Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

George Martins Gomes

Trabalhando o Conteúdo de Probabilidade Através de Exercícios

Campina Grande, 2016

George Martins Gomes

Trabalhando o Conteúdo de Probabilidade Através de Exercícios

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Probabilidade

Orientador:
Profa. Dra. Divanilda Maia Esteves

Campina Grande, 2016

G633t Gomes, George Martins.
Trabalhando o conteúdo de probabilidade através de exercícios [manuscrito] / George Martins Gomes. - 2016.
41 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2016.
"Orientação: Profa. Dra. Divanilda Maia Esteves, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa".

1. Probabilidade. 2. Ensino. 3. Resolução de problemas. I. Título.

21. ed. CDD 519.2

George Martins Gomes

Trabalhando o Conteúdo de Probabilidade Através de Exercícios

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Probabilidade

Aprovado em: 29/11/2016

Banca Examinadora

DMEsteves

Profa. Dra. Divanilda Maia Esteves
Departamento de Estatística - UEPB
Orientador

Michelli Karinne Barros da Silva

Profa. Dra. Michelli Karinne Barros da Silva
Unidade Acadêmica de Estatística - UFCG

Gustavo H. E.

Prof. Dr. Gustavo Henrique Esteves
Departamento de Estatística - UEPB

Dedico esse trabalho em memória de Ruy Gomes Barbosa.

Agradecimentos

A Deus acima de tudo, pelo dom da vida e pelas maravilhas que ele me concedeu. Grande Mestre e protetor.

Ao meu pai, Ruy Gomes Barbosa e também a minha mãe, Gerlane Silveira Martins Gomes, que muito me apoiaram e sempre se preocuparam em me dar uma vida e uma educação digna.

À minha irmã Raquel Martins Gomes, que com seus incentivos e conselhos sempre contribuiu. para o meu crescimento estudantil, profissional e pessoal.

À minha orientadora, Dra Divanilda Maia Esteves, pelo apoio, pelos conselhos, pela paciência, profissionalismo e pela dedicação e, especialmente, por ter acreditado na concretização desse trabalho.

Agradeço também ao professor mestre Fábio Álvaro Dantas, por ter doado uma parte do seu tempo com dicas e orientações para usar o LaTeX.

A todos os meus amigos da turma de mestrado PROFMAT 2014.1 da UEPB, por fazerem parte da minha formação e por me darem força no decorrer dessa caminhada.

Aos membros da banca, pelas suas valiosas contribuições.

Aos professores do programa do mestrado PROFMAT, pelos conhecimentos e ricas contribuições transmitidos ao longo do curso.

À Universidade Estadual da Paraíba por promover este Mestrado junto ao PROFMAT SBM, em rede Nacional, e à CAPES, pela concessão da bolsa.

A todos que estiveram ao meu lado, contribuindo de forma direta ou indireta para que eu superasse os obstáculos que foram surgindo ao longo do caminho, sempre acreditando em mim e colaborando para que eu conseguisse realizar esse grande sonho.

Resumo

O conhecimento de Probabilidade tinha uma relação direta com os jogos de azar e/ou de aposta no seu início. Na medida com que a humanidade foi evoluindo a teoria das Probabilidades foi ganhando um maior espaço na vida do homem e assim tornando-se presente em diferentes áreas. O ensino de Probabilidade tem um papel de suma importância para tornar o aluno um cidadão mais consciente e atuante na sociedade. Infelizmente esse conteúdo continua a ser trabalhado com questões quem envolvem dados, cartas de baralho e moedas, fazendo assim pouca relação com as práticas diárias. Sendo assim, para que o ensino de Probabilidade tenha uma melhor compreensão e a aula seja mais atrativa, uma alternativa é que o aluno experimente o que está sendo discutido na teoria unindo ao seu cotidiano, podendo gerar curiosidade e discussões. Com esta ideia, foi desenvolvido o material para auxiliar o professor na execução de suas aulas junto aos alunos no desenvolver dos exercícios, contribuindo para torná-lo mais consciente e atuante no meio em que ele vive.

PALAVRAS-CHAVE: Probabilidade; Ensino; Resolução de questões.

Abstract

Probability knowledge had a direct relation to gambling and/or betting at the beginning. To the extent that humanity has evolved the theory of probability was gaining more space in the life of man, and thus, becoming present in different areas. Probability teaching has a very important role in making the student a more conscious and active citizen in society. Unfortunately this content continues to be handled with issues involving dice, playing cards and coins, which has little to do with everyday practices. Therefore, in order for Probability teaching to have a better understanding and a more attractive class, one alternative is for the student to try to connect the learned theory with the situations of his daily life, generating curiosity and discussion. With this idea, the material was developed to assist the teacher in the execution of his classes with the students in the development of the exercises, contributing to make him more conscious and active in the environment in which he lives.

KEYWORDS: Probability; Teaching; Resolution of questions.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

De acordo com Laplace (apud, Moraes, 2014), "A teoria das probabilidades, nada mais é do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto. É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano". No mundo atual, a teoria da probabilidade torna-se uma das principais ferramentas da Matemática, onde seus conceitos são úteis em várias e diferentes aplicações do cotidiano e do conhecimento humano. De incontestável utilidade, sua capacidade nos mais diversos contextos da sociedade, tem conquistado nas últimas décadas o seu devido reconhecimento de sua inestimável importância.

No início, a Probabilidade estava associada apenas a jogos de azar, mas com o passar do tempo passou a ser um dos conhecimentos mais utilizados no mundo. Na sala de aula as questões de jogos de azar ainda continuam extremamente presentes, mas também surgem questões envolvendo Estatística, Biologia, Geografia, dentre outras áreas do conhecimento, favorecendo assim a interdisciplinaridade.

Segundo Trompler (apud HURTADO & COSTA, 1999), o ensino de Probabilidade em ciclos anteriores à graduação é de fundamental relevância uma vez que representa uma maneira de pensar desconhecida em outros ramos da Matemática, embora subjacente em todas as ciências experimentais. O ensino de Probabilidade confronta o estudante com resultados menos absolutos do que este está acostumado, mostra que ele pode conduzir um rigoroso raciocínio mesmo sabendo que está cometendo erros e o ensina como enfrentar tais erros. Humaniza a Matemática pela ligação a problemas do cotidiano, já que relaciona ciências experimentais, naturais, econômicas e sociais de todos os tipos, como ferramentas de trabalho, à Matemática.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997) estabelecem que a principal finalidade para o estudo de Probabilidade é a de que o aluno compreenda que a grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos. (Brasil, 1997, p. 56)

Com o passar do tempo, o ensino de Matemática, vem se transformando através de materiais utilizados, bem como suas novas metodologias, passando a ser um facilitador no processo de ensino-aprendizagem. Essas modificações devem ser observadas no cotidiano dos alunos, principalmente na sala de aula. No que se refere ao ensino de Probabilidade, percebe-se que, apesar de sua ampla aplicabilidade, muitos autores ainda se atém a aplicações relacionadas aos jogos. Muitos alunos não têm conhecimento sobre jogos de dados e cartas e então, os exemplos, que deveriam auxiliar o processo de aprendizagem, acabam causando ainda mais confusão.

Através da resolução de problemas podemos ensinar os conceitos e procedimentos matemáticos, assim os estudantes devem desenvolver estratégias e não somente aplicar a Matemática, mas sim uma nova maneira de abordar a Matemática.

Quando os alunos desenvolvem questões bem escolhidas e se baseiam na sua resolução conseguem adotar métodos, o que resulta numa maneira do que temos nos dias atuais.

Com o apoio de outras áreas da ciência, o conhecimento matemático se faz como instrumento para lidar com situações da vida no cotidiano ou para ampliar habilidades de pensamentos em diversas situações. Atualmente, a Teoria das Probabilidades dispõe de diversas aplicações importantes como na economia, política, medicina, etc.

Hurtado & Costa (1999) fazem alusão sobre a importância e emprego da probabilidade nos seguros (ciência atuarial), controle de qualidade industrial (engenharia), genética (biologia), pesquisa de mercado (marketing), teoria dos erros experimentais de Maxwel, mecânica quântica (física e química), dentre outros, representando um manancial para introdução ao estudo de diversos fenômenos. Esses mesmos autores ainda mencionam a ideia de apresentar a probabilidade dentro de um contexto histórico como ferramenta para explicar a importância dos jogos de azar na história da probabilidade.

Uma das aplicações do estudo da probabilidade está relacionada a biologia e intimamente ligada a Primeira Lei de Mendel, sobre hereditariedade e formação dos gametas. Quando se partiram do princípio de que a formação dos gametas se originava das leis da probabilidade, através da distribuição dos quatro alelos entre os gametas que se formavam em um evento aleatório sendo cada característica definida por um par de fatores que se separam durante a meiose para a formação dos gametas e apenas um dos fatores do par para cada gameta. (AMABIS 2013).

A resolução de problemas tende a dar mais trabalho para o professor, mas ajuda no processo de aprendizagem do aluno. De acordo com Van de Walle (2009) existem sete razões para tentarmos prosseguir nesse esforço:

- a resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre ideias e em dar sentido às mesmas;
- a resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido;
- a resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter um bom desempenho e manter os pais informados;
- a resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos;
- uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes, de modo que ocorrem menos problemas de disciplina;
- a resolução de problemas desenvolve o "potencial matemático" e
- é muito divertido!

