UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Mestrado Profissional em Matemática

VALDSON DAVI MOURA SILVA

ABORDAGEM DAS NOÇÕES DE PROBABILIDADE NOS LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

CAMPINA GRANDE - PB
2015

VALDSON DAVI MOURA SILVA [†]

ABORDAGEM DAS NOÇÕES DE PROBABILIDADE NOS LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Divanilda Maia Esteves.

CAMPINA GRANDE - PB
2015

[†]Bolsista CAPES

S586a Silva, Valdson Davi Moura.
Abordagem das noções de probabilidade nos livros do Ensino Fundamental II [manuscrito] / Valdson Davi Moura Silva. - 2015.
76 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Prof. Dr. Divanilda Maia Esteves, Departamento de Estatística".

1. Probabilidade. 2. Ensino Fundamental. 3. Livros didáticos. I. Título.

21. ed. CDD 519.2

VALDSON DAVI MOURA SILVA

ABORDAGEM DAS NOÇÕES DE PROBABILIDADE NOS LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 11 / 12 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

DMEsteves

Profa. Dra. Divanilda Maia Esteves (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Ricardo Alves de Olinda

Prof. Dr. Ricardo Alves de Olinda
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Francisco Antônio Morais de Souza
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

À minha querida esposa, por todo apoio e paciência direcionados a mim; aos meus pais, meus primeiros professores; e aos meus amigos, alunos e familiares que me motivaram.

Agradecimentos

A Deus acima de tudo, pelo dom da vida e pelas maravilhas que ele me concedeu. Grande Mestre e protetor.

À minha amada esposa, Luciana, a quem eu dedico essa conquista, foi ela que sempre me incentivou e ajudou nos momentos difíceis da minha vida, dando-me força nas horas que eu mais precisava, e sendo companheira e compreensiva nos momentos que estava ausente, tendo que abrir mão de sua companhia para me concentrar nos estudos. Agradeço ao meu filho Vitor, minha fonte de energia para que eu pudesse prosseguir dia após dia.

Aos meus pais, Luiza e Valdi, que sempre torceram e me apoiaram nos estudos, ensinando-me princípios que levarei por toda vida, e também aos meus irmãos por sempre acreditarem em mim.

À minha orientadora, Dra Divanilda Maia Esteves, pelo apoio, pelos conselhos, pela paciência, profissionalismo e pela dedicação e, especialmente, por ter acreditado na concretização desse trabalho. Agradeço também ao professor Dr. Gustavo H. Esteves, por ter doado uma parte do seu tempo com dicas e orientações para usar o LaTeX.

À instituição Polícia Militar onde aprendi muito, e aos amigos policiais, principalmente por me fazerem acreditar, através de seus exemplos como grandes profissionais que são, querendo um mundo mais justo e melhor para se viver.

A todos os meus amigos da turma de mestrado PROFMAT 2013.1 da UEPB: Alcione, Alex, Anilton, Eduardo, Fernando, Gilmar, Joab, Joselito, Loana, Marcos, Osmar, Rivanildo, Ronaldo, Rosival, Samara, Sérgio e Vinícius, por fazerem parte da minha formação e por me darem força no decorrer dessa caminhada.

Aos membros da banca, pelas suas valiosas contribuições.

Aos professores do programa do mestrado PROFMAT, pelos conhecimentos e ricas contribuições transmitidos ao longo do curso.

À Universidade Estadual da Paraíba por promover este Mestrado junto ao PROFMAT SBM, em rede Nacional, e à CAPES, pela concessão da bolsa.

A todos que estiveram ao meu lado, contribuindo de forma direta ou indireta para que eu superasse os obstáculos que foram surgindo ao longo do caminho, sempre acreditando em mim e colaborando para que eu conseguisse realizar esse grande sonho.

Resumo

Os estudos da Probabilidade no Ensino Fundamental só começaram a ser sugeridos aqui no Brasil em 1997, a partir dos PCN, o que de certa forma é recente, ao contrário de outros países como foram citados por Lopes [9]. Reconhecendo a necessidade do conteúdo Noções de Probabilidade ser inserido na grade curricular, bem como a importância de avaliar o material didático utilizado pelo professor no seu dia a dia, neste trabalho analisaremos três coleções de livros didáticos de Matemática, sugeridos pela PNLD 2014. O objetivo é responder o seguinte questionamento: "Como estão sendo abordadas as Noções de Probabilidade nos livros didáticos do Ensino Fundamental II?". Os dados coletados das análises revelaram que os livros didáticos abordam tal conteúdo, todavia, em alguns casos, deixam lacunas quanto à exposição do mesmo e/ou limitação nas atividades e situações-problema resolvidas.

Palavras Chaves: Probabilidade. Ensino Fundamental. Livros Didáticos.

Abstract

The studies of probability the elementary school have just begun in Brazil in 1997, through on PCN, in which it is very recent, instead from some other countries that have been written by Lopes [9]. Recognizing the probability notion content needs to being inserted at the curriculum grade, and also the importance of evaluating the school didactic material that is used by the teacher in his day to day, at this work we will analyze three didactic books of Mathematics, suggested by PNLD 2014. The main goal is to answering the following questionnaire: "How has it been addressed the probability notion in the didactic books from elementary school?". The data collected from the analyses have revealed that the didactic books address such content, however, at some cases, it leaves us some gaps exhibited from itself, or limitation at the activities and resolved situations-problem.

Keywords: Probability. Elementary school. Didactic book.

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas

FUVEST-SP : Fundação Universitária para o Vestibular
MEC : Ministério da Educação
OBMEP : Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN : Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD : Programa Nacional do Livro Didático
PUC-RS : Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
UFRRJ : Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Matemática desempenha um papel central no nosso meio. Em diversas situações do dia a dia, usamos conhecimentos desde os mais simples aos mais complexos dessa área. Uma simples ida ao supermercado pode requerer do sujeito o conhecimento de sistemas básicos de aritmética, noções de porcentagem, de juros, dentre outros conhecimentos que este acionará ao finalizar uma compra.

Perceber e aceitar que a Matemática está presente em praticamente tudo, nos ajuda a entender o mundo ao nosso redor e a poder atuar nele. A apropriação dos conceitos e procedimentos matemáticos básicos contribuirá significativamente para a formação de um cidadão, e, para exercer plenamente a cidadania, é preciso saber contar, comparar, medir, calcular, resolver problemas, construir estratégias, comprovar e justificar resultados, argumentar logicamente, conhecer figuras geométricas, organizar, analisar e interpretar criticamente as informações.

Nesse contexto, podemos destacar Noções de Probabilidade, reforçada nos Parâmetros Curriculares Nacionais, sendo que há sugestão de que tal conteúdo comece a ser abordados no Ensino Fundamental, devido ao seu caráter essencial para desempenho das funções básicas do cidadão brasileiro em suas atividades cotidianas.

Sabemos que existe certa dificuldade ou resistência em ministrar esse conteúdo, muitas vezes pelo pouco tempo que é deixado para explanação do mesmo, guardando-o muitas vezes para ser abordado no final do ano, transmitindo-o de maneira rápida e superficial. Outra questão observada, na preparação das aulas, está associada ao material didático que utilizamos, pois alguns livros didáticos são baseados apenas em definições e fórmulas, deixando de explorar as contextualizações e aplicações nos exemplos propostos ou exercícios resolvidos.

É preciso que nós compreendamos que o ensino da Matemática no Ensino Fundamental tem como objetivos levar o aluno *"a resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos"*(Brasil [2], p.37).

A atuação como professor na escola E.E.E.F.M. Major Veneziana Vital do Rego e os estudos em disciplinas da pós-graduação despertaram alguns questionamentos acerca da abordagem da Probabilidade no Ensino Fundamental, visto que tivemos a oportunidade de rever na disciplina de Matemática Discreta a parte de Análise Combinatória e Probabilidade, já vistos na graduação. Agora, entretanto, alguns conceitos que foram trabalhados no decorrer das aulas de forma mais aprofundada, fazendo-nos compreender que a Probabilidade não é apenas uma continuação do conteúdo de Análise Combinatória, mas uma ferramenta essencial na compreensão de fenômenos presentes na convivência humana.

Segundo os PCN, a probabilidade pode prover a compreensão de vários acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos. Deste modo, entendemos que, se o aluno tiver contato com a probabilidade desde o Ensino Fundamental, o mesmo assimilará com tranquilidade a abordagem que é dada no Ensino Médio e, posteriormente, ingressará no Ensino Superior mais preparado. Acreditamos que não só para a vida acadêmica, mas como prioridade a construção do pensamento, desenvolvimento do raciocínio lógico, conhecer e saber aplicar os conceitos no dia a dia; mostrando assim, não apenas a sua conceituação formal, mas a sua aplicabilidade no cotidiano.

Refletindo acerca desses aspectos, surgiu-nos o seguinte questionamento: Como estão sendo abordadas as Noções de Probabilidade nos livros didáticos do Ensino Fundamental II? No intento de buscar respostas para essa questão, nesse estudo, nosso objetivo é investigar a abordagem conferida ao conteúdo da Probabilidade em três coleções de livros didáticos do ensino fundamental II. No decorrer da análise, elencaremos aspectos positivos e negativos das obras, e, em tópicos seguintes, utilizaremos as informações relevantes para lançarmos uma proposta a ser utilizada na prática docente do professor de Matemática do Ensino Fundamental, proposta esta que contará com situações-problema de apoio.

O nosso trabalho foi organizado e desenvolvido da seguinte maneira. No segundo capítulo trazemos um breve histórico sobre a origem e o desenvolvimento da Probabilidade, em seguida, apresentamos algumas concepções referentes ao tema de nossa pesquisa. No terceiro capítulo é a fundamentação teórica que norteia nosso trabalho, onde fizemos um estudo dos documentos oficiais que orientam o ensino das Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II, e, ainda, as análises de outros pesquisadores sobre a abordagem da Probabilidade e, encerrando o capítulo, apresentamos uma seção que trata do Livro Didático de Matemática. No quarto capítulo são realizadas as análises de três coleções do Ensino Fundamental, observando a introdução do conteúdo de Probabilidade, exercícios resolvidos e exercícios propostos, e por fim, as contextualizações empregadas. No quinto capítulo, tecemos comparações entre os livros didáticos analisados. Por fim, sugerimos algumas atividades que o professor pode trabalhar em paralelo com o livro didático, envolvendo experimentos e exercícios, visando auxiliar tanto o professor quanto o aluno. O sexto e último capítulo, traz algumas considerações e conclusões relacionadas às nossas reflexões.

Capítulo 2

Considerações sobre Probabilidade

2.1 História da Probabilidade

Historicamente, há marcos de antes de Cristo que impulsionaram os estudos da Probabilidade. Nesta seção, apresentaremos alguns dos fatos mais relevantes e os matemáticos que propagaram esses conceitos, tomando por base o resgate histórico feito por Domingues apud Hazzan [6], Boyer [1] e Morgado [12].

Os jogos de azar estão presentes em nossa civilização há milhares de anos, sendo a palavra "azar" derivada de *al zahr*, cujo significado é "dado" em árabe. Existem registros de pinturas egípcias feitas em 3500 a.C, mostrando pessoas jogando dados feitos de um osso do calcanhar (astragalus) que tinham 4 faces. Já no norte do Iraque foram encontrados dados de 6 faces datados de 3000 a.C. O baralho moderno surgiu na França no século XX e, durante as Cruzadas, vários jogos de dados foram trazidos para o Ocidente.

Conta-se que os Romanos também eram apaixonados por jogos de dados e cartas, sendo proibidos pela Igreja Católica durante a Idade Média. Os jogos de azar sempre exerceram um grande fascínio sobre os homens. Provavelmente seja correto afirmar que não teve nenhum tratamento matemático da probabilidade até por volta do final do século XV e início do século XVI.

Girolamo Cardano (1501-1576), médico de Milão, dedicava parte de seu tempo à matemática e era um apreciador dos jogos de azar. Escreveu a primeira obra conhecida em que estuda as probabilidades, chamada de *Liber de Ludo Aleae* (sobre os jogos de Azar). Alguns pesquisadores consideram que esse livro pode ser comparado a um manual para jogadores com informações sobre jogos e orientações para se proteger de adversários com intenções de trapacear. Nesse livro, Cardano trouxe, pela primeira vez, uma definição de Probabilidade como sendo um quociente do número de "casos favoráveis" sobre o número de "casos possíveis". Além disso, Cardano foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto e a escrever um argumento teórico para o cálculo de probabilidades. Ele afirmou que, no lançamento de um dado, a chance de se obter um, três ou cinco era a mesma de se obter dois, quatro ou seis.

Niccolo Tartaglia (1499-1557) também realizou cálculos de probabilidade em seu *Tratado geral sobre números e medidas* publicado em Veneza em 1556.

Desde cedo, Blaise Pascal (1623-1662) interessou-se pela matemática. Aos 16 anos contribuiu de forma notável para geometria com a obra *Essay pour les coniques*. Quando estava com 17 anos planejou a primeira máquina de calcular onde o modelo definitivo é de 1652. Ele se dedicou à Física e também contribuiu significativamente para teoria das probabilidades. Fruto das correspondências com Pierre de Fermat (1601-1665), escreveu seu *Tratado do triângulo aritmético*, estabelecendo os fundamentos para o cálculo de probabilidades.

Fermat, por sua vez, era um jurista por profissão e um apreciador da Matemática, onde deu contribuições importantes para Geometria, Teoria dos Números e Probabilidade. Ficou muito conhecido por suas proposições, entre elas destaca-se *Último Teorema de Fermat* que foi demonstrado 356 anos depois que muitos matemáticos tentaram e não conseguiram demonstrar, entre eles *Gauss e Euler*.

Segundo a História, a origem da Teoria da Probabilidade é atribuída a Pascal e Fermat, devido à aplicação sistemática e ao estabelecimento de regras para solução de problemas. Tudo isso derivou-se de correspondências trocadas entre eles, discutindo as chances associadas a jogos de cartas. Pascal publicou em 1654, um folheto *"sobre o raciocínio em jogos de azar"*, no qual respondia a desafios famosos, propostos por Chevalier de Méré, um inveterado jogador da época.

Um dos problemas apresentados e discutidos entre os matemáticos foi o "problema dos pontos" que consistia em determinar qual deve ser a divisão justa de um prêmio de apostas quando um jogo é interrompido antes do final. A situação era a seguinte: considere uma partida entre dois jogadores que é vencida para quem primeiro conseguir 6 pontos; supondo que os jogadores têm a mesma habilidade no jogo, como será a divisão justa de um prêmio se a partida for interrompida quando um dos jogadores tiver 5 pontos e outro 3?

Inicialmente, devemos considerar que a moeda seja honesta, ou seja, que a chance de sair cara seja a mesma de coroa. A resolução sugerida é dividir o prêmio proporcionalmente às chances, ou seja, às probabilidades de cada jogador vencer o jogo. O problema consiste em como calcular essas chances.

Galileo Galilei (1564-1642) realizou algumas pesquisas voltadas à Probabilidade. Ele fez um estudo completo do número possível de resultados em jogos de dados em sua obra *"Sopra le scorpeta dei dali"* (sobre jogos de dados), onde, provavelmente, tinha conhecimento dos resultados desenvolvidos por Cardano. Porém, teve uma notável percepção analisando o comportamento dos erros em observações astronômicas, identificando características nesses que posteriormente foram descritas pela distribuição normal, tais como aglomeração simétrica em torno do resultado verdadeiro e de que a probabilidade do erro decresce com seu tamanho.

Johannes Kepler (1571-1630) fez algumas observações sobre probabilidade, quando estudava as diferentes opiniões sobre o aparecimento de uma estrela brilhante em 1604, o qual teve o trabalho publicado em 1606 com nome *De Stella nova in pede Serpentarri*.

Christian Huygens (1629-1695), mais conhecido pelas importantes contribuições à Astronomia, à Ótica e à Teoria Ondulatória da Luz, em 1657 fez a primeira publicação sobre Teoria das Probabilidades, chamado *"De Ratiociniis in Ludo Aleae"*. Em 1655, ano que descobriu a primeira lua de Saturno, foi visitar Paris onde ficou sabendo da correspondência entre Pascal e Fermat sobre os problemas de Probabilidade. Huygens resolveu vários problemas relacionados a jogos de azar sem utilizar Análise Combinatória, elaborando seu livro que se tornou famoso e que foi reeditado diversas vezes e usado até o século XVIII como um livro à Teoria da Probabilidade.

Os trabalhos de Pascal, Fermat e Huygens tiveram um papel fundamental e influenciaram vários matemáticos posteriormente. O primeiro grande tratado de Probabilidade foi *"Ars Conjectandi"* (A Arte da Conjectura) escrito por Jacob (Jaques) Bernoulli (1654-1705). Em seu livro J. Bernoulli provou um teorema de grande relevância para Teoria da Probabilidade, chamado *Lei dos Grandes Números*.

O matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754) publicou *Doctrine of Chance*, livro no qual ele desenvolve uma teoria, usando para resolver vários problemas de probabilidade. De Moivre reproduziu um trabalho seu publicado em 1733, em que usa pela primeira vez a distribuição normal, usando uma aproximação para a distribuição binomial. Depois esse resultado foi aperfeiçoado por Laplace que obteve, para sequências de Bernoulli, o *Teorema Central do Limite* e que também é conhecido como o *Teorema de De Moivre-Laplace*.

Podemos citar outros importantes matemáticos que deram uma parcela de contribuição para a Probabilidade, como Nicolaus I Bernoulli (1687-1759), Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Henri Poincaré (1854-1912), entre outros.

As contribuições mais importantes foram os livros de Bernoulli e De Moivre, nesse período inicial da Teoria da Probabilidade antes de Laplace. Nenhum outro livro de maior relevância até 1812 foi publicado, quando Pierre Simon de Laplace (1749-1827) escreveu sua grande obra *Théorie Analytique des Probabilités*, publicado em dois volumes nos quais faz referência a vários problemas de probabilidades, aplicando novos métodos, como o das funções geradoras, aproximações para probabilidades usando os métodos do cálculo integral, etc. Os fundamentos da Teoria da Probabilidade foram colocados por Laplace em uma forma que praticamente não teve modificação até o início do século XX e é chamada hoje em dia de concepção clássica.

Laplace, nesses seus livros, fez novas contribuições e reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores. Após essa publicação, Laplace deu um novo rumo aos estudos da Probabilidade, aos quais outros matemáticos como Poisson, Gauss e Thomas Bayes deram continuidade. Segundo Boyer [1], a Teoria das Probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. Ele também fez contribuições para a mecânica analítica, onde estudou o problema da estabilidade do sistema solar.

Thomas Bayes (1702-1761) escreveu *Essasy towards solving a problem in the doctrine of chance*, publicado em 1763, pela Royal Society, após a sua morte. O conceito de probabilidade inversa introduzido por Bayes nessa obra o imortalizou, e suas conclusões são conhecidas hoje como *Regra de Bayes*.

O russo Patnufty L'vovich Chebyshev (1821-1884) fundou a escola de São Petersburgo no final do século XIX que fez com que vários matemáticos russos dessem contribuições à teoria da Probabilidade, entre eles, Andrei Andreiwich Markov (1856-1922) e Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918). As aplicações sistemáticas de Probabilidade na Física foram iniciadas no século XIX por Ludwig Boltzmann (1844-1906) e Josiah Willard Gibbs (1839-1903).

David Hilbert (1862-1943) fez uma palestra famosa no Congresso Internacional de Matemática de 1900 em Paris no qual, indicava a axiomatização da probabilidade como uma necessidade. Essa palestra foi importante para o desenvolvimento da Matemática moderna, em especial, para a axiomatização da Teoria da Probabilidade.

O russo S.N. Bernstein (1880-1968) havia publicado em 1917 o trabalho *Sobre os fundamentos axiomáticos da teoria da probabilidade*, que foi a primeira proposta de axiomatização, porém, a forma apresentada posteriormente por Kolmogorov foi a que se firmou e passou a ser utilizada.

Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) foi um dos mais importantes matemáticos do século XX e publicou trabalhos em várias áreas da matemática. Em 1928, publicou *Teoria geral de medidas e teoria de probabilidade* onde era apresentada a primeira descrição de uma construção axiomática baseada na teoria da medida que havia sido criada em torno de 1901 por Henri Lebesgue (1875-1941) e Èmile Borel (1871-1956). Publicou também, em 1933, *Foundations of the Calculus of Probability*, no qual desenvolve a teoria da Probabilidade de forma matematicamente rigorosa, a partir dos fundamentos axiomáticos. Dessa forma, Kolmogorov apresentou uma axiomatização que foi um marco para o desenvolvimento da teoria moderna de Probabilidade.

2.2 As concepções de Probabilidade

Existem várias formas de estabelecer o conceito de Probabilidade, vejamos algumas delas:

- Concepção Clássica;
- Concepção Frequentista ou Empírica;
- Concepção Subjetiva;
- Concepção Axiomática ou Formal.

Apesar das várias formas de definir a probabilidade, daremos mais ênfase às duas primeiras, pois são as mais utilizadas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, no qual será concentrada nossa pesquisa.

2.2.1 Concepção Clássica

A definição formal de probabilidade como sendo o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis apareceu pela primeira vez na obra *Liber de Ludo Aleae* de Girolamo Cardano. Entretanto, Laplace foi o primeiro a definir a probabilidade com rigor matemático, em 1812, na sua obra *Théorie Analytique des Probabilités*. Nessa obra, ele organizou, sistematizou e ampliou vários resultados sendo, portanto, considerado o autor dessa concepção.

Segundo Coutinho [4], Laplace baseou seu trabalho em dez princípios ordenados como axiomas e definições, onde citaremos apenas os dois primeiro.

Primeiro princípio: (A probabilidade) é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Segundo princípio: mas isto supõe os diversos casos igualmente possíveis. Se não o são, determina-se primeiro suas possibilidades respectivas, cuja justa apreciação é um dos pontos mais delicados da teoria do acaso. Então, a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável.

Desses dois princípios, emerge a concepção clássica de probabilidade, que podemos representar pela seguinte fórmula:

$$Probabilidade = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Os jogos que envolvem moedas, dados, extração de bolas em urnas se enquadram nessa concepção, desde que supondo possível selecionar um espaço amostral cujo conjunto de eventos elementares seja equiprovável. Silva [14] reitera que a concepção clássica é ainda uma das mais enfocadas nos livros didáticos para ser trabalhado as Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental.

Devemos ressaltar que a definição de probabilidade de Laplace é válida somente com as condições do espaço amostral possuir um número finito de elementos e os eventos elementares serem equiprováveis, isto é, possuirem a mesma probabilidade de ocorrência. Exemplo: no lançamento de um dado honesto (aquele que todas as faces têm a mesma chance de ocorrer), dizer que a probabilidade é de $\frac{1}{6}$ para cada uma das faces, ou no lançamento de uma moeda honesta, a probabilidade é de $\frac{1}{2}$ para cada uma das faces.

2.2.2 Concepção Frequentista ou Empírica

Essa concepção foi originada por Jacques Bernoulli em sua obra Ars Conjectandi em 1713, na qual aproxima Probabilidade de um evento pela sua frequência observada quando a experiência é repetida um grande número de vezes. Bernoulli mostrou a Lei dos Grandes Números que estabelece que, numa série imensa de experimentos, a frequência relativa de um evento se aproxima cada vez mais da sua probabilidade.

A Probabilidade abordada nessa concepção irá partir do cálculo das frequências relativas de ocorrências de sucessos provenientes de repetidos experimentos. Nessa concepção, a probabilidade emerge do processo de experimentação, ou seja, a probabilidade é calculada depois dos experimentos terem sido realizados. Com a ajuda de uma planilha para anotações dos resultados, podemos realizar um experimento envolvendo o lançamento de uma moeda honesta e observarmos que, quanto maior o número de repetições, a frequência relativa de caras se aproxima de $\frac{1}{2}$, ou seja, do conceito clássico de Probabilidade (probabilidade teórica).

Dessa forma, experimentos realizados mostram que quanto maior o número de repetições, maior proximidade entre a probabilidade empírica *(a posteriori)* e a probabilidade teórica *(a priori)* onde esta é calculada sem experimentos e sim, por base na concepção clássica.

De acordo com Coutinho [4], a concepção frequentista é uma poderosa ferramenta para tratar o conteúdo de Probabilidade, visto que o professor pode explorar vários experimentos ligados à realidade dos alunos e que não precisa estar limitado à hipótese de equiprobabilidade como a concepção clássica.

Nessa concepção, os cálculos de probabilidade são apoiados na frequência com que os fatos, eventos e experimentos ocorrem. Existe uma ligação entre a concepção frequentista com o *limite*, ou seja, nela a probabilidade pode ser definida como sendo o limite das frequências relativas de um evento quando temos um número de repetições tendendo ao infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = P(x).$$

Simulando um experimento aleatório de lançamento de moedas com o auxílio de um computador, Godino, Batanero e Cañizares apud Silva [14], exploram essa concepção numa sequência de 14.000 repetições, observando que a frequência de caras era muito próxima da probabilidade teórica de $\frac{1}{2}$. Esse experimento ilustra o fato de que, quanto maior for o número de repetições no experimento, maior a proximidade entre a probabilidade obtida experimentalmente e a probabilidade teórica.

2.2.3 Concepção Subjetivista

Na concepção subjetivista, a probabilidade é interpretada de forma subjetiva, como percepção pessoal ou crença na intuição. Nos jogos de azar, por exemplo, as pessoas tendem a confiar em determinado acontecimento, na sua própria experiência ou intuição para realizarem as jogadas. Alguns autores denotam essa concepção de *personalista*, pois as probabilidades são avaliações pessoais de situações aleatórias, intrínsecas à mente do indivíduo, enquanto as concepções clássicas e frequentista são propriedades do mundo real.

Nos jogos de azar, há quem acredite que a probabilidade de se ganhar esteja ligada ao montante da aposta, ou seja, quanto maior o valor da aposta, maior será a chance de ganhar. Outros atribuem o insucesso ou azar no jogo, decorrente da excitação emocional ou falta de confiança em si próprio. Dessa forma, pessoas que acreditam nesses fatos, ou associam a sorte aos jogos de azar através da intuição ou superstição que utilizam na hora da jogada, fazem uso da concepção subjetivista.

2.2.4 Concepção Axiomática ou Formal

Originou-se basicamente do trabalho de Kolmogorov, publicado em 1933, o qual apóia-se na teoria dos conjuntos e surgiu em oposição à concepção clássica, a qual determina que os sucessos sejam equiprováveis e corresponda a um espaço amostral finito. Essa concepção é a vigente atualmente, na qual a Teoria Matemática da Probabilidade é apresentada de forma rigorosa, a partir dos fundamentos axiomáticos, da mesma forma que a Geometria e a Álgebra.

Para Godino, Batanero e Cañizares, apud Silva [14], essa concepção tem o objetivo de calcular a probabilidade de determinados eventos, utilizando leis matemáticas, independentemente dos eventos serem finitos ou equiprováveis.

Capítulo 3

Referenciais Teóricos do processo de Ensino e Aprendizagem no Ensino Fundamental

3.1 A abordagem da Probabilidade nos Documentos Oficiais Dirigidos ao Ensino Fundamental II

Apesar de reconhecermos que as noções de probabilidade se fazem presente no nosso cotidiano desde cedo, quando nos referimos a expressões como *chance, incerteza ou previsões*, na Educação Básica, muitas vezes essas noções são deixadas para serem trabalhadas no Ensino Médio. Isto vai de encontro com o que está previsto nos documentos oficiais que regem o Ensino Fundamental, os quais pontuam o estudo da Probabilidade já no Ensino Fundamental, visando o desenvolvimento das capacidades cognitivas fundamentais (Brasil [2], p.16).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), publicado em 1997, tiveram uma grande importância na Educação do Brasil, pois não se tinha nada de concreto em relação à orientação curricular para as diferentes áreas do conhecimento. Desse modo, os PCN vieram fornecer subsídio para a construção de um referencial nacional, que orientasse a prática escolar, servindo também de parâmetro para os professores.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, direcionados aos anos de escolarização alvo do nosso trabalho, compreendem que:

> Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão "tratar" as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória (Brasil [2], p.49).

Nesse sentido, o documento propõe a organização dos conteúdos do ensino fundamental em blocos de conteúdos, os quais resumiremos a seguir:

3.1.1 Bloco 1: Número e operações

De acordo com a seleção feita para esse bloco, o aluno estudará, ao longo do Ensino Fundamental: Os números naturais, inteiros, negativos, racionais, irracionais e reais bem como suas propriedades, características e o modo como historicamente foram construídos. Para as operações, o aluno trabalhará os diferentes significados de cada uma delas, as relações entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos - exato e aproximado, mental e escrito. Já o tratamento algébrico será ampliado nas séries finais do ensino fundamental, explorando situações-problema. O aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra, representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tendo contato com fórmulas), compreenderá a "sintaxe" (regra para resolução) de uma equação. Nesse estudo introdutório dado à Álgebra, a partir de generalizações de padrões, bem como o estudo de grandezas, possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Porém, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do Ensino Médio.

3.1.2 Bloco 2: Espaço e forma

Esse grupo de conteúdos aborda o estudo das formas, noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamento no plano e sistema de coordenadas. Deve-se destacar também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. Entende-se que é relevante que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de artes, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

3.1.3 Bloco 3: Grandezas e medidas

As noções de grandezas e medidas proporcionam também uma melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas, como também aos significados dos números e operações. Assim, esse bloco contempla as diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura, etc.) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica, etc). Será explorada a utilização de instrumentos adequados para medi-las e, outro conteúdo destacado neste bloco, é a obtenção de algumas medidas não diretamente acessíveis, que envolvem, por exemplo, conceitos e procedimentos de Geometria e da Física.

3.1.4 Bloco 4: Tratamento da informação

A motivação para esse bloco surge pelo que podemos denominar de demanda social, embora pudesse ser incorporado aos agrupamentos anteriores. O motivo pelo qual foi destacado é evidenciar a sua importância, em função de seu uso atual na sociedade. Nesse agrupamento estão inseridas as noções de Estatística e de Probabilidade, além de problemas que envolvem o princípio multiplicativo, para os quais são apresentados objetivos específicos.

No que concerne à Estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem em seu dia a dia. Já em relação à probabilidade - foco do nosso trabalho - o documento apresenta como finalidade que o aluno compreenda que muitos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles.

Compreende-se que as noções do acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). No que se refere aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamento que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para a sua aplicação no cálculo de probabilidade.

As Noções de Probabilidade no terceiro ciclo, que compreende o 6º e 7º ano, têm como objetivo fazer com que o aluno resolva situações-problema que envolvam a determinação da probabilidade de sucesso de um dado evento por meio de uma razão. É também nesse ciclo que o documento reforça a exploração das possibilidades de quantificar o incerto, que o aluno saiba identificar e construir o espaço amostral em situações como o lançamento de dados, moedas.

Dessa forma, com as noções básicas de probabilidade os alunos irão entender e conseguirão determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Com isso, constatarão que a Matemática também é usada para fazer previsões e compreender a importância da Probabilidade no dia a dia.

Já no quarto ciclo, que corresponde ao 8º e 9º ano, um dos objetivos da Matemática no que se refere às Noções de Probabilidade, é desenvolver o raciocínio probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem, levando o aluno a construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicatico ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

O bloco Tratamento da Informação pode ser mais explorado e desenvolvido nesse quarto ciclo em relação à probabilidade. Seu estudo tem como propósito fazer com que os alunos compreendam, através de experimentações e simulações, que podem indicar a possibilidade de ocorrência de um evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para isto, os alunos irão construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão.

Além dos documentos nacionais, temos ainda, como orientação, os Referencias Curriculares do Ensino Fundamental da Paraíba, divulgado em dezembro de 2010, com o objetivo de suprir uma lacuna de mais de vinte anos, visto que o último currículo do Ensino Fundamental vigente no Estado datava de 1988. Nessas orientações, apresenta-se um currículo escolar que incorpora conteúdos inéditos e criativamente organizados, novos conceitos e metodologias de ensino-aprendizagem, novas formas de avaliação. Para tanto, nesses Referenciais, a organização dos conteúdos segue a divisão proposta nos PCN.

Tomando os dois documentos, recorreremos, portanto, ao bloco denominado *Tratamento da informação*. Acerca das abordagens conferidas nesse agrupamento de conteúdos, os Referenciais do Estado da Paraíba relatam que:

> No bloco "Tratamento da Informação", os padrões do acaso, aproximação, coleta, representação e tratamento de dados auxiliam a compreensão de elementos não apenas numéricos, algébricos, de medida, espaço e forma, mas também de informação e dados relativos a elementos do cotidiano e das demais disciplinas do currículo escolar. (Paraíba [13], p.62)

Assim, é apresentada a seguinte divisão de conteúdos para cada ano de escolarização do Ensino Fundamental, para o bloco em análise:

6^o ano	Tratamento da informação
Assunto: Estimativa	Capacidades específicas: Ler, interpretar e colher informações;

7^o ano	Tratamento da informação
Assunto: Noções de espaço amostral, população e evento.	Capacidades específicas: Construir espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio da razão;

8^o ano	Tratamento da informação
Assunto: Probabilidade direta.	Capacidades específicas: Utilizar diferentes representações matemáticas que se adaptem com mais precisão e funcionalidade a cada situação problema, de modo a facilitar sua compreensão e análise;

9º ano	Tratamento da informação
Assunto: Noções de fenômenos aleatórios; Cálculo de probabilidade de um acontecimento.	Capacidades específicas: Explorar a ideia da probabilidade em situação-problema, identificando sucessos possíveis e sucessos seguros e as situações de "sorte".

Percebemos nos documentos consultados que a probabilidade é um conteúdo relevante para o desenvolvimento de algumas habilidades dos alunos do Ensino Fundamental, as quais serão amadurecidas no Ensino Médio. Nesse sentido, é importante observarmos a maneira como esse conteúdo é tratado nesses anos de escolarização.

3.2 A abordagem da probabilidade segundo outros pesquisadores

Para elaborarmos uma proposta voltada à aprendizagem da Probabilidade no Ensino Fundamental, vamos compreender melhor os métodos elaborados por alguns autores e verificar como essas pesquisas abrangem o ensino desse conteúdo no currículo do terceiro e quarto ciclo.

Em sua pesquisa, Lopes [9] tem o objetivo de investigar e analisar o ensino da Probabilidade e da Estatística dentro do currículo de Matemática no Ensino Básico. Para isso, ela faz um estudo nas propostas curriculares de Matemática dos estados de Minas Gereais, São Paulo, Santa Catarina e nos PCN, tendo como referencial alguns currículos internacionais. Ela norteou seu trabalho tomando como base os seguintes critérios:

- A concepção de Estatística e Probabilidade subjacentes a essas propostas;

- A seleção de Noções Estatísticas e Probabilísticas feitas nelas para serem "transpostas" para o plano escolar;

- O modo como as propostas sugerem o tratamento dessas noções junto aos estudantes.

Para a pesquisadora em questão, o ensino de Probabilidade pode ser realizado através de experimento, realizando observações e explorando a ideia do acaso. Encaminhamento que possibilitará aos estudantes a tomada de decisão e, consequentemente, o desenvolvimento do senso crítico e ainda irá deixá-los conscientes para perceber que nos mais variados jogos de azar (loterias, máquinas caça-níqueis, bingos, etc) encontram-se a natureza probabilística e a forma desigual de perder dinheiro para quem gosta de apostar nesses jogos. Dessa forma, ela defende que o ensino de Probabilidade tem que ser inserido no currículo do Ensino Fundamental, e faz comparações com outros países, como por exemplo: Espanha, Estados Unidos da América, França, Inglaterra, Itália, Japão e Portugal, nos quais as Noções de Probabilidade já estavam presentes no Ensino Fundamental desde a década de 1980.

Lopes [9] escolheu os estados de Minas Gerais, São Paulo e Santa Catarina, pois os mesmos já inseriram a Probabilidade em seus currículos de Matemática desde a década de 1990, o que não aconteceu em outros estados brasileiros. No currículo do estado da Paraíba, por exemplo, esse conteúdo foi inserido em 2010, quando foram divulgados nos documentos estaduais. Ela verificou que os currículos internacionais consideram o ensino da Estatística vinculado ao da Probabilidade. O mesmo não acontecia nos currículos nacionais que, na sua maioria, trabalham esses temas separadamente, enfatizando o trabalho com tabelas, gráficos e cálculos, sem supor o registro de observações feitas através de experimentações e posterior análise.

Nas propostas curriculares internacionais investigadas, há uma preocupação em relação à formação do pensamento científico, preparando os estudantes para lidarem com o enorme volume de informações presentes na sociedade contemporânea. Percebendo que essa preocupação não acontecia nos currículos nacionais.

A autora acha importante que também seja repensado os cursos de formação inicial e continuada de professores, em particular, o ensino de Estatística e Probabilidade na formação dos professores. E questiona: Que considerações seriam necessárias? Quais posturas seriam adotadas pelo professor na sua prática?

Visando contribuir com a atividade docente, Moraes [11] faz uma análise histórica do desenvolvimento da Probabilidade, tentando mostrar a origem e as teorias necessárias para o cálculo de probabilidade, envolvendo jogos de azar com moedas, dados e baralhos. Ele destaca que uma das intenções da sua pesquisa é fornecer um material de apoio aos professores do Ensino Fundamental e Médio.

Moraes [11] defende que a História da Matemática deve ser utilizada como recurso didático pedagógico para o ensino, seja na área de Probabilidade ou outras áreas. Baseado nos PCN, a História da Matemática, juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Utilizar a História da Matemática como um recurso didático, irá tornar a aprendizagem da Matemática mais significativa e produtiva para o aluno, de modo que é relevante estar presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Isso possibilitará ao professor fazer essa ponte entre o aluno e o livro didático, mostrando e comparando conhecimento matemático em diferentes culturas no passado.

Além de recorrer à História da Probabilidade, Moraes [11] utiliza e sugere a aplicação de jogos como uma eficaz ferramenta didática, visto que pode proporcionar aos alunos um modo diferente de trabalhar em grupo, resolver desafios e situações-problema. Essa ideia é reforçada nos PCN, os quais incentiva os jogos matemáticos como modo atrativo de resolver problemas, de modo que os alunos irão elaborar estratégias criativas na busca de soluções e estimulando o planejamento das ações.

Moraes [11] utilizou também os jogos em seu trabalho, mostrando também a importância deles para o Ensino de Probabilidade, colocando também como outro recurso didático. Os PCN incentivam a utilização dos jogos como uma maneira diferente de resolver problemas, planejar estratégias para solução e estimular o debate em grupo. Dessa forma, é relevante que os livros didáticos tragam exemplos e explorem os jogos, para que o professor possa atrair a atenção do aluno, utilizando-os de maneira lúdica e pedagógica.

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitando a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (Brasil [2], p.46).

Os jogos são mais uma alternativa, um caminho de se trabalhar a Matemática, dentre outras diversas possibilidades. E que os livros didáticos ao abordarem as Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental devam propor alguns jogos para introdução do conteúdo, como uma forma do professor explorar dos alunos a busca de resolução, a intuição, a criação de estratégias diante dos jogos o que contribuirá significativamente para aprendizagem da Probabilidade.

Além de estimular a ludicidade, a utilização dos jogos permite a realização de trabalhos em grupo como também a abordagem das concepções Frequentista e Subjetivista de Probabilidade, que estão implicitamente relacionadas a alguns jogos, estimulando e desenvolvendo a competência deles para Matemática.

Os alunos irão planejar estratégias e tentar argumentar suas ideias e pontos de vista, fazendo que o conteúdo seja trabalhado de forma atrativa, o que para os PCN , *"Na situação de jogo, muitas vezes, o critério de certo ou errado é decidido pelo grupo. Assim, a prática do debate permite o exercício da argumentação e a organização do pensamento"* (Brasil [2], p.46).

3.3 O livro didático de Matemática

O livro didático é mais uma ferramenta de grande importância que o professor tem para trabalhar com os alunos. O livro didático, além de ser uma fonte indispensável, é também material de estudo e, muitas vezes, o único recurso com o qual o professor pode contar. Acerca desse mateial, os PCN afirmam que:

> [...] Não tendo oportunidade e condições para sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas de sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória (Brasil [2], p.20).

