UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA

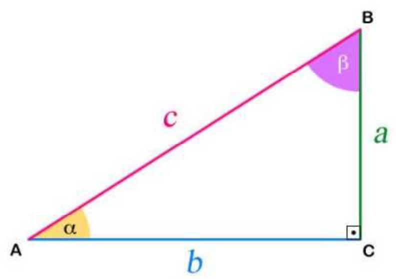
DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Dupla: ____ **Série:** ________

____ **Data:** ______/_______/_______

PARTE I

(1) (nossa autoria) Observem o triângulo ABC retângulo em C. Com base em suas observações, determinem e justifiquem:



a) Como identificar um triângulo retângulo?

____

____

b) os catetos:

____

____

c) a hipotenusa:

____

____

d) o ângulo reto (90°)

____

____

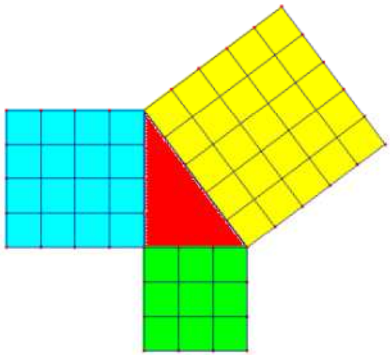
e) os ângulos agudos

____

____

(2) (nossa autoria) De acordo com Eves (2004) e Boyer (2010), os povos antigos, acerca de 3000 anos, como egípcios e babilônicos, sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo, mas de acordo com Lima (2006), esses povos não tinham a necessidade de demonstrar esta afirmação.

Na Figura abaixo temos um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento:



Foram construídos quadrados com os lados desse triângulo. Esses quadrados foram divididos em quadrados menores, como vocês podem observar na Figura. Respondam:

a) Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?

____

b) Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?

____

c) Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?

____

d) De acordo com as respostas dos itens a, b e c, vocês observaram alguma relação que envolve os lados desse triângulo?

____

____

____

____

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	**4**	**5**			
6	**8**	**10**			
5	**12**	**13**			
9	**12**	**15**			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

____

____

____

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

____

____

____

(4) (Extraída de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho do lado *a* que vocês determinaram nos desenhos e recortes do item (a) (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho do lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho do lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelo e verde
- ✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?

____

____

____

- ✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

____

____

____

(5) (extraído de Bastian, 2000)

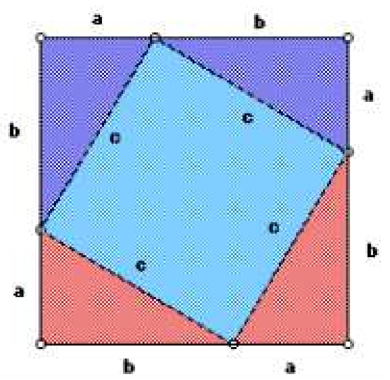


Figura 1

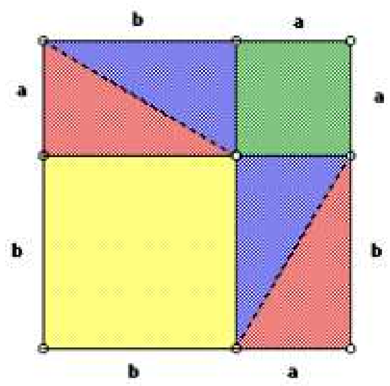


Figura 2

a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

____

____

____

b) Façam o mesmo na Figura 2.

____

____

____

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

____

____

____

____

(6) (nossa autoria) Um teorema é uma afirmação matemática que deve ser rigorosamente demonstrada. Sendo assim, para que o Teorema de Pitágoras seja válido é necessário demonstrá-lo. Podemos escrever o Teorema de Pitágoras na forma implicativa: ***Se o triângulo é retângulo então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.***

No Teorema escrito na forma implicativa, identifiquem:

a) Hipótese

____

____

____

b) Tese

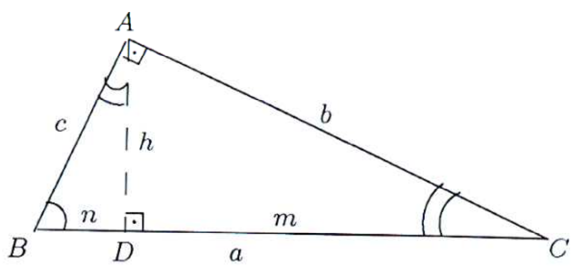
____

____

____

(7) (adaptado de Lima, 2006)

No triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD = $\widehat{C}$, complemento de $\widehat{B}$, CÂD = $\widehat{B}$, complemento de $\widehat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:

