UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIENCIAS E MATEMÁTICA

A ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO NO CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

HUMBERTO JOSÉ GAMA DA SILVA

Campina Grande – PB
Dezembro de 2010

HUMBERTO JOSÉ GAMA DA SILVA

A ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO NO CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

Dissertação apresentada ao centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB como um dos requisitos para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Física

Linha de Pesquisa: Metodologia e Didática no Ensino das Ciências e na Educação Matemática.

Orientadores: Dra. Morgana Lígia de Farias Freire (DF – CCT)
Dr. Eládio José de Goes Brennand (DF – CCT)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

S586a Silva, Humberto José Gama da.

A Álgebra de Clifford [manuscrito]: Uma aplicação no conceito de Força Magnética / Humberto José Gama da Silva. – 2010.

174 f. : il.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, 2011.

“Orientação: Profa. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire, Departamento de Matemática”.

1. Ensino de física. 2. Álgebra de Clifford. 3. Aprendizagem. I. Título.

21. ed. CDD 530

HUMBERTO JOSÉ GAMA DA SILVA

ÁLGEBRA CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO NO CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática com habilitação em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

Aprovada em 17 / 12 / 2010

BANCA EXAMINADORA

Morgana L. F. Freire

Prof. Dra.Morgana Ligia de Farias Freire
Orientador

João Batista da Silva

Prof. Dr. João Batista da Silva
Examinador Externo

Prof. Dra. Abigail Fregni Lins
Examinador Interno

DEDICATÓRIA

À Deus; ao meu pai, Seu Camilo; à minha mãe, Dona Ziza (*in memorian)*; à minha esposa Alzinete e aos meus filhos Natália e Júnior, principais pilares na minha formação moral e intelectual.

AGRADECIMENTOS

À Prof. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire pela competente orientação a quem atribuo grande parte dos méritos pelos possíveis acertos nessa dissertação.

Ao Prof. Dr. Eládio José de Goes Brennand pelo suporte intelectual nos conceitos pertinentes à Álgebra Geométrica.

À Prof. Dra. Ana Raquel P. de Ataíde pelo apoio e incentivo ao longo de mais essa etapa da minha trajetória acadêmica.

À Prof. Dra. Abigail F. Lins, na pessoa de quem homenageio todos os professores do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB).

A colega e amigo Prof. Esp. Magno Urbano de Macedo pela postura altruísta e fraternal com as quais sempre pude contar durante todo o período em que estive afastado das minhas atividades para a conclusão do mestrado.

Aos colegas de sala de aula pela amizade solidariedade e carinho.

Aos alunos do Curso de Licenciatura Plena em Física e do Mestrado Profissional em ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (Campina Grande - PB) pela participação na primeira intervenção por mim ministrada durante a coleta de dados do meu trabalho de pesquisa.

Aos professores e alunos do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia (IFMA) Campus Imperatriz pela participação na segunda intervenção, dessa vez na referida instituição.

Aos meus irmãos, primos, sobrinhos, sogros e cunhados pelo carinho e incentivo ao longo de mais uma jornada.

Caminhos do Coração

Gozaguinha
Composição: Gonzaguinha

Há muito tempo que eu saí de casa

Há muito tempo que eu caí na estrada

Há muito tempo que eu estou na vida

Foi assim que eu quis, e assim eu sou feliz

Principalmente por poder voltar

A todos os lugares onde já cheguei

Pois lá deixei um prato de comida

Um abraço amigo, um canto prá dormir e sonhar

E aprendi que se depende sempre

De tanta, muita, diferente gente

Toda pessoa sempre é as marcas

Das lições diárias de outras tantas pessoas

E é tão bonito quando a gente entende

Que a gente é tanta gente onde quer que a gente vá

E é tão bonito quando a gente sente

Que nunca está sozinho por mais que pense estar

É tão bonito quando a gente pisa firme

Nessas linhas que estão nas palmas de nossas mãos

É tão bonito quando a gente vai à vida

Nos caminhos onde bate, bem mais forte o coração

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS... 08

RESUMO... 09

ABSTRACT.. 10

INTRODUÇÃO... 11

CAPÍTULO 1 – REVISÃO DA LITERATURA 15
2.1 PESQUISAS SOBRE A ÁLGEBRA DE CLIFFORD.............................. 15
2.1.1 NO CAMPO DA FÍSICA.. 15
2.1.2 NO CAMPO DO ENSINO DA FÍSICA... 17
2.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ÁLGEBRA VETORIAL...........................18
2.2.1 A ÁLGEBRA VETORIAL... 19
2.3 A FÍSICA E O ENSINO MÉDIO..20

CAPÍTULO 2 – AS ÁLGEBRAS DE GIBBS E CLIFFORD.............................24
2.1 A ÁLGEBRA DE GIBBS...24
2.1.1 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS..24
2.1.2 GRANDEZAS ESCALARES E GRANDEZAS VETORIAIS.............26
2.1.3 VETOR..27
2.1.4 OPERAÇÕES COM VETORES..28
2.2 A ÁLGEBRA DE CLIFFORD..40
2.2.1 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS...44
2.2.2 ASPECTOS MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD..........46
2.2.3 ÁLGEBRA DE CLIFFORD E O ELETROMAGNETISMO: O CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA:..59

CAPÍTULO 3 – A TEORIA COGNITIVA DE DAVID AUSUBEL.......................66

CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA..74
4.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA...75
4.2 CONFECÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO...75
4.3 DESCRIÇÃO DAS INTERVENÇÕES...77
4.3.1 Primeira Intervenção...77
4.3.2 Segunda Intervenção...77
4.4 PROPOSTA DE UNIDADE DIDÁTICA...78
4.5 TEORIA DA APRENDIZAGEM APLICADA..78
4.6 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS: AVALIAÇÃO....................78

CAPÍTULO 5 – RESULTADOS E DISCUSSÕES..79
5.1 PRIMEIRA INTERVENÇÃO...79

5.1.1 PRIMEIRO MOMENTO..79
5.1.2 SEGUNDO MOMENTO..81
5.1.2 TERCEIRO MOMENTO..83
5.1.4 QUARTO MOMENTO..85
5.1.5 QUINTO MOMENTO...85
5.1.6 SEXTO MOMENTO...88
5.1.7 SÉTIMO MOMENTO..89
5.1.8 OITAVO MOMENTO..91
5.2 SEGUNDA INTERVENÇÃO..93
5.2.1 PRIMEIRO MOMENTO..94
5.2.2 SEGUNDO MOMENTO..97
5.2.2 TERCEIRO MOMENTO..98
5.2.4 QUARTO MOMENTO..99
5.2.5 QUINTO MOMENTO...99
5.2.6 SEXTO MOMENTO...101
5.2.7 SÉTIMO MOMENTO..102
5.2.8 OITAVO MOMENTO..103

CONSIDERAÇÕES FINAIS..106

REFERÊNCIAS..108

APÊNDICES..113

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação geométrica dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ 28

Figura 2: Representação geométrica do vetor $\vec{C}$ como soma de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ 29

Figura 3: Esquema da regra do paralelogramo...30

Figura 4: Vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ formando um ângulo θ...30

Figura 5: Representação geométrica de $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ 31

Figura 6: Representação do vetor pelo método do polígono $\vec{E} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$ 32

Figura 7: Obtenção do vetor $\vec{E}$ pelo método do paralelogramo.......................33

Figura 8: Multiplicação de um número por um vetor.......................................32

Figura 9: Versores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ para um sistema de coordenadas retangulares......34

Figura 10: Projeção do vetor $\vec{A}$ sobre o vetor $\vec{B}$ 35

Figura 11: Paralelogramo definido pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ 37

Figura 12: Regra da mão direita...38

Figura 13: Objetos Geométricos da Álgebra de Clifford...................................41

Figura 14: Fragmentos de planos orientados ou bivetores................................42

Figura 15: Um bivetor e seu dual...44

Figura 16: O sistema de coordenadas vetoriais..47

Figura 17: Uma base bidimensional...48

Figura 18: Uma base bivetorial tridimensional..50

Figura 19: Um vetor polar é simétrico com respeito a uma reflexão paralela....60

Figura 20: Um vetor polar é antissimétrico em relação a uma reflexão perpendicular..61

Figura 21: Um vetor axial é antissimétrico com relação a uma reflexão em um plano paralelo...61

Figura 22: Um vetor axial é simétrico com relação a uma reflexão perpendicular..62

A ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO NO CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

RESUMO

O processo ensino – aprendizagem da Física, no Brasil, tem sido reconhecido como deficiente em diversos estudos. Particularmente, gostaríamos de destacar que um dos problemas tem sido o ferramental matemático com relação ao uso dos conceitos físicos. Este problema parece gerar uma dicotomia conceitual físico-matemática que prejudica a compreensão e assimilação das profundas conexões entre a Física e a Matemática. O objetivo desse trabalho é apresentar um estudo exploratório em que foi avaliada – de acordo com os resultados obtidos através de instrumentos de coleta de dados – a viabilidade do uso da Álgebra de Clifford como um formalismo adaptável para o estudo do Eletromagnetismo no Ensino Médio, especificamente na obtenção das características do vetor Força Magnética que atua em cargas elétricas em movimento ou em correntes elétricas dentro de um campo magnético. Para tanto foram feitas duas intervenções, em datas distintas. A primeira foi realizada em Campina Grande – PB, na Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. A segunda foi realizada em Imperatriz – MA, no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia – IFMA. Os dois eventos tiveram como público – alvo alunos, professores e futuros professores de Física do Ensino Médio. Motivado pelas características de objetividade e operacionalidade da Teoria Cognitivista de Ausubel, seus fundamentos foram utilizados na elaboração de um material potencialmente significativo – desenvolvido a partir da seleção e leitura crítica da produção literária acerca das Álgebras Vetorial e Geométrica – usando como coadjuvante no processo ensino-aprendizagem dos conteúdos contemplados nas intervenções. Os mesmos fundamentos também foram utilizados na identificação dos subsunçores do conteúdo a ser abordado, no uso de Mapas Conceituais como técnica facilitadora na exposição dos tópicos e como instrumento de avaliação. Nas referidas intercessões foi apontado que o formalismo de Gibbs ainda exerce predominância nos livros textos adotados no Ensino Médio e Superior, mesmo induzindo os alunos a utilizarem, no tratamento matemático direcionado ao estudo das grandezas físicas, preceitos de memorização, não justificados, como a regra da mão direita. Entretanto, a estrutura da Álgebra de Clifford permite uma modelagem matemática mais intuitiva, que tem como característica a representação e manipulação de conceitos geométricos básicos, tais como magnitude, direção e sentido.

Palavras – chave: Ensino de Física; Álgebra de Clifford; Teoria de Ausubel; Ensino Médio.

THE CLIFFORD ALGEBRA: AN APPLICATION ON THE CONCEPT OF MAGNETIC FORCE

ABSTRACT

The process of teaching – learning Physics, in Brazil, has been recognized as deficient in several studies. Particularly, we note that one of the problems has been the mathematical framework regarding the use of physical concepts. This problem seems to generate a conceptual mathematical – physical dichotomy which affects the understanding and assimilation of the deep connections between Physics and Mathematics. The aim of this work was to present an exploratory study that evaluated – according to the findings by means of the data collection – the feasibility of using Clifford Algebra as a formalism adapted to the study of electromagnetism in high school level, specifically obtaining the characteristics of the magnetic force vector which acts on electric charges or electrical currents within a magnetic field. Therefore, it was carried out two interventions at different dates. The first one was done in Campina Grande - PB, at the Dean of Graduate Studies and Research University of Paraiba, UEPB. The second was done in Imperatriz – MA, at the Federal institute of education science and technology – IFMA. Both intervention had as public target students, teachers and future teachers of physics for high school level. Motivated by the characteristics of objectivity and serviceability of Ausubel's cognitive theory, its foundations were used for developing a potentially significant material – developed by the selection and reading of literary criticism about Vector Algebra and Geometry. The same foundations were also used as an adjunct in the learning process content covered in the interventions and subsumers in identifying the content being addressed, the use of conceptual maps as facilitative technique in the expositions of topics and as evaluation tool. At those intersections was pointed out that the formalism of Gibbs still has predominance in the textbooks adopted in at secondary and high education levels, even prompting the students to use it in the mathematical treatment directed to the study of physical measures memorizing precepts not justified , like rule of right hand. However, the structure or the Clifford Algebra enables a more intuitive mathematical modeling which is characterized by the representation and manipulation of basic geometric concepts such as magnitude, direction and meaning.

Keywords: Physics Education; Clifford Algebra, Ausubel Theory; High School.

INTRODUÇÃO

Nunca na história da humanidade o conhecimento científico e tecnológico foi considerado tão imprescindível à construção das sociedades como nos dias atuais. As exigências na formação dos indivíduos a cada dia relacionam-se estreitamente com a qualidade do acesso à informação e ao conhecimento. Neste contexto, a formação científica dos jovens se coloca como estratégia fundamental. Educar para a sociedade do conhecimento implica intensificar e explorar novas oportunidades bem como ampliar a dimensão estratégica das atividades em Ciência e Tecnologia.

No Brasil, a presente situação de educação científica tem preocupado educadores e a comunidade científica. Esse problema tem origens em diferentes aspectos da sociedade e se reflete basicamente em todos os setores. Uma educação em Ciência adequada garante tanto a formação de recursos humanos, capaz de produzir conhecimentos que resultam em riqueza para o país, bem como a capacitação do cidadão para compreender e tomar decisões em relação aos avanços tecnológicos, que implicam decisões com consequencias diretas no dia a dia. Em outras palavras, tanto o desenvolvimento científico e tecnológico, como o exercício da cidadania, são fortemente prejudicados quando a educação científica de um país é deficiente.