Muitas vezes, para poder aumentar sua renda, o professor tem que trabalhar em mais de uma escola, ocupando quase todo o seu horário e não tendo, dessa forma, tempo suficiente de investir em cursos de formação continuada e até mesmo, utilizando apenas um livro didático para preparação de sua aula. E está propenso do livro que está fazendo uso, ser de pouca qualidade.

Segundo Silva Junior [15], são considerados livros didáticos, os livros que estimulam o aluno, apoiando a autonomia e a organização dos mesmos em situações de ensino-aprendizagem, e que criam condições para a diversificação e ampliação das informações que veiculam. Desse modo, o livro didático é direcionado para duas categorias: professores e alunos. Os professores que irão utilizá-lo na preparação de aulas, auxiliar no planejamento didático-pedagógico, auxiliar na elaboração de exercícios e avaliações da aprendizagem do aluno; enquanto os alunos também farão uso desses mesmos livros didáticos para consolidar, ampliar e aprofundar os conhecimentos, revisar o conteúdo transmitido pelo professor, desenvolver as competências e habilidades e estudar para avaliações.

> O livro didático destina-se a dois leitores: o professor e o aluno, em que o professor é o transmissor e/ou o mediador dos conteúdos que estão nesses livros, e o aluno é o receptor de tais conteúdos. É através desses livros que o aluno vai aprender, construir e alterar significados, em relação a um padrão social, que a própria escola estabeleceu como projeto de educação, quando da adoção desse livro didático para utilização na escola (Silva Junior [15], p.22).

O livro didático de Matemática do Ensino Fundamental, pensando nesses propósitos, deve abarcar os conteúdos que estão organizados em blocos, como foram divididos pelos PCN: Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação.

Em 1998, quando o MEC divulgou os PCN, propuseram-se modificações para os projetos pedagógicos do Ensino Fundamental II, motivando a construção das propostas curriculares de sistemas e escolas. Foram sugeridos temas como a Ética, a Pluralidade Cultural, a Saúde, o Meio Ambiente, a Orientação Sexual e as temáticas locais que deveriam ser inseridos nas disciplinas como Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História e Geografia.

Para que os livros didáticos cumpram seu papel, é necessário que passem por um processo de análise criteriosa. Assim, o Ministério da Educação (MEC), através do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) passa a analisar os livros que deveriam ser escolhidos e adotados pelas escolas públicas no Brasil na década de 1990. O PNLD tinha a função de analisar as características físicas e melhorar a qualidade do livro didático. Inicialmente, dois critérios eliminatórios do processo de avaliação seriam levados em conta para esses livros didáticos:

- não poderiam expressar preconceito de origem, raça, sexo, cor, idade, ou quaisquer outras formas de discriminação;

- não poderiam induzir ao erro ou conter erros graves relativos ao conteúdo da área, como, por exemplo, erros conceituais.

Segundo Vieira [16], a instituição do PNLD, desenvolvendo um processo de avaliação pedagógica dos livros nele inscritos, apresentou uma melhoria significativa dos livros didáticos de matemática. Esse processo de avaliação produz um *Guia de Livros Didáticos*, com o objetivo de auxiliar o professor e a instituição escolar em uma escolha mais convicta, sólida e consciente do livro didático de matemática. A consulta ao Guia do livro didático auxilia aos professores no processo de seleção realizado na escola, pois facilita a análise panorâmica da obra. Todavia, para que esse processo democrático seja eficaz, é relevante a análise criteriosa, por parte do docente, dos conteúdos e atividades propostas.

No intento de oferecer mais um suporte auxiliar ao professor, em 2004, o MEC lançou a coleção Explorando o Ensino, que tem como objetivo dar suporte ao professor em sala de aula, oferecendo-lhe um material científico-pedagógico para o ensino na Educação Básica. No nosso trabalho, iremos utilizar a Coleção Explorando o Ensino vol 17, publicada em 2010 e que tem o objetivo de auxiliar o professor a explorar ao máximo os livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental.

> A expectativa do Ministério da Educação é a de que a Coleção Explorando o Ensino seja um instrumento de apoio ao professor, contribuindo para seu processo de formação, de modo a auxiliar na reflexão coletiva do processo pedagógico da escola, na apreensão das relações entre o campo do conhecimento específico e a proposta pedagógica; no diálogo com os programas do livro Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE), com a legislação educacional, com os programas voltados para o currículo e formação de professores; e na apropriação de informações, conhecimentos e conceitos que possam ser compartilhados com os alunos (Carvalho [3], p.8).

De acordo com o documento em questão, a maioria dos livros didáticos aprovados no PNLD está em conformidade pelo que preza o PCN, tendo se preocupado em abordar os conteúdos matemáticos dos blocos de conteúdos destinados a cada série. Em especial, o Bloco Tratamento da informação (onde está inserido o conteúdo de Probabilidade) assume cada vez mais um papel relevante na formação matemática.

Também para Vieira [16], os livros melhor avaliados pelo PNLD estão em consonânca com os PCN. Desse modo, o papel social da Matemática e ação do mundo social sobre o ensino, levou uma atenção nas avaliações dos livros didáticos de Matemática no que diz respeito à *contextualização* onde a abordagem continua sendo problemática.

Uma característica importante nos livros didáticos de Matemática é a exposição de novos conceitos, a partir da contextualização dos mesmos, explorando e estimulando, assim, as competências interpretativas dos alunos. De acordo com Vieira [16], há três grupos de estratégias de contextualização para Matemática nos Livros Didáticos, quais sejam: contextualização sociocultural, contextualização histórica e a contextualização interna à Matemática.

Na contextualização sociocultural, é apontada a existência de aspectos sociais e culturais na relevância do cotidiano do aluno. Com isso, a contextualização sociocultural é apresentada através de situações-problema, valorizando os conhecimentos prévios do aluno para a abordagem dos conceitos e procedimentos matemáticos. Dessa forma os alunos irão ver a Matemática apresentando-se como uma ferramenta para a solução de problemas que encontram em situações cotidianas.

No que concerne à contextualização histórica estão envolvidos acontecimentos que procuram situar, historicamente, o conhecimento matemático, tentando mostrar para o aluno, o motivo de um determinado conteúdo ter sido criado, informando a origem e o desenvolvimento do conteúdo no decorrer da história. À medida que os alunos vão descobrindo o motivo que determinado conteúdo foi desenvolvido ao longo do tempo para resolver um problema prático, a História da Matemática pode despertar o interesse e a curiosidade neles. Nesse sentido, o PCN enfatiza:

> O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (Brasil [**?**], p.19).

Já a contextualização interna à Matemática é caracterizada por situações em que os autores utilizam métodos e articulações, dentro da própria Matemática, para auxiliar a construção do conhecimento. Os blocos de conteúdos como: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da informação se articulam entre si. A exemplo disso, são as conexões entre a Análise Combinatória e a Probabilidade, a Porcentagem e a Estatística.

Carvalho [3] relata que os livros didáticos mais recentes abordam no final dos capítulos itens de dois ou mais blocos de conteúdos. A vantagem de fazer essas ligações, é assegurar que conteúdos de Matemática sejam explorados de forma paralela, para não acontecer ao término do ano letivo, de não se estudar determinado conteúdo, como acontecia com Geometria tempos atrás.

> A esperada integração não se deve dar somente entre campos, mas em um mesmo campo. Por exemplo, quando se estuda a adição e a subtração como operações inversas, está se integrando o conceito de adição com o de subtração. Mas, atenção! Para fazer isso em sala de aula, você não precisa dizer, em uma primeira abordagem, que a adição e a subtração são operações inversas. Mais do que conhecer esta designação, que talvez só faça afastar o interesse da criança, o importante é que elas saibam utilizar esta relação entre as operações para resolver problemas (Carvalho [3], p.21).

A contextualização não deve envolver apenas atividades do cotidiano dos alunos, como também, que seja explorado a contextualização histórica ou interna à Matemática, ou ainda, abordar temas relacionados à saúde, meio ambiente, problemas sociais ou econômicos, entre outros, viabilizando a inserção de conteúdos transdisciplinar à disciplina. Todavia essa contextualização não deve ser tratada de forma artificial ou forçada, para que possa mostrar verdadeiramente as contribuições matemáticas para a compreensão de diversas situações.

Capítulo 4

Análise da abordagem do conteúdo de Probabilidade nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental II

Conforme já refletimos, o livro didático de Matemática consiste em uma ferramenta importante na atuação do professor, e exerce uma influência positiva no processo de ensino e aprendizagem. De acordo com Lima [7], o livro didático é essencial instrumento de trabalho para o professor, do qual ele irá extrair exercícios, exemplos, definições e observações que serão usados na comunicação com os alunos.

Para tanto, neste capítulo, analisaremos três coleções de livros didáticos de Matemática, selecionados no guia do livro didático para o PNLD (2014), a saber: [10], [8] e [5]. Objetivando investigar a abordagem conferida à Probabilidade, nesse material, nossa observação da análise se dará acerca dos seguintes aspectos:

* Abordagem ou não do conteúdo nos livros didáticos;
* Como é feita a introdução do conteúdo;
* Como está sendo aplicada a contextualização;
* Analisar e comentar alguns exercícios resolvidos;
* Analisar e comentar alguns exercícios propostos.

Como no nosso trabalho será lançada uma proposta pedagógica para inserir as Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II, consideramos importante analisar a abordagem desse conteúdo em três coleções de livros didáticos de Matemática aprovados pelo MEC através do PNLD.

A escolha desses critérios se deu mediante a observação dos aspectos inerentes ao conteúdo, apreciados nos fundamentos teóricos. Ao fazer esta análise, nosso objetivo não é fazer julgamento da qualidade dos livros analisados, nem mesmo escolher o melhor livro a ser adotado, o nosso propósito é observar quais livros se enquadram nos critérios e na proposta de ensino que pretendemos desempenhar, visando o desenvolvimento das competências dos nossos alunos quanto ao nosso tema objeto.

Utilizaremos ainda como referência para auxiliar nosso trabalho, *Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*, um trabalho de Elon Lages Lima e outros pesquisadores que analizaram 12 coleções, totalizando 36 livros didáticos de Matemática com o objetivo de oferecer propostas e sugestões para contribuir na melhoria desses livros.

Segundo Lima [7], para análise de livros didáticos deve-se observar sua adequação às três componentes básicas: *conceituação, manipulação e aplicação*. A *conceituação* engloba a exposição das definições, o enunciado das proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, e também a interpretação e a reformulação dos mesmos nos variados aspectos. É relevante destacar que a conceituação bem formulada é indispensável para o bom desempenho das aplicações. A *manipulação*, por sua vez, está muito ligada (mas não exclusiva) à parte algébrica, habilidades no manuseio de equações, fórmulas, cálculo mental, operações e construções geométricas elementares de modo que o usuário da Matemática concentre a atenção em pontos mais relevantes, sem perder o foco com detalhes. Já a *aplicação*, consiste na utilização das teorias da Matemática em situações que vão de problemas simples do cotidiano a mais sofisticados de outras áreas, seja científicas ou tecnológicas, ou seja, é uma forma de mostrar que o ensino de Matemática é indispensável em nossas vidas.

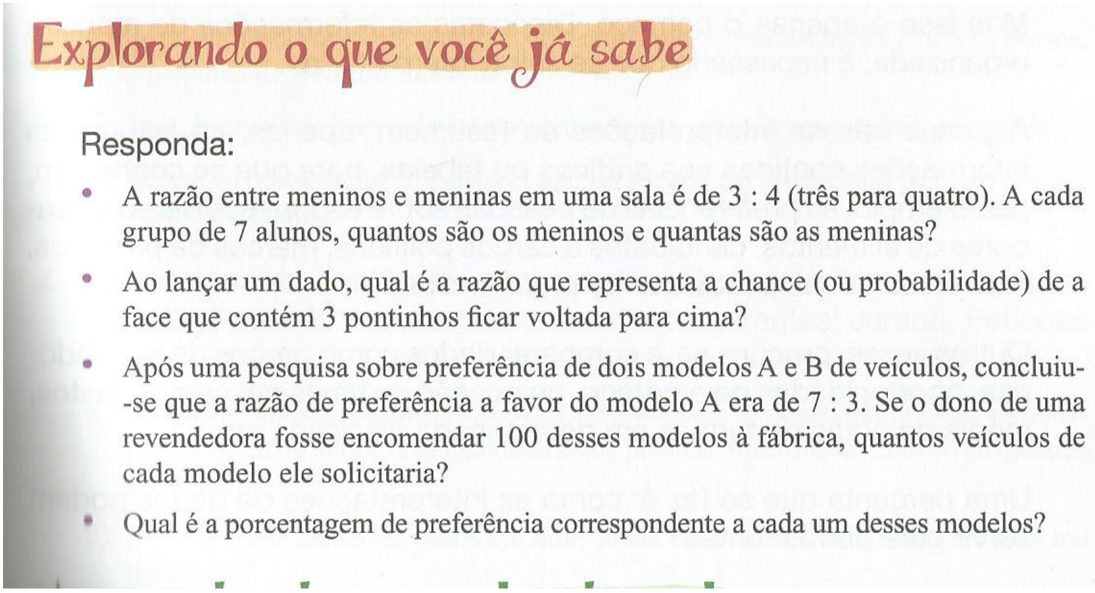
Os autores expõem que cerca de 80% dos livros adotados no Brasil é muito bem impresso e diagramado, com várias ilustrações e bem coloridos, porém, algumas figuras matemáticas contém erros e imprecisões e o seu texto não leva o leitor (aluno) a raciocinar. Outras falhas citadas são a falta de conexões entre os assuntos estudados nos diferentes capítulos ou volumes, como por exemplo progressão geométrica e função exponencial. Das três componentes básicas (conceituação, manipulação e aplicação) apresentadas, é enfatizada a manipulação, mas a parte conceitual é bastante deficiente e as contextualizações são poucas.

As coleções a serem analisadas são:

- **Coleção 1: Descobrindo e aplicando a Matemática** - 6º ao 9º ano - Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio Fonseca Machado, Editora Dimensão, 1ª edição, Belo Horizonte: Dimensão, 2012.
- **Coleção 2: Projeto Velear: Matemática** - 6º ao 9º ano - Antônio José Lopes, 1ª edição, São Paulo: Editora Scipione, 2013.
- **Coleção 3: Projeto Teláris: Matemática** - 6º ao 9º ano - Luiz Roberto Dante, 1ª edição, São Paulo: Ática, 2012.

4.1 Coleção 1: Descobrindo e Aplicando a Matemática.

Aqui avaliaremos a coleção Descobrindo e Aplicando a Matemática de Mazzieiro e Machado [10]. Nessa coleção, os livros referentes ao 3º ciclo (6º e 7º ano) não são abordadas as Noções de Probabilidade, indo de encontro às orientações dos PCN em que se sugere que nesse ciclo devam ser exploradas situações-problema, abrangendo a probabilidade de sucesso de um determinado evento, por meio de uma razão para desenvolver, dessa forma, o raciocínio probabilístico. No livro do 8º ano não é abordado o conteúdo, deixando apenas para o 9º ano, na página 197, apresentando uma introdução que pode ser vista na Figura 4.1.


Explorando o que você já sabe

Responda:

- A razão entre meninos e meninas em uma sala é de 3 : 4 (três para quatro). A cada grupo de 7 alunos, quantos são os meninos e quantas são as meninas?
- Ao lançar um dado, qual é a razão que representa a chance (ou probabilidade) de a face que contém 3 pontinhos ficar voltada para cima?
- Após uma pesquisa sobre preferência de dois modelos A e B de veículos, concluiu-se que a razão de preferência a favor do modelo A era de 7 : 3. Se o dono de uma revendedora fosse encomendar 100 desses modelos à fábrica, quantos veículos de cada modelo ele solicitaria?
- Qual é a porcentagem de preferência correspondente a cada um desses modelos?

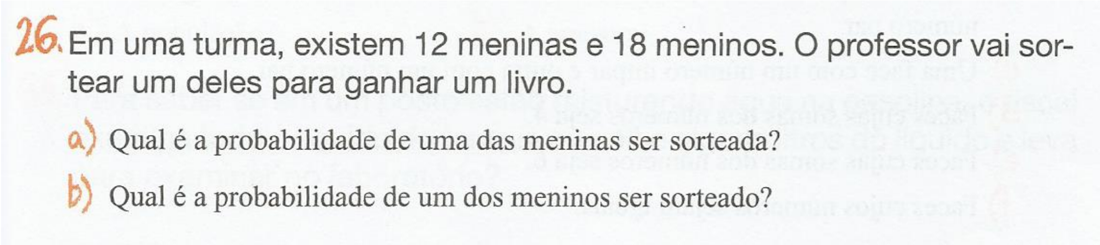
Figura 4.1: Introdução ao conteúdo de Probabilidade no livro do 9º ano de Mazzieiro e Machado (2012), p. 197.

O que podemos observar nessa introdução do assunto é que o autor faz a conexão entre os assuntos de Razão, Porcentagem e Probabilidade que é um ponto positivo, porém, em se tratando de uma introdução do conteúdo, não resolve as questões propostas e de modo breve, ele se refere a chance ou probabilidade como sendo sinônimos e depois disso, não coloca outros exemplos ou situações-problema sobre o conteúdo. No decorrer do capítulo, só serão tratadas as Noções de Estatística, enquanto as Noções de Probabilidade encerraram na introdução.

Dessa forma, a coleção supracitada não trilha o que orienta o PCN no 4º ciclo (8º e 9º ano), pois deixa de trabalhar com o aluno o conceito e a construção do espaço amostral de eventos equiprováveis, empregando o princípio multiplicativo para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

Ainda no livro do 9º ano, são apresentados exercícios para que o aluno resolva, da página 213 à 216, com subtítulo: *"Explorando o que você já sabe"*, envolvendo problemas sobre Probabilidade, amostras e Estatísticas. Das quais mostramos nas Figuras 4.2 e 4.3:

Nessas questões (26 e 29), o aluno deverá resolver o que se pede, utilizando a definição de probabilidade, ou seja, fará uso da concepção Clássica de Probabilidade, a qual não foi apresentada anteriormente. Com isso, o aluno poderá ter dificuldade na resolução e acabará

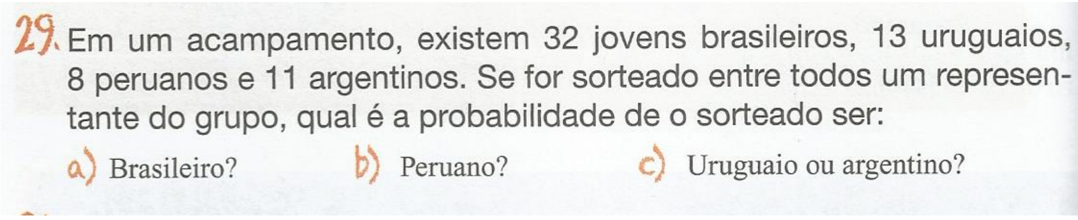


26. Em uma turma, existem 12 meninas e 18 meninos. O professor vai sortear um deles para ganhar um livro.

a) Qual é a probabilidade de uma das meninas ser sorteada?

b) Qual é a probabilidade de um dos meninos ser sorteado?

Figura 4.2: Exercício proposto sobre Probabilidade no livro do 9º ano de Mazzieiro e Machado (2012), p. 213.



29. Em um acampamento, existem 32 jovens brasileiros, 13 uruguaios, 8 peruanos e 11 argentinos. Se for sorteado entre todos um representante do grupo, qual é a probabilidade de o sorteado ser:

a) Brasileiro? b) Peruano? c) Uruguaio ou argentino?

Figura 4.3: Exercício proposto sobre Probabilidade no livro do 9º ano de Mazzieiro e Machado (2012), p. 214.

