UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANDERSON DE ARAÚJO NASCIMENTO

ANÁLISE DOS TIPOS DE PROVAS MATEMÁTICAS E PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

CAMPINA GRANDE-PB
2017

ANDERSON DE ARAÚJO NASCIMENTO

ANÁLISE DOS TIPOS DE PROVAS MATEMÁTICAS E PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba-UEPB.
Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Dra. Kátia Maria de Medeiros

CAMPINA GRANDE-PB
2017

N244a Nascimento, Anderson de Araujo.

Análise dos tipos de provas matemáticas e pensamento geométrico de alunos do 1º ano do ensino médio [manuscrito] / Anderson de Araujo Nascimento. - 2017

164 p.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação : Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros, Departamento de Matemática e Estatística - CCT."

1. Educação matemática. 2. Pensamento geométrico. 3. Geometria plana. 4. Provas matemáticas. 5. Demonstrações matemáticas.

21. ed. CDD 510.7

ANDERSON DE ARAÚJO NASCIMENTO

ANÁLISE DOS TIPOS DE PROVAS MATEMÁTICAS E PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.
Área de Concentração: Educação Matemática

Aprovada em 21 de Agosto de 2017.

Kátia Maria de Medeiros
____
Prof.ª Drª. Kátia Maria de Medeiros - UEPB
(Orientadora)

____
Prof.ª Drª. Abigail Fregni Lins - UEPB
(Examinadora Interna)

Patrícia S Pereira
____
Prof.ª Drª. Patrícia Sandalo Pereira – UFMS
(Examinadora Externa)

Santos
____
Profª. Drª. Marilene Rosa dos Santos – UPE
(Examinador Externo)

Aos meus Pais por sempre me incentivar nos estudos, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Foram muitas as pessoas que me deram a mão e me ajudaram durante este caminhar como pesquisador em formação. Reservo estas linhas para destacar meus agradecimentos por tudo que fizeram e fazem por mim.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo discernimento e sabedoria que me foi dado para conquistar este título de Mestre em Educação Matemática, sobretudo por não me fazer desistir deste sonho mesmo diante das dificuldades e desafios presentes em minha trajetória.

Ao meu pai e minha mãe, que me ensinaram a importância em se dedicar aos estudos e por despertarem em mim o anseio em trilhar esse caminho. Agradeço-lhes pelo investimento que fizeram, não apenas financeiro, mas do tempo que dedicaram para que eu conseguisse minha independência profissional.

À minha estimada esposa, pelo incentivo, apoio e cobranças fundamentais nessa minha caminhada.

Minha gratidão à Profª Drª Abigail Fregni Lins, coordenadora do núcleo UEPB do Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL, por ter sido incentivadora dessa conquista ainda quando no curso de especialização em Educação, apoiando e acreditando no meu desenvolvimento acadêmico. Agradeço aos ilustres docentes, membros da Banca de Avaliação, que tão favoravelmente apresentaram grandes contribuições para esta pesquisa e em especial a Profª Drª Patrícia Sândalo Pereira coordenadora geral do Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL. Agradeço também aos docentes do PPGECEM pelos conhecimentos transmitidos que muito contribuíram para esse título. Em especial, à minha orientadora Profª Drª Kátia Maria de Medeiros, por ser um exemplo a ser seguido de pessoa e profissional competente, que muito contribuiu para minha formação profissional, que me deu a honra de ser seu orientando e, por isso, agradeço a oportunidade e a confiança depositadas em minha pessoa.

Agradeço aos meus companheiros do Projeto OBEDUC, em rede núcleo UEPB, com os quais vivenciei ricas trocas de experiências. Em especial, aos meus colegas da Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, nas pessoas de Marcella Luanna da Silva Lima, Leandro Carlos de Souza Gomes, Helder Flaubert Lopes Macedo e Marconi Coelho dos Santos. Foram longos os períodos de estudo e discussões que nos embasaram para nossa Proposta Didática. Com certeza, a minha pesquisa se tornou mais rica a partir do momento em que trabalhamos colaborativamente.

Agradeço, em especial, ao meu colega Marconi Coelho dos Santos, por ter me apresentado e influenciado a seguir a área da Educação Matemática.

Agradeço à Universidade Estadual da Paraíba, por todo incentivo e preparo. De mesma forma, agradeço à CAPES, pela bolsa de estudos concedidas no âmbito do Projeto *Trabalho Colaborativo com professores que ensinam matemática na educação básica em escolas públicas das regiões nordeste e centro-oeste,* vinculado ao Programa Observatório da Educação - OBEDUC em rede com as instituições Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL).

Confie em Deus e pratique o bem, habite na terra e viva tranquilo.
Coloque em Deus o seu prazer, e ele dará o que seu coração deseja.
Entregue seu caminho a Deus, nele confie, e ele agirá.
Salmo 37,3-5

RESUMO

NASCIMENTO, A. A. **Análise dos tipos de provas matemáticas e pensamento geométrico de alunos do 1º ano do Ensino Médio.** 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2017.

A presente pesquisa investigou o nível do pensamento geométrico e os tipos de provas matemáticas de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma Proposta Didática. Esta pesquisa se constituiu como qualitativa, e estudo de caso, tendo como instrumentos a aplicação de uma redação com o tema Provas e Demonstrações Matemáticas, Proposta Didática desenvolvida por uma equipe de cinco membros que trabalhou de forma colaborativa, inserida no Projeto CAPES/OBEDUC/UFMS/UEPB/ UFAL Edital 2012, observação participante e gravação em audio do diálgo de umas das duplas participantes da pesquisa. Elaboramos uma proposta didática com 18 atividades, dividida em quatro partes, que estimulavam aos alunos refletirem, justificarem, provarem e demonstrarem. A aplicação dessa proposta se deu em junho de 2015 para alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Areia, Paraíba. Nossa pesquisa se deu em três momentos. No primeiro momento, aplicamos a redação sobre o tema provas e demonstrações matemáticas. No segundo momento realizamos uma intervenção didática abordando definições, teoremas, provas e demonstrações matemáticas com o objetivo de levar aos alunos esses conhecimentos. No terceiro momento foi aplicado a Parte I e II da Proposta Didática, envolvendo atividades de conjecturar e demonstrar o Teorema de Pitágoras, Teorema da Soma dos Ângulos Internos e Teorema dos Ângulo Externo. Essa proposta auxiliou na investigação do conhecimento matemático dos alunos do 1º ano do Ensino Médio, divididos em 8 duplas e um trio, escolhidos livremente. As duas duplas de alunos que obteveram melhores desempenhos em nossa Proposta Didática foram escolhidas para o nosso estudo de caso e a de melhor desenpenho teve seu diálogo gravado e transcrito como fonte de evidência de nosso estudo de caso. Em nossa pesquisa analisamos as respostas dadas pelas duas duplas sobre Atividades 1 e 3 (Parte II) e Atividade 2 (Parte III), totalizando em 3 questões. Utilizamos o método de triângulação de dados para nosso estudo de caso. Primeiramente, traçamos o perfil das duas duplas de alunas com relação às Provas e Demonstrações Matemáticas. Em seguida, investigamos os tipos de provas matemáticas utilizadas por elas e o seu pensamento geométrico. Para tanto, utilizamos as discussões sobre os níveis do pensamento geométrico proposto por Van Hiele e os tipos de provas. A partir de nossos resultados pudemos concluir que as duplas de alunas conseguiram desenvolver justificativas informais, ou seja, provas informais. Assim, as duplas apresentaram provas pragmáticas e os tipos de provas Justificativa Pragmática e Exemplo Crucial. Com relação ao pensamento geométrico proposto por Van Hiele, apenas uma dupla pôde ser classificada em um dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, o Nível 3, dedução informal. Portanto, chegamos ao final desta pesquisa convictos de que é preciso iniciar o trabalho das provas e demosntrações matemáticas na Educação Básica, adequando seu ensino ao grau de maturidade e aos conhecimentos matemáticos dos alunos, visto que nossos resultados apontam que esse tema não é abordado adequadamente em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática; Pensamento Geométrico; Geometria Plana; Provas e Demonstrações Matemáticas; Projeto em Rede CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL.

ABSTRACT

NASCIMENTO, A. A. **Analysis of the types of mathematical proofs and geometric thinking of 1st year high school students**, 164 f. Dissertation (Master in Mathematical Education) - State University of Paraíba - UEPB, Campina Grande, 2017.

The present research work investigated the level of geometric thinking and the types of mathematical proofs by 1st year high school students from the application of a Didactic Proposal. This research was constituted as a qualitative one, and as case study, having instruments of the application an essay with the theme Proofs and Mathematical Demonstrations, Didactic Proposal developed by a team of five members who worked collaboratively, inserted in the Project CAPES/OBEDUC/UFMS/UEPB/UFAL Edital 2012, participant observation and audio recording. We developed the didactic proposal with 18 activities, divided into four parts, which stimulated students to reflect, justify, prove and demonstrate. The application of this proposal occurred in June 2015 for 1st year high school students in a public school in the city of Areia, Paraíba. Our research took place in three moments. In the first moment, we apply the essay on the subject mathematical proofs and demonstrations. In the second moment we did a didactic intervention approaching definitions, theorems, proofs and mathematical demonstrations with the objective of taking to the students this knowledge. In the third moment, Part I and II of the Didactic Proposal were applied, involving activities to conjecture and demonstrate the Pythagorean Theorem, Internal Angle Sum Theorem and External Angle Theorem. This proposal helped in the investigation of the mathematical knowledge of the 1st year high school students, divided into 8 pairs and one trio, chosen freely. The two pairs of students who achieved the best performance in our Didactic Proposal were chosen for our case study and the one of better performance had its dialogue recorded and transcribed as a source of evidence of our case study. In our research we analyzed the answers given by the two pairs on Activities 1 and 3 (Part II) and Activity 2 (Part III), totaling in 3 questions. We used the data triangulation method for our case study. Firstly, we draw the profile of the two pairs of students in relation to Proofs and Mathematical Demonstrations. Next, we investigate the types of mathematical proofs used by them and their geometric thinking. To do so, we use discussions about the levels of geometric thinking proposed by Van Hiele and the types of evidence. From our results we can conclude that the pairs of students were able to develop informal justifications, that is, informal proofs. Thus, the pairs presented pragmatic evidence and the types of evidence Pragmatic Justification and Crucial Example. Regarding the geometric thinking proposed by Van Hiele, only one pair could be classified in one of the levels of development of geometric thinking, Level 3, informal deduction. Therefore, we come to the end of this research convinced that it is necessary to start working mathematical proofs and demonstrations in the basic education level, adapting its teaching to the degree of maturity and to the mathematical knowledge of the students, since our results point out that this subject is not approached properly in the classroom.

Keywords: Mathematics Education; Geometric Thinking; Plane Geometry; Mathematical Proofs and Demonstrations; CAPES Network Project OBEDUC

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

Minha trajetória na área de Matemática teve início em 2002 quando ingressei no Curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), *Campus de Campina Grande na Paraíba*. Durante o curso tive a oportunidade de estudar disciplinas de Matemática Pura e disciplinas pedagógicas. Entre essas disciplinas sempre tive interesse em estudar o tema das demonstrações matemáticas, pois percebia nessa temática uma oportunidade de entender melhor os conteúdos propostos.

Ao mesmo tempo em que frequentava a universidade, trabalhava como professor de Matemática da educação básica na cidade de Areia, Paraíba, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Ministro José Américo de Almeida (E.E.E.F.M. Ministro José Américo de Almeida), no Ensino Fundamental II como prestador de serviço ao Governo do Estado da Paraíba. Essas duas atividades contribuíram para que eu escolhesse ser professor de Matemática e percebesse a importância de aprender metodologias de como ensinar os conteúdos matemáticos, pois só o conteúdo matemático não motivava os alunos a aprender o assunto proposto em sala de aula.

Com essas inquietações de ensinar a Matemática como ela é, focando nas demonstrações dos conteúdos ensinados e a busca por estratégias e metodologias para ministrar esses conteúdos de maneira a propiciar motivação em aprender, em 2007 conseguimos terminar o Curso de Licenciatura em Matemática. Neste ano, não mais ensinava no Estado, pois meu contrato havia terminado em 2005. Ainda em 2005, mesmo sem ter terminado a Licenciatura em Matemática, prestei concurso público para professor da educação básica do Estado da Paraíba obtendo a terceira colocação, na qual havia apenas uma vaga para a localidade, aonde optei pela cidade de Areia, Paraíba. Como queria me especializar na área da Educação ou Matemática, pois sou professor e licenciado em Matemática tentei em 2008 seleção para o mestrado de Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Nesta seleção não passei. Assim, continuei dando aulas particulares e ensinando em escolas particulares no período de 2007 a 2008. Em janeiro de 2009 recebi a notícia que tinha sido convocado no concurso público que havia feito em 2005, de validade de dois anos, mas tinha sido prorrogado por mais dois anos, ou seja, terminaria no final de 2009. Essa notícia me alegrou muito, pois tinha alcançado um sonho, trabalhar em um emprego pelo qual fui formado. Diante deste feito, assumi o cargo e trabalho desde janeiro de 2009 até os dias atuais na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Álvaro Machado (E.E.E.F.M. Álvaro Machado), no turno da manhã. Em seguida, minha meta era fazer uma pós-graduação em Educação ou Matemática.

Em 2012 dei o primeiro passo cursando a disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores como aluno especial no mestrado de Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, UEPB, Campus *de Campina Grande*, no qual obtive aprovação. No segundo semestre de 2012 houve outro concurso para professor da educação básica do Estado da Paraíba e parei por um momento de buscar a pós-graduação para me preparar para o concurso. Desta vez foram quatro vagas para a cidade de Areia, ficando na segunda colocação, obtendo assim a aprovação e classificação para lecionar em outra escola do Estado na cidade de Areia. Em janeiro de 2013 assumi o cargo e ensino até os dias de hoje na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira (E.E.E.F.M. Carlota Barreira) no turno da tarde.

Em março de 2013, o Estado da Paraíba, com parceria da UEPB, ofereceu um curso de Pós-Graduação em nível de Especialização para os professores do Estado. Diante desta oportunidade, ingressei na especialização em fundamentos da educação. Neste mesmo ano, no mês de julho, recebi convite da Coordenação do Núcleo da UEPB para fazer parte de um Projeto da CAPES no período de 2013 a 2016 na categoria professor da educação básica com o seguinte título: *Trabalho Colaborativo com professores que ensinam matemática na educação básica em escolas públicas das regiões nordeste e centro-oeste,* vinculado ao Programa Observatório da Educação - OBEDUC em rede com as instituições Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Esse convite tinha sido mediado pelo integrante do projeto na categoria mestrando, professor Marconi Coelho do Santos, meu colega de trabalho na Escola Carlota Barreira. Diante do convite, aceitei de imediato, pois percebi uma oportunidade de progredir nos meus estudos na área da Educação e da Matemática e seria uma possibilidade de enriquecer meu currículo e conhecimentos na área. Em julho de 2014 defendi a monografia da Especialização em Educação, fruto de leituras feitas durante o Projeto no período de agosto de 2013 a junho de 2014 sobre TIC e GeoGebra, com a colaboração da coordenadora do Projeto do Núcleo UEPB, Profª Drª Abigail Fregni

Lins. Agora como especialista, minha meta passou a ser o mestrado em Educação Matemática.

Escolhi essa pós-graduação depois de analisar minha trajetória como educador, desde quando estudava Matemática na universidade. Minha profissão é professor de Matemática, sou especialista em Educação, e por atuar em Educação e gostar de Matemática seria coerente escolher o mestrado em Educação Matemática. Em janeiro de 2015 prestei a seleção para o mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática na UEPB, obtendo finalmente a aprovação e a satisfação de fazer algo que iria contribuir para minha formação, realização pessoal e profissional, e como consequência, na qualidade da minha atuação em sala de aula. Diante deste feito em março de 2015 passei da categoria bolsista professor da educação básica para a categoria bolsista mestrando, ou seja, minha dissertação aborda a minha pesquisa desenvolvida neste Projeto OBEDUC de três anos.

Esta pesquisa de mestrado foi fruto da minha iniciativa de levar para a sala de aula do Ensino Básico um tema pouco, ou até, não visto nas aulas de Matemática, a utilização de provas e demonstrações em uma abordagem que favoreça o desenvolvimento da qualidade das justificativas dadas pelos alunos diante de questões que exijam dele uma postura convincente e confiável de sua resposta como habitualmente requer a Matemática. Pretendemos com essa pesquisa propor uma proposta didática que sirva como base para que outros profissionais da educação possam identificar por meio desta estratégia metodológica que o uso de provas e demonstrações pode ser ensinado de maneira satisfatória na Educação Básico no ensino de Matemática.

Minha pesquisa se deu na Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, cujo o primeiro momento de nosso planejamento, no período de agosto de 2013 á agosto de 2014, foi de leituras e estudo a respeito do tema Provas e Demonstrações Matemáticas, trabalho colaborativo, desenvolvimento do pensamento geométrico, TIC e GeoGebra. Dentro desse período tivemos a oportunidade de discutir nossa proposta no I Seminário Anual OBEDUC, realizado em novembro em Maceió- AL. Num segundo momento que se deu no intervalo de agosto de 2014 à março de 2015, filtramos nossas leituras e estudos com o objetivo de delinear nosso referencial teórico e, por meio dele elaboramos e aplicamos a nossa Proposta Didática em três turmas do Ensino Médio na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira (E.E.E.F.M. Carlota Barreira). Nesse período tivemos a oportunidade de discutir nossa proposta no II

Seminário Anual OBEDUC, realizado em novembro em Campina Grande. Seguindo nosso planejamento, demos início a elaboração de nossa Proposta Didática em março de 2015 com reuniões quinzenais de quatro horas de duração o qual, se estendeu até junho de 2015. Em junho de 2015 estávamos com nossa Proposta Didática pronta para aplicação na escola, na qual desenvolvemos nossa pesquisa, a E.E.E.F.M. Carlota Barreira. Em seguida, tivemos a oportunidade de compartilharmos nossas ideias e escritas no II Congresso Nacional de Educação (CONEDU), realizado em outubro em Campina Grande e no III Seminário Anual OBEDUC, realizado em outubro em Campo Grande-MS.

A participação nesses eventos contribuiu para a evolução de nossa proposta e orientou a fundamentação teórica escolhida. Desta forma, elaboramos nossa pesquisa tendo a seguinte questão norteadora:

Quais os tipos de provas matemáticas são utilizados pelos alunos do 1º ano da E.E.E.F.M. Carlota Barreira e em que nível do pensamento geométrico eles se encontram de acordo com o modelo proposto por Van Hiele?

Tomando como base essa questão, objetivamos investigar o nível do pensamento geométrico e os tipos de provas matemáticas de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma Proposta Didática.

Portanto, a presente dissertação tem em sua estrutura cinco capítulos. No Capítulo 1 apresentamos algumas colocações sobre provas e demonstrações matemáticas referentes à diferenciação desses termos na Matemática Pura e na Educação Matemática. Tratamos também sobre os tipos de provas propostos por Balacheff (1988) e Rezende e Nasser (1994) que utilizamos para análise de nossos dados, como também apresentamos as funções das demonstrações matemáticas e a visão do professor em relação às provas e demonstrações matemáticas.

Em vista disso, trazemos alguns comentários de educadores matemáticos referentes à utilização das provas e demonstrações na aprendizagem da Matemática. Para levantar estes dados analisamos autores como Almouloud (2007), Balacheff (1988), Rezende e Nasser (1994), Pietropaolo (2005), De Villiers (2001), Nasser e Tinoco (2003), Harel e Sowder (2007), Hanna e Jahnke (1996), Fernandes (2016), Trevisan e Freitas (2017), Aguilar e Nasser (2012), Gravina (2001), Mariotti, Bussi, Boero, Ferri e Garuti (1997), Balacheff (1991), Healy (2007), Villiers (1986), Rodrigues (2013), Balacheff (2010), Jahnke (2010), De Villiers (2004), Aguilar e

Nasser (2014), Chazan e Lueke (2009), Healy e Hoyles (2000), Recio e Godino (2001), Rodrigues (2008), Ordem e Almouloud, (2017), Pais (2006), Nasser (1992), Nasser (2017) e Fonseca (2004).

No Capítulo 2 abordamos alguns comentários dos PCN e de educadores matemáticos referentes ao ensino da Geometria utilizando as provas e demonstrações matemáticas como campo facilitador no desenvolvimento do habito de justificar do aluno. Apresentamos também o modelo de Van Hiele sobre os níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico, os quais utilizamos para análise de nossos dados. Nesse sentido, utilizamos PCN (1998), Loureiro (2009), Chazan (1993), Healy e Hoyles (2000), BoaVida (2005), Andrade e Saraiva (2008), De Villiers (2010) e Dias (2009).

O Capítulo 3 aborda os procedimentos metodológicos escolhidos nessa pesquisa. Discutirmos sobre o trabalho colaborativo buscando esclarecer o trabalho realizado no Projeto OBEDUC, além de, fundamentarmos a Proposta Didática. Descrevemos o local e os sujeitos envolvidos nesta pesquisa, caracterizamos o tipo de pesquisa que desenvolvemos e os procedimentos metodológicos utilizados para a realização da proposta.

Os Capítulos 4 e 5 discutem a análise dos dados como estudos de caso. Por fim, após o Capítulo 5, nas Considerações Finais, apontamos os resultados obtidos com a realização da pesquisa, discutimos suas limitações e apresentamos questões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 1: PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Neste capítulo apresentamos incialmente a distinção entres os termos explicação, prova e demonstração com contribuições de autores da Matemática Pura e da Educação Matemática e apontamos quais definições consideraremos em nossa pesquisa.

A seguir abordamos os tipos de provas propostos por alguns educadores matemáticos, mostrando suas ideias e classificações e apresentando os tipos de provas que nortearam nossa análise de dados; tratamos em que situações os alunos são motivados a validarem suas justificativas em sala de aula e quais são os possíveis processos de validação que os alunos devem ser expostos para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico dedutivo; abordamos o papel das funções da demonstração, expondo definições e compreensões; trazemos a visão do professor em relação ao tema Prova e Demonstração Matemática na Educação Básica com contribuições de alguns autores apontando para a necessidade de uma intervenção adequada pelo professor desde muito cedo para ajudar os alunos a desenvolver o seu raciocínio dedutivo; e, explicitamos alguns comentários dos PCN e de educadores matemáticos a respeito da utilização das provas e demonstrações na Educação Básica.

1.1 EXPLICAÇÃO, PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

O conceito de provas e demonstrações pode ser encontrado como palavras sinônimas na literatura como abordam os matemáticos da academia, em particular as pesquisas de Pietropaolo (2005) e De Villiers (2001) consideram provas e demonstrações palavras com o mesmo significado. Ou apresentar diferença, como defendem Harel e Sowder (2007), ao definirem esquema demonstrativo de uma pessoa, e Balacheff (1988), ao apresentar tipos de provas que ajudam na análise das respostas dadas pelos alunos. Balacheff (1988) diferencia as palavras ‘explicar’, ‘provar’ e ‘demonstrar’, embora reconheça que os termos ‘provar’ e ‘demonstrar’ sejam sinônimos para os matemáticos. Ambos, Harel e Sowder (2007), e Balacheff (1988), apresentam vários níveis de prova baseados em estudos empíricos que mostraram as maneiras de como os alunos comprovam os seus resultados matemáticos. Para nossa pesquisa adotamos as distinções entre os termos explicar, provar e demonstrar propostas por Balacheff:

> Chamamos **explicação** um discurso que visa tornar compreensível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado. As razões podem ser discutidas, recusadas ou aceitas.
> Chamamos **prova** uma explicação aceita por uma comunidade em um determinado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate entre a significação e a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
> Entre as provas, certamente há uma em particular, elas são uma sequência de enunciados seguindo regras determinadas: um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro, ou bem é obtido a partir daqueles que lhe precedem com o auxílio de uma regra de dedução tomada de um conjunto de regras bem definidas. Chamamos **demonstração** essas provas.
> Nós reservamos a palavra **raciocínio** para designar a atividade intelectual, na maior parte do tempo não explícita e manipulação de informações para, a partir de dados, produzir novas informações. (BALACHEFF, 1987, p. 147-148)

Para Balacheff (1988) a distinção entre as palavras 'provas' e 'demonstrações' é de fundamental importância na Educação Matemática, visto que, didaticamente, os alunos conseguiriam entender melhor a diferença entre uma prova formal e uma informal, daí vem o motivo de apresentar o significado do termo explicação o qual tem o papel de definir os outros, no qual percebemos que os conceitos estão definidos de maneira inclusiva, ou seja, as explicações incluídas nas provas, as provas incluídas nas demonstrações. Harel e Sowder (2007) compartilham da ideia da diferença dos termos provas e demonstrações adotando, prática semelhante à de Balacheff (1988), o qual estabelece níveis de provas aos seus esquemas demonstrativos em que o último nível, o axiomático, corresponde à demonstração.

Assim, para nossa pesquisa adotamos a distinção dos termos provas e demonstrações como Balacheff (1988) sugere. Adotamos o conceito de prova como sendo uma explicação aceita pela comunidade de sala da aula. Essa decisão pode ser objeto de um debate entre a significação e a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. E demonstração, quando é proveniente de enunciados previamente conhecidos e aceitos pela comunidade dos matemáticos como verdadeiros. Nesta sequência de enunciados, há um encadeamento lógico, segundo uma regra dedutiva. Estes enunciados são os axiomas, os teoremas, propriedades e proposições previamente "demonstradas".

1.2 TIPOS DE PROVAS MATEMÁTICAS

Sabemos que na visão dos matemáticos da academia a prova formal é a maneira pela qual se valida um resultado matemático. No entanto, encontramos pesquisadores, como Gila Hanna do Canadá, e Nicholas Ballacheff da França, que consideram a prova ingênua ou informal como uma explicação aceitável, que pode apresentar vários níveis de rigorosidade, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que expõe a prova (NASSER e TINOCO, 2003).

Um aspecto importante que as pesquisas mostram quando são propostas atividades que requerem dos alunos do Ensino Básico que justifiquem suas respostas é a preferência por provas ingênuas, informais, com destaque para aquelas que recorrem a exemplos, aplicação de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos utilizados sem o devido entendimento conceitual (AGUILAR e NASSER, 2012).

Diante disso, Balacheff (1988) traz-nos alguns tipos de provas que ajudam na análise das respostas dadas pelos alunos:

> - Empirismo ingênuo: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização;
>
> - Experimento Crucial: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar;
>
> - Exemplo Genérico: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos;
>
> - Experimento de pensamento: Consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos (BALACHEFF, 1988, pág 218-219).

Para esse autor, os quatro tipos de provas apresentados encontram-se entre as provas pragmáticas e provas intelectuais:

> - A prova pragmática é hipotecada pela singularidade do acontecimento que a constitui, é preciso aceitar seu caráter genérico. Ela é além disso, tributária de um contingente material: ferramentas imprecisas, defeitos de funcionamento;
>
> - A prova intelectual mobiliza uma significação contra outra, uma pertinência contra outra, uma racionalidade contra outra (BALACHEFF, 1987, p. 157).

Assim, o empirismo ingênuo e o experimento crucial se enquadram na prova pragmática, e o experimento de pensamento na prova intelectual. O exemplo genérico pode ser enquadrado nos dois, pois, "consiste na explicação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade, mesmo fazendo uso de um representante particular" (GRAVINA, 2001, p. 67).

Rezende e Nasser (1994) também trazem em sua investigação alguns tipos de provas dadas pelos alunos:

- Justificativa pragmática: o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns casos particulares;
- Recorrência a uma autoridade: o aluno afirma que o resultado é verdadeiro, porque o professor falou ou porque está no livro texto;
- Exemplo Crucial: o aluno desenvolve por meio de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral;
- Justificativa gráfica: o aluno mostra numa figura por que o resultado é verdadeiro (REZENDE E NASSER, 1994, p. 61).

Portanto, para nossa análise dos dados, consideraremos os quatro tipos de provas propostos por Balacheff (1988) por classificarem justificativas empíricas e formais e os cinco tipos de provas propostos por Rezende e Nasser (1994) por classificarem justificativas empíricas e informais, as quais retratam melhor o perfil dos tipos de provas predominantes em pesquisas brasileiras quando são propostas atividades que requerem dos alunos do Ensino Básico que justifiquem suas respostas.

1.3 SITUAÇÕES E PROCESSOS DE VALIDAÇÃO

No que diz respeito ao modo de como os alunos compreendem a necessidade de justificarem suas respostas por meio de conceitos e teorias matemáticas é que nos perguntamos quais seriam as situações que motivariam os alunos a provar seus resultados. De acordo com Mariotti, Bussi, Boero, Ferri e Garuti (1997), em suas revisões da literatura perceberam que a motivação para a prova passava por três níveis: no primeiro, é a função da *verificação* que está presente (testar se é correta); no segundo nível, encontra-se a função da *explicação* (porque está correta); e o terceiro nível refere-se ao *lugar ocupado pelos teoremas* na pesquisa.

Por outro lado, Balacheff (1991) aponta para a prática adotada pelos alunos numa sala de aula os quais agem como pessoas práticas que pretendem ser eficientes e não rigorosas, ou seja, o importante é encontrar a solução para o problema de maneira mecânica não importando o conhecimento do significado daquela solução no problema.

Assim, os alunos em sala de aula quando não são questionados pelo professor sobre a validade de suas afirmações ou justificativas não veem motivos em construir uma prova matemática limitando-se em exemplificá-las ou utilizar técnicas de resolução conhecidas (BALACHEFF, 1987).

Ainda segundo este autor, são distinguidas algumas situações de validação e de decisão, na qual a primeira objetiva na elaboração de uma prova e a segunda não há a necessidade de uma prova. Por fim, ele afirma que a situação pode gerar ou não motivação do aluno desenvolver uma prova, dependendo da cobrança que sofre no seu ambiente de sala de aula. Encontramos em Hanna e Jahnke (1996) pensamento como o exposto anteriormente: Estudos recentes confirmam que é crucial para o professor tomar parte ativa em ajudar os estudantes a compreender por que uma prova é necessária, e quando ela é válida (HANNA e JAHNKE, 1996, p. 887).

Neste contexto, o professor também é importante neste processo de construção do saber quando se envolve em atividades que consigam desenvolver as habilidades para manipular os conceitos matemáticos nos alunos, pois a partir da apropriação do professor de situações de aprendizagem propicias para que os alunos se tornem aptos a provar suas conjecturas e proposições o professor torna-se o principal responsável pela integração entre o aluno e o aprendizado na habilidade em provar (HEALY, 2007).

Assim, consideramos, ao analisar os dados da pesquisa, a idade e os conhecimentos dos alunos, bem como consideramos que os alunos não são incentivados a trabalharem com situações de validação de suas respostas desde cedo, o que torna inviável esperar que os mesmos provem formalmente determinadas afirmações.

1.4. O PAPEL E FUNÇÕES DA DEMONSTRAÇÃO EM MATEMÁTICA

A demonstração tem várias funções. A mais utilizada é a de validar uma proposição matemática, ou seja, a explicitação da verdade. Sabemos que essa função é uma das ferramentas mais importantes na Matemática, pois, é com ela que os resultados matemáticos são construídos e validados (NASSER e TINOCO, 2003). Segundo esses autores, podemos enumerar as seguintes funções da prova ou demonstração:

- Validação de um resultado;
- Explicação ou elucidação do resultado;
- Sistematização do processo de raciocínio dedutivo;
- Descoberta e comunicação de conhecimentos matemáticos (NASSER E TINOCO, 2003, p. 3)

De Villiers (2001) e os matemáticos puros consideram provas e demonstrações palavras sinônimas, assim o autor menciona que tradicionalmente a função da demonstração é usada para a verificação das afirmações matemáticas e que utiliza um modelo relativo à função da demonstração, apesar dele não defender como completo nem único mais útil diante de sua experiência nesta investigação. Fernandes (2016) considera a demonstração uma verificação eficiente e esse é o seu único papel.

A demonstração como processo de verificação ou convencimento: neste processo, De Villiers relata que os professores de Matemática, com raras exceções, pensam que para validar uma conjectura o pré-requisito é a sua demonstração, mas, comenta que o pré-requisito para isso seria a convicção pessoal da validade da conjectura, pois, a certeza de sua validade por meios de testes empíricos motivariam na procura de uma demonstração para a conjectura. Conclui que em situações como essa a função da demonstração não poderia ser para verificação ou convencimento.

A demonstração como processo de explicação: o autor inicia sua fala comentando que, apesar de verificações quase empíricas, nos dá uma certeza na validade de uma conjectura percebe que este processo, de modo geral, não fornece uma explicação convincente para sua validade, pois sua compreensão não resulta de outros resultados já reconhecidamente provados ou definidos. Em seguida, expõe que para os matemáticos a clarificação ou explicação de uma prova matemática tem mais importância do que a verificação, e que apesar de existir uma grande diferença entre validação e explicação considera a explicação um bom critério para uma boa demonstração.

A demonstração como processo de descoberta: habitualmente os teoremas são descobertos por meio da intuição e de métodos quase-empíricos. Aqui o autor chama a atenção para a existência de inúmeros exemplos presentes na História da Matemática de novos resultados que foram descobertos ou inventados por processos puramente dedutivos e cita como exemplo as geometrias não-euclidianas. Assim, a demonstração não se resume a um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados.

A demonstração como processo de sistematização: o autor revela que a demonstração tem como característica transformar num sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas, um conjunto de resultados conhecidos. Em seguida, De Villiers (1986) apresenta algumas funções importantes de uma sistematização dedutiva de resultados conhecidos:

- Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas;
- Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo, assim, a uma apresentação econômica dos resultados;

> - Fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas;
> - Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da Matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria por meio de uma avaliação da aplicabilidade dos seus axiomas e definições;
> - Conduz, muitas vezes, a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e ou são mais econômicos, elegantes e poderosos do que os existentes (DE VILLIERS, 1986, p. 9)

Com essa sistematização, o autor pretende organizar afirmações isoladas e não relacionadas logicamente, que já se sabe ser verdadeiras, num todo unificado e coerente.

A demonstração como *meio de comunicação*: esta função é responsável pela interação social, pois, a demonstração é um meio de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, e entre os próprios estudantes. Diante desta filtragem social, a demonstração recebe refinamentos os quais são identificados erros, bem como por sua rejeição devido à identificação de um contraexemplo.

A demonstração como *desafio intelectual*: como demonstrar não é algo na maioria das vezes tão simples, o autor compara essa proeza como o desafio físico de concluir uma maratona ou escalar uma montanha. Demonstrar para um matemático profissional é uma experiência intelectual que desafia sua habilidade em manipular definições e teoremas já provados com o objetivo de chegar a mais um teorema provado que resultará em celebração e realização própria comparada a um momento de felicidade. Enfim, essas funções da demonstração expostas por De Villiers não é um esquema completo, pois outras funções podem ser acrescentadas como a função estética ou uma de memorização, ou ainda de desenvolvimento algoritmo.

Com respeito aos aspectos pedagógicos, ou seja, em sua utilização em sala de aula. Devemos ensinar demonstrações? A resposta a esta questão depende dos objetivos do ensino da Matemática em sala de aula na Educação Básica. Fernandes (2016) sugere que se o ensino corresponder de algum modo a um processo, capaz de dotar o aluno de ferramentas que lhe proporcionem a resolução de problemas práticos, diria que o ensino da demonstração pode (talvez até deva) ser dispensado. No entanto, se existe na atividade matemática capacidade para promover certo tipo de desenvolvimento cognitivo que, tendo em conta o caráter peculiar da Matemática, se promoveria necessariamente por meio dessa atividade então, devem ensinar-se demonstrações.

Rodrigues (2013) cita, em sua pesquisa autores que diferenciam a maneira de validar um resultado encontrado na Matemática de outras ciências:

> Do ponto de vista epistemológico da natureza da matemática, será importante que os alunos compreendam que a certeza dos resultados matemáticos só é alcançada por meio da demonstração (Balacheff, 2010; Jahnke, 2010). Os alunos, em todos os níveis de ensino, devem ser conscientizados desta diferença fundamental entre a Matemática e as outras ciências: enquanto a ciência é baseada, em geral, nas suas asserções empíricas, as regularidades encontradas em Matemática não constituem uma demonstração (BALACHEFF, 2010; DE VILLIERS, 2004).