Os professores que ensinam deste modo nunca retornam a um método de ensinar por exposição de regras (e receitas) (Van de Walle, 2009).

Esse material didático propõe uma metodologia de ensino baseada na resolução de questões, mas não simplesmente resolvê-las. Houve um cuidado de explicar inicialmente as características de cada objeto de estudo, como por exemplo: as moedas, os dados, as cartas de um baralho comum, conceitos básicos de genética e análise combinatória. Essa preocupação veio devido ao fato de muitos materiais didáticos considerarem que os alunos já tenham conhecimento de cada um deles, mas, para que seja possível desenvolver um melhor ensino aprendizagem, é preciso que estes conhecimentos prévios estejam bem esclarecidos.

Neste sentido, esta pesquisa foi desenvolvida para propor um material didático-pedagógico de Probabilidade que facilite o processo de ensino-aprendizagem para o professor e para o aluno, em diferentes níveis de conhecimento. Ele traz o embasamento teórico necessário para que o leitor tenha conhecimento prévio do assunto que será abordado e, na sequência, diversas questões resolvidas e propostas, iniciando com questões simples e, quando possível, questões de outras áreas do conhecimento. Por fim, propõe-se uma lista de exercícios em diferentes níveis, com respectivas soluções, a qual o professor deverá trabalhar junto com o aluno, dependendo do nível que esteja lecionando.

Capítulo 2

Por que propor um material novo de probabilidade?

Ao inicio do curso de licenciatura plena em Matemática na Universidade Estadual da Paraíba, em 2003, surgiu a oportunidade de ministrar aulas em uma escola particular nas séries iniciais do Ensino Fundamental, de quinta até sétima série.

Em 2006 tive meu primeiro contato, em uma outra escola, com o Ensino Médio, também em escola privada, onde ministrava aulas de Trigonometria e Geometria. A partir desse ano foi realizado o trabalho apenas com Ensino Médio e em cursinhos pré-vestibulares até março de 2015, momento no qual foi dado o ingresso no Instituto Federal do Rio Grande do Norte, como professor efetivo de Ensino Básico e Tecnológico até hoje.

Nesse período foi sentido uma certa dificuldade em ministrar aulas sobre Probabilidade, foi trabalhado à risca o livro didático adotado pela escola e com cuidado de que fosse oferecido, a mais para os alunos, mas com a incerteza se o aluno teria ou não conseguido aprender. Com a mudança do livro didático adotado pela escola foi observado que a forma que o conteúdo estava apresentado não trazia nenhuma curiosidade para o leitor, nem aluno nem o professor. Apresentava em média de três a cinco exemplos resolvidos e em seguida uma lista de exercícios.

De maneira geral, os livros didáticos possuem uma gama de questões que ajudam para o assunto estudado, mas falta uma ligação direta com a realidade do aluno. Normalmente a matéria vem se limitando a falar sobre jogos de azar e em seguida uma variedade de questões bem elaboradas mas nem sequer são comentadas e por muitas vezes os alunos simplesmente a resolvem decorando a fórmula e aplicando.

Esses exercícios resolvidos permanecem com questões que envolvem apenas jogos de azar, como moedas, dados e baralhos. Muitas vezes os alunos nem tem noção de quantos naipes tem em um baralho comum, por exemplo, e as questões muitas vezes não explicam, consideram que os alunos já saibam, e ficam num contexto completamente diferente da realidade do aluno.

O aprendizado do aluno não deve ser desenvolvido como simples memorização, mas sim como uma nova língua, onde seus conceitos e termos específicos devem ser inseridos pouco a pouco na vida diária do aluno.

Matemática é uma ciência e nela precisamos desenvolver estratégias para uma melhor maneira de absorção do conteúdo por parte do aluno. E a resolução de problemas, com questões do cotidiano ajudam na interpretação do conteúdo e não torna a Matemática uma simples memorização de fórmulas. Quando se resolve junto com o aluno muitas questões, espera-se que ele adquira estratégias de resolução e o conteúdo se torne mais simples.

De acordo com Pedracini et al. (2007), podemos dizer que a construção do conhecimento escolar é, na realidade, um processo de elaboração, no sentido de que o aluno seleciona, organiza e transforma a informação que recebe de diferentes fontes, estabelecendo relações entre esta informação e suas ideias ou conhecimentos prévios. Assim, aprender um conteúdo quer dizer que o aluno lhe atribui um significado, constrói uma representação mental através de imagens ou proposições verbais, embora uma espécie de teoria ou modelo mental como marco explicativo deste conhecimento.

Observando os fenômenos que o rodeiam, o homem desenvolve um olhar atento para obter respostas e possibilitando assim construção de modelos, o que hoje chamamos de Fenômenos Probabilísticos. A Teoria da Probabilidade surgiu por volta do século XV onde suas primeiras aparições foram desenvolvidas em jogos e apostas.

O desenvolvimento da Teoria das Probabilidades bem como os avanços dos cálculos probabilísticos são atribuídos aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia. Provém deles as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Há registros de que no século XVI, o matemático e jogador italiano Jerónimo Cardano (1501-1576), estabeleceu estudos sobre as probabilidades de se ganhar em vários jogos de azar. Cardano observou e avaliou a probabilidade de se retirar ases de um baralho de cartas e de se obter “sete” com dois dados. Posteriormente publicou os resultados dessa pesquisa em um manual para jogadores. Ele é considerado o precursor da Teoria das Probabilidades, pois foi o primeiro a fazer considerações a cerca do conceito probabilístico de um dado honesto e a escrever um argumento teórico para calcular probabilidades (LOPES & MEIRELES, 2005).

Outros matemáticos, embasados pelos estudos de Cardano e de aprofundamentos nessa teoria, colaboraram substancialmente para o desenvolvimento da Probabilidade. Dentre tantos estudiosos, podemos destacar pela relevante contribuição: Blaise Pascal (1623-1662); Pierre de Fermat (1601-1655); Jacob Bernoulli (1654-1705); Pierre Simon Laplace (1749-1827); Carl Friendrich Gauss (1777-1855); Siméon-Denis Poisson (1781-1840). Alguns autores atribuem a origem dessa teoria às correspondências trocadas entre Pascal e Fermat nas quais tratavam sobre obtenção de soluções dos problemas de jogos e apostas. Foi em 1657 que a Teoria da Probabilidade tomou grande impulso. A mola propulsora foi a publicação do primeiro tratado formal sobre probabilidade, escrito pelo holandês Christian Huygens - físico, geômetra e astrônomo. Esse estudo também trouxe o conceito de Esperança Matemática, conceito de extrema relevância para o cálculo de probabilidade e estatística. (GADELHA, 2004).

Após a passagem de décadas, apenas em 1713, foi publicado o primeiro livro plenamente dedicado à Teoria das Probabilidades, de autoria atribuída a Jakob Bernoulli (1654-1705). Uma parte desse livro é dedicada à reedição do trabalho de Huygens (1657) sobre jogos de azar, a outra parte destina-se aos estudos de Permutações e Combinações, chegando ao Teorema de Bernoulli sobre as Distribuições Binomiais (LOPES & MEIRELES, 2005).

Conforme supracitado, os alicerces da Teoria do Cálculo, das Probabilidades e da Análise Combinatória foram estabelecidos por Pascal e Fermat. Situações que relacionavam apostas nos jogos de dados levantaram diversas hipóteses envolvendo possíveis resultados, marcando o início da Teoria das Probabilidades como ciência. As contribuições de Bernoulli ressaltaram os grandes números, abordando as Combinações, Permutações e a Classificação Binomial. Laplace formulou a Regra de Sucessão e Gauss estabelecia o Método dos Mínimos Quadrados e a Lei das Distribuições das Probabilidades (GADELHA,2004).

Com essa visão, foi preparado um material que além do conteúdo teórico, dispõe de resoluções de uma quantidade significativa de questões, não apenas relacionado aos jogos de azar, mas também com situações problemas que envolvam o cotidiano do aluno.

Capítulo 3

Material Didático

3.1 Espaço Amostral

Diariamente, ao acordarmos, fazemos um planejamento da nossa rotina. Hora de levantar, tomar café da manhã, ir ao trabalho/escola, almoçar... No entanto, não temos como saber se seguiremos a risca tal programação. Muitas vezes, imprevistos aparecem, atrasos, atividades não programadas que precisam ser feitas. Ou seja, nossa rotina diária está sujeita a alterações as quais não conhecemos previamente. Isso acontece porque, além da programação feita, há muitos fatores aleatórios que influenciam nossas vidas.

Da mesma forma, quando um experimento é conduzido, podemos saber ou não previamente qual será seu resultado exato. Quando jogamos na loteria, só sabemos quantos números acertamos depois que o sorteio for realizado. A cada sorteio, o número de acertos pode ser diferente. Mas quando calculamos o dobro de 5, sempre dará o mesmo resultado.

Ao experimento que realizado sobre as mesmas condições podem produzir resultados diferentes, chama-se **experimento aleatório**. Àquele que produz sempre o mesmo resultado chama-se **experimento determinístico**.

Não podemos saber de antemão o resultado de um experimento aleatório, mas podemos estudá-los e conhecer como eles se comportam. Além disso, surge frequentemente o interesse em saber: será que alguns resultados são mais frequentes que outros?