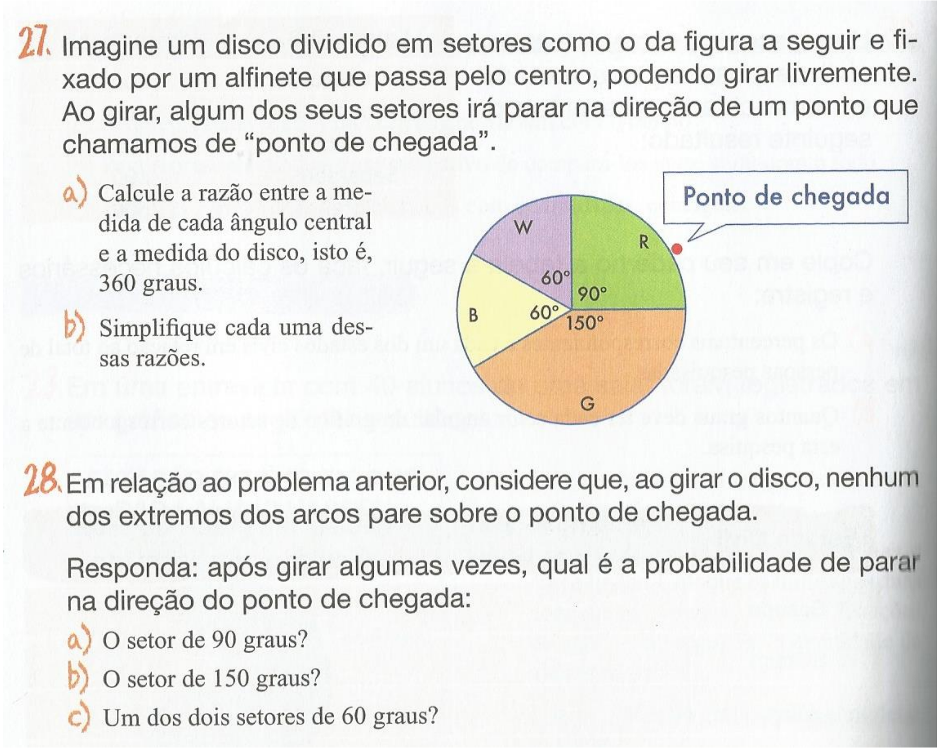
recorrendo ao professor.

Já nas questões 27 e 28, apresentadas na Figura 4.4, solicita-se que o aluno use os conhecimentos de Geometia Plana, juntamente com Razão e Probabilidade, o que acaba sendo positivo, pois os autores promovem dessa forma as conexões de conteúdo. Porém, eles não dão suporte para os alunos solucionarem os problemas citados, pois esses conceitos não foram abordados, nem apresentando exercícios resolvidos para que o aluno pudesse tomar como referencial.

Devemos enfatizar, um erro conceitual na questão 28, onde os autores pedem para calcular a probabilidade do disco parar na direção de chegada, após girar algumas vezes, deixam margem para outras interpretações, visto que pretende usar a concepção clássica, mas remete a concepção frequentista.

No próximo exemplo que extraímos, apresentado na (Figura 4.5), verificamos que o aluno irá explorar além do conceito de probabilidade, as noções de múltiplos e divisores, números ímpares e números pares para resolver a questão proposta, um aspecto positivo, pois os autores promove dessa forma as conexões de conteúdo. Porém, da mesma forma que a questão anterior, os autores não apresentaram nenhum exercício resolvido semelhante à questão citada, não dando suporte para os alunos solucionarem as questões.

Encerramos a apreciação dessa coleção, verificando que ela não favorecem a construção do pensamento probabilístico, uma vez que abordam de maneira superficial o conceito de probabilidade e propõem os exercícios sobre o conteúdo só no volume do 9º ano, sem trabalhar antes o aspecto conceitual de forma mais ampla. Além disso, não traz atividades resolvidas com aplicações e situações-problema para o leitor. Não existe preocupação



27. Imagine um disco dividido em setores como o da figura a seguir e fixado por um alfinete que passa pelo centro, podendo girar livremente. Ao girar, algum dos seus setores irá parar na direção de um ponto que chamamos de "ponto de chegada".

a) Calcule a razão entre a medida de cada ângulo central e a medida do disco, isto é, 360 graus.

b) Simplifique cada uma dessas razões.

28. Em relação ao problema anterior, considere que, ao girar o disco, nenhum dos extremos dos arcos pare sobre o ponto de chegada.

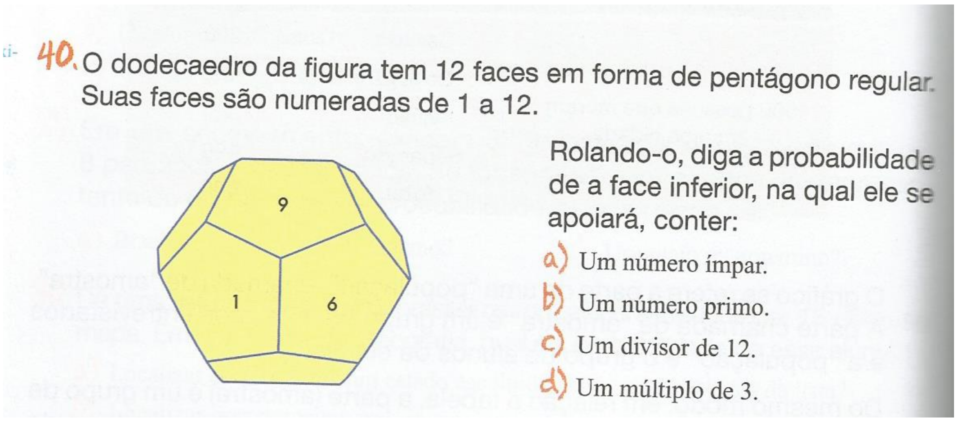
Responda: após girar algumas vezes, qual é a probabilidade de parar na direção do ponto de chegada:

a) O setor de 90 graus?

b) O setor de 150 graus?

c) Um dos dois setores de 60 graus?

Figura 4.4: Exercício proposto sobre Probabilidade no livro do 9º ano de Mazzieiro e Machado (2012), p. 214.



40. O dodecaedro da figura tem 12 faces em forma de pentágono regular. Suas faces são numeradas de 1 a 12.

Rolando-o, diga a probabilidade de a face inferior, na qual ele se apoiará, conter:

a) Um número ímpar.

b) Um número primo.

c) Um divisor de 12.

d) Um múltiplo de 3.

Figura 4.5: Exercício proposto sobre Probabilidade no livro do 9º ano de Mazzieiro e Machado (2012), p. 214.

de expor as três componentes básicas da Matemática (conceituação, manipulação e aplicação), no que concerne às Noções de Probabilidade, de modo que nos volumes do 6º, 7º e 8º ano, não é apresentado o conteúdo, resumindo-o assim, ao livro destinado ao 9º ano, e ainda assim, um material com bastante lacunas.

4.2 Coleção 2: Projeto Velear - Matemática.

Nesta seção serão analisados os livros da coleção Projeto Velear - Matemática, de Lopes [8]. No volume referente ao 6º ano não são abordadas as Noções de Probabilidade, sendo apresentadas pela primeira vez no volume do 7º ano, capítulo 12, onde é feita a introdução do conteúdo ilustrada na Figura 4.6.


12 CAPÍTULO **Probabilidades**

Neste capítulo você vai estudar:

- *as noções de probabilidade;*
- *a relação entre frações, porcentagem e probabilidades;*
- *as noções sobre frequência.*

P Até o final do século XX o ensino de probabilidades era tratado somente no Ensino Médio. Entretanto, as pesquisas sobre processos de aprendizagem, realizadas a partir dos anos 1970, mostraram que o *pensamento probabilístico* é possível de ser explorado e desenvolvido ainda no Ensino Fundamental. Currículos de quase todos os países incorporaram os temas: probabilidade, estatística e outros do bloco Tratamento da Informação, levando em conta não só o desenvolvimento cognitivo dos alunos, mas também a importância desses tópicos na vida cotidiana. Temos relatos de professores que têm trabalhado este capítulo propondo que seja lido em grupos de 4, ficando a cargo do professor: monitorar as dúvidas, administrar e mediar as interações, socializar questões e descobertas e institucionalizar os conceitos e procedimentos.

Para muitos a Matemática é a ciência da certeza, ou seja, por meio de cálculos é possível provar tudo tim-tim por tim-tim. Mas nem sempre os fenômenos da natureza e mesmo algumas situações comuns, como os jogos, podem ser previstos. Nesse caso a Matemática é uma boa aliada para que possamos analisar cada situação e suas possibilidades.

Certeza × incerteza

Não se pode ter certeza em nenhum dos casos, pois a repórter disse que há **possibilidades** de geadas no Sul e **possibilidades** de chuva no Nordeste. Não disse, com toda a certeza, que esses fatos ocorrerão.

Figura 4.6: Introdução do conteúdo de Probabilidade no livro do 7º ano de Lopes (2013), p. 254.

É apresentado que, em determinadas situações, como fenômenos da natureza, jogos, entre outros não se tem uma certeza do que vai ocorrer, mas podem ser previstos. Com uma situação que é abordada sobre fenômeno da natureza, em que a repórter está na televisão informando a previsão do tempo e vai tecendo comentários sobre: *certeza, incerteza* e *possibilidade*.

Nas orientações para o professor, aparecem umas observações em azul, com informações e dicas que o autor sugere, o que é positivo, visto que auxiliará o professor. Nessa mesma página da introdução, Lopes [8] cita como orientação para o professor, que até o final do século XX o ensino de Probabilidades era abordado somente no Ensino Médio e que, aos poucos, foi sendo incorporado no Ensino Fundamental em diversos países. Essas informações servem de suporte ao professor e podem ser transmitidadas para os alunos.

Na página 255, o autor define: *"O ramo da Matemática que estuda as leis da incerteza e do acaso chama-se **probabilidade**"* e dá exemplos de fenômenos da natureza como a erupção do vulcão Etna, o tsunami no Japão, terremotos, tufões que não se tem uma certeza de quando irá ocorrer. Na mesma página, ele dá um exemplo do início de uma partida de futebol em que o árbitro joga a moeda para cima e escolhe uma das faces da moeda para decidir no cara ou coroa a equipe que inicia o jogo com a bola. Nesse último exemplo, o professor poderá promever um debate perguntando aos alunos se os times têm as mesmas chances com esse critério adotado pelo árbitro.

Dando sequência, na página 256 o livro apresenta três situações-problema:

"1) Na classe de Joana, a professora colocou os nomes dos alunos em uma urna para sortear quem irá expor as fotografias da viagem na qual foi feito um estudo do meio. O que é mais provável de ser sorteado: uma menina ou um menino? Suponha que a classe tenha 30 meninas e 5 meninos."

Lopes [8] responde que se o número de meninos e meninas forem iguais, as chances são iguais. Entretanto, se o números de meninas for maior que o número de meninos, é mais provável que uma menina seja sorteada e ilustra um suposto diálogo entre um aluno e a professora de acordo com a Figura 4.7.

Figura 4.7: Exercício resolvido 2 no livro do 7º ano de Lopes (2013), p. 256.

"2) Jogando um dado com as 6 faces numeradas com pontos e observando a face voltada para cima, quais são os resultados prováveis? Supondo que se trata de um dado

honesto."

Em seguida ele esclarece que um **dado** é **honesto** se a probabilidade de ocorrência de qualquer uma de suas faces for a mesma. Portanto, a chance de ocorrer a face 1 é a mesma de ocorrer a face 2, que por sua vez é a mesma de ocorrer cada uma das faces 3,4,5 ou 6.

Figura 4.8: Exercício resolvido 3 no livro do 7º ano de Lopes (2013), p. 256.

"3) Extraindo uma bola ao acaso, sem olhar, podemos retirar do saco uma bolinha azul ou uma bolinha vermelha. Qual é a cor que tem maiores chances de ser sorteada?"

O autor responde o questionamento na Figura 4.8.

São questões contextualizadas que possibilitam o desenvolvimento das habilidades interpretativas, necessárias à compreensão de questões de Probabilidade. Através dessas situações, são exploradas as leis do acaso e compara eventos para que o aluno tome a decisão de escolher aquele que é mais provável de acontecer.

Nas páginas seguintes nos deparamos com o questionamento:*"Maria vai ter um bebê. Qual é a probabilidade de nascer uma menina?"* Nesse tópico são tratadas as chances iguais. Associada a essas noções, são apresentadas informações do censo demográfico de 2010, como aborda a Figura 4.9, para mostrar um certo equilíbrio entre homens e mulheres, ou seja, aproximadamente 50% para cada sexo; nas orientações para o professor, o autor sugere que o docente justifique para os alunos que a diferença de cerca de 2% entre homens e mulheres na população brasileira é atribuída a fatores sociais como violência urbana, acidentes, fumo, consumo de álcool, etc. E conclui que as chances de nascer menina são as mesmas de nascer um menino, ou seja, de 50%.

O livro ainda apresenta o conceito de evento impossível na forma *"Quando um evento, isto é, um acontecimento é impossível, a probabilidade de que ocorra é nula"* e ilustra com um exemplo. Em relação a evento certo ele não define, mas cita através de um exemplo, o que, de certo modo deixa uma lacuna para o leitor.

Nas páginas 259 a 261, Lopes [8] propõe alguns experimentos os quais podem ser vistos na Figura 4.10, nas quais, a probabilidade de ocorrência de um evento será medida e expressa por meio de um número, geralmente por fração ou uma porcentagem. Ele sugere, nas orientações para o professor, que os alunos trabalhem em grupos, com o auxílio

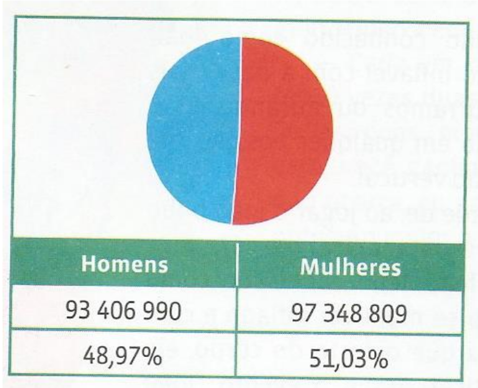


Figura 4.9: Dados referentes as censo demográfico 2010, apresentados no livro do 7º ano de Lopes (2013), p. 257.

de materiais como dados e moedas. O autor apresenta também, uma interessante curiosidade envolvendo experimentos do francês Buffon e o britânico Karl Pearson com moedas. Dessa forma, Lopes [8] explora a Concepção Frequentista, em que a probabilidade abordada irá partir do cálculo das frequências relativas de ocorrências de sucessos provenientes de repetições do experimento.

Das páginas 262 a 264, o autor utiliza situações-problema para calcular a probabilidade de sair uma determinada face no lançamento de um dado, ou no lançamento de uma moeda. Podemos observar que, nessas páginas, é utilizada a concepção clássica de probabilidade, ou seja:

$$Probabilidade = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Na página 265 são propostas 10 questões nas quais os alunos irão exercitar os conceitos estudados, tais como calcular as probabilidades e decidir se é mais ou menos provável, tendo também questões para calcular a medida da probabilidade de ocorrência de cada evento.

Na página 266, Lopes [8] trabalha a ideia de Probabilidade Geométrica, utilizando jogos e brinquedos que apresentam uma roleta. Podemos destacar como relevante, o fato de que o autor irá relacionar a probabilidade com áreas de figuras planas e também porcentagens, como também o uso da porcentagem associada a uma fração, como é apresentado por Vieira [16], fazendo uso da contextualização interna à matemática, e que nos PCN está descrito como conexões entre conteúdos.

Das páginas 267 a 268 é apresentada uma atividade com 7 questões para o aluno exercitar o conceito de Probabilidade Geométrica, que foi apresentado anteriormente.

Prosseguindo, é feito um pequeno resumo sobre a história da probabilidade, como pode ser visto na Figura 4.11, relatando como iniciou, através dos jogos de azar e foi se propagando no decorrer dos anos. O autor também traz duas curiosidades sobre probabilidade,

Experimentando e medindo frequências

A probabilidade de ocorrência de um evento pode ser medida e expressa por meio de um número, em geral uma fração ou uma porcentagem.

Para compreender melhor como se pode determinar esse número, faça os seguintes experimentos, registrando os resultados obtidos.

- **Experimento 1**: Lance uma moeda para cima e construa uma tabela indicando a quantidade de caras e de coroas obtidas em 10 jogadas.

	Ocorrências de	
Quantidade de jogadas	cara	coroa

- **Experimento 2**: Repita os procedimentos do experimento 1, anotando o número de caras e coroas depois de 15, 20, 25 e 30 jogadas.

	Ocorrências de	
Quantidade de jogadas	caras	coroas
10		
15		
20		
25		
30		

Compare seus resultados com os de seus colegas.

Qual é o número de caras esperado, caso você jogue 100 vezes a moeda?

E se forem 1 000 jogadas?

Curiosidade: O francês Buffon (1707-1788) lançou uma moeda 4040 vezes, obtendo 2048 caras. Naquele experimento ele obteve uma frequência relativa de caras de $\frac{2\,048}{4\,040} = 0{,}50693$, que é um valor bem próximo de $\frac{1}{2}$. O britânico Karl Pearson (1857-1936) obteve uma frequência relativa de 0,5005 lançando uma moeda 24 000 vezes.

- **Experimento 3**: Lance um dado 60 vezes e construa uma tabela para anotar quantas vezes o número de cada face cai voltado para cima.

Figura 4.10: Alguns experimentos destacando a concepção frequentista no livro do 7º ano de Lopes Lopes (2013), p. 260.

utilizando duas aplicações, uma com os jogos de loterias e outra sobre a coincidência de aniversários.

Tendo em vista o que foi explanado, o autor abordou muitos exemplos, situações-

Lendo história e curiosidades sobre probabilidade

E tudo começou com uma aposta...

A ideia de probabilidade é mais antiga do que se pensa, estudos sobre culturas da Antiguidade indicam a presença de vários tipos de jogos.

Um dado de formato cúbico — como o que conhecemos hoje — feito de porcelana, datado do século III a.C., foi encontrado no Iraque. No Egito também foram encontrados dados de milhares de anos.

Mas os primeiros estudos que levaram a uma teoria sobre probabilidade surgiram no século XVII, com uma troca de correspondências entre os franceses Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que discutiam sobre um problema.

Conta-se que, durante uma viagem pelo interior da França, Pascal encontrou um jogador aficionado por jogos de dados, conhecido como Cavalheiro de Meré. O jogador queria saber de Pascal como deveria ser dividida certa quantia em dinheiro, caso um jogo, com vários lances programados, tivesse que ser interrompido antes do tempo. Pascal se interessou pelo problema e desenvolveu-o com Fermat por meio de troca de correspondência.

De lá para cá, a teoria de probabilidades desenvolveu-se, e hoje é aplicada em praticamente todos os campos do conhecimento científico.

Cuidado com os jogos de loteria!

Diariamente somos bombardeados pelas propagandas de TV com propostas para ficarmos ricos da noite para o dia sem muito esforço. Essa venda de felicidade fácil, por meio de loterias, concursos e carnês do tipo "aposte e ganhe", não informa aos telespectadores as reais possibilidades de ganhar o que é ofertado. O fato é que, na maioria das vezes, a chance de ganhar na loteria ou nesses tipos de sorteios é quase nula.

Para se ter uma ideia, a probabilidade de um indivíduo ganhar sozinho o prêmio da Mega-Sena é de **1** em **50 063 860**.

Dessa forma, como já temos noções de probabilidade, sabemos que tal possibilidade é praticamente nula, ou seja, é muito difícil.

Coincidência de aniversários

Você pode não acreditar, mas as chances de que dois colegas da sua classe façam aniversário no mesmo dia é muito grande.

Se na sua classe há 40 alunos, a probabilidade de coincidência de aniversários é de aproximadamente 90%.

Verifique. Combine com o(a) professor(a) e faça uma investigação nas classes de sua escola. É provável que você descubra mais aniversários coincidentes do que imaginava.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Figura 4.11: Algumas aplicações e curiosidades no livro do 7º ano de Lopes Lopes (2013), p. 269.