Apesar de encontrarmos algo em comum nas dificuldades apresentadas ao ensino e à aprendizagem da demonstração matemática em diversos países, o panorama brasileiro necessita de um levantamento de concepções sobre demonstrações matemáticas de alunos e professores da Educação Básica, imprescindível para proporcionar novas propostas e abordagens de ensino com características à realidade brasileira (HEALY, 2007).

Entretanto, as pesquisas em desenvolvimento no Brasil indicam que provas e demonstrações matemáticas são pouco ensinadas nas aulas de Matemática na Educação Básica (ALMOULOUD, 2007; NASSER e TINOCO, 2003). Ainda, segundo esses autores, os professores de Matemática da Educação Básica não ensinam este conteúdo por considerarem pouco importante e complexo para o aluno aprender.

Apesar das divergências encontradas de ensinar ou não provas e demonstrações nas aulas de Matemática na Educação Básica a pesquisa de Pietropaolo (2005) não identificou nenhum autor que discordasse radicalmente da importância de incluir no currículo de Matemática um trabalho envolvendo demonstrações desde os Anos Iniciais. Surpreendentemente todos se mostraram convincentes das necessidades de implementar este tema em qualquer nível de ensino.

Em nossa pesquisa pretendemos, por meio de nossas atividades inseridas na Proposta Didática, promover o desenvolvimento cognitivo do aluno, tendo em conta o caráter peculiar da Matemática, como sugerido por Fernandes (2016), utilizando a demonstração matemática como ferramenta para tal finalidade. O papel da demonstração em nossa pesquisa consiste em levar o aluno a investigar para demonstrar, ou seja, esse processo consiste primeiramente na convicção pessoal do aluno da sua conjectura por meio de testes empíricos, em seguida sua explicação, e por fim sua transformação num sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas.

1.5 A VISÃO DO PROFESSOR EM RELAÇÃO À PROVA OU DEMONSTRAÇÃO EM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Um dos objetivos da Matemática no Ensino Básico é o desenvolvimento no educando da habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva, principalmente. Para tanto, o ensino de Matemática deve apoiar-se em estratégias que explorem o raciocínio lógico-dedutivo conforme se depreende nos PCN (BRASIL, 1997 p. 26).

Para o desenvolvimento deste raciocínio, é importante que o professor compreenda e aceite diversos níveis de argumentação que os alunos possam a vir a apresentar para provar um dado resultado, compreender a relação dos elementos cognitivos com a faixa etária do educando e os conhecimentos adquiridos até a presente fase escolar. Por isso, muitos educadores matemáticos assumem uma postura de afastamento quanto à exigência ou dependência extrema de provas rigorosas em Matemática, dando ênfase na concepção de prova como argumento convincente. Diante do exposto, o papel do professor ao explicar uma prova matemática é mostrar ao educando que provar um resultado matemático é validar a declaração feita, a partir de hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras. Ensinar por meio de uma prova consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo e com isto possibilitar a construção de habilidades e competências, com aquelas registradas nos PCN (AGUILAR e NASSER, 2014).

Os estudos apresentados ao nível do currículo realizado mostram que a maior parte dos estudantes, em todos os países, desde os níveis mais básicos até o nível superior, usam estratégias demonstrativas empíricas (CHAZAN e LUEKE, 2009; HEALY e HOYLES, 2000; RECIO e GODINO, 2001; RODRIGUES, 2008). A extensa divulgação deste tipo de estratégias, e a quase ausência de esquemas demonstrativos dedutivos nos alunos de todos os níveis de ensino, à escola internacional, revelam que os vários sistemas educativos têm sido, até à data, incapazes de promover nos seus estudantes o desenvolvimento de argumentos dedutivos, de maior sofisticação, correspondentes ao que será desejável em educação matemática (RODRIGUES, 2013).

Ordem e Almouloud (2017), em sua pesquisa concluiram que os sujeitos mostraram não saber os critérios de produção e ou avaliação de demonstrações válidas. Evidências empíricas ou exemplos foram considerados como demonstrações de propriedades gerais. Assim, os autores defendem que discussões com alunos sobre o valor de desenhos em demonstrações, ou estrutura de uma demonstração válida fazem-se necessárias.

Os estudos desenvolvidos no âmbito do nível curricular de ação indicam que grande parte dos professores não confere grande importância à demonstração, não a abordando nas suas aulas. E para muitos professores os esquemas demonstrativos empíricos são os mais dominantes para suportar resultados e afirmações matemáticas (HAREL e SOWDER, 2007).

Na busca no ensino-aprendizagem das provas matemáticas reforçamos a ideia de diversificar os tipos de argumentação. Além de alguns raciocínios demonstrativos, o aluno deve ser levado a expressar seu pensamento lógico de diferentes maneiras. Verificação de casos particulares, realização de desenhos, redação de textos, debates, comprovações experimentais são maneiras diferentes como a categoria da argumentação pode ser trabalhada no contexto escolar (PAIS, 2006, p. 55).

Nesta ideia de valorização das justificativas dadas pelos alunos nas atividades propostas pelo professor em sala de aula encontramos em Trevisan e Freitas (2017), resultados de uma pesquisa realizada com professores da Rede Pública Estadual de um município de Mato Grosso visando explorar validações em atividades trabalhadas em sala de aula em duas categorias de provas: empíricas e teóricas.

Os autores observaram o emprego de apenas uma das categorias, a das provas empíricas. Este resultado sugere o quanto é importante valorizar validações empíricas com o objetivo de perceber que o processo de aprendizado de justificar seus resultados no educando está em formação.

Quando falamos em provas empíricas assumimos todas aquelas produzidas em um processo que vise à constatação da verdade, que pode ser convencimento próprio ou comunitário, de uma dada propriedade, cuja justificativa elaborada se apoia no manuseio de materiais manipuláveis, na construção, na comparação sobre desenhos ou manipulação de figuras, inclusive softwares de computador, ou seja, que têm como motor principal os procedimentos de experimentação (TREVISAN e FREITAS, 2017).

Pesquisas a respeito do desenvolvimento da habilidade de justificar mostram que grande parte dos professores de Matemática não valorizam justificativas informais de seus educandos. Devido ao rigor exigido pela academia, os professores esperam que os estudantes da Educação Básica apresentem justificativas formais. Como estes raciocinam nos primeiros níveis de Van Hiele e o domínio do processo dedutivo só ocorre no último nível, não são capazes de demonstrar (NASSER, 1992).

O professor deve incentivar a habilidade de justificar do aluno para atingir o processo dedutivo. Essa habilidade deve ser incentivada, solicitando que o aluno justifique sempre suas resoluções de problemas ou explique porque escolheu uma determinada estratégia. O professor deve levar o aluno a raciocinar sempre, em todas as tarefas desenvolvidas (NASSER, 2017).

Com o interesse de desenvolver o processo dedutivo dos alunos em estratégias que auxiliem no aprendizado de justificar formalmente seus resultados, encontramos em Trevisan e Freitas (2017) a valorização das justificativas dadas pelos alunos em sua pesquisa ao assumir como provas teóricas as que visam a constatação da verdade de uma proposição por meio de uma argumentação do ponto de vista matemático, ou seja, pautada em conceitos e proposições, e baseadas na estrutura de um discurso dedutivo, apesar de nem todas as provas produzidas utilizarem o encadeamento lógico aceito pela comunidade matemática. O fato de sentirem a necessidade e de tentarem o emprego de elementos teóricos matemáticos nos levou a nomear estas por *provas teóricas*.

Várias estratégias com o objetivo de aprimorar a habilidade de justificar dos alunos a partir do 6º Ano da Educação Básica foram testadas em sala de aula, com resultados positivos. Nasser e Tinoco (2003) compilaram os resultados de um grupo do Projeto Fundão (IM/UFRJ), que sugerem uma valorização da experimentação e argumentação informal, como etapas iniciais para o domínio do processo dedutivo (NASSER, 2017).

Os estudos ocorridos em experiências curriculares valorativas da demonstração, colocadas em ação por professores com uma intervenção adequada, mostram que esses currículos podem ajudar os alunos, desde muito cedo, a desenvolver o raciocínio dedutivo (HAREL e SOWDER, 2007). Sendo assim, é fundamental que o professor indague sempre sobre o porquê da resposta dada pelo aluno, sem colocar na entoação a discussão matemática para o seio da turma, levando os alunos a argumentar uns com os outros (FONSECA, 2004).

Segundo Balacheff (2010), o professor tem papel fundamental no desenho das situações didáticas conducentes à validação das afirmações matemáticas por meio da demonstração. Nesse sentido, a devolução aos alunos da responsabilidade pela validação das afirmações matemáticas deverá ser uma preocupação do professor (BALACHEFF, 1991).

Percebemos o papel essencial que fica reservado ao professor, papel esse que não poderá desempenhar satisfatoriamente sem que possua profundo entendimento da composição das noções envolvidas por um lado, e uma capacidade para orientar toda a dinâmica deste processo exploratório por outro (FERNANDES, 2016).

Por fim, percebemos a importância que o professor tem no processo de desenvolvimento do raciocínio dedutivo de seus alunos a vista de conduzi-los a demonstração de suas conjecturas. Com isso, compete ao professor traçar estratégias promissoras que oportunizem um aprendizado apropriado das demonstrações. Para isso, ao elaborarmos nossa Proposta Didática tivemos a preocupação de auxiliar o professor nesse seu papel em sala de aula, com atividades que conduzem os alunos a explicarem seus resultados numa perspectiva formal.

CAPÍTULO 2: O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

Neste capítulo apresentamos como os parâmetros curriculares nacionais abordam o ensino da geometria plana e das provas matemáticas no ensino da Matemática no Ensino Médio, com contribuições da literatura para fundamentar a importância desses parâmetros que orientam o trabalho pedagógico para formação dos conceitos, anterior a sua apresentação em linguagem matemática em sala de aula. Em seguida apresentamos o modelo de Van Hiele desenvolvido com o objetivo de proporcionar o aprendizado da geometria plana por meio de uma sequência de níveis em que os alunos aprendem a cada nível conceitos matemáticos e situações de validação de suas respostas que conduzem ao final do último nível a uma apreensão de entendimento conceitual e formal da Matemática, considerados impossíveis de serem alcançados a um curto espaço de tempo pelo método tradicional. Por fim, procuramos por articulações entre o modelo de Van Hiele e os tipos de provas proposto por Balacheff, apresentado no Capítulo 1.

2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) no que diz respeito ao ensino da Matemática relacionam às competências apontadas pela Base Nacional Comum e pretende uma explicitação das habilidades básicas que devem ser desenvolvidas pelos alunos em Matemática nesse nível escolar. Esses parâmetros direcionam e organizam o aprendizado, no Ensino Médio, em Matemática, com o objetivo de obter a interdisciplinaridade e contextualização (PCNEM, 2000).

O ensino da Matemática deve contemplar aspectos do cotidiano do aluno e da sociedade que os auxiliem a entender a Matemática presente ao seu redor e possam capacitá-los a ser cidadãos críticos e independentes. Capazes de produzir conhecimento, de justificarem suas ideias, de verificarem e comprovarem suas afirmações e conjecturas tanto em Matemática como no seu dia a dia, como encontramos no PCNEM (2000):

> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional (PCNEM, 2000, p. 40)

Além do PCNEM (2000) mencionar que o ensino da Matemática deve ter caráter formativo ou instrumental, ele também deixa claro que o ensino da Matemática deve ser visto como ciência, pois, possuem aspectos estruturais específicos como as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos com a finalidade de construir novos conceitos, e estruturas a partir de outros e que servem para comprovar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Encontramos nos objetivos do ensino da Matemática em nível do Ensino Médio levar o aluno a expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática, ou seja, podemos entender com este objetivo que fundamenta suas ideias e argumentações são essenciais para que o aluno possa aprender, a se comunicar, interpretar a realidade e possa estar capacitado para sua inclusão no mundo do conhecimento e do trabalho (PCNEM, 2000)

Algumas das habilidades de que trata o PCNEM (2000) de Matemática do Ensino Médio são:

> As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidos com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca" (PCNEM, 2000, p. 44).

Assim, a Geometria contribui na assimilação no ensino das demonstrações por ter muitas definições, propriedades, axiomas e teoremas que, ensinados, produzem um rico material intuitivo para o entendimento das demonstrações matemáticas. Encontramos nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio no ensino da Matemática a mesmas finalidades presentes no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo:

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas (OCEM, 2006, p. 75).

Abrantes (1999) traz em sua pesquisa que a Geometria, como percebemos no trecho acima, tem posição de destaque no currículo e nas aulas de Matemática e enfatiza que a Geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; que possibilita transformações geométricas; com relação às ideias de forma e de dimensão; contribuindo com a interligação com outros domínios da Matemática; como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; em atividades investigativas que levam rapidamente à necessidade de se lidar vários elementos estruturais da própria natureza Matemática como formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações tornam-se situações habituais. Daí pode-se ainda analisar o papel das definições, compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática.

Loureiro (2009) em sua pesquisa expõe exemplos envolvendo famílias de figuras geométricas, entre os quais, um deles utiliza uma família de quadriláteros cíclicos criados no Geoplano circular com 24 pontos (Figura 1) e outro utiliza quadrados de material manipulável como uma unidade de medida de fácil utilização (Figura 2 e 3), ambos, com grande potencial para o ensino da geometria plana:

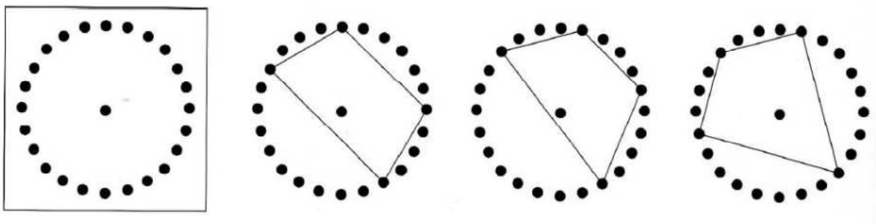


Figura 1

> Sobre estes elementos é interessante estudar classificações, congruências de figuras, congruência de ângulos e de lados, posições relativas de lados e simetria. Um bom exemplo de raciocínio geométrico é chegar a processos para obter lados congruentes, lados perpendiculares e lados paralelos nos quadriláteros desta família (LOUREIRO, 2009, p. 64).

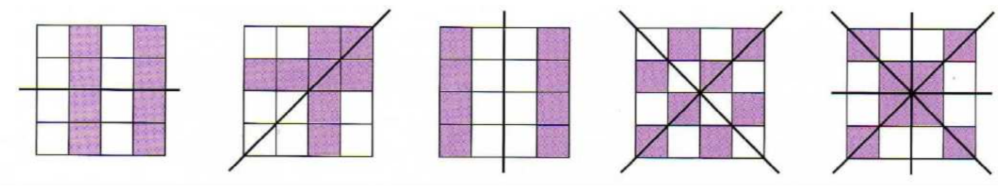


Figura 2

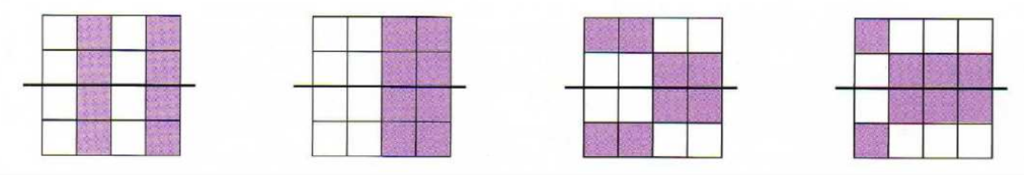


Figura 3

> A figura 2 mostra representantes de várias classes possíveis de obter. A descoberta de invariantes entre os elementos desta família é de um nível de raciocínio geométrico mais elevado, pois exige a capacidade de ir além do aspecto das figuras. As composições da figura 3 pertencem todas à mesma classe, pois ficam invariantes para a mesma transformação geométrica, uma reflexão com eixo paralelo a dois lados do quadrado. As outras composições da figura 2 pertencerão a outras classes, pois admitem reflexões com eixos em outras posições relativas (LOUREIRO, 2009, p. 65).

Para a autora, esses exemplos ilustram como é possível partir dos conhecimentos dos alunos, com tarefas de compreensão muito simples, passíveis de propor oralmente, e com forte natureza investigativa. Exemplificam também como as definições, as propriedades e os conceitos em geometria são o fim e não o princípio. Essencialmente, mostram como visualização, representação e raciocínio geométrico pode ser o foco na aprendizagem da geometria, integrando os tópicos do Programa, mas sem lhes dar a primazia. Além de tudo, identificam uma aprendizagem da Geometria que se articula muito bem com as três capacidades transversais preconizadas no Programa do Ministério da Educação para o Ensino Básico, em Portugal, que são resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação.

Na pesquisa de Ordem e Almouloud (2017), encontramos uma pesquisa que afirma que o ensino de Geometria na Educação Básica permite que os alunos compreendam conceitos geométrico por meio das demonstrações em Geometria:

> Embora, os currículos mais recentes destaquem a importância de se resgatar o trabalho com Geometria no Ensino Fundamental, o professor não sabe o que fazer e defendem que a formação do professor deve privilegiar práticas adequadas com as demonstrações em Geometria como meio de permitir que o aluno se aproprie dos conceitos e habilidades geométricas (ALMOULOUD e MELLO, 2000 p. 2 citados por ORDEM e ALMOULOUD, 2017, p. 2)

Duval (1988) menciona em sua pesquisa que os problemas relacionados a Geometria oportunizam atividades matemáticas que exigem do aluno um raciocínio axiomático propicio ao aprendizado da demonstração, pois, naturalmente o discurso deste campo contribui para o desenvolvimento da linguagem matemática formalizada. E sugere que os problemas de Geometria sejam organizados por categorias de conhecimentos matemáticos semelhantes contribuindo para o entendimento da demonstração. Daí Duval indica três níveis de problemas:

> *1º Nível:* problemas que envolvem congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste nível a compreensão de uma explicação de propriedades matemáticas como aquelas indicadas pelas hipóteses não é necessária.
> *2º Nível*: problemas nos quais a assimilação de uma explicação de propriedades matemáticas como aquelas indicadas pelas hipóteses é

> necessária, pois, não envolve mais congruência ou por não ser pedido explicitamente uma justificativa
> *3º Nível:* problemas que envolvem mais do que uma compreensão de uma explicação de propriedades matemáticas como aquelas indicadas pelas hipóteses, ou seja, utiliza-se o auxílio de esquemas formais lógicos específicos (DUVAL 1988, p. 72)

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) evidencie, desde 1998, que o ensino da Matemática abranja atividades e situações de aprendizagem que proporcionem aos alunos o desenvolvimento e a comunicação de argumentos matemáticos aceitos, encontramos pesquisas nacionais que apontam a falta de justificativas válidas em respostas dadas pelos alunos (SANTOS 2014a; SANTOS, 2014b).

No Brasil, Aguilar Jr. e Nasser (2014) apontam um motivo para ausência de se ensinar matemática por meio de modelos dedutivos:

> Aqui no Brasil, antes do Movimento da Matemática Moderna no final da década de 60, o ensino, principalmente de Geometria, baseava-se no modelo axiomático e dedutivo proposto em "Os Elementos", de Euclides. A partir dos anos 70, com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, ocorre um rompimento com o modelo de ensino axiomatizado, passando-se ao "abrandamento da exigência de se demonstrar os teoremas" (IMENES, 1988, p.57). A partir de então, constata-se a renúncia tácita (talvez tática) de se ensinar Matemática através de modelos dedutivos, tornando-se assuntos que estão encadeados em sequência lógico-dedutiva em conteúdos estanques, sem ligações e implicações (AGUILAR E NASSER, 2014, p. 1014).

Trevisan e Freitas (2017) na busca de construir propostas didáticas que trabalhem com provas empíricas e teóricas com o auxílio da Geometria deparam-se com o seu abandono nas últimas décadas:

> Ao buscar lançar um olhar, sobre a construção de propostas didáticas, que visam trabalhar com provas empíricas e teóricas que explorem os casos de congruência, a partir de atividades elaboradas por professores da Educação Básica, nosso olhar também se volta ao próprio ensino de Geometria. Contudo, ao procurar referências sobre o ensino de Geometria na Educação Básica nas últimas décadas, parece inevitável não nos depararmos com a questão de seu abandono (TREVISAN e FREITAS, 2017, p.3).

Olhando em nível internacional, estudos na área da Educação Matemática revelam que os alunos confundem justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e justificam de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (CHAZAN, 1993; HEALY e HOYLES, 2000).

BoaVida (2005), em Portugal, relata que, a partir dos anos 80 as pesquisas começaram a evidenciar a presença de alunos em situações de aprendizagem sendo exigido deles a dissertação a respeito do seu raciocínio matemático.

Com base nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar nos EUA, NCTM (2008), os programas de ensino do pré-escolar ao 12º ano deverão habilitar todos os alunos dentre outros aspectos a analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas. Em particular, os alunos deverão chegar ao 9º ano com compreensão acerca das propriedades e das relações existentes em objetos geométricos básicos. Do 9º ao 12º ano, estes conhecimentos poderão ser alargados e aplicados de várias maneiras. Sendo assim, os alunos deverão tornar-se cada vez mais competentes na utilização do raciocínio dedutivo, de modo a estabelecerem ou refutarem conjecturas, e deverão ser capazes de usar conhecimentos preestabelecidos para deduzirem informações acerca de outras situações.

Neste aspecto, percebemos na Base Nacional Comum Curricular, BNCC (2016), proposta pelo MEC, objetivos que visam o ensino-aprendizagem dos conhecimentos a serem trabalhados na Educação Básica. Entre as unidades de conhecimentos propostas para Matemática encontramos a Geometria. Nas unidades curriculares anteriormente trabalhadas anualmente passam a serem apresentadas em cinco unidades curriculares, em uma delas encontramos como características a serem desenvolvidas entre outras, conjecturar, verificar e generalizar sobre o conteúdo matemático trabalhado.

Com essa iniciativa da BNCC, as ideias matemáticas como expressão pessoal na compreensão de fenômenos, na construção de representações significativas e justificativas consistentes nos mais variados contextos podem ser incorporados na Educação Básica (LDB, 1996).

Pietropaulo (2016), em palestra ao XII ENEM, discutiu a dupla face da construção e adoção de uma BNCC. O lado positivo, segundo o autor, seria o aspecto da universalidade da educação com possibilidade da autonomia que acentua as diferenças do humano, das relações e do processo formativo. Por outro lado, salienta, o ponto negativo seria a possibilidade de problematizar essa BNCC em formulação, destacando as contradições e insuficiências encontradas na BNCC, que justificariam sua polêmica e suposta ilegitimidade.

No entanto, Lopes (2016), em uma palestra proferida também ao XII ENEM para discutir a BNCC de Matemática, tal como foi proposta nas duas primeiras versões, representa um grande retrocesso em relação às conquistas e o desenvolvimento da Educação Matemática brasileira, pois, segundo o autor:

> "é um currículo produzido em apenas 2 meses, naquilo que ficou conhecido como a primeira versão dos BNCC, um documento fragmentado e desprovido de fundamentos sólidos, que não passa de uma lista de tópicos para orientar a indústria de exames".

Concordando com Lopes (2016) em considerar um documento feito em pouco tempo e sem consistência de fundamentos sólidos, a BNCC, no entanto pode ser um ponto de partida que podemos seguir que deverá acompanhar documentos adicionais que estimulem a elaboração de currículos pelos sistemas educacionais, implementação de material didático elaborado de acordo com essas novas diretrizes e, a longo prazo, as inconsistências contidas no documento possam ser reformuladas, atualizadas e postas em prática.

Nasser (2017) considera o ensino de Geometria um estímulo para o raciocínio lógico e ao processo dedutivo e sua ausência na Educação Básica pode acarretar sérias deficiências na habilidade de justificar dos alunos:

> Durante anos, o ensino de Geometria foi deixado em segundo plano, o que ocasionou a falta de ênfase em atividades que estimulassem o raciocínio lógico na resolução de tarefas geométricas, e a ausência do domínio do processo dedutivo. Como consequência, observa-se que, atualmente, os alunos da Escola Básica não são estimulados a pensar ou raciocinar, limitando-se a aplicar fórmulas ou algoritmos, sem a necessidade de justificar os procedimentos adotados. A habilidade de argumentar e justificar, importante tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico, não é suficientemente desenvolvida pelos professores de Matemática em suas salas de aula (NASSER, 2017, p.1).

Nesta pesquisa a Geometria tem papel de destaque, pois nossa Proposta Didática foi elaborada com todas as atividades abordando conceitos e teoremas de Geometria Plana, por percebemos o potencial que essa área da Matemática proporciona ao desenvolvimento de justificativas dedutivas por meio de demonstrações utilizando seu vasto campo de definições, propriedades, axiomas e teoremas.

2.2. PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Inúmeros professores de Matemática em seus processos de ensino preferem levar os alunos a aprender um determinado assunto por meio da memorização das definições, propriedades e teoremas sem o devido esclarecimento conceitual, experiência essa que compromete a análise da matemática como área investigativa eliminando assim a chance do aluno de pensar matematicamente (ALMOULOUD, 2000, p. 3). Não diferente acontece com o ensino de Geometria quando se é ensinado.

Dreyfus (1991) traz em sua pesquisa que um dos objetivos fundamentais dos professores de Matemática sempre foi o do entendimento, ao invés de saber ou está apto a fazer algo. Pois, para ele entender é uma ação continuada que acontece na mente do aluno e pode ser até um *insight*, mas geralmente é fundamentado numa sequência de atividades de aprendizagem em que ocorre a integração de diversos processos mentais.

Andrade e Saraiva (2008) encontram estudos, como por exemplo, o de Razel e Eylon (1990), que apontam que alunos do Ensino Básico que tiveram possibilidade de trabalhar matemática com materiais didáticos visuais desenvolveram uma capacidade para identificar conceitos visuais em contextos complexos, bem como aplicar estes conceitos em situações visualmente complexas. Eles mostram ainda a importância do treino visual como um antecedente para a aprendizagem da geometria e para a transição para um pensamento mais abstrato e dedutivo na Educação Básica. Deste modo, é urgente dar ao raciocínio visual um estatuto e uma atenção de acordo com a sua importância educacional e matemática (ANDRADE e SARAIVA, 2008, p.6)

No modelo de ensino tradicional da Geometria em que a maior parte dos professores e autores de livros didáticos apresentam aos alunos tudo pronto para que eles simplesmente reproduzam em provas e testes é fortemente alvo de críticas dos educadores matemáticos e até por matemáticos como (FREUDENTHAL,1973).

Na busca do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, o casal Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Marie Van Hiele, em suas respectivas teses de doutorado, na Universidade de Utrecht, Holanda em 1957, deram origem ao Modelo de Van Hiele. A tese de Dina Van Hiele-Geldof tratava-se de um experimento educacional a respeito da ordenação do conteúdo de Geometria e atividades de aprendizado dos alunos; já na tese de Pierre Van Hiele o foco era explicar o porquê os alunos tinham problemas ao aprender Geometria. Como Dina faleceu logo após o término da tese de doutorado, foi Pierre que esclareceu sobre os níveis, fases e propriedades do Modelo de Van Hiele (SILVA e CANDIDO, 2014).

A principal característica do Modelo de Van Hiele é a diferença entre cinco diferentes níveis de pensamento com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca da Geometria (DE VILLIERS, 2010):

> *Nível 1*: Reconhecimento
> Os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.
> *Nível 2:* Análise

> Os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas.
> *Nível 3:* Dedução Informal
> Os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe)
> *Nível 4:* Dedução
> Os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas.
> *Nível 5:* Rigor (DE VILLIERS, 2010, p. 2)

Neste estágio, o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar Geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. A Geometria é vista no plano abstrato.

Este quinto nível não é muito utilizado pelos pesquisadores que utilizam o Modelo de Van Hiele. Até Pierre M. Van Hiele se interessava apenas pelos três primeiros níveis, pois justificava que a teoria foi desenvolvida no Ensino Básico (HOFFER, 1981).

Em De Villiers (2010) encontramos que os Van Hiele consideraram como um erro do currículo de Geometria tradicional apresentar o ensino em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam aprender pois os professores não levavam em conta o nível de aprendizado em que eles se encontravam para daí poder ensinarem de uma maneira que os alunos entendem o professor.

Quatro características importantes do Modelo de Van Hiele são resumidas da seguinte maneira por Usiskin (1982):

- Ordem fixa: A ordem na qual os alunos progridem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode está no nível n sem ter passado pelo nível $n-1$.
- Adjacência: Os objetos inerentes a um nível tornam-se os objetos do ensino no nível seguinte. Exemplo: Nível 1 – Percebe-se apenas a *forma* da figura. Entretanto, a figura é determinada por suas propriedades. Nível 2 – Figura é analisada e seus componentes e propriedades são descoberto.
- Distinção: Cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos. Exemplo: Níveis 1 e 2 – quadrado pode ser diferente de retângulo. Nível 3 – O quadrado é retângulo.
- Separação: Duas pessoas com raciocínios em níveis diferentes não podem entender uma à outra (USISKIN, 1982, p. 4)

Essas quatro características presentes podem ser identificadas no seguinte trecho:

> O raciocínio acerca de um sistema lógico pertence ao Terceiro Nível de pensamento. A rede de relações, que se baseia em uma descrição verbal de fatos observados, pertence ao Segundo Nível de pensamento. Esses dois níveis têm suas próprias redes de relações, com uma sendo diferente da outra: ou alguém raciocina em uma rede de relações ou na outra (VAN HIELE, 1973, p. 90).

Com o objetivo de entendermos as dificuldades que os alunos podem possuir em cada nível, encontramos em Burger e Shaughnessy (1986), ao usar entrevistas baseadas em tarefas, características dos níveis de pensamento dos alunos nos primeiros quatro níveis:

Primeiro Nível:

- Costumam usar propriedades visuais irrelevantes para identificar figuras, comparar, classificar e descrever;
- Normalmente se referem a protótipos visuais de figuras e são facilmente enganados pela orientação das figuras;
- Incapacidade de pensar em uma variação infinita de um tipo específico de figura (por exemplo, em termos de orientação e forma);
- Classificação inconsistentes de figuras, por exemplo, uso de propriedades incomuns ou irrelevantes para classificar as figuras;
- Descrições (definições) incompletas de figuras ao ver condições necessárias (normalmente visuais) como condições suficientes.

Segundo Nível:

- Uma comparação explícita de figuras com relação às suas propriedades subjacentes;
- Evitam inclusões de classe entre as diferentes classes de figuras, por exemplo, quadrados e retângulos são considerados disjuntos;
- Classificação de figuras somente com relação a uma propriedade, como simetrias, ângulos e diagonais são ignoradas;
- Exibem uma utilização não econômica das propriedades das figuras para descrevê-las (defini-las), em vez de usar apenas as propriedades suficientes;
- Rejeição explícita de definições fornecidas por terceiros, por exemplo, um professor ou livro, favorecendo apenas suas próprias definições pessoais;
- Abordagem empírica no estabelecimento da verdade de uma declaração, por exemplo, o uso de observação e medição com base em diversos rascunhos.

Terceiro Nível:

- Formulação de definições econômicas e corretas para as figuras;
- Capacidade de transformar definições incompletas em definições completas e uma aceitação e uso espontâneo de definições para novos conceitos;
- A aceitação de diferentes definições equivalentes para o mesmo conceito;
- Classificação hierárquica de figuras, por exemplo, quadriláteros;
- Uso explícito da forma lógica "se.. então" na formulação e tratamento de conjecturas, além do uso implícito de regras lógicas;
- Incerteza e falta de clareza com relação às respectivas funções de axiomas, definições e provas.

Quarto Nível:

> - Compreensão das respectivas funções (papéis) de axiomas, definições e provas.
>
> Realização espontânea de conjecturas e esforços iniciados por vontade própria para verificá-los de maneira dedutiva (BURGER e SHAUGHNESSY, 1986, p. 42).

Ainda de acordo com De Villiers (2010), o ensino da Geometria na Rússia na década de 60 encontrava-se com um abaixo nível de aprendizagem comparado as outras matérias, e pesquisas apontaram que a razão do fracasso seria a falta de incentivo no ensino da Geometria no ensino primário. Por isso, os russos desenvolveram um currículo experimental de Geometria de muito êxito com base no Modelo de Van Hiele.

Perceberam que um aspecto importante era a sequência e o desenvolvimento contínuo de conceitos a partir da 1ª série. Assim como relatado em Wirszup (1976-96), o aluno médio da 8ª série do currículo experimental demonstrou compreensão geométrica igual ou melhor do que os correspondentes alunos das 11ª e 12ª séries do currículo antigo. Assim, o autor chama a atenção que o sucesso do ensino de Geometria no Ensino Médio depende da Geometria aprendida no Ensino Fundamental e os níveis do Modelo de Van Hiele contribuem para que sejam feitos uma profunda revisão do currículo de Geometria no Ensino Fundamental.

O mesmo autor encontra algumas falhas consideradas por ele graves no Modelo de Van Hiele, como a falta de distinção explícita entre as diferentes possíveis funções da prova. Para tanto, exemplifica dizendo que o desenvolvimento do raciocínio dedutivo surge primeiro dentro do contexto de sistematização no Nível 3 do Modelo de Van Hiele (ordenação). Pesquisas empíricas de De Villiers (1991) e Mudaly e De Villiers (2000) apontam que as funções de prova, tais como explicação, descoberta e verificação, podem ser significativas para alunos fora de um contexto de sistematização, ou seja, nos níveis do Modelo de Van Hiele inferiores ao Nível 3, contanto que os argumentos sejam de natureza intuitiva ou visual, por exemplo, o uso de simetria ou dissecção e apresenta como uma questão em aberto se a prova nos Níveis 1 e 2 é vista apenas como um meio de verificação ou se pode apresentar outras funções de prova como a explicação.

A principal razão em utilizarmos em nossa pesquisa o Modelo de Van Hiele para analisar as justificativas dadas pelos alunos nas atividades de nossa Proposta Didática é a possibilidade que este modelo proporciona em classificar o pensamento geométrico de alunos com justificativas tanto formais como informais, contribuindo para o entendimento das dificuldades encontrados pelos alunos diante das atividades propostas.

A partir do diagnóstico do nível em que o aluno se encontra no modelo de Van Hiele estratégias podem ser tomadas para os alunos progredirem diante de uma sequência de níveis de interpretações dos conceitos, assim as evoluções de um nível para outro deverão ocorrer, por intermédio de um desenvolvimento planejado de atividades, uma vez que a ascensão dos níveis de compreensão geométrica depende, mais especificamente, de uma aprendizagem adequada à experiência do aluno.

2.3 RELAÇÕES POSSÍVEIS ENTRE OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO SEGUNDO MODELO DE VAN HIELE E OS TIPOS DE PROVAS SEGUNDO BALACHEFF

Uma análise nos tipos de provas, segundo Balacheff e no Modelo de Van Hiele, apresentados nesta pesquisa observou-se algumas articulações entre eles. No Modelo de Van Hiele percebemos que os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico levam em consideração a natureza do objeto geométrico e o tipo de validação (DE VILLIERS, 2010). Os tipos de prova encontrados por Balacheff (1988) revelam o grau de abstração do objeto e as ações presentes nas situações de validação. Diante do exposto, pode-se identificar que os autores baseiam as suas classificações nos tipos de objetos e da validação utilizada.

Com relação à validação das conjecturas, os tipos de provas segundo, Balacheff (1988) e o modelo de Van Hiele, descrevem cada um seus pontos de vista. Balacheff (1988) diferencia a problemática da eficácia e a do rigor. Quando falamos da eficácia queremos dizer que a validação é feita por meio da observação da prática e quando falamos do rigor a validação é feita pela conjectura utilizando a teoria. O Modelo de Van Hiele mostra três problemáticas: a da precisão, a da dedução e a do rigor. Na precisão a validação é feita por instrumentos de medida ou atividades que envolvem o objeto concreto ou a sua representação, como por exemplo, comparação ou sobreposição. Na dedução e no rigor, as validações são baseadas na teoria. Logo, podemos afirmar certa relação entre a eficácia e a precisão, assim como a do rigor e a da dedução.