Chama-se de **espaço amostral**, ou também conjunto universo, o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, ou seja, todas as possibilidades de um determinado experimento acontecer. Aqui, usaremos a letra S para representar o espaço amostral associado a um experimento. É bom ressaltar que o espaço amostral pode ser enumerável ou não. E mesmo quando é enumerável, nem sempre é viável escrever explicitamente todos os elementos desse conjunto.

Exemplos:

1) As moedas são feitas de um material resistente, normalmente de metal, tendo um formato de disco e com duas faces, uma chamada de cara e a outra de coroa. Como pode ser visto na Figura 3.1 temos como uma moeda honesta, aquela que ao ser lançada qualquer uma de suas faces tem a mesma chance de ficar voltada para cima.

Figura 3.1: Duas faces de uma moeda.

Fonte: (https://fischborn.wordpress.com/2011/06/30/cara-ou-coroa-e-o-principio-de-nao-contradicao)

Lança-se uma moeda honesta para cima e observa-se a face que fica voltada para cima. Observa-se que há dois resultados possíveis: cara ou coroa. Então, o espaço amostral será $S = \{\text{cara, coroa}\}$.

2) Um baralho comum é um conjunto de 52 cartas, divididas em quatro grupos, os naipes, chamados Copas, Paus, Espadas e Ouros e representados pela Figura 3.2, respectivamente. Em cada grupo temos 9 cartas numeradas de 2 a 10 e 4 cartas com imagens: Às (A) , Valete (J) , Dama (Q) e o Rei (K), somando 13 cartas de cada naipe.

Figura 3.2: Baralho comum de 52 cartas.

Fonte: (http://fernandoloppes.blogspot.com.br/2012/09/historia-do-baralho.html)

Suponha que deseja-se retirar uma carta qualquer de um baralho. O espaço amostral terá 52 elementos, que são as 52 cartas identificadas por número/imagem e naipe.

3) Os dados são poliedros gravados nas suas faces determinadas instruções onde o mais comum é o que tem o formato de um cubo com 6 faces, onde este é que servirá para o nosso estudo, numerados de 1 à 6. Além disso, considera-se que um dado é honesto, quando ao ser lançado qualquer uma de suas faces tem a mesma chance de ficar voltada para cima.

Figura 3.3: Dado em formato de cubo numerado de um até seis.

Fonte: (http://www.cyberartes.com.br/artigo/?i=1503&m=45)

Seja o seguinte experimento: lança-se um dado honesto para cima e a face voltada para cima é anotada. Deste modo, o espaço amostral é S={1,2,3,4,5,6}.

4) Uma mulher encontra-se grávida e deseja saber o sexo de seu bebê. Se denotarmos por F o sexo feminino e M o sexo masculino, então o espaço amostral é S={F, M}.

5) Em um grupo de estudo, há 2 meninos e 3 meninas. Um professor pede ao grupo que escolha dois alunos para apresentação do trabalho. Sejam A, B meninos e C, D, E meninas. Para escolher dois alunos do grupo temos o seguinte espaço amostral: S={(A,B), (A,C), (A,D), (A,E), (B,C), ((B,D), (B,E), (C,D), (C,E), (D,E)}.

3.2 Eventos

Às vezes queremos saber sobre alguns resultados específicos do experimento. Por exemplo, ao retirarmos uma carta de um baralho comum, poderíamos estar interessados só nos casos em que a carta retirada é um carta com figura. Nos jogos de futebol, também, antes de iniciar uma partida uma moeda será lançada e a equipe que ganhar o sorteio decidirá a direção para o qual atacará no primeiro tempo da partida. A outra equipe efetuará o tiro de saída para iniciar a partida. A equipe que ganhar o sorteio executará o tiro de saída para iniciar o segundo tempo da partida. Nesse momento as equipes trocarão de lado de campo e atacarão na direção oposta.

Chama-se de **evento** todo subconjunto de elementos de um determinado espaço amostral. Os eventos são denotados por letras maiúsculas e podem ser representados por uma sentença escrita ou por um conjunto. Dado um evento finito qualquer A, definimos $n(A)$ como sendo o número de elementos de A.

Exemplos:

1) Lançamos uma moeda honesta para cima e observa-se a face que fica voltada para cima. Como visto anteriormente,

$$S=\{\text{cara,coroa}\}.$$

Se definirmos o evento

A: A face que ficou para cima foi cara,

tem-se que

$$A=\{cara\}.$$

2) Retirando-se uma carta de baralho, se estivermos interessados apenas naqueles casos em que a carta escolhida foi um ás, teremos o evento B: A carta obtida é um ás e o evento B tem quatro elementos, pois temos um ás de cada um dos quatro naipes.

3) Lançando-se dois dados honestos simultaneamente, um vermelho e um branco, e considerando as faces voltadas para cima, em quantos casos a soma dos números das faces superiores é maior que 8?

Resolução: Para ajudar a pensar nas possibilidades, vejamos a Tabela 3.1 a seguir representando os resultados possíveis do experimento.

Tabela 3.1: Representação da relação de dado vermelho com dado branco

		Dado Branco					
		1	2	3	4	5	6
Dado Vermelho	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: George Martins Gomes

O espaço amostral nesse experimento tem 36 elementos. Se definirmos C: a soma das faces é maior que 8, temos C={ (5,4), (6,4), (4,5), (5,5), (6,5), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6),(6,3)}. Ou seja, há 10 resultados favoráveis ao evento C.

4) Em um grupo de estudo, há 2 meninos e 3 meninas. Um professor pede ao grupo que escolha entre os alunos duas meninas para apresentação do trabalho.

Resolução: Sejam A, B meninos e C, D , E meninas. Para escolher duas meninas do grupo, temos o espaço amostral: S = {(A,B), (A,C), (A,D), (A,E), (B,C), ((B,D), (B,E), (C,D), (C,E), (D,E)}, no espaço amostral nessa situação temos 10 elementos. Se definirmos U: escolher duas meninas, U = {(C,D), (C,E), (D,E)}. Ou seja, há 3 resultados favoráveis ao evento U.

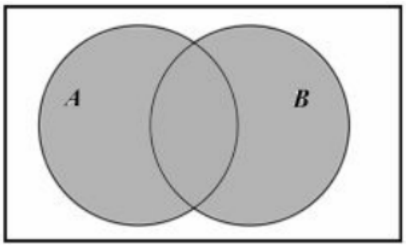
3.3 Operações entre Eventos

Os eventos são conjuntos e portanto podemos realizar as operações clássicas entre conjuntos com diferentes eventos associados a um mesmo espaço amostral. Os resultados de tais operações são também eventos. Aqui, além do sentido matemático, podemos usar sentenças para descrever o evento resultante.

a) *União de dois eventos:* Sejam A e B dois eventos, então A ∪ B será o evento que ocorrerá se, e somente se, pelo menos um dos dois eventos A ou B ocorre. Simbolicamente, A ∪ B indica a união entre o evento A e o evento B. Neste contexto, dizemos que A ocorre ou B ocorre, sendo que esse OU não tem o sentido excludente, mas representa que só A ou só B ou A e B simultaneamente ocorreram. O conjunto A ∪ B contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos A ou B.

Usando diagrama de Venn, representado na Figura 3.4, podemos ilustrar a união de dois eventos como:

Figura 3.4: Diagrama de Venn representando União

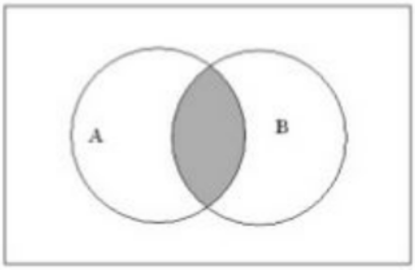


Fonte: George Martins Gomes

b) *Interseção de dois eventos:* Se A e B são dois eventos, A ∩ B será a interseção de A e B e acontece, e somente se, A e B ocorrerem simultaneamente. Simbolicamente A ∩ B e é formado pelos elementos que A e B tem em comum. Neste caso, dizemos que A ocorre e B ocorre;

Usando diagrama de Venn, representado na Figura 3.5, podemos ilustrar a interseção de dois eventos como:

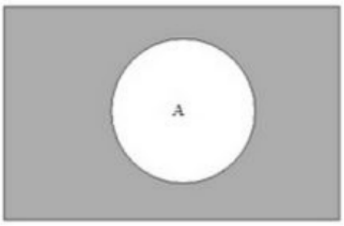
Figura 3.5: Diagrama de Venn representando Interseção



Fonte: George Martins Gomes

c) *Complementar de um evento:* O complementar de um evento A, denotado por A^C ou $\overline{A}$, é o evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer. Isto é, A^C é formado por todos os elementos do espaço amostral que não estão em A, conforme descreve a Figura 3.6.

Figura 3.6: Diagrama de Venn representando evento complementar

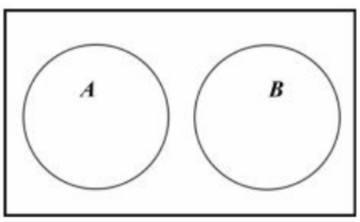


Fonte: George Martins Gomes

O evento complementar de A é a parte cinza na Figura 3.6.

d) *Eventos Mutuamente Exclusivos:* São aqueles que não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou seja, a existência de um impede a existência do outro. Com isto A $\cap$ B $= \emptyset$, o que quer dizer que A e B não tem qualquer elemento em comum. conforme apresentado na figura 3.7.