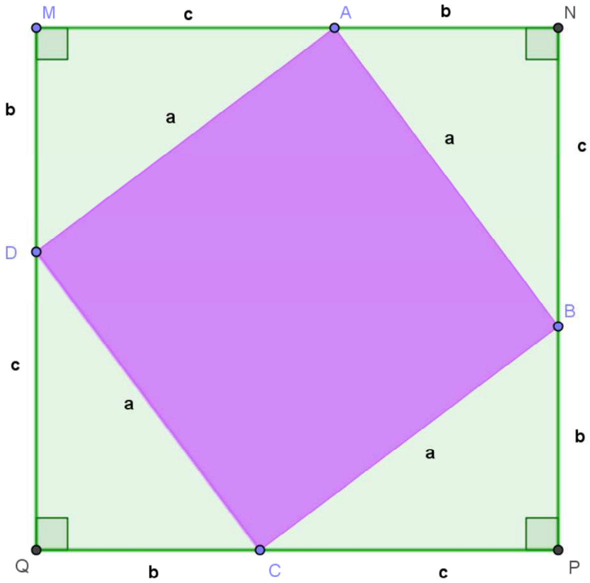


$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \; e \; \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Usando as informações acima, tentem demonstrar o Teorema de Pitágoras.

(8) (extraído de Ferreira Filho, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.



____

____

____

b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área. Justifiquem.

____

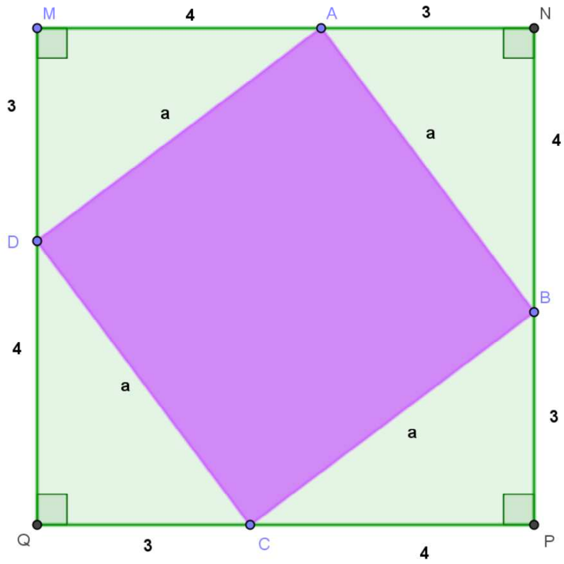
____

____

____

____

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área:



____

____

____

d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

____

____

____

e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?

____

- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

____

____

____

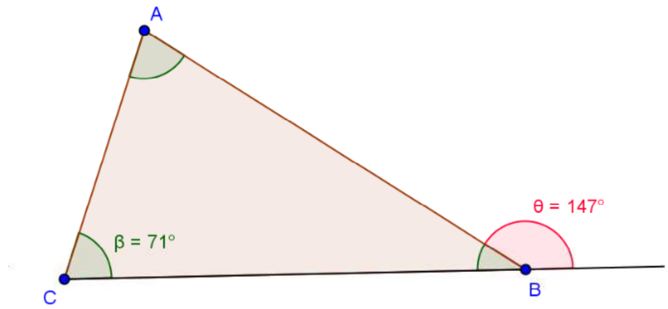
____

PARTE II

(1) (nossa autoria) Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

a) Na Geometria Euclidiana usamos com certa frequência o teorema do ângulo externo para cálculos de ângulos. Descrevam o que vocês conhecem sobre este teorema.

b) Dado o triângulo ABC, determinem as medidas dos ângulos internos que faltam.

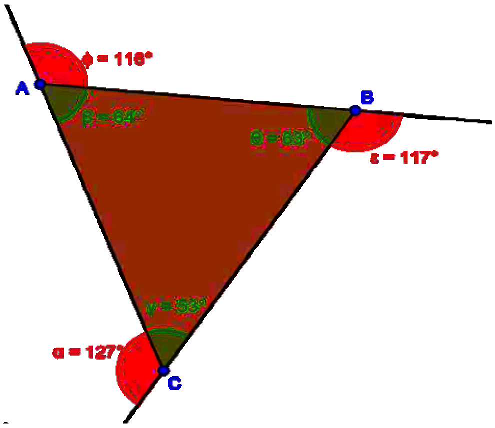


c) Observem que $\theta > B\hat{A}C$ assim como também $\theta > A\hat{C}B$. Será que esta relação vale para todo triângulo? Justifiquem.

d) Se tomarmos ABC como sendo um triângulo retângulo, essas relações ainda valeriam? Justifiquem.