No Modelo de Van Hiele a classificação entre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno pode ser vista como dois grupos: as Geometrias não axiomáticas como estão apresentadas nos Níveis um e dois. E as axiomáticas como as do Nível 4 e 5; sendo o Nível 3 o nível intermediário entre os dois tipos de Geometrias, no qual o aluno transita entre a fase perceptiva e a fase teórica como Parzysz (2001) propõe em sua pesquisa.

Bernard Parzysz (2006) desenvolveu um quadro teórico para estudar o raciocínio geométrico dos sujeitos, tentando estabelecer uma articulação entre a percepção e a dedução. Diante disso, ele apresentou uma forma de articulação entre os níveis de pensamento geométrico, baseado nas pesquisas desenvolvidas por Van Hiele (1984), Houdement e Huzniak (1998) e Henry (1999).

Segundo Dias (2009), Parzysz ao investigar os níveis de Van Hiele coloca de um lado os níveis 1 e 2, nomeando-os como geometria “concreta”, na qual os objetos são materiais e a validação é perceptiva. O autor também agrupa os níveis 4 e 5, classificando-os de geometria “teórica”, na qual os objetos são abstratos e a validação é uma demonstração. Com relação ao nível 3, Parzysz afirma que este é um nível intermediário entre as duas geometrias, na qual o aluno se movimenta da validação perceptiva para a demonstração.

Com base nesses três estudos propostos, Parzysz (2006) propôs outra articulação entre os níveis de pensamento geométrico. Tomou como base a natureza dos objetos que são estudados na Geometria e seu tipo de validação. Por isso, o autor considera dois tipos de Geometria: a não – axiomática e a axiomática.

De acordo com Dias (2009), nas Geometrias não – axiomáticas, o estudo é voltado para uma situação concreta, os objetos são modelos da realidade ou a uma representação deles via maquetes ou desenhos. A sua validação é feita por meio da percepção, ou seja, o aluno afirma que é verdadeiro porque assim ele vê ou percebe. Agora nas Geometrias axiomáticas, os objetos são teóricos e podem se referir ao real. A validação é feita por meio de teoremas e axiomas.

Já Balacheff (1988), antes de classificar os quatro tipos de provas, as classificou em dois blocos: as *provas pragmáticas* e as *provas intelectuais*. Nota-se, portanto, que ambos os autores apresentam semelhanças em suas classificações: os elementos que relacionam as provas pragmáticas parecem de mesmo nível dos que relacionam as Geometrias não axiomáticas: comparação com a realidade e validação por observação e percepção; enquanto que as Geometrias axiomáticas e as provas intelectuais estão mergulhadas na abstração e teoria.

Dias (2009) também procurou relacionar possíveis relações entre os tipos de provas, segundo Balacheff (1988) e o modelo proposto por Parzysz (2001), e percebeu que pesquisas a respeito deste assunto se fazem necessário, mas encontrou que os quatro tipos de provas de Balacheff não faz referência explicita aos objetos geométricos presentes em dada prova, tal qual fez Parzysz (2001) ao elaborar a classificação dos níveis de desenvolvimento geométrico.

Como Parzysz (2001) desenvolveu um quadro teórico para o estudo do raciocínio geométrico dos sujeitos, buscando estabelecer uma articulação entre percepção e dedução e na construção deste quadro teórico foi baseado em pesquisas no domínio de ensino e aprendizagem de Geometria realizadas por três pesquisas e uma delas foi Van Hiele (1984), entendemos que essa relação que Dias (2009) propôs entre Ballacheff (1988) e Parzusz (2001) se assemelha ao da nossa pesquisa entre Balacheff (1988) e o modelo de Van Hiele, pois o modelo de Van Hiele em sua construção baseou-se no objeto geométrico.

Portanto, utilizaremos as relações existentes pelo exposto por esses dois modelos para auxiliar na classificação dos alunos em qual nível do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o modelo de Van Hiele, eles se encontram e os tipos de provas, segundo Balacheff (1988), encontrados em nossa Proposta Didática.

CAPÍTULO 3: METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo retratamos metodologicamente nossa pesquisa de forma a apresentar suas características, ou seja, questão norteadora, objetivos, sujeitos e instrumentos de coleta dos dados. Primeiramente tratamos sobre o Projeto OBEDUC/CAPES e a pesquisa qualitativa, sua origem e características. Em seguida fundamentamos nossa Proposta Didática, apresentamos nossa pesquisa qualitativa, os instrumentos metodológicos e, por fim, propomos o estudo de caso para a análise dos dados coletados.

3.1 O PROJETO OBEDUC/CAPES E A PESQUISA COLABORATIVA

Pesquisas em educação cuja prática, privilegia processos de intervenções que visam transformar determinada realidade, emancipando os indivíduos que dela participam, vem ganhando destaque desde a década de 1980, adquirindo, claramente intencionalidade emancipatória (IBIAPINA, 2008).

Kemmis (1988) recomenda trabalhar na perspectiva de as pesquisas deixarem de investigar sobre o professor e passarem a investigarem com o professor, trabalhando na perspectiva de contribuir para que os docentes se reconheçam como produtores de conhecimentos, da teoria e da prática de ensinar, transformando, assim, as compreensões e o próprio contexto do trabalho escolar.

A sala de aula e seus sujeitos crescentemente vêm sendo objeto de estudo em pesquisas acadêmicas. No entanto, percebemos que tais pesquisas são realizadas paralelamente à realidade escolar, ou seja, são pesquisas sobre esses sujeitos e após finalizadas não contribuem no cotidiano escolar (TELLES, 2002).

Ibiapina (2008) destaca uma grande divergência entre pesquisas que consideram o professor como usuário e as que consideram o professor como produtor de saberes:

> Nas primeiras, o investigador tem papel principal na elaboração do conhecimento, mantendo com o professor relação estática. Nesse sentido, o docente é considerado como sujeito pesquisado; na segunda linha, os participes são considerados como co-produtores da pesquisa. Nessa abordagem são amenizadas as dicotomias entre pesquisa e ação, entre teoria e prática, entre professor e pesquisador, já que todos esses elementos são considerados essenciais para o processo de construção de conhecimentos (IBIAPINA 2008, p. 19).

Boavida (2005), afirma que o conceito de colaboração ou pesquisa colaborativa é polissêmico e a forma como ele é compreendido pelas organizações, escolas, investigadores e professores é muito diversa, por ser uma noção bastante indefinida e apenas parcialmente apropriada. No entanto, existem pensamentos similares a qualquer tipo de definição de colaboração, ou seja, de favorecer o crescimento profissional de todos os individuos participantes.

Segundo Ibiapina (2008), pesquisa colaborativa oportuniza meios para que os professores pensem sua prática e sobre seus valores e crenças, gerando questionamentos de sua prática profissional. Á vista disso, pesquisar colaborativamente considera tanto o lado e o ponto de vista da academia (pesquisador) quanto o lado e o ponto de vista do professor. Nessa perspectiva, para a autora pesquisar colaborativamente quer dizer envolver tanto os pesquisadores quanto os professores em projetos comuns que busquem o benefícios da escola e o desenvolvimento profissional do docente:

> A pesquisa colaborativa é prática que se volta para a resolução dos problemas sociais, especialmente aqueles vivenciados na escola, contribuindo com a disseminação de atitudes que motivam a co-produção de conhecimentos voltados para a mudança da cultura escolar e para o desenvolvimento profissional dos professores. Em síntese, essa é uma prática alternativa de indagar a realidade educativa em que investigadores e educadores trabalham conjuntamente na implementação de mudanças e na análise de problemas, compartilhando a responsabilidade na tomada de decisões e na realização das tarefas de investigação (IBIAPINA, 2008, p. 23).

Contudo, devemos esclarecer que colaborar e cooperar possuem significados diferentes. Colaborar significa proporcionar negociação de atribuições entre os integrantes da pesquisa com o objetivo de todos possuirem voz e vez em todos os momentos da pesquisa. Apesar disso, colaborar não significa que todos estarão envolvidos nas mesmas atividades e em todos os momentos da pesquisa, nem com o mesmo empenho. Os professores serão co-produtores e não co-pesquisadores. Já cooperação refere-se a um grupo de pesquisa no qual parte dos seus membros não possuem autonomia, ou seja, não tem direito de decidir sobre ações tomadas em conjunto, caracterizando um grupo com relações de hierarquias entre seus membros (IBIAPINA, 2008)

Diante disso, entendemos que as orientações de Ibiapina (2008) apontam que a nossa pesquisa se enquadra em uma pesquisa colaborativa, em que os integrantes têm voz e vez no Projeto OBEDUC/CAPES, entre eles temos pesquisadores, professores da Educação Básica e graduandos trabalhando juntos. Percebemos que não há hierarquia e todos os membros da equipe trabalham juntos para o andamento da pesquisa. Concordamos que a pesquisa colaborativa corresponde aos anseios de formação dos professores e pesquisadores, uma vez que envolve os participantes em processos de reflexão sobre suas práticas, proporcionando a partilha de experiências e ideias e mobilizam a ampliação do nível de aprendizagem docente.

Por isso, optamos em utilizar as colocações de Ibiapina (2008) para nosso Projeto OBEDUC/CAPES e, da mesma forma, aderimos pela seguinte definição de pesquisa colaborativa proposta pela autora, por comungar das suas ideias para alcançar o cunho colaborativo desse projeto, unindo professores universitários, mestrandos, professores da Educação Básica e graduandos:

> […] pesquisa colaborativa é, no âmbito da educação, atividade de co-produção de saberes, de formação, reflexão e desenvolvimento profissional, realizada interativamente por pesquisadores e professores com o objetivo de transformar determinada realidade educativa. Compreendo ainda que a pesquisa colaborativa envolve empreendimento complexo que leva tempo para ser apreendido, já que sua execução envolve opção por ações formativas que possam auxiliar o professor a valorizar o pensamento do outro e a construir ambiente de discussão, de autonomia e de respeito mútuo. Assim, os processos de aprendizagem construídos colaborativamente oferecem potencial de auxílio tanto para a concretização do pensamento teórico quanto das práticas emancipatórias, já que fortalece a prática docente, abrindo caminhos para o desenvolvimento pessoal e profissional tanto dos pesquisadores quanto dos professores (IBIAPINA, 2008, p. 31).

O projeto intitulado *Trabalho Colaborativo com Professores que Ensinam Matemática na Educação Básica em Escolas Públicas das Regiões Nordeste e Centro-Oeste* foi desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação (OBEDUC), idealizado pelas docentes doutoras Patrícia Sandalo Pereira, Abigail Fregni Lins e Mercedes Betta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos, cada uma exercendo seu trabalho em suas instituições, respectivamente, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL). O referido Projeto foi aprovado pela CAPES em 2013, sem necessidade de alterações na proposta e de aprovação plena de orçamento, o qual podemos dizer que foi fruto de muito trabalho e dedicação das docentes pesquisadoras.

O Projeto do Programa Observatório da Educação OBEDUC/CAPES foi apresentado com dois diferenciais. Foi um trabalho colaborativo desenvolvido por cada Núcleo e que se encadeia por todo o Projeto em Rede, buscando melhorias para a Educação Matemática e o diferencial por ser em rede, ou seja, três instituições trabalharam a distância nos seus respectivos núcleos buscando executar suas atividades e a partir dos eventos interagem com suas opiniões e propostas.

Desta forma, por o Projeto ser em rede, teve-se três núcleos de atuação de cada pesquisadora. O núcleo UEPB, coordenado pela docente Abigail Fregni Lins, composto por 5 mestrandos, 7 professores da Educação Básica e 8 graduandos. O núcleo UFAL, coordenado pela docente Mercedes Carvalho, composto por 1 doutoranda, 3 professoras da Educação Básica e 3 graduandos. E o núcleo da UFMS, coordenado pela docente Patrícia Sandalo Pereira, a qual também foi a coordenadora geral do Projeto, composto por 4 mestrandos, 7 professores da Educação Básica e 4 graduandos, totalizando em 46 membros.

Além do mais, esse Projeto teve duração de 3 (três) anos, iniciado em Março de 2013 com finalização em Fevereiro de 2016. No primeiro ano as atividades eram concentradas em leituras e discussão dessas leituras e sua relevânia para o projeto. No segundo ano foi feita a filtragem dessas leituras e elaboração de uma Proposta Didática. No terceiro e último ano foi para aplicação da Proposta Didática.

No núcleo UEPB dividimos nosso trabalho em quatro momentos. No primeiro momento realizamos reuniões gerais e de equipes, estudos, leituras, debates, discussões e ocorreu o I Seminário OBEDUC em Maceió, Alagoas. No segundo momento foram realizadas reuniões gerais e de equipe, leituras, debates,discussões, planejamentos de uma Proposta Didática e ocorreu o II Seminário OBEDUC em Campina Grande, Paraíba. No terceiro momento ocorreram reuniões gerais e de equipe, finalização e aplicação de uma Proposta Didática em escolas e agendamento do III Seminário OBEDUC realizado em Campo Grande, Mato Grosso do Sul. No quarto momento e último foram realizadas reuniões, leituras, discussões, análises e escritas do trabalho realizado e dos resultados alcançados.

O núcleo UEPB de 20 membros, foram dispostos em 4 equipes, sendo elas iniciadas pelas propostas de dissertação dos 4 membros/mestrandos do núcleo. Cada equipe foi formada por um mestrando, dois professores da Educação Básica e dois graduandos. As equipes foram nomeadas de Robótica na Educação Matemática; Provas e Demonstrações Matemáticas; Deficiência Visual e Materiais Manipuláveis na Educação Matemática; e Argumentação e Calculadoras na Educação Matemática.

Fazemos parte da Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, na qual estudamos diversos artigos e livros referentes à utilização das provas e demonstrações no ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica; aplicação dos aplicativos nas aulas de Matemática, em especial o GeoGebra; e desenvolvimento de um trabalho colaborativo entre equipes de pesquisadores, professores e alunos das universidades.

Nosso núcleo UEPB iniciou o trabalho igualmente com todos em agosto de 2013 e foi estabelecido realizar as reuniões às segundas feiras, com duração de duas horas. De início as reuniões foram gerais, isto é, com os 20 membros do núcleo UEPB, nas quais debatiamos os eventos que iríamos participar; realizamos leituras sobre trabalho e pesquisa colaborativa; realizávamos relatos de cada equipe com o intuito de sabermos o que cada grupo estava elaborando e fazendo; organizávamos eventos; e tivemos orientação de como proceder nas reuniões de equipe e nas nossas propostas de pesquisa.

Transcorrido um tempo, depois de todos saberem o que iriam fazer e já cientes de como deveria ser feito o trabalho colaborativo, foram realizadas as divisões das 4 equipes, propondo uma reunião geral e 3 reuniões de equipe por mês, na qual cada equipe iria sentir o tempo necessário para o trabalho e estudo.

Deste modo, as reuniões de nossa equipe ocorreram todas as segundas feiras, com duração de duas horas. Na nossa primeira reunião de equipe discutimos o que cada membro queria trabalhar e a proposta de pesquisa de cada um, objetivando fazer uma ligação dentro nosso trabalho colaborativo. Além disso, como já mencionado, nossas leituras estavam em torno do trabalho colaborativo, das TIC e das provas e demonstrações matemáticas.

No período de 2013 e 2014 traçamos um cronograma de leituras dividindo-as em três momentos. No primeiro momento realizamos leituras e debates sobre provas, demonstrações e argumentações matemáticas. No segundo realizamos leituras e discussões sobre TIC, em especial o aplicativo GeoGebra. No terceiro momento realizamos leituras e debates sobre trabalho colaborativo. Nesses momentos propomos leituras de artigos ou livros, fazíamos resumo ou resenha destas leituras para que tivéssemos material para discutimos nossas visões sobre os artigos ou livros lidos e nos debates pudéssemos argumentar, concordando ou não, com as ideias dos demais colegas de equipe.

Referente ao primeiro momento do cronograma propomos os seguintes autores para leituras: Balacheff, Almouloud, Healy, Hanna e Nasser. Vale salientar que os integrantes da equipe tinham a possibilidade de propor outras leituras no decorrer das discussões e debates das leituras. No período das leituras e dos debates atentamos para a obrigação de diferenciar a visão técnica da visão crítica das provas e demonstrações matemáticas, como também de diferenciar o raciocínio dedutivo e o indutivo.

Sugerirmo-nos a analisar os PCN do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, com o intuito de verificarmos a presença da proposta de trabalho de provas, demonstrações ou argumentações no ensino e aprendizagem da Matemática. Sugerimo-nos também a ler partes do livro de Morais Filho, do que trata a respeito de teorema, corolário, definição, proposição, lema, entre outros, com o objetivo de diferenciarmos seus significados.

Em seguida, ao produzimos alguns questionários e de nossa preocupação em entender o poder argumentativo dos alunos referentes a alguns conteúdos matemáticos, sentimos a necessidade de ler alguns artigos e textos de Ramalho, Boavida, Monteiro e Santos, Tinoco e Silva, entre outros, que tratam sobre o trabalho da argumentação com alunos.

A respeito do segundo momento do cronograma, realizamos as leituras e os debates de algumas partes do livro de Lévy, observando a utilização das TIC na sociedade e na educação em geral. Além disso, lemos textos de Espinosa e Araújo, abordando a utilização das TIC na educação matemática, as dificuldades e a modificação do papel do professor frente a essas novas tecnologias.

Com relação ao terceiro momento do cronograma, nossa leitura sobre trabalho colaborativo diz respeito ao livro de Ibiapina, uma vez que o consideramos como norte para nosso trabalho em equipe e no Projeto OBEDUC/CAPES.

No segundo semestre de 2014 percebemos a necessidade de mais tempo para trabalharmos em equipe. Diante disso, aumentamos a duração das reuniões de duas para quatro horas. Ainda nesse segundo semestre de 2014 introduzimos a montagem da estrutura da nossa Proposta Didática e prosseguimos nas leituras e discussões a respeito do tema provas e demonstrações matemáticas.

No ano de 2015 as reuniões em equipe aconteceram em companhia da docente Abigail Lins, pelo motivo de nossa equipe encontrar dificuldade na escolha dos assuntos, do referencial teórico e o fechamento de nossas pesquisas em equipe. Diante desta situação, a docente nos orientou e indicou ler mais algumas dissertações e artigos a respeito das nossas dúvidas para que conseguíssemos desenvolver a nossa Proposta Didática.

Em seguida a essas orientações propostas pela coordenadora, conseguimos escolher o nosso referencial teórico, os assuntos a serem abordados na Proposta Didática e as turmas que iríamos aplicar a Proposta Didática. Além disto, definimos os instrumentos de pesquisa que iríamos empregar, as divisões e as questões da Proposta Didática e como seria a sua aplicação.

Assim, no ano de 2015 alcançamos um refencial teórico em comum acordo com os integrantes da equipe e os assuntos a serem abordados na Proposta Didática com o objetivo de incentivar o aluno a justificar, argumentar e provar as suas respostas.

3.2 NATUREZA DA PESQUISA

Os autores, de maneira unanime, concordam que a metodologia qualitativa teve sua origem na prática desenvolvida pela Antropologia. Depois, empregada pela Sociologia e Psicologia. Posteriormente, a investigação qualitativa começa a ser aplicada em Educação, Saúde, Geografia Humana etc (MARCONI e LAKATOS, 2011).

O aparecimento da pesquisa qualitativa teve seu início quando os antropólogos estudavam indivíduos, tribos e pequenos grupos ágrafo, e sentiram a necessidade de que os dados não deviam ser quantificados, mas sim interpretados. Esses autores mostram que a Etnografia está presente na Sociologia, Psicologia, Educação e várias outras áreas do conhecimento, pois, reconhece como uma forma específica de investigação qualitativa, característica do estudo da cultura. Triviños (1987) aponta algumas posições que devem ser levadas em consideração como o reconhecimento:

> - Da existência de um mundo cultural desconhecido;
> - Da necessidade de descrever o modo de vida dos povos, para compreender seu significado, para melhor entender o funcionamento de sociedades e grupos;
> - Da participação ativa na vida da comunidade, a fim de conhecê-la melhor (TRIVIÑOS, 1987, p. 121).

Bogdan e Biklen (2013) reconhecem como investigação qualitativa, apesar das diferenças existentes, os trabalhos correspondes a seguinte fala:

> Alguns investigadores movimentam-se nas escolas munidos de blocos de apontamentos para registrarem os dados. Outros recorrem ao equipamento vídeo na sala de aula e não seriam capazes de conduzir uma investigação sem ele. Outros ainda elaboram esquemas e diagramas relativos aos padrões de comunicação verbal entre alunos e professores (BOGDAN e BIKLEN, 2013. p. 47).

Estes autores fazem uma reflexão dos pontos comuns nestas investigações e mostram em um dos seus capítulos que elas conduzem a uma investigação qualitativa.

Richardson (1999, p.90) assegura que a pesquisa qualitativa "pode ser caracterizada como a tentativa de uma compreensão detalhada dos significados e características situacionais apresentadas pelos entrevistados, em lugar da produção de medidas quantitativas de características ou comportamentos". Assim a preocupação da pesquisa qualitativa não está na representação numérica, mas na busca em compreender profundamente as relações dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (MINAYO, 2002, p. 21-22).

Diante disso, e baseado nas leituras realizadas pela equipe e individuais, buscamos compreender profundamente o trabalho com provas e demonstrações matemáticas por meio da investigação do nível do pensamento geométrico e os tipos de provas matemáticas de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma Proposta Didática.

O propósito da pesquisa cientifica não é somente fazer um relatório ou descrição dos dados coletados empiricamente, mas apresentar o desenvolvimento dos dados obtidos de maneira interpretativa. O pesquisador tem autonomia para escolher o método e a teoria para colocar em prática seu trabalho, porém, na fase da elaboração do relatório, deve ser coerente, consciente, objetivo, ter originalidade, confiabilidade e criatividade na etapa da coleta e análise dos dados. A qualidade do resultado final de sua pesquisa resulta da sensibilidade e intuição do pesquisador, o qual deverá ser imparcial, não permitindo que suas conclusões pessoais influenciem as respostas (MARCONI e LAKATOS, 2011).

Os métodos qualitativos utilizados tentam responder a questões particulares de um nível de realidade que não pode ser quantificado. Em relação à investigação qualitativa, Bogdan e Biklen (2013) apontam características importantes que contribuem para o seu desenvolvimento. A primeira característica é que na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Para os autores, os investigadores qualitativos passam grandes quantidades de tempo nos locais de estudos porque eles se preocupam com o contexto. "Os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem" (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 48).

A segunda característica apresentada por Bogdan e Biklen (2013) é que a investigação qualitativa é descritiva. Nesta característica os autores enfatizam que na investigação qualitativa os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números, incluindo assim transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Para Menga, (1986) "o estudo qualitativo é o que se desenvolve numa situação natural; é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada" (MENGA, 1986, p. 18).

Na terceira característica Bogdan e Biklen (2013) apontam que os investigadores qualitativos se interessam mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos, ou seja, a prioridade é a compreensão de um dado fenômeno e não apenas os resultados obtidos.

Os resultados finais obtidos em uma pesquisa de cunho qualitativo não constituem o foco central do pesquisador, mas o curso dos acontecimentos, isto é, a maneira pela qual se chegou aos resultados (COSTA, 2011, p. 61)

Em seguida Bogdan e Biklen (2013) colocam que os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva "Com isso não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão. Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes " (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 50).

Por fim, a última característica que Bogdan e Biklen (2013) apresentam é de que o significado é de importância vital na abordagem qualitativa, pois ao apreender as perspectivas dos participantes, a investigação qualitativa faz luz à dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior:

> Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dando estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 51).

Portanto, além do trabalho colaborativo elaborado pela Equipe Provas e Demonstrações na Educação Matemática, optamos pela pesquisa qualitativa para nossa Proposta, por percebemos que nossa pesquisa se tratou deste ponto de vista, comprovando as afirmações de Minayo (2002, p. 21-22) e Bogdan e Biklen (2013). Agora com relação às cinco características propostas por Bogdan e Biklen (2013), entendemos que nossa pesquisa esteve presente nas três primeiras, visto que atuamos em todo processo de coleta dos dados por estarmos presente no local de estudo dos alunos; os dados que recolhemos foram descritivos, ou seja, foram concebidos em forma de palavras ou imagens e não de números; e particularmente, no nosso processo de investigação, de coleta de dados foi mais interessante do que os resultados obtidos.

Nossa pesquisa qualitativa se mostra como estudo de caso, o qual encontramos os detalhes de nossa discussão na seção Sobre a Análise dos dados.

3.3 PROBLEMATIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa de mestrado surgiu do nosso interesse em levar para a sala de aula do Ensino Básico um tema pouco, ou até não visto nas aulas de Matemática, a utilização de provas e demonstrações matemáticas em uma abordagem que favoreça o desenvolvimento da qualidade das justificativas dadas pelos alunos diante de questões que exijam dele uma postura convincente e confiável de sua resposta como habitualmente requer a Matemática. Pretendemos com essa pesquisa elaborar uma Proposta Didática que sirva como base para que outros profissionais da educação possam identificar por meio desta estratégia metodológica que o uso de provas e demonstrações pode ser ensinado de maneira satisfatória na Educação Básica no ensino de Matemática.

Nosso tema de pesquisa sobre provas e demonstrações matemáticas foi delimitado durante as leituras e discussões feitas envolvendo este tema na Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas. Nesta equipe, as leituras, os diferentes pontos de vistas e as sugestões dadas foram suficientes para conseguirmos filtrar as leituras fundamentais para as pesquisas individuas dos participantes da equipe e melhorar o nosso entendimento sobre o tema escolhido. No presente momento dois mestrandos da nossa equipe concluíram suas pesquisas. Santos (2015), que investigou *Que tipos de provas matemáticas podem ocorrer a partir de uma Proposta Didática com o Teorema de Pitágoras por alunos do 3º Ano do Ensino Médio?* Lima (2015) que investigou *Que tipos de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma Proposta Didática por alunos do 2º ano do Ensino Médio?* .

Com o nosso tema definido, escolhemos inicialmente leituras que nos auxiliassem na utilização e no potencial das provas e demonstrações nas aulas de Matemática da Educação Básica. Daí definimos a questão de nossa pesquisa:

Quais os tipos de provas matemáticas são utilizados pelos alunos do 1º ano da E.E.E.F.M. Carlota Barreira e em que nível do pensamento geométrico eles se encontram de acordo com o modelo proposto por Van Hiele?

Baseando-se nesta questão, o objetivo geral da pesquisa foi o de investigar o nível do pensamento geométrico e os tipos de provas matemáticas de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma Proposta Didática.

O tema escolhido, a questão norteadora, e o objetivo da nossa pesquisa foram desenvolvidos durante a realização das leituras, discussões envolvendo o tema pela Equipe *Provas e Demonstrações Matemáticas* no núcleo Universidade Estadual da Paraíba, UEPB, do Projeto OBEDUC, interinstitucional, juntamente com a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS e Universidade Federal de Alagoas-UFAL. A equipe, sob orientação da professora Abigail Lins foi composta por um mestrando, dois professores do Ensino Básico de escolas públicas e dois graduandos de Curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB, tendo como instrumentos utilizados a análise de uma intervenção didática, uma redação, uma Proposta Didática, gravação em vídeo da aplicação da Proposta Didática a uma turma do primeiro ano do Ensino Médio da Educação Básica e a gravação do áudio do diálogo de uma dupla durante a resolução da Proposta Didática em uma Escola Estadual de Cidade de Areia, Paraíba.

3.4. A PROPOSTA DIDÁTICA

A *Proposta Didática* em nossa pesquisa teve como objetivo proporcionar ao aluno um meio pelo qual os conteúdos fossem trabalhados de maneira a desenvolver a capacidade de justificar suas ideias, pensamentos, aprendizados, e ao mesmo tempo ser uma ferramenta para o professor fazer o diagnóstico do aprendizado do aluno. Esta prática na sala de aula pode ser vista como um momento muito especial de tornar os conteúdos trabalhados compreensíveis e relevantes para os alunos (SHULMAN, 1986).

Shulman (1986) ao discutir o conhecimento de conteúdo pedagógico recomenda formas mais úteis de ensinar os conteúdos, como por meio de analogias, ilustrações, explicações e demonstrações do assunto, tornando-os compreensíveis para os alunos. O professor deve ter à disposição alternativas de abordar o conteúdo que tornem a aprendizagem de tópicos fáceis ou difíceis, mais acessíveis.

Esta prática no cotidiano escolar deve fazer parte do conhecimento profissional do professor de matemática, pois, para ensinar, não basta saber pensar bem, é preciso um vasto conjunto de saberes e competências, que podemos designar por conhecimento profissional. Conhecimento esse que está presente no professor reflexivo, aquele que atribui importância na reflexão na ação e da reflexão sobre a ação, como dois dos traços mais marcantes de um profissional competente (SCHON, 1983).

Schon (1983) comenta que o professor reflexivo se permite experimentar a surpresa, perplexidade ou confusão em uma situação que ele encontra incerteza e novidade. Ele reflete sobre os fenômenos que envolvem essa situação de ensino e a aprendizagem, antes, durante e depois seu comportamento. Quando alguém reflete em ação, ele se torna um pesquisador no contexto da sua prática. Ele não está dependente das categorias da teoria ou técnicas estabelecidas, mas constrói uma nova teoria para o seu caso.

Diante do conhecimento profissional que o professor deve ter a respeito de sua prática na ação, que percebemos na nossa Proposta Didática um instrumento que pode ser utilizado pelo professor para proporcionar um momento de reflexão na ação e sobre sua ação em sala de aula. Ponte (1999) aponta que o conhecimento profissional do professor é essencialmente orientado para a ação e que se desdobra por quatro grandes domínios os quais iremos a seguir mostrar como estão presentes em nossa Proposta Didática.

Nossa Proposta Didática trabalhou com os conteúdos *Teorema de Pitágoras, Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e Teorema do Ângulo Externo* de maneira a construir no aluno as interelações sobre cada um desses conteúdos de forma a promover o seu raciocínio e nas atividades que propunham a demonstração desses teoremas promovemos as formas de justificação e de validação. Essas características estão incluídas no primeiro domínio sobre *o conhecimento dos conteúdos de ensino*.

Nos programas do Ministério da Educação, sugere-se que os alunos do Ensino Médio desenvolvam competências relacionadas à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Em particular, destaca-se a preocupação mais explícita com o desenvolvimento de três grandes competências nessa área do conhecimento (SMOLE e DINIZ, 2008):

> - Representação e comunicação: envolvem leitura, interpretação e produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características da área.
> - Investigação e compreensão: são marcadas pela capacidade de enfrentamento de situações-problema, utilizando os conceitos e procedimentos peculiares do fazer e do pensar das ciências.
> - Contextualização das ciências no âmbito sociocultural: abrange a análise crítica das ideias e recursos da área, assim como das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do conhecimento cientifico (SMOLE e DINIZ, 2008, p. 15).

Estas grandes competências presentes no currículo escolar da Educação Básica estão presentes em nossa Proposta Didática, pois a interpretação da linguagem matemática presente na nossa Proposta Didática exigiam do aluno esse conhecimento; as atividades exigiam também dos alunos a investigação e compreensão, pois os teoremas são situações – problemas que os alunos deveriam utilizar conceitos e procedimentos do pensar da Matemática para demonstrá-los.

E por fim a contextualização esteve presente na Proposta Didática por apresentar atividades em que não apenas os números eram tão importantes, mas a interpretação correta do enunciado, análise dos tipos de demonstrações presentes em algumas atividades e a principal questão, vista no âmbito sociocultural, que foi desenvolver a capacidade do pensamento crítico do aluno influenciando-o a ter justificativas plausíveis para suas convicções, questão essa fundamental para transformar o aluno em um cidadão crítico e atuante na sociedade. Características estas presentes no segundo domínio sobre *o conhecimento do currículo*.

Um dos focos principais da nossa Proposta Didática foi compreender o conhecimento do aluno a respeito dos conteúdos abordados com o objetivo de entender o seu nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e de suas habilidades de justificar, validar e provar suas respostas. Diante desses resultados o professor poderá entender melhor as dificuldades mais frequentes dos alunos para assim planejar estratégias para auxiliar nos processos de aprendizagem dos alunos, bem como entender se aspectos culturais e sociais podem interferir negativamente ou positivamente no desempenho dos resultados da Proposta Didática e consequentemente no seu desempenho escolar. Essas características fazem parte do terceiro domínio *o conhecimento do aluno*.

Por fim, nossa Proposta Didática foi elaborada pela equipe Provas e Demonstrações Matemáticas no período de março a junho de 2015, cuja preparação levou em consideração os assuntos que os estudantes deveriam saber naquele nível de ensino, o contexto escolar em que os alunos estão inseridos. Sabíamos que a literatura apontava que as provas e demonstrações matemáticas pouco são trabalhadas na sala de aula na Educação Básica e ao elaborar nossa Proposta pretendíamos ao mesmo tempo verificar essa evidência da literatura e propor atividades que estimulassem e motivassem a prática dessa temática nas aulas de Matemática no seu cotidiano escolar. Na elaboração das atividades, pensou-se em construir no aluno o aprendizado do conteúdo trabalhado, como foi feito com o do Teorema de Pitágoras, e outras que exijam dos alunos a exposição por meio de justificativas, validações, provas ou demonstrações matemáticas dos conhecimentos adquiridos de anos anteriores dos conteúdos abordados. Diante das respostas dadas as atividades da Proposta Didática pelos alunos participantes da pesquisa, pudemos avaliar vários aspectos pertinentes ao processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos tratados na Proposta Didática. Essas características compõe um quarto e último domínio do conhecimento profissional, *o conhecimento instrucional* (PONTE, 1999).

3.5. LOCAL DA PESQUISA

A escola escolhida para a aplicação da Proposta Didática foi a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira, localizada na Praça Monsenhor Ruy Barreira Vieira, S/N, no centro do município de Areia-PB, com código do INEP 25064126, possuindo em 2015 a nota 2,9 no IDEB. A escolha dessa Escola foi motivada pelo pesquisador ter estudado e atualmente ser professor da disciplina de Matemática nesta Escola e por querer de alguma forma colaborar com o crescimento dos alunos.

O gestor da Escola ao ser informado da possibilidade do desenvolvimento de nossa pesquisa nas dependências da mesma, permitiu que a pesquisa pudesse ser desenvolvida com total apoio e colaboração da equipe gestora da Escola. Assim conseguimos ultrapassar o primeiro obstáculo que aparece quando se tenta obter acesso ao campo de trabalho da pesquisa como em enfatiza Bogdan e Biklen (2013, p. 115) “O primeiro problema com que o investigador se depara no trabalho de campo é a autorização para conduzir o estudo que planejou”.

Esta Escola Pública Estadual localiza-se na cidade de Areia, Paraíba e atende alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos e oferece o Programa Mais Educação:

Figura 1: Fachada da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Carlota Barreira”

Fonte: Nossa autoria

Em 2017, o corpo docente da Escola está formado por 18 professores efetivos e 20 professores substitutos. A totalidade de professores da EEEFM “Carlota Barreira” tem nível superior, a maioria com Especialização e/ou Mestrado em sua área específica ou áreas afins, um com doutorado e outro cursando o doutorado.

A Escola “Carlota Barreira” oferece ensino de Educação Básica, atendendo alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, com turmas distribuídas nos períodos matutino, vespertino e noturno com o Ensino Fundamental, Ensino Médio, e também atende à demanda que opta pela modalidade de Educação de Jovens e Adultos – EJA.