Figura 3.7: Diagrama de Venn representando eventos mutuamente exclusivos



Fonte: George Martins Gomes

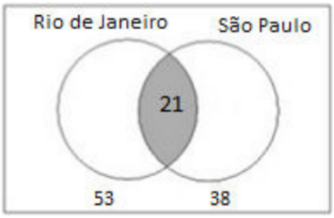
Como não existe parte em comum, não tem nada em destaque.

Exemplos:

1) Em um grupo de 80 pessoas, todas de Minas Gerais, 53 conhecem o Rio de Janeiro, 38 conhecem São Paulo e 21 já estiveram nas duas cidades. Quantas pessoas que não conhecem nenhuma dessas duas cidades?

Resolução: Das 80 pessoas do estado de Minas Gerais, há 21 pessoas que estiveram nas duas cidades, com isto faz parte da interseção de São Paulo e Rio de Janeiro, vejamos no diagrama de Venn:

Figura 3.8: Diagrama de Veen representando a interseção entre RJ e SP



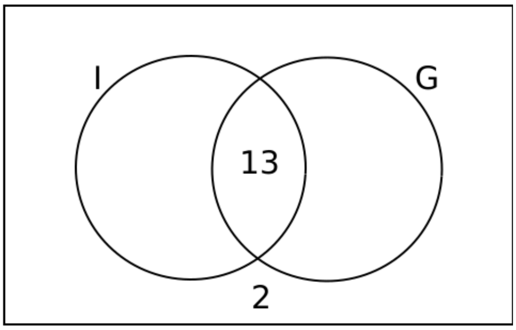
Fonte: George Martins Gomes

O número de pessoas que conhecem apenas o Rio de Janeiro é $53 - 21 = 32$.
O número de pessoas que conhecem apenas São Paulo é $38 - 21 = 17$.
Com isto temos 21 pessoas que conhecem o Rio de Janeiro e São Paulo, 17 conhecem apenas São Paulo e 32 Conhecem apenas o Rio de Janeiro, com isto $21 + 17 + 32 = 70$ são as pessoas do estado de Minas Gerais que conhecem pelo menos um desses estados. Assim $80 - 70 = 10$, são as pessoas que não conhecem qualquer uma das duas cidades.

2) Um professor de literatura sugeriu aos alunos de uma turma a leitura dos livros Iracema e O Guarani, de José de Alencar (1829-1877). Uma semana depois, o professor verificou que 24 alunos leram Iracema, 18 leram O Guarani e 13 leram os dois livros. Sabendo que 2 alunos não leram nenhum dos livros, quantos alunos há na turma?

Resolução: Inicialmente, consideramos os seguintes eventos:
I: alunos que leram Iracema
G: alunos que leram O Guarani
S: conjunto universo, ou seja, todos os alunos da turma
Representamos em um diagrama de Veen o número de alunos que leram os dois livros e os que não leram nenhum livro:

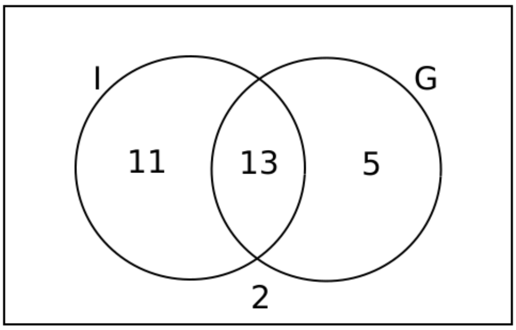
Figura 3.9: Diagrama com o número de alunos que leram os dois livros e os que não leram nenhum livro



Fonte: George Martins Gomes

Entre os 24 alunos que leram Iracema, 13 leram os dois livros. Assim, 11 alunos leram somente Iracema, pois 24 - 13 = 11. Analogamente, 5 alunos leram somente O Guarani, pois 18 - 13 = 5.

Figura 3.10: Diagrama de Veen representando toda a turma



Fonte: George Martins Gomes

Seja S o conjunto de todos os alunos da turma e $n(S)$ o número de alunos da turma.

Seja I os que leram Iracema e $n(I)$ o número de alunos que leram Iracema.

Seja G os alunos que leram O Guarani e $n(G)$ o número de alunos que leram O Guarani.

Seja $n(I \cap G)$ o número de alunos que leram Iracema o O Guarani.

Seja $n(I \cup G)$ o número de alunos que leram Iracema ou O Guarani.

Seja $n((I \cup G)^C)$ o número de alunos que não leram nenhum desses dois.

Portanto, há 31 alunos na turma, pois 11 + 13 + 5 + 2 = 31. Observa-se que: $n(S) = 31$; $n(I \cup G) = 29$ que é o número de alunos que leram alguma das obras; $n(I \cap G) = 13$ que determina a quantidade de alunos que leram as duas obras; $n((I \cup G)^C) = 2$ são os que não leram nenhum dos livros.

3.4 Definição de Probabilidade

O estudo da Probabilidade aborda um conjunto de técnicas que são aplicadas a uma diversidade de problemas relacionados ao cotidiano, viabilizando um desafio considerável à imaginação, ocasionando a exploração de tais técnicas de resolução, capazes de estimular o raciocínio lógico do aluno.

Seja $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$. Diremos que uma distribuição de probabilidades sobre A é **equiprovável**, se $p_1 = p_2 = \cdots = p_k$, isto é, se todos os eventos elementares de A tiverem a mesma probabilidade. Em geral, as características do experimento é que nos levam a supor uma distribuição equiprovável.

Seja S um espaço amostral equiprovável e A um de seus eventos. Denomina-se **probabilidade** do evento A o número $P(A)$ onde é calculado pela razão do número de elementos do evento A por o número de elementos do espaço amostral $n(S)$, representados na Equação 3.1.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}. \tag{3.1}$$

A definição de Probabilidade como o quociente do número de "casos favoráveis" e o número de casos possíveis é chamada Definição Clássica de Probabilidade e foi a primeira definição formal de Probabilidade aparecendo pela primeira vez em forma clara na obra Liber de Ludo Aleae de Jerônimo Cardano (1501-1576). (LOPES & MEIRELES, 2004).

Exemplos:

1) Um número é escolhido entre os vinte primeiros inteiros positivos. Qual a probabilidade dele ser um quadrado perfeito?

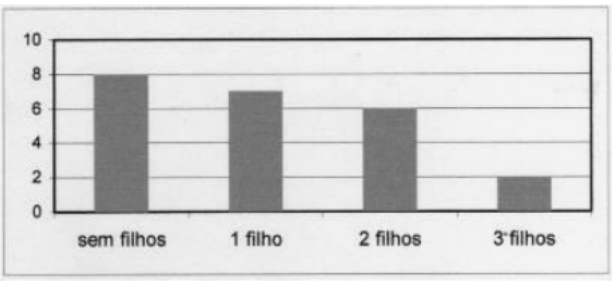
Resolução: Nosso espaço amostral é formado pelos 20 primeiros inteiros positivos, com isto $n(S) = 20$. Se definirmos A: o número escolhido é um quadrado perfeito, então $A = \{1, 4, 9, 16\}$, com isto $n(A) = 4$. Portanto $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$.

2) Uma empresa de telemarketing promoveu uma palestra motivacional para 100 de seus funcionários. Ao final da apresentação, foi sorteado um livro do palestrante entre os presentes. Qual é a probabilidade de o número do sorteado ser múltiplo de 11?

Resolução: Considere S como o conjunto dos funcionários da empresa de telemarketing, então $n(S) = 100$. Considere A como o conjunto dos múltiplos de 11: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 que são nove números, portanto $n(A) = 9$, com isto $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{9}{100}$.

3) (ENEM 2005) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada na Figura 3.11. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

Figura 3.11: Gráfico de coluna relacionando a quantidade de mulheres ao número de filhos



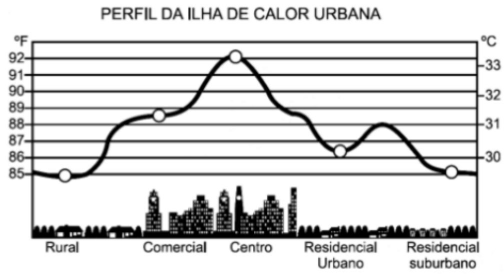
Fonte: ENEM 2005.

a) $\dfrac{1}{3}$ *b)* $\dfrac{1}{4}$ *c)* $\dfrac{7}{15}$ *d)* $\dfrac{7}{23}$ *e)* $\dfrac{7}{25}$

Resolução : Considere S como o total de filhos. De acordo com o gráfico, há 8 mulheres sem filhos, 7 mulheres com 1 filho, 6 mulheres com 2 filhos e 2 mulheres com 3 filhos. O total de filhos é: $n(S) = 8 \times 0 + 7 \times 1 + 2 \times 6 + 2 \times 3 = 0 + 7 + 12 + 6 = 25$. Considere A o conjunto das mulheres com filho único, então $n(A) = 7$. Logo, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{7}{25}$.

4) (ENEM 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

Figura 3.12: Gráfico representando a tempetura de acordo com sua localização



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

a) $\frac{1}{5}$ *b)* $\frac{1}{4}$ *c)* $\frac{2}{5}$ *d)* $\frac{3}{5}$ *e)* $\frac{3}{4}$

Resolução: O número de elementos do espaço amostral é 4, pois Rafael encontra-se no centro da cidade podendo se deslocar para a região rural, comercial, residencial urbano ou residencial suburbano. Considere A o conjunto formado com as opções que estão abaixo de 31^oC que são a região rural, residencial urbano e residencial suburbano, logo $n(A) = 3$. Portanto $P(A) = \frac{3}{4}$.