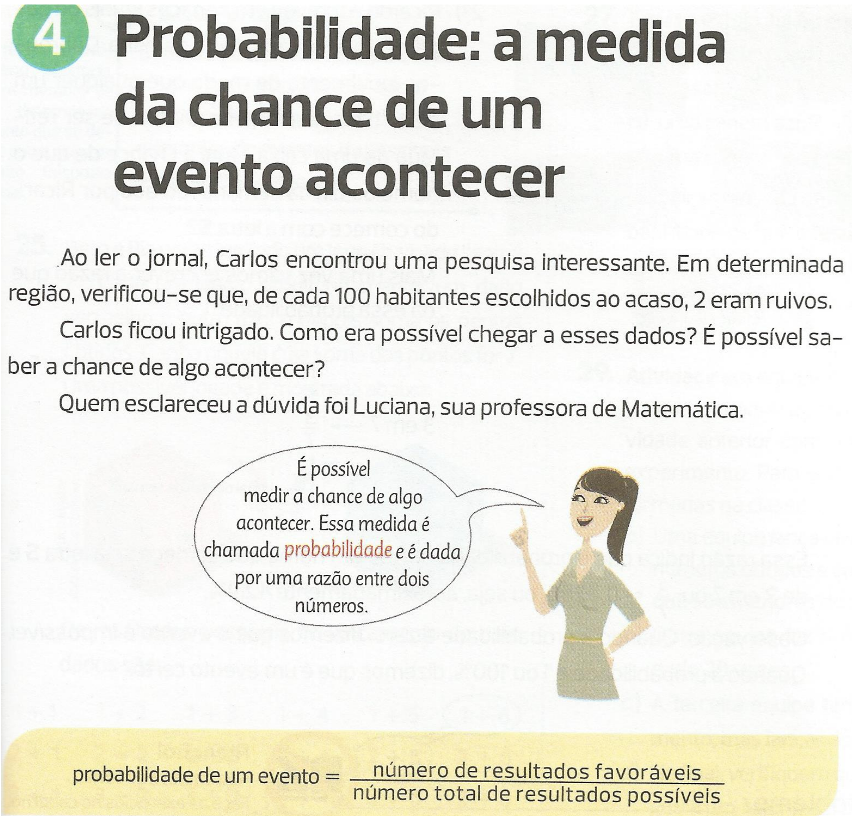
problema e trabalhou bem as contextualizações, reverenciando o que pede o PCN no 3º ciclo (6º e 7º ano), explorando do aluno situações-problema envolvendo a probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão, desenvolvendo assim, o raciocínio probabilístico.

Em relação ao 4º ciclo (8º e 9º ano) não são abordadas as Noções de Probabilidade, não contemplando o que rege o PCN nesse ciclo, em que o aluno deve construir o espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

Desse modo, Lopes [8] não dividiu nos demais volumes da coleção o conteúdo, ou seja, não foram abordadas as Noções de Probabilidade no 6º, 8º e 9º ano, concentrando apenas no volume do 7º ano o conteúdo objeto de estudo, o que, ao nosso ver, não é positivo.

4.3 Coleção 3: Projeto Teláris - Matemática

Por fim, nesta seção serão analisados os livros da coleção Projeto Teláris - Matemática, de Luiz Roberto Dante. No volume do 6º ano da coleção em análise, não é abordado o assunto *Noções de Probabilidade*, sendo introduzido o conteúdo no volume do 7º ano, por uma situação-problema, apresentada pela Figura 4.12, e em seguida Dante [5] conceitua desde o título a probabilidade *como a medida da chance de um evento acontecer* e em seguida, faz uso da concepção Clássica de Probabilidade também conhecida como definição Laplaciana.


4 Probabilidade: a medida da chance de um evento acontecer

Ao ler o jornal, Carlos encontrou uma pesquisa interessante. Em determinada região, verificou-se que, de cada 100 habitantes escolhidos ao acaso, 2 eram ruivos.

Carlos ficou intrigado. Como era possível chegar a esses dados? É possível saber a chance de algo acontecer?

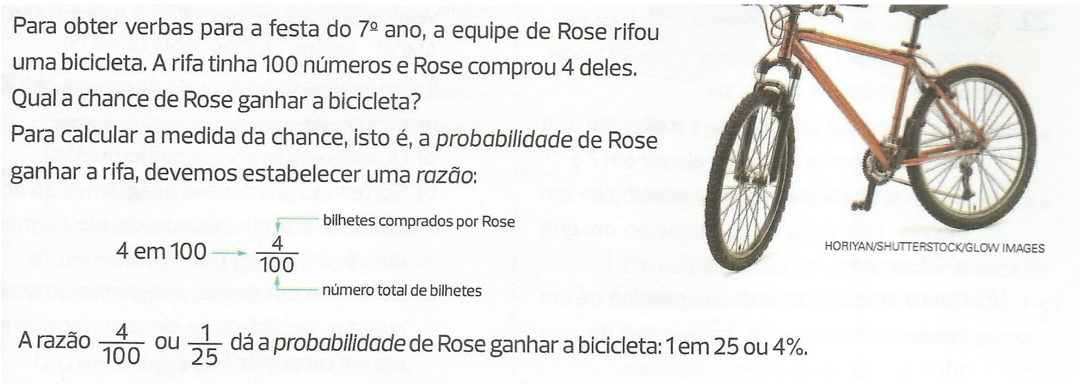
Quem esclareceu a dúvida foi Luciana, sua professora de Matemática.

$$\text{probabilidade de um evento} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Figura 4.12: Introdução ao conteúdo de Probabilidade no livro do 7º ano de Dante (2012), p. 269.

O exemplo acima apresentado, conduz o aluno à reflexão sobre o questionamento feito: *"Como era possível chegar a esses dados? É possível saber a chance de algo acontecer?"*, para posteriormente compreender que é através da probabilidade que esses questionamentos são esclarecidos. Verifica-se que o autor recorre a um fato do cotidiano, para que o aluno perceba que o conteúdo que irá estudar tem aplicabilidade no dia a dia.

Dando continuidade, o autor aborda mais dois exercícios resolvidos para aplicar a definição de probabilidade, dos quais analisaremos só o primeiro, já que o segundo é análogo. Dante [5], ao abordar o problema referente a Figura 4.13, além de utilizar a definição de probabilidade para resolver o que foi proposto, ele faz a conexão entre os conteúdos de razão e porcentagem. Para tanto, é importante que o aluno tenha o conhecimento desses assuntos.


Para obter verbas para a festa do 7º ano, a equipe de Rose rifou uma bicicleta. A rifa tinha 100 números e Rose comprou 4 deles. Qual a chance de Rose ganhar a bicicleta?
Para calcular a medida da chance, isto é, a *probabilidade* de Rose ganhar a rifa, devemos estabelecer uma *razão*:

$$4 \text{ em } 100 \longrightarrow \frac{4}{100} \begin{array}{l} \leftarrow \text{bilhetes comprados por Rose} \\ \leftarrow \text{número total de bilhetes} \end{array}$$

A razão $\frac{4}{100}$ ou $\frac{1}{25}$ dá a *probabilidade* de Rose ganhar a bicicleta: 1 em 25 ou 4%.

Figura 4.13: Exercício resolvido 1 do conteúdo de Probabilidade no livro do 7º ano de Dante (2012), p. 269.

Das páginas 270 a 272 são apresentados exercícios e problemas com 12 questões que têm um grau crescente de dificuldade e apresenta uma boa contextualização para o aluno reforçar o conceito de probabilidade visto anteriormente. Selecionamos dois problemas, que podem ser vistos nas Figuras 4.14 e Figura 4.15 para tecermos comentários.

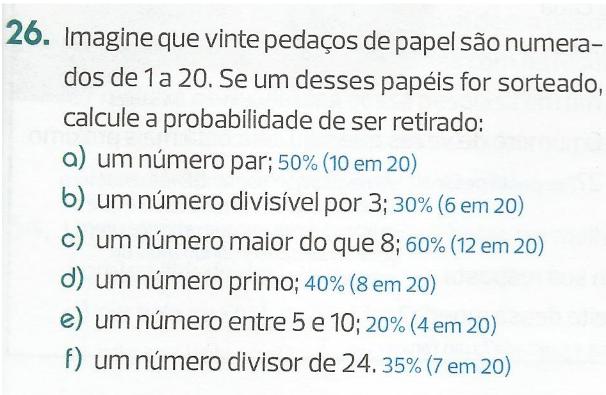
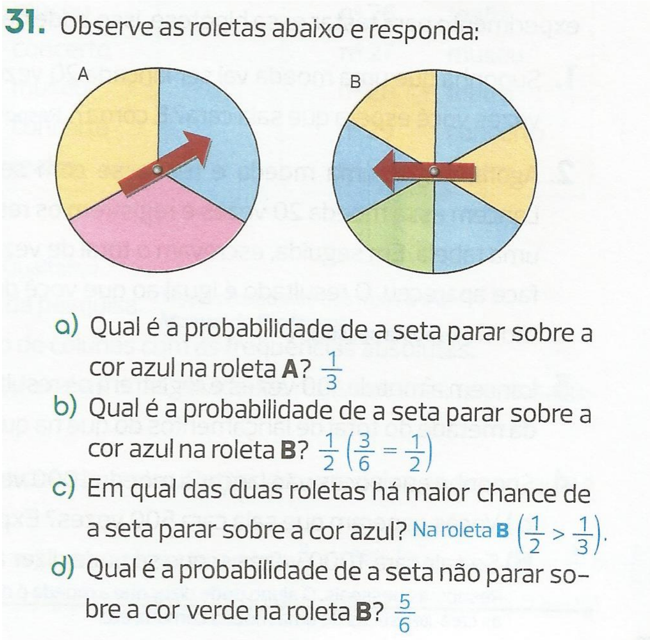

26. Imagine que vinte pedaços de papel são numerados de 1 a 20. Se um desses papéis for sorteado, calcule a probabilidade de ser retirado:
a) um número par; 50% (10 em 20)
b) um número divisível por 3; 30% (6 em 20)
c) um número maior do que 8; 60% (12 em 20)
d) um número primo; 40% (8 em 20)
e) um número entre 5 e 10; 20% (4 em 20)
f) um número divisor de 24. 35% (7 em 20)

Figura 4.14: Exercício proposto do conteúdo de Probabilidade no livro do 7º ano de Dante (2012), p. 271.

Na Figura 4.14, vinte pedaços de papéis são numerados de 1 a 20 e o aluno deverá calcular a probabilidade de ser retirado um deles, daí são dadas várias possibilidades, como por exemplo o papel retirado ter um número par ou ter um número primo. Para resolver essa questão é necessário que ele conheça a definição de probabilidade que foi mostrada anteriormente.

Sabemos que o número de casos possíveis é 20, variando apenas o número de casos favoráveis de acordo com cada item da questão, logo, o aluno poderá deixar o resultado em forma de fração ou em porcentagem, o ideal é que ele saiba usar as duas formas e, para isso, o professor deverá verificar se os alunos conhecem esses pré-requisitos.

Já na questão 31, apresentada na Figura 4.15, é abordado um problema com roleta envolvendo probabilidade geométrica. Para resolvê-lo, o aluno tem que ter a noção de ge-



31. Observe as roletas abaixo e responda:

A B

a) Qual é a probabilidade de a seta parar sobre a cor azul na roleta **A**? $\frac{1}{3}$

b) Qual é a probabilidade de a seta parar sobre a cor azul na roleta **B**? $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\right)$

c) Em qual das duas roletas há maior chance de a seta parar sobre a cor azul? Na roleta **B** $\left(\frac{1}{2}>\frac{1}{3}\right)$.

d) Qual é a probabilidade de a seta não parar sobre a cor verde na roleta **B**? $\frac{5}{6}$

Figura 4.15: Exercício proposto do conteúdo de Probabilidade no livro do 7º ano de Dante (2012), p. 271.

ometria plana e o conceito de probabilidade para obter êxito na resolução do problema. No item "c" dessa questão, o aluno tem mais de uma maneira para resolvê-la, podendo utilizar o que encontrou como resposta nos itens "a"e "b" e, em seguida, comparar as frações, ou de forma geométrica, observando nas figuras a região que tem maior área.

Na página 272 são apresentados dois desafios como ilustra a Figura 4.16, para o aluno reforçar a definição de probabilidade. Nessa mesma página é sugerida uma oficina de matemática, com mais quatro questões envolvendo lançamento de moeda, e sugerindo para os alunos trabalharem em equipe e partilharem os resultados obtidos.

No desafio 2, observamos que o autor, ao resolver o problema, nas orientações para o professor, comete o erro de não colocar o símbolo de porcentagem (%), no decorrer de sua resolução.

Essa proposta de oficina é interessante para os alunos trabalharem em grupo, pois favorece o exercício da argumentação, a organização do pensamento e a interatividade, cumprindo o que propõem os PCN de Matemática para esse nível de escolarização. Tais atividades possibilitam que a aula se torne mais dinâmica e aproxime o aluno da proposta de aprendizagem, tornando esse processo mais eficiente.

Desse modo, para o terceiro ciclo ele contempla o que é proposto pelo PCN, em que nessa fase, deverá ser explorado do aluno situações-problema envolvendo a probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.

Passando para o volume do 8º ano, o autor, antes de definir *experimento aleatório, espaço amostral e evento*, faz uma breve introdução, recaptulando o que foi visto no 7º ano, como a definição de Probabilidade e, acrescentando, que a *"Teoria da Probabilidade é o*

Desafios

(Total de possibilidades: 6 (1, 2, 3, 4, 5 e 6); nem par nem múltiplo de 3: 1 e 5; probabilidade: 2 em 6 = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$)

1. No lançamento de um dado, qual a probabilidade de não sair número par nem número múltiplo de 3? $\frac{1}{3}$
2. Uma moeda viciada é aquela em que a probabilidade de sair qualquer uma das faces é diferente de 50%. Suponha que, em uma moeda viciada, a probabilidade de sair cara seja o triplo da probabilidade de sair coroa. Qual é a probabilidade de sair cara nessa moeda, em porcentagem? 75%

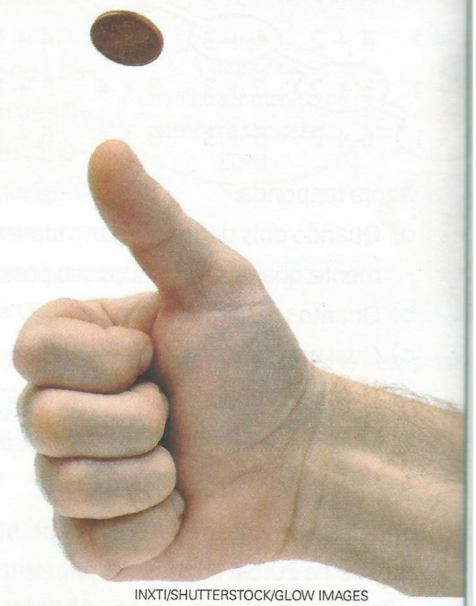
(probabilidade de sair coroa: **x**; probabilidade de sair cara: 3x; $x + 3x = 100 \Rightarrow x = 25$; $3x = 3 \cdot 25 = 75$; ou probabilidade de sair cara: **x**; probabilidade de sair coroa: **y**; $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 100\% \end{cases} \Rightarrow 3y + y = 100 \Rightarrow 4y = 100 \Rightarrow y = 25$; $x = 3 \cdot 25 = 75$)

Oficina de Matemática

Fazendo a gente aprende

Experimentos com probabilidade

De acordo com a definição teórica de probabilidade, quando você lança uma moeda, a probabilidade de sair cara é $\frac{1}{2}$ ou 0,5. Assim, seria possível pensar que, se a lançarmos 20 vezes, vai sair cara 10 vezes, pois $20 \times 0{,}5 = 10$. Mas, quando se realiza um experimento para testar essa hipótese, isso pode não ocorrer.



INXTI/SHUTTERSTOCK/GLOW IMAGES

1. Suponha que uma moeda vai ser lançada 20 vezes. Quantas vezes você espera que saia cara? E coroa? Respostas pessoais.
2. Agora, pegue uma moeda e reúna-se com seus colegas. Lancem essa moeda 20 vezes e registrem os resultados em uma tabela. Em seguida, escrevam o total de vezes que cada face apareceu. O resultado é igual ao que você deu na questão 1? Resposta pessoal.
3. Lancem a moeda 100 vezes e registrem os resultados. O número de vezes que saiu cara está mais próximo da metade do total de lançamentos do que na questão 2? Resposta pessoal. *À medida que aumentamos o número de lançamentos, a tendência é que o número de vezes que aparece uma face vá se aproximando mais da metade do total de lançamentos.*
4. Suponha que vocês vão lançar a moeda 1000 vezes.
   a) Vocês esperam que saia cara 500 vezes? Expliquem sua resposta.
   b) Se sair cara 1000 vezes, o que se pode dizer a respeito dessa moeda?
   Respostas pessoais. O aluno pode dizer que a moeda é defeituosa, "é viciada", não tem as características de uma moeda comum, etc.

Figura 4.16: Desafios e Oficina de Matemática do conteúdo de Probabilidade no livro do 7º ano de (2012), p. 272.

ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos que dão os resultados prováveis ou as chances de determinado resultado ocorrer."

Em seguida, utilizando-se da contextualização, Dante [5], aborda um experimento aleatório, também apresentado na Figura 4.17, para posteriormente defini-lo. Nas orientações para o professor, o autor sugere que o professor estimule os alunos a pesquisar no dicionário o que significa aleatório.

Figura 4.17: Experimento aleatório do conteúdo de Probabilidade no livro do 8º ano de Dante (2012), p. 274.

Utilizando-se dessa mesma situação problema, Dante [5] define:

"Espaço amostral como sendo o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e *"evento qualquer subconjunto do espaço amostral"*. Tais conceitos são importantes na Probabilidade e serão necessários posteriormente.

Na página 276, Dante [5] recorre aos conceitos de espaço amostral e evento, visto anteriormente e define que, para medir a chance de ocorrer um evento, ou seja, a **Probabilidade** de ocorrer um evento A indicando por **P(A)**, devemos encontrar a *razão entre o número de casos favoráveis (ou seja, o número de elementos do evento, representado por* ***n(A)****) e o número de resultados possíveis (ou seja, o número de elementos do espaço amostral, representado por* ***n(U)*** *).*

Em seguida, o autor coloca um exercício resolvido apresentado na Figura 4.18 para utilizar a definição dada de Probabilidade.

Lurdes lançou um dado de 6 faces sobre um tabuleiro. Vamos calcular a probabilidade de ela obter:

a) um número par;

b) um número maior do que 4;

Figura 4.18: Exercício resolvido do conteúdo de Probabilidade no livro do 8º ano de Dante (2012), p. 276.

Para solucionar essa questão, o aluno precisa dominar os seguintes conceitos:

- Espaço amostral;
- Evento;
- $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$.

Na página 277, o autor traz uma seção chamada *Você sabia?*, na qual aparece uma informação ou curiosidade para o leitor, nesse caso, uma aplicação de Probabilidade na previsão do tempo como ilustra a Figura 4.19. Isso acaba chamando a atenção do aluno, fazendo ele perceber que o conteúdo estudado, tem uma aplicabilidade no seu dia a dia.

Você sabia?

A previsão do tempo é feita com base no cálculo de probabilidade. Por exemplo, no dia 10/11/2011, o Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPTEC) previa, para o dia seguinte (11/11/11), uma probabilidade de chuva em Manaus de 80%.

Figura 4.19: Aplicação do conteúdo de Probabilidade no livro do 8º ano de Dante (2012), p. 277.

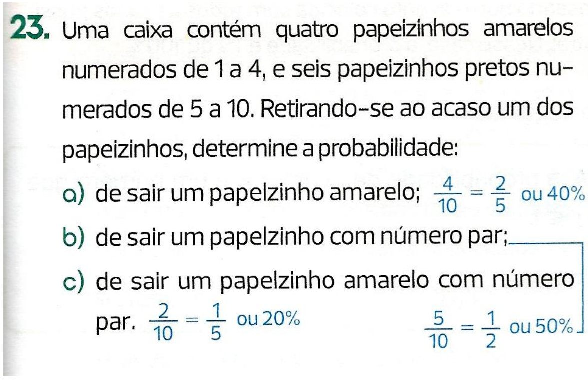
Nessa mesma página, o autor traz uma lista de exercícios propostos para o aluno com 4 questões, das quais escolhemos uma delas que pode ser vista na Figura 4.20 para comentarmos.

Aqui, o aluno exercitará os conceitos de probabilidade, o espaço amostral e eventos.

Sabendo que há 4 papeizinhos amarelos e 6 papeizinhos pretos, temos no total 10 papeizinhos, o que quer dizer que $n(U) = 10$.