3.6 PARTICIPANTES DA PESQUISA

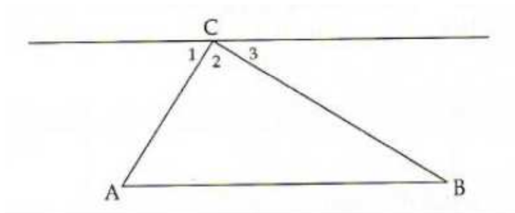
Os participantes dessa pesquisa foram os alunos do 1º ano C do Ensino Médio. A Escola contava em 2015 com quatro 1º anos, sendo dois no turno da manhã, A e B, e dois no turno da tarde, C e D. Como critério para a escolha da turma escolhemos o 1º ano da tarde pela disponibilidade do pesquisador para aplicar a Proposta Didática e o da turma C por apresentar maior números de alunos matriculados. O 1º ano do Ensino Médio foi escolhido, pois os alunos já teriam familiaridade com os teoremas: *a soma dos ângulos internos de um triângulo*, *teorema do ângulo externo e o Teorema de Pitágoras*, teoremas vistos no final do Ensino Fundamental. Enfatizamos que a escolha da turma não levou em consideração o conhecimento matemático dos alunos.

3.7 A SELEÇÃO DOS TEOREMAS

Escolhemos para nossa pesquisa *os Teoremas da Soma dos Ângulos Internos* e o *Teorema do Ângulo Externo* de um triângulo por considerarmos os dois teoremas de fundamental importância no Ensino Fundamental, além de serem conceitos básicos no ensino da Geometria Plana e também por serem assuntos conhecidos pelos alunos do 1º ano do Ensino Médio e no Ensino Fundamental. A seguir os enunciamos e demonstramos.

Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Prova: Seja ABC um triângulo. Pelo vértice C trace uma reta paralela ao lado AB. Numere os ângulos formados com vértice C, como indicado na figura seguinte.

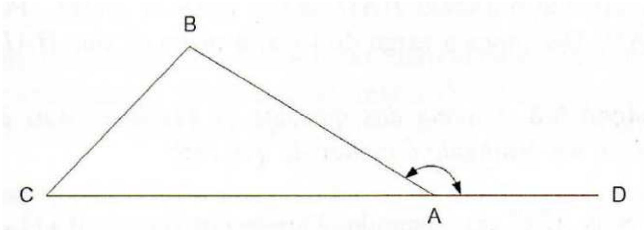


Fonte: Barbosa (2004, p. 89)

Tem-se $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$. Como AC é transversal às duas paralelas, é uma consequência direta da proposição de que se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes concluímos que $\hat{1} = \hat{A}$. como BC é também transversal às duas paralelas, então $\hat{3} = \hat{B}$. Portanto $\hat{A} + \hat{B} + A\hat{C}B = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$ (BARBOSA, 2004, p. 88 e 89).

Todos, ou quase todos, sabem que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Este é um resultado central da Geometria Euclidiana. Esta propriedade é uma das poucas que a maioria dos alunos nunca se esquece, embora, por vezes, quando necessário recorrer a ela, nem todos se lembram de que é um conhecimento prévio que devem mobilizar. Essa demonstração pode ser também encontrada no livro I dos Elementos proposição 32 (TINOCO, 2012).

Definição 5.1 Se ABC é um triângulo, os seus ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são chamados de ângulos internos ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo.



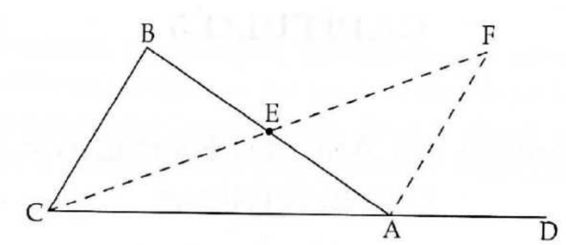
Fonte: Barbosa (2004, p. 61)

Na figura acima o ângulo $B\hat{A}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC adjacente ao ângulo interno $C\hat{A}B$.

Teorema do Ângulo Externo: Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

Prova: Seja ABC um triângulo. Na semi-reta S_{CA} marque um ponto D tal que A esteja entre C e D, como indicado na figura abaixo. Devemos provar que $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$. Vamos inicialmente provar que $B\hat{A}D > \hat{B}$. Para isto considere o ponto médio E do segmento AB.

Figura:

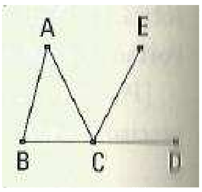


Fonte: Barbosa (2004, p. 62)

Na semi-reta S_{CE}, marque um ponto F tal que $CE = EF$. Trace AF. Compare os triângulos CEB e FAE. Como $BE = AE$(já que E é o ponto médio de AB), $CE = EF$ (por construção) e $B\hat{E}C = A\hat{E}F$(por serem opostos pelo vértice), segue que $BEC = AEF$. Consequentemente $\hat{B} = E\hat{A}F$. Como a semi-reta S_{AF} divide o ângulo $B\hat{A}D$, então $E\hat{A}F < B\hat{A}D$. Portanto $\hat{B} < B\hat{A}D$. Analogamente prova-se que $B\hat{A}D > \hat{C}$. Assim fica demonstrado o Teorema (BARBOSA, 2004, p. 61-62).

Outra demonstração mais simples desse teorema pode ser vista no livro I de Euclides, *Elementos*, proposição 32. Ou em Tinoco (2012) página 15.

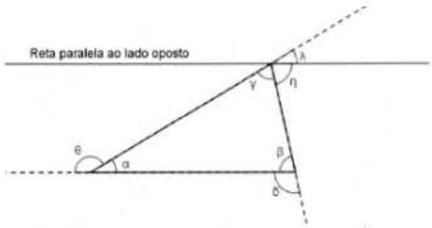
Euclides: Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos.



Fonte: Bicudo (2009)

Demonstração: Seja o triângulo ABC, e fique prolongado um lado dele, o BC, até o D; digo que o ângulo sob ACD, exterior, é igual aos dois sob CAB, ABC, interiores e opostos. Fique, pois, traçada, pelo ponto C, a CE paralela à reta AB. E, como a AB é paralela à CE, e a AC caiu sobre elas, os ângulos sob BAC, ACE, alternos, são iguais entre si. De novo, como a AB é paralela à CE, e a reta BD caiu sobre elas, o ângulo sob ECD, exterior, é igual ao sob ABC, interior oposto. Mas foi provado também o sob ACE igual ao sob BAC; portanto, o ângulo sob ACD todo é igual aos dois sob BAC, ABC, interiores e opostos (BICUDO, 2009).

Tinoco (2012) comenta que a proposição I. 32 dos elementos de Euclides mostra de uma maneira simples a demonstração do Teorema do Ângulo Externo, vejamos:



Fonte: Tinoco (2012, p.16)

Demonstração: Se a partir de qualquer vértice do triângulo traçarmos uma paralela ao lado oposto, o ângulo externo nesse vértice fica dividido em duas partes, como mostra a figura acima. Sabemos que $\beta \equiv \eta$ por serem ângulos alternos internos, e que $\alpha \equiv \lambda$ por serem correspondentes. Portanto, $\eta + \lambda = \alpha + \beta$. Como $\eta + \lambda$ forma o ângulo externo adjacente a γ, concluímos que a amplitude do ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

3.8 A COLETA DOS DADOS

A coleta dos dados ocorreu no mês de junho de 2015. Aplicamos primeiramente uma Redação proposta aos alunos sobre o que conheciam a respeito de provas e demonstrações matemáticas aplicada no dia 15 de junho de 2015. Para tanto entregamos uma folha para que os mesmos redigissem em papel próprio da pesquisa suas ideias a respeito do tema anterior. Depois deste momento no dia seguinte fizemos uma explanação de duração de uma hora e meia a respeito do tema da redação, e explicamos as definições de um teorema, de uma demonstração, postulados, axiomas, propriedades, conjecturas, entre outros como devolutiva dada a esses alunos por esta pesquisa. Vale salientar, que nesse momento da aula não trabalhamos com os três assuntos que norteiam a nossa Proposta Didática, pois objetivávamos investigar os conhecimentos que estes alunos tinham a respeito desses assuntos.

O próximo momento da pesquisa foi a aplicação da Proposta Didática aos alunos do 1º ano C do Ensino Médio no dia 17 de junho de 2015. Segundo Moroz e Gianfaldoni (2006, p. 83), “a coleta de dados é o momento em que se obtêm as informações necessárias e que será alvo de análise posteriormente”. A coleta dos dados continuou por meio dos instrumentos de pesquisas descritos a seguir.

3.9 INSTRUMENTOS DA PESQUISA

Para a obtenção dos dados, iniciamos propondo aos alunos uma redação sobre provas e demonstrações matemáticas.

3.9.1 Redação

Utilizamos esta estratégia metodológica, Redação, sugerida pela Profª Drª Patrícia Sândalo Pereira, coordenadora geral do Projeto OBEDUC com o objetivo de saber as concepções dos alunos acerca do que sabem a respeito do tema provas e demonstrações matemáticas. Assim, foi proposto aos alunos que redigissem uma redação com relação ao tema Provas e Demonstrações Matemáticas para que eles pudessem expor suas ideias e opiniões a respeito deste tema.

A Redação foi proposta por acharmos importante sabermos os conhecimentos prévios dos alunos com relação ao tema proposto. A Redação foi proposta a 19 participantes, ou seja, para a turma do 1º Ano C, onde a pesquisa foi aplicada. O modelo da folha da redação proposta aos alunos encontra-se no Apêndice 1.

3.9.2 Gravação em Vídeo e Áudio

A gravação em vídeo foi utilizada durante toda a aplicação da Proposta Didática na sala de aula do 1º Ano C do Ensino Médio na Escola que foi aplicada a pesquisa. O objetivo de gravar a aplicação da Proposta Didática se deu para não perdermos nenhum detalhe relevante que possa contribuir para a nossa pesquisa. Ao mesmo tempo foi gravado o áudio de uma dupla que estava resolvendo a Proposta Didática com o objetivo de analisar o dialogo existente durante a resolução da Proposta Didática. Essa dupla foi escolhida por uma das integrantes a Aline, apresentar um desempenho a acima da média durante a intervenção. Para Ludke e André (1986, p. 37), "[...] a gravação tem a vantagem de registrar todas as expressões orais, imediatamente deixando o entrevistador livre para prestar toda a sua atenção ao entrevistado [...]'.

3.9.3 Observação Participante

A observação foi realizada durante a aplicação das etapas da intervenção didática, redação e na Proposta Didática. Muitos pesquisadores qualitativos utilizam os dados de observação, pois são informações que podem ser ouvidas ou sentidas diretamente pelo pesquisador do que por outros tipos (STAKE, 2011).

A respeito deste instrumento, Marconi e Lakatos (2011) mencionam que a observação é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver ou ouvir, mas em examinar fatos ou fenômenos que se desejam estudar.

Por isso, entendemos que é relevante utilizar à observação, com o intuito de minimizar a subjetividade que existe no campo da pesquisa qualitativa. Daí optamos pela Observação Participante que "implica a interação entre investigador e grupos sociais, visando coletar modos de vida sistemáticos, diretamente do contexto ou situação específica do grupo" (MARCONI e LAKATOS, 2011, p. 279). No entanto, esta Observação Participante foi do tipo natural, pois o pesquisador fez parte da comunidade ou grupo ao qual a pesquisa se desenvolveu (MARCONI e LAKATOS, 2011).

No caminhar das atividades, utilizaram-se as Notas de Campo para uma descrição fidedigna das atividades, conversas, acontecimentos, problemas e dificuldades encontradas no decorrer da pesquisa.

3.9.4 Proposta Didática

Após as leituras realizadas sobre o tema provas e demonstrações matemáticas pela Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, elaborou-se uma Proposta Didática (Apêndice 2) dividida em quatro partes. A primeira parte é composta de oito atividades, a parte dois é composta por três atividades. Na parte três por duas atividades e na última, a quarta, composta por cinco atividades. Na investigação de Santos (2015) foi utilizada a primeira parte da Proposta Didática. Lima (2015) utilizou a segunda parte atividades um e dois e a quarta parte. Para esta pesquisa foi utilizada a primeira e terceira atividade da segunda parte e a segunda atividade da terceira parte da Proposta Didática.

3.9.4.1 Parte II, Atividade 1

Objetivo: que os alunos selecionassem qual dos tipos de provas propostos por Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu, elas dariam caso tivessem que provar se a afirmação é verdadeira.

3.9.4.2 Parte II, Atividade 3

Objetivos: Letra (a): Que os alunos identifiquem visualmente os elementos geométricos pedidos no triângulo; Letra (b): Que os alunos identifiquem alguma propriedade no triângulo; Letra (c): Que os alunos consigam colocar na ordem correta os passos da demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo e Letra (d):

Que os alunos consigam demonstrar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo de maneira diferente da proposta anteriormente.

3.9.4.3 Parte III, Atividade 2

Objetivo: Que os alunos identifiquem qual das alternativas é a demonstração formal do teorema do ângulo externo.

3.10 SOBRE A ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados foi realizada partindo das seguintes categorias:

(i) As ideias a respeito do tema Provas e Demonstrações Matemáticas;

(ii) Classificação dos tipos de provas encontradas na Proposta Didática das duplas de alunos segundo Balacheff (1988);

(iii) Qual o nível do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo de Van Hiele as duplas podem ser classificadas.

Um passo crucial na análise dos dados diz respeito ao desenvolvimento de uma lista de categorias de codificação depois de ter recolhido os dados e de se encontrar preparado para organizá-los (BOGDAN e BIKLEN, 2013).

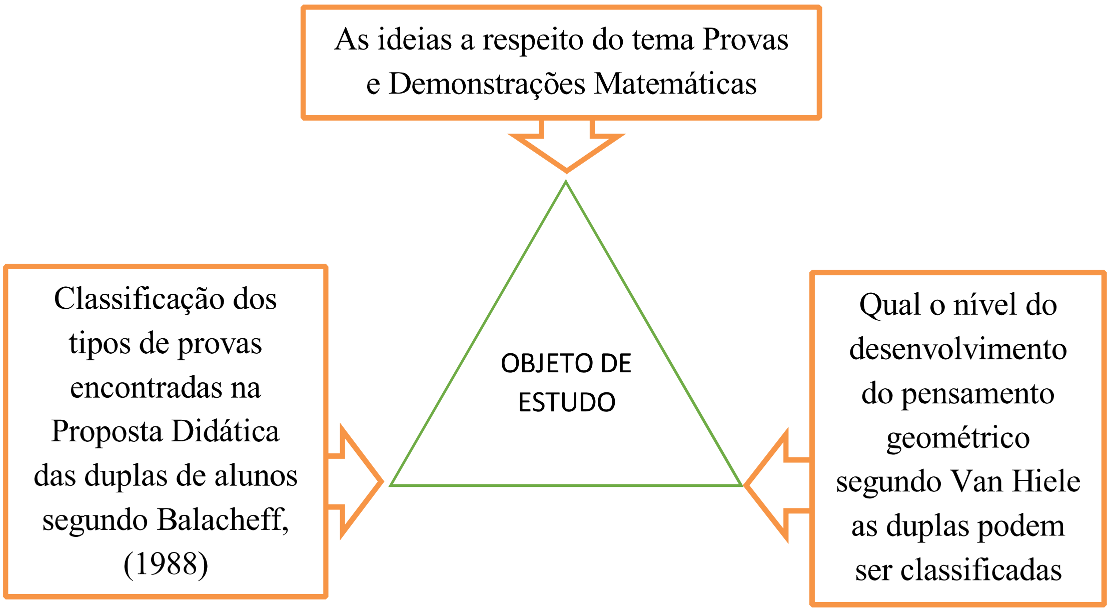
Os dados foram coletados durante o mês de junho de 2015. Ao finalizar a coleta de dados obtemos uma grande quantidade de material (Redação, Proposta Didática, Vídeo-Gravação, Áudio-Gravação, Transcrição do Áudio, Notas de Campo). Todos estes dados se constituíram em fontes de evidência para os estudos de caso a serem escritos (YIN, 2015).

Alves (1991) e Yin (2015) trazem de maneira mais precisa a categorização de modo implícito como a organização da pesquisa a partir da categorização teórica é realizada a análise dos dados. Após a coleta de dados o que temos são dados brutos, sendo estes em formas de resposta assinaladas, frases registradas via gravação de áudio, ou de vídeo, notas de campo, e que devem ser organizadas a fim de que se definam as categorias para que inicie a análise da pesquisa.

Na nossa pesquisa pretendemos utilizar a técnica da triangulação de dados, com o objetivo de facilitar na análise e na organização dos dados por entendermos ser uma estratégia que "é um fundamento lógico para se utilizar várias fontes de evidências" (YIN, 2015, p. 123), podendo assim a partir desta estratégia utilizar várias fontes diferentes para que obtenhamos evidências que darão maior legitimidade a nossa pesquisa.

Assim, assumimos como base a técnica da triangulação de dados proposta por Yin (2015) e a estrutura realizada por Lins (2003) em sua pesquisa de doutorado, referente à convergência de evidências para a triangulação de dados:

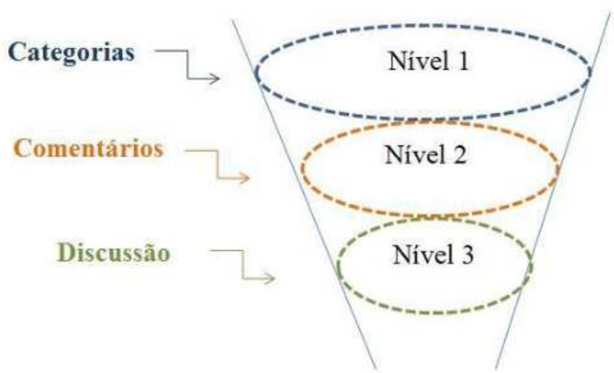
Figura 2: Triangulação de Dados



Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003)

A análise dos dados foi desenvolvida em três níveis. O primeiro, partindo das categorias; o segundo nível, os comentários; e o terceiro nível de análise, a discussão do estudo de caso. Assim, a estrutura dos níveis de análise é organizada em forma de funil e se baseia na proposta de Lins (2003):

Figura 3: Níveis de análise



Fonte: Estrutura de Lins (2003)

Diante disso, a partir das categorias expostas e objetivadas acima, elegemos subcategorias, as quais estão expostas a relação entre as categorias e as subcategorias em cada caso na figura abaixo:

Figura 4: Esboço das Categorias e Subcategorias

4 – O ESTUDO DE CASO ALINE E TAMARA

4.1 – APRESENTAÇÃO

4.2 - AS IDEIAS DA DUPLA DE ALUNAS SOBRE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMATICAS

2° Nível de análise

4.2.1 - As ideias a respeito do tema Provas e Demonstrações matemáticas

1° nível de análise

4.2.2 – Comentários

4.3 - OS TIPOS DE PROVAS MATEMÁTICAS UTILIZADOS PELA DUPLA

4.3.1 - Atividade 1 (Parte II)

4.3.1.1. Resultados Esperados

4.3.1.2. Resultados Obtidos

4.3.2. Atividade 3 Parte II apenas a letra (d)

2° nível de análise

4.3.2.1. Resultado Esperado

1° nível de análise

4.3.2.2. Resultado obtido

3º nível de análise

4.3.3. Atividade 2 da Parte III

4.3.3.1. Resultado Esperado

4.3.3.2. Resultado Obtido

4.3.4. Comentários

4.4. O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DA DUPLA

4.4.1. Atividade 3 (Parte II)

4.4.1.1. Resultados Esperados

4.4.1.2. Resultados Obtidos

2º nível de análise

4.4.1.2.1. Atividade 3 Parte II item (a)

1° Nível de análise

4.4.1.2.2. Atividade 3 Parte II item (b)

4.4.1.2.3. Atividade 3 Parte II item (c)

4.4.1.2.4. Atividade 3 Parte II item (d)

4.4.2. Comentários

4.5. SÍNTESE

4.6. DISCUSSÃO

Figura 5: Esboço das Categorias e Subcategorias

5 – O ESTUDO DE CASO ALINE E TAMARA
5.1 – APRESENTAÇÃO
4.2 - AS IDEIAS DA DUPLA DE ALUNAS SOBRE PROVAS
E DEMONSTRAÇÕES MATEMATICAS 2° Nível
5.2.1 - As ideias a respeito do tema Provas e 1° nível de análise
Demonstrações matemáticas de análise
5.2.2 – Comentários
5.3 - OS TIPOS DE PROVAS MATEMÁTICAS
UTILIZADOS PELA DUPLA
5.3.1 - Atividade 1 (Parte II)
5.3.1.1. Resultados Esperados
5.3.1.2. Resultados Obtidos
5.4.3.2. Atividade 3 Parte II apenas a letra (d) 2° nível
5.3.2.1. Resultado Esperado 1° nível de análise
5.3.2.2. Resultado obtido de análise 3º nível
54.3.3. Atividade 2 da Parte III de análise
5.3.3.1. Resultado Esperado
5.3.3.2. Resultado Obtido
5.3.4. Comentários
5.4. O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO
PENSAMENTO GEOMÉTRICO DA DUPLA
5.4.1. Atividade 3 (Parte II)
5.4.1.1. Resultados Esperados
5.4.1.2. Resultados Obtidos 2º nível
5.4.1.2.1. Atividade 3 Parte II item (a) 1º Nível
5.4.1.2.2. Atividade 3 Parte II item (b) de análise
5.4.1.2.3. Atividade 3 Parte II item (c)
5.4.1.2.4. Atividade 3 Parte II item (d)
5.4.2. Comentários
5.5. SÍNTESE
5.6. DISCUSSÃO

As figuras sintetizam o que fizemos nos três níveis de análise para cada caso, em que o primeiro diz respeito às categorias e subcategorias; o segundo, os comentários fechando a seção; e o terceiro, a discussão que envolve todos os comentários do estudo de caso como um todo.

Tendo em vista estes aspectos, a análise dos dados esteve, a todo o momento, associado ao nosso objetivo de pesquisa, o qual é o centro da triangulação, que trata *de investigar o nível do pensamento geométrico e os tipos de provas matemáticas de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma Proposta Didática*.

CAPITULO 4: O ESTUDO DE CASO ALINE E TAMARA

4.1. APRESENTAÇÃO

Aline e Tamara são duas alunas de 15 anos de idade e cursam o 1º ano do Ensino Médio na Escola Estadual Carlota Barreira, no município de Areia, Paraíba. Tamara sempre estudou em escolas públicas e Aline estudou tanto em escola particular quanto em pública ambas neste município. As alunas residem na zona rural próximo à cidade de Areia.

A primeira seção deste capitulo retrata o **Vértice A do Triângulo,** primeira grande categoria. Nesta seção discutimos a Redação sobre o tema Provas e Demonstrações Matemáticas, aplicada no primeiro momento de nossa pesquisa com os alunos no dia 15 de junho de 2015, nela descrevemos as ideias da dupla em relação ao tema. Ao trabalharem a Redação, uma delas ressaltou a importância da Matemática em nossas vidas e em nosso cotidiano "Aliás, qualquer coisa da nossa vida envolve Matemática. Esse é o sentido de nós buscarmos provas e demonstrações..." (Apêndice 4, Redação de Aline). Tamara considerou a Matemática muito complicada " Matemática é uma matéria onde eu particularmente considero bastante complicada" (Apêndice 5, Redação de Tamara). Tanto Aline quanto Tamara durante a resolução da Proposta Didática demonstraram interesse em resolver todos os problemas propostos.

Dando continuidade, na segunda seção abordamos sobre o **Vértice B do Triângulo**. Analisamos os tipos de provas utilizadas pela dupla nas atividades da Proposta Didática aplicada no dia 17 de junho de 2015. As atividades selecionadas foram **Atividade 1 (Parte II)**, **Atividade 3 (Parte II) item (d)** e **Atividade 2 da (Parte III)** (Apêndice 2). E utilizamos as transcrições das gravações de áudio da dupla feitas durante a aplicação da Proposta Didática para auxiliar em nossa análise (Apêndice 3).

Na terceira seção foi discutido o **Vértice C do Triângulo**. Nesta seção tratamos do pensamento geométrico da dupla, ou seja, em qual nível do pensamento geométrico, segundo o Modelo de Van Hiele, a dupla pode ser classificada. Para tanto, escolhemos a **Atividade 3 (Parte III) da Proposta Didática** (Apêndice 2) e as transcrições da gravação do áudio da dupla feitos durante a aplicação das atividades como fontes de evidência do Estudo de Caso (Apêndice 3).

Ao final de cada seção fazemos nossos comentários a respeito dos resultados obtidos.

4.2. AS IDEIAS DA DUPLA DE ALUNAS SOBRE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Um aspecto importante que as pesquisas mostram quando são propostas atividades que requerem dos alunos do ensino básico que justifiquem suas respostas é a preferência por provas ingênuas, informais, com destaque para aquelas que recorrem a exemplos, aplicação de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos utilizados sem o devido entendimento conceitual (AGUILAR e NASSER, 2012).

No entanto, encontramos pesquisadores como Hanna (1990) do Canadá, e Ballacheff (1998) da França, que consideram a prova ingênua ou informal como uma explicação aceitável, que pode apresentar vários níveis de rigorosidade, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que expõe a prova (NASSER e TINOCO, 2003).

A dupla de alunas é composta por Aline e Tamara, do 1º ano B do Ensino Médio, turno tarde, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira, situada na cidade de Areia. As Redações das alunas selecionadas para a nossa análise do estudo de caso encontram-se no (Apêndice 4 e 5).

Deste modo, essa seção trata do **Vértice A do Triângulo,** dividido em duas subseções. A primeira subseção aborda as ideias prévias da dupla Aline e Tamara sobre o tema Provas e Demonstrações Matemáticas e a segunda subseção nossos comentários a respeito dos dados obtidos nas Redações.

4.2.1. As ideias a respeito do tema provas e demonstrações matemáticas

A aluna Aline em sua redação deixa evidente que as provas matemáticas para ela são justificativas para os cálculos utilizados na Matemática, “Na Matemática, são feitos cálculos que de uma forma ou outra se você não buscar uma justificativa ou prova, não será demonstrada automaticamente. Para tudo tem uma justificativa, uma razão. Não faz nenhum sentido você fazer um cálculo e não saber por que está sendo feito” (Apêndice 4, Redação de Aline). No discurso de Aline percebemos que a aluna entende a necessidade de uma explicação que comprove os seus resultados matemáticos obtidos, o qual, ela chama de justificativa. No entanto, seu discurso não menciona que essa explicação deve ser baseada em justificativas matemáticas já comprovadas pelos matemáticos, como por propriedades, definições ou teoremas matemáticos, dando a entender que a aluna sabe para que serve uma prova matemática, mas não como ela é construída.

A aluna Tamara relatou em sua redação que as provas matemáticas são justificativas para os resultados obtidos aos enunciados propostos pela Matemática, como as questões apresentadas pelo professor nas aulas de Matemática, "A matemática envolve certos tipos de assuntos onde não é muito ruim não, basta ler, interpretar para que possa buscar o resultado de uma questão, mas, não é só buscar o resultado, tem que provar, ou justificar o resultado que você conseguiu, para que tenhamos certeza se aquele resultado é de certeza correto" (Apêndice 5, Redação de Tamara).

Percebemos na Redação de Tamara que a prova matemática para ela tem a função de verificar o resultado obtido em uma questão proposta, ideia presente na literatura a respeito das provas e demonstrações matemáticas que relatam que os alunos preferem justificar seus resultados por meio de formulas, técnicas e procedimentos utilizados sem o devido entendimento conceitual (AGUILAR e NASSER, 2012).

4.2.2. Comentários

Diante das escritas da aluna Aline podemos entender que para ela a justificativa apresentada como explicação de um resultado matemático obtido é caracterizada como uma prova. Para Balacheff (1987), um discurso que visa tornar compreensível o caráter de verdade, mas não é aceito por uma comunidade em um determinado momento é chamado de explicação e não prova. No entanto, Balacheff (1998) afirma que dependendo da idade e do nível de escolaridade entende que seja aceitável uma explicação para um resultado matemático, visto que esse é o primeiro estágio que leva a construção de uma prova. Assim percebemos que Aline esteja neste primeiro estágio proposto por Balacheff (1987), o da explicação, faltando para ela fundamentar sua explicação por conceitos já consolidados pela Matemática como definições, propriedades e teoremas.

Para Ordem e Almouloud (2017), os sujeitos de sua pesquisa mostraram não saber os critérios de produção e ou avaliação de demonstrações válidas. Evidências empíricas ou exemplos foram considerados como demonstrações de propriedades gerais. Assim, os autores defendem que discussões com alunos sobre o valor de desenhos em demonstrações, ou estrutura de uma demonstração válida fazem-se necessárias.

A respeito da escrita de Tamara percebemos que seu entendimento sobre provas matemáticas é exclusivamente como forma de verificação de sua validade. Não conseguimos identificar quando ela afirma “provar ou justificar o resultado que você conseguiu” que esteja se referindo a uma explicação conceitual que comprove esse resultado, mas sim em técnicas ou procedimentos utilizados sem o devido entendimento conceitual (AGUILAR e NASSER, 2012).

No entanto, Trevisan e Freitas (2017) ao explorar validações em atividades trabalhadas em sala de aula em duas categorias de provas: empíricas e teóricas, observaram o emprego de apenas uma das categorias, a das provas empíricas. Isso mostra o quanto é importante valorizar validações empíricas com o objetivo de perceber que o processo de aprendizado de justificar seus resultados no educando está em formação.

Nasser (2017) sugere uma valorização da experimentação e argumentação informal, como etapas iniciais para o domínio do processo dedutivo

Portanto, as redações de Aline e Tamara revelaram que ambas têm em comum pensar que provar consiste em explicar seus resultados sem fundamentação matemática necessária, exigida pela comunidade matemática.

4.3. OS TIPOS DE PROVAS MATEMÁTICAS UTILIZADOS PELA DUPLA

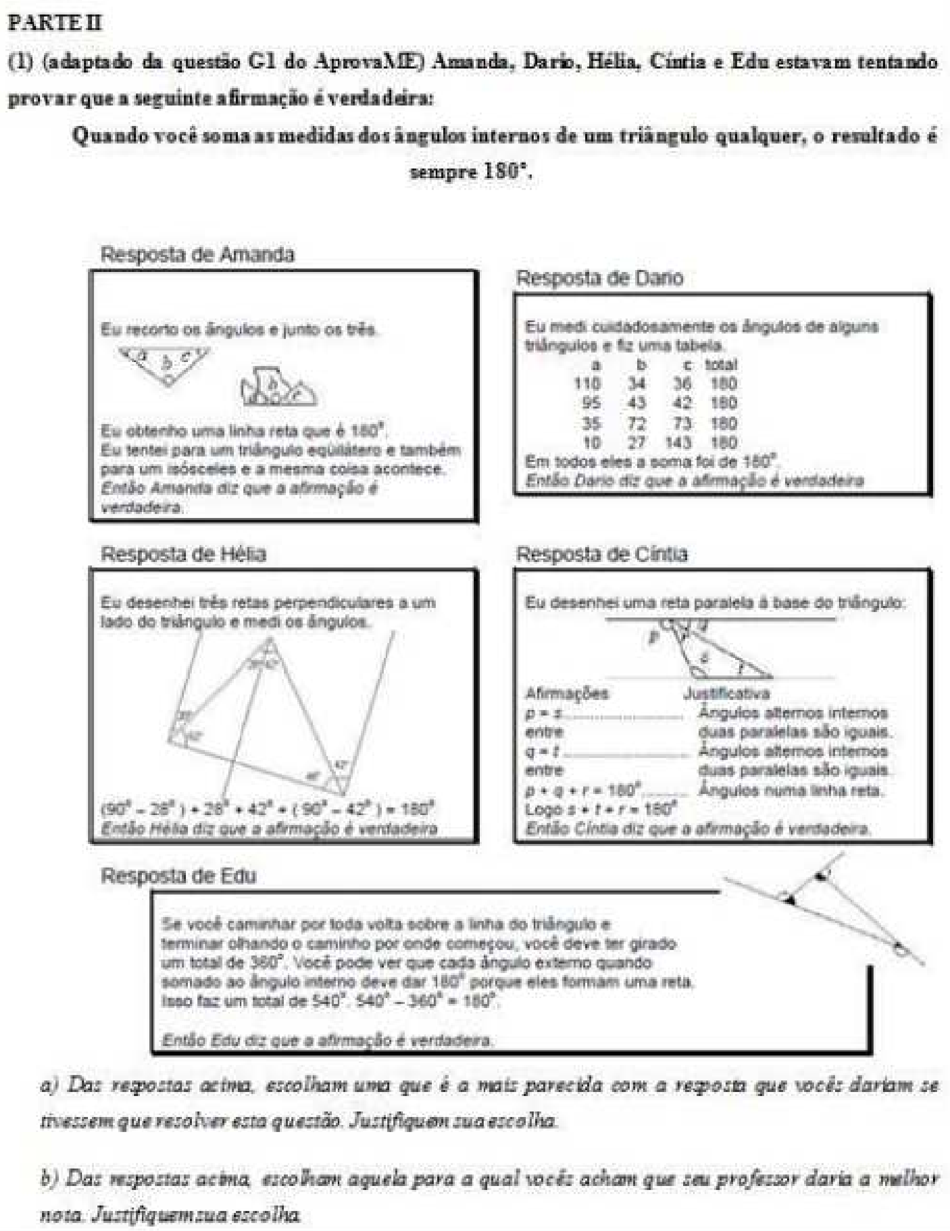
Para esta seção consideramos os tipos de provas propostos por Balacheff, (1988), ou seja, tomamos como base o *Empirismo Ingênuo*, *o Experimento Crucial*, *o Exemplo Genérico* e *o Experimento de Pensamento*. E os encontrados por Rezende e Nasser (1994) em sua investigação: *Justificativa Pragmática*, *Recorrência a uma Autoridade*, *Exemplo Crucial* e *Justificativa Gráfica*.

Diante disso, essa seção trata do **Vértice B do Triângulo**, e analisamos as atividades **Atividade 1 (Parte II)**, **Atividade 3 Parte II apenas a letra (d)** e a **Atividade 2 da Parte III** para investigar as respostas dadas pela dupla Aline e Tamara na Proposta Didática (Apêndice 2).

Essa Seção foi subdivida em quatro subseções. As três primeiras abordam as atividades da Proposta Didática escolhidas para nossa investigação, e a quarta subseção apresentamos nossos comentários a respeito das discussões feitas.

4.3.1. Atividade 1 (Parte II)

Figura 6: Atividade 1 (Parte II)



PARTE II

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

Afirmações	Justificativa
$p = s$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$	Ângulos numa linha reta.
Logo $s + t + r = 180°$	

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

Fonte: Proposta Didática

4.3.1.1. Resultados Esperados

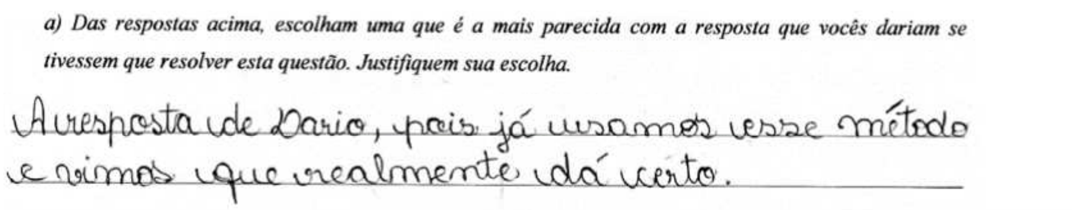
Com essa atividade pretendemos que os alunos selecionassem qual dos tipos de provas propostos por Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu, elas dariam caso tivessem que provar se a afirmação é verdadeira. Dessa forma:

- Prova de Amanda: resposta do tipo Empirismo Ingênuo (Prova Pragmática);

- Prova de Dario: resposta do tipo Empirismo Ingênuo (forma mais rudimentar de uma prova Pragmática);
- Prova de Hélia: resposta do tipo Experimento Crucial (Prova Pragmática)
- Prova de Cíntia: resposta do tipo Experimento de Pensamento (Prova Intelectual);
- Prova de Edu: resposta do tipo Exemplo Genérico (transita entre a Prova Pragmática e a Intelectual).

4.3.1.2. Resultados Obtidos:

Figura 7: Resposta do item *a* da Atividade 1 (Parte II)


a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

A resposta de Dario, pois já usamos esse método e vimos que realmente dá certo.