(2) (nossa autoria) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha.

I ( ) Dado um triângulo qualquer ABC e sejam $\beta = 64^o$, $\theta = 63^o$ e $Y = 53^o$, as medidas dos ângulos. Como descrito na figura abaixo:



Observem:

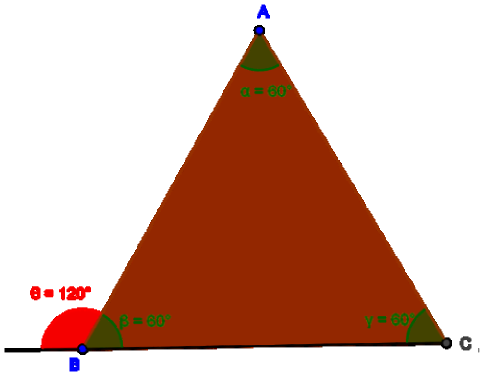
Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo α, onde $\alpha = 127^o$.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{CA}$ formaremos o ângulo Φ, onde $\Phi = 116^o$.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{AB}$ formaremos o ângulo ε, onde $\varepsilon = 117^o$.

Note que, $\alpha > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, assim como $\beta > A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, assim como também $\theta > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, como queríamos demonstrar.

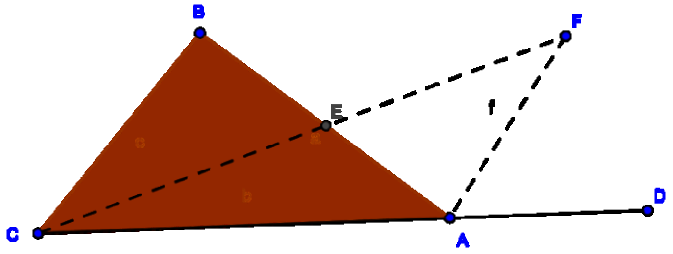
II ( ) Tomemos o triângulo equilátero ABC descrito na figura abaixo:



Como se trata de um triângulo equilátero, sabemos que o ângulo $B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C = 60^o$. Ao prologarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo θ, que mede 120^o, além disso, note que, $\theta = 120^o > 60^o = B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C$. Logo fica demonstrado o teorema.

III ( ) Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overrightarrow{CA}$, marque um ponto D tal que o ponto A esteja entre os pontos C e D, como indicado na figura abaixo:

Queremos provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$. Vamos primeiro provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$. Para isto consideremos o ponto médio E do segmento $\overline{AB}$.



Na semirreta $\overrightarrow{CE}$ marque um ponto F tal que, o segmento $\overline{CE} = \overline{EF}$. Trace $\overline{AF}$. Compare os triângulos CEB e FAE. Como $\overline{BE} = \overline{AE}$ (já que E é ponto médio de AB), $\overline{CE} = \overline{EF}$ (por construção) e BÊC = AÊF (por serem opostos pelo vértice), segue-se que o ângulo BÊC = AÊF. Consequentemente $\hat{B}$ =EÂF, como a semirreta $\overrightarrow{AF}$ divide o ângulo BÂD, então EÂF < BÂD, portanto $\hat{B}$ < BÂD. Analogamente provamos que BÂD > C. Assim fica demonstrado o teorema.

Justifiquem a escolha:

____

____

____

____

____

PARTE III

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

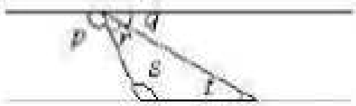
Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

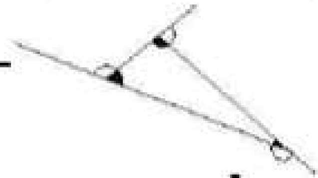
Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativa
$p = s$............................ entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$q = t$............................ entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$..........	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180°$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu



Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. $540° - 360° = 180°$.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

____

____

____

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

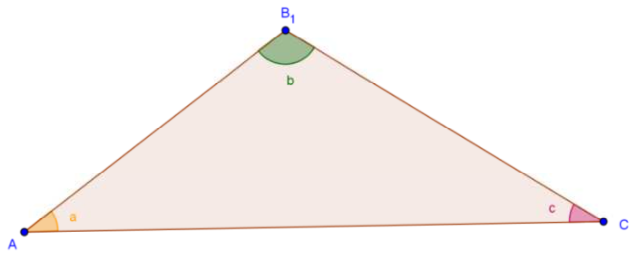
____

____

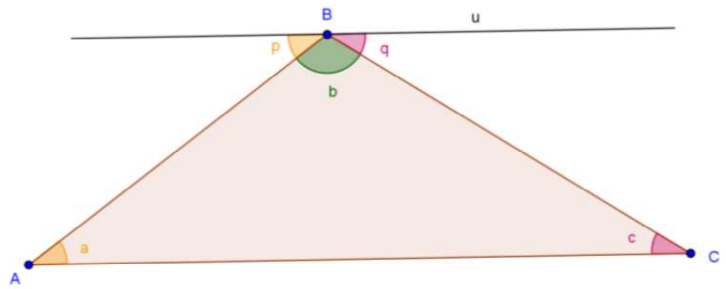
____

____

(2) (nossa autoria) Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:



Traçando a reta *u*, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:



Sabemos que p = a e q = c.

