante compreenda o significado do conceito de possibilidades e, desta forma, não incorra em equívocos na construção do conceito de Probabilidade.

Em nossa análise do livro do 7º Ano, constatamos que o conteúdo de Probabilidade é explorado a partir da relação entre o número de possibilidades favoráveis e o número de possibilidades possíveis, não havendo, pois, em nosso entendimento, uma formalização adequada do significado Clássico de Probabilidade, cuja representação se dá por meio de uma fração.

Como os números racionais na forma fracionária são estudados no 6º Ano, o significado Clássico pode ser introduzido formalmente no ano de escolaridade seguinte, por meio de uma fração, ampliando-se posteriormente, com a ideia de razão, sem necessariamente recorrer à utilização das nomenclaturas de evento e de espaço amostral como sendo os termos técnicos correspondentes respectivamente ao numerador e ao denominador da fração correspondente à Probabilidade de um evento.

Ressaltamos a necessidade de propor problemas que versem sobre o cálculo da Probabilidade de ocorrência de um evento como também sobre a distinção entre experimento aleatório e experimento determinístico, bem como que sejam apresentados problemas que levem os discentes a perceberem a distinção entre Probabilidade condicionada e não condicionada, como recomendam os teóricos que adotamos e os documentos oficiais brasileiros, em especial a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), na qual serão baseados os novos currículos que orientarão a Educação Básica a partir do ano 2020, de acordo com prazo de adaptação estabelecido naquele documento.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escolha da temática de nosso trabalho se deu em razão de interesses de natureza pessoal, considerando nossa trajetória ao longo da Educação Básica e de nosso curso de Graduação, mas levamos em consideração, em particular, o destaque dado ao pensamento probabilístico nos documentos normativos brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017), que destacam a importância do ensino de Probabilidade para a formação de nossos estudantes.

Como elemento de discussão do referencial teórico, elegemos a análise da proposta de ensino de conteúdos de Probabilidade em uma coleção de Matemática dirigida aos quatro anos finais do Ensino Fundamental, usando como critério de seleção o fato de ser aquela coleção a mais utilizada no município em que atuamos. Em nossa análise focamos, nos quatro volumes da coleção, nos tópicos atinentes a elementos da Teoria das Probabilidades.

O processo analítico foi iniciando com o levantamento das unidades de cada volume que tratavam de tópicos de Probabilidade e, em um segundo momento, os tópicos levantados foram descritos e discutidos, levando em consideração os diferentes modelos teóricos de Probabilidade, trabalhos já realizados sobre o mesmo tema e as orientações dos documentos oficiais.

Destacamos em nossa análise como sendo um aspecto positivo relevante da coleção de livros didáticos de Matemática analisada que o conteúdo de Probabilidade foi abordado em todos os volumes da coleção, o que estimula o ensino do conteúdo em tela, de modo que, em cada um dos quatro anos finais do Ensino Fundamental o professor explore elementos da Teoria das Probabilidade, levando em consideração o grau de dificuldade para a compreensão destes elementos e o nível de amadurecimento do estudante para entendê-los em determinado ano escolar, promovendo, desta forma, uma ampliação e aprofundamento do conteúdo.

Como resultado de nossa análise da coleção percebemos, entretanto, a superficialidade com que alguns elementos do conteúdo de Probabilidade foram abordados, sendo assim, pouco explorados em diversos momentos ao longo da Coleção analisada; a limitação à utilização do significado Clássico de Probabilidade; bem como a utilização de contextos apenas de jogos de dados e baralho, sorteio de bolas em urnas e lançamento de moedas, sem aplicações a outras áreas de conhecimento ou a situações do cotidiano.

Constatamos também a predominância quase absoluta do significado Clássico de Probabilidade na abordagem deste conteúdo ao longo da Coleção analisada. Sendo assim, propomos ao professor que procure desenvolver atividade que requeiram dos alunos a articulação entre diferentes significados de Probabilidade, uma vez que em nosso trabalho defendemos a importância da interação entre os diferentes modelos probabilísticos como forma de ser fortalecer e ampliar o entendimento da Teoria das Probabilidades, em consonância com o referencial teórico que adotamos.