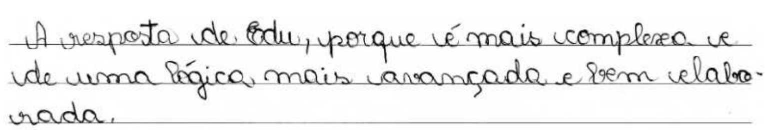
Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

A dupla Aline e Tamara respondeu de acordo com a resposta de Dario, o qual mediu os ângulos dos triângulos e percebeu ao somar essas medidas que sempre obteria o valor de 180°, como consequência concluiu que valia para qualquer triângulo. Desta maneira, o tipo de prova que a dupla escolheu foi o *Empirismo Ingênuo*, segundo Balacheff (1988).

Para Rezende e Nasser (1994), esta prova de Dario seria a *Justificativa Pragmática*, pois, a dupla atestou a veracidade da afirmativa com base em apenas alguns casos particulares. Diante do exposto, percebemos que a dupla escolheu um dos tipos de prova mais simples para justificar sua validade.

No item b, solicitamos: Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifique sua escolha.

Figura 8: Resposta do item b da Atividade 1 (Parte II)


A resposta de Edu, porque é mais complexa e de uma lógica mais avançada e bem elaborada.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

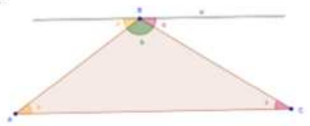
No entendimento da dupla a opção pela resposta de Edu seria a mais elaborada para um professor considerar correto, no entanto é um tipo de prova que transita entre a prova pragmática e a Intelectual, o *Exemplo Genérico,* segundo Balacheff (1988).

Rezende e Nasser (1994) classificaria a dupla no tipo de prova *Exemplo Crucial*, pois, a dupla escolheu uma justificativa por meio do raciocínio de um único exemplo e concluiu sua validade para o caso geral. Diante desta resposta, percebemos que a dupla não conseguiu identificar o tipo de prova intelectual que seria a opção que o professor certamente escolheria.

4.3.2. Atividade 3 Parte II item (d)

Figura 9: Atividade 3 (Parte II) resolvida pela dupla Aline e Tamara

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

____

____

____

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

____

____

____

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

( ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

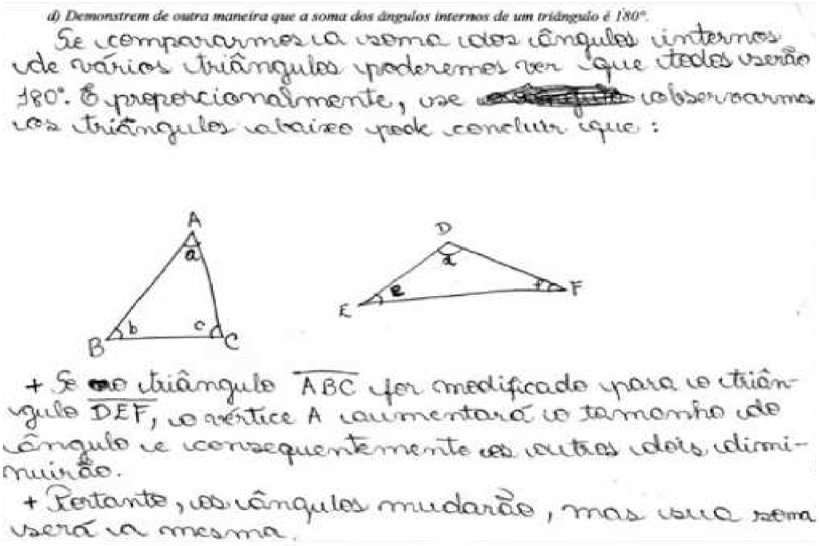
Fonte: Proposta Didática

4.3.2.1. Resultados Esperados

Que a dupla demonstre de uma maneira diferente o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Neste item os alunos estão livres para provar da maneira que pensarem correto.

4.3.2.2. Resultados Obtidos

Figura 10: Resposta do item d da Atividade 3 (Parte II)



d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Se compararmos a soma dos ângulos internos de vários triângulos poderemos ver que todos serão 180°. E proporcionalmente, se observarmos os triângulos abaixo pode concluir que:

\+ Se o triângulo $\overline{ABC}$ for modificado para o triângulo $\overline{DEF}$, o vértice A aumentará o tamanho do ângulo e consequentemente os outros dois diminuirão.

\+ Portanto, os ângulos mudarão, mas sua soma será a mesma.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

Percebemos pela resolução da dupla, que elas utilizaram o fato de sempre ao medir os ângulos de um triângulo e depois somar, obteremos 180º.

Parece-nos que as alunas imaginaram utilizar um aplicativo de Geometria Dinâmica ou o Geoplano, ou palitos de picolé, para modificar o triângulo, e consequentemente os seus ângulos internos.

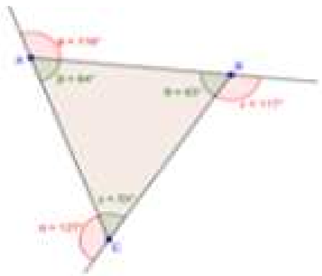
Essa explicação de que a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é 180º foi uma maneira de justificar, por meio da análise de alguns casos particulares que sua validade pode ser generalizada para todos os triângulos. Balacheff (1988) classifica essa maneira de justificar de *Empirismo Ingênuo*. Rezende e Nasser (1994) classificam como *Justificativa Pragmática* por afirmarem sua verdade pela verificação de alguns casos. Vale salientar que esse nível de justificativa dada pela dupla é considerado por Balacheff (1988) como o primeiro passo no processo de generalização.

4.3.3. Atividade 2 (Parte III)

Figura11: Atividade 2 (Parte III) resolvida pela dupla Aline e Tamara

(2) (nossa autoria) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha.

I ( ) Dado um triângulo qualquer ABC e sejam $\beta = 64°$, $\theta = 63°$ e $Y = 53°$, as medidas dos ângulos. Como descrito na figura abaixo:



Observem:

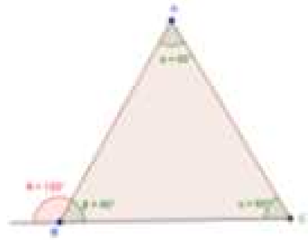
Se prolongarmos a semirreta $\overline{BC}$ formaremos o ângulo α, onde $\alpha = 127°$.

Se prolongarmos a semirreta $\overline{CA}$ formaremos o ângulo Φ, onde $\Phi = 116°$.

Se prolongarmos a semirreta $\overline{AB}$ formaremos o ângulo ε, onde $\varepsilon = 117°$.

Note que, $\alpha > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, assim como $\beta > A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, assim como também $\theta > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, como queríamos demonstrar.

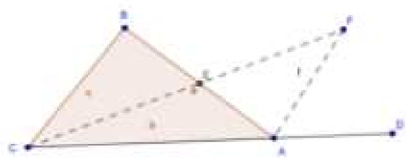
II ( ) Tomemos o triângulo equilátero ABC descrito na figura abaixo:



Como se trata de um triângulo equilátero, sabemos que o ângulo $B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C = 60°$. Ao prologarmos a semirreta $\overline{BC}$ formaremos o ângulo θ, que mede $120°$, além disso, note que, $\theta = 120° > 60° = B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C$. Logo fica demonstrado o teorema.

III ( ) Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overline{CA}$, marque um ponto D tal que o ponto A esteja entre os pontos C e D, como indicado na figura abaixo:

Queremos provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$. Vamos primeiro provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$. Para isto consideremos o ponto médio E do segmento $\overline{AB}$.



Na semirreta $\overline{CE}$ marque um ponto F tal que, o segmento $\overline{CE} = \overline{EF}$. Trace $\overline{AF}$. Compare os triângulos CEB e FAE. Como $\overline{BE} = \overline{AE}$ (já que E é ponto médio de AB), $\overline{CE} = \overline{EF}$ (por construção) e $B\hat{E}C = A\hat{E}F$ (por serem opostos pelo vértice), segue-se que o ângulo $B\hat{E}C = A\hat{E}F$. Consequentemente $\hat{B} = E\hat{A}F$, como a semirreta $\overline{AF}$ divide o ângulo $B\hat{A}D$, então $E\hat{A}F < B\hat{A}D$, portanto $\hat{B} < B\hat{A}D$. Analogamente provamos que $B\hat{A}D > C$. Assim fica demonstrado o teorema.

Justifiquem a escolha:

Fonte: Proposta Didática

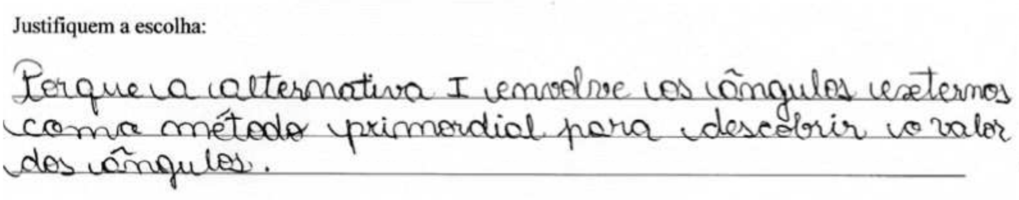
4.3.3.1. Resultados Esperados

Que os alunos consigam identificar que o item III é a demonstração correta do Teorema do Ângulo Externo.

4.3.3.2. Resultados Obtidos

A dupla marcou que a demonstração do Teorema do Ângulo Externo está no item I e apresentou como justificativa:

Figura 12: Resposta da Atividade 2 (Parte III)


Justifiquem a escolha:

Porque a alternativa I envolve os ângulos externos como método primordial para descobrir o valor dos ângulos.

Fonte Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

A justificativa da dupla levou em consideração possivelmente que a figura do item I era a única que apresentava ângulos externos nos três vértices do triângulo, ou seja, parece-nos que utilizando apenas da visualização das figuras concluíram que seria o item I que continha a demonstração correta do Teorema do Ângulo Externo. No entanto, a escolha se baseia na verificação de um caso particular de um triângulo com o intuito de fundamentar sua validade para o caso de qualquer triângulo. Esta escolha é classificada por Balacheff (1988) como *Experimento Crucial* e por Rezende e Nasser como *Exemplo Crucial.* Portanto, o item I é falso, e diante das atividades analisadas, entendemos que a dupla não tem compreensão devida do que seja uma dedução formal, e consequentemente uma demonstração.

4.3.4. Comentários

Na **Atividade 1 (Parte II)** a resposta dada pela dupla nos revelou que a opção pela prova de Dario permite-nos classificar a dupla no tipo de prova *Empirismo Ingênuo,* segundo Balacheff (1988), *e Prova Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994). No item (b) da mesma atividade, ao escolher a prova de Edu, a dupla optou pelo tipo de prova *Exemplo Genérico* segundo Balacheff (1988), que transita entre os tipos de provas pragmáticas e a intelectual, e o tipo de prova Exemplo Crucial, segundo Rezende e Nasser (1994). Percebemos com essa atividade que a dupla confundiu justificativas empíricas com raciocínios dedutivos, evidenciando o que pesquisas feitas a nível internacional na área da Educação Matemática revelaram, que os alunos justificam de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (CHAZAN, 1993; HEALY e HOYLES, 2000).

Na **Atividade 3 (Parte II) item d**, a justificativa apresentada pela dupla, tipo de prova exposto era novamente o *Empirismo Ingênuo,* segundo Balacheff (1988), mostra que a dupla tenta justificar a validade de suas respostas pela manipulação de alguns casos particulares e concluindo que vale para todos os outros. Este tipo de validação é considerado por Balacheff (1988) como o primeiro passo no processo de provar. É classificado como *Justificativa Pragmática*, segundo Rezende e Nasser (1994). Estudos mostram que a maior parte dos estudantes, em todos os países, desde os níveis mais básicos até o nível superior, usam estratégias demonstrativas empíricas (CHAZAN e LUEKE, 2009; HEALY e HOYLES, 2000; RECIO e GODINO, 2001; RODRIGUES, 2008). A utilização deste tipo de estratégias, e a quase ausência de esquemas demonstrativos dedutivos nos alunos de todos os níveis de ensino, em vários países, revelam que os vários sistemas educativos têm sido, até à data, incapazes de promover nos seus estudantes o desenvolvimento de argumentos dedutivos de maior sofisticação, correspondentes ao que seja desejável em educação matemática (RODRIGUES, 2013).

Na **Atividade 2 (Parte III)** a dupla Aline e Tamara são expostas a três possíveis demonstrações do Teorema do Ângulo Externo e optam pelo item I, conclusão essa que caracteriza a escolha pelos tipos de provas *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988), e *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994). Ambas evidenciam a ausência de deduções formais em suas justificativas, quesito esse imprescindível em uma demonstração matemática. Portanto, a dupla não acertou em sua escolha do item I como demonstração do Teorema do Ângulo Externo, mostrando que a dupla não tem no momento conhecimento para identificar uma dedução formal, estrutura presente na prova intelectual, segundo Balacheff (1988).

Diante do exposto, concluímos que a dupla Aline e Tamara escolheram como justificativas em nossas atividades investigadas, em que havia mais de uma opção para a escolha, com o objetivo de identificar a prova Intelectual, segundo Balacheff (1988), ou uma demonstração, os tipos de provas *Empirismo Ingênuo, Exemplo Genérico e*

Experimento Crucial, segundo Balacheff (1988), e a *Justificativa Pragmática* e o *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994). Na atividade que exigia a demonstração da afirmação, a dupla utilizou o tipo de prova *Empirismo Ingênuo,* segundo Balacheff (1988) e *Justificativa Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994).

Portanto, podemos concluir que a dupla utilizou de *Provas Pragmáticas,* segundo Balacheff (1988) para justificar seus resultados na Proposta Didática.

4.4. O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DA DUPLA

Para esta seção consideraremos os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, proposto por Van Hiele, ou seja, tomamos como base os níveis *Reconhecimento*, *Análise*, *Dedução Informal*, *Dedução* e *Rigor*.

Diante disso, essa seção trata do **Vértice C do Triângulo**, e analisamos a **Atividade 3 (Parte II)** para investigar as respostas dadas em cada letra pela dupla Aline e Tamara na Proposta Didática (Apêndice 2).

Essa seção foi subdivida em duas subseções. Na primeira subseção abordamos os itens da atividade da Proposta Didática, escolhida para nossa investigação, e na segunda subseção apresentamos nossos comentários a respeito das análises feitas.

4.4.1. Atividade 3 (Parte II) (Ver Figura 9)

4.4.1.1. Resultados Esperados

Que a dupla de alunas consiga provar ou demonstrar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo:

- Item a: Que a dupla consiga nomear os elementos geométricos propostos
- Item b: Que a dupla consiga identificar alguma propriedade presente no triângulo proposto.
- Item c: Que a dupla consiga colocar na sequência correta as frases a fim de obter a demonstração do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.

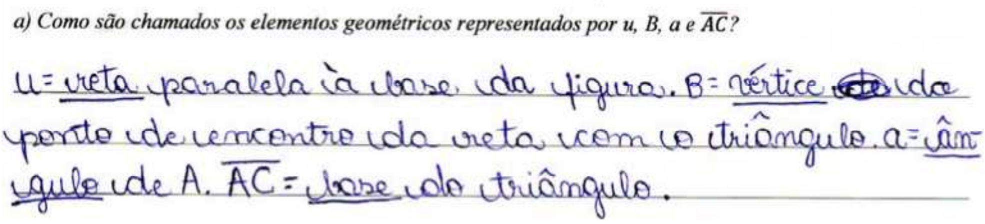
- Que d: dupla demonstre de uma maneira diferente o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Neste item os alunos estão livres para provar da maneira que pensarem correto.

4.4.1.2. Resultados Obtidos

4.4.1.2.1. Atividade 3 Parte II item (a)

Resultado Obtido

Figura 13: Resposta do item *a* da Atividade 3 (Parte II)



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

u = reta paralela à base da figura. B = vértice do ponto de encontro da reta com o triângulo. a = ângulo de A. $\overline{AC}$ = base do triângulo.

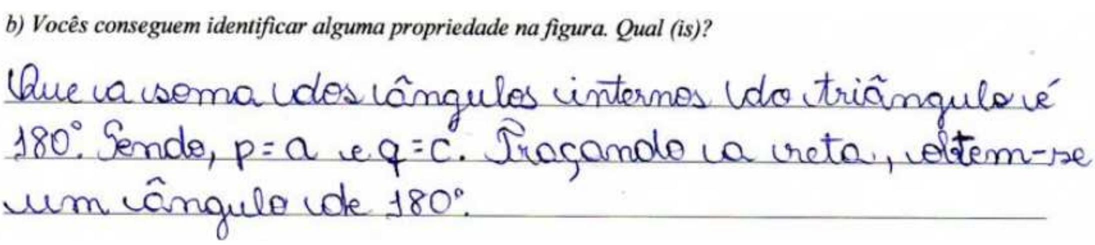
Fonte Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

A dupla Aline e Tamara, pelo exposto acima, conseguiu nomear corretamente todos os elementos geométricos propostos no item. Assim, ao conseguir reconhecer visualmente elementos geométricos sem a necessidade de explicar suas propriedades ou definições Van Hiele, classificamos a dupla no Nível 1: *Reconhecimento*.

4.4.1.2.2. Atividade 3 Parte II item (b)

Resultado Obtido

Figura 14: Resposta do item *b* da Atividade 3 (Parte II)



b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

Que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°. Sendo, p = a e q = c. Traçando a reta, obtem-se um ângulo de 180°.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

Neste item, Aline e Tamara conseguiram identificar uma propriedade do triângulo, a soma dos ângulos interno de um triângulo mede 180°. O leitor atento pode se perguntar, mas o enunciado já induz ao aluno responder isso? Essa Proposta Didática foi aplicada para oito duplas e um trio de alunos e apenas essa dupla conseguiu responder a este item, mostrando que a dupla antes de tudo leu e entendeu o enunciado da atividade. A leitura e interpretação do enunciado é considerado como primeiro passo para o êxito na resolução de qualquer atividade. No entanto, o diálogo transcrito da dupla evidência que Aline também não percebeu essa dica do enunciado, mas lembrou de ter visto algo a respeito desta propriedade (Apêndice 3):

Tempo Parte 2	Personagem	Fala
00:23:10	Aline	Leu o item (b)
00:23:15	Aline	Que propriedade?
00:23:30	Aline	Ah! é aquela lá que passa a reta e dá 180º e p é igual a e q é igual a c
00:23:55	Aline	Que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, sendo p é igual a e q é igual a c
00:24:40	Aline	Traçando a reta, obtém-se um ângulo de 180º

Fonte: Transcrição do Dialogo da Dupla Aline e Tamara

Quando Aline enfatiza "*Ah! é aquela lá que passa a reta e dá 180º e p é igual a e q é igual a c"* parece-nos claro que o enunciado não foi decisivo em sua resposta, mas sim no fato dessa propriedade estar relacionada com algo no triângulo, o qual vai de encontro com o propósito da atividade. Outro ponto que podemos analisar a respeito deste resultado proposto pela dupla é que ao tentar justificar a escolha desta propriedade a dupla deixa lacunas em suas respostas que comprometem sua explicação. No entanto, para Van Hiele, no Nível 2 o aluno apenas precisa identificar a existência da relação da propriedade com a figura, não sendo necessário para esse nível a sua explicação formal.

Diante disso, a dupla compreendeu que essa demonstração trabalhada na atividade é uma propriedade do triângulo. Assim, por conseguirem identificar, ou lembrar essa propriedade na figura, a dupla está no Nível 2 do Modelo de Van Hiele: *Análise*.

4.4.1.2.3. Atividade 3 Parte II item (c)

Resultado Obtido

Figura 15: Resposta do item *c* da Atividade 3 (Parte II)

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

(4) $p + b + q = 180°$

(1) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

(3) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

(2) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

(5) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

A dupla conseguiu obter uma sequência correta que demonstra o teorema proposto, pois elas realizaram uma ordenação lógica das frases que demonstra o teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. O diálogo da dupla apresentado na transcrição mostra o empenho das duas alunas em ordenar corretamente a sequência proposta (Apêndice 3):

Tempo:Parte 2	Personagem	Fala
00:25:20	Aline	Leu o item (c)
00:25:30	Aline	A conclusão é o último
00:25:35	Aline	O primeiro é esse aqui: Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c
00:25:49	Aline	Aí o dois é pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado AC obtendo p e q
00:26:14	Tamara	Esse aqui é o quatro?
00:26:18	Aline	E esse outro aqui é o cinco

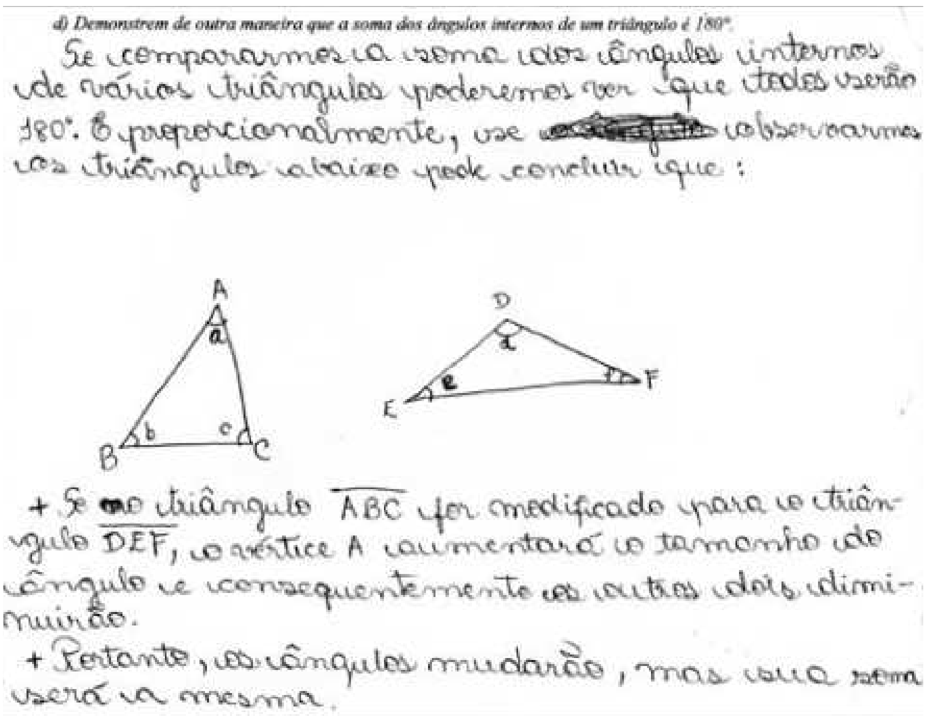
00:26:27	Aline	Quem é o 3 e quem é o 4?
00:26:33	Aline	p igual a e q igual a c, pois, são ângulos alternos internos, acho que esse é o quatro
00:26:41	Tamara	Acho que esse também é o quatro
00:26:41	Aline	Primeiro tem descobrir quem é p e q
00:26:49	Aline	E depois é que diz essa conclusão
00:26:51	Aline	O que falta é o 3

Essa habilidade das alunas realizarem a ordenação lógica das frases por meio de curtas sequências de dedução é classificada por Van Hiele Nível 3: *Dedução Informal*

4.4.1.2.4. Atividade 3 Parte II item (d)

Resultado Obtido

Figura 16: Resposta do item d da Atividade 3 (Parte II)



Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Aline e Tamara

Percebemos que a dupla ao demonstrar que a Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo é 180° mostra que há um padrão ao medir os ângulos de um triângulo e depois somá-los. Utilizaram figuras para ilustrar essa situação e concluíram que vale para todos os triângulos. Essa dedução feita pela dupla aponta o Nível 3 de Van Hiele: *Dedução Informal*, pois a dupla utilizou a verificação de alguns casos particulares para validar sua dedução.

4.4.2. Comentários

O item (a) evidenciou que a dupla conseguiu utilizar apenas da observação para nomear os elementos geométricos propostos, sendo assim, a dupla sem dúvida pode ser classificada no Nível 1: *Reconhecimento*, segundo o Modelo de Van Hiele.

No item (b) percebemos que a dupla fez uma boa leitura do enunciado, quesito este fundamental para provar uma afirmação, pois as hipóteses dos enunciados são usadas para auxiliar na prova. Diante disso, a dupla conseguiu responder ao item proposto, percebendo que a demonstração do teorema também é uma propriedade do triângulo, percepção essa não vista pelas outras duplas participantes da pesquisa. Sendo assim a dupla pode ser classificada no Nível 2 no Modelo de Van Hiele: *Análise*.

Verificamos no item (c) que a dupla conseguiu colocar numa sequência lógica as frases propostas na atividade, obtendo assim uma ordem lógica dedutiva que demonstra o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Como essa atividade não exigiu da dupla a análise de sequências mais longas de enunciados, o entendimento ou significância da dedução ou o papel dos axiomas, teoremas e provas, podemos afirmar que a dupla pode ser classificada no Nível 3 no Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*.

Por fim, no item (d) a dupla tentou demonstrar de uma outra maneira daquela proposta na atividade que a Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo mede 180°. Pelo analisado na questão, percebemos que a dupla não utilizou sequências de enunciados, seguindo regras determinadas deduzindo-as durante sua escrita. Sendo assim, não podemos afirmar que elas utilizaram de uma demonstração para validar sua justificativa para a atividade. Também percebemos que elas não provaram, pois não utilizaram nenhum fato já conhecido e validado na matemática durante sua tentativa de justificar suas escritas. No entanto, percebemos que a dupla tentou justificar utilizando da verificação de alguns casos particulares e do uso de figuras para validar suas explicações, apesar de ser uma tentativa plausível para um aluno do de Ensino Fundamental. Entendemos que para um aluno do Ensino Médio deveria ter um nível de maturidade matemática maior. Por fim, pela resolução apresentada pela dupla ao item proposto podemos classificá-la no Nível 3 no Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*, por percebemos que elas não utilizaram nenhum fato matemático, ou generalização que fundamentassem suas explicações na tentativa de demonstrar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.

4.5. SÍNTESE

Aline e Tamara que sempre estudaram em escolas do município de Areia, revelaram que a Matemática faz parte de nosso cotidiano e é uma disciplina muito complicada. As duas alunas apresentaram grande interesse na resolução da Proposta Didática, visto que quase todas as atividades propostas foram resolvidas.

Na primeira seção, ao tratarmos do **Vértice A do Triângulo**, a respeito das ideias das alunas sobre o tema provas e demonstrações matemáticas percebemos que Aline apresentou no seu discurso que as justificativas para os cálculos são importantes, no entanto não menciona que essas justificativas devem ser baseadas em definições, propriedades, teoremas entre outros conceitos matemáticos, aceitos pela comunidade dos matemáticos que comprovem a validade de suas justificativas. No discurso de Tamara entendemos que provar para ela é verificar se o resultado de uma questão matemática é válido, ou seja, justificar suas respostas por meio de procedimentos utilizados sem o devido conhecimento conceitual.

Na segunda seção discutimos sobre o **Vértice B do Triângulo** com o objetivo de identificar quais os tipos de provas matemáticas utilizados por Aline e Tamara na Proposta Didática. Para isso, analisamos as atividades **Atividade I (Parte II), Atividade 3 (Parte II) item (d)** e a **Atividade 2 da Parte III** (Apêndice 2).

Na **Atividade I (Parte II)** Aline e Tamara responderam para o item (a) que a prova de Dario seria a resposta mais parecida com a resposta delas, se tivessem que resolver a questão. Assim, a dupla estaria usando o tipo de prova *Empirismo Ingênuo,* segundo Balacheff (1988), *e Prova Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994). Para o item (b) a dupla optou pela prova de Edu como resposta para qual o seu professor daria a melhor nota por pensarem ser a mais avançada e bem elaborada. No entanto, essa opção, segundo Balacheff (1988) seria uma prova do tipo *Exemplo Genérico,* e para Rezende e Nasser (1994) seria *Exemplo Crucial.*

Na **Atividade 3 (Parte II) item (d)** Aline e Tamara apresentaram como demonstração para o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo uma explicação, classificada por Balacheff (1988) como uma prova do tipo *Empirismo Ingênuo,* e segundo Rezende e Nasser (1994) como *Justificativa Pragmática,* visto que elas concluíram sua prova por meio da análise de alguns casos particulares.

Na **Atividade 2 da (Parte III)** Aline e Tamara foram colocadas diante de três possíveis demonstrações do Teorema do Ângulo Externo, optando como resposta ao item I, o qual é uma opção errada, pois o item escolhido retrata um tipo de prova *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988), e *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994). Essa atividade tinha como objetivo identificar se as alunas conseguiriam perceber uma demonstração matemática e serem classificadas no tipo de prova intelectual, segundo Balacheff (1988). No entanto, elas não apresentaram entendimento em reconhecer uma dedução formal, e por isso não conseguiram êxito nessa atividade.

Diante do exposto, a dupla Aline e Tamara escolheu como justificativas em nossas atividades investigadas, em que havia mais de uma opção para a escolha com o objetivo de identificar a prova Intelectual, segundo Balacheff (1988), ou uma demonstração, os tipos de provas *Empirismo Ingênuo, Exemplo Genérico e Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988), e a *Justificativa Pragmática* e o *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994). Na atividade que exigia a demonstração da afirmação, a dupla utilizou o tipo de prova *Empirismo Ingênuo,* segundo Balacheff (1988), e *Justificativa Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994).

Diante disso, a dupla utilizou tipos de provas pragmáticas, segundo Balacheff (1988,) como a melhor opção para provar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.

Na terceira seção tratamos do **Vértice C do Triângulo** com o objetivo de classificar a dupla Aline e Tamara em um dos níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o Modelo de Van Hiele. Para tanto, escolhemos a **Atividade 3 (Parte II)** da Proposta Didática (Apêndice 2).

No item (a) desta atividade a dupla conseguiu nomear os elementos geométricos propostos, podendo ser classificada no Nível 1: *Reconhecimento,* do Modelo de Van Hiele.

No item (b) Aline e Tamara conseguiram identificar uma propriedade do triângulo. Por isso, puderam ser classificadas no Nível 2: *Análise,* segundo o Modelo de Van Hiele

No item (c) Aline e Tamara apresentaram uma sequência lógica que demonstra o Teorema da Soma dos Ângulos Interno de um Triângulo. Diante disso, pôde ser classificada no Nível 3 do Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*.

No item (d) a dupla Aline e Tamara tentou demonstrar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo por meio da análise de alguns casos particulares e concluindo que esse Teorema vale para todos os triângulos. Sendo assim, a dupla ao utilizar uma justificativa informal pôde ser classificada no Nível 3 do Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*.

Percebemos ao final de nossa análise que a dupla Aline e Tamara teve grande vontade em obter soluções corretas em nossa Proposta Didática por meio das justificativas nas atividades propostas. Entretanto, não apresentou conhecimento sobre provas intelectuais ou deduções formais, limitando sua classificação ao terceiro nível do Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*.

4.6 DISCUSSÃO

Esta pesquisa objetivou investigar o nível do pensamento geométrico e os tipos de provas matemáticas de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma Proposta Didática. Para isso, fizemos um trabalho em uma escola pública da cidade de Areia com 19 alunos, os quais se dividiram em oito duplas e um trio. Porém, analisamos o trabalho desenvolvido por duas duplas de alunas, uma vez que foram as mais produtivas na tentativa de responder a todas as atividades.

Esta seção apresenta a discussão sobre os comentários apresentados nas seções do estudo de caso de Aline e Tamara, que constituem a triangulação dos dados baseada em três vértices, A, B e C. A seção, *as ideias da dupla de alunas sobre provas e demonsttrações matemáticas*, Vértice A , objetivou traçar o perfil da dupla de alunas em relação ao tema Provas e Demonstrações Matemáticas. Deixamos esses alunos livres para relatar o que pensavam e entendiam desse tema.

A seção, *Os tipos de provas matemáticas utilizados pela dupla*, Vértice B, objetivou analisar os tipos de provas utilizados pela dupla na Proposta Didática. Para essa análise nos ancoramos nos tipos de provas proposto por Balacheff (1988) e Rezende e Nasser (1994).

Na última secão, *O nível de desenvolvimento do pensamento geométrico da dupla*, Vértice C, objetivou analisar o pensamento geométrico da dupla na Proposta

Didática. Para essa análise, nos ancoramos nos níveis do pensamento geométrico proposto por Van Hiele.

Diante dos dados apresentados nas três seções, podemos afirmar que o trabalho com provas e demonstrações deve ser realizado desde muito cedo, por um curriculo que valorize a demonstração em sala de aula com intervenção adequada por professores que ajudem os alunos a desenvolver seu raciocínio dedutivo sempre indagando o porquê das respotas dada pelo aluno, levando-os a argumentar uns com os outros. Nesse sentido, a devolução aos alunos da responsabilidade pela validação das afirmações matemáticas deverá ser uma preocupação do professor.

Os dados apresentados na primeira seção apontam que a dupla de alunas não trabalha com o tema prova e demonstração matemática em sala de aula, visto suas limitações ao descrever sobre o tema em suas redações. Percebemos que ambas, em suas escritas, pensam que provar consiste em explicar seus resultados, sem a fundamentação matemática necessária exigida pela comunidade dos matemáticos puros.

Na segunda seção buscamos analisar os tipos de provas utilizadas pela dupla para resolver as atividades na Proposta Didática. Os resultados mostraram que a dupla utilizou das provas pragmáticas para justificar as suas ideias a respeito das atividades propostas, as quais se enquadram em três tipos de provas, segundo Balacheff (1988) *o Empirismo Ingênuo*, o qual essas alunas utilizaram casos particulares para conjecturar uma afirmação. Esse tipo de prova esteve presente nas Atividades 1 (Parte II) item (a) e 3 (Parte II) item (d). O outro tipo de prova, o *Exemplo Gerérico,* definido por Balacheff (1988), esteve presente na Atividade 1 (Parte II) item (b) e foi escolhido pela dupla, entre outras, por pensarem ser um tipo de prova intelectual. E por fim, o tipo de prova *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988), também escolhido dentre outros por pensarem ser demonstração do Teorema do Ângulo Externo na Atividade 2 (Parte III). Diante do exposto, a dupla produziu, ao ser exposta a atividades, que exigiam uma demonstração para a afirmação a prova do tipo *Empirismo Ingênuo,* segundo Balacheff (1988), e quando foi pedido a escolha de uma demonstração, dentre varias opções, foi indicado pela dupla o tipos de provas *Empirismo Ingênuo*, *Exemplo Genérico e Experimento Crucial* segundo Balacheff (1988).

Com relação aos tipos de provas proposto por Rezede e Nasser (1994), a dupla utilizou dois tipos de provas em suas justificativas na Proposta Didática, *Justificativa Pragmática* nas Atividades 1 (Parte II) item (a) e 3 (Parte II) item (d). E o *Exemplo Crucial* na Atividade 1 (Parte II) item (b) e Atividade 2 (Parte III).

Diante das justificativas dadas pela dupla em nossas atividades, encontramos que o tipo de prova *Empirimo Ingênguo,* segundo Balacheff (1988), e tipo de prova *Justificativa Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994), foram as utilizadas pela dupla ao ser exigido uma demonstração para a afirmação proposta em nossa atividade presente na Proposta Didática. Ambos, o Empirismo Ingênuo e a Justificativa Pragmática, são classificações atribuídas a justificativas que tomam alguns casos particulares como suficientes para validarem o caso geral. Quando foi solicitado a escolha de uma demonstração, dentre algumas opções, os tipos de provas utilizados pela dupla foram o *Empirismo Ingênulo*, *Experimento Crucial e Exemplo Genérico,* segundo Balacheff (1988), e *Justificativa Pragmática* e *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994). Ambos são classificações atribuídas a justificativas que tomam caso (s) particular (es) como suficiente para validar o caso geral.

Esses nossos resultados retratam o que outras pesquisas já mencionaram, ou seja, os estudos apresentados mostram que a maior parte dos estudantes, em todos os países, desde os níveis mais básicos até o nível superior, usam estratégias demonstrativas empíricas (CHAZAN e LUEKE, 2009; HEALY e HOYLES, 2000; RECIO e GODINO, 2001; RODRIGUES, 2008).