No item "a" vamos chamar o evento "sair um papelzinho amarelo" de evento A, e dessa forma, $n(A) = 4$.

Portanto, a probabilidade de retirar ao acaso um papelzinho amarelo será dada por:



23. Uma caixa contém quatro papeizinhos amarelos numerados de 1 a 4, e seis papeizinhos pretos numerados de 5 a 10. Retirando-se ao acaso um dos papeizinhos, determine a probabilidade:

a) de sair um papelzinho amarelo; $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ou 40%

b) de sair um papelzinho com número par; $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ou 50%

c) de sair um papelzinho amarelo com número par. $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ou 20%

Figura 4.20: Exercício proposto do conteúdo de Probabilidade no livro do 8º ano de Dante (2012), p. 277.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ou 40%.

Em relação ao item "b", chamando de B o evento "sair um papelzinho com número par", dessa forma $n(B) = 5$ e o espaço amostral é o mesmo do item "a".

Consequentemente, a probabilidade de retirar ao acaso um papelzinho com número par será dada por:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

ou 50%.

Por último, no item "c" vamos chamar o evento "sair um papelzinho amarelo com número par" de evento C, e assim, o número de resultados favoráveis é 2, ou seja, $n(C) = 2$.

Consequentemente, a probabilidade de retirar ao acaso um papelzinho amarelo com número par será dada por:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

ou 20%.

Posteriormente, os últimos conceitos que Dante [5] aborda nesse volume do 8º ano sobre Noções de Probabilidade são *evento impossível* e *evento certo*.

Antes de apresentar os conceitos propriamente ditos, o autor inicia com a seguinte situação-problema:

"O professor Paulo vai sortear um livro de aventuras entre os 30 alunos do 8º ano B. Para isso, escreveu, em pedaços de papel, os números dos alunos na lista de chamada. Pergunta-se: qual a probabilidade de o professor Paulo sortear um número maior do que 40?"

Utilizando o conceito de probabilidade que foi estudado anteriormente, o aluno chegará a conclusão de que a probabilidade do professor Paulo sortear um número maior que 40 é 0, ou seja, para esse exemplo nunca ocorrerá. Depois disso ele define o evento impossível como sendo:

"Existem alguns eventos que nunca ocorrerão. Eles são chamados de eventos impossíveis. A probabilidade de acontecer um evento impossível é sempre zero."

O mesmo exemplo que foi utilizado para evento impossível é utilizado para explorar o conceito de evento certo, mudando apenas a pergunta:

"Considerando ainda a situação do sorteio, qual a probabilidade de o professor Paulo sortear um número menor ou igual a 30?"

Portanto, a probabilidade de o professor Paulo sortear um número menor ou igual a 30 é 1% ou 100%, ou seja, podemos garantir, com certeza, que esse evento ocorrerá.

Todo evento que podemos garantir que ocorrerá é chamado de *evento certo*.
Para que isso ocorra, é necessário que o evento coincida com todos os casos possíveis, ou seja, com o espaço amostral. Nesse caso, a probabilidade é 1% ou 100%.

Figura 4.21: Definição de evento certo apresentado no livro do 8º ano de Dante (2012), p. 278.

Verificamos um equívoco na exposição utilizada pelo autor sobre evento certo como pode ser vista na Figura 4.21, quando ele afirma que a probabilidade de o professor Paulo sortear um número menor ou igual a 30 é **1%** ou **100%**, a informação está incorreta e o professor deverá alertar ao aluno sobre este fato. O correto seria **1** (sem o símbolo de porcentagem) ou **100%** .

Finalizando esses conceitos, o autor conclui o intervalo de Probabilidade que pode ser vista na Figura 4.22:

Qualquer que seja o evento **A**, a probabilidade de ocorrer **A** é um número que varia de zero até um: $0 \leq P(A) \leq 1$.

0 ———— P (A) ———— 1

evento impossível — P (A) — evento certo

Figura 4.22: Intervalo referente a Probabilidade apresentado no livro do 8º ano de Dante (2012), p. 278.

Esse conceito é importante para que o aluno posteriormente (Ensino Médio e Superior) entenda a Probabilidade como uma função.

Dando continuidade, Dante [5] traz questões para que o aluno classifique como evento impossível e evento certo recorrendo assim, ao que foi estudado. Na página 281, na parte

Oficina de Matemática (Figura 4.23), é proposto um trabalho em equipe onde o professor irá orientar e estimular a aprendizagem dos alunos. Nessa oficina de Matemática, com um título sugestivo: *Fazendo a gente aprende*, os alunos irão fazer a brincadeira do "par ou ímpar" anotando os resultados no total de 10 rodadas para posteriormente responder as questões pedidas. Nessa atividade, destacamos mais uma vez a proposta da coleção de propiciar que os alunos aprendam interagindo entre si e compartilhem os conhecimentos.

Fazendo a gente aprende

Par ou ímpar

Reúna-se com um colega para realizar esta atividade, que envolve o conhecido jogo do par ou ímpar.

Lembremos que, no jogo de par ou ímpar, o resultado é par quando ambos os jogadores colocam números pares ou quando ambos os jogadores colocam números ímpares; e o resultado será ímpar quando um jogador colocar um número par e o outro colocar um número ímpar.

Seria possível concluir, então, que, na brincadeira do par ou ímpar, é mais fácil ganhar quem pediu par do que quem pediu ímpar?

Antes de responder a essa pergunta, realizem a atividade a seguir.

Inicialmente, decidam quem será o jogador que vai pedir sempre par e quem será o jogador que vai pedir sempre ímpar. Não é possível trocar a escolha no meio do jogo.

Copiem e completem a tabela abaixo, colocando um **X** para cada vitória. Repitam o procedimento até completarem 10 rodadas

	Par	Ímpar
	Nome do(a) jogador(a): ■	Nome do(a) jogador(a): ■
1ª rodada		
2ª rodada		
3ª rodada		
4ª rodada		
5ª rodada		
6ª rodada		
7ª rodada		
8ª rodada		
9ª rodada		
10ª rodada		
Total		

E agora? Vocês acham que a afirmação de que é mais fácil ganhar quem pediu par do que quem pediu ímpar é verdadeira? Por quê? Observem o resultado final da sua tabela e troquem ideias a respeito.

Figura 4.23: Oficina de Matemática do conteúdo de Probabilidade no livro do 8º ano de Dante (2012), p. 281.

No final de cada unidade desta coleção, é apresentada uma seção *Ponto de chegada*, a qual é dividida em três partes: "A Matemática no(s) texto(s)" , "Verifique o que estudou" , e "Autoavaliação".

No item "A Matemática no(s) texto(s)" O autor aborda *Um pouco da história da Teoria das Probabilidades*, como pode ser vista na Figura 4.24, contextualizando historicamente o estudo da Probabilidade, fazendo com que o aluno conheça um pouco dos matemáticos que iniciaram esses estudos, através dos jogos de dados; e como vários estudiosos de diferentes países pesquisaram o assunto e ao longo do tempo foram desenvolvendo e disseminando pelo mundo inteiro suas pesquisas. Concluído o texto, são apresentados duas questões para estimular o aluno a compreender e complementar a leitura realizada.

Um pouco da história da Teoria das Probabilidades

A Teoria das Probabilidades se iniciou com os estudos dos matemáticos italianos Cardano (1501-1576) e Galileu (1564-1642), que estão entre os primeiros a analisar matematicamente as chances de resultados no jogo de dados.

O francês Blaise Pascal (1623-1662) chegou a trocar várias correspondências com seu amigo Pierre de Fermat (1601-1665) sobre a probabilidade de se obter sucesso em situações que envolviam jogos de dados. A discussão nessas cartas ajudou bastante no desenvolvimento da Teoria das Probabilidades.

Entre outros matemáticos que se dedicaram, direta ou indiretamente, ao estudo das probabilidades, destacaram-se: o holandês Huygens (1629-1695), ao qual é atribuído o primeiro livro sobre probabilidades; os suíços Jacob Bernouilli (1654-1705) e Leonhard Euler (1707-1783); e os franceses Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) e Pierre S. Laplace (1749-1827).

Mais recentemente, os nomes de Poincaré (1854-1912), Borel (1871-1956) e Von Neumann (1903-1957) aparecem ligados ao estudo de probabilidades e teoria dos jogos.

Hoje, o uso da Teoria das Probabilidades é fundamental em quase todas as áreas do conhecimento.

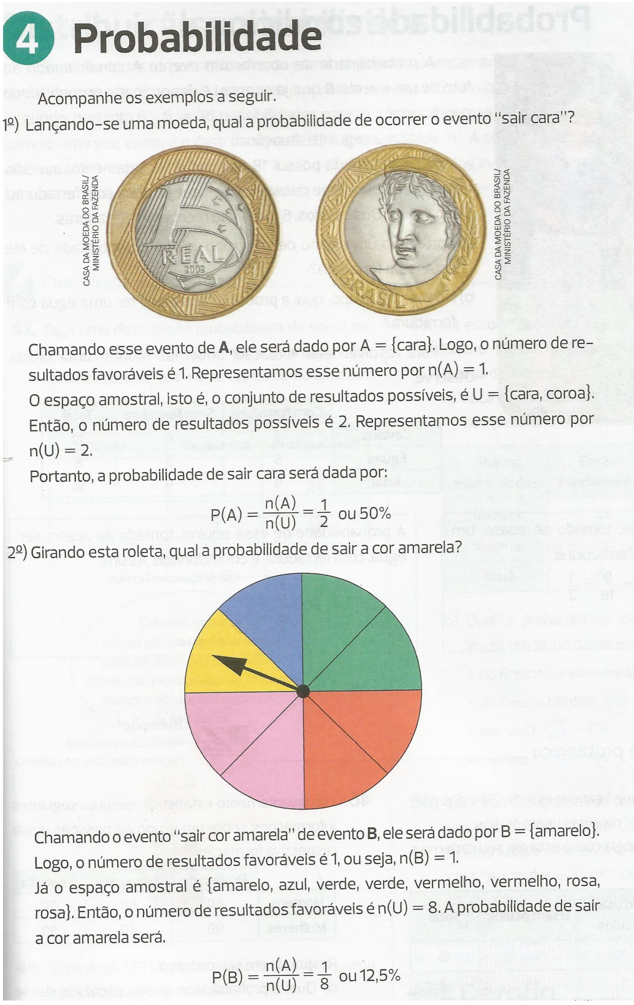
Trabalhando com o texto

1. Explique a ideia principal do texto.
2. Troque ideias com seus colegas sobre onde é possível aplicar as noções de probabilidade na Medicina, na Economia e no trânsito.

Figura 4.24: História da Teoria das Probabilidades apresentada no livro do 8º ano de Dante (2012), p. 286.

Ao trazer essas informações para os alunos, o autor da coleção permite que os discentes aprofundem seus conhecimentos, investigando a origem e as motivações das noções assimiladas. Todavia, as questões propostas são bem limitadas, cabendo ao professor explorar melhor as informações trazidas no livro, recorrendo a outros recursos e atividades.

Em relação ao volume do 9º ano, as Noções de Probabilidade estão inseridas no capítulo 9, juntamente com Estatística e Combinatória. Dante [5] inicia o conteúdo com dois exemplos, como mostra a Figura 4.25, para ser calculada a probabilidade em cada um deles. O que podemos observar, que nessas questões o autor tenta retomar o que já foi estudado nos anos anteriores. Para o aluno que já estudou o conteúdo, serve para relembrar o conteúdo.



4 Probabilidade

Acompanhe os exemplos a seguir.

1º) Lançando-se uma moeda, qual a probabilidade de ocorrer o evento "sair cara"?

Chamando esse evento de **A**, ele será dado por A = {cara}. Logo, o número de resultados favoráveis é 1. Representamos esse número por n(A) = 1.

O espaço amostral, isto é, o conjunto de resultados possíveis, é U = {cara, coroa}. Então, o número de resultados possíveis é 2. Representamos esse número por n(U) = 2.

Portanto, a probabilidade de sair cara será dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

2º) Girando esta roleta, qual a probabilidade de sair a cor amarela?

Chamando o evento "sair cor amarela" de evento **B**, ele será dado por B = {amarelo}. Logo, o número de resultados favoráveis é 1, ou seja, n(B) = 1.

Já o espaço amostral é {amarelo, azul, verde, verde, vermelho, vermelho, rosa, rosa}. Então, o número de resultados favoráveis é n(U) = 8. A probabilidade de sair a cor amarela será.

$$P(B) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{8} \text{ ou } 12{,}5\%$$

Figura 4.25: Exemplos para calcular a Probabilidade no livro do 9º ano de Dante (2012), p. 291.

Na página 292, o autor aborda Probabilidade Condicional começando com a definição apresentada na Figura 4.26, e seguindo com uma situação-problema que pode ser vista na mesma figura.

Para solucionar o item "a" do exemplo dado, o aluno tem que saber utilizar a definição clássica de Probabilidade e por isso reforça-se a importância no início desse volume, ter sido feita a revisão do cálculo de probabilidade. Em seguida o aluno deverá observar os dados

Probabilidade condicional

A probabilidade de ocorrer um evento **A** *condicionado* ao fato de um evento **B** que já ocorreu é denominada *probabilidade condicional*.

Analise a seguinte situação:

Uma estrebaria possui 18 equinos em treinamento, que são destinados à terapia de crianças. Dos 9 que já estão com ferraduras, 5 são éguas. Dos cavalos, 6 ainda não receberam ferraduras.

a) Sorteando um equino desse grupo, qual a probabilidade de ele estar sem ferradura?

b) No mesmo grupo, qual a probabilidade de se ter uma égua com ferradura?

Para resolver essa situação, podemos montar uma tabela. Observe.

	Com ferradura	Sem ferradura	Total
Cavalos	4	6	10
Éguas	5	3	8
Total	9	9	18

Figura 4.26: Definição e exercício resolvido no livro do 9º ano de Dante (2012), p. 292.

que foram organizados em uma tabela, onde o número de equinos sem ferraduras é 9 e o número total de equinos é 18, logo, a probabilidade de se escolher um cavalo ao acaso e ele estar sem ferradura é

$$\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

ou 50%.

Já no item "b", a probabilidade desse equino, tomado ao acaso, ser égua e com ferradura, é $\frac{5}{18}$, pois entre os 18 cavalos, 5 são éguas com ferradura.

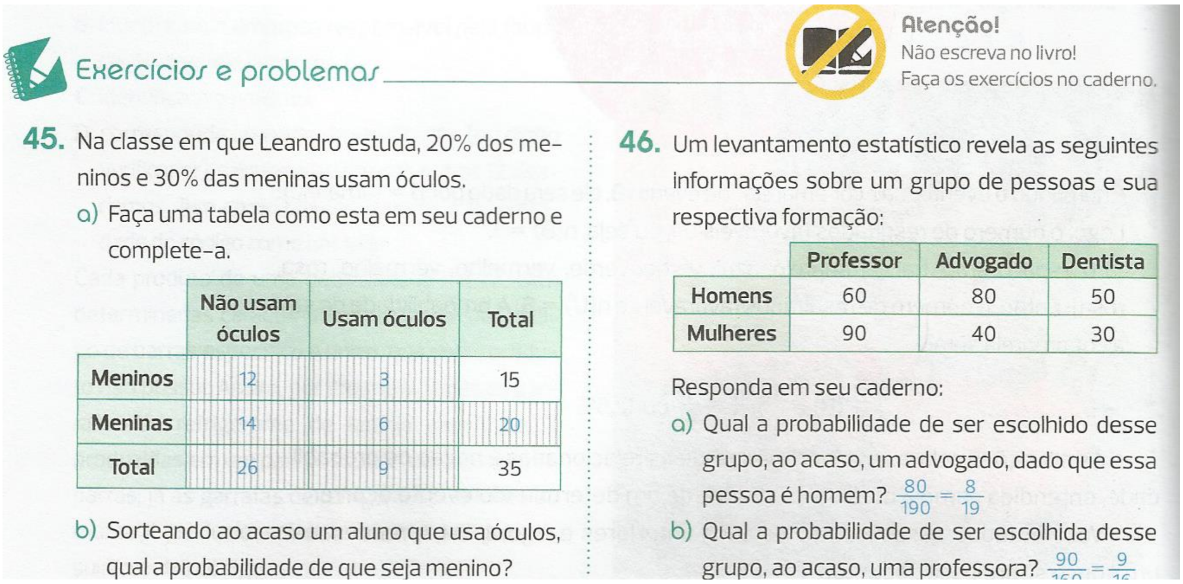
Posteriormente, são apresentadas duas questões, as quais podem ser vistas na Figura 4.27, envolvendo o assunto de Probabilidade condicional, das quais iremos comentar a questão 45.

No item"a", para completar a tabela como foi pedido, o aluno deverá usar porcentagens, dessa forma, Dante [5] promove uma conexão entre Probabilidade e Porcentagem. Realizando os cálculos, temos:

- $20\%\ de\ 15 = 3$, onde temos 3 meninos que usam oculos e $15 - 3 = 12$ meninas que usam óculos, completando assim a primeira linha da tabela.

- Em relação à segunda linha da tabela temos $30 - 15 = 20$ meninas no total, onde $30\%\ de\ 20 = 6$ usam óculos e 14 meninas não usam óculos.

Por último, $12 + 14 = 26$ é o total de meninos e meninas que não usam óculos e $3 + 6 = 9$ é o total de meninos e meninas que usam óculos, completando assim a terceira linha.



Exercícios e problemas

Atenção!
Não escreva no livro!
Faça os exercícios no caderno.

45. Na classe em que Leandro estuda, 20% dos meninos e 30% das meninas usam óculos.

a) Faça uma tabela como esta em seu caderno e complete-a.

	Não usam óculos	Usam óculos	Total
Meninos	12	3	15
Meninas	14	6	20
Total	26	9	35

b) Sorteando ao acaso um aluno que usa óculos, qual a probabilidade de que seja menino?

46. Um levantamento estatístico revela as seguintes informações sobre um grupo de pessoas e sua respectiva formação:

	Professor	Advogado	Dentista
Homens	60	80	50
Mulheres	90	40	30

Responda em seu caderno:

a) Qual a probabilidade de ser escolhido desse grupo, ao acaso, um advogado, dado que essa pessoa é homem? $\frac{80}{190} = \frac{8}{19}$

b) Qual a probabilidade de ser escolhida desse grupo, ao acaso, uma professora? $\frac{90}{160} = \frac{9}{16}$

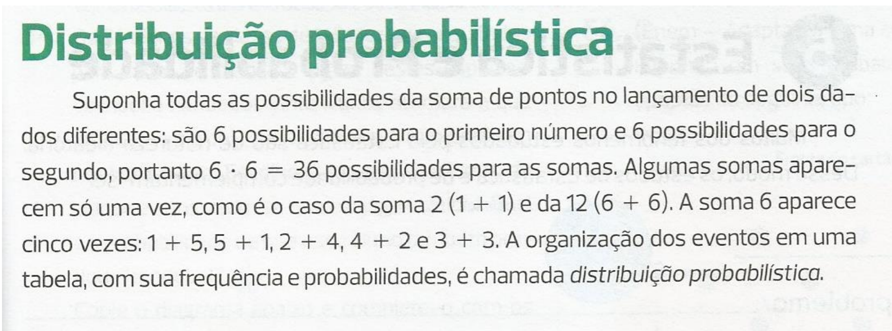
Figura 4.27: Exercício proposto sobre Probabilidade condicional no livro do 9º ano de Dante (2012), p. 292.

No item "b", restringimos o sorteio aos que usam óculos, portanto o número de casos possíveis é 9. Dentre estes, 3 são meninos. Utilizando a Probabilidade condicional, temos que a probabilidade de o sorteado ser um menino, sabendo que usa óculos é:

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

ou aproximadamente 33,33%.

Na página 293 é apresentada a idéia de distribuição probabilística (Figura 4.28), que é a organização dos eventos em uma tabela, com sua frequência e a probabilidade de ocorrerem onde o autor utilizou como exemplo o lançamento de dois dados.