5) (ENEM 2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A Figura 3.13 apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Figura 3.13: Campanha de vacinação contra a gripe suína

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Fonte: Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

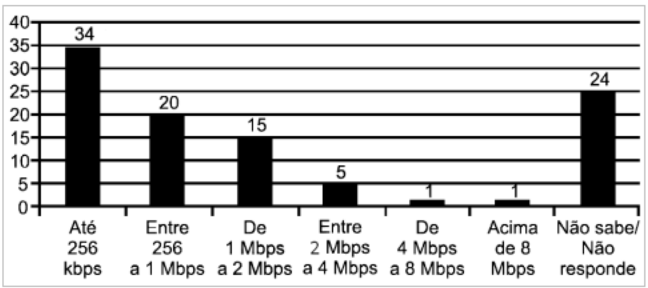
Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

a) 8%. *b) 9%.* *c) 11%.* *d) 12%.* *e) 22%.*

Resolução: Considere S o total de pessoas atendidas, logo $n(S) = 42+22+56+30+50 = 200$. Considere A o conjunto dos portadores de doenças crônicas que, de acordo com a Figura 3.13, foram 22 vacinadas, logo $n(A) = 22$. Portanto $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{22}{200} = \dfrac{11}{100} = 0,11$.

6) (ENEM 2011) O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).

Figura 3.14: % domicílios segundo a velocidade de conexão à internet



Fonte: Disponível em: http://agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

a) 0,45 *b) 0,42* *c) 0,30* *d) 0,22* *e) 0,15*

Resolução: Considere S o conjuntos dos domicílios pesquisados, logo $n(S) = 34 + 20 + 15 + 5 + 1 + 1 + 24 = 100$. O conjunto A é formado pelos domicílios com banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps, logo $n(A) = 15 + 5 + 1 + 1 = 22$. Portanto $P(A) = \dfrac{22}{100} = 0,22$.

7) (ENEM 2010) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves. Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

a) 63,31% *b) 60,18%* *c) 56,52%* *d) 49,96%* *e) 43,27%*

Resolução: Considere S o conjunto das especíes de animais, logo $n(S) = 263 + 122 + 93 + 1132 + 656 = 2266$. Considere A ser uma borboleta, daí $n(A) = 1132$. Com isto: $P(A) = \dfrac{1132}{2266} = 0,49955 \cong 0,4996$.

8) (OSEC-SP) Quando dois indivíduos que manifestam um caráter dominante têm um primeiro filho que manifesta o caráter recessivo, a probabilidade de um segundo filho ser igual ao primeiro é:
a) $\dfrac{3}{4}$ *b)* $\dfrac{1}{2}$ *c)* $\dfrac{1}{4}$ *d)* $\dfrac{1}{8}$ *e)* $\dfrac{1}{16}$

Resolução: Se os indivíduos manifestam caráter dominante e tem um filho com o caráter recessivo, eles são heterozigotos (Aa).

Tabela 3.2: Quadro comparativo entre os gens de indivíduos heterozigotos

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Fonte: George Martins Gomes

A probabilidade do segundo filho independe do primeiro, então por ter caráter recessivo (aa), de acordo com a tabela, a probabilidade é a mesma do primeiro, que é de $\dfrac{1}{4}$.

3.5 Propriedades das Probabilidades

A Probabilidade, definida anteriormente, satisfaz as seguintes propriedades:

i) Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração

Sabe-se que $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ e $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)}$.

Além disso, se $A \subset B$

segue que $n(A) \leq n(B)$.

Daí, como $n(S) > 0$

$$\frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)}$$

isto é $P(A) \leq P(B)$.

$\square$

ii) Se A é um evento, então $0 \leq P(A) \leq 1$. OBS: Se $A = \emptyset$, $P(A) = 0$ e se A for um evento certo, $P(A) = 1$.

Demonstração

É fato que:

(*) $\emptyset \subset A$, o que implica, pelo item anterior que $P(\emptyset) \leq P(A)$.

Como $\emptyset$ tem zero elementos,

$P(\emptyset) = \dfrac{0}{n(S)} = 0.$

Assim

$0 \leq P(A)$.

(**) $A \subset S$

Deste modo,

$P(A) \leq P(S)$.

Ora

$P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = 1,$

donde concluímos,

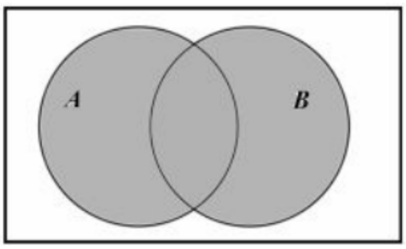
$P(A) \leq 1$.

$\square$

iii) Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$. OBS: Se A e B são mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \emptyset$. Portanto $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Demonstração

Figura 3.15: Diagrama de Venn representando União



Fonte: George Martins Gomes

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Sabe-se que $n(A) = n(A \cap B^C) + n(A \cap B)$

e $n(B) = n(A^C \cap B) + n(A \cap B)$

Como $(A \cup B) = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^C)$

$n(A \cup B) = n(A \cap B^C) \cup n(A \cap B) \cup n(B \cap A^C)$

$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Daí, dividindo-se ambos os membros por $n(S)$ tem-se

$\dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{n(A)}{n(S)} + \dfrac{n(B)}{n(S)} - \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Além do mais, se A e B são disjuntos, então $A \cap B = \emptyset$ e consequentemente

$P(A \cap B) = 0$

Conclui-se que, neste caso,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$\square$

iv) Se A é um evento e A^C é seu complementar, então P(A^C) = 1 – P(A).

Demonstração

Dado que:

$A \cup A^C = S$

e

$A \cap A^C = \emptyset$

tem-se, pelo item anterior

$P(A \cup A^C) = P(S)$

$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$

Logo

$P(A) + P(A^C) = P(S)$

$P(A) + P(A^C) = 1$

$P(A^C) = 1 - P(A)$.

$\square$

Exemplos:

1) Uma urna contém vinte bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento que consiste na retirada de uma bola. Calcule a probabilidade de $A \cup B$ sabendo que A: a bola retirada possui um número múltiplo de 2 e B: a bola retirada possui um número múltiplo de 5.

Resolução: O Espaço Amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, então $n(S) = 20$.

O Evento $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, então $n(A) = 10$.

Portanto $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{10}{20}$.

O evento $B = \{5, 10, 15, 20\}$, então $n(B) = 4$.

Portanto $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{4}{20}$.

O evento em comum entre A e B temos $A \cap B = \{10, 20\}$, então $n(A \cap B) = 2$.

Portanto $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{2}{20}$. De acordo com a propriedade iii), temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \dfrac{10}{20} + \dfrac{4}{20} - \dfrac{2}{20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$.

2) De um grupo de 200 pessoas, 160 têm o fator Rh positivo, 100 têm sangue tipo O e 80 têm fator Rh positivo e sangue tipo O. Se uma dessas pessoas for selecionada ao acaso, qual a probabilidade de:

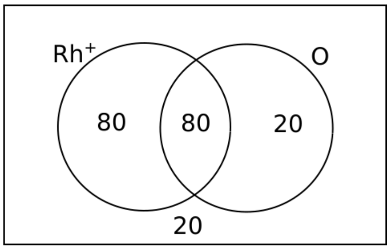
a) seu sangue ter fator Rh positivo?

b) seu sangue não ser tipo O?

c) seu sangue ter fator Rh positivo ou ser tipo O?

Resolução: Se temos 80 pessoas com o fator Rh positivo e sangue tipo O, então das 160 que tem o fator Rh positivo 80 tem outro tipo de sangue, e das 100 do tipo O indica que 20 tem fator Rh negativo. Se das 200 pessoas do grupo 80 tem fator Rh positivo e é do tipo O , 20 são do tipo O mas com o fator Rh negativo e 80 tem outro tipo de sangue mas com fator Rh positivo. Então $200 - 80 - 80 - 20 = 20$ que indica que nem é do tipo O e nem tem o fator Rh positivo.

Figura 3.16: Diagrama de Veen relativo ao fator Rh^+ e o tipo sanguíneo O



Fonte: George Martins Gomes

Sendo S o grupo de pessoas, $n(S) = 200$, $n(Rh^+) = 160$ e $n(O) = 100$.

a) Do espaço amostral de 200 pessoas, 160 tem o fator Rh^+ positivo, portanto $P(Rh^+) = \frac{n(Rh^+)}{n(S)} = \frac{160}{200} = \frac{4}{5}$.

b) Do espaço amostral de 200 pessoas, 100 tem o tipo O, logo $P(O) = \frac{n(O)}{n(S)} = \frac{100}{200}$. Como desejamos saber a probabilidade do sangue não ser do tipo O, pela propriedade iv), calcula-se a probabilidade complementar $P(O^C) = 1 – P(O) = 1 - \frac{100}{200} = \frac{(200-100)}{200} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$.

c) Pela propriedade iii) temos, $P(Rh^+ \cup O) = P(Rh^+) + P(O) - P(Rh^+ \cap O) = \frac{160}{200} + \frac{100}{200} - \frac{80}{200} = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}$.