Vale salientar que esse tipo de prova dada pela dupla é considerado por Balacheff (1988) como o primeiro passo no processo de generalização. Por isso é importante, principalmente na Educação Básica, valorizar as justificativas dadas pelos alunos, quando esses tentam validar suas ideias a respeito de uma afirmação. Assim, comungamos do mesmo pensamento de Aguilar e Nasser (2014), ao afirmarem que o professor deve compreender e aceitar diversos níveis de argumentação que os alunos possam a vir a apresentar para provar um dado resultado, como também compreender a relação dos elementos congintivos.

Em vista disso, entendemos ser importante o trabalho com as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula com o aluno desde os anos iniciais com conteúdos e metodologias próprias à sua faixa etária, construindo no aluno o hábito de explicar seus resultados matemáticos por meio hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras. Assim conseguiremos formá-lo um cidadão crítico e capaz de defender suas ideias, não apenas matemáticamente como também socialmente.

Na terceira seção buscamos analisar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico da dupla. Quanto ao nível do pensamento geométrico pudemos classificar a dupla no Nível 3 de Van Hiele: *Dedução Informal,* pois a dupla apresentou conhecimento sobre reconhecimento visual dos elementos da figura, identificação de propriedade na figura e dedução informal em suas justificativas, elementos esses suficientes para classificar a dupla neste nível de Van Hiele. A atividade utilizada para essa análise foi a Atividade 3 (Parte II). Devido a dupla não ter conseguido apresentar justificativas em nossa Proposta Didática que pudessem ser caracterizadas como dedução formal ou demonstração limitou-as nesta classificação, segundo Van Hiele.

Portanto, chegamos à conclusão que a dupla, diante dos tipos de provas encontrados na sua Proposta Didática, apresentou justificativas informais, não apresentando conhecimento matemático necessário para utilizar definições, conceitos, teoremas, axiomas, entre outros, para fundamentar suas justificativas. Com relação ao nível do pensamento geometrico, podemos classificar a dupla no Nível 3 de Van Hiele: Dedução Informal, o qual mostra uma correspondência com os tipos de provas encontrados na Proposta Didática. Assim, podemos afirmar que a dupla utiliza de meios empiricos para fundamentar suas justificativas.

CAPÍTULO 5: O ESTUDO DE CASO FLÁVIA E VALÉRIA

5.1. APRESENTAÇÃO

Flávia e Valéria são duas alunas de 15 anos de idade e cursam o 1º Ano do Ensino Médio na Escola Estadual Carlota Barreira, no município de Areia. Flávia e Valéria sempre estudaram em escolas públicas no município de Areia-PB e residem na zona rural próximo ao município.

Na primeira seção tratamos do **Vértice A do Triângulo**. Nesta seção discutimos a Redação sobre o tema Provas e Demonstrações Matemáticas, aplicada no primeiro momento de nossa pesquisa com os alunos no dia 15 de junho de 2015. Nela, descrevemos as ideias da dupla, em relação ao tema. Ao analisarmos a Redação, uma delas afirmou que, para entendermos melhor o tema Provas e Demonstrações Matemáticas, é fundamental a utilização desse tema pelo professor nas aulas de Matemática. " A respeito desse tema eu só preciso de um bom professor, para me entender ou explicar minha dúvida" (Apêndice 6, Redação de Valéria).

Ao mesmo tempo, Flávia relata que o tema é interessante e espera entender melhor o tema quando for trabalhado pelo professor em sala de aula. "A respeito do tema eu acho legal. Quando temos uma dúvida devemos perguntar para saber bem o assunto, e assim podermos provar o resultado que achamos e dizer que está correto" (Apêndice 7, Redação de Flávia). Percebemos que a dupla não se empenhou na resolução de todas as atividades da Proposta Didática, pois, apresentou vários itens com a resposta *não sei* e outras com respostas curtas comprometendo sua análise. Mesmo com essas limitações no desenvolvimento das atividades a dupla apresentou tudo que aprendeu no Ensino Fundamental.

Em seguida, na segunda seção, abordamos sobre o **Vértice B do Triângulo**. Analisamos os tipos de provas utilizadas pela dupla nas atividades da Proposta Didática aplicada no dia 17 de junho de 2015. As atividades selecionadas foram **Atividade 1 (Parte II)**, **Atividade 3 (Parte II) apenas a letra (d)** e **Atividade 2 (Parte III)** (Apêndice 2). E utilizamos a gravação de vídeo e áudio durante a aplicação da Proposta Didática para auxiliar em nossa análise.

Na terceira seção discutimos **Vértice C do Triângulo**. Nesta seção tratamos do pensamento geométrico da dupla, ou seja, em qual nível do pensamento geométrico, segundo o Modelo de Van Hiele, a dupla pode ser classificada. Para tanto, escolhemos a **Atividade 3 (Parte III)** da Proposta Didática e a gravação de vídeo e áudio feita durante a aplicação das atividades como fontes de evidência do Estudo de Caso.

Ao final de cada seção fazemos nossos comentários a respeito dos resultados obtidos.

5.2. AS IDEIAS DA DUPLA DE ALUNAS SOBRE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

A dupla de alunas é composta por Flávia e Valéria, do 1º Ano B do Ensino Médio, turno tarde, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira, situada na cidade de Areia. As Redações das alunas selecionados para nossa análise do estudo de caso encontram-se nos Apêndices 4,5,6 e 7.

Assim, essa seção trata do **Vértice A do Triângulo,** dividido em duas subseções. A primeira subseção aborda as ideias prévias da dupla Flávia e Valéria sobre o tema Provas e Demonstrações Matemáticas e a segunda subseção nossos comentários a respeito dos dados obtidos nas Redações.

5.2.1. As ideias a respeito do tema Provas e Demonstrações Matemáticas

A aluna Flávia em sua redação menciona que as provas matemáticas é um tema “legal” e utilizado para provar nossos resultados nas atividades matemáticas propostas. “A respeito do tema eu acho legal. Quando temos uma dúvida devemos perguntar para saber bem o assunto e, assim, podermos provar o resultado que achamos e dizer que está correto. Devemos sempre tirar nossas dúvidas com os professores, sempre especular sobre o assunto dado ao professor, para não ter dúvidas sobre o determinado assunto e assim se dar bem no futuro” (Apêndice 7, Redação de Flávia).

No discurso de Flávia ela relata da importância em aprender o assunto com o objetivo de justificar adequadamente um resultado, contribuindo para sua validação por qualquer leitor de sua prova. E da importância que tem o professor em explicar bem o assunto em sala de aula, com o objetivo de contribuir para o desenvolvimento no aluno do hábito de justificar, adequadamente, seus resultados matemáticos. Por isso, Nasser (2017) afirma que o professor deve incentivar a habilidade de justificar do aluno para atingir o processo dedutivo. Essa habilidade deve ser incentivada, solicitando que o aluno justifique sempre suas resoluções de problemas ou explique por que escolheu uma determinada estratégia. O professor deve levar o aluno a raciocinar sempre, em todas as tarefas desenvolvidas.

A aluna Valéria afirma em sua redação que provas e demonstrações matemáticas são justificativas que aprendemos com as explicações dadas pelo professor de Matemática. "Provas e Demonstrações Matemáticas eu acredito que com provas e demonstrações você pode justificar, pedindo explicações ao professor e esperando que eles possam tirar nossas dúvidas, que eles na sua profissão podem nos mostrar que algo existe ou comprovar o que é, quem desenvolveu, porque existe ou alguma coisa parecida" (Redação, Valéria).

Vemos no discurso de Valéria que as provas e demonstrações matemáticas são justificativas que comprovam a validade de ideias matemáticas. E que aprendemos a justificar nossas respostas corretamente ao vermos nossos professores fazer o mesmo em sala de aula ao explicar os assuntos matemáticos, por meios de provas, demonstrações e suas aplicações.

Essa deficiência no ensino do tema provas e demonstrações matemáticas, nas aulas de Matemática na Educação Básica, é mencionada em algumas pesquisas como a de Harel e Sowder (2007), em que estudos desenvolvidos no âmbito do nível curricular de ação indicam que grande parte dos professores não confere grande importância à demonstração, não a abordando nas suas aulas. E, para muitos professores, os esquemas demonstrativos empíricos são os mais dominantes para suportar resultados e afirmações matemáticas.

5.2.2. Comentários

A aluna Flávia apresentou, em sua Redação, que as provas e demonstrações matemáticas são utilizadas para justificar resultados, porém, não mencionou como devem ser estruturadas essas justificativas para tornarem válidas na Matemática. No entanto, Flávia aponta um mediador importante no processo de desenvolvimento de justificativas matemáticas válidas, o professor. Esse é responsável em suas aulas de apresentar provas, demonstrações, aplicações do assunto abordado em sala de aula e cobrar dos alunos em atividades e avaliações. Ordem e Almouloud (2017), em sua pesquisa, concluíram que os sujeitos mostraram não saber os critérios de produção e/ou avaliação de demonstrações válidas. Evidências empíricas ou exemplos foram considerados como demonstrações de propriedades gerais. Assim, os autores defendem que discussões com alunos sobre o valor de desenhos em demonstrações, ou estrutura de uma demonstração válida fazem-se necessárias.

Valéria relatou na sua Redação que as provas e demonstrações matemáticas são utilizadas para justificar algo. Esse algo ficou vago, mas ela deveria estar referindo-se a um resultado ou resposta apresentada em alguma atividade matemática proposta.

Valéria afirma, explicitamente, que seu desempenho em justificar seus resultados matemáticos depende da atuação do professor em sala de aula abordando os assuntos, por meio da formalidade que a Matemática exige, visando com isso, motivar e, ao mesmo tempo, ensinar os alunos a buscarem justificativas que expliquem suas conclusões e afirmações nas atividades propostas.

Na busca do ensino–aprendizagem das provas e demonstrações matemáticas encontramos pesquisas como a de Pais (2006), que reforçam a ideia de diversificar os tipos de argumentação. Além de alguns raciocínios demonstrativos, o aluno deve ser levado a expressar seu pensamento lógico de diferentes maneiras. Verificação de casos particulares, realização de desenhos, redação de textos, debates, comprovações experimentais são maneiras diferentes como a categoria da argumentação pode ser trabalhada no contexto escolar com o objetivo de desenvolver no aluno o hábito de justificar seus resultados obtidos em atividades propostas.

Percebemos nas Redações de Flávia e Valéria, que ambas afirmam que as provas e demonstrações matemáticas são justificativas dadas aos resultados matemáticos e que o professor de Matemática tem papel fundamental no processo de desenvolvimento das justificativas dadas aos alunos quando em sala de aula trabalha os assuntos com um olhar de formalidade dos conteúdos, influenciando os alunos a fazerem o mesmo com suas respostas nas atividades propostas.

5.3. OS TIPOS DE PROVAS MATEMÁTICAS UTILIZADOS PELA DUPLA

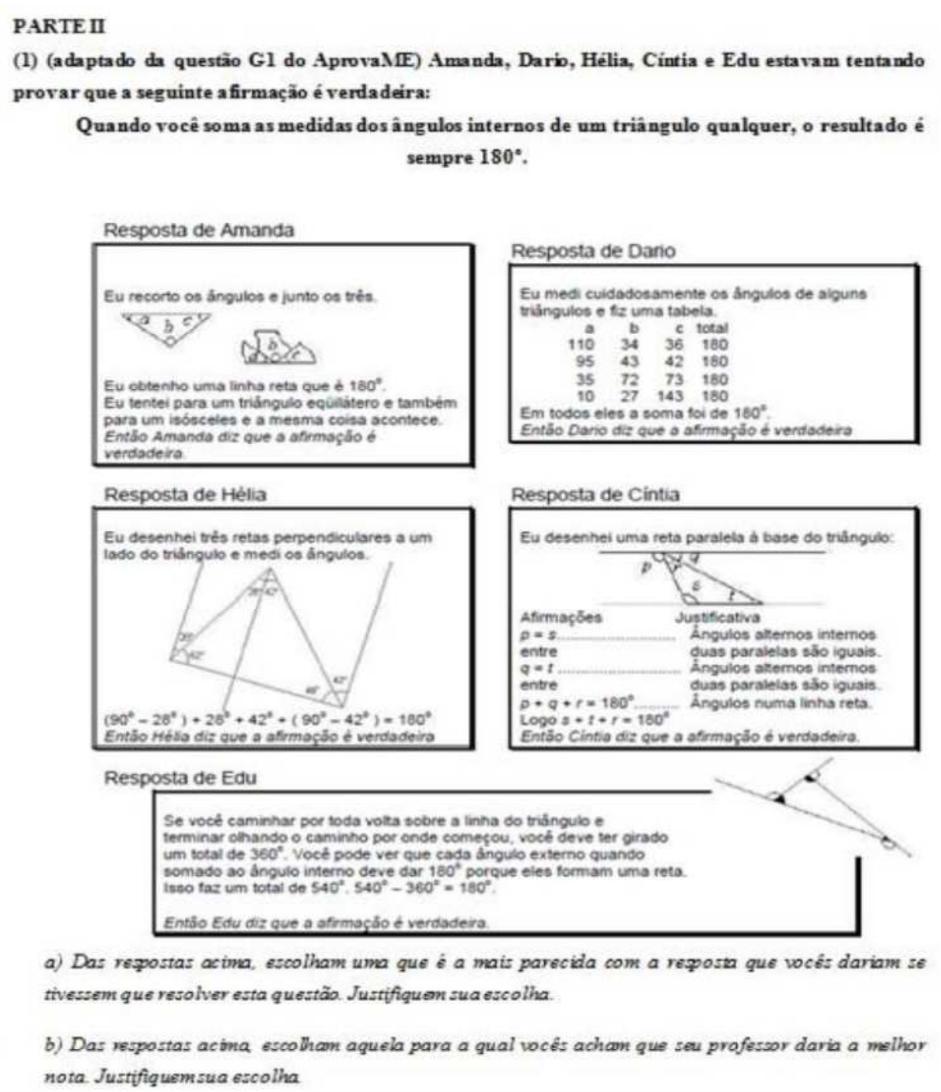
Para esta seção consideramos os tipos de provas propostos por Balacheff (1988), ou seja, tomamos como base o *Empirismo Ingênuo*, o *Experimento Crucial*, o *Exemplo Genérico* e o *Experimento de Pensamento*. E os encontrados por Rezende e Nasser (1994) em sua investigação: *Justificativa Pragmática*, *Recorrência a uma Autoridade*, *Exemplo Crucial* e *Justificativa Gráfica*.

Neste caso, essa seção trata do **Vértice B do Triângulo**, e analisamos as atividades **Atividade 1 (Parte II)**, **Atividade 3 Parte II item (d)** e a **Atividade 2 Parte III** para investigar as respostas dadas pela dupla Flávia e Valéria na Proposta Didática (Apêndice 2).

Essa seção foi subdividida em quatro subseções. As três primeiras abordam as atividades da Proposta Didática escolhidas para nossa investigação e a quarta subseção apresentamos nossos comentários a respeito das discussões feitas.

5.3.1. Atividade 1 (Parte II)

Figura 17: Atividade 1 (Parte II) resolvida pela dupla de Valéria e Flávia



PARTE II

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

Afirmações	Justificativa
$p = s$ .... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$q = t$ .... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180°$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

Fonte: Proposta Didática

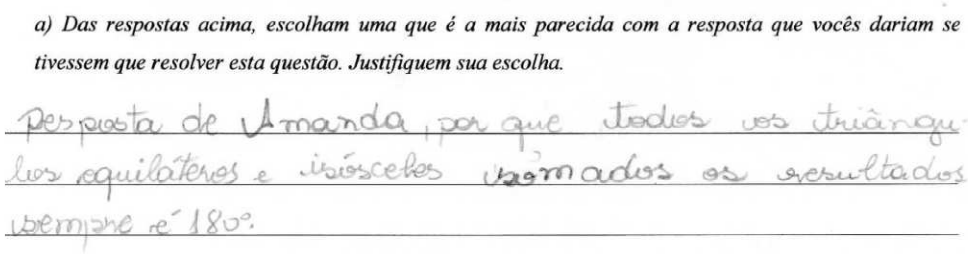
5.3.1.1. Resultados Esperados

Com essa atividade pretendemos que os alunos escolhessem um dos tipos de provas propostos por Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu, caso tivessem que provar se a afirmação é verdadeira. Dessa forma:

- Prova de Amanda: resposta do tipo Empirismo Ingênuo (Prova Pragmática);
- Prova de Dario: resposta do tipo Empirismo Ingênuo (forma mais rudimentar de uma prova Pragmática);
- Prova de Hélia: resposta do tipo Experimento Crucial (Prova Pragmática)
- Prova de Cíntia: resposta do tipo Experimento de Pensamento (Prova Intelectual);
- Prova de Edu: resposta do tipo Exemplo Genérico (transita entre a Prova Pragmática e a Intelectual).

5.3.1.2. Resultados Obtidos

Figura 18: Resposta do item a da Atividade (Parte II)



a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

Resposta de Amanda, por que todos os triângu-
los equiláteros e isósceles somados os resultados
sempre é 180°.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Flávia e Valéria

A resposta escolhida por Flávia e Valéria mostra que, a partir de dois exemplos específicos, como o caso do triângulo equilátero e o do isósceles, ao saberem que os dois tem soma dos ângulos internos medindo 180°, esse fato pode ser generalizado para todos os triângulos. Para Balacheff (1988) esse tipo de explicação é classificado como uma prova do tipo *Empirismo Ingênuo.*

Rezende e Nasser (1994) classifica esta resposta dada por Flávia e Valéria como *Justificativa Pragmática*, por escolherem dois casos particulares ao invés de desenvolver um raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral.

No item b, solicitamos: Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifique sua escolha.

Fonte 19: Resposta do item b da Atividade 1 (Parte II)

Resposta de Hélia, porque está mais elaborada.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Flávia e Valéria

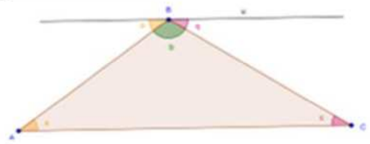
A dupla Flávia e Valéria escolheram a resposta de Hélia como aquela, na qual, o professor daria a melhor nota por pensarem ser o tipo de prova intelectual. No entanto a resposta de Hélia é segundo Balacheff (1988) a prova do tipo *Experimento Crucial*, por apresentar medidas obtidas por construção dos ângulos do triângulo, ou seja, de apenas um caso particular e concluir que vale para qualquer triângulo.

Para Rezende e Nasser (1994) a resposta de Hélia é classificada como *Exemplo Crucial*, por atestar sua validade com base em apenas um caso particular.

5.3.2. Atividade 3 Parte II apenas a letra (d)

Figura 20: Atividade 3 Parte (Parte II) resolvida pela dupla Valéria e Flávia

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

( ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

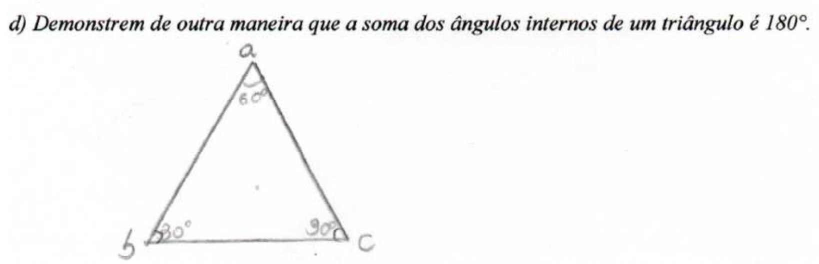
Fonte: Proposta Didática

5.3.2.1. Resultados Esperados

Que a dupla demonstre de uma maneira diferente o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Neste item os alunos estão livres para provar da maneira que pensarem correto.

5.3.2.2. Resultados Obtidos

Figura 21: Resposta do item d da Atividade 3 (Parte II)



Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Flávia e Valéria

Nesta atividade Flávia e Valéria utilizaram como demonstração o desenho de um triângulo com a soma das medidas dos ângulos internos no valor de 180°. Essa explicação usa o exemplo de um único triângulo cuja soma dos ângulos internos mede 180° para justificar a validade de que sempre a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180°. Para Balacheff (1988) esse é um tipo de prova chamado *Experimento Crucial*.

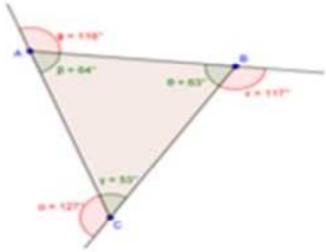
Como Flávia e Valéria usaram um desenho como demonstração para esse teorema, com a ausência de qualquer explicação escrita, podemos classificar esse tipo de prova como *Justificativa Gráfica*, segundo Rezende e Nasser (1994).

5.3.3. Atividade 2 (Parte III)

Figura 22: Atividade 2 (Parte III) resolvida pela dupla Valéria e Flávia

(2) (nossa autoria) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha.

I ( ) Dado um triângulo qualquer ABC e sejam $\beta = 64°$, $\theta = 63°$ e $\Upsilon = 53°$,as medidas dos ângulos. Como descrito na figura abaixo:



Observem:

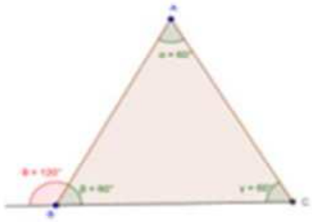
Se prolongarmos a semirreta $\overline{BC}$ formaremos o ângulo α, onde $\alpha = 127°$.

Se prolongarmos a semirreta $\overline{CA}$ formaremos o ângulo Φ, onde $\Phi = 116°$.

Se prolongarmos a semirreta $\overline{AB}$ formaremos o ângulo ε, onde $\varepsilon = 117°$.

Note que, $\alpha > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, assim como $\beta > A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, assim como também $\theta > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, como queríamos demonstrar.

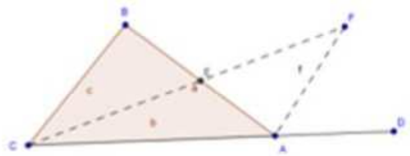
II ( ) Tomemos o triângulo equilátero ABC descrito na figura abaixo:



Como se trata de um triângulo equilátero, sabemos que o ângulo $B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C = 60°$. Ao prologarmos a semirreta $\overline{BC}$ formaremos o ângulo θ, que mede 120°, além disso, note que, $\theta = 120° > 60° = B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C$. Logo fica demonstrado o teorema.

III ( ) Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overline{CA}$, marque um ponto D tal que o ponto A esteja entre os pontos C e D, como indicado na figura abaixo:

Queremos provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$. Vamos primeiro provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$. Para isto consideremos o ponto médio E do segmento $\overline{AB}$.



Na semirreta $\overline{CE}$ marque um ponto F tal que, o segmento $\overline{CE} = \overline{EF}$. Trace $\overline{AF}$. Compare os triângulos CEB e FAE. Como $\overline{BE} = \overline{AE}$ (já que E é ponto médio de AB), $\overline{CE} = \overline{EF}$ (por construção) e $B\hat{E}C = A\hat{E}F$ (por serem opostos pelo vértice), segue-se que o ângulo $B\hat{E}C = A\hat{E}F$. Consequentemente $\hat{B} = E\hat{A}F$, como a semirreta $\overline{AF}$ divide o ângulo $B\hat{A}D$, então $E\hat{A}F < B\hat{A}D$, portanto $\hat{B} < B\hat{A}D$. Analogamente provamos que $B\hat{A}D > \hat{C}$. Assim fica demonstrado o teorema.

Justifiquem a escolha:

Fonte: Proposta Didática

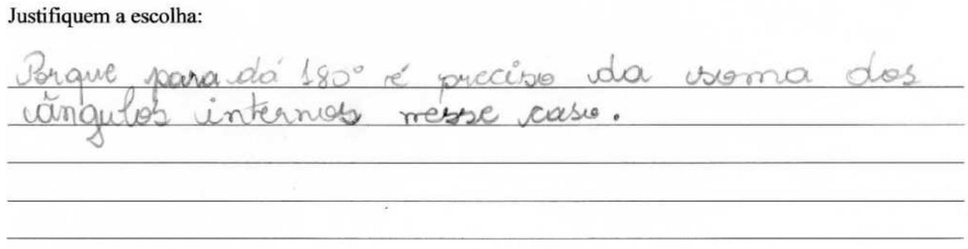
5.3.3.1. Resultados Esperados

Que os alunos consigam identificar que o item III é a demonstração correta do Teorema do Ângulo Externo.

5.3.3.2. Resultados Obtidos

Flávia e Valéria marcaram que a demonstração do Teorema do Ângulo Externo está no item I e apresentou como justificativa:

Figura 23: Resposta da Atividade 2 (Parte III)


Justifiquem a escolha:

Porque para dá 180° é preciso da soma dos ângulos internos nesse caso.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Flávia e Valéria

Pela justificativa dada por Flávia e Valéria percebemos algumas semelhanças na ideia da demonstração de Hélia, a qual, elas apresentaram como prova para o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo na **Atividade 1 (Parte II)**. Naquela prova foi desenhado uma reta perpendicular passando por cada um dos vértices do triângulo e encontrado os ângulos complementares dos vértices da base, essa ideia parece-nos semelhante ao caso do item I, pois os ângulos externos são obtidos por meios dos suplementares dos ângulos internos. Com isso, Flávia e Valéria pensaram que o teorema do item I seria o correto por lembrar o daquela atividade, pois, neste caso os ângulos externos são obtidos pelo suplementar de cada ângulo interno e também por ser o único triângulo que possui as medidas dos ângulos internos e externos entre os itens propostos. No entanto, ao escolher esse item a dupla Flávia e Valéria utilizaram o tipo de prova *Experimento Crucial*, segundo Balacheff (1988) e *Exemplo Crucial* segundo Rezende e Nasser (1994) por considerar apenas um caso particular como evidência para o caso geral. Portanto, a escolha feita pela dupla evidenciou a falta de compreensão em identificar uma demonstração ou prova intelectual segundo Balacheff (1988).

5.3.4. Comentários

Na **Atividade 1 (Parte II)** a resposta de Flávia e Valéria nos revelou que a opção pela prova de Amanda permite-nos identificar a dupla no tipo de prova *Empirismo Ingênuo,* segundo Balacheff (1988), e *Justificativa Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994). No item (b) da mesma atividade, ao escolher a prova de Hélia, a dupla optou pelo tipo de prova *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988), e *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994).

Na **Atividade 3 (Parte II) item d**, a justificativa apresentada pela dupla, o tipo de prova exposto era novamente o *Experimento Crucial*, evidenciando que Flávia e Valéria validam suas justificativas por meio da manipulação de um único caso particular e concluem que vale para todos os outros triângulos. E a *Justificativa Gráfica*, segundo Rezende e Nasser (1994).

Na **Atividade 2 (Parte III)** a dupla Flávia e Valéria diante de três possíveis demonstrações do Teorema do Ângulo Externo, opta pela demonstração errada deste teorema evidenciando que a dupla não possui conhecimento para identificar uma dedução formal, estrutura presente na prova intelectual, segundo Balacheff (1988). Por isso, para essa atividade, a dupla utilizou o tipo de prova *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988) e *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994).

Diante disso, identificamos que a dupla Flávia e Valéria usam em suas justificativas, que exigiam a demonstração da afirmação, o tipo de prova *Experimento Crucial*, segundo Balacheff (1988) e *Justificativa Gráfica,* segundo Rezende e Nasser (1994). Nas atividades em que foi solicitado a escolha pelo item que representava uma prova intelectual ou demonstração a dupla optou pelos itens que representavam os tipos de provas *Empirismo Ingênuo* e *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988) e *Exemplo Crucial* e *Justificativa Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994).

Esses nossos resultados refletem o que pesquisas na área da Educação Matemática em nível internacional já revelaram, os alunos confundem justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e justificam de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (CHAZAN, 1993; HEALY e HOYLES, 2000).

Apesar de encontrarmos algo em comum nas dificuldades apresentadas ao ensino e à aprendizagem de prova matemática em nível internacional, o panorama brasileiro necessita de um levantamento de concepções sobre provas matemáticas de alunos e professores da Educação Básica, imprescindível para proporcionar novas propostas e abordagens de ensino com características à realidade brasileira (HEALY, 2007).

5.4. O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DA DUPLA

Nesta seção, consideramos os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, proposto por Van Hiele, ou seja, tomamos como base os níveis *Reconhecimento*, *Análise*, *Dedução Informal*, *Dedução* e *Rigor*.

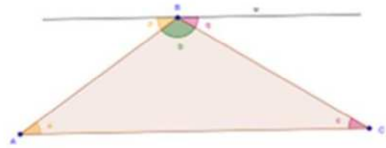
Assim sendo, essa seção trata do **Vértice C do triângulo**, e analisamos a **Atividade 3 (Parte II)** para investigar as respostas dadas em cada letra pela dupla Flávia e Valéria na Proposta Didática.

Essa seção foi subdividida em duas subseções. Na primeira subseção abordamos os itens das atividades da Proposta Didática, escolhida para nossa investigação, e na segunda subseção apresentamos nossos comentários a respeito das discussões feitas.

5.4.1. Atividade 3 (Parte II)

Figura 24: Atividade 3 (Parte II) resolvida pela dupla Valéria e Flávia

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

____

____

____

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

____

____

____

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

(|) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Fonte: Proposta Didática

5.4.1.1. Resultados Esperados

Que a dupla de alunos consiga provar ou demonstrar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo:

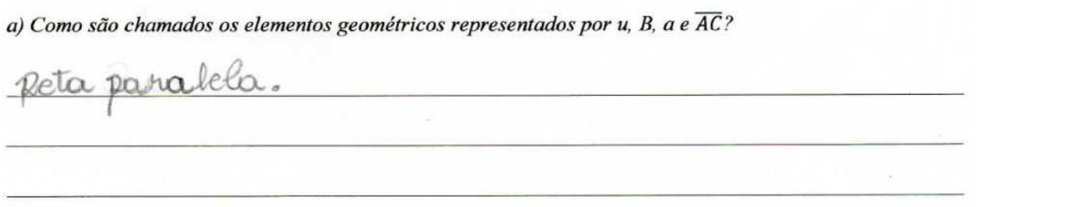
- Item a: Que a dupla consiga nomear os elementos geométricos propostos
- Item b: Que a dupla consiga identificar alguma propriedade presente no triângulo proposto.
- Item c: Que a dupla consiga colocar na sequência correta as frases a fim de obter a demonstração do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.
- Que a dupla demonstre de uma maneira diferente o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Neste item os alunos estão livres para provar da maneira que pensarem correto.

5.4.1.2. Resultados Obtidos

5.4.1.2.1. Atividade 3 Parte II item (a)

Resultado Obtido

Figura 25: Resposta do item a da Atividade 3 (Parte II)


a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

Reta paralela.

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Flávia e Valéria

A dupla Flávia e Valéria, pelo exposta acima, não conseguiu nomear nenhum elemento geométrico corretamente. Assim por não conseguir reconhecer visualmente elementos geométricos sem a necessidade de explicar suas propriedades ou definições a dupla não pode ser classificada no Nível 1 segundo o Modelo de Van Hiele: *Reconhecimento*.

5.4.1.2.2. Atividade 3 (Parte II) item (b)

Resultado Obtido

Figura 26: Resposta do item b da Atividade 3 (Parte II) *b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?*

Não

Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Flávia e Valéria

Neste item, Flávia e Valéria não conseguiram identificar nenhuma propriedade do triângulo. O leitor deve ter percebido que no enunciado da atividade é mencionado que a demonstração de que “ em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°” é uma propriedade. No entanto por algum motivo a dupla não conseguiu perceber essa dica explicita no enunciado. Nesta pesquisa essa atividade foi proposta para oito duplas e um trio de alunos, totalizando 19 alunos e apenas uma dupla conseguiu identificar essa propriedade nesta atividade, fato esse que nos deixa algumas indagações: A dupla respondeu com seriedade as atividades propostas? A dupla concentrou a devida atenção a leitura dos enunciados das atividades propostas? A dupla sabe extrair os dados de um problema em uma atividade? Diante da resposta dada pela dupla não podemos classifica-las no Nível 2 do Modelo de Van Hiele: *Análise*.

5.4.1.2.3. Atividade 3 (Parte II) item (c)

Resultado Obtido

Figura 27: Resposta do item c da Atividade 3 (Parte II)

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

(4) $p + b + q = 180°$

(1) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

(3) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

(2) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

(5) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

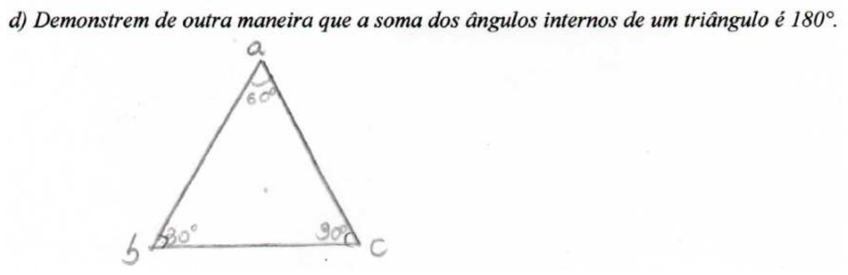
Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Flávia e Valéria

Flávia e Valéria conseguiu obter uma sequência correta que demonstra o teorema proposto, pois elas obtiveram uma ordenação lógica das frases que demonstra o teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Essa habilidade é classificada por Van Hiele no Nível 3: *Dedução Informal*.

5.4.1.2.4. Atividade 3 (Parte II) item (d)

Resultado Obtido

Figura 28: Resposta do item d da Atividade 3 (Parte II)



Fonte: Proposta Didática resolvida pela dupla Flávia e Valéria

Percebemos que a dupla ao demonstrar que a Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo é 180°, utilizou uma figura para mostrar que esse resultado proposto pelo item (d) é verdadeiro. Por utilizar um caso particular por meio de uma figura ao invés de um raciocínio que ilustrasse uma ordenação lógica das propriedades da figura por meio de curtas sequências de dedução não podemos incluir a dupla no Nível 3 de Van Hiele: *Dedução Informal*.

5.4.2. Comentários

O item (a) mostrou que Flávia e Valéria não conseguiram identificar pela observação os elementos geométricos propostos na atividade, dessa forma, a dupla não pôde ser classificada no Nível 1 do modelo de Van Hiele: *Reconhecimento*.

No item (b) entendemos que a dupla não fez uma boa leitura do enunciado, condição essa fundamental para provar um teorema, visto que, as hipóteses e a tese devem ser identificadas no teorema antes de iniciar sua demonstração. Desta maneira, a dupla não conseguiu responder a este item, diante disso, não podemos classifica-la no Nível 2 do modelo de Van Hiele: *Análise*.

Agora no item (c) Flávia e Valéria acertaram a sequência lógica das frases propostas na atividade conseguindo uma ordem lógica dedutiva que demonstra o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Por não exigir da dupla nesta atividade uma análise de sequências mais longas de enunciados, o entendimento ou significância da dedução ou o papel dos axiomas, teoremas e provas, podemos afirmar que a dupla pode ser classificada no Nível 3 no modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*.

Por fim, no item (d) a dupla apresentou apenas uma figura como demonstração do teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Sabemos que desenho ou figura não demonstra teorema, mas auxilia na sua demonstração. À vista disso, a dupla não apresentou conhecimento em sequências de enunciados seguindo regras determinadas deduzindo-as durante sua escrita, caracterizando na falta da dedução. Por isso, Valéria e Flávia não puderam ser classificadas no Nível 3*: Dedução informal*, no Nível 4: *Dedução* e consequentemente no Nível 5: *Rigor*, no modelo de Van Hiele.

Os resultados mostraram o baixo nível de conhecimento aprendido pela dupla a respeito dos Teoremas da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e Teorema do Ângulo Externo no Ensino Fundamental. Encontramos na literatura alguns motivos para esse baixo rendimento dos alunos diante de assuntos de Geometria Plana.

Dentre vários fatores destacamos nesta pesquisa o fato de quando se é ensinado Geometria, inúmeros professores de Matemática, livros didáticos e sistemas de ensino em seus processos de ensino preferem levar os alunos a aprender um determinado conteúdo matemático por meio da memorização das definições, propriedades e teoremas sem o devido esclarecimento conceitual, experiência essa que compromete a análise da matemática como área investigativa eliminando assim a chance do aluno de pensar matematicamente (ALMOULOUD, 2000). Essa prática é fortemente alvo de críticas dos educadores matemáticos e até por matemáticos como Freudenthal (1973).