Como resultado específico da análise do volume do 6º Ano, destacamos que a preocupação geral do autor foi explorar a distinção entre probabilidade e possibilidades, solicitando do aluno a utilização de diferentes estratégias para a contagem das possibilidades, o que caracterizaria a passagem do pensamento probabilístico de uma abordagem mais informal para um nível mais formal. Essa transição é recomendável, mas devemos lembrar que não é automática, sendo necessário discutirmos definições de elementos teóricos abordados.

No livro do 7º Ano, percebemos que a proposta de abordagem do conteúdo de Probabilidade se dá através da relação entre o número de possibilidades favoráveis e o número de possibilidades possíveis, destacando assim, o cálculo de probabilidade como sendo uma fração ou uma razão numa perspectiva informal, sem utilizar a linguagem técnica e a nomenclatura específica deste campo de estudo.

Já no livro do 8º, isto é, no volume, o autor faz uma abordagem do conteúdo seguindo predominantemente à direção do modelo teórico Clássico de Probabilidade, utilizando a linguagem formal da Teoria das Probabilidades. Já a abordagem proposta no volume do 9º Ano limitou-se basicamente a uma revisão das ideias probabilísticas discutidas no volume 3, dirigido para o 8º Ano, sem a promoção da ampliação e/ou aprofundamento esperado.

Em nosso entendimento, a coleção propõe uma abordagem limitada de elementos da Teoria das Probabilidades, recorrendo apenas aos contextos clássicos destacados anteriormente, o que pode implicar no surgimento de dificuldades de aprendizagem, obstaculizando o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos. Por esta razão, sugerimos ao professor a aplicação de atividades que envolvam a utilização de roletas, que são ferramentas que possibilitam uma abordagem bem mais ampla com relação ao ensino de Probabilidade por meio do estudo de fenômenos probabilísticos não equiprováveis, bem como contextualizar os problemas probabilísticos numa perspectiva mais próxima da realidade, lançando-se mão de situações presentes no cotidiano.

Acreditamos que a nossa pesquisa pode contribuir para o desenvolvimento de novos trabalhos de investigação na área da Educação Matemática, os quais podem ser desenvolvidos dentro desta temática, a saber, o ensino da Teoria das Probabilidades, conteúdo relevante para formação do educando e para sua inserção como cidadão consciente do seu papel na sociedade e aptos para atuar no mercado de trabalho. Além disso, pode colaborar para a formação de professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental, considerando os cuidados indicados para o trabalho com Probabilidade na Educação Básica e as sugestões apresentadas no texto para isto.

Na qualidade de professor-pesquisador, esta pesquisa ampliou a nossa concepção a respeito da Teoria das Probabilidades, tanto na perspectiva teórica, por meio do estudo de outros modelos probabilísticos que até então não conhecíamos, quanto prática, na medida em que nos fez refletir sobre nossa futura prática pedagógica na Educação Básica.

A complexidade do tema que abraçamos em nossa pesquisa e a abordagem metodológica que adotamos nos permitiram responder à questão inicial de investigação delimitada para nossa investigação, de maneira que entendemos ter sido satisfatória, mas abriram um amplo leque de opções para a realização de novos trabalhos, interessando-nos, em particular, aqueles que envolvam a formação de professores de Matemática, considerando o novo marco regulatório da Educação Básica, que é a Base Nacional Comum Curricular, e os avanços das pesquisas na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP, Rio Claro, 1998.

BATANERO, C. Significados de laprobabilidad em laeducación secundaria. **Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.** 8,3,p. 247 – 263. 2005.

BATANERO, C., HENRY, M., PARZYSZ, B. The nature of chance and probability. In JONES, G. (Org.), **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York: Springer, 2005.

BATANERO, C.; CHERNOFF, E.; ENGEL, J. Lee.; H., & SÁNCHEZ, E. .**Research on Teaching and Learning Probability**. ICME-13. Topical Survey series. Springer Open. 2016.

BOA VIDA, A.; PAIVA, A.; CEBOLA, G.; VALE, I.; & PIMENTEL, T. **A experiência matemática noEnsino Básico –** Programa de Formação em Matemática para professores dos 1 e 2. Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação – Direção – Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.2008.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular, Educação é a Base.** Brasília: MEC, 2016.

_______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: SEB/MEC, 2006.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BREUCKMANN, H. J. **A solução de problemas a partir de alguns pressupostos Vygotskyanos**. Tese (Doutorado em Educação - Ensino de Ciências Naturais) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis,213f. 1998.

CANAVEZE, L. **O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/ SP**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 209 f. 2013.