Como p + b + q = 180º, concluímos que a + b + c = 180º.

Observando essa demonstração, respondam o que se pede:

a) Por que podemos afirmar que p = a e q = c?

____

____

____

b) O que podemos afirmar com essa conclusão da demonstração?

____

____

____

c) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem.

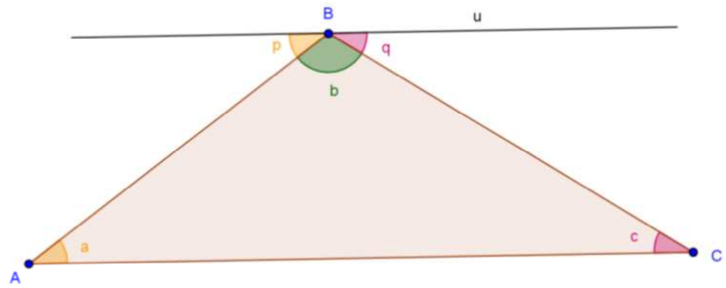
____

____

____

d) Tente demonstrar essa afirmação de outra forma.

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

____

____

____

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

____

____

____

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

(   ) $p + b + q = 180°$

(   ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

(   ) $p = a \; e \; q = c$, pois, são ângulos alternos internos

(   ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

(   ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Parte IV

(1) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-27567" e observem atentamente a figura. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Arrastem o seletor para a direita. O que aconteceu com a figura? Quais os movimentos observados pelas três divisões do triângulo?

____

____

____

____

b) Arrastem o próximo seletor para baixo. O que aconteceu com a figura? Qual o movimento realizado pelas três divisões do triângulo? O que vocês observaram após essa movimentação?

____

____

____

____

c) Marquem os três quadrados referentes a "comparar ângulos". O que vocês observaram? Como podem ser chamados os ângulos azuis, vermelhos e verdes? Por quê?

____

____

____

____

d) Qual propriedade está ligada a essa verificação? Como vocês encontraram essa propriedade e por quê?

____

____

____

____

____

(2) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-239787" e observem a figura.

Há uma importante relação relacionada aos triângulos e seus ângulos internos. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Movimentem o vértice C do triângulo. O que acontece com o triângulo? E com seus ângulos internos?

____

____

____

____

b) Ao movimentar esse vértice C, qual a relação entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos?

____

____

____

c) Agora movimentem o vértice B. O que acontece? Continua valendo essa relação para outros triângulos encontrados e seus ângulos internos?

____

____

d) Se movimentarmos o vértice A. O que acontece? Essa relação continua sendo válida?

____

____

____

e) Desse modo, o que podemos concluir com essa verificação? Justifiquem.

____

____

____

____

(3) (extraído do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-145257", observem a figura e respondam o que se pede.

(4) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-57095" e observem a figura. Sigam as instruções e respondam o que se pede:

a) Movimentem os seletores dos ângulos α e β. O que aconteceu ao movimentar o ângulo α? E o ângulo β? As duas figuras foram movimentadas para onde? Como elas ficaram nessas movimentações?

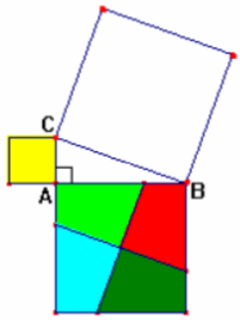
b) Surgiu um novo seletor. Movimentem o ângulo γ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

c) Surgiu um novo seletor. Movimente o ângulo δ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

d) Ao fazer todos esses movimentos, o que vocês observaram? A que conclusões vocês chegaram?

e) Existe alguma relação entre esses quadrados e os lados do triângulo retângulo? Se sim, qual?

(5) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)



Abram o arquivo *Montagem – Perigal* e observem, antes de fazer qualquer movimento, a imagem atenta e detalhadamente.

Na figura temos 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Arrastem cada uma das peças, encaixando-as dentro do quadrado maior.

Façam o que se pede:

a) O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?

b) Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.

c) A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

____

____

____

d) No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?

____

____

____

e) A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

____

____

____

____

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!