5.5. SÍNTESE

Flávia e Valéria são duas alunas de 15 anos de idade e cursam o 1º Ano do Ensino Médio na Escola Estadual Carlota Barreira, no município de Areia. Flávia e Valéria sempre estudaram em escolas públicas no município de Areia onde residem. A dupla não se empenhou na resolução de todas as atividades da Proposta Didática, pois apresentou vários itens com a resposta *não sei* e outras com respostas curtas comprometendo sua correta análise. Mesmo com essas limitações no desenvolvimento das atividades a dupla apresentou tudo que aprendeu no Ensino Fundamental.

Na Primeira seção, ao tratarmos do **Vértice A do Triângulo**, com relação às ideias das alunas sobre o tema Provas e Demonstrações Matemáticas encontramos no discurso de Flávia que o tema é interessante e com o auxílio do professor de Matemática pretende tirar suas dúvidas a respeito do tema com o objetivo de provar seus resultados da maneira correta. Na Redação de Valéria percebemos que o tema proposto para ela visa justificar resultados matemáticos e espera do professor a utilização, em sala de aula, dessa temática, contribuindo para sua compreensão e correta aplicação em suas justificativas nas atividades propostas.

Na segunda Seção, discutimos sobre o **Vértice B do Triângulo** com o objetivo de identificar quais os tipos de provas matemáticas utilizados por Flávia e Valéria, na Proposta Didática. Para isso, analisamos as atividades **Atividade I (Parte II)**, **Atividade 3 (Parte II) item (d)** e a **Atividade 2 da (Parte III)**.

Na **Atividade 1 (Parte II)** Flávia e Valéria responderam para o item (a) que a prova de Amada seria a resposta mais parecida com a resposta delas se tivessem que resolver esta questão. Desta forma, a dupla estaria usando o tipo de prova *Empirismo Ingênuo,* segundo Balacheff (1988) e *Justificativa Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994). Para o item (b) a dupla optou pela prova de Hélia como resposta para qual o seu professor daria a melhor nota por pensarem ser o tipo de prova intelectual, segundo Balacheff (1988). No entanto, essa escolha, segundo Balacheff (1988), seria uma prova do tipo *Experimento Crucial* e, segundo Rezende e Nasser (1994), seria *Exemplo Crucial*. Tendo em vista issso, a dupla utilizou tipos de provas pragmáticas como melhor opção para provar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.

Na **Atividade 3 (Parte II) item (d)** Flávia e Valéria apresentaram, como demonstração para o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, um desenho particular de um triângulo, cuja soma dos ângulos internos mede 180º, para Balacheff (1988) essa justificativa é classificada como *Experimento Crucial* e de acordo com Rezende e Nasser (1994) seria *Justificativa Gráfica*.

Na **Atividade 2 (Parte III)** Flávia e Valéria foram expostas a três possíveis demonstrações do Teorema do Ângulo Externo, escolhendo como resposta ao item I, o qual, é uma opção errada. Essa atividade tinha como objetivo identificar se as alunas conseguiriam perceber uma demonstração matemática e, assim, conseguirem classificação no tipo de prova intelectual segundo Balacheff (1988). No entanto, por elas não apresentarem entendimento em reconhecer uma dedução formal não conseguiram êxito nessa atividade. Ao escolher esse item a dupla Flávia e Valéria utilizaram o tipo de prova *Experimento Crucial*, segundo Balacheff (1988) e *Exemplo*

Crucial, segundo Rezende e Nasser (1994), por considerar apenas a figura como evidência de sua validade ignorando o conteúdo da demonstração.

Diante disso, identificamos que a dupla Flávia e Valéria usou, em suas justificativas que exigiam a demonstração da afirmação, o tipo de prova *Experimento Crucial*, segundo Balacheff (1988) e *Justificativa Gráfica,* segundo Rezende e Nasser (1994). Nas atividades em que foi solicitado a escolha pelo item que representava uma prova intelectual ou demonstração a dupla optou pelos itens que representavam os tipos de provas *Empirismo Ingênuo* e *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988) e *Exemplo Crucial* e *Justificativa Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994).

Na terceira seção tratamos do **Vértice C do Triângulo**, com o objetivo de classificar a dupla Flávia e Valéria, em um dos níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o modelo de Van Hiele. Para tanto, escolhemos a **Atividade 3 (Parte II)** da Proposta Didática.

No item (a) desta atividade a dupla não conseguiu nomear os elementos geométricos propostos, não podendo ser classificada no Nível 1 do modelo de Van Hiele: *Reconhecimento*.

No item (b) Flávia e Valéria não conseguiram identificar nenhuma propriedade no triângulo. Por isso, não pudemos classifica-las no Nível 2 do Modelo de Van Hiele: *Análise*.

No item (c) Flávia e Valéria apresentaram uma sequência lógica, que demonstra o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Neste caso, podemos classificá-las no Nível 3 do Modelo de Van Hiele: *Dedução Informal*.

No item (d) a dupla Flávia e Valéria na tentativa de demonstrar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, por meio de um caso particular, utilizou apenas uma figura como justificativa. Essa maneira da dupla justificar com a ausência de sequências de enunciados, seguindo regras e suas deduções, exclui a dupla da classificação no Nível 3: *Dedução Informal*, Nível 4: *Dedução* e Nível 5: *Rigor* do modelo de Van Hiele.

Por fim, percebemos pela nossa análise que a dupla Flávia e Valéria não apresentou grande interesse ou conhecimento em responder nossa Proposta Didática pela ausência ou reduzidas justificativas dadas a nossas atividades propostas.

Com relação ao Nível de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico segundo o Modelo de Van Hiele, a dupla apresentou êxito apenas em uma atividade que as classificaria no Nível 3: Dedução Informal. No entanto, Usiskin (1982) ao resumir quatro importantes características do Modelo de Van Hiele, relata que em uma delas o aluno não pode estar no Nível 3, sem ter tido êxito no Nível 2, da mesma forma, está no Nível 2 sem ter tido êxito no Nível 1, em outras palavras, um aluno não pode está no Nível n sem ter passado pelo nível $n-1$.

Portanto, a dupla Flávia e Valéria, por não apresentar êxito nas atividades características dos Níveis 1 e 2 do Modelo de Van Hiele, em nossa Proposta Didática, não pôde ser classificada no Nível 3, apenas por terem conseguido resolver uma atividade característica deste Nível. Por fim, entendemos que a dupla Flávia e Valéria não pôde ser classificada em nenhum nível do Modelo de Van Hiele.

5.6 DISCUSSÃO

Esta pesquisa objetivou investigar o nível do pensamento geométrico e os tipos de provas matemáticas de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir da aplicação de uma Proposta Didática. Para isso, fizemos um trabalho em uma Escola Pública da cidade de Areia com 19 alunos do 1º Ano do Ensino Médio, os quais se dividiram em oito duplas e um trio, porém, analisamos o trabalho desenvolvido por duas duplas de alunas, uma vez que foram os mais produtivos na tentativa de responder a todas as atividades.

Esta seção apresenta a discussão sobre os comentário apresentados nas seções do estudo de caso de Flávia e Valéria, que constituem a triangulação dos dados baseada em três vértices, A, B e C. A seção *as ideias da dupla de alunas sobre provas e demonsttrações matemáticas*, Vértice A , objetivou traçar o perfil da dupla de alunas em relação ao tema Provas e Demonstrações Matemáticas. Deixamos esses alunos livres para relatar o que pensavam e entendiam desse tema.

A seção *Os tipos de provas matemáticas utilizados pela dupla*, Vértice B, objetivou analisar os tipos de provas utilizados pela dupla na Proposta Didática. Para essa análise nos ancoramos nos tipos de provas proposto por Balacheff (1988) e Rezende e Nasser (1994).

Na última secão, *O nível de desenvolvimento do pensamento geométrico da dupla*, Vértice C, objetivou analisar o pensamento geométrico da dupla na Proposta Didática. Para essa análise, nos ancoramos nos níveis do pensamento geométrico proposto por Van Hiele.

Diante dos dados apresentados nas três seções, podemos afirmar que o trabalho com provas e demonstrações deve ser realizado desde muito cedo, por um curriculo que valorize a demonstração em sala de aula com intervenção adequada por professores que ajudem os alunos a desenvolver seu raciocínio dedutivo sempre indagando o porquê das respotas dada pelo aluno, levando-os a argumentar uns com os outros. Nesse sentido, a devolução aos alunos da responsabilidade pela validação das afirmações matemáticas deverá ser uma preocupação do professor.

Os dados apresentados na primeira seção apontam que a dupla de alunas não trabalham com o tema prova e demonstração matemática em sala de aula, visto suas limitações ao descrever sobre o tema em suas redações. Percebemos que ambas, em suas escritas, pensam que provar consiste em explicar seus resultados, sem a fundamentação matemática necessária, exigida pela comunidade dos matemáticos puros e esperam do professor a utilização em sala de aula dessa temática contribuindo para sua compreensão e correta aplicação em suas justificativas nas atividades propostas.

O professor deve incentivar a habilidade de justificar do aluno para atingir o processo dedutivo. Essa habilidade deve ser incentivada, solicitando que o aluno justifique sempre suas resoluções de problemas ou explique porque escolheu uma determinada estratégia. O professor deve levar o aluno a raciocinar sempre, em todas as tarefas desenvolvidas (NASSER, 2017).

Estudos ocorridos em experiências curriculares valorativas da demonstração, colocadas em ação por professores com uma intervenção adequada, mostram que esses currículos podem ajudar os alunos, desde muito cedo, a desenvolver o raciocínio dedutivo (Harel e Sowder, 2007).

Diante disso, percebemos o papel essencial que fica reservado ao professor, papel esse que não poderá desempenhar satisfatoriamente sem que possua profundo entendimento da composição das noções envolvidas, por um lado, e uma capacidade para orientar toda a dinâmica deste processo exploratório, por outro (FERNANDES, 2016).

Na segunda seção buscamos analisar os tipos de provas utilizadas pela dupla para resolver as atividades na Proposta Didática. Os resultados mostraram que a dupla utilizou das provas pragmáticas para justificar as suas ideias a respeito das atividades propostas, as quais se enquadram em dois tipos de provas, segundo Balacheff (1988) *o Empirismo Ingênuo*, ao escolherem o item que utilizaram casos particulares para conjecturar uma afirmação. Esse tipo de prova esteve presente na Atividades 1 (Parte II) item (a). O outro tipo de prova, o *Experimento Crucial,* definido por Balacheff (1988), esteve presente na Atividade 3 (Parte II) item (d) o qual a dupla utilizou para demonstrar uma afirmação e nas Atividade 1 (Parte II) item (b) e Atividade 2 (Parte III) ,o qual, foi escolhido pela dupla entre outras por pensarem ser um tipo de prova intelectual. Diante do exposto, a dupla produziu ao ser exposta a atividades que exigiam uma demonstração para a afirmação, a prova do tipo *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988), e quando foi pedido a escolha de uma demonstração dentre varias opções foi indicado pela dupla os tipos de provas *Empirismo Ingênuo* e *Experimento Crucial* segundo Balacheff (1988).

Com relação aos tipos de provas proposto por Rezene e Nasser (1994), a dupla utilizou três tipos de provas em suas justificativas na Proposta Didática, *Justificativa Gráfica* na Atividade 3 (Parte II) item (d), *Justificativa Pragmática* na Atividade 1 (Parte II) item (a) e o *Exemplo Crucial* na Atividade 1 (Parte II) item (b) e Atividade 2 (Parte III), nestas três últimas atividades, a dupla optou por esses tipos de provas ,dentre outras, por pensarem ser um tipo de prova intelectual, não tendo sindo uma conjectura elaborada pela dupla para responder a afirmação. Assim sendo, a dupla utilizou de *Justificativa Gráfica,* segundo Rezende e Nasser (1994) para justificar as atividades que exigiam uma demonstração para a afirmação. E quando foi pedido a escolha de uma demonstração dentre algumas opções foi indicado pela dupla os tipos de provas *Exemplo Crucial* e *Justificativa Pragmática,* segundo Resende e Nasser (1994).

Diante das justificativas dadas pela dupla em nossas atividades, encontramos que o tipo de prova *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988) e tipo de prova *Justificativa Gráfica,* segundo Rezende e Nasser (1994) foram as utilizadas pela dupla ao ser exigido uma demonstração para a afirmação proposta em nossa atividade presente na Proposta Didática. Ambos, o Experimento Crucial e a Justificativa Gráfica, são classificações atribuídas a justificativas que tomam um caso particular como suficiente para validar o caso geral. E quando foi solicitado a escolha de uma demonstração dentre algumas opções os tipos de provas utilizados pela dupla foram o *Empirismo Ingênuo* e *o Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988), e *Justificativa Pragmática* e *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994). O *Empirismo Ingênuo* e a *Jusfificativa Pragmática* são classificações atribuídas a justificativas que tomam alguns casos particulares como suficientes para validar o caso geral. Agora o *Experimento Crucial* e o *Exemplo Crucial* são classificações atribuídas a justificativas que tomam um caso particular como suficiente para validar o caso geral.

Esses nossos resultados retratam o que outras pesquisa já mencionaram, ou seja, os estudos apresentados em nível do currículo realizado mostram que, a maior parte dos estudantes, em todos os países, desde os níveis mais básicos até o nível superior, usam estratégias demonstrativas empíricas (CHAZAN e LUEKE, 2009; HEALY e HOYLES, 2000; RECIO e GODINO, 2001; RODRIGUES, 2008)

Vale salientar que esses tipos de provas dadas pela dupla é considerado por Balacheff (1988) como o primeiro passo no processo de generalização. Por isso, é importante, principalmente na Educação Básica, valorizar as justificativas dadas pelos alunos quando esses tentam validar suas ideias a respeito de uma afirmação. Assim, comungamos do mesmo pensamento de Aguilar e Nasser (2014), ao afirmarem que, o professor deve compreender e aceitar diversos níveis de argumentação que os alunos possam a vir a apresentar para provar um dado resultado, como também compreender a relação dos elementos congintivos

Em vista disso, entendemos ser importante o trabalho com as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula com o aluno, desde dos Anos iniciais com conteúdos e metodologias próprias à faixa etária, construindo no aluno o hábito de explicar seus resultados matemáticos, por meio hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras. Assim, conseguiremos formá-lo um cidadão crítico e capaz de defender suas ideias, não apenas matemáticamente como também socialmente.

Na terceira seção buscamos analisar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico da dupla. Quanto ao nível do pensamento geométrico não conseguimos classificar a dupla em nenhum nível do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo Van Hiele devido a falta de êxito na Atividade 3 (Parte II) proposta a Flávia e Valéria, pois, a dupla não apresentou conhecimento sobre reconhecimento visual dos elementos da figura, não identificou nenhuma propriedade na figura e apesar de reconher uma ordem de dedução formal para demonstrar o teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, corretamente, quando foi pedido sua demonstração a dupla apresentou uma desenho como justificativa. Como, Usiskin (1982) ao resumir quatro importantes características do Modelo de Van Hiele relata que aluno não pode está no nível n sem ter passado pelo nível $n-1$, concluimos que a dupla Flávia e Valéria não pôde ser classificada em nenhum nível do Modelo de Van Hiele.

Portanto, chegamos à conclusão que a dupla, diante dos tipos de provas encontrados na sua Proposta Didática, apresentou justificativas informais, não apresentando conhecimento matemático necessário para utilizar definições, conceitos, teoremas, axiomas, entre outros, para fundamentar suas justificativas. Com relação ao nível do pensamento geometrico não podemos classificar a dupla em nenhum nível de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo Van Hiele, o qual pela isuficiência de respostas dadas a nossa Proposta Didática pela dupla mostra uma correspondência com os tipos de provas encontrados nas atividades respondidas na Proposta Didática. Assim, podemos afirmar que a dupla utiliza de meios empíricos para fundamentar suas justificativas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo investigar o nível do pensamento geométrico e os tipos de provas matemáticas de alunos do 1º Ano do Ensino Médio, a partir da aplicação de uma Proposta Didática. Assim, tomamos como ponto de partida a seguinte questão norteadora: *Quais os tipos de provas matemáticas são utilizados pelos alunos do 1º ano da E.E.E.F.M. Carlota Barreira e em que nível do pensamento geométrico eles se encontram de acordo com o modelo proposto por Van Hiele?*

Para isso, utilizamos como fundamentação teórica o modelo de Van Hiele para analisar em qual nível do pensamento geométrico as duplas se enquadravam, Balacheff (1988) e Rezende e Nasser (1994) para discutir que tipos de provas esses alunos utilizaram para resolver as atividades propostas.

Para responder a pergunta norteadora e atingir o objetivo de nossa pesquisa, utilizamos como instrumentos a redação sobre o tema Provas e Demonstrações Matemáticas, observação participante, video gravação, transcrição do audio dos diálogos de uma das duplas durante a resolução das atividades da Proposta Didática e a Proposta Didática.

Assim como discutimos anteriormente, a presente pesquisa está inserida em um Projeto maior, em rede, CAPES/OBEDUC/UFMS/UFAL, mais especificamente inserida na equipe Provas e Demonstrações Matemáticas. Essa equipe foi formada por um professor doutor, um mestrando em Educação Matemática, dois professores da Educação Básica e dois graduandos em Matemática. Nossos estudos foram debruçados em leituras de pesquisas realizadas nacional e internacionalmente, de autores como Almouloud (2007), Balacheff (1988), Rezende e Nasser (1994), Pietropaolo (2005), De Villiers (2001), Nasser e Tinoco (2003), Harel e Sowder (2007), Hanna e Jahnke (1996), Fernandes (2016), Trevisan e Freitas (2017), Aguilar e Nasser (2012), Gravina (2001), Mariotti, Bussi, Boero, Ferri e Garuti (1997), Balacheff (1991), Healy (2007), Villiers (1986), Rodrigues (2013), Balacheff (2010), Jahnke (2010), De Villiers (2004), Aguilar e Nasser (2014), Chazan e Lueke (2009), Healy e Hoyles (2000), Recio e Godino (2001), Rodrigues (2008), Ordem e Almouloud, (2017), Pais (2006), Nasser (1992), Nasser (2017) e Fonseca (2004), entre outros.

Nossas leituras foram feitas com o objetivo de provocar discussões, refelxões e proporcionar condições para o desenvolvimento de uma Proposta Didática aplicada na escola onde a pesquisa foi realizada. Nesse sendido, nossos encontros foram norteados pelas ideias de Ibiapina (2008), quanto à pesquisa colaborativa, uma vez que, procuramos proporcionar um ambiente no qual todos compartilhassem suas experiências, saberes e ideias, ou seja, não houve hierarquia entre os membros da equipe e todos se sentiram abertos a comunicar suas sugestões, dúvidas, experiências e reflexões sobre os textos, como também a propor novas leituras para discussões gerais.

Desta forma, com base nesses estudos referentes às provas e demonstrações matemáticas foi elaborada, colaborativamente, uma Proposta Didática sobre os assuntos Teorema de Pitágoras, Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e Teorema do Ângulo Externo, na qual um recorte foi analisado nesta pesquisa. Sendo asim, analisamos a Atividade 1 e 3 (Parte II) sobre o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e Atividade 2 (Parte III) sobre o Teorema do Ângulo Externo, totalizando três atividades analisadas.

A Proposta Didática foi aplicada em uma turma do 1º Ano do Ensino Médio, com 19 alunos divididos em oito duplas e um trio, na Escola Estadual Carlota Barreira, localizada na cidade de Areia. Como recorte, analisamos as escritas das redações e as resoluções de três atividades de duas duplas de alunos, por apresentarem melhor desenpenho em responder as atividades da Proposta Didática.

Salientamos que a Escola, por meio de sua direção, nos recepcionou muito bem, permitindo que nosa equipe Provas e Demonstrações Matemáticas tivesse total liberdade para trabalhar as atividades e para usar as dependências da Escola, como salas de aulas, sala de professores, Laboratório de Informática, data-show e material xerocopiado que foi utilizado pela equipe para o desenvolvimento da pesquisa. Tanto o diretor quanto os quatro professores de Matemática da Escola estiveram presentes nos momentos iniciais da nossa pesquisa, nos quais compartilharam suas experiências, seus anseios e vivências, como também responderam questionários iniciais e finais e nos deram dicas e apoiaram quanto às atividades da Proposta Didática. Ressaltamos também a colaboração dos outros professores que não colocaram obstáculos nos momentos em que precisávamos de suas aulas para aplicar a Proposta Didática. Assim, a pesquisa foi realizada de forma natural e harmoniosa.

Preliminar à realização desta pesquia e do estudo de caso, pensamos que, por ser duplas formadas por alunos do 1º Ano do Ensino Médio, as atividades seriam resolvidas satisfatoriamente, uma vez que todos os assuntos presentes na nosa Proposta Didática já tinham sido estudados por eles em anos anteriores. No entanto, nos deparamos com alunos que não compreenderam os enunciados das atividades, com dificuldades de justificar suas ideias e por apresentar justificativas empiricas a atividades que exigiam deduções formais ou demonstrações.

Como exposto no Capitulo 1, adotamos a distinção dos termos provas e demonstrações como Balacheff (1987) sugere. Para tanto, tomamos o conceito de prova como sendo uma explicação aceita pela comunidade escolar em um determinado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate entre a significação e a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. E demonstração quando é proveniente de enunciados previamente conhecidos e aceitos pela comunidade dos matemática como verdadeiros. Nesta sequência de enunciados, há um encadeamento lógico, segundo uma regra dedutiva. Estes enunciados são os axiomas, os teoremas, propriedades e proposições previamente "demonstradas". Assim, para classificar as justificativas dadas pelas duplas em nossa Proposta Didática em provas ou demonstrações consideramos esta distinção proposta por Balacheff (1988) e Rezende e Nasser (1994).

Dessa forma, por meio das redações, Aline e Tamara revelaram que ambas têm em comum pensar que provar consiste em explicar seus resultados sem a fundamentação matemática necessária exigida pela comunidade Matemática. Percebemos nas Redações de Flávia e Valéria, por sua vez, que ambas afirmam que as provas e demonstrações matemáticas são justificativas dadas aos resultados matemáticos e que o professor de Matemática tem papel fundamental no processo de desenvolvimento das justificativas dadas aos alunos, quando em sala de aula trabalha os conteúdos com um olhar de formalidade dos conteúdos, influenciando os alunos a fazerem o mesmo com suas respostas nas atividades propostas.

Assim, percebemos que as duplas pensam que provar ou demonstrar consiste em explicar seus resultados sem a fundamentação matemática necessária. E esse hábito de justificar adequadamente os resultados matemáticos depende diretamente do professor, quando trabalha com esse tema em sala de aula.

Diante disso, as redações das alunas apontam que elas não trabalham com o tema provas e demonstrações matemáticas em sala de aula, haja vista suas limitações ao descrever sobre o tema proposto.

Com relação aos tipos de provas apresentados em nossa Proposta Didática encontramos na Atividade 1 (Parte II) item (a) na Proposta Didática os seguintes tipos de provas escolhidos pelas duplas: *o Empirismo Ingênuo* segundo Balacheff (1988) e *Justificativa Pragmática* segundo Resende e Nasser (1994).

Na Atividade 1 (Parte II) item (b) na Proposta Didática, encontramos como escolha para uma prova intelectual os tipos de provas: *Exemplo Gerérico* e o *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988). E o *Exemplo Crucial,* segundo Rezende e Nasser (1994).

Agora na Atividade 3 (Parte II) item (d) na Proposta Didática, encontramos como demonstração para o Teorema da Soma dos Ângulos Internos os tipos de prova: *o Empirismo Ingênuo* e *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988). E *Justificativa Pragmática,* segundo Rezende e Nasser (1994).

Por fim, na Atividade 2 (Parte III) na Proposta Didática, as duplas utilizaram como demonstração os tipos de provas: *Experimento Crucial,* segundo Balacheff (1988). E *Exemplo Crucial* segundo Rezende e Nasser (1994).

Percebemos pelo exposto que os tipos de provas utilizados estão todos inseridos nas provas pragmáticas, segundo Balacheff (1988) e ambos os tipos de provas encontrados em nossa Proposta Didática são provas empíricas ou informais.

A utilização de justificativas empiricas e informais em nossa pesquisa são bem conhecidas pela literatura, na qual estudos apresentados em nível do currículo realizado, mostram que a maior parte dos estudantes, em todos os países, desde os níveis mais básicos até o nível superior, usam estratégias demonstrativas empíricas (CHAZAN e LUEKE, 2009; HEALY e HOYLES, 2000; RECIO e GODINO, 2001; RODRIGUES, 2008).

Com relação ao nível do desenvolvimento do pensamento geométrico utilizamos a Atividade 3 (Parte II) como meio para classifcar as duplas em um dos níveis do modelo de Van Hiele. A dupla Aline e Tamara utilizou de observações e análises dedutivas informais caracterizando a dupla no Nível 3 do Modelo de Van Hiele. A dupla Valéria e Samara apresentou êxito em apenas um item da atividade, consequentemente, não pôde ser classificada em nenhum Nível do Modelo de Van Hiele.

Como ambas as duplas não conseguiram alcançar o Nível de Dedução Formal, esses resultados apontam um aspecto importante que pesquisas como a de Aguilar e Nasser (2012) mostraram, que os alunos do Ensino Básico quando expostos a atividades que requerem justificativas suas respostas são preferencialmente provas ingênuas, informais, com destaque para aquelas que recorrem a exemplos, aplicação de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos utilizados sem o devido entendimento conceitual. Em respostas dadas por essas duplas às atividades em nossa Proposta Didática, encontramos provas ingênuas

Para Balacheff (1991) essa prática adotada pelos alunos numa sala de aula, os quais agem como pessoas práticas que pretendem ser eficientes e não rigorosos, em que o importante é encontrar a solução para o problema de maneira mecânica não importando o conhecimento do significado daquela solução no problema.

Assim, como Ordem e Almouloud (2017), perceberam em sua pesquisa, que os sujeitos mostraram não saber os critérios de produção e ou avaliação de demonstrações válidas, pois evidências empíricas ou exemplos foram considerados como demonstrações de propriedades gerais. Os autores defendem que discussões com alunos sobre o valor de desenhos em demonstrações, ou estrutura de uma demonstração válida fazem-se necessárias.

Dessa forma, por meio das análises das redações, concluímos que as alunas não compreendem e nem são motivadas a utilizarem as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula. Com relação às três atividades resolvidas na Proposta Didática, concluímos que os tipos de provas utilizados são provas pragmáticas, segundo Balacheff (1988) e os tipos de provas *Justificativa Pragmática* e *Exemplo Crucial* segundo Rezende e Nasser (1994). No que diz respeito ao pensamento geométrico apenas a dupla Aline e Tamara pôde ser classificada em um dos nível do pensamento geométrico segundo Van Hiele, o Nível 3: *Dedução informal*.

Portanto, chegamos ao final desta pesquisa convictos de que é preciso iniciar o trabalho das provas e demosntrações matemáticas na Educação Básica, adequando seu ensino ao grau de maturidade e os conhecimentos dos alunos, visto que, nossos resultados apontam que esse tema não é abordado adequadamente em sala de aula.

Percebemos pelas respostas dadas na Proposta Didática e nas redações das duplas pesquisadas, que a metodologia utilizada nas aulas de Matemática omite as demonstrações dos teoremas e propriedades. Essa prática contribui para que os alunos apenas memorizem as fórmulas, técnicas e procedimentos de resolução que culminam na incapacidade de justificar matemáticamente seus resultados.

Diante dessa problemática pesquisas a respeito dessa temática fazem-se necessárias com o objetivo de mapear as dificuldades que alunos e professores têm a respeito do assunto. Como sugestão levantamos algumas questões para futuras pesquisas: Depois de identificado que um aluno ou dupla do Ensino Básico pertença ao Nível 3 de Van Hiele, quais estratégias metodológicas seriam significativas para que esse aluno avançasse para o Nível 4 do modelo de Van Hiele? Quais são os obstáculos encontrados pelos professores de Matemática ao utilizar as provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica? A aplicação de atividades baseadas no Nível 4 de Van Hiele à alunos da Educação Básica possibilitaria momentos que motivassem os alunos a provar formalmente seus resultados?

Assim, esperamos que esta pesquisa possa oferecer alguma contribuição e reflexão na área da Educação Matemática, e aos demais professores leitores. Que possa ajudar na decisão de iniciar ou continuar com o trabalho das provas e demonstrações matemáticas nas aulas de Matemática da Educação Básica, tornando o ambiente de sala de aula proprício para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos, como os PCN recomendam, para a formação de um cidadão crítico. Dessa forma, acreditamos melhorar o entendimento da Matemática, e, particularmente, o pensamento geométrico.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Investigações em Geometria na sala de aula. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**, p. 153-167, 1999.

AGUILAR JUNIOR, C. A., NASSER, L. **Analisando justificativas e Argumentação** Matemática de Alunos do Ensino Fundamental. Vidya. v. 32, nº 2, p. 133-147, 2012.

AGUILAR JUNIOR, C. A., NASSER, L. **Estudo sobre a visão do professor em relação à argumentação e prova matemática na escola.** BOLEMA, Rio Claro (SP), v.28, n. 50, p. 1012-1031, dez. 2014.

ALMOULOUD, S., MELLO, E. G. S. **Iniciação à Demonstração Apreendendo conceitos geométricos**. Caxambu, 2000. In: 23ª Reunião Anual da Anped, anais... Caxambu.

ALMOULOUD, S. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem**. Grupo de Educação Matemática GT 19, 2007.

ALVES, A. J. **O planejamento de pesquisas qualitativas em educação**. Caderno de Pesquisa. São Paulo (77): 53-61, maio 1991.

ANDRADE e SARAIVA. **Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática**. Número 96, páginas 2-6, Fevereiro 2008.

BALACHEFF, N. **Processus de Preuve et Situations de Validation**. In: Education Studies in Mathematics. n. 18. p. 147-176, 1988.

BALACHEFF, N. **Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics**. Em D. Pimm (Ed.): Mathematics, Teachers and Children, p. 216-235, 1988. Hodder & Stoughton, Londres.

BALACHEFF, N. **The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof**. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), Mathematical Knowledge: Its growth teaching, p. 175-192, 1991. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BALACHEFF, N. **Bridging Knowing and proving in mathematics: A didactical perspective**. In G. Hanna H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), **Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives** (pp. 205-221). New York: Springer, 2010.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Coleção do Professor de Matemática, 6ª edição, 222p., 2004.

BICUDO, I. **Os elementos de Euclides**; tradução e introdução, São Paulo, Editora UNESP, 600p. 2009

BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação em Matemática. Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**, p. 995, 2005. Tese de doutorado. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Departamento de Educação.
BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos método**s. Porto: Porto Editora, p. 336, 2013.

BURGER, W. F. & SHAUGHNESSY, J. M. **Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry**. Journal for Research in Mathematics Education, 17 (1), p. 31-48, 1986.

BRASIL, **Parâmentros Curriculares Nacionais**: Matemática. 88f. Secretaria de Ensino Fundamental -SEF/MEC-Brasília, Brasil.1997.

CHAZAN, D. **High school geometry student's justification for their views of empirical evidence and mathematical proof**. Educational Studies in Mathematics, 24(4), p. 359-387, 1993.

CHAZAN, D., & LUEKE, M. **Exploring relationships between disciplinary knowledge and school mathematics: Implications for undertanding the place of reasoning and proof in school mathematics**. In. D. Stylianou, M. Blanton e E. Knuth (Eds.), **Teaching and learnig proof across the grades: A K-16 perspective** (pp. 21-39). New York: Routledge, 2009.

COSTA, M. L. C. **Colaboração e grupo de estudos: perspectiva para o desenvolvimento profissional de professores de matemática no uso de tecnologia**. p. 202, 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

DE VILLIERS, M. **Boolean Algebra at school**. University of Stellenbosch: RUMEUS, 1986.

DE VILLIERS, M. **Pupils' needs for conviction and explanation within the contexto of geometry. Pythagoras**, 26, 18-27. (Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residentes/profmd/needs.pdf).

DE VILLIERS, M. **Papel e funções da demonstração nos trabalhos com o sketchpad. Educação e Matemática**, n. 63, p. 31-36, jun. 2001. Educação Matemática nº 63 Maio/junho de 2001. (Versão traduzida do artigo " The role and function of proof in mathematics", Pythagoras, Nov. 1990, 24, 17-24).

De Villiers, M. **The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. Canadian Journal of Science**, 397-418, 2004.

DE VILLIERS, M. **Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele**, p. 32, v. 12, nº 3, 2010.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico**, p. 213, 2009. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. p. 25-41,1991. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**, Dordrecht-Boston-Lodon: Kluwer Academic Publishers.

DUVAL, R. **Approche cognitive des problemes de geometrie en termes de congruence. Annales de Didactique et de sciences cognitives**. IREM de Strasbourg, vol. 1, p. 57-74, 1988.

FERNANDES A. F. **Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática**. Número 138, páginas 39-44, Setembro de 2016.

FONSECA, L. **Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria** (tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2004.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: D. Reidel, 1973.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de Geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Porto Alegre, 2001. Tese de doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Jahnke, H. N. **The conjoint origin of proof and theoretical physics**. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds), **Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives** (pp. 17-32). New York: Springer 2010.

HANNA, G. **Some pedagogical aspects of proof**. Interchange, v.21, n. 1, p. 6-13, 1990

HANNA, G. **Challenges to the impact of proof**. For the learning of mathematics, n. 15, p. 42-49, 1995)

HANNA, G. & JAHNKE, H. N. , **Proof and proving**. In A. J. Bishop et al. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, p. 877-908, 1996. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

HAREL, G., e SOWDER, L. **Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof**. In F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnig (pp.805-842), 2007. Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

HEALY, L., & HOYLES, C. **A study of proof conceptions in álgebra**. Journal for Research in Mathematics Education, 31 (4), p. 396-428, 2000.

HEALY, L., JAHN, A. P., PITTA COELHO, S. **Concepções de Professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa**. Caxambu, Brasil. p. 24, 2007. In: Anais da 30ª Reunião Anual da ANPEd: 30 anos de pesquisa e compromisso social.

HOFFER, A. **Geometry is More Than Proof**. Mathematics Teacher, 74 (January), p. 11-18, 1981.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa Colaborativa: investigação, formação, e produção de conhecimentos**. 1ª Ed. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

KEMMIS, S. Critical Reflection. WINDEEN, M. F, ANDREWS, **I. Staff development for school improvement**. Philadelphia, USA: Falmer Press, 1988, p. 73-90.

LIMA, M. L. S. **Sobre Pensamento Geométrico, Provas e Demonstrações Matemáticas de alunos do 2º ano do Ensino Médio nos Ambientes Lápis e Papel e GeoGebra**, 192p. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

LINS, A. F. **Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education**. Tese (Doutorado (PhD)), University of Bristol, 2003.

LOPES, A. J. **Um cavalo de troia e/ou um tiro no pé da Educação Matemática**. Palestra proferida no XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo -SP, 13 a 16 de julho de 2016.

LOUREIRO, C. **Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática**. Número 105, páginas 61-66, Dezembro de 2009.

LUDKE, M. e ANDRE, M. E. D. **Pesquisa em educação: abordagem qualitativa**. São Paulo: EPU, 1986.

MARCONI, M. A. & LAKATOS, E. M. **Metodologia Científica**, Editora Altlas, 6ª ed., p. 314, 2011.

MARIOTTI, M. , BUSSI, M. , BOERO, P. , FERRI, F. , & GARUTI, R. **Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition**. In E. Pehkonen (Ed.) **Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, vol. 1, p. 180-195, 1997. Helsinki: University of Helsinki.

MINAYO, M. C. S. **Pesquisa social: teoria, métodos e criatividade**. 21 ed., Petrópolis: Vozes, 1993.

MOROZ, M. e GIANFALDONI, M. H. T. A. **O processo de pesquisa: iniciação**. 2. Ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2006.

MUDALY, V. & DE VILLIERS, M. **Learners' needs for conviction and explanation within the contexto of dynamic geometry**. Pythagoras, 52 (August). p. 20-23, 2000. (Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf)

NASSER, L. "Níveis de van Hiele: Uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria." *Boletim GEPEM* 29 (1992): 21-25.