Neste processo de inovação social, a discussão sobre a importância do avanço nos vários campos do conhecimento traz para a cena a contribuição da mais fundamental das ciências da natureza – a Física, para o avanço do conhecimento científico e tecnológico. Neste contexto, o ensino de Física se coloca como uma área que necessita de investimento em pesquisa na busca de soluções para os grandes desafios impostos às instituições educativas.

O processo ensino-aprendizagem da Física, no Brasil, tem sido reconhecido como deficiente em diversos estudos (BRASIL, 1998; FÁVERO, 2001; MOREIRA e GRECA, 2003; MATHEUS, 2005) tanto no que se refere à formação docente como discente. Além disso, existem problemas estruturais como os deficientes ou inexistentes laboratórios didáticos e a falta ou escassez de formação continuada do professor. Ensinar Física, em todos os níveis, tem sido, via regra, uma tarefa difícil. Os alunos parecem aprender muito cedo a desenvolver uma atitude negativa em relação a ela, estudando-a mais por uma imposição curricular do que por satisfação pessoal.

Em geral, o ensino de Física ainda se caracteriza pelo excesso de atenção dado a exercícios repetitivos, problemas resolvidos mecanicamente, pela utilização de uma sucessão de “fórmulas”, muitas vezes decoradas de forma literal e arbitrária, em detrimento de uma análise mais profunda visando à compreensão dos fenômenos físicos envolvidos.

Esta questão, amplamente discutida em diversos estudos (op. cit.), justifica a necessidade de se refletir esta problemática na tentativa de buscar soluções que venham se traduzir em novas possibilidades de estratégias para o ensino da Física (MOREIRA, 2003; 2000).

Particularmente, gostaríamos de destacar que um dos problemas mais graves tem sido o uso de um ferramental matemático fragmentário e inadequado. A fragmentação deve-se ao uso de diversas estruturas matemáticas nos diferentes domínios da Física dificultando a conexão e passagem de uma para outra. Muitas delas não proporcionam uma fácil intuição das propriedades físicas dos sistemas tratados.

Tendo em vista estes problemas, de ordem matemática, no processo de aprendizagem dos conceitos físicos, este trabalho pretende, a partir da crítica construtiva da linguagem matemática usada em Física, introduzir uma linguagem unificada, desenvolvida durante as últimas décadas, no intuito de simplificar e clarificar as estruturas da Física (HESTENES, 2003a), utilizadas tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior.

Pesquisas neste domínio (HESTENES, 2003a; 2003b; 1999; 1971; 1968; 1966; HESTENES, e SOBCZYK, 1999) apontam para um sistema matemático composto pela Álgebra de Clifford, denominado cálculo geométrico, para ser uma linguagem unificada para a Física. Esta estrutura matemática aplicada à Física proporciona uma fácil exploração intuitiva das propriedades dos sistemas estudados, da qual destacamos como principais características:

- Possibilita uma máxima codificação algébrica dos conceitos geométricos básicos, tais como magnitude, direção, sentido (ou orientação) e dimensão;
- Estabelece um método livre de coordenadas para formular e resolver equações básicas da Física; e,
- Proporciona um método que uniformiza o tratamento da Física clássica, quântica e relativística evidenciando as estruturas comuns e permite uma fácil articulação com os sistemas matemáticos que estão amplamente em uso na Física.

O objetivo desse trabalho é direcionar este formalismo ao estudo do eletromagnetismo, especificamente no tratamento do vetor força magnética que age sobre cargas elétricas em movimento ou correntes elétricas dentro de um campo magnético. De acordo com os resultados obtidos via estudo piloto, foi avaliada a viabilidade desse formalismo em turmas de Ensino Médio.

Nesse sentido, dividimos o trabalho da seguinte forma: No capítulo 1 foram abordadas algumas considerações sobre a Álgebra de Clifford, nas quais foram citadas pesquisas no campo da Física e no ensino de Física; considerações sobre o Ensino Médio e a Álgebra Vetorial, indicando a total predominância dos objetos geométricos de Gibbs (mesmo reconhecendo falhas na descrição desses objetos); e a quase ou total ausência de trabalhos científicos que apontem a Álgebra de Clifford como formalismo adaptável ao Ensino Médio. O capítulo termina com algumas considerações acerca dos aspectos teóricos da Álgebra de Gibbs nos livros didáticos do Ensino Médio onde serão enfatizados os PCNs e como esses livros tratam o estudo da Força Magnética e a Regra da Mão Direita.

No Capítulo 2 realizamos um estudo direcionado aos aspectos históricos que conduziram aos formalismos de Gibbs e Clifford e os aspectos matemáticos inerente das Álgebras Vetorial e Geométrica. Finalmente, abordamos como o formalismo de Clifford pode ser inserido no estudo do eletromagnetismo, na obtenção do vetor Força Magnética.

Considerando a proposta de trabalhar o formalismo de Clifford na modelagem de conceitos físicos para posterior elaboração de material didático direcionado ao Ensino Médio, no Capítulo 3 exploramos a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel por acreditarmos que a mesma pode ser adaptável ao processo ensino-aprendizagem de Ciências, pois permite a exploração de forma hierárquica do universo cognitivo do aprendiz como também possibilita a manipulação deliberada deste universo para propiciar uma efetiva aprendizagem. Motivados pelas características de objetividade e operacionalidade da Teoria Cognitivista de Ausubel, nos serviremos dos seus fundamentos na identificação dos sensores e subsunçores do conteúdo a ser abordado, bem como, partindo dos princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa, na construção de um mapa conceitual do referido conteúdo.

No Capítulo 4 apresentamos os aspectos metodológicos do trabalho, em que através das intervenções, foram realizados estudos exploratórios, tendo como público alvo alunos, professores e futuros professores de Física do Ensino Médio e Superior.

No Capítulo 5 apresentamos os resultados das intervenções, através de instrumentos de coletas de dados como questionários, ficha de avaliação individual – que contribuiu no sentido de observar e diagnosticar comportamentos e atitudes dos participantes das duas intervenções diante dos conteúdos que foram expostos assim como identificar aspectos didáticos e metodológicos que nortearam as ações desenvolvidas – e lista de exercícios, onde foi sugerida a construção de mapas conceituais. Nesse contexto, também foram discutidos, nesse capítulo, os resultados obtidos dentro do contexto da proposta do trabalho.

CAPÍTULO 1

REVISÃO DA LITERATURA

De acordo com Menon (2009) certas "adaptações" feitas por Gibbs e Heaviside deram origem ao ramo da Matemática, que hoje é popularmente conhecido como "Álgebra Vetorial", amplamente utilizado na descrição de algumas das grandezas físicas. Todavia, como será argumentado em capítulos posteriores, existem algumas desvantagens decorrentes dessas "adaptações", quando comparadas a outros sistemas algébricos práticos e formalmente bem fundamentados (álgebras de Grassmann e Clifford). O propósito deste capítulo é discutir alguns artigos e trabalhos, básicos e também recentes, que tratem da Álgebra Geométrica como um formalismo aplicável ao campo da Física e no Ensino de Física.

Dividido em três seções, a primeira discute as pesquisas realizadas sobre a Álgebra de Clifford no campo da Física e do Ensino de Física. A segunda seção traz algumas considerações com relação a Álgebra Vetorial e a terceira e última, discute a Física no Ensino Médio.

1.1 PESQUISAS SOBRE A ÁLGEBRA DE CLIFFORD

1.1.1 NO CAMPO DA FÍSICA

Conforme abordado no Capítulo 2 (a seguir), onde foram enfocados alguns aspectos históricos acerca das Álgebras Geométrica e Vetorial, William Kingdon Clifford, professor de Matemática da Universidade de Londres, desenvolveu uma generalização da Álgebra de Grassmann, incorporando elementos de Quaternions. Segundo Menon (2009), seus trabalhos foram publicados em 1877, porém Clifford faleceu dois anos depois, aos 34 anos, deixando, provavelmente, uma obra incompleta e por demais complexa para ser compreendida pela comunidade científica de uma época.

De acordo com Ferreira (2009, p. 443), “o grande incentivador das aplicações da Álgebra Geométrica em Física tem sido David Hestenes”, com sistemática presença na literatura, começando da década de sessenta do século passado, com o artigo “Real Spinnor Fields” (HESTENES, 2003) e o “Vectors, Spinnor and Complex Numbers in Classical and Quantum Physics” (HESTENES, 1967). Sua conferência, ao receber a Oersted Medal, “Reforming the mathematical language of physics”, foi publicada no American J. Physics (Hestenes, 1971). Escreveu também um livro intitulado “A nova formulação da Mecânica Clássica” (HESTENES, 1986). Conforme argumenta Ferreira (2009p. 443) seus esforços foram direcionados em grande parte à tentativa de re-interpretação da Mecânica Quântica não- relativista (HESTENES, 1979) e relativista (HESTENES, 2003).

No Brasil, de acordo com Menon (2009), Jayme Vaz Júnior[1], introduz e discute de forma didática e abrangente as Álgebras de Grassmann e Clifford em dois artigos da Revista Brasileira de Ensino da Física (abreviada por RBEF). O artigo de 1997 trata da teoria não-relativística do elétron no contexto da Álgebra Geométrica (Clifford), ressaltando os equívocos nas interpretações da variável *spin* como efeito exclusivamente relativístico, sem análogo clássico (VAZ Jr., 1997). No artigo de 2000, a Álgebra de Clifford é utilizada no contexto da Teoria da Relatividade Restrita, demonstrando a eficiência dessa álgebra, em especial no que concerne a generalizações (VAZ Jr., 2000).

Apesar de não fazer referências diretas à Álgebra Geométrica é importante destacar que Cibelle Silva, em sua tese de doutorado[2], 2002, apresenta um estudo amplo e abrangente sobre o desenvolvimento dos conceitos físicos e matemáticos relacionados ao eletromagnetismo nos séculos XIX e XX. Em particular, conforme argumenta Menon (2009), o Capítulo 2 trata de forma detalhada a evolução da Álgebra Vetorial a partir dos Quaternions. Neste mesmo ano, Cibelle Silva e Roberto Martins (SILVA e MARTINS, 2002) discutem diferenças entre vetores polares/axiais e Quaternions, relacionadas a

[1] Professor Associado do Departamento de Matemática Aplicada do IMECC-UNICAMP.
[2] disponível em http://webbif.ifi.unicamp.br/teses

propriedades intrínsecas e de simetria; destacam também, de acordo com Menon (2009), a utilização contraditória dos símbolos $\hat{\imath}, \hat{\jmath}\, e\, \hat{k}$ como vetores e ao mesmo tempo versores.

Ricardo Soares Vieira, em texto publicado no ano de 2008, apresenta as relações existentes entre a Álgebra de Clifford, os Quaternions de Hamilton e a Álgebra de Gibbs-Heaviside. Demonstra, como exemplo de aplicação da Álgebra Geométrica, que as equações de Maxwell podem ser reunidas em uma só equação pelo formalismo de Clifford:

> Não obstante o intenso e caloroso debate em defesa deste ou daquele sistema [...] estende-se até os dias atuais, [...] não se trata de nenhum caso de vencido ou vencedor. [...] um dos problemas centrais de Gibbs-Heaviside é que se limita exclusivamente a espaços tridimensionais e sabemos que, tanto a matemática como a física vão muito além dessa fronteira (MENON, 2009; p. 2309).

Diante do apresentado nessa subseção infere-se que ainda são poucos os trabalhos publicados que aponta a Álgebra Geométrica como recurso eficaz no tratamento matemático dispensado ao estudo da Física, o que dificulta uma possível democratização dessa proposta. No campo do Ensino da Física, especificamente no Brasil, a situação não é diferente. Ainda são poucos os pesquisadores que desenvolvem e publicam trabalhos que envolvam o formalismo de Clifford, como será argumentado a seguir.

1.1.2 NO CAMPO DO ENSINO DA FÍSICA

Apesar da Álgebra Geométrica ser reconhecidamente um formalismo prático e formalmente bem fundamentado, a Álgebra de Gibbs-Heaviside ainda constitui um paradigma que norteia os autores de livros didáticos de Física na descrição de objetos geométricos (especificamente os vetores e escalares) no tratamento matemático de seus fenômenos. A maioria dos poucos trabalhos direcionados ao Ensino da Física, que envolvam o formalismo de Clifford, tem como público-alvo alunos de final da graduação e de pós-graduação, que tenham uma boa base em Álgebra Linear. Nessa linha de pesquisa, a principal referencia é David Hestenes, cujo alguns trabalhos foram referidos na subseção anterior.

No Brasil, podemos destacar os artigos de Jayme Vaz Júnior e Ricardo Soares Vieira (ambos citados na seção anterior). Também merece destaque o trabalho dos Professores Eládio de Góes Brennand e Morgana Lígia de Farias Freire, do Centro de Ciências e Tecnologia da UEPB que atualmente estão desenvolvendo um projeto intitulado: “Álgebra de Clifford e Aprendizagem Significativa: pilares para a construção de uma nova abordagem para o ensino de Física”. O objetivo deste projeto é construir estratégias para introduzir a Álgebra de Clifford como modelador de conceitos físicos, e a partir destes desenvolver materiais didáticos para o Ensino de Física em Nível Médio e Superior à luz da concepção ausubeliana da aprendizagem.

Por se tratar de uma linha de pesquisa que só recentemente foi explorada no campo do Ensino de Ciências, especificamente no Ensino Médio, ainda não encontramos nenhuma publicação disponível na forma de artigos, teses e dissertações que avaliem Álgebra Geométrica como um formalismo adaptável no processo ensino-aprendizagem de conceitos pertinentes ao estudo dos fenômenos físicos, nessa etapa da Educação Básica.

1.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ÀLGEBRA VETORIAL

As teorias científicas e os formalismos matemáticos que as corroboram são, sem dúvidas, a melhor expressão do pensamento científico. Em parceria com os avanços tecnológicos, é inquestionável o seu papel nas transformações sociais e culturais, ao longo da história. O grande desafio continua sendo o modo estanque com o qual esses trabalhos são apresentados, omitindo os processos que levaram aos seus resultados. Nesse sentido o conhecimento científico, de acordo com Alves Filho (2000, p. 179), fica entendido como algo cuja certa proposição ou um corpo de saberes são verdadeiros, inquestionáveis, com métodos lógicos, simples e certeiros. O cientista é concebido como um homem cuja mente é um poço de idéias geniais e revolucionárias. O que é produzido, segundo Alves Filho (2000, p. 179), é apresentado em uma linguagem própria, característica da comunidade intelectual na qual o autor está inserido, deixando à margem qualquer pista de como o mesmo passou a pensar sobre o problema ou a linha de pensamento que ele utilizou no desenvolvimento de seu trabalho. O resultado é um documento traduzido em um saber aceito e estabelecido, transmitido para os futuros profissionais da área (ALVES FILHO, 2000).

Nesse contexto, essa seção dará ênfase às lacunas pedagógicas insistentemente presentes nas publicações direcionadas ao estudo dos conteúdos de Física, no Ensino Médio e Superior, especificamente nos capítulos onde os autores fazem uso da Álgebra Vetorial no tratamento matemático utilizado na significação das grandezas.

1.2.1 A ÁLGEBRA VETORIAL

Nos livros-texto de Física e de Matemática utilizados em cursos de Ensino Médio e Superior, as operações de multiplicação de dois vetores (produtos escalar e vetorial) são introduzidas apenas como definições, sem nenhuma referência ou discussão a respeito das reais motivações que levaram ao estabelecimento de tais estruturas.

Segundo Menon (2009), todos os textos didáticos ao adotarem o formalismo de Gibbs-Heaviside, utilizam semelhante estratégia: as operações são introduzidas através de definições e passa-se imediatamente às propriedades decorrentes das mesmas. Menon (2009) ainda argumenta que mesmo fazendo algumas considerações sobre grandezas físicas (torque, momento angular,...) ou geométricas (ângulo de rotação), não há nenhuma referência às razões que levaram a essas definições. Ele ressalta que essas considerações apenas “disfarçam” a lacuna formal, induzindo o aluno pensar que a natureza (a Física) justifica as definições.

Com certeza a estratégia-padrão dos livros didáticos não pode ser discutida quanto ao caráter pragmático, pois a partir de uma definição passa-se ao estudo de suas conseqüências formais. O problema, concordando com Menon (2009), é que existe uma lacuna pedagógica na qual o aluno não compreende e não tem tempo para pensar, devido à sequência do conteúdo a ser abordado. Isso envolve não só o produto em si, mas, grandezas físicas tão importantes como as que foram referidas no parágrafo anterior.

Diante das considerações feitas nessa subseção, algumas inquietações ficam sem respostas: afinal, de onde vem essa definição tão específica e tão útil na prática? Por que a definição é essa e não outra? Tudo isso tem um fundamento matemático e/ou um significado mais amplo? O produto vetorial, por exemplo, tem algo a ver com o escalar? Não é possível unificá-los? É possível generalizá-los para outras dimensões?

Pouca ou nenhuma referência com relação à Álgebra de Clifford, que responda de forma inequívoca a essas perguntas, enfatizando que a Álgebra conhecida é a de Gibbs-Heaviside (que às vezes falha na descrição dos objetos) são oferecidas nos livros didáticos ou mesmo em trabalhos científicos, que utilizam a Matemática na descrição de grandezas.

1.3 A FÍSICA E O ENSINO MÉDIO

No Brasil, o ensino de Física tem preocupado educadores e comunidade científica no que diz respeito a sua adequação às transformações sociais decorrentes dos avanços científicos e tecnológicos. Frequentemente, estudos no sentido de reavaliar os seus propósitos e redimensionar o seu caráter são realizados. Uma das mais importantes modificações em seus referenciais aconteceu no final da década de 90 com a apresentação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), tendo como base a Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, 1996).

Sendo a Física uma componente curricular Inserida na grande área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, tais referenciais procuram, também, direcionar o seu aprendizado de modo que:

> O ensino de Física, na escola média, contribua para a formação de uma cultura científica efetiva, que permita ao indivíduo a interpretação de fatos, fenômenos e processos naturais, situando e dimensionando a interação do ser humano com a natureza como parte da própria natureza em transformação. Para tanto, é essencial que o conhecimento físico seja explicitado como um processo histórico, objeto de contínua transformação e associado às outras formas de expressão e produção humanas. É necessário também que essa cultura em Física inclua a compreensão do conjunto de equipamentos e procedimentos, técnicos ou tecnológicos, do cotidiano doméstico, social e profissional. (PCNEM 1998, p. 22).

Confrontando as propostas dos PCNEM e a situação atual do ensino de Física, nas escolas das redes pública e privada, não é difícil encontrar distorções. A primeira se refere à forma propedêutica com a qual os conteúdos são apresentados aos alunos, direcionando-os a uma aprendizagem mecânica, não significativa, caracterizada pela memorização de fórmulas e definições voltada à aquisição de habilidades pertinentes à resolução de exercícios repetitivos e descontextualizados, e não à solução de problemas:

> O ensino de Física tem-se realizado freqüentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado (...). Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas (PCNEM 1998, p. 22).

No ensino do Eletromagnetismo podemos evidenciar uma anomalia didática, em particular, o Produto Vetorial na obtenção do vetor Força Magnética. O resultado, invariavelmente apresentado nos livros-textos, é um segmento de reta orientado normal aos dois fatores. O pior, como argumenta Menon (2009), é que o seu sentido é convencionado pela “regra da mão direita”. Além dessa regra não ser intuitiva, não é justificada, permanecendo uma incógnita com a qual os alunos acabam simplesmente se acostumando, assim como algumas grandezas “estranhas” como momento angular, torques, entre outras.

Diante das considerações feitas no último parágrafo, infere-se que a maneira com a qual os alunos se posicionam diante de preceitos mnêmicos, como a regra da mão direita – amplamente divulgada nas publicações de física no Ensino Médio e Superior – conduz a uma aprendizagem mecânica, de caráter não significativo, que, para Ausubel (1980), encontra muito pouco ou nenhuma informação prévia na estrutura cognitiva a qual possa se relacionar, sendo então armazenada de maneira arbitrária. É com essa lacuna didática que os conceitos, pertinentes à obtenção e tratamento de algumas grandezas físicas, como a força magnética, são articulados nos livros-textos de Física. O livro didático é, com certeza, uma das ferramentas mais utilizadas no ensino atual como fonte de conhecimento, tentando dar um suporte estável para a relação de ensino-aprendizagem entre professor e aluno, dentro e fora de sala de aula. Cassiano (1996) apud Cassiano (2004a) destaca:

> O livro didático é instrumento importante de Ensino Aprendizagem formal que, apesar de não ser o único, pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares. E finalmente, para ser considerado didático, um livro precisa ser usado de forma sistemática no Ensino – Aprendizagem de um determinado objeto de conhecimento humano, normalmente considerado como disciplina escolar (CASSIANO, 1996 apud CASSIANO, 2004a).

No entanto, a grande dificuldade encontrada pelos professores de Física é a fragmentação dos conteúdos apresentados. As formas como os conceitos e definições são dispostas muitas vezes desvinculam-se das equações que os traduzem. Hülsendeger (2002) ressalta que os alunos veem a Física como um amontoado de fórmulas e equações sem sentido, já que não tem a menor idéia de onde elas saíram. Ele ainda argumenta que a falta do conhecimento histórico e filosófico os leva apenas ao ato de decorar, sendo a Física concebida como um corpo de conhecimentos prontos e acabados e não existindo perguntas a serem feitas.

Pontos que discutam o propósito da Física, o caráter humano de sua construção, e até exemplos históricos que ajudem a derrubar determinados dogmas são omitidos. Em outras palavras, uma atenção especial à natureza da Física, a qual se insere os formalismos matemáticos que traduzem os seus fenômenos, nos livros didáticos, é algo difícil de se encontrar.

Tomando como referência o ensino de Eletromagnetismo, o formalismo adotado por todos os autores ainda é o de Gibbs. Inquietações pertinentes à natureza de seus objetos geométricos (restrito a vetores e escalares), apresentados ainda na primeira série do Ensino Médio, bem como as inconsistências inerentes às operações com vetores (especialmente o produto vetorial) na obtenção das grandezas não são apontadas.

Em todas as publicações direcionadas ao ensino de Física, aprovadas pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) e utilizadas nas instituições públicas e privadas de Ensino Médio, estudos à luz do conhecimento de muitos físicos e matemáticos brasileiros que apontam o formalismo de Clifford como um recurso alternativo no sentido de preencher as lacunas deixadas no de Gibbs, não são ao menos recomendados no manual do professor. Nesse contexto, é razoável pensar na urgência de um movimento matemático para divulgação dessa Álgebra, objetivando sensibilizar educadores e comunidade científica sobre a importância dessa proposta. Para tanto é necessária a apresentação de aspectos históricos e matemáticos que precederam e as Álgebras de Gibbs e Clifford, bem como os fundamentos que as norteiam. Tais tópicos serão abordados no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 2

AS ÁLGEBRAS DE GIBBS E CLIFFORD

O presente capítulo tem como propósito a apresentação de tópicos pertinentes às Álgebra de Gibbs e Clifford. Nesse contexto o capítulo será dividido em suas seções: a primeira abordando aspectos históricos e matemáticos sobre o Cálculo Vetorial (ou Álgebra de Gibbs) e a segunda, tópicos que norteiam a Álgebra de Clifford e a aplicação dessa Álgebra no estudo eletromagnetismo, especificamente no conceito de Força Magnética.

2.1 A ÁLGEBRA DE GIBBS

A presente seção será dividida em quatro subseções. A primeira abordando aspectos históricos que precederam a Álgebra de Gibbs, a segunda, o conceito de grandeza escalar e vetorial, a terceira abordando o conceito de Vetor, e, finalmente, a quarta subseção tratando de operações com vetores, enfatizando o Produto Vetorial.

2.1.1 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS

A história do Cálculo Vetorial remonta à Grécia Antiga com a Geometria de Euclides. Só muito tempo depois é que René Descartes deu a Geometria Euclidiana uma concepção analítica, que possibilitou maior evidência às grandezas vetoriais (VIEIRA, 2008). Descartes verificou que cada ponto do espaço pode ser representado por um par ordenado de números: um para cada eixo de um sistema de coordenadas. Segundo Vieira (2008, p. 2), após algum tempo, Jean R. Argand e Carl F. Gauss apresentaram um novo formalismo que, apesar de não ter nada haver com vetores, foi fundamental para a formulação dos mesmos. Esse formalismo ficou conhecido como os Números

Complexos. Eles perceberam que esses números poderiam ser representados por um par ordenado igual ao utilizado no plano cartesiano: um dos eixos representava o conjunto $\Re$ dos números reais e o outro o conjunto $\Im$ dos números imaginários, cujos elementos são raízes quadradas de números negativos. Nesse plano, popularizado como o de Argand-Gauss, qualquer número complexo poderia ser representado por um ponto, ponto este formado por uma parte real e outra imaginária.

As observações de Argand-Gauss deram um novo corpo à compreensão da Matemática de uma época e isso se reflete até os dias atuais (VIEIRA, 2008). A existência e a aceitação dos números complexos pela comunidade científica estão intrinsecamente relacionadas com o fato de eles poderem ser representados na forma geométrica (VIEIRA, 2008). Esse fato contribuiu para o desenvolvimento da Análise Vetorial em um plano e às tentativas de estendê-los no espaço.

A generalização desta representação ao espaço constituiu uma tarefa difícil, mas foram justamente as sucessivas tentativas que levaram William Rowan Hamilton a descobrir os Quaternions.

Podemos dizer que os Quaternions de Hamilton foram de fundamental importância na estruturação do Cálculo Vetorial. Devido suas características, que eram adequadas à descrição de vários fenômenos naturais, inúmeras aplicações dos mesmos se sucederam e vários pesquisadores se interessaram em estudar novos objetos matemáticos adequados para o estudo da natureza. Entre eles, podemos destacar Hermann Günther Grassmann (VIEIRA, 2008).

Na mesma época em que Hamilton descobriu os Quaternions, Grassmann (1809-1877) expandiu o conceito de vetores a partir da familiar 2 ou 3 dimensões, chamado por ele de bivetores e trivetores, para um número arbitrário, n, de dimensões. Isto estendeu grandemente as ideias de espaço.

Infelizmente, conforme argumenta Vieira (2008, p. 3), “o trabalho de Grassmann tinha dois pontos contra si. Primeiro era muito abstrato, faltando exemplos explicativos e foi escrito em um estilo obscuro, com uma notação extremamente complicada”. Segundo, Grassmann era um professor de Ensino Médio, sem uma reputação científica importante, comparado a Hamilton.

Somente no final da sua vida seus trabalhos tiveram o real reconhecimento de vários matemáticos importantes da época. Entretanto, foi Josiah Willard Gibbs o que mais propagou as ideias de Grassmann ao estudar o problema dos Quaternions. Gibbs publicou vários artigos na revista *Nature*, no período de 1891 a 1895, mostrando a correlação entre os Quaternions de Hamilton e os objetos geométricos de Grassmann.

Contemporâneo de Gibbs, Oliver Heaviside também deu importantes contribuições, tendo como referência os trabalhos de Hamilton e Grassmann, nascendo assim a Álgebra Vetorial, isto é, um formalismo matemático que, embora com algumas contradições, se revelava eficiente na descrição dos fenômenos naturais (VIEIRA, 2008). Todavia, na Álgebra de Gibbs-Heaviside não existia mais o primoroso formalismo inerente dos trabalhos de Grassmann. Os bivetores, trivetores, entre outros, foram substituídos por apenas 1-vetores e escalares. Segundo Vaz (1996, p. 235), se estudarmos os trabalhos de Hamilton e Grassmann, veremos que a álgebra vetorial de Gibbs nada mais é do que um apanhado de conceitos disfarçados sob o manto de uma notação falaciosa. A Álgebra de Gibbs, além de não ser uma generalização dos sistemas de Hamilton e Grassmann, só funciona no sistema tridimensional e também sofre de deficiências internas ausentes naqueles sistemas.

2.1.2 GRANDEZAS ESCALARES E GRANDEZAS VETORIAIS

Existem grandezas que ficam perfeitamente caracterizadas quando delas se conhece o valor numérico e a correspondente unidade. Quantidades que têm grandezas continuam as mesmas não importando as coordenas utilizadas (AFKEN e WEBER, 2007).[3] Nada é necessário acrescentar quando se diz que a massa de uma pessoa é 63 kg ou a área de um terreno é 360 m^2. Tais grandezas são denominadas *escalares*. Além de massa e área, são grandezas escalares, tempo, densidade, energia, entre outras.

Todavia, existem grandezas que, para sua total caracterização, se faz necessário a determinação de sua direção e do seu sentido, além da sua

[3] Esta edição deste livro trata-se da tradução da edição do ano de 1992.

magnitude, que corresponde ao valor numérico seguido de sua respectiva unidade. Tratam-se das quantidades que têm grandezas importando as coordenadas utilizadas (AFKEN e WEBER, 2007). Por exemplo, se puxarmos uma caixa de madeira, estará agindo sobre ela uma grandeza denominada *força resultante*. Para que se tenha ideia do que vai acontecer com esse corpo é necessário que conheçamos não só a sua magnitude (por exemplo, 20 N), mas também a sua direção (vertical, horizontal, inclinada etc.) e o seu sentido (para direita, esquerda, para cima, para baixo etc.). Grandezas desse tipo são denominadas *grandezas vetoriais*. Além da força, são exemplos de grandezas vetoriais, velocidade, aceleração, quantidade de movimento, impulso, entre outras.

2.1.3 VETOR

O conceito de vetor[4] foi criado com o propósito de descrever grandezas que possuem propriedades geométricas como direção e sentido, impossível de serem descritas através de números. Como foram referidas na subseção anterior, elas recebem o nome de *grandezas vetoriais*.

Vetor é um segmento de reta, orientado por uma flecha, que possui um tamanho e uma orientação espacial (MACHADO, 2007). A representação de um vetor pode ser feita através de uma letra (maiúscula ou minúscula) com uma seta sobre ela, como em $\vec{a}$ ou $\vec{B}$. Também é possível representá-lo através de letras em negrito, como em **a** ou **B**.

As propriedades de um vetor são:

Módulo: corresponde ao tamanho do segmento e está relacionado à magnitude da grandeza que ele representa. A Figura 1 apresenta que a

[4] Geralmente os vetores são representados através de dois métodos: o geométrico e o analítico. O Método geométrico é utilizado para apresentação mais clara do vetor, geometricamente, porém não é adequado para operações com vetores. Já o método analítico, é usado num sistema de coordenadas em que se decompõe os vetores segundo a suas componentes ao longo dos eixos do sistemas de coordenadas. Neste trabalho faremos o uso dos dois métodos.

magnitude da grandeza representada pelo vetor $\vec{A}$ é aproximadamente o dobro da representada pelo vetor $\vec{B}$.

Direção: é especificada pela reta-suporte que define o segmento que representa o vetor, no caso, horizontal para o vetor $\vec{A}$ e vertical para o vetor $\vec{B}$.

Sentido: é obtido pela flecha colocada na frente do vetor. O vetor $\vec{A}$ tem sentido para a direita e o vetor $\vec{B}$ para baixo.

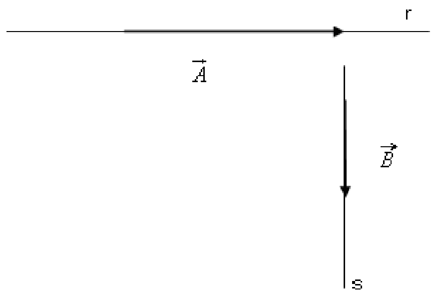


Figura 1: Representação geométrica dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

2.1.4 OPERAÇÕES COM VETORES

(i) ADIÇÃO

Para representar a soma de dois vetores basta fazer com que a origem do segundo vetor coincida com a extremidade do primeiro. Traçando um segmento de reta interligando a origem do primeiro com a extremidade do segundo obtem-se o vetor $\vec{C}$, onde $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$:

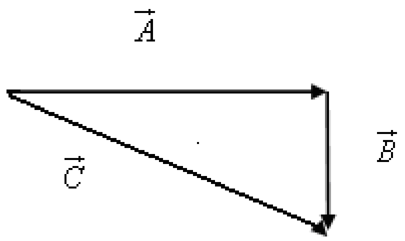


Figura 2: Representação geométrica do vetor $\vec{C}$ como a soma de $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Outra propriedade dos vetores, de acordo com Machado (2007, p. 7), é que a sua ordem em uma soma pode ser invertida, uma vez que o resultado final é sempre o mesmo. Dessa forma, a soma de vetores (assim como a soma de números) é uma operação comutativa, ou seja: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

Considerando um vetor $\vec{V}$ com certo tamanho, direção e sentido, todos os segmentos de reta paralelos a $\vec{V}$ com o mesmo tamanho, e orientados no mesmo sentido do referido vetor, são completamente equivalentes a $\vec{V}$. Isso significa dizer que os vetores podem ser "transportados" pelo espaço para a posição que for mais interessante, desde que seu módulo, direção e sentido não sejam alterados.

O método utilizado para a obtenção do vetor $\vec{C}$ é geométrico, também conhecido como método do polígono. Para saber o valor numérico do vetor $\vec{C}$ ou se desenha os vetores sobre papel milimetrado e usa o método algébrico ou método analítico.

O método analítico consiste em determinar o módulo do vetor, que corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo representado na Figura 2, cujos catetos são $\vec{A}$ e $\vec{B}$, através do Teorema de Pitágoras:

$$\left|\vec{C}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{C}\right| = \sqrt{\left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2}\,. \qquad (1)$$

Existe também o método do paralelogramo, igualmente baseado na geometria. Para encontrar a soma de dois vetores, utilizando esse método, é necessário fazer que as origens de ambos coincidam. Isso é feito mediante o "transporte" dos vetores, mantendo intacto o módulo, a direção e o sentido de cada um. Em seguida se constrói um paralelogramo, cujos lados são os vetores, como mostrado na Figura 3. O vetor resultante corresponde ao segmento de reta que une a origem dos dois vetores com o ponto em que as extremidades se encontram:

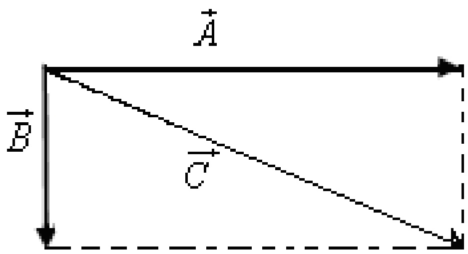


Figura 3: Esquema da regra do pralelogramo.

Quando os vetores não formam um triângulo retângulo, sendo impossível utilizar o Teorema de Pitágoras, utiliza-se a lei dos co-senos para encontrar o módulo do vetor (Figura 4), ou seja:

$$\left|\vec{C}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 + 2\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|\cos\theta. \qquad (2)$$

Onde θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$:

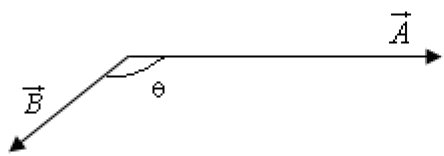


Figura 4: Vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ formando um ângulo θ.

Machado (2007, p. 12) argumenta que quando existem mais de dois vetores utiliza-se o método do polígono:

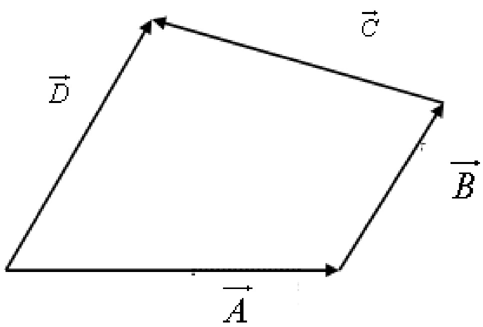


Figura 5: Representação geométrica de $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

Fonte: Machado (2007, p. 12)

Isto significa dizer que, se preferirmos usar o método do paralelogramo para calcular a magnitude do vetor resultante, devemos tomar a soma dois a dois. Para os vetores, assim como para os números, a soma tem propriedade associativa:

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}). \tag{3}$$

(ii) SUBTRAÇÃO

A subtração de dois vetores corresponde, na verdade, a soma do primeiro vetor com o oposto do segundo. A diferença entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é, na verdade, a soma do vetor $\vec{A}$ com o oposto do vetor $\vec{B}$, ou seja:

$$\vec{E}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}). \tag{4}$$

Pelo método do polígono, podemos ter a seguinte representação geométrica:

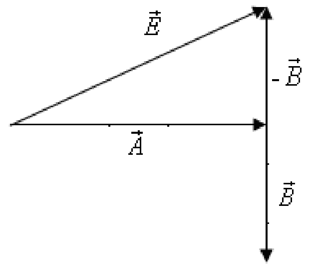


Figura 6: Representação do vetor $\vec{E}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$ pelo método do polígono.

Pelo método do paralelogramo, tem-se a representação geométrica:

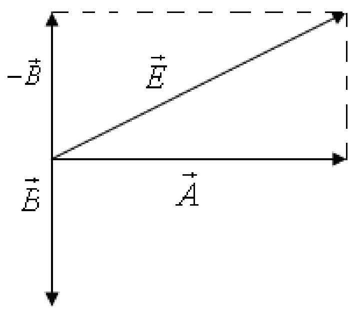


Figura 7: Obtenção do vetor $\vec{E}$ pelo método do paralelogramo.

(iii) PRODUTO DE UM VETOR POR UM NÚMERO

É possível multiplicar um vetor por um número. O resultado é outro vetor, cujo módulo corresponde ao tamanho do vetor inicial multiplicado pelo respectivo número. Dessa forma, Machado (2007, p. 13) ressalta que o vetor $\vec{B} = k\vec{A}$ pode ser maior do que $\vec{A}$ se $|k| > 1$; igual a $\vec{A}$ se $|k| = 1$; e menor do que $\vec{A}$ se $|k| < 1$. Quando ocorrer $k < 0$, o produto é um vetor cujo sentido é contrário ao inicial (Figura 8). Se $k = 0$, o resultado é um vetor nulo.

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{A}, \vec{C} = 2\vec{A}, \vec{D} = 1\vec{A}, \vec{E} = -1\vec{A}$$

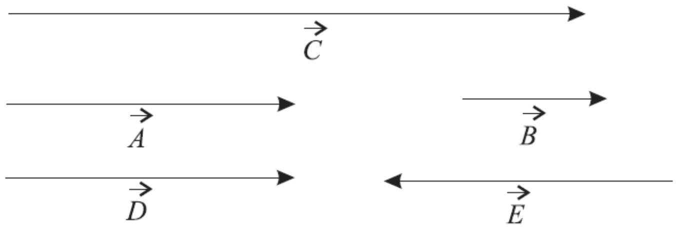


Figura 8: Multiplicação de um número por um vetor
Fonte: Machado (2007, p. 13)

A propriedade da multiplicação de um número por um vetor possibilita a definição de um vetor unitário. O vetor unitário, com módulo igual a 1, também é chamado de *versor*[5]. Dessa forma, admitindo a existência de um vetor $\vec{A}$ de módulo igual a 1 é perfeitamente possível escrever:

$$|\vec{A}| = 1 \qquad \text{ou} \qquad A$$

[5] Um versor trata-se de um vetor na direção de um eixo de norma ou módulo unitário. Também é usual chamar vetores de bases ou vetores unitários. Assim, $\hat{p}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{z}$ são os versores do sistema de coordenadas cilíndricas e $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ são os de coordenadas esféricas.

A sua representação também pode ser um vetor qualquer $\vec{V}$, que define certa orientação no espaço. Dessa forma, considerando $\left|\vec{V}\right| = 1$, ou V, é possível escrever os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ e $\vec{D}$ quaisquer como:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}V\ , \vec{B} = 2V\ \ ,\ \vec{C} = -5V\ , \vec{D} = -V\ ,$$

Onde o módulo dos vetores os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ e $\vec{D}$ são, respectivamente, 1/2, 2, 5 e 1. A orientação de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, é a mesma de $\vec{V}$ e a de $\vec{C}$ e $\vec{D}$ é contrária de $\vec{V}$.

Considere um sistema de eixos coordenados x, y, z., coordenadas cartesianas (ou retangulares[6]) Convencionou-se que o versor na direção x é representado por $\hat{i}$; na direção y representado por $\hat{j}$ e na direção z por k. O conjunto desses versores forma uma base para o espaço tridimensional, representada por $\mathbb{R}3 = \left\{\hat{i}, j, k\right\}$:

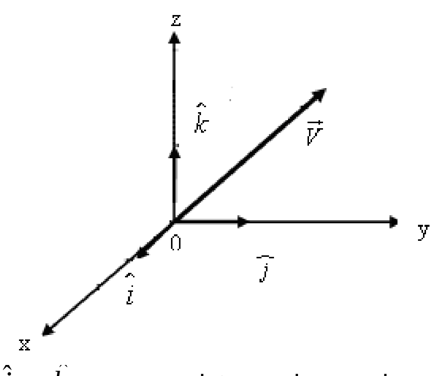


Figura 9: Os versores $\hat{i}, \hat{j}$ e k para um sistema de coordenadas retangulares.