CARVALHO, D.L; OLIVEIRA, P.C. **Quatro concepções de Probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: clássica, freqüentista, subjetiva e formal**. 25ª. Reunião Anual da ANPED. Caxambu: MG, 2002. Disponível em: http://25reuniao.anped.org.br/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.rtf. Acesso em março de 2017.

CARVALHO, J. I. F. de.; SILVA, C. D. Be. da.; PARAÍBA, T. S. **Um Estudo Sobre Probabilidade nos Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental: Significados, Representações e Contextos**. UFPE, 2016.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, p.151-173, 2001.

CORREA, V. B. **Ensino – Aprendizagem de Probabilidade no Ensino Médio:** uma experiência usando jogos de loterias. Mestrado Profissional em Matemática: São Luís MA, PROFMAT, 2016.

COUTINHO, C. de Q. S. **Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?** Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12991/12092>. Acesso em 15 de maio de 2018.

COUTINHO, C. de Q. S. **Discursões Sobre o Ensino e a Aprendizagem da Probabilidade e da Estatística na Escola Básica.** 1° ed. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2013.

_______, C. de Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista.** Dissertação Mestrado: Matemática: PUC - SP, 1994.

D'AMBROSIO, U. Prefácio In: BORBA, M.; ARAÚJO, J.L. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática,** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002.

GAFFURI, S. L. **Ensino e Aprendizagem de Probabilidade Através da Metodologia de Resolução de Problemas.** Dissertação Mestrado: Matemática, Santa Maria, 2012.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de Pesquisa Social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2007.
GODINO, J. D.; BATANERO, M. C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad**: fundamentos didácticos y propuesta curriculares. Madrid, España: Editorial Síntesis, 1996.

GÓMEZ, E.; CONTRERAS. J. M.; BATANERO, C. **Significados de laprobabilidad em libros de texto para educación primaria em Andalucía**. En. C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds), Investgación em Educación Matemática XIX. Alicante: SEIEM, p. 69 – 72. 2015.

LOPES, C. A. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil.** Tese. (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

LOPES, C. E.; CURI, E. **Pesquisas em Educação Matemática: Um Encontro entre a teoria e a Prática**. São Carlos/SP: Pedro & João Editores, 2008.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2004.

LOPES, C. E.; SOUZA, L. O. **Aspectos filosóficos, psicológicos e políticos no estudo da Probabilidade e da Estatística na Educação Básica**. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31494>. Acesso em: 20 maio de 2018.

_______, A. C. O.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, p. 199-218. 1999.

PAIS, L.C. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: autêntica editora, 2013.

POZO, J. I. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** In: Beatriz Affonso Neves; Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RIBEIRO, R. E. S. **Uma Proposta de Ensino de Probabilidade no Ensino Médio**. Porto Alegre: *UFRGS,* 2012.

SANTANA, M. R. M. de. **O Acaso, o Provável, o Determinístico:** Concepções e Conhecimentos Probabilísticos de Professores do Ensino Fundamental. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Recife,2011.

SANTANA, M.R.M; BORBA, R. E.S.R. **Ensino de Probabilidade: o que os livros sugerem, o que os professores conhecem.** Anais do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais (ENCEPAI), 2016. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0ByUlyzknmdPLTjJCVzJkWllwNTA/view. Acesso em novembro de 2017.

SANTOS, J. A. F. L. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado). Itatiba, SP: Universidade São Francisco, 2010.

SANTOS, J. A. F. L.; GOMIDE, C.G.S. **O desenvolvimento do pensamento probabilístico e combinatório no contexto de sala de aula.** Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM). Recife: UFPE, 2011. Disponível em: www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/1468.pdf. Acesso em junho de 2016.

SILVA, E. M. C. **Como são propostas pesquisas nos livros didáticos de Matemática e Ciências dos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013.

SILVEIRA, E. **Matemática: Compreensão e Prática.** 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SMALL, M.; LIN, A. **More good questions: great ways to differentiate Secondary Mathematics Instruction**. USA: Treachers College, 2010.

TORRES, E.G; CONTRERAS, J.M; BATANERO, C. **Significados de la probabilidade em libros de texto para Educación Primaria en Andalucía**. 2015. Disponível em: http://www.ugr.es/~batanero/documentos/SEIEMGomez2015.pdf. Acesso em 25 de novembro de 2017.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática do Ensino Fundamental:** formação de Professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.