NASSER, L e TINOCO, L.A. **Argumentação e provas no ensino da matemática**. 2ª ed. Rio de Janeiro, 2003. UFRJ/Projeto Fundão.

NASSER, L. **Visão de licenciandos sobre as justificativas em geometria apresentadas na escola básica**. Revista Educação Matemática em Foco, Edição Especial sobre A Geometria na Formação de Professores de Matemática no Brasil, 2017.

NCTM, (2008). **Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Geometria Normas para os anos 9º - 12º**, Associação de Professores de Matemática – APM, páginas 365-366, 2ª edição, junho de 2008.

OCEM (2006). PCN+ ENSINO MÉDIO. **Orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Secretaria de Educação Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2006.

ORDEM, J. e ALMOULOUD, S. A. Concepções de prova e de demonstração em educação matemática – o caso de estudantes de licenciatura em ensino de matemática da Universidade Pedagógica na Beira e Nampula, Moçambique. **Revista Educação Matemática em Foco**, Edição Especial sobre A Geometria na Formação de Professores de Matemática no Brasil, 2017.

PAIS, Luiz Carlos. Estratégias de ensino de geometria em livros didáticos de matemática em nível de 5ª a 8ª série do ensino fundamental. *29ª Reunião Anual da Anped* (2006): 1-15.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarcge géométrique en PE1. **Extraído do Colóquio de COPIRELEM**, Tours, 2001.

PARZYSZ, B. **La géometrie dans l´enseignement secondary et en formation de professeurs des écoles**: de quoi s´agit-il? In: Quaderni di Ricerca in Didattica. n. 17. 2006. Italia: Universidade de Palermo.

Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), Matemática: Ensino Médio, **Secretária de Educação Média e Tecnológica**. Brasilia: Mec/SEF, p. 58, 2000.

PIETROPAOLO, R. C. **(RE) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática**. São Paulo, PUC-SP, 2005. 388 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC – SP, São Paulo, Brasil.

PIETROPAOLO, R. C. Base nacional comum curricular de matemática: pressupostos, processo de construção e nova versão preliminar, **Palestra proferida no XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo -SP, 13 a 16 de julho de 2016.

PONTE, J. P. **Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional**. In J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro & H. A. Sá (Eds), Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da SPCE (pp. 59-72). Porto: SPCE, 1999.

RAZEL e EYLON. **Development of visual cognition: Transfer effects of the Agam program**. Journal of Applied Developmental Psychology, 11,459-484, 1990.

RECIO, A., & GOLDINO, J. **Institucional and personal meanings of mathematical proof**. Educational Studies in Mathematics, 48(1), 83-99, 2001.

REZENDE, J. e NASSER, L., **Kinds of argumentation used in geometry**. Atas do PME – 18, Vol.1, p. 66, Lisboa, 1994.

RICHARDSON, R. J. e colaboradores. **Pesquisa social: métodos e técnicas**. São Paulo: Atlas, 1985.

RODRIGUES, M. **A demonstração na prática social da aula de Matemática** (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2008.

RODRIGUES, M. O papel das funções da demonstração no desenvolvimento dos esquemas demonstrativos dos alunos. **Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática – EIEM-** realizado nas Penhas da Saúde, Covilhã, nos dias 18 e 19 de maio de 2013, subordinado ao tema Raciocínio Matemático, p. 438-456, 2013.

TREVISAN, P. E. e FREITAS, J. L, M. A valorização de validações empíricas em atividades geométricas: um reflexo do cenário desenhado para o ensino de geometria. **Revista Educação Matemática em Foco**, Edição Especial sobre A Geometria na Formação de Professores de Matemática no Brasil, 2017.

SANTOS, M. C., et al. Função Polinomial do 2º grau: Um estudo do Potencial Argumentativo Matemático dos alunos do 3º ano do Ensino Médio, 2014a. **In: Congresso Nacional de Educação**, CONEDU, 18 a 20 de setembro de 2014. Campina Grande – PB.

SANTOS, M. C., et al. Conhecimentos matemáticos: até que ponto os alunos do último ano da educação básica conseguem argumentar sobre triângulos? 2014b. In: VIII **Encontro Paraibano de Educação Matemática** – EPBEM, 27 a 29 de Novembro de 2014, Campina Grande – PB.

SANTOS; M. C. **Investigando provas e demonstrações matemáticas por alunos do Ensino Médio: realidades e necessidades**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

SCHON, D. A. **The reflective practioner: how professionals think in action**. Aldershot Hants: Avebury, 1983.

SILVA, L. & CANDIDO, C. C. **Modelo de aprendizagem de Geometria do casal Van Hiele**, 2014.

SHULMAN, Lee S. **Those who understand: Knowledge growth in teaching**. *Educational Researcher* 15.2 (1986): 4-14.

SMOLE, K. S. (2008). Jogos de matemática: de 1º ao 3º ano, Porto Alegre: Artmed, 2008. 120p.; **Cadernos do Mathema** – Ensino Médio.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa: estudando como as coisas funcionam**. Porto Alegre: Penso, 2011.

TELLES, J. A. É pesquisa, é? Ah, não quero, não, bem! Sobre pesquisa acadêmica e sua relação a prática do professor de línguas. **Linguagem e Ensino**, Vol. 5, No. 2, 2002 (91-116)

TINOCO, J. Educação e Matemática**, Revista da Associação de Professores de Matemática**. Número 118, páginas 13-17, Junho de 2012.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1988.

USISKIN, Z. Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, **Final report of the CDASSG Project**. Chicago: Univ. of chicago, 1982.

VAN HIELE, P. M. **Begrip e Inzicht**. Muusses: Purmerend, 1973.

VAN HIELE, Pierre M. The child's thought and geometry. ***English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. Washington DC: NSF*** (1984).

WIRSZUP, I. Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry, 1976. In. J. L. Martin (Ed.) **Space and Geometry**. Columbus, Ohio: Eric Centre.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 5ª ed. Porto Alegre: Brookman, p. 320, 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE 1- Folha para redação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÃO

ALUNO(A):____

DATA: ______/________/2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

AGRADECEMOS A SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE 2- Proposta Didática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

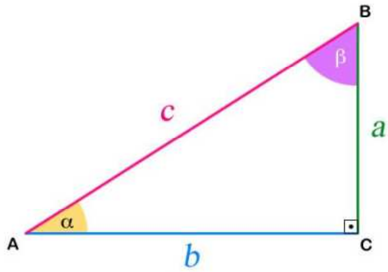
Dupla: ____ **Série:** _____

____

Data: ______/_______/_______

PARTE I

(1) (nossa autoria) Observem o triângulo ABC retângulo em C. Com base em suas observações, determinem e justifiquem:



a) Como identificar um triângulo retângulo?

____

____

____

b) os catetos:

____

____

____

c) a hipotenusa:

____

____

____

d) o ângulo reto (90°)

____

____

____

e) os ângulos agudos

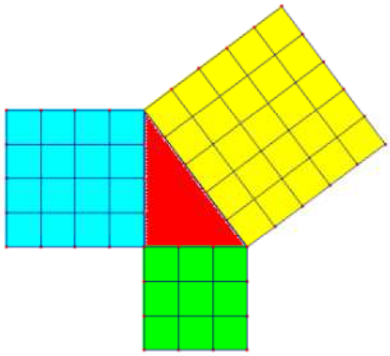
____

____

____

(2) (nossa autoria) De acordo com Eves (2004) e Boyer (2010), os povos antigos, acerca de 3000 anos, como egípcios e babilônicos, sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo, mas de acordo com Lima (2006), esses povos não tinham a necessidade de demonstrar esta afirmação.

Na Figura abaixo temos um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento:



Foram construídos quadrados com os lados desse triângulo. Esses quadrados foram divididos em quadrados menores, como vocês podem observar na Figura. Respondam:

a) Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?

____

____

b) Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?

____

____

c) Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?

____

____

d) De acordo com as respostas dos itens a, b e c, vocês observaram alguma relação que envolve os lados desse triângulo?

____

____

____

____

____

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	**4**	**5**			
6	**8**	**10**			
5	**12**	**13**			
9	**12**	**15**			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

____

____

____

____

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

____

____

____

____

(4) (Extraída de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho do lado *a* que vocês determinaram nos desenhos e recortes do item (a) (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho do lado *b* (pinte de amarelo)

✓ Quadrado de tamanho do lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho

✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelo e verde

✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?

____

____

____

____

✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

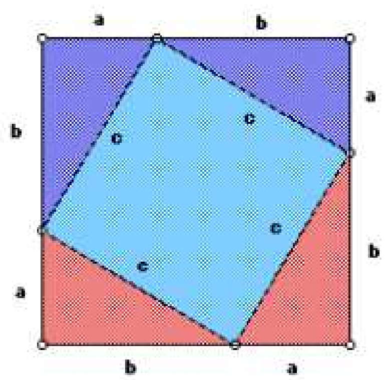
____

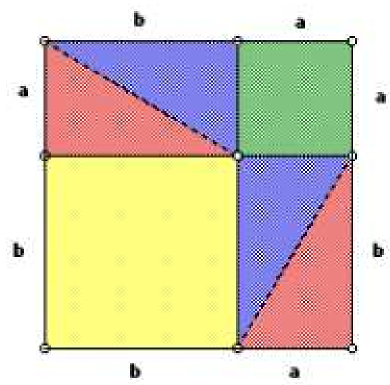
____

____

____

(5) (extraído de Bastian, 2000)





a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

____

____

____

____

b) Façam o mesmo na Figura 2.

____

____

____

____

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

____

____

____

____

____

(6) (nossa autoria) Um teorema é uma afirmação matemática que deve ser rigorosamente demonstrada. Sendo assim, para que o Teorema de Pitágoras seja válido é necessário demonstrá-lo. Podemos escrever o Teorema de Pitágoras na forma implicativa: ***Se o triângulo é retângulo então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.***

No Teorema escrito na forma implicativa, identifiquem:

a) Hipótese

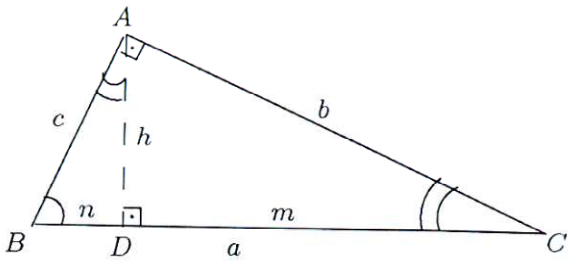
____

____

b) Tese

(7) (adaptado de Lima, 2006)

No triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD $=\widehat{C}$, complemento de $\widehat{B}$, CÂD $=\widehat{B}$, complemento de $\widehat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:

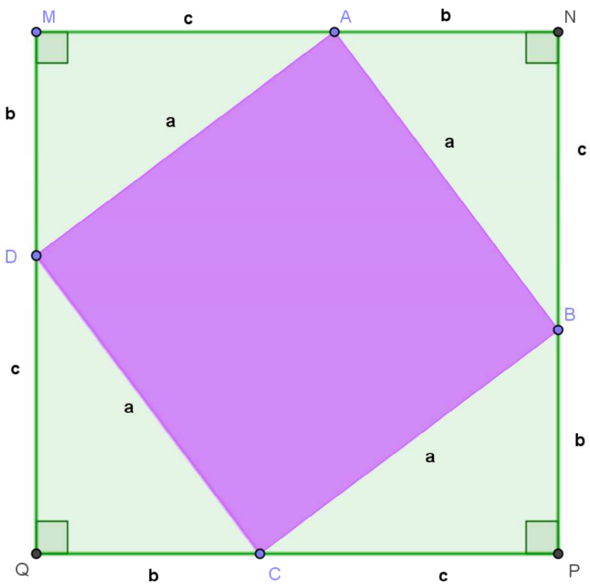


$$\frac{c}{a}=\frac{n}{c} \; e \; \frac{b}{a}=\frac{m}{b}$$

Usando as informações acima, tentem demonstrar o Teorema de Pitágoras.

(8) (extraído de Ferreira Filho, 2007)

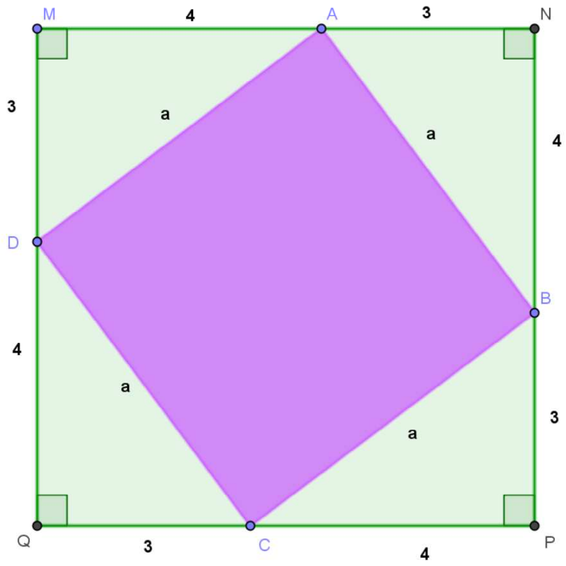
a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.



____

b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área. Justifiquem.

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área:



____

____

____

____

d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

____

____

____

____

e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?

____

____

- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

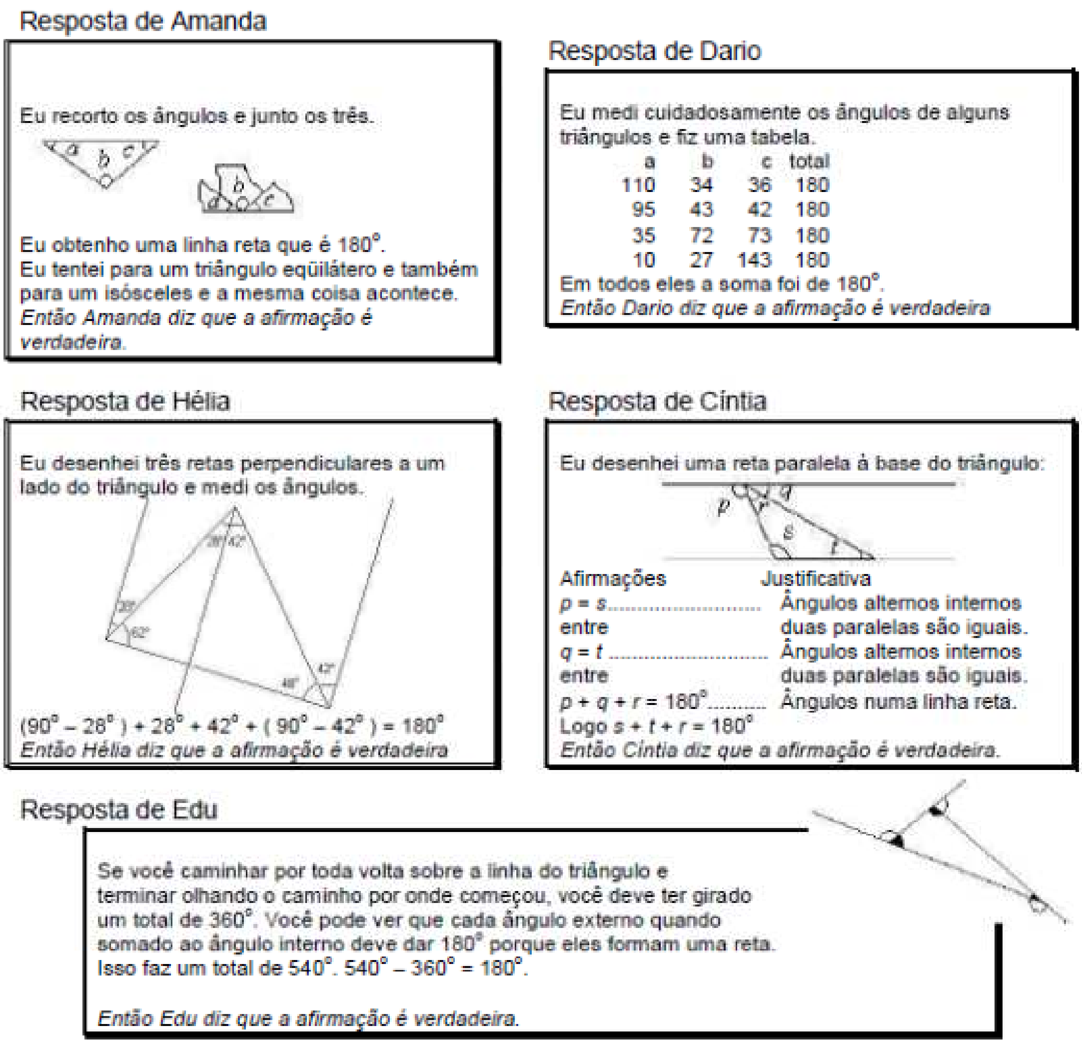
____

____

PARTE II

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.



Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

$(90° – 28°) + 28° + 42° + (90° – 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

Afirmações ... Justificativa
$p = s$ ... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$ ... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$ ... Ângulos numa linha reta.
Logo $s + t + r = 180°$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

____

____

____

____

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

____

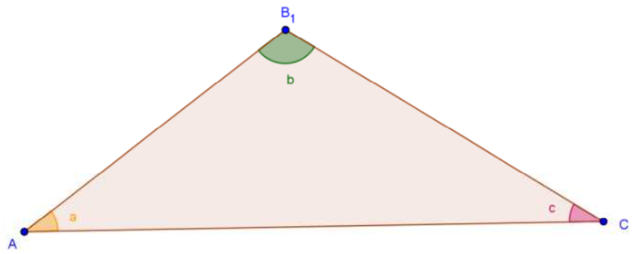
____

____

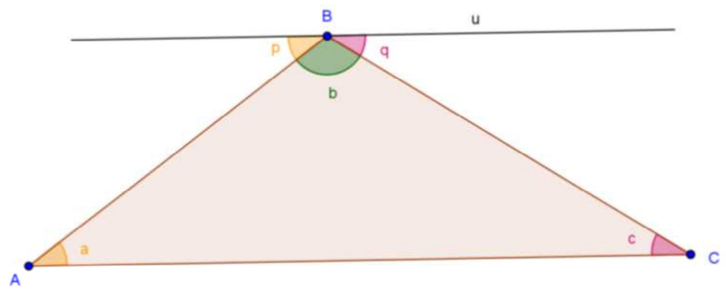
____

____

(2) (nossa autoria) Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:



Traçando a reta *u*, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:



Sabemos que p = a e q = c.

Como p + b + q = 180º, concluímos que a + b + c = 180º.

Observando essa demonstração, respondam o que se pede:

a) Por que podemos afirmar que p = a e q = c?

____

____

____

____

b) O que podemos afirmar com essa conclusão da demonstração?

____

____

____

____

c) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem.

____

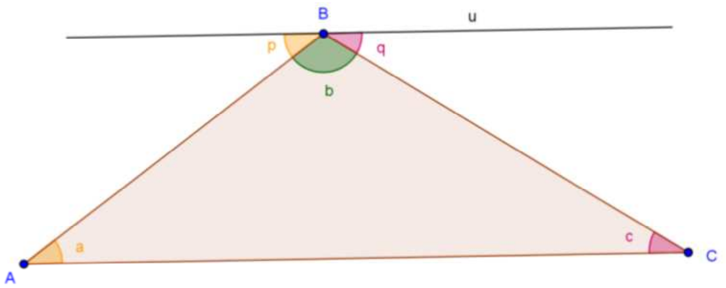
____

____

____

d) Tente demonstrar essa afirmação de outra forma.

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$*?*

____

____

____

____

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

____

____

____

____

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

(   ) $p + b + q = 180°$

(   ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

(   ) $p = a \; e \; q = c$, pois, são ângulos alternos internos

(   ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

(   ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

PARTE III

(1) (nossa autoria) Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

a) Na Geometria Euclidiana usamos com certa frequência o teorema do ângulo externo para cálculos de ângulos. Descrevam o que vocês conhecem sobre este teorema.

____

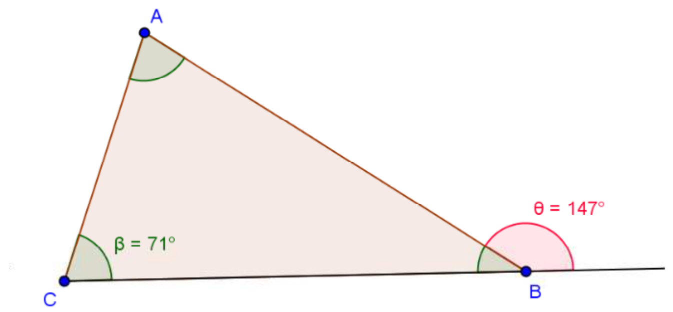
____

____

____

____

b) Dado o triângulo ABC, determinem as medidas dos ângulos internos que faltam.



____

____

____

____

____

c) Observem que $\theta > B\hat{A}C$ assim como também $\theta > A\hat{C}B$. Será que esta relação vale para todo triângulo? Justifiquem.

____

____

____

____

d) Se tomarmos ABC como sendo um triângulo retângulo, essas relações ainda valeriam? Justifiquem.

____

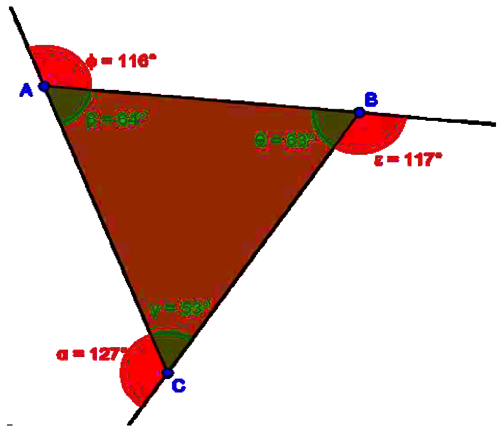
____

____

____

(2) (nossa autoria) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha.

I ( ) Dado um triângulo qualquer ABC e sejam $\beta = 64^o$, $\theta = 63^o$ e $Y = 53^o$,as medidas dos ângulos. Como descrito na figura abaixo:



Observem:

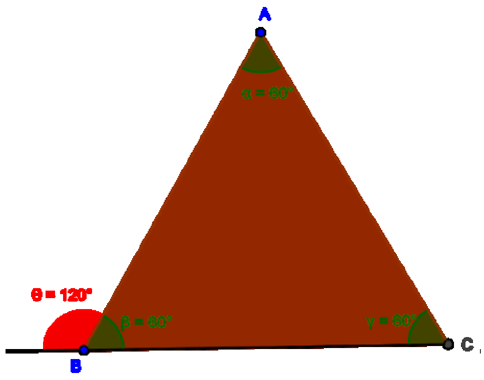
Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo α, onde α = 127º.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{CA}$ formaremos o ângulo Φ, onde Φ = 116º.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{AB}$ formaremos o ângulo ε, onde ε = 117º.

Note que, $\alpha > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, assim como $\beta > A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, assim como também $\theta > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, como queríamos demonstrar.

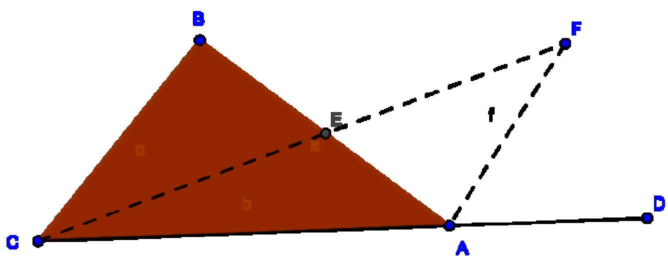
II ( ) Tomemos o triângulo equilátero ABC descrito na figura abaixo:



Como se trata de um triângulo equilátero, sabemos que o ângulo $B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C = 60^o$. *Ao prologarmos a semirreta* $\overrightarrow{BC}$ *formaremos o ângulo* θ, *que mede* 120^o, *além disso, note que,* $\theta = 120^o > 60^o = B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C$. *Logo fica demonstrado o teorema.*

III ( ) Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overrightarrow{CA}$, *marque um ponto D tal que o ponto A esteja entre os pontos C e D, como indicado na figura abaixo:*

Queremos provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$ *e* $B\hat{A}D > \hat{C}$. *Vamos primeiro provar que o ângulo* $B\hat{A}D > \hat{B}$. *Para isto consideremos o ponto médio E do segmento* $\overline{AB}$.



Na semirreta $\overrightarrow{CE}$ *marque um ponto F tal que, o segmento* $\overline{CE} = \overline{EF}$. *Trace* $\overline{AF}$.

Compare os triângulos CEB e FAE. Como $\overline{BE} = \overline{AE}$ *(já que E é ponto médio de AB),* $\overline{CE} = \overline{EF}$ *(por construção) e* $B\hat{E}C = A\hat{E}F$ *(por serem opostos pelo vértice), segue-se que o ângulo* $B\hat{E}C = A\hat{E}F$. *Consequentemente* $\hat{B} = E\hat{A}F$, *como a semirreta* $\overrightarrow{AF}$ *divide o ângulo* $B\hat{A}D$, *então* $E\hat{A}F < B\hat{A}D$, *portanto* $\hat{B} < B\hat{A}D$. *Analogamente provamos que* $B\hat{A}D > C$. *Assim fica demonstrado o teorema.*

Justifiquem a escolha:

____

____

____

____

____

____

____

Parte IV

(1) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-27567" e observem atentamente a figura. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Arrastem o seletor para a direita. O que aconteceu com a figura? Quais os movimentos observados pelas três divisões do triângulo?

b) Arrastem o próximo seletor para baixo. O que aconteceu com a figura? Qual o movimento realizado pelas três divisões do triângulo? O que vocês observaram após essa movimentação?

c) Marquem os três quadrados referentes a "comparar ângulos". O que vocês observaram? Como podem ser chamados os ângulos azuis, vermelhos e verdes? Por quê?

d) Qual propriedade está ligada a essa verificação? Como vocês encontraram essa propriedade e por quê?

(2) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-239787" e observem a figura. Há uma importante relação relacionada aos triângulos e seus ângulos internos. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Movimentem o vértice C do triângulo. O que acontece com o triângulo? E com seus ângulos internos?

b) Ao movimentar esse vértice C, qual a relação entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos?

c) Agora movimentem o vértice B. O que acontece? Continua valendo essa relação para outros triângulos encontrados e seus ângulos internos?

____

____

____

d) Se movimentarmos o vértice A. O que acontece? Essa relação continua sendo válida?

____

____

____

____

e) Desse modo, o que podemos concluir com essa verificação? Justifiquem.

____

____

____

____

____

(3) (extraído do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-145257", observem a figura e respondam o que se pede.

____

____

____

____

____

____

____

(4) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-57095" e observem a figura. Sigam as instruções e respondam o que se pede:

a) Movimentem os seletores dos ângulos α e β. O que aconteceu ao movimentar o ângulo α? E o ângulo β? As duas figuras foram movimentadas para onde? Como elas ficaram nessas movimentações?

____

____

____

____

____

b) Surgiu um novo seletor. Movimentem o ângulo γ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

____

____

____

____

____

c) Surgiu um novo seletor. Movimente o ângulo δ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

____

____

____

____

____

d) Ao fazer todos esses movimentos, o que vocês observaram? A que conclusões vocês chegaram?

____

____

____

____

____

e) Existe alguma relação entre esses quadrados e os lados do triângulo retângulo? Se sim, qual?

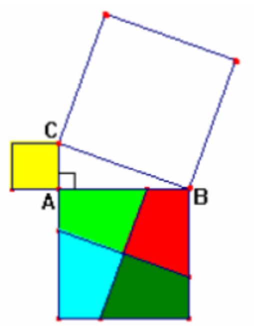
____

____

____

____

(5) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)



Abram o arquivo *Montagem – Perigal* e observem, antes de fazer qualquer movimento, a imagem atenta e detalhadamente.

Na figura temos 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Arrastem cada uma das peças, encaixando-as dentro do quadrado maior.

Façam o que se pede:

a) O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?

____

____

____

____

____

b) Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.

____

____

____

____

c) A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

____

____

____

____

d) No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?

____

____

e) A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

AGRADECEMOS A SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE 3:

Transcrição da gravação do áudio da interação da dupla Aline e Tamara durante a resolução da Proposta Didática
PARTE II

Questão 1) **(adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira: Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º (Apêndice 2 p.139).**

a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

Tempo: parte 1	Personagem	Fala
1:05:44	Aline	Leu a questão 1, o item (a) e analisou as respostas propostas
1:10:30	Aline	Qual a gente escolheria como resposta?
1:10:33	Tamara	A resposta de Dário
1:10:39	Aline	Eu também, pois, é muito fácil, pois, soma os de dentro
1:10:41	Aline	Eu não usaria as outras, pois, eu já fiz essa da soma para verificar que a soma de dentro de um triângulo é 180º
1:10:50	Aline	A resposta de Dário
1:10:53	Aline	Agente diz porquê?
1:11:04	Aline	Pois, já usamos esse método

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

Tempo: parte 1	Personagem	Fala
1:13:15	Aline	Leu o item (b)

1:13:30	*Aline*	*Escolheria a de Edu, pois, é a mais complicada e eu não entendi direito*
1:13:35	*Aline*	*A resposta de Edu, por que é a mais complexa e de uma lógica*

QUESTÃO 3) **Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°"(Apêndice 2 p. 141).**

a) como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

Tempo: Parte 2	Personagem	Fala
00:20:15	Aline	Leu a questão 2 e o item (a)
00:20:40	Aline	u é uma reta paralela à base da figura
00:21:11	Aline	Aí B é o que? B é o vértice
00:22:15	Aline	Aí tá perguntando que é a? a é o ângulo
00:22:45	Aline	e $\overline{AC}$ base do triângulo

b) vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

Tempo: Parte 2	Personagem	Fala
00:23:10	Aline	Leu o item (b)
00:23:15	Aline	Que propriedade?
00:23:30	Aline	Ah! é aquela lá que passa a reta e dá 180º e p é igual a e q é igual a c
00:23:55	Aline	Que a soma dos ângulos internos de um triângulo é

		180º, sendo p é igual a e q é igual a c
00:24:40	Aline	Traçando a reta, obtém-se um ângulo de 180º

c) coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a \; e \; q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

( ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

Tempo:Parte 2	Personagem	Fala
00:25:20	Aline	Leu o item (c)
00:25:30	Aline	A conclusão é o último
00:25:35	Aline	O primeiro é esse aqui: Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c
00:25:49	Aline	Aí o dois é pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado AC obtendo p e q
00:26:14	Tamara	Esse aqui é o quatro?
00:26:18	Aline	E esse outro aqui é o cinco
00:26:27	Aline	Quem é o 3 e quem é o 4?
00:26:33	Aline	p igual a e q igual a c, pois, são ângulos alternos internos, acho que esse é o quatro
00:26:41	Tamara	Acho que esse também é o quatro
00:26:41	Aline	Primeiro tem descobrir quem é p e q
00:26:49	Aline	E depois é que diz essa conclusão
00:26:51	Aline	O que falta é o 3

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Tempo: Parte 2	Personagem	Fala
00:26:54	Aline	Leu o item (d)
00:27:31	Aline	Eu já fiz esse do quadrado aqui?
00:27:59	Aline	Não sei
00:28:21	Aline	Chama o professor Tamara
00:28:28	Tamara	Professor!
00:28:30	Aline	Como se faz esse item (d)?
00:28:32	Professor	Você vai justificar de que maneira você argumentaria para mim que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°
00:28:41	Aline	Mas, já foi pedido em outra questão
00:28:44	Professor	Isso, mas, de que outra maneira você me justificaria?
00:30:59	Aline	Se compararmos a soma dos ângulos internos de vários triângulos poderemos ver que todos serão 180º. Ah! pensei em outra coisa. E proporcionalmente, pois, se aumentarmos um ângulo outro vai ter que diminuir para dá soma dos três ângulos igual a 180°
00:32:18	Aline	Proporcionalmente o ângulo, vou fazer um triângulo aqui em baixo
00:33:17	Aline	Proporcionalmente se observarmos os triângulos abaixo podemos concluir que...
00:33:56	Aline	Se ... o vértice A aumentar o tamanho do ângulo, consequentemente os outros dois diminuirão
00:36:07	Aline	Portanto, os ângulos mudarão, mais sua soma será a mesma.

PARTE III

Questão 2) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha(Apêndice 2 p.144).

Tempo: Parte 2	Personagem	Fala
00:48:02	Aline	Leu a questão 2 e o item I
00:49:28	Tamara	Leu item II
00:50:15	Aline	Esse não é
00:50:17	Aline	Leu o item III
00:50:37	Aline	Esse item III não é, pois, tá falando de outra coisa não tá falando de ângulos externos fico só dos dois primeiros para analisarmos
00:50:46	Aline	Só podemos marcar só um item
00:50:47	Aline	Então é esse item I
00:50:49	Tamara	Agora é só justificar
00:50:54	Aline	Porque o item I envolve os ângulos externos como método primordial para descobrir o valor dos ângulos

APÊNDICE 4 – Redação de Aline

uepb
Universidade
ESTADUAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÂO

ALUNO(A): __ **- SÉRIE:** 1º ano B
DATA: 15 / 06 /2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Na Matemática, são feitos cálculos que de uma forma ou outra se você não buscar uma justificativa ou prova, não será demonstrada automaticamente. Para tudo tem uma justificativa, uma razão. Não faz nenhum sentido você fazer um cálculo e não saber porque está sendo feito.

É bom quando tem um problema que você tem que interpretar e entender para resolver. Daí, não será apenas um cálculo sem sentido, será uma situação cotidiana que dará a percepção de que qualquer coisa do nosso dia-a-dia é Matemática e pode envolvê-la.

Kiás, qualquer coisa da nossa vida envolve Matemática. Esse é o sentido de nós buscarmos

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

provas e demonstrações, assim podemos ve
que é indo atrás dessas justificativas que
matéria pode se tornar bem mais interessan
te e legal. Toda disciplina pode ser mais in
teressante quando passa a trabalhar coi
comuns.

Por isso, é bem procurar justificativas pa
os cálculos que fizermos. Quanto mais soubem
o "porquê" das coisas, mais nos causará int
resse e curiosidade de saber cada vez mais.

APÊNDICE 5 – Redação de Tamara

uepb
Universidade ESTADUAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÂO

ALUNO(A):_ ______ **- SÉRIE:** 1 ano "B"
DATA: 15 / 06 /2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Matemática é uma matéria onde eu parti-
larmente considero bastante complicada. A ma-
temática envolve certos tipos de assunto on-
não é muito ruim não basta ler, interpretar pa
que posso buscar o resultado de uma ques
mas, não é só buscar o resultado, tem qu
provar, ou justificar o resultado que você co
seguiu, para que tenhamos certeza se
aquele resultado é de certeza correto.
Onde essas justificativas, ou provas são
o que realmente dá sentido da mate
mática.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE 6 – Redação de Valéria

uepb
Universidade
ESTADUAL DA PARAÍBA

TRABALHO COLABORATIVO COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA EM ESCOLAS PÚBLICAS DAS REGIÕES NORDESTE E CENTRO - OESTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

ALUNO(A): _____ **- SÉRIE:** 1º "B"
DATA: 15 / 06 /2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Provas e Demonstrações Matemáticas eu acredito que com provas e demonstrações você pode justificar, pedindo explicações ao professor e esperando que eles possam tirar nossas dúvidas, que eles na sua profissão podem nos mostrar que algo existe ou comprovar o que é, quem desenvolveu porque existe ou alguma coisa parecida. Podemos demonstrar, ou seja, justificar algo, mesmo que a gente desconheça o assunto, é com sua opinião que dizemos, explicamos se algo está bom ou não. A respeito desse tema eu só preciso de um bom professor, para me entender ou ~~[illegible]~~ explicar minha dúvida.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE 7 – Redação de Flávia

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÂO

ALUNO(A): _______ - SÉRIE: 1° ano "B"
DATA: 15 / 06 /2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

A respeito do Tema eu acho legal Quando temos uma dúvida devemos perguntar para saber bem o assunto, e assim podemos provar o resultado que achamos e dizer que está correto.

Devemos sempre tirar nossas dúvidas com os professores, sempre especúla sobre o assunto dado ao professor, para não ter dúvidas sobre determinado assunto e assim se dar bem no futuro.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!