3) Fui lanchar e comprei uma caixinha com 18 coxinhas: 10 de frango, 6 de calabresa e 2 de queijo. Se todas são iguais no seu formato e peso e uma coxinha é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de:

a) a coxinha não ser de frango?

b) a coxinha ser de queijo ou calabresa?

c) a coxinha não ser de queijo, nem de frango?

Resolução: Considere C, F e Q o conjunto de quem comeu respectivamente coxinha de calabresa, frango e queijo. Temos um total de 6 coxinhas de calabresa, n(C) = 6, mais 2 coxinhas de queijo, n(Q) = 2, mais 10 coxinhas de frango n(F) = 10, com um total de 18 coxinhas, com isto, n(S) = 18. Então temos P(C) = $\frac{6}{18}$, P(Q) = $\frac{2}{18}$, P(F) = $\frac{10}{18}$.

a) Pela propriedade iii) temos, $P(F^C) = 1 - P(F) = 1 - \frac{10}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$.

b) Observa-se que o fato da coxinha ser de queijo ou calabresa significa que ela não pode de frango, com isto, P(Q $\cup$ C) = P(F^C) = $\dfrac{4}{9}$.

c) Observa-se que o fato da coxinha não ser de queijo nem de frango ela só pode ser de calabresa, portanto P(C) = $\dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$.

4) Numa cidade, 30% dos homens se declararam casados, 40% se declararam solteiros, 20% se declararam desquitados e 10% se declararam viúvos. Um homem é escolhido ao acaso.

a) Qual a probabilidade de ele ser solteiro?

b) Qual a probabilidade dele não ser casado?

c) Qual a probabilidade de ele ser solteiro ou desquitado?

Resolução: É importante observar que nas questões que envolvem porcentagem sejam transformadas para números decimais devido os cálculos de probabilidades variarem de 0 até 1.

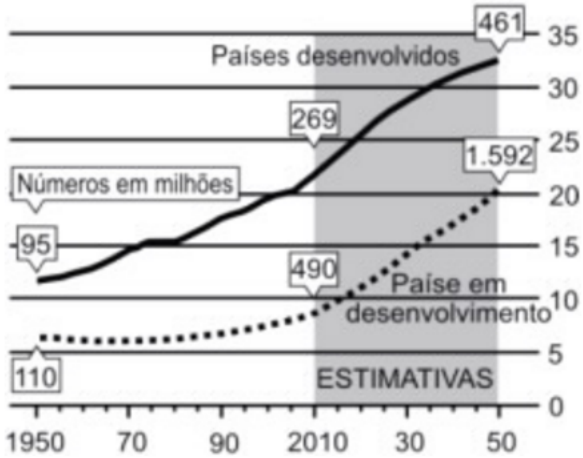
a) Considere o evento T: se declarou solteiro, então a probabilidade dele ser solteiro é de P(T)= 40% = 0,4.

b) Considere C: se declarou casado, logo C^C: não ser casado, portanto a probabilidade dele não ser casado é, pela propriedade iv) P(C^C)= 1 – P(C) = 1 – 30% = 1 – 0,3 = 0,7.

c) Considere D: se declarou desquitado, então a probabilidade de ser solteiro ou desquitado é, pela propriedade iii): P(T $\cup$ D) = P(T) + P(D) – P(T$\cap$D) , como não existe possibilidade de ser solteiro e dequitado ao mesmo tempo, eles são mutuamente exclusivos, portanto P(T $\cup$ D) = P(T) + P(D) = 40% +20% = 0,4 + 0,2 = 0,6.

5) (ENEM 2009) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte (Figura 3.17), são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.

Figura 3.17: Gráfico da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais



Fonte: "Perspectivas da População Mundial", ONU, 2009.

Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de

a) $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{7}{20}$ *c)* $\frac{8}{25}$ *d)* $\frac{1}{5}$ *e)* $\frac{3}{25}$

Resolução: Em 2050, nos países desenvolvidos, a população com 60 anos ou mais será de 461 bilhões que encontra-se entre as porcentagens 30 e 35, pouco mais próximo de 30. Com isto o valor aproximado é 32% que equivale à $\frac{32}{100} = \frac{8}{25}$.

6) (ENEM 2010) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o rock e a MPB. O quadro a seguir (Tabela 3.3) registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1 000 alunos de uma escola. Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos. Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado, qual é a probabilidade de ele preferir somente MPB?

Tabela 3.3: Tabela que compila as preferências musicais dos alunos

Preferência musical	Rock	Samba	MPB	Rock e Samba
número de alunos	200	180	200	70

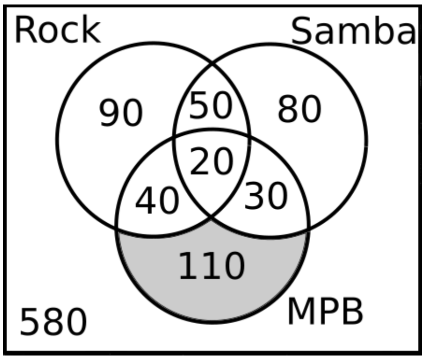
Preferência musical	Rock e MPB	Samba e MPB	Rock, Samba e MPB
número de alunos	60	50	20

Fonte: ENEM 2010.

a) 2% *b) 5%* *c) 6%* *d) 11%* *e) 20%*

Resolução:

Figura 3.18: Diagrama de Veen com os estilos musicais dos alunos



Fonte: George Martins Gomes

Considere S o conjunto de preferência musical de uma escola, logo $n(S) = 1000$. Considere A os que gostam apenas de MPB, daí $n(A) = 110$, como ilustrado na Figura 3.18 acima. Portanto $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{110}{1000} = \dfrac{11}{100} = 0,11$.

7) Na escola Ambiental tinha um grupo de 500 estudantes que cursavam o Ensino Médio. No final do ano, 80 ficaram na recuperação em Matemática, 150 em Física e 10 nas duas. Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que:

a) ele tenha ficado na recuperação das duas disciplinas?

b) ele tenha ficado na recuperação somente em Matemática?

c) ele não tenha ficado na recuperação em Matemática e nem em Física?

Resolução: Considere S o conjunto dos alunos que cursou o Ensino Médio na escola Ambiental, logo $n(S) = 500$. Consire M e F os alunos que ficaram em Matemática e em Física, respectivamente, logo $n(M) = 80$, $n(F) = 150$ e $n(M \cap F) = 10$.

a) Do espaço amostral das 500 pessoas temos 10 que ficaram em recuperação nas duas disciplinas, portanto $P(M \cap F) = \dfrac{n(M \cap F)}{n(S)} = \dfrac{10}{500} = \dfrac{1}{50}$.

b) Considere D o conjuntos dos alunos que ficaram em recuperação somente em Matemática. Se 80 ficaram em Matemática e 10 ficaram em Matemática e Física, então 70 ficaram apenas em Matemática, logo $n(D) = 70$. Portanto $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{70}{500} = \dfrac{7}{50}$.

c) Considere E os alunos que não ficaram em recuperação nenhuma. Como $n(S) = n(M \cup F) + n(E)$ temos $1 = P(M \cup F) + P(E) \Leftrightarrow P(E) = 1 - P(M \cup F)$.

Pela propriedade iii), $P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$. Se $P(M) = \dfrac{n(M)}{n(S)} = \dfrac{80}{500}$

e $P(F) = \dfrac{n(F)}{n(S)} = \dfrac{150}{500}$, então $P(M \cup F) = \dfrac{80}{500} + \dfrac{150}{500} - \dfrac{10}{500} = \dfrac{220}{500}$. Se $P(E) = 1 - P(M \cup F)$, então $P(E) = 1 - \dfrac{220}{500} = \dfrac{280}{500} = \dfrac{14}{25}$.

3.6 Probabilidade Condicional

Considere um espaço amostral S e consideremos dois eventos, A e B. Chama-se probabilidade de A condicionado a B à probabilidade de ocorrência do evento A, sabendo-se que já ocorreu o evento B. Então P(A|B) é a probabilidade que queremos calcular de A condicionada a B, então o espaço amostral se restringirá aos elementos de B e determinará $P(A|B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$, com $n(B) > 0$, daí:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{onde } P(B) > 0. \tag{3.2}$$

A seguir apresentaremos alguns resultados importantes associados à Probabilidade condicional.

Teorema da multiplicação: A probabilidade que ocorra simultaneamente dois eventos, P(A∩B), pode ser calculada como:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B). \tag{3.3}$$

Demonstração

P(A|B) $= \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow$ P(A∩B) = P(B)·P(A|B).

□

Além disso, uma importante relação entre eventos pode ser definida usando Probabilidade condicional.

Sejam $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ eventos que constituem uma partição do espaço amostral S, isto é:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n =$ S.