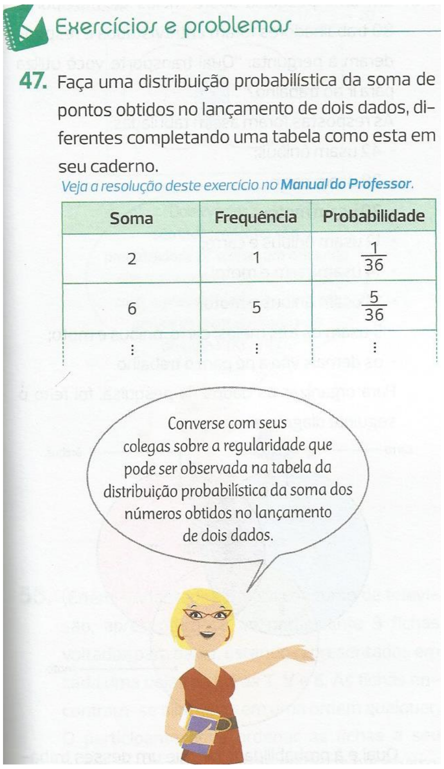
Distribuição probabilística

Suponha todas as possibilidades da soma de pontos no lançamento de dois dados diferentes: são 6 possibilidades para o primeiro número e 6 possibilidades para o segundo, portanto $6 \cdot 6 = 36$ possibilidades para as somas. Algumas somas aparecem só uma vez, como é o caso da soma 2 $(1 + 1)$ e da 12 $(6 + 6)$. A soma 6 aparece cinco vezes: $1 + 5$, $5 + 1$, $2 + 4$, $4 + 2$ e $3 + 3$. A organização dos eventos em uma tabela, com sua frequência e probabilidades, é chamada *distribuição probabilística*.

Figura 4.28: Distribuição probabilística no livro do 9º ano de Dante (2012), p. 293.

Porém, Dante [5] não organizou o exemplo dado de distriuição probabilística em forma de tabela, deixando como exercício para o aluno como ilustrado na Figura 4.29.

Nas páginas 294 e 295, são apresentados exercícios e problemas os quais podem ser vistos na Figura 4.30 e Figura 4.31, promovendo a integração da Estatística e da Probabili-



Exercícios e problemas

47. Faça uma distribuição probabilística da soma de pontos obtidos no lançamento de dois dados, diferentes completando uma tabela como esta em seu caderno.

Veja a resolução deste exercício no Manual do Professor.

Soma	Frequência	Probabilidade
2	1	$\frac{1}{36}$
6	5	$\frac{5}{36}$
⋮	⋮	⋮

Figura 4.29: Exercício de distribuição probabilística no livro do 9º ano de Dante (2012), p. 293.

dade, abordando estimativas de probabilidade a partir de dados estatísticos. Desse modo o autor promove as conexões entre os conteúdos, fazendo com que o aluno também perceba essa ligação e relevância entre os mesmos. Dando seguimento, o autor trouxe, uma questão de vestibular da Vunesp (52) e outras, adaptadas do Enem (55 e 56).

Comentaremos as questões 52 e 55.

Na questão 52, de acordo com os dados apresentados, chamaremos de evento A o evento "as pessoas afetadas por uma parasitose intestinal A" onde $n(A) = 25$, chamaremos de evento B o evento "as pessoas afetadas por uma parasitose intestinal B" sendo $n(B) = 11$, e o espaço amostral é o grupo das 100 pessoas da zona rural, ou seja $n(U) = 100$. Calculando a probabilidade do evento A e do evento B:

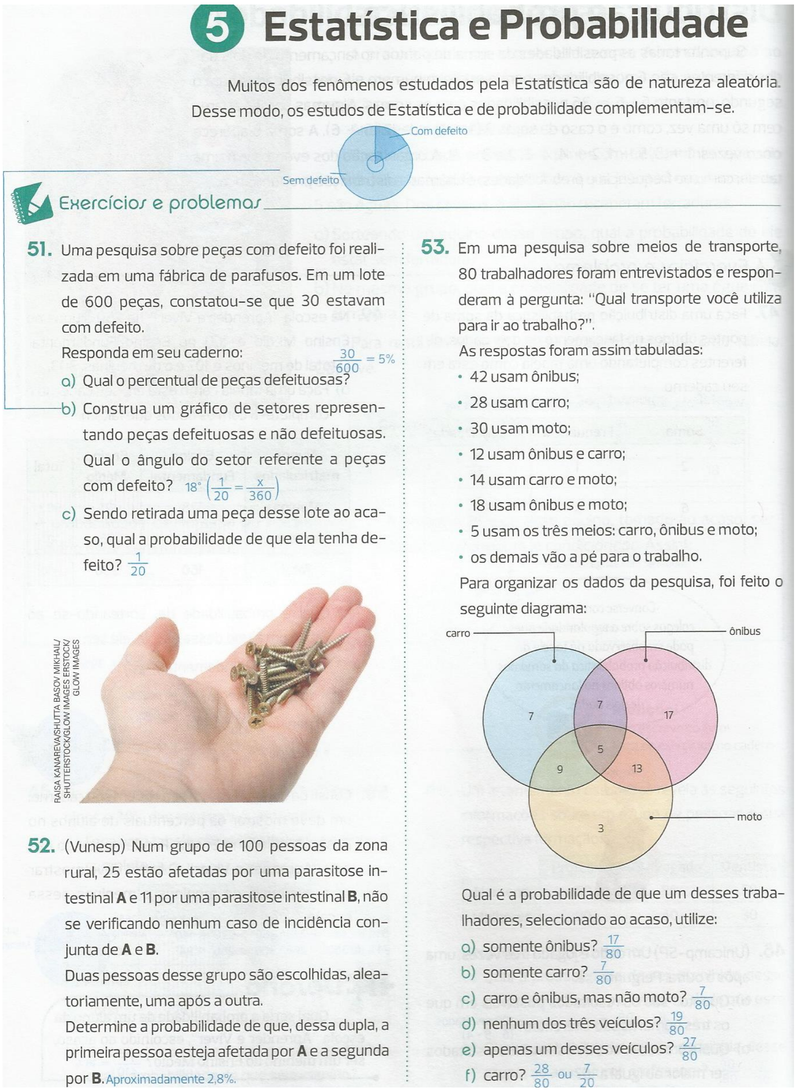
$$P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

e

$$P(B) = \frac{11}{100}.$$

Como não foi verificado nenhum caso de incidência conjunta de A e B, a probabilidade da primeira pessoa esteja afetada por A e a segunda pessoa por B é dado por:

$$P(A\ e\ B) = P(A).P(B) = \frac{1}{4}.\frac{11}{100} = \frac{11}{400} = 0,0275$$


5 Estatística e Probabilidade

Muitos dos fenômenos estudados pela Estatística são de natureza aleatória. Desse modo, os estudos de Estatística e de probabilidade complementam-se.

Com defeito

Sem defeito

Exercícios e problemas

51. Uma pesquisa sobre peças com defeito foi realizada em uma fábrica de parafusos. Em um lote de 600 peças, constatou-se que 30 estavam com defeito.

Responda em seu caderno:

a) Qual o percentual de peças defeituosas? $\frac{30}{600} = 5\%$

b) Construa um gráfico de setores representando peças defeituosas e não defeituosas. Qual o ângulo do setor referente a peças com defeito? $18° \left(\frac{1}{20} = \frac{x}{360}\right)$

c) Sendo retirada uma peça desse lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha defeito? $\frac{1}{20}$

RAISA KANAREVA/SHUTTERSTOCK/GLOW IMAGES BASOV MIKHAIL/ SHUTTERSTOCK/GLOW IMAGES

52. (Vunesp) Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal **A** e 11 por uma parasitose intestinal **B**, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de **A** e **B**.

Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra.

Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por **A** e a segunda por **B**. Aproximadamente 2,8%.

53. Em uma pesquisa sobre meios de transporte, 80 trabalhadores foram entrevistados e responderam à pergunta: "Qual transporte você utiliza para ir ao trabalho?".

As respostas foram assim tabuladas:

- 42 usam ônibus;
- 28 usam carro;
- 30 usam moto;
- 12 usam ônibus e carro;
- 14 usam carro e moto;
- 18 usam ônibus e moto;
- 5 usam os três meios: carro, ônibus e moto;
- os demais vão a pé para o trabalho.

Para organizar os dados da pesquisa, foi feito o seguinte diagrama:

Qual é a probabilidade de que um desses trabalhadores, selecionado ao acaso, utilize:

a) somente ônibus? $\frac{17}{80}$

b) somente carro? $\frac{7}{80}$

c) carro e ônibus, mas não moto? $\frac{7}{80}$

d) nenhum dos três veículos? $\frac{19}{80}$

e) apenas um desses veículos? $\frac{27}{80}$

f) carro? $\frac{28}{80}$ ou $\frac{7}{20}$

Figura 4.30: Exercícios propostos envolvendo Estatística e Probabilidade no livro do 9º ano de Dante (2012), p. 294.

ou seja 2,75%.

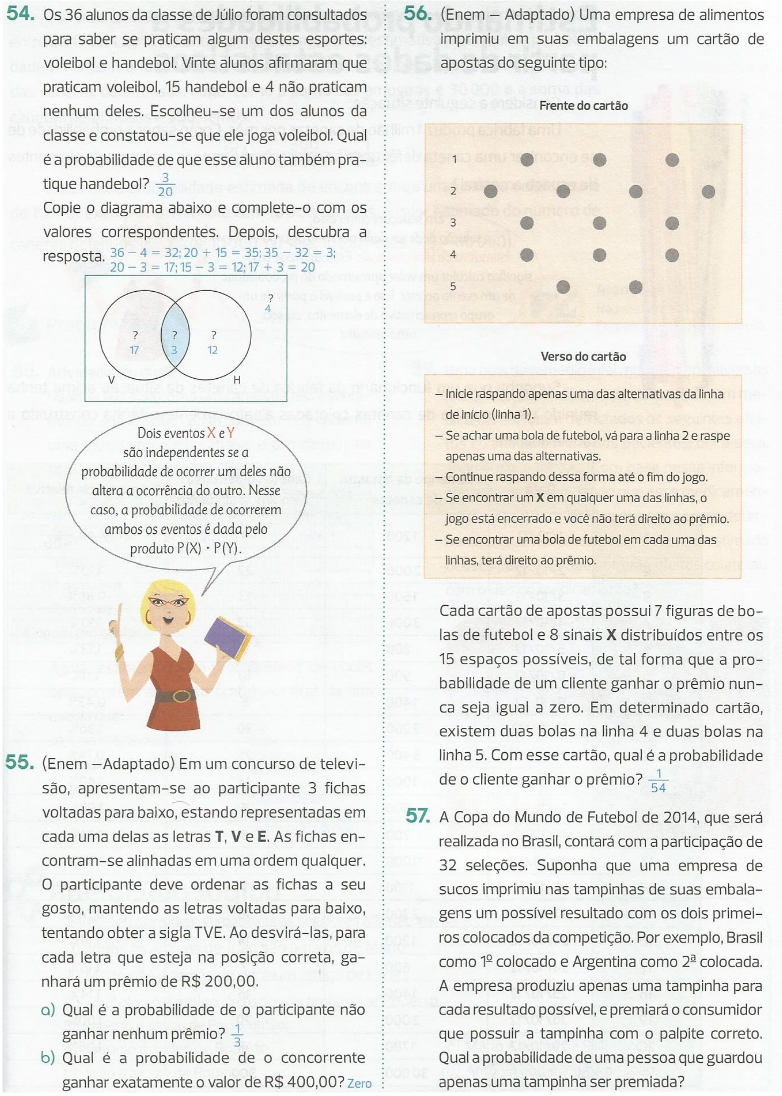
Na questão 55, inicialmente, o aluno deverá listar todas as possibilidades para formar palavras com as letras: **T**, **V** e **E**, desse modo acabará encontrando o espaço amostral, ou seja,

$U = \{TVE, TEV, VTE, VET, ETV, EVT\}$, onde $n(U) = 6$

No item "a", a probabilidade de que o participante não ganhe prêmio nenhum é ao desvirar as letras, formar as palavras *VET* ou *ETV*. Portanto, calculando a probabilidade teremos:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

ou aproximadamente 33,33%.



54. Os 36 alunos da classe de Júlio foram consultados para saber se praticam algum destes esportes: voleibol e handebol. Vinte alunos afirmaram que praticam voleibol, 15 handebol e 4 não praticam nenhum deles. Escolheu-se um dos alunos da classe e constatou-se que ele joga voleibol. Qual é a probabilidade de que esse aluno também pratique handebol? $\frac{3}{20}$
Copie o diagrama abaixo e complete-o com os valores correspondentes. Depois, descubra a resposta. $36 - 4 = 32$; $20 + 15 = 35$; $35 - 32 = 3$; $20 - 3 = 17$; $15 - 3 = 12$; $17 + 3 = 20$

55. (Enem – Adaptado) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representadas em cada uma delas as letras **T**, **V** e **E**. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas a seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta, ganhará um prêmio de R$ 200,00.

a) Qual é a probabilidade de o participante não ganhar nenhum prêmio? $\frac{1}{3}$

b) Qual é a probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00? Zero

56. (Enem – Adaptado) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais **X** distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão, existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, qual é a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio? $\frac{1}{54}$

57. A Copa do Mundo de Futebol de 2014, que será realizada no Brasil, contará com a participação de 32 seleções. Suponha que uma empresa de sucos imprimiu nas tampinhas de suas embalagens um possível resultado com os dois primeiros colocados da competição. Por exemplo, Brasil como 1º colocado e Argentina como 2ª colocada. A empresa produziu apenas uma tampinha para cada resultado possível, e premiará o consumidor que possuir a tampinha com o palpite correto. Qual a probabilidade de uma pessoa que guardou apenas uma tampinha ser premiada?

Figura 4.31: Exercícios propostos envolvendo Estatística e Probabilidade no livro do 9º ano de Dante (2012), p. 295.

Em relação ao item "b", a probabilidade que o concorrente ganhe R$ 400,00 é que ele acerte duas letras. Observando o espaço amostral, temos:

TVE ganha R$ 600,00;

TEV ganha R$ 200,00;

VTE ganha R$ 200,00;

VET ganha R$ 0,00;

ETV ganha R$ 0,00;

EVT ganha R$ 200,00.

Pelo que foi observado, não existe a possibilidade do concorrente ganhar R$ 400,00, logo, a probabilidade de tal evento é 0.

Dessa forma, o autor tenta mostrar que os conhecimentos sobre noções de Probabilidade adquiridos nas séries do Ensino Fundamental são essenciais para séries posteriores, inclusive, dando para resolver algumas questões de vestibulares e do ENEM.

Nessa coleção de modo geral, o conteúdo noções de Probabilidade é exposto de forma favorável, o que facilita o trabalho do professor, consequentemente do aluno, revelando também que nem sempre é necessário tanto rigor e formalização na abordagem do conteúdo, até mesmo pelo nível que os alunos se encontram.

Capítulo 5

Comentários sobre a Análise dos livros didáticos e sugestões de exercícios complementares

Após a descrição e os comentários acerca das três coleções selecionadas, é importante tecermos uma breve comparação entre as mesmas, observando aspectos como a introdução do conteúdo, conceito de probabilidade e concepções que adotam, os exercícios propostos e resolvidos. Finalizando, apresentaremos uma proposta para o trabalho com Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II- experimentos e questões -, somando ao que apresentam os livros analisados, um material complementar, resultado de pesquisa em outros meios - livros, dissertações.

Vamos relembrar que as coleções consideradas foram:

- **Coleção 1: Descobrindo e aplicando a Matemática** - 6º ao 9º ano - Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio Fonseca Machado, Editora Dimensão, 1ª edição, Belo Horizonte: Dimensão, 2012.
- **Coleção 2: Projeto Velear: Matemática** - 6º ao 9º ano - Antônio José Lopes, 1ª edição, São Paulo: Editora Scipione, 2013.
- **Coleção 3: Projeto Teláris: Matemática** - 6º ao 9º ano - Luiz Roberto Dante, 1ª edição, São Paulo: Ática, 2012.

5.1 Quanto à introdução do conteúdo

Na coleção 1, a introdução das Noções de Probabilidade é feita de modo bastante resumido, apresentando questões para que o aluno resolva. Na coleção 2, o autor inicia mostrando fenômenos da natureza, jogos com moedas e dados para introduzir o conceito de possibilidade, certeza, incerteza e chance. Já na coleção 3 é apresentada, inicialmente, uma situação-problema para mostrar a ideia de chance, a partir da qual conceitua a *Probabilidade como a medida da chance de um evento ocorrer*. Nesse sentido, percebemos que as coleções 2 e 3 apresentam uma melhor introdução do conteúdo, aplicando-o à realidade do aluno leitor. Para a coleção 1, há a necessidade de complementação por parte do professor.

Uma forma de despertar o interesse do aluno pelo conteúdo em estudo, consiste em iniciar sua abordagem a partir da História da Probabilidade, associada a experimentos e a jogos, trazidos por alguns dos livros analisados.

5.2 Quanto ao conceito de Probabilidade e concepções

Na coleção 1, o autor se refere a chance ou probabilidade como sendo sinônimos e apresenta esse conceito a partir de uma questão, que fica a cargo do aluno resolver, não complementando com informações necessárias ao leitor. Verificamos que a noção apresentada aproxima-se da concepção clássica de probabilidade, todavia deixa lacunas, em virtude da limitação conceitual.

Na coleção 2, há predominância da abordagem frequentista para expor o conteúdo, apresentando assim, alguns experimentos e suas frequencias relativas. O autor recorre à concepção clássica em poucos exemplos, para calcular a probabilidade com jogos de dados.

Na coleção 3, o autor mostra o conceito de probabilidade através da concepção clássica e apresenta vários exemplos para calcular a probabilidade através dessa concepção e, posteriormente, apresenta situações-problema utilizando a concepção frequentista, onde nessa coleção 3, o autor explanou as duas concepções.

Há divergências entre os estudiosos na utilização de uma ou outra concepção na exposição das Noções de Probabilidade nos livros didáticos. Nesse sentido, avaliando o material em análise, percebemos que recorrer às concepções clássica e frequentista, seria o caminho mais viável, visto que podem ser integradas no ensino para uma aprendizagem mais profunda e mais significativa, trazendo benefícios para uma melhor compreensão e aplicação das probabilidades.

5.3 Quanto aos exercícios resolvidos

A coleção 1, não apresentou nenhum exercício resolvido, o que dificulta a resolução de atividades posteriores. Na ausência do professor, o aluno recorre a esse tipo de questões para tirar dúvidas. Na coleção 2, o autor aborda vários exercícios resolvidos, mostrando várias situações em que são calculadas as probabilidades, dessa forma, dá ao aluno mais suporte para que resolva os exercícios propostos. Na coleção 3, também temos uma boa variedade de exercícios resolvidos, nos quais o autor utiliza situações-problema contextualizadas que possibilitam o desenvolvimento das habilidades interpretativas, necessárias à compreensão das questões.

5.4 Quanto aos exercícios propostos

Na coleção 1, identificamos poucos exercícios, constatando apenas no livro do 9º ano, e a maioria não está associada à realidade do aluno e abordam de forma direta o conteúdo, sem levar o leitor a refletir e questionar outras formas de resolver o problema. Essa limitação da atividade corresponde à abordagem, também limitada, conferida ao conteúdo, mencionada anteriormente, no qual não seria possível exigir resolução de questões sem o suporte teórico. Na coleção 2, o autor sugere vários exercícios dos quais muitos são contextualizados. Da mesma forma, na coleçao 3, o autor traz exercícios contextualizados, recorrendo a fatos do cotidiano, para que o aluno perceba que o conteúdo que irá estudar tem aplicabilidade no dia a dia, possibilitando assim, o desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

5.5 Em relação à contextualização

De acordo com Vieira [16], há três grupos de estratégias de contextualização para matemática nos livros didáticos: contextualização sociocultural, contextualização histórica e a contextualização interna à matemática. Comparemos as coleções de acordo com cada tipo de contextualização voltada para as Noções de Probabilidade.

Na coleção 1, não foi trabalhada a contextualização sociocultural já que não foram apresentadas situações-problema, valorizando os conhecimentos prévios do aluno para a abordagem dos conceitos e procedimentos matemáticos, ao contrário das coleções 2 e 3, que apresentaram exemplos e questões incorporando aspectos sociais e culturais, mostrando a relevância do cotidiano do aluno.