[6] No sistema de coordenadas cilíndricas, geralmente, representamos pelos vetores unitários $\hat{p}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{z}$, cujas direções e sentidos, respectivamente, são normal à superfície cilíndrica e apontado na direção do raio crescente ρ, tangencial a superfície cilíndrica e aponta na direção do ângulo azimutal crescente e trata-se do vetor unitário e trata-se do vetor unitário cartesiano usual. No sistema de coordenadas esféricas temos os vetores unitários $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$, em que as direções destes variam de acordo com a variação de θ e ϕ.

Assim o vetor $\vec{V}$ com origem em 0 de um sistema de eixos coordenados, conforme mostrado na Figura 9, pode ser escrito em função das suas componentes (x,y,z) e de seus respectivos versores (i, j, k) da seguinte forma:

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y j + V_z k \,. \tag{5}$$

O módulo do vetor $\vec{V}$, ou de qualquer outro no espaço R_3, é encontrado pela versão tridimensional do Teorema de Pitágoras:

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}} \,. \tag{6}$$

É possível também multiplicar um vetor por outro. Existem duas maneiras de fazer o produto entre dois vetores, como discutido a seguir.

(iv) PRODUTO ESCALAR

Na primeira maneira, o produto consiste na projeção do primeiro vetor sobre o segundo e é também conhecido como produto escalar ou produto ponto:

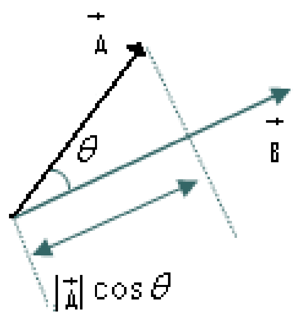


Figura 10: Projeção do vetor $\vec{A}$ sobre o vetor $\vec{B}$.

No produto escalar o resultado é um número real. Para dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, sua definição é:

$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta = AB\cos\theta \,. \tag{7}$$

Onde θ é o ângulo formado entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ quando suas origens são coincidentes.

O produto escalar também é utilizado para calcular o módulo de um vetor. Assim, o módulo de um vetor $\vec{v}$ qualquer pode ser obtido da seguinte forma:

$$\vec{v}.\vec{v} = \left|\vec{v}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos 0 \Rightarrow \vec{v}.\vec{v} = \left|\vec{v}\right|^2 \Rightarrow v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}} \tag{8}$$

Considere o produto escalar de versores na base $R_3 = \left\{\hat{i}, j, k\right\}$. Conforme mostrado na Figura 9, esses versores, de módulo 1, são ortogonais. Uma base, com essas características, é denominada *ortonormal*. Dessa forma, os produtos escalares entre os vários versores são:

$$\begin{array}{ll} \hat{i}.\hat{i} = 1 & \hat{i}.j = j.\hat{i} = 0 \\ j.j = 1 & \hat{i}.k = k.\hat{i} = 0 \\ k.k = 1 & j.k = k.j = 0 \end{array}$$

Admitindo dois vetores $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y j + A_z k$ e $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$, o produto escalar entre os dois é:

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y j + A_z k).(B_x\hat{i} + B_y j + B_z k) \,. \tag{9}$$

Usando a propriedade distributiva na Eq. (9) obtemos:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x \hat{i}.\hat{i} + A_x B_y \hat{i}.j + A_x B_z \hat{i}.k + A_y B_x \hat{i}.j + A_y B_y j.j + A_y B_z j.k + A_z B_x k.\hat{i} + A_z B_y k.j + A_z B_z k.k \quad (10)$$

Fazendo o produto escalar entre os versores, a Eq. (10) pode ser assim representada:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \,. \quad (11)$$

Se utilizarmos o mesmo procedimento para calcular, por exemplo, o quadrado do vetor $\vec{B}$, teremos:

$$\begin{aligned} &\vec{B}.\vec{B} = \left|\vec{B}\right|^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \quad ou \\ &\left|\vec{B}\right| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \end{aligned} \,. \quad (12)$$

Assim, de acordo com Machado (2004, p. 40), numa base ortonormal que siga as propriedades do produto escalar de versores, o módulo de um vetor é dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados das suas componentes.

(v) PRODUTO VETORIAL

Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, de origens coincidentes, que formam entre si um ângulo θ diferente de 0 e 360°, definem um paralelogramo (Figura 11). A área correspondente a esse paralelogramo é o módulo do produto vetorial, $\left|\vec{C}\right|$, representado por:

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| sen\theta \,. \quad (13)$$

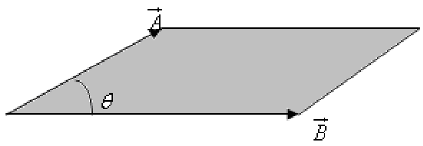


Figura 11: Paralelogramo definido pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$

O vetor resultante obtido é, por definição, ortogonal ao plano que contém os dois vetores, estabelecendo, dessa forma, a sua direção.

Utilizando a expressão que define o produto vetorial, é possível estabelecer uma relação entre os versores, de forma semelhante do que ocorre no caso do produto escalar. Se os vetores estão escritos numa base $R_3 = \{\hat{i}, \hat{j}, k\}$, tem-se:

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0;$$
$$j \times j = 0;$$
$$k \times k = 0.$$

Ou seja, o produto vetorial de um versor por ele mesmo é nulo. Significa dizer que eles estão dispostos em paralelo. O sentido é obtido pela regra da mão direita, Figura 12, como explica a seguir:

> Considere os dedos indicador e médio da mão direita. Represente o primeiro vetor do produto vetorial pelo dedo indicador, e o segundo, pelo dedo médio (a ordem é importante). Disponha esses dedos da mesma forma como os vetores estão no espaço. Agora forme, com o polegar da mão direita, um ângulo de 90° com o plano formado pelos outros dedos. O sentido do vetor é o mesmo que o indicado pelo polegar (MACHADO, 2004, p. 41)

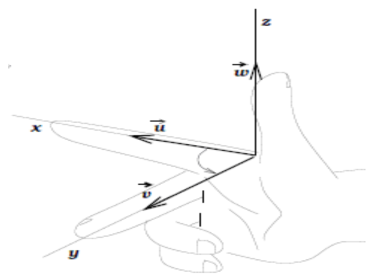


Figura 12: Regra da mão direita
Fonte: Machado (2004, p. 41)

Pela regra da mão direita é possível obter:

$$\hat{i}\times\hat{j}=k \qquad \hat{j}\times k=\hat{i} \qquad k\times\hat{i}=\hat{j}$$
$$\hat{j}\times\hat{i}=-k \qquad k\times\hat{j}=-\hat{i} \qquad \hat{i}\times k=-\hat{j}$$

Considere dois vetores $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y j+A_z k$ e $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y j+B_z k$. O produto vetorial entre eles é:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y j+A_z k)\times(B_x\hat{i}+B_y j+B_z k)\,. \tag{14}$$

Utilizando a propriedade distributiva na Eq. (14):

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}=&A_xB_x\hat{i}\times\hat{i}+A_xB_y\hat{i}\times j+A_xB_z\hat{i}\times k+A_yB_x\hat{i}\times j+A_yB_y j\times j+\\&A_yB_z j\times k+A_zB_x k\times\hat{i}+A_zB_y k\times j+A_zB_z k\times k.\end{aligned} \tag{15}$$

Fazendo o produto vetorial entre os versores, temos:

$$\vec{A}\times\vec{B}=+A_xB_y k-A_xB_z j-A_yB_x k+A_yB_z\hat{i}+A_zB_x j-A_zB_y\hat{i}\,.$$

Que conduz a:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)j+(A_xB_y-A_yB_x)k\,. \tag{16}$$

Diante das considerações feitas até agora, algumas inquietações surgem:

- O produto cruzado entre dois vetores não gera um vetor, e sim um pseudovetor[7];
- Observando atentamente a Figura 11, se invertermos os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o vetor $\vec{C}$ não se inverte;
- O produto vetorial entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ resulta em um vetor axial[8], quando sabemos que o vetor $\vec{C}$ é um vetor polar[9];
- A regra da mão direita não é explicada ou justificada, permanecendo, dessa forma, uma incógnita.

É dessa maneira com a qual o produto vetorial é apresentado na maioria dos exemplares ofertados para o Ensino Médio e Ensino Superior: com lacunas pedagógicas nunca contra argumentadas, o que faz o aluno inferir que a Álgebra Vetorial (ou de Gibbs) é um corpo de conhecimentos pronto e acabado e que não existem perguntas a serem feitas. Para atacar essas e outras inconsistências, inerentes da Álgebra Vetorial de Gibbs, apresentaremos na seção 2.2 (a seguir) um novo formalismo matemático. Esse formalismo recebe o nome de Álgebra Geométrica ou Álgebra de Clifford, em homenagem a seu precursor.

2.2 A ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Introduziremos a presente seção apresentando os objetos Geométricos de Clifford, acrescentando uma nova característica a esses objetos, A grade. Em seguida dividiremos a referida seção em três subseções. Na primeira serão abordados aspectos históricos nos quais serão enfatizados fatos e personagens que antecederam o formalismo de Clifford, bem como as possíveis razões de sua Álgebra ter sido preterida em relação a de Gibbs. Na segunda subseção serão apresentados aspectos matemáticos da Álgebra de

[7] Vetores cuja direção e sentido são convencionados tais como velocidade angular, momento angular, torque etc.
[8]Um vetor axial é antissimétrico com relação a uma reflexão paralela e simétrico com relação a uma reflexão perpendicular
[9]Um Vetor polar é simétrico quando submetido a uma reflexão paralela e antissimétrico com relação a uma reflexão perpendicular

Clifford. Finalmente a terceira subseção contemplará uma aplicação da Álgebra de Clifford no Eletromagnetismo, especificamente na obtenção das características do vetor Força Magnética.

Ao contrário da Álgebra de Gibbs, o formalismo de Clifford admite outros objetos geométricos além de vetores e escalares. Além de segmentos de retas orientados, Clifford, em sua Álgebra, considerou a existência de fragmentos de planos orientados, chamado por ele de Bivetores, e fragmentos de cubos orientados, a que atribuiu o nome de Trivetores:

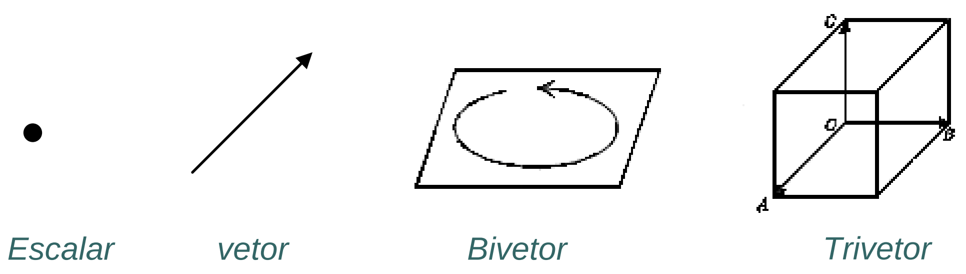


Figura 13: Objetos geométricos utilizados na álgebra de Clifford.

No estudo da Álgebra de Gibbs, afirmamos que as propriedades pertinentes aos vetores são: módulo, direção e sentido. Na álgebra geométrica, acrescentaremos uma nova característica aos objetos vetoriais: A GRADE.

A grade de um objeto vetorial permite a sua classificação de acordo com o objeto geométrico (ponto, reta, plano, triedo,) a que está associado. Logo, a grade dos escalares é 0, a grade dos vetores é 1, a grade dos bivetores é 2 e assim por diante. Sendo a grade de um k-vetor igual a k.

Neste trabalho, nosso estudo ficou restrito aos escalares, vetores e bivetores**.**

Um bivetor nada mais é que um fragmento de plano orientado: o valor de sua área informa a magnitude da grandeza por ele representada, a direção é a mesma do plano suporte do fragmento e o sentido pode ser horário ou anti-horário. Devemos, agora, ter em mente que o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, na Álgebra de Clifford, passa a ser um 2-vetor (bivetor) ao invés de um vetor comum. Assim se, considerarmos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ orientados no espaço, temos os fragmentos de planos orientados:

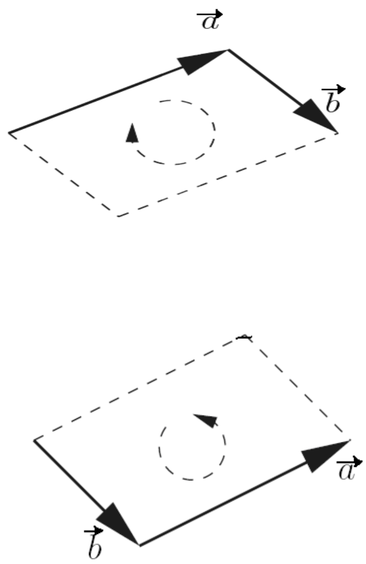


Figura 14: Fragmentos de planos orientados ou bivetores.
Fonte: Sutter (2003, p. 07)

A área orientada delimitada pelo paralelogramo corresponderá ao módulo desse bivetor – que equivale ao módulo do vetor $\vec{c}$, ortogonal ao paralelogramo formado entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O sentido pode ser horário ou anti-horário.

Vamos admitir a existência de um operador, chamado de produto externo ou produto de Grassmann, para calcular o módulo desse bivetor. O produto externo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. nada mais é do que a extensão do vetor $\vec{a}$ sobre o vetor $\vec{b}$ .ou vice-versa, assim como o produto escalar é a projeção de um vetor sobre outro. O símbolo $\wedge$ (cunha) é usado para representá-lo. Assim, considerando dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o produto externo entre os dois é escrito como $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Em termos matemáticos o produto externo é anticomutativo:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}. \quad (17)$$

Se estendermos o vetor $\vec{a}$ ou o vetor $\vec{b}$ através dele mesmo não obteremos nenhuma área, logo:

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = 0; \qquad \vec{b} \wedge \vec{b} = 0. \tag{18}$$

A seguir são apresentadas algumas propriedades importantes do produto externo:

Propriedade associativa: $(\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$

Propriedade comutativa: $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b})\lambda$

Propriedade distributiva: $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$

Considerando o que foi exposto, surge uma inquietação: como é possível representar o vetor $\vec{c}$ através de um fragmento de plano orientado se ele é, na verdade, um segmento de reta orientado?

A resposta reside em um conceito de fundamental importância no estudo da Álgebra de Clifford: o de *dualidade*. Dentro de um mesmo sistema n-dimensional, o *dual de um objeto vetorial* consiste em outro objeto vetorial que apresenta o mesmo número de componentes. O número binomial [n k], definido como:

$$[nk] = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{19}$$

onde k é a grade e n a dimensão, determina o número de componentes de um objeto vetorial. Por exemplo, em um sistema tridimensional é possível descrever desde 0-vetores até 3-vetores.

$$0\text{-vetor} \rightarrow N_0 = [n\ 0] = 1,$$

$$1\text{-vetor} \rightarrow N_1 = [n\ 1] = 3,$$

$$2\text{-vetor} \rightarrow N_2 = [n\ 2] = 3,$$

$$3\text{-vetor} \rightarrow N_3 = [n\ 3] = 1,$$

É possível observar que 1-vetores e 2-vetores formam um dual, uma vez que ambos, dentro de um sistema tridimensional, apresentam três componentes.

A importância de se determinar o dual de um vetor reside no fato de que, a partir de um p-vetor, é possível definir um q-vetor dual que represente a mesma grandeza, só que de forma mais clara. Dessa forma é possível definir dualidade como sendo a operação cujo objetivo é transformar um p-vetor em um q-vetor dual. O q-vetor procurado deve ter o mesmo módulo do p-vetor original uma vez que ambos devem representar a mesma grandeza. Em um sistema tridimensional a direção do q-vetor dual é ortogonal a do p-vetor original. A escolha do sentido é arbitrária, ou seja, depende apenas de uma mera convenção. A Figura 15 ilustra um bivetor e o seu dual:

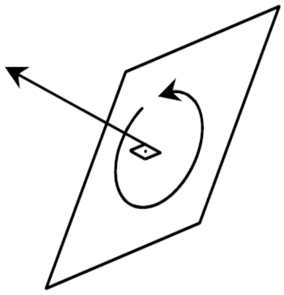


Figura 15: Um bivetor e o seu dual.
Fonte: Vieira (2007, p. 22)

2.2.1 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS

Conforme abordamos na seção 1.1 a formulação de uma nova Álgebra Vetorial, que englobava os trabalhos de Hamilton e Grassmann, é atribuída a William Kingdon Clifford. O grande achado de Clifford, de acordo com Vaz Júnior (1996, p. 236), foi introduzir o produto quaterniônico dentro da estrutura de Grassmann, obtendo assim um sistema naturalmente adaptado à geometria ortogonal de um espaço arbitrário.

Considerando a Álgebra Geométrica tão eficiente e isenta das inconsistências do formalismo de Gibbs, surge uma indagação: por que desde o século XIX a Álgebra Geométrica não foi adotada no estudo dos fenômenos físicos? Por que a álgebra de Gibbs foi a elegida?

Doran e Lasemby (2007, p.11) ressaltam que Clifford morreu precocemente com apenas 33 anos, no auge de seu potencial – o advento de sua álgebra foi no mesmo ano do falecimento de grandes admiradores do seu trabalho (Grassmann e Maxwell). Segundo Doran e Lasemby (2007, p.11), Gibbs gozava de excelente reputação perante a comunidade científica da época, uma vez que a sua Álgebra era de simples entendimento e se adequava à teoria do Eletromagnetismo, tornando-se “a vitrine do final do século XIX”. Já Menon (2009) ressalta que Clifford, ao falecer, provavelmente tenha deixado a sua obra incompleta. Entretanto, para Vieira (2008, p. 04), os trabalhos de Clifford, assim como os de Hamilton e Grassmann, eram bastante complexos para a época em que foram publicados.

Chegada a era da relatividade especial, os físicos perceberam que era necessário um sistema capaz de trabalhar com o espaço quadrimensional. Mas as idéias de Clifford e Grassmann não se faziam presentes, nessa geração (DORAN e LASEMBY, 2007).

Em 1920, segundo Doran e Lasemby (2007, p.11), a Álgebra de Clifford reaparece como a Álgebra subjacente ao *quantun spin*. Em particular, as Álgebras das matrizes de Pauli e Dirac, que possuem a mesma estrutura da Álgebra geométrica, tornaram-se indispensáveis na elaboração da teoria quântica, com a diferença que no formalismo de Clifford, o conceito de *spinnor* aparece de forma bem mais simples. Todavia estas eram tratadas apenas como álgebras, pois a forma geométrica estava perdida. Conforme argumenta Vaz Júnior (1996):

> Tivessem os quatérnios e sua generalização natural, que são as Álgebras de Clifford, prevalecido sobre a Álgebra Vetorial de Gibbs, possivelmente teria um grande efeito sobre a nossa compreensão da Mecânica Quântica, em particular ao conceito de spin. Isto porque, dentre outras, nas Álgebras de Clifford aparece naturalmente o conceito de spinnor (VAZ Jr., 1996, p. 237):

Os trabalhos de Clifford continuaram na obscuridade até o ano de 1960 quando David Hestenes começou a investigar a forma geométrica subjacente às álgebras de Pauli e Dirac e chegou a conclusão que poderia mudar os rumos da álgebra vetorial de Gibbs (DORAN E LASEMBY, 2007). Nesse sentido, Doran e Lasemby (2007, p.12) ainda destacam:

> Sua intenção era ter algum “insight” dentro da natureza da mecânica quântica, mas ele logo percebeu que, apropriadamente aplicado, o sistema de Clifford era nada menos que uma linguagem universal para a Matemática, Física e Engenharia! (DORAN e LASEMBY, 2007, p.12).

A resistência oferecida pela comunidade científica a adotar a Álgebra Geométrica da descrição dos fenômenos físicos constituiu, ao longo desses quase cinquenta anos, um obstáculo no trabalho de Hestenes (DORAN e LASEMBY, 2007). Segundo Doran e Lasemby (2007, p.12), a principal argumentação dos físicos é que a Álgebra Geométrica é um formalismo viável apenas na descrição de alguns fenômenos pertinentes à Mecânica Quântica.

2.2.2 ASPECTOS MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Nesta subseção definiremos o produto externo (ou produto de Grassmann), que corresponde ao módulo de um bivetor, obtido a partir de dois vetores. Objetivando proporcionar mais clareza na apresentação matemática dos conceitos, definiremos o produto de Grassmann no espaço bidimensional, passando, em seguida, para o espaço tridimensional. A definição do produto externo proporcionará argumentos para que possamos demonstrar o produto geométrico ou produto de Clifford. Em seguida, apresentaremos o Operador Hodge, que permitirá obter o 1-vetor dual ao bivetor representativo do produto externo entre dois vetores distintos.

(i) O PRODUTO DE GRASSMANN NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Conforme vimos na secção 2.1.5 (iii), a propriedade da multiplicação de um número por um vetor possibilita a definição de um vetor unitário, que foi dado o nome de versor. Numa base R_3 a simbologia atribuída a esses versores foi $\hat{i}$, $\hat{j}$ e k. Considerando a possibilidade de se operar com sistemas n-dimensional, chamaremos esses versores, agora, de $\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_n$. Dessa forma, admitindo um sistema n-dimensional, a base para o mesmo será. $\langle \hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_n \rangle$

Considere um sistema de eixos perpendiculares semelhante ao cartesiano, conforme ilustra a Figura 16. Vamos associar à cada eixo um versor $\hat{e}_i$, colinear ao respectivo eixo e coincidente com a origem, de forma que as coordenadas de um ponto qualquer agora se tornem um vetor (VIEIRA, 2008).

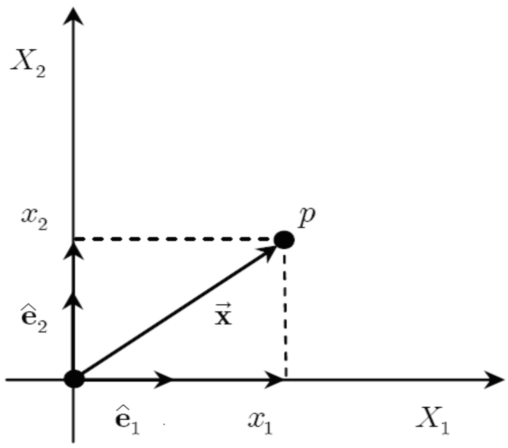


Figura 16: O sistema de coordenadas vetoriais.
Fonte: Vieira (2008, p. 7)

Dessa forma um dado ponto p de um sistema pode ter a seguinte representação vetorial, em termos de suas componentes nos respectivos eixos:

$$\vec{x} = \langle x_1\hat{e}_1, x_2\hat{e}_2, ...x_n\hat{e}_n \rangle . \tag{20}$$

Como é de nosso conhecimento um dado vetor pode ser escrito como uma expressão algébrica, ou seja, pode ser escrito como uma soma de suas componentes, já que elas também são entidades vetoriais. Dessa forma, é possível representar o vetor $\vec{x}$ por:

$$\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ...x_2 e_n . \tag{21}$$

Para um sistema n-dimensional, o módulo é obtido pelo teorema de Pitágoras.

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + ...(x_n)^2} . \tag{22}$$

Considere dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. A Figura 17 ilustra a decomposição de dois números reais $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $b = (\beta_1, \beta_2)$ em uma base $\langle \hat{e}_1, \hat{e}_2 \rangle$ (SUTER, 2003):

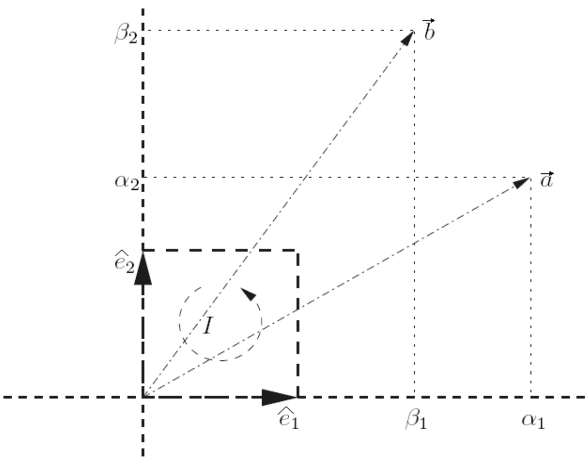


Figura 17: Uma base bidimensional
Fonte: Sutter (2003, p. 9)

Decompondo esses dois vetores se obtêm:

$$\vec{a} = \alpha_1\hat{e}_1 + \alpha_2\hat{e}_2;$$
$$\vec{b} = \beta_1\hat{e}_1 + \beta_2\hat{e}_2. \tag{23}$$

O produto externo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = (\alpha_1\hat{e}_1 + \alpha_2\hat{e}_2)\wedge(\beta_1\hat{e}_1 + \beta_2\hat{e}_2)\,. \tag{24}$$

Aplicando a propriedade distributiva na Eq. (24), obtemos:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = (\alpha_1\hat{e}_1 \wedge \beta_1\hat{e}_1) + (\alpha_1\hat{e}_1 \wedge \beta_2\hat{e}_2) + (\alpha_2\hat{e}_2 \wedge \beta_1\hat{e}_1) + (\alpha_2\hat{e}_2 \wedge \beta_2\hat{e}_2)\,. \tag{25}$$

Aplicando a propriedade comutativa e associativa na Eq. (25) ainda se pode escrever:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = (\alpha_1\beta_1\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1) + (\alpha_1\beta_2\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2) + (\alpha_2\beta_1\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1) + (\alpha_2\beta_2\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_2)\,. \tag{26}$$

Recordando da Eq. (18) em que o produto externo de um versor por ele mesmo é igual a zero, têm-se:

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 = 0$$

Dessa forma o produto externo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, da Eq. (26), se reduz a:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = (\alpha_1\beta_2\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2) + (\alpha_2\beta_1\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1)\,. \tag{27}$$

Como foi mostrado na Eq. (19), o produto externo é anticomutativo:

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1$$

Dessa forma, o produto referido na Equação 29 se torna:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \,. \tag{28}$$

Fazendo $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = I'$, reescreve-se:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) I' \,. \tag{29}$$

Onde *I'* é um bivetor de área unitária.

(ii) O PRODUTO DE GRASSMANN NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Agora, a base ortogonal consistirá de três versores que aqui chamaremos de $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$. Como resultado, segundo Suter (2003, p. 10) existirão três bases bivetoriais, as quais denominaremos de $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_{12}$, $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{13}$ e $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{23}$, conforme é apresentado na Figura 18.

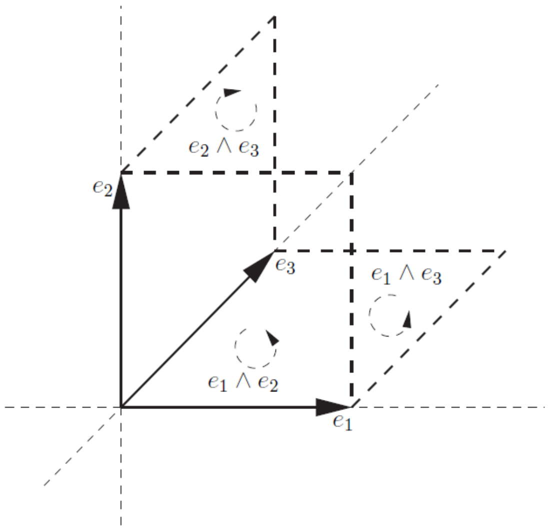


Figura 18: Uma base bivetorial tridimensional.
Fonte: Sutter (2003, p. 10)

O produto externo de dois vetores resultará em uma combinação linear de três bases bivetoriais. A demonstração, mais uma vez, foi feita usando dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, agora em $R_{3:}$

$$\vec{a} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3; \qquad (30)$$
$$\vec{b} = \beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2 + \beta_3 \hat{e}_3.$$

O produto externo $\vec{a} \wedge \vec{b}$ torna-se:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3 \right) \wedge \left(\beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2 + \beta_3 \hat{e}_3 \right). \qquad (31)$$

Utilizando a propriedade na Eq. (31), temos:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \alpha_1 \hat{e}_1 \wedge \beta_1 \hat{e}_1 + \alpha_1 \hat{e}_1 \wedge \beta_2 \hat{e}_2 + \alpha_1 \hat{e}_1 \wedge \beta_3 \hat{e}_3 +$$
$$\alpha_2 \hat{e}_2 \wedge \beta_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 \wedge \beta_2 \hat{e}_2 + \alpha_2 \hat{e}_2 \wedge \beta_3 \hat{e}_3 +$$
$$\alpha_3 \hat{e}_3 \wedge \beta_1 \hat{e}_1 + \alpha_3 \hat{e}_3 \wedge \beta_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3 \wedge \beta_3 \hat{e}_3 .$$

Reordenando os fatores, obtemos:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 + \alpha_1 \beta_2 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + \alpha_1 \beta_3 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 +$$
$$\alpha_2 \beta_1 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 + \alpha_2 \beta_2 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_2 + \alpha_2 \beta_3 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 +$$
$$\alpha_3 \beta_1 \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 + \alpha_3 \beta_2 \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2 + \alpha_3 \beta_3 \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_3 .$$

e recordando as regras do produto externo:

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_i = 0;$$
$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = \hat{e}_{ij};$$
$$\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i = -\hat{e}_{ij}.$$

Finalmente escrevemos:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\alpha_1\beta_2 - \alpha_1\beta_2\right)\hat{e}_{12} + \left(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1\right)\hat{e}_{13} + \left(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\right)\hat{e}_{23}\,. \qquad (32)$$

Que é o produto externo de dois vetores em um espaço euclidiano tridimensional.

Suter (2003, p.13) argumenta que essa expressão é bastante parecida com a definição do produto vetorial de Gibbs. Mas não é a mesma coisa. O produto externo trabalha em todas as dimensões, enquanto o produto vetorial, na grande maioria de suas aplicações, é apenas definido em três dimensões. Além disso, o produto vetorial calcula um subespaço perpendicular ao invés de um paralelo. Como veremos adiante, isso pode causar problemas em algumas situações.

(iii) O PRODUTO GEOMÉTRICO OU PRODUTO DE CLIFFORD

Vamos considerar uma geometria ortogonal em que, como sabemos, é válido o Teorema de Pitágoras. Nesse sentido, considere um vetor $\vec{v}$ em um sistema bidimensional (VIEIRA, 2008):

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2\,. \qquad (33)$$

Comecemos a escrever o quadrado do módulo de $\vec{v}$ pela expressão:

$$\vec{v}\vec{v} = \left(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2\right)\left(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2\right) = \left|\vec{v}\right|^2. \qquad (34)$$

Usando a propriedade distributiva, teremos:

$$\vec{v} = v_1 v_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + v_2 v_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 = |\vec{v}|^2 . \tag{35}$$

A partir da Geometria Euclidiana temos que $|\vec{v}|^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2$, dessa forma é possível obter, a partir da Eq. (27), que:

$$v_1 v_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + v_2 v_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 = v_1^2 + v_2^2 . \tag{36}$$

Observe que os dois primeiros termos já fornecem o quadrado do vetor $\vec{v}$, logo isso leva à relação $v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 = 0$. Colocando em evidência os coeficientes desta relação, teremos:

$$v_1 v_2 \left(\vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1 \right) = 0 .$$

Admitindo $\vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1 = 0$, obtemos: $\left(\vec{e}_1 \vec{e}_2 \right) = -\left(\vec{e}_2 \vec{e}_1 \right)$.

Generalizando esses argumentos para sistemas n-dimensional encontramos, portanto, as seguintes relações que definem o produto geométrico na geometria euclidiana ortogonal:

$$\begin{gathered} \vec{e}_i \vec{e}_i = 1; \\ \left(\vec{e}_i \vec{e}_j \right) = -\left(\vec{e}_j \vec{e}_i \right). \end{gathered}$$

Vieira (2008, p. 11) demonstra como utilizar essas relações na obtenção do produto geométrico entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, escritos em um sistema bidimensional:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$$
$$\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2$$

Assim:

$$\vec{v}\vec{w} = \left(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2\right)\left(w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2\right) \tag{38}$$

Usando a propriedade distributiva:

$$\vec{v}\vec{w} = v_1w_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + v_2w_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + v_1w_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + v_2w_1\vec{e}_2\vec{e}_1 . \tag{39}$$

Aplicando, agora, as relações que define o produto geométrico, encontramos:

$$\vec{v}.\vec{w} = \left(v_1w_1 + v_2w_2\right) + \left(v_1w_2 - v_2w_1\right)\vec{e}_1\vec{e}_2 . \tag{40}$$

Observe que o primeiro termo da Eq. (40) corresponde a um escalar, pois não contém versores. Esse termo é comumente chamado de produto de Gibbs-Heaviside e é geralmente representado por $\vec{v}.\vec{w}$. Aqui vamos chamá-lo de produto interno. Para evitar confusões com o produto numérico, vamos representá-lo por $\vec{v} \vee \vec{w}$.

Pela Geometria, o produto interno pode ser definido pela seguinte relação:

$$v \vee w = \left(v_1w_1 + v_2w_2\right) = |\vec{v}|.|\vec{w}|\cos\alpha_{vw} \ . \tag{41}$$

Passemos agora para o segundo termo do produto geométrico expresso na Eq. (40), qual seja $\left(v_1w_2 - v_2w_1\right)\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Esse termo é conhecido como produto externo ou produto de Grassmann. Como já é de nosso conhecimento ele pode ser representado por $|\vec{v} \wedge \vec{w}|$ e resulta num bivetor.

Se substituíssemos o formalismo analítico por outro puramente geométrico, chegaríamos a seguinte relação:

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}| = \left(v_1w_2 - v_2w_1\right)\vec{e}_1\vec{e}_2 = |\vec{v}|.|\vec{w}|sen\alpha_{vw} . \tag{42}$$

Verifiquemos que a Eq. (42) é aquela que define o paralelogramo de lados $|\vec{v}|$ e $|\vec{w}|$ e cujo ângulo obtuso é α_{vw}. Assim, o produto externo está associado a fragmentos de planos e não a segmentos de retas, logo não pode ser um vetor. Também não pode ser um escalar, pois os versores $\vec{e}_1\vec{e}_2$ garantem características vetoriais, orientando-o no sentido horário ou anti-horário. Isto tudo nos leva associar de forma inevitável uma natureza bivetorial ou 2-vetor. Observemos ainda que o conjunto de versores $\vec{e}_i\vec{e}_j$ se comporta de forma análoga a base $\vec{\vec{e}}_{ij}$ dos bivetores, logo, podemos tomá-los como equivalentes e escrever:

$$\left(\vec{e}_{12} \equiv \vec{e}_1\vec{e}_2\right), \left(\vec{e}_{13} \equiv \vec{e}_1\vec{e}_3\right), \ldots \left(\vec{e}_{mn} \equiv \vec{e}_m\vec{e}_n\right). \tag{43}$$

Logo, o produto geométrico de dois vetores resulta em um multivetor, contendo um 0-vetor e um 2-vetor. Tal produto foi definido por Clifford como produto geométrico. Podemos escrever o produto de Clifford como uma soma entre o produto de Gibbs e Heaviside e o de Grassmann:

$$\underset{Clifford}{\vec{a}\vec{b}} = \underset{Gibbs-Heaviside}{\vec{a} \vee \vec{b}} + \underset{Grassmann}{\vec{a} \wedge \vec{b}}. \tag{44}$$

Para um sistema n-dimensional, os produtos internos e externos são definidos por:

$$\begin{aligned} \vec{v} \vee \vec{w} &= v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots v_n w_n; \\ \vec{v} \wedge \vec{w} &= \sum_{1,2}^{m,n} \left(v_i w_j - v_j w_i\right) \vec{e}_i \vec{e}_j \end{aligned}. \tag{45}$$

Vamos, a partir de agora, trabalhar com o produto geométrico. De início consideraremos o produto geométrico de dois versores iguais:

$$\hat{e}_1\hat{e}_1 = \hat{e}_1 \vee \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1. \tag{46}$$

Como o produto externo de dois versores iguais é igual a zero, uma vez que a extensão de um versor sobre ele mesmo não determina nenhuma área. Portanto, $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 = 0$. Da mesma forma, o produto escalar de dois versores idênticos é igual a um, uma vez que a projeção de um versor sobre ele mesmo é o próprio versor, dessa forma, $\hat{e}_1 \vee \hat{e}_1 = 1$. Então, é possível reescrever o produto geométrico de dois versores análogos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\hat{e}_1\hat{e}_1 = \hat{e}_1 \vee \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 \Rightarrow \\ &\hat{e}_1\hat{e}_1 = 1 + 0 \Rightarrow \\ &\hat{e}_1\hat{e}_1 = 1. \end{aligned} \tag{47}$$

Outro exemplo é se for considerado um sistema bidimensional:

$$\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_1 \vee \hat{e}_2 + \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 . \tag{48}$$

Ora, sendo $\hat{e}_1$ perpendicular a $\hat{e}_2$ o produto escalar entre ambos é igual a zero, pois versores perpendiculares não define nenhuma projeção de um sobre o outro, daí $\hat{e}_1 \vee \hat{e}_2 = 0$. Já o produto externo entre $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ é um bivetor, que será chamado de I'. Reescrevendo o produto geométrico de dois versores ortogonais, se obtêm.

$$\hat{e}_1\hat{e}_2 = -\hat{e}_2\hat{e}_1 . \tag{49}$$

Dessa forma encontramos, a partir do produto externo de Grassmann, expressão que nos permite calcular o módulo do bivetor formado a partir dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Através do produto de Clifford, é permissível operar com os versores.

(iv) OPERAÇÃO DUALIDADE

Como nos referimos no final da seção 2.2, dentro de um mesmo sistema n-dimensional, o *dual de um objeto vetorial* consiste em outro objeto vetorial que apresenta o mesmo número de componentes.

Como o módulo do q-vetor dual deve ser igual ao do p-vetor original é preferível que se opere apenas com os versores do sistema. Para tanto, multiplica-se geometricamente o p-vetor original pelos versores da base do sistema considerado (no caso presente, o tridimensional). Nesse processo, os versores iguais do p-vetor e da base se cancelam de acordo com as regras da multiplicação geométrica, o resultado é o q-vetor dual com n – p versores onde todos são diferentes, em cada termo, do p-vetor de origem. O fato de estes versores serem todos diferentes dos anteriores faz com que o q-vetor seja ortogonal ao p-vetor original (VIEIRA, 2007).

O operador matemático referente à dualidade é chamado de operador Hodge (em homenagem ao seu precursor) e é representado por $*$, onde: $* = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ considerando o sistema como tridimensional.

Dessa forma, o dual de um vetor $\vec{c}$ qualquer é representado por:

$$*\vec{c} = (e_1 e_2 e_3)\vec{c}\,. \tag{50}$$

Para um melhor entendimento, será calculado o dual de um bivetor cujos versores, de escolha arbitrária, serão $e_2 e_3$. Lembrando que foram utilizadas as propriedades de multiplicação geométrica tais como: $\hat{e}_i\hat{e}_j = -\hat{e}_j\hat{e}_i$ e $\hat{e}_i\hat{e}_i = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} *(e_2 e_3) &= e_1 e_2 e_3 \ \ (e_2 e_3) \\ &= e_1 (e_2 e_3) e_2 e_3 \\ &= e_1 (-e_3 e_2) e_2 e_3 \end{aligned} \tag{51}$$

$$= -e_1 e_3 (e_2 e_2) e_3$$

$$= -e_1 e_3 e_3$$

$$= -e_1 \, .$$

Da mesma forma é possível demonstrar que:

$$*(\hat{e}_1 \hat{e}_3) = -\hat{e}_2 \quad \text{e} \quad *(\hat{e}_1 \hat{e}_2) = -\hat{e}_3 \, . \tag{52}$$

Diante das considerações apresentadas, vamos mostrar que o vetor $\vec{c}$, ortogonal ao paralelogramo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$,cujo módulo é obtido pelo produto vetorial de Gibbs $\vec{a} \times \vec{b}$, é equivalente ao dual do módulo do bivetor calculado através do produto de Grassmann $\vec{b} \wedge \vec{a}$. Para tanto, considere dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representados por:

$$\vec{a} = a_x \hat{e}_1 + a_y \hat{e}_2 + a_z \hat{e}_3;$$
$$\vec{b} = b_x \hat{e}_1 + b_y \hat{e}_2 + b_z \hat{e}_3.$$

Logo:

$$*\vec{b} \wedge \vec{a} = (\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3)[(b_x \hat{e}_1 + b_y \hat{e}_2 + b_z \hat{e}_3) \wedge (a_x \hat{e}_1 + a_y \hat{e}_2 + a_z \hat{e}_3)]$$

$$= (\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3)[b_x a_x \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 + b_x a_y \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + b_x a_z \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 +$$

$$b_y a_x \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 + b_y a_y \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_2 + b_y a_z \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 +$$

$$b_z a_x \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 + b_z a_y \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2 + b_z a_z \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_3]$$

Sabendo-se que:

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_i = 0;$$
$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = -\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i.$$

Temos:

$$*\vec{b} \wedge \vec{a} = (\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3)[(b_x a_y - b_y a_x)\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + (b_x a_z - b_z a_x)\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + (b_y a_z - b_z a_y)\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3] \tag{53}$$

Lembrado as regras do produto geométrico, em que: $e_i e_i = 1$ e $e_i e_j = -e_j e_i$, é possível fazer a seguinte operação com os versores:

$$\begin{aligned}
(\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3)\hat{e}_1\hat{e}_2 &= \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3\hat{e}_1\hat{e}_2 = \hat{e}_1\hat{e}_3\hat{e}_1 = -\hat{e}_3;\\
(\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3)\hat{e}_1\hat{e}_3 &= -\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3\hat{e}_3\hat{e}_1 = -\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_1 = \hat{e}_2;\\
(\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3)\hat{e}_2\hat{e}_3 &= -\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3\hat{e}_3\hat{e}_2 = -\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_2 = -e_1.
\end{aligned} \tag{54}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
*\vec{b}\wedge\vec{a} &= (b_x a_y - b_y a_x)\left(-\hat{e}_3\right) + (b_x a_z - b_z a_x)\hat{e}_2 + (b_y a_z - b_z a_y)\left(-\hat{e}_1\right)\\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{e}_1 + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{e}_2 + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{e}_3
\end{aligned} \tag{55}$$

E finalmente temos que:

$$\vec{a}\times\vec{b} \equiv *\vec{b}\wedge\vec{a} \equiv *^{-1}\vec{a}\wedge\vec{b}. \tag{56}$$

Esse resultado é importante, pois existem grandezas físicas associadas a vetores que são obtidas através do produto geométrico entre dois vetores.