P(A_i) > 0, para todo $i = 1$, 2, 3, ..., n

$A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

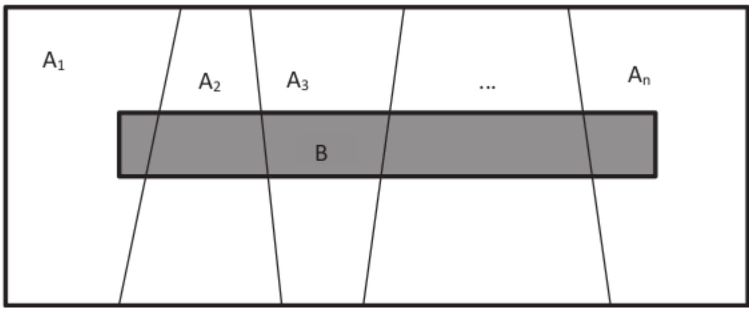
Como a união de todos os A_i's é o espaço amostral segue que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

O fato de que alguns desses termos ser o conjunto vazio não invalida o resultado, uma vez que $A \cup \emptyset = A$. Por definição de partição, os A_i's são mutuamente exclusivos dois a dois, logo os eventos $A_i \cap B$ também o são. Então, podemos escrever

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

Figura 3.19: Partição do espaço amostral para o Teorema da Probabilidade Total



Fonte: George Martins Gomes

Teorema da Probabilidade Total: Assim, se B, representado na Figura 3.19 pela área escura particionada, representa um evento, temos o seguinte teorema, conhecido como Teorema da Probabilidade Total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i). \tag{3.4}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} B &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \cdots \cup (B \cap A_n) \\ P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots + P(B \cap A_n) \\ P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n) \end{aligned}$$

□

Teorema de Bayes:

Seja B, um evento qualquer de S e $A_1, A_2, ..., A_n$ uma partição de S e P(B) > 0, então para $i = 1, ..., n$ tem-se

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i)}. \tag{3.5}$$

A demonstração do Teorema de Bayes é consequência dos teoremas apresentados anteriormente. Suponha-se que o evento B tenha ocorrido. Essa informação será usada para calcular a probabilidade a posteriori do evento A_i, isto é, vamos calcular $P(A_i|B)$. Por definição, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ \text{Com } P(A_i \cap B) &= P(A_i).P(B|A_i), \text{ tem-se:} \\ P(A_i|B) &= \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(B)} \end{aligned}$$

Então, se P(B)> 0 e $i = 1, 2, 3, ..., n$, pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \cdots + P(A_n).P(B|A_n)}, \text{ ou}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i)}.$$

□

Independência: Dados dois eventos A e B de um espaço amostral S, diremos que A independe de B se na ocorrência de B não afeta a ocorrência de A, com isto P(A|B) = P(A). Portanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.6}$$

Exemplos:

1) Retirando-se uma carta de um baralho comum e sabendo que saiu uma dama, qual a probabilidade de que a carta seja de ouros?

Resolução: A princípio temos que o espaço amostral é formado pelas 52 cartas do baralho, mas no momento que ele diz que saiu uma dama, isso nos garante que o espaço amostral deixou de ter 52 elementos e passou a ter 4, pois temos apenas 4 damas em todo o baralho, então $n(B) = 4$. No momento que ele diz que a probabilidade desejada seria das cartas de dama ser de ouro, temos das cartas de ouros apenas uma dama, então $n(A \cap B) = 1$. Portanto P(A|B) $= \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{1}{4}$.

2) Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o *voo, cada turista responde a duas perguntas: - Já voou antes? - Já esteve em Natal? Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontram-se organizados no quadro seguinte:*

Tabela 3.4: Quadro com o número de passageiros com destino à Natal

	Voando pela 1^a vez	Já havia voado	Total
Não conhecia Natal	83	22	105
Já conhecia Natal	23	12	35
Total	106	34	140

Fonte: Autor Desconhecido

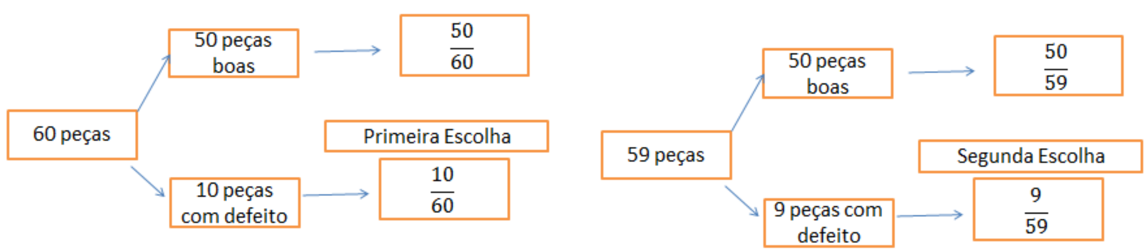
Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele nunca tinha viajado de avião. Qual a probabilidade de que ele já conhecesse Natal?

Resolução: Considere S o conjunto formado pelo total de passageiros no avião, logo $n(S) = 140$. Considere A já conhecer Natal e B viajar pela primeira vez de avião, então $n(A \cap B)$ é o número de passageiros que já conheciam Natal e voaram pela primeira vez e $n(B)$ o número de passageiros que voaram pela primeira vez. Com isso, de acordo com a tabela acima, $n(A \cap B) = 23$ e $n(B) = 106$, portanto $P(A|B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{23}{106}$.

3) Um lote contém 50 peças boas e 10 defeituosas. Uma peça é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra peça é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de ambas serem defeituosas?

Resolução:

Figura 3.20: Árvore das possibilidades das escolhas das peças



Fonte: George Martins Gomes

O total de peças do lote é 60, portanto o espaço amostral é 60, das quais temos 10 com defeitos, P(A) $= \dfrac{10}{60}$ ao retirar uma com defeito, o espaço amostral passa a ser 59 e temos agora 9 peças com defeito, P(B/A) $= \frac{9}{59}$. Logo, a probabilidade da primeira peça ter defeito é $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$, e para segunda peça ter defeito é $\frac{9}{59}$. Então, para que tenhamos as duas peças defeituosas teremos: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{59} = \frac{3}{118}$.

4) Uma urna contém 10 bolas pretas e 8 bolas vermelhas. Retiramos 3 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de as duas primeiras serem pretas e a terceira vermelha?

Resolução: Considere S o total de bolas, logo $n(S) = 18$. Considere A a primeira retirada, B a segunda retirada e C a terceira retirada. Temos inicialmente 10 bolas pretas, quando sair uma bola ficaremos com 9 pretas e quando retirarmos a terceira bola, essa por sua vez vermelha, teremos 8 bolas, com isto temos: P(A) $= \frac{10}{18}$; P(B) $= \frac{9}{17}$; P(C) $= \frac{8}{16}$. Portanto temos: P = P(A).P(B).P(C) $= \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} = \frac{5}{34}$.

5) Se um certo casal tem 3 filhos, então qual a probabilidade de os 3 serem do mesmo sexo, sabendo que o primeiro filho é homem?

Resolução: Considere A o primeiro filho, B o segundo filho e C o terceiro filho e considere $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$ respectivamente as probabilidades do primeiro, segundo e terceiro filho. Se o primeiro filho é homem então é um evento certo, logo a probabilidade $P(A) = 1$. Como os demais filhos tem que ser do mesmo sexo, então os outros dois tem que ser também homens. Portanto a probabilidade do segundo filho é de $\frac{1}{2}$ e a do terceiro também é $\frac{1}{2}$. Portanto, $P = P(A).P(B).P(C)$=1.$\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

6) Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade do primeiro atingir o alvo é P(A) $= \frac{1}{3}$ e a probabilidade do segundo atingir o alvo é P(B) $= \frac{2}{3}$. Admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

a) ambos atingirem o alvo?

b) ao menos um atingir o alvo?

Resolução:

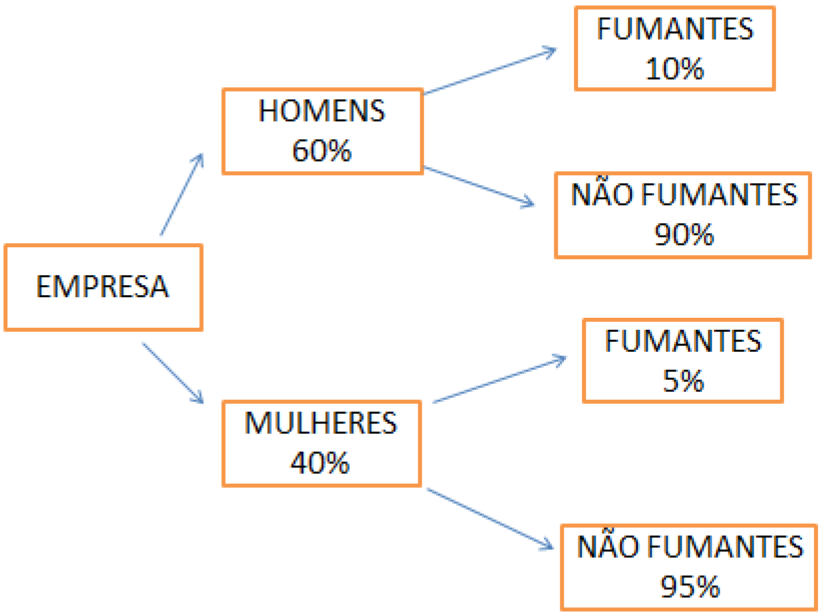
a) Deseja-se calcular a probabilidade que ambos atingirem o alvo com isto temos que calcular a probabilidade que A atinja o alvo e B também atinja o alvo, com isto queremos P(A∩B) = P(A) . P(B) $= \frac{1}{3} . \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

b) No momento que ele deseja que ao menos um atinja, ele deseja calcular que apenas um atinja como também os dois atinjam, ou seja , deseja calcular P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A∩B) = $\frac{1}{3}$ + $\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{9}$ = $\frac{(3+6-2)}{9}$ = $\frac{7}{9}$.