Para a contextualização histórica, tanto a coleção 2, como a coleção 3, trazem a história da Matemática, porém inserida ao final do capítulo e de maneira breve, relatando como iniciou a probabilidade, citando os jogos de azar e mencionando que foi se propagando no decorrer dos anos, procurando relatar acontecimentos, situando historicamente o conhecimento, e tentando despertar o interesse e a curiosidade do aluno. A coleção 1, por sua vez, não fez uso da contextualização histórica.

Por fim, quanto à contextualização interna à matemática, a qual tem como objetivo fazer articulações, conexões dentro da própria matemática, para auxiliar na construção do conhecimento, com isso, verificamos que a coleção 1 apresentou esse tipo de contextualização de forma superficial na introdução do conteúdo Noções de Probabilidade, onde faz a conexão entre os assuntos de razão, porcentagem e probabilidade. Na coleção 2, o autor articulou a probabilidade com áreas de figuras planas e também porcentagens, fazendo ainda uso da porcentagem associada a uma fração. Por fim, a coleção 3 também contemplou a contextualização interna à matemática, apresentando articulações entre os assuntos de razão, porcentagem, e probabilidade, nos exercícios resolvidos como também nos exercícios propostos, e fazendo as conexões entre os conteúdos de Probabilidade e Geometria.

A adoção dos três tipos de contextualização se faz necessária no estudo do nosso conteúdo objeto de estudo. Situar o que se estuda historicamente é relevante para se entender as concepções, escolhas e deduções daqueles que introduziram as Noções de Probabilidade em nosso meio. Já o ato de contextualizar o assunto, aplicando essas noções no dia a dia dos nossos alunos, permite que os mesmos percebam a importância e a utilidade daquilo que estudam.

No que diz respeito à contextualização interna à matemática, percebemos a necessidade de o aluno contemporâneo não apenas dominar conceitos e resolver problemas isolados, mas associar conhecimentos, interpretar e resolver problemas simples ou complexos. A soma desses três tipos de contextualizações, são utilizadas em provas da OBMEP e no ENEM. Para resolver uma questão nesses processos seletivos, o aluno precisa dominar vários conteúdos e associá-los. Nesse sentido, é necessário que o material didático e o trabalho do professor de adequem a esse modelo de ensino/estudo da matemática.

5.6 Proposta de Atividades

Pensando em nossa atuação em sala de aula, neste tópico, apresentaremos alguns experimentos juntamente com situações-problema que o professor pode utilizar em sala de aula, possibilitando alguns encaminhamentos para contribuir com sua prática docente. Todavia, é importante ressaltar que são apenas sugestões que devem ser adequadas à realidade de trabalho do docente. Não trazemos uma solução para o ensino de probabilidade no Ensino Fundamental II, apenas exercícios complementares.

Nós sabemos que a Teoria da Probabilidade é de grande relevância, pois muitos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória, desde um simples jogo de dado como também várias aplicações em outras ciências, como Biologia (na genétina), no mercado financeiro (empresas de seguros, planos de saúde), na econometria (conjunto de técnicas para quantificar fenômenos econômicos), etc. Desse modo, as noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, fazem parte desde cedo do nosso cotidiano e, dessa forma já podem ser introduzidas e apresentadas no Ensino Fundamental, levando o aluno a realizar experimentos e observar eventos em *espaços equiprováveis*.

Para dinamizar o trabalho em sala de aula e viabilizar a interação, apresentaremos atividades individuais e em grupo.

5.6.1 Atividade 1 - Experimento com moeda

- Material utilizado: Moedas
- Indicação: Terceiro ciclo.
- Realizado individualmente ou em dupla.

Marque a alternativa correta. Ao lançar uma moeda apenas **uma** vez:
a) A face cara tem mais chance de sair;
b) A face coroa tem mais chance de sair;
c) As duas faces têm as mesmas chances de sair;
d) Nenhuma das alternativas está correta.

O objetivo nessa atividade é fazer com que os alunos interagam, discutam e argumentem suas respostas. É interessante que esse experimento seja trabalhado antes da definição teórica de probabilidade, assim, o professor irá introduzir o conceito de experimento aleatório e determinístico, mostrando exemplos e conduzindo o debate para, posteriormente, concluir que a atividade trabalhada trata-se de um experimento aleatório e que a resposta é a letra "c".

5.6.2 Atividade 2 - Experimento com moedas

- Material utilizado: Moedas
- Indicação: Terceiro ciclo.
- Realizado em dupla.

Nessa atividade, o professor dividirá a turma em duplas, de modo que o aluno 1 represente "cara" e, consequentemente, o aluno 2 será "coroa". Para iniciar o jogo, a moeda será lançada. Saindo cara, ponto para o aluno 1, se for coroa, ponto para o aluno 2. Ao final de 40 lançamentos, vence o que tiver o maior número de pontos, caso dê empate, lança-se a moeda mais uma vez para desempatar. O professor deve chamar a atenção dos alunos para o confronto entre o conceitual e o empírico. Embora cara e coroa tenham a mesma probabilidade de ocorrer, pode acontecer de uma prevalecer sobre a outra. Em paralelo com o livro didático, ele pode formalizar o conceito de espaço amostral, evento e a definição de probabilidade através das concepções clássicas e frequentista (citando a atividade trabalhada).

5.6.3 Atividade 3 - Experimento com tachinhas

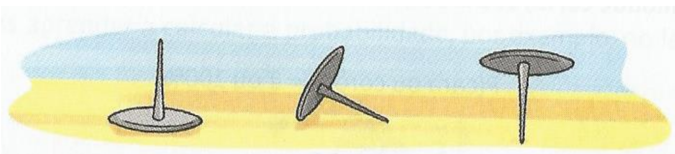


Figura 5.1: Tachinhas, do livro do 7º ano de Lopes (2013), p. 261.

- Material utilizado: Tachinha
- Indicação: Terceiro ciclo.

- Realizado em grupos de três alunos.

A tachinha ou percevejo (Figura 5.1), como também é conhecida, serve para afixar painés de aviso ou cartazes. O experimento consiste em jogar a tachinha 20 vezes para cima e anotar quantas vezes, ao cair no chão, ela continua:

a) Com a cabeça para baixo;

b) Apoiada com a parte pontiaguda e com a cabeça;

c) Apoiada apenas com a parte pontiaguda.

Ao término do experimento, o professor pode orientar os alunos a construirem uma tabela indicando a frequência das posições. Posteriormente, eles devem descrever o espaço amostral para o lançamento da tachinha e calcular a probabilidade da mesma ficar fixa no chão. Por fim, o professor irá passar para os alunos o conceito de evento impossível, evento certo e alertar que nesse experimento os resultados não são igualmente equiprováveis. O professor deve alertar aos alunos, o tipo de superfície (piso da sala), que deve ser realizado o experimento, para não dar margem a outras interpretações.

5.6.4 Atividade 4 - Experimento com moedas

- Material utilizado: 2 Moedas para cada dupla.
- Indicação: Quarto ciclo.
- Realizado em dupla.

Nesse experimento, o professor dividirá a turma em duplas, e os alunos participarão do seguinte jogo:

Cada um lança, alternadamente, 10 vezes duas moedas para cima. Se pelo menos uma das moedas apresentar cara, o aluno 1 ganha um ponto, caso não apareça cara em nenhuma moeda, o aluno 2 ganha um ponto. Quem obtiver o maior número de pontos ganha o jogo.

Questionamentos que o professor pode fazer ao final do jogo:

a) Vocês consideram o jogo justo?

Resposta esperada: Não

b) Quem tem mais chance de ganhar esse jogo?

Resposta esperada: O aluno 1

Também ao término do experimento, o professor pode, juntamente com os alunos, descrever o espaço amostral e calcular a probabilidade do aluno 1 e do aluno 2 ganhar o jogo, e comparar o resultado com as respostas dadas no item "a" e "b".

5.6.5 Atividade 5 - Experimento com dados

- Material utilizado: Papel, lápis, 2 dados de cores diferentes por dupla e um copinho que será usado para misturar os dados e lançá-los sobre a mesa.
- Indicação: Quarto ciclo.
- Realizado em dupla ou em equipes, ficando a critério do professor a quantidade de alunos por equipe.

Esse experimento envolve a soma de dois dados, no qual os alunos devem observar os pontos registrados na face superior dos dados e somar os resultados. Cada jogador faz uma aposta de resultado e anota antes do início do jogo. Os jogadores lançam os dados aternadamente, 20 vezes cada, porém, o número de vezes pode ser negociado de acordo com os objetivos da atividade ou o nível de escolaridade.

É interessante que o professor peça aos alunos, depois dos lançamentos, para que eles construam uma tabela com todas as possibilidades de soma como apresentada na Figura 4.2, e questione-os qual das somas tem mais probabilidade de sair. Espera-se que o aluno seja capaz de perceber que a soma 7 é a mais provável. O professor pode reforçar esse experimento, pedindo que eles resolvam o exercício 3, das questõs propostas.

Resultados possíveis para a soma dos pontos de dois dados.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 5.2: Figura representando soma de pontos de dois dados, de Carvalho (2010), p. 236.

Sugestão para o professor depois da atividade 5:

O professor pode questionar os alunos, perguntando se nesse experimento os dados utilizados fossem indistinguíveis (iguais), o número de possibilidades de soma 7 seria o mesmo para os dados de cores diferentes?

Resposta esperada: Nesse caso, não seria possível diferenciar os pares formados pelos mesmos elementos, por exemplo, (1,2) e (2,1), ou ainda, (3,4) e (4,3). Assim, o espaço amostral teria 21 elementos, e não seria equiprovável, já para os dados de cores diferentes, o espaço amostral teria 36 elementos e será equiprovável.

5.6.6 Atividade 6 - Experimento soma 7

- Material utilizado: 2 Dados para cada dupla.
- Indicação: Quarto ciclo.
- Realizado em dupla.

Nesta atividade, o professor dividirá a turma em duplas. Cada aluno lança, simultaneamente, dois dados e depois soma os pontos obtidos. Ganha aquele cuja soma dos pontos for 7.

Sugestão para o professor depois da atividade 6:

O professor pode pedir que os alunos calculem a probabilidade de sair soma 7.

5.6.7 Questões propostas

1)(UFRRJ)Separando-se as letras da palavra ***tempo*** e colocando-as em uma urna, a probabilidade de se retirar uma consoante é de:

a)20%
b)30%
c)40%
d)50%
e)60%

- Assuntos abordados: Probabilidade, contagem e porcentagem.
- Indicação: Terceiro ciclo.
- Realizado individualmente.

Resposta: letra e.

2)(FUVEST-SP) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que seja primo é:

a)$\frac{1}{2}$
b)$\frac{1}{3}$
c)$\frac{1}{4}$
d)$\frac{1}{5}$
e)$\frac{1}{6}$

- Assuntos abordados: Probabilidade e divisores.
- Indicação: Terceiro ciclo.

- Realizado individualmente.

Resposta: letra c.

3) João tem um dado vermelho e Maria tem dado azul. Os dois jogam simultaneamente os dados e depois somam os pontos obtidos. Responda:

a) Quais são os resultados possíveis para a soma desses dados?

b) Quantos resultados têm soma 7?

c) Qual é a probabilidade de obter soma 7?

d) Qual é a probabilidade de obter soma 0?

e) Qual é a probabilidade de obter soma maior do que 1?

f) Calcule a probabilidade de se obter soma igual a 5?

g) Calcule a probabilidade de se obter soma igual a 6?

h) Suponha que você vai ganhar um prêmio se acertar a soma dos pontos das faces voltadas para cima ao serem lançados dois dados. Qual o palpite você daria para a soma? Por quê?

- Assuntos abordados: Probabilidade, evento impossível e evento certo.

- Indicação: Quarto ciclo.

- Realizado individualmente ou em dupla.

Resposta: a) 36 resultados; b) 6 resultados; c) $\frac{1}{6}$; d) 0 (evento impossível); e) 1 (evento certo); f) $\frac{1}{9}$; g) $\frac{5}{36}$; h) soma 7, pela probabilidade de sair ser $\frac{1}{6}$, maoir que as outras somas.

4)(PUC-RS)Em uma roleta, há números de 0 a 36. Supondo que a roleta não seja "viciada", então, a probabilidade de o número sorteado ser maior de que 25 é:

a)$\frac{11}{36}$

b)$\frac{11}{37}$

c)$\frac{25}{36}$

d)$\frac{25}{37}$

e)$\frac{12}{37}$

- Assuntos abordados: Probabilidade e contagem.

- Indicação: Quarto ciclo.

- Realizado individualmente.

Resposta: letra b.

5) Em um armário, há lenços de três cores, amarelo, azul e verde, em um total de 15 lenços. Se uma pessoa retirar um lenço sem olhar, a probabilidade de ela tirar um lenço amarelo é de 40%. Sabendo que um lenço azul é o dobro da probabilidade de tirar um verde, quantos são os lenços de cada cor.

- Assuntos abordados: Probabilidade, porcentagem e equação do 1^{o} grau.
- Indicação: Quarto ciclo.
- Realizado individualmente.

Resposta: 6 amarelos; 6 azuis e 3 verdes.

6) Uma pesquisa sobre peças com defeito foi realizada em uma fábrica de parafusos. Em um lote de 600 peças, constatou-se que 30 estavam com defeitos. Determine:

a) Qual o percentual de peças defeituosas no lote?

b) Construa um gráfico de setores representando peças defeituosas e não defeituosas. Qual é o ângulo do setor referente a peças com defeito?

c) Sendo retirada uma peça desse lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha defeito?

- Assuntos abordados: Probabilidade, gráfico de setor e porcentagens.
- Indicação: Quarto ciclo.
- Realizado individualmente.

Resposta: a) 5%; b) 18º; c)$\frac{1}{20}$

7)(OBMEP)Uma caixa contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Dela são retiradas, ao acaso, duas bolas. Qual é a probabilidade de que o maior número assim escolhido seja 4?

a)$\frac{1}{10}$

b)$\frac{1}{5}$

c)$\frac{3}{10}$

d)$\frac{2}{5}$

e)$\frac{1}{2}$

- Assuntos abordados: Probabilidade e contagem.
- Indicação: Terceiro ciclo.
- Realizado individualmente.

Resposta: letra c.

8)(OBMEP)Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusa, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

a)$\frac{1}{9}$
b)$\frac{1}{8}$
c)$\frac{2}{9}$
d)$\frac{3}{8}$
e)$\frac{3}{4}$

- Assuntos abordados: Probabilidade e contagem.
- Indicação: Quarto ciclo.
- Realizado individualmente.

Resposta: letra c.

Capítulo 6

Considerações Finais

Retomando a questão que orientou nosso estudo: "Como estão sendo abordadas as Noções de Probabilidade nos livros didáticos do Ensino Fundamental II?" e os objetivos definidos para o mesmo, desenvolveremos algumas reflexões, sintetizadas nos parágrafos seguintes.

As análises apresentadas nos capítulos 3 e 4, levaram a perceber que varia a abordagem do conteúdo noções de Probabilidade de um autor para outro, no que diz respeito à metodologia que é utilizada para apresentar o conteúdo, às concepções adotadas, e aos exercícios resolvidos ou propostos para o aluno. Observamos também que na maioria dos livros didáticos que analisamos, a Estatística está mais presente, ocupando um espaço maior que o dedicado à Probabilidade no que se refere ao bloco Tratamento de Informação.

Observamos que são poucas questões ou, às vezes, nenhuma, que os Livros Didáticos trazem fazendo a conexão entre outros conteúdos de matemática e probabilidade. Sendo vantajoso utilizar outros conceitos matemáticos adquiridos pelos alunos em séries anteriores para ser trabalhado em conjunto com a probabilidade, necessários ao desenvolvimento da competência interpretativa dos alunos.

Ao tratar das Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II, compreendemos a necessidade de uma proposta de trabalho que leve o aluno a entender que existem muitos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que possam identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. Fazer também com que eles compreendam que as noções do acaso e da incerteza que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas ao realizar os experimentos e observar os eventos em espaços equiprováveis.

Tendo em vista essa diversidade e algumas lacunas que encontramos nas coleções analisadas, sugerimos uma abordagem sobre Noções de Probabilidade aliada ao Livro Didático, organizando o nosso objeto de estudo como o PCN e os Referencias Curriculares do Ensino Fundamental da Paraíba sugerem no 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental.

Mediante nossa experiência no Ensino Fundamental da rede pública, sabemos que o professor desse nível de escolarização, dá pouca importância ao conteúdo Noções de Probabilidade. Em muitos casos, deixamos para transmiti-lo aos alunos nos últimos bimestres, e a limitação do nosso calendário nos obriga a abandoná-lo e priorizar outras abordagens.

Todavia, agora sob um novo olhar, nossas pesquisas nos revelam a importância de se abordar o conteúdo em estudo nas séries do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, cumprindo assim, o que recomenda os PCN e, mais do que isso, oferecendo suporte para aprendizagem no Ensino Médio.

Ao término deste trabalho, consideramos relevante as análises realizadas nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental. No que se refere ao conteúdo Noções de Probabilidade, é preciso que o docente da disciplina de Matemática o aborde, explorando situações do cotidiano, utilizando questões contextualizadas voltadas à realidade do aluno e empregando jogos e experimentos para chamar mais a atenção e despertar interesse dos discentes, desprendendo-se do ensino pautado em fórmulas e definições.

Nesse sentido, o professor não estará apenas cumprindo documentos que regem o ensino, mas adequando sua prática às necessidades do aluno contemporâneo, que necessita ser competente para interpretar questões que requerem mais de que fórmulas prontas, necessitam da associação de conteúdos aprendidos em diversas situações de aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, CARL B. *História da Matemática*, 2ª edição, São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[2] BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental: Matemática.* Brasília: Ministério da Educação, 1998.

[3] CARVALHO, JOÃO.B.PITOMBEIRA ET AL. *Coleção Explorando o Ensino, Volume 17*, 1ª edição, Brasília: Ministério da Educação, 2010.

[4] COUTINHO, CILEDA DE Q. E S. *Introdução ao conceito de Probabilidade por uma visão frequentista.* Dissertação de Mestrado da PUC, São Paulo: 1994.

[5] DANTE, LUIZ ROBERTO. *Projeto Teláris: Matemática do 6º ao 9º ano*, 1ª edição, São Paulo: Ática, 2012.

[6] HAZZAN, SAMUEL. *Fundamentos de Matemática Elementar, 5: Combinatória e Probabilidade*, 7ª edição, São Paulo: Atual, 2004.

[7] LIMA, ELON LAGES ET AL. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*, 1ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[8] LOPES, ANTÔNIO J. *Projeto Velear: Matemática do 6º ao 9º ano*, 1ª edição, São Paulo: Editora Scipione, 2013.

[9] LOPES, CELI A. E. *A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: Uma análise curricular.* Dissertação, Pós-graduação em educação da UNICAMP, Campinas: UNICAMP, 1998.

[10] MAZZIEIRO, A. S. E MACHADO, P. A. F. *Descobrindo e aplicando a Matemática do 6º ao 9º ano*, 1ª edição, Belo Horizonte: Dimensão, 2012.

[11] MORAES, LUIZ C. L. *Ensino de Probabilidade: Historicidade e Interdisciplinaridade.* Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional , Rio de Janeiro: UFRRJ, 2014.

[12] MORGADO, AUGUSTO C. E OUTROS. *Análise Combinatória e Probabilidade*, 7ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[13] PARAÍBA, *Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental do Estado da Paraíba*, 1ª edição, João Pessoa: Secretaria de Educação, 2010.

[14] SILVA, ISMAEL DE A. *Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frenquentista na introdução do conceito.* Dissertação, Pós-graduação em educação pela PUC, São Paulo: PUC, 2002.

[15] SILVA JUNIOR, CLOVIS G. *Critérios de adoção e utilização do Livro Didático de Matemática no Ensino Fundamental.* Dissertação, Pós-graduação em educação pela UFRPE, Recife: UFRPE, 2005.

[16] VIEIRA, GLÁUCIA M. *Estratégias de "Contextualização" nos Livros Didáticos de Matemática dos ciclos iniciais do Ensino Fundamental.* Dissertação, Pós-graduação em educação pela UFMG, Belo Horizonte: UFMG, 2004.