2.2.3 ÁLGEBRA DE CLIFFORD E O ELETROMAGNETISMO: O CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

O produto vetorial é normalmente introduzido nos cursos fundamentais de Física nos capítulos referentes à Dinâmica da Rotação, através da Álgebra de Gibbs-Heaviside. No entanto, é no Eletromagnetismo que esse produto adquire um caráter essencial, principalmente no nível médio de ensino. Como exemplo, é possível citar a força $\vec{F}$ que age sobre uma carga de prova q com velocidade $\vec{v}$ dentro de um campo magnético $\vec{B}$. O módulo da força $\vec{F}$ é obtido pelo produto $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

Nos textos de Ensino Médio, o mesmo módulo é calculado através da expressão $|\vec{F}| = q|\vec{v}| \times |\vec{B}| sen\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

De acordo com a formulação do Eletromagnetismo de Gibbs, em que as entidades são, essencialmente, escalares e vetoriais o vetor força magnética $\vec{F}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$, cuja área é calculada através do produto cruzado $\vec{v} \times \vec{B}$ ou pela área do paralelogramo definido pela expressão $|\vec{v}| \times |\vec{B}| sen\theta$ – o escalar q influi apenas na magnitude do vetor resultante.

Em ambos os casos, a Álgebra de Gibbs aponta que a força que age sobre a carga é perpendicular ao campo e a velocidade, ou seja, ao plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Nesse contexto, conforme argumenta a maioria dos livros didáticos de Ensino Médio e Superior, aparece uma força perpendicular ao plano que desvia a carga para fora deste plano cujo sentido é dado pela regra da mão direita.

Entretanto, a regra da mão direita é uma regra de memorização e, portanto, convencional. Por trás dessa convenção existem propriedades de simetria que são ocultadas pela grande maioria dos livros didáticos. Nesses livros, de acordo com Silva e Martins (2008, p. 02), vetores diferentes são representados da mesma forma quando sabemos que existem entidades polares e axiais cuja simetria os diferencia de forma significativa no estudo dos fenômenos pertinentes à Física.

Um vetor simétrico não muda de sinal em uma reflexão e um antissimétrico muda. Vetores polares (deslocamento, velocidade, força e campo elétrico) são simétricos com relação a um plano paralelo, pois o vetor refletido (Figura 19) possui a mesma direção e sentido que o vetor original (SILVA e MARTINS 2008):

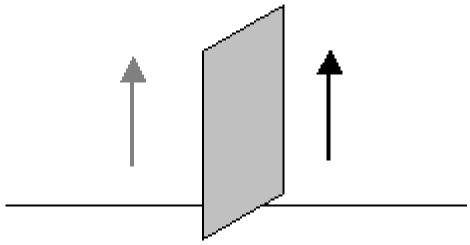


Figura 19: Um vetor polar é simétrico com respeito a uma reflexão pralela.
Fonte: Silva e Martins (2002, p. 3)

Os mesmos vetores polares são antissimétricos com relação a reflexões em um plano perpendicular (Figura 20), pois a direção do vetor refletido é oposta ao original (SILVA e MARTINS, 2008):

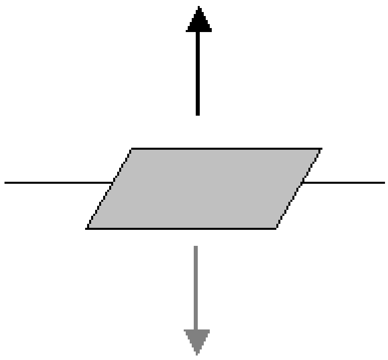


Figura 20: Um vetor polar é antissimétrico com relação a uma reflexão perpendicular.
Fonte: Silva e Martins (2002, p. 3)

Já os vetores axiais (Figura 21), velocidade angular, torque, momento angular e campo magnético são antissimétricos em relação a um plano paralelo (SILVA e MARTINS, 2008):

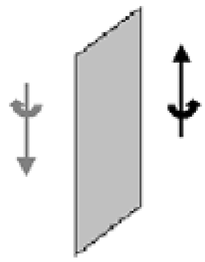


Figura 21: Um vetor axial é antissimétrico com relação a uma reflexão em um plano paralelo.
Fonte: Silva e Martins (2002, p. 3)

Em relação a um plano perpendicular (Figura 22) eles são simétricos:

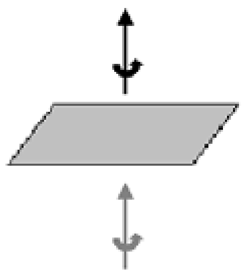


Figura 22: Um vetor axial é simétrico com relação a uma reflexão perpendicular.
Fonte: Silva e Martins (2002, p. 3)

É interessante ressaltar que o produto vetorial entre dois vetores resulta em um vetor axial. Nesse caso, surge uma inconsistência na álgebra de Gibbs quando aplicada a expressão $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, pois o primeiro membro representa um vetor polar e o segundo membro, um vetor axial. Vaz Júnior (1996, p. 241) reforça essa argumentação ao dizer que ao fazermos uma inversão especial em $\vec{v}$ e $\vec{B}$ temos $\vec{F} \mapsto q(-\vec{v}) \times (-\vec{B}) = \vec{F}$, ou seja, $\vec{F}$ resultante não se altera perante uma reflexão especial. É um pseudo-vetor.

Essa inconsistência desaparece na Álgebra de Clifford. Quando uma grandeza física resulta do produto geométrico de dois vetores, esse produto gera um bivetor e um escalar: nunca outro vetor! O aparente problema é que o vetor representativo é sempre ortogonal àqueles que se multiplicam, mesmo apresentando a mesma magnitude do bivetor gerado. A solução consiste associar esse vetor representativo ao dual do bivetor.

No que se refere à força que atua sobre uma carga elétrica (q) em movimento ($\vec{v}$) dentro de um campo magnético ($\vec{B}$), demonstra-se experimentalmente que o módulo dessa força é dado por $\left|q\vec{B}\wedge\vec{v}\right|$. É possível também demonstrar que a direção dessa força é sempre ortogonal ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Todavia ela não pode ser representada pelo bivetor resultante desse produto, uma vez que a força $\vec{F}$ é uma grandeza univetorial. Porém demonstra-se que esse vetor é o dual do bivetor gerado a partir da representação, no espaço euclidiano tridimensional, das coordenadas retangulares de $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Seja:

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3$$
$$\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$$
$$* = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$$

onde q é a carga elétrica (escalar). Logo:

$$\vec{F} = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3\left(B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3\right)\wedge q\left(v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3\right)$$

$$= \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3[qB_1v_1\hat{e}_1\wedge\hat{e}_1 + qB_1v_2\hat{e}_1\wedge\hat{e}_2 + qB_1v_3\hat{e}_1\wedge\hat{e}_3 +$$

$$qB_2v_1\hat{e}_2\wedge\hat{e}_1 + qB_2v_2\hat{e}_2\wedge\hat{e}_2 + qB_2v_3\hat{e}_2\wedge\hat{e}_3 +$$

$$qB_3v_1\hat{e}_3\wedge\hat{e}_1 + qB_3v_2\hat{e}_3\wedge\hat{e}_2 + qB_3v_3\hat{e}_3\wedge\hat{e}_3]$$

Como $e_i\wedge e_i = 0$, é possível reescrever:

$$\vec{F} = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3[B_1v_2\hat{e}_1\wedge\hat{e}_2 + B_1v_3\hat{e}_1\wedge\hat{e}_3 +$$

$$B_2v_1\hat{e}_2\wedge\hat{e}_1 + B_2v_3\hat{e}_2\wedge\hat{e}_2 +$$

$$B_3v_1\hat{e}_3\wedge\hat{e}_1 + B_3v_2\hat{e}_3\wedge\hat{e}_2]. \qquad (57)$$

Sabendo que: $e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1$; $e_1 \wedge e_3 = -e_3 \wedge e_1$ e $e_2 \wedge e_3 = -e_3 \wedge e_2$. Vem que a Eq. (57) pode ser reescrita como:

$$\vec{F} = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3\, q[(B_1v_2 - B_2v_1)\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 + (B_1v_3 - B_3v_1)\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + (B_2v_3 - B_3v_2)\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2]. \quad (58)$$

Ou

$$\vec{F} = *q(\vec{B} \wedge \vec{v}). \quad (59)$$

Lembrando que:

$$(\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3)\hat{e}_1\hat{e}_2 = -e_3;$$
$$(\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3)\hat{e}_1\hat{e}_3 = e_2;$$
$$(\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3)\hat{e}_2\hat{e}_3 = -e_1.$$

Teremos:

$$*q(\vec{B} \wedge \vec{v}) = q[(B_1v_2 - B_2v_1)(-e_3) + (B_1v_3 - B_3v_1)e_2 + (B_2v_3 - B_3v_2)(-e_1)] \quad (60)$$

Reorganizando os termos entre colchetes, da Eq. (60), temos:

$$*q(\vec{B} \wedge \vec{v}) = q[(v_2B_3 - B_2v_3)e_1 + (v_3B_1 - B_3v_1)e_2 + (v_1B_2 - B_1v_2)e_3]. \quad (61)$$

Observamos que os termos entre colchetes correspondem ao produto vetorial de Gibbs, entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Dessa forma, finalmente, é possível escrever uma relação entre a Álgebra de Gibbs e a de Clifford, no que concerne a expressão da força magnética:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \equiv *q(\vec{B} \wedge \vec{v}). \quad (62)$$

A importância dessa expressão é que as características do 1-vetor força magnética não são obtidas por meio de preceitos de memorização não justificados, como a regra da mão direita. Além disso, o problema de simetria fica completamente resolvido, conforme enfocamos na presente seção. No Capítulo 5 desse trabalho, onde são discutidos os resultados das duas intervenções, apresentamos, a luz da teoria de David Ausubel, possibilidades de como tornar significativa a aprendizagem dos conceitos relativos a obtenção do referido objeto geométrico, através de um material potencialmente significativo no qual foi inserida a Eq. 62., obtida pelo formalismo de Clifford.

Nessa direção, o capítulo 3 (a seguir) dará ênfase a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel a qual aponta que um novo conceito adquire um caráter significativo quando o mesmo encontra alguma relação com outros previamente existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Os pressupostos de Ausubel serviram de alicerces para que Joseph Novak idealizasse a estratégia dos Mapas Conceituais, que foram utilizados como instrumento de avaliação nas intervenções realizadas – discutidas com mais detalhes no capítulo 5.

CAPÍTULO 3

A TEORIA COGNITIVA DE DAVID AUSUBEL

Chama-se estrutura cognitiva o conjunto de conceitos ou conhecimentos que estão hierarquicamente organizados em nosso cérebro. Quando um novo conceito interage com o conhecimento prévio, na estrutura cognitiva do aprendiz, dizemos que ocorreu o que Ausubel et al. (1978) chamam de aprendizagem significativa.

De acordo com Nunes e Santos (2006), para que ocorra esse tipo de aprendizagem é necessário que o aluno realmente esteja predisposto a estabelecer o relacionamento entre os novos conceitos e aqueles que já estão presentes em sua estrutura cognitiva. Esse conjunto de conhecimentos, já presentes na estrutura cognitiva do aprendiz, que ancoram novas idéias ou conceitos que possam ser significativamente aprendidos, recebe o nome de subsunçores.

Caso isso não venha ocorrer, a aprendizagem será caracterizada como mecânica. É aquela que encontra muito pouco ou nenhuma informação prévia na estrutura cognitiva a qual possa se relacionar, sendo então armazenada de maneira arbitrária. Em geral envolve conceitos com um alto ou total teor de “novidade” para o aprendiz, mas no momento em que é mecanicamente assimilada passa a se integrar ou criar novas estruturas cognitivas (AUSUBEL, 1980).

Dessa forma, a aprendizagem