7) Numa empresa, 60% são homens, dos quais, 10% são fumantes. Sabe-se que 5% das mulheres são fumantes. Escolhendo-se ao acaso um dos fumantes dessa empresa, qual a probabilidade de ser uma mulher?

Resolução:

Figura 3.21: Árvore das possibilidades de gêneros e vício



Fonte: George Martins Gomes

Se temos que 60% dos funcionários da empresa são homens, então 40% é mulher. Se temos que 10% dos homens são fumantes então: $\frac{60}{100}.\frac{10}{100} = \frac{600}{10000} = \frac{6}{100}$ = 0,06 do total são homens fumantes. Se temos que 5% das mulheres são fumantes então: $\frac{40}{100}.\frac{5}{100} = \frac{200}{10000} = \frac{2}{100}$ = 0,02 do total de fumantes são mulheres fumantes, num total de 0,06 + 0,02 = 0,08 de fumantes do total. Como deseja calcular a probabilidade de um dos fumantes, então nosso espaço amostral é de 0,08 e que seja mulher então $P(M|F) = \frac{P(M)}{P(M \cap F)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

8) (ENEM 2010) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres *era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:*

Tabela 3.5: Quadro da quantidade de funcionárias por tamanho de calçado.

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Fonte: ENEM 2010

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

a) $\frac{1}{3}$ *b)* $\frac{1}{5}$ *c)* $\frac{2}{5}$ *d)* $\frac{5}{7}$ *e)* $\frac{5}{14}$

Resolução: Analisando a tabela 3.5, observa-se que o número de funcionários cujo calçado é maior que 36 é igual a (1 + 10 + 3) = 14, desses os que calçam 38 temos exatamente 10. Com isto, ao ser escolhido ao acaso um funcionário que calce mais que 36 a probabilidade dela calçar 38 é P(A) $= \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

9)(UFPE)Um teste para uma DST dá o resultado correto em 98% dos casos; ou seja, se uma pessoa tem a doença e faz o teste, este terá 98% de probabilidade de ser positivo; e, se uma pessoa não tem a doença e faz o teste, este terá 98% de probabilidade de ser negativo. Admita que, da população de uma grande cidade, 0,5% tem a DST. Se uma pessoa da cidade se submete ao teste e o resultado foi positivo, qual a probabilidade percentual de ela ter a DST?

Resolução: Considere os eventos P : teste é positivo e D : a pessoa é doente. O que temos: $P(P|D) = 0,98$ e $P(D) = 0,005$. O que queremos?

$$P(D|P) \quad = \quad \frac{P(D \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|D).P(D)}{P(P|D).P(D) + P(P|\overline{D}).P(\overline{D})}$$

$$P(D|P) = \frac{0,98 \times 0,005}{0,98 \times 0,005 + 0,02 \times 0,995}$$

$$P(D|P) = \frac{0,0049}{0,0049 + 0,0199}$$

$$P(D|P) = \frac{0,0049}{0,0248}$$

$$P(D|P) = 0,1976.$$

10) Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso um cartão do bolso e o mostra a um jogador. Qual a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha e de a outra face, mostrada ao jogador ser amarela.

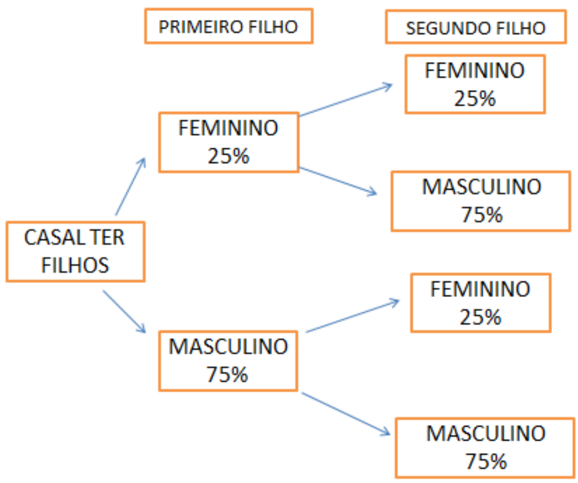
Resolução: Temos 3 cartões, todos distintos, então a probabilidade de retirar um cartão do bolso é de $\frac{1}{3}$. Depois de retirado ele pode ter duas cores, ou vermelho ou amarelo, com isto a probabilidade do juiz ver a parte vermelha é $\frac{1}{2}$. Portanto a probabilidade que retire um cartão do bolso e seja vermelho e do outro lado amarelo é $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

11)(FAMECA SP) Por uma série de razões, a probabilidade de um casal ter um filho do sexo feminino é 25%. A probabilidade de esse casal ter dois filhos de sexos diferentes é

a) 6,25%. *b) 12,5%.* *c) 37,5%.* *d) 56,25%.* *e) 75%.*

Resolução:

Figura 3.22: Árvore das possibilidades do sexo das crianças do casal



Fonte: George Martins Gomes

Temos que a probabilidade de um casal ter um filho do sexo feminino é de $25\% = \frac{25}{100}$. Considere A o primeiro filho e B o segundo filho e T os dois filhos serem de sexos diferentes. Com isto, a probabilidade de ter um filho do sexo masculino é de $75\% = \frac{75}{100}$. Existem duas possibilidades de analisar: uma é se o primeiro filho for do sexo masculino então obrigatoriamente o segundo tem que ser do sexo feminino, e a outra análise é se o primeiro filho for do sexo feminino o segundo filho tem que ser obrigatoriamente do sexo masculino. Considere $P(A)$ a probabilidade do primeiro filho e $P(B)$ a do segundo filho. Com isto temos: $P(A) = \frac{75}{100} . \frac{25}{100} = \frac{1875}{10000} = 0{,}1875$ e $P(B) = \frac{25}{100} . \frac{75}{100} = \frac{1875}{10000} = 0{,}1875$, então $P(T) = P(A) + P(B) = 0{,}1875 + 0{,}1875 = 0{,}375$.

12) O mês de outubro tem 31 dias. Numa certa localidade, chove 5 dias do mês de outubro. Qual a probabilidade de não chover nos dias primeiro e segundo de outubro?

Resolução: Dos 31 dias temos 5 dias que chove, portanto 26 dias sem chover. Então a probabilidade que o primeiro dia não chova é de $\frac{26}{31}$. Não chovendo nesse dia, restará 30 dias do mês para que ocorra chuva em 5 dias, não ocorrendo em 25, então a probabilidade que não chova no segundo dia é de $\frac{25}{30}$. Então a probabilidade que não chova nem no primeiro nem no segundo dia é de: P $= \frac{26}{31} \cdot \frac{25}{30} = \frac{65}{93}$.

13)(ITA) Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso população.

Resolução: Seja n o número de homens e mulheres. Se 5% dos homens são daltônicos e 0,25% das mulheres são daltônicas, então temos, $0,05n$ e $0,0025n$, homens e mulheres daltônicos, respectivamente. Portanto, o número de daltônicos é $0,05n + 0,0025n = 0,0525n$. Então, a probabilidade de selecionar uma mulher daltônica é $\frac{\frac{25}{100} \cdot n}{\frac{525}{100} \cdot n} = \frac{25}{525} = \frac{1}{21}$.

Capítulo 4

Considerações Finais

Este ano ministrei aulas no Ensino Médio e em específico o assunto de Probabilidade. Tive a oportunidade de trabalhar este material e observei que teve uma maior participação dos alunos, onde gerou inúmeros questionamentos e um maior envolvimento no processo de ensino-aprendizagem. Com isto, percebi que o material além do conteúdo teórico, dispõe de resoluções de uma quantidade significativa de questões, com situações problema que envolvam o cotidiano do aluno. Portanto, sugiro que outras pessoas usem esse material em seu ambiente de trabalho.

Bibliografia

[1] AMABIS, Jose et al. *Biologia em contexto.* 1^a Ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF, 1997.

[3] GADELHA, A. *Uma pequena história da Probabilidade.* Notas de aula, 2004. Disponível em: ¡www.mat.ufrgs.br/ viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf¿ Acesso: 24 de Abril de 2016.

[4] HURTADO, N. H.; COSTA, J. F. S. *A probabilidade no ensino médio: a importância dos jogos como ferramenta didática.* In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL "EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA – DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI", 1999, Florianópolis. Anais... Florianópolis, 1999.

[5] LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. *O desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística.* In: XVIII Encontro Regional dos Professores de Matemática, 2005, Campinas. Estocástica nas Séries Iniciais, 2005. p. 1-8. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf. Acesso em 10/05/2016.

[6] MORAES, L. C. L. *Ensino de Probabilidade: Historicidade e Interdisciplinaridade.* Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (Dissertação de Mestrado profissional em Matemática) Seropédica - Rio de Janeiro, 2014.

[7] PEDRACINI, V. D.; CORAZZA-NUNES, M. J.; GALUCH, T.B.; MOERIRA, A. L. O. R.; RIBEIRO, A. C. *Ensino e Aprendizagem de biologia no ensino e a apropriação de saber científico e biotecnológico.* Revista Electrónica Enseñanza de lasCiencias , v.6,p. 299-309, 2007.

[8] VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.* 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

[9] HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 5 - Combinatória e Probabilidade.* 7^a Edição. São Paulo: Atual, 2004.

[10] http://www.mec.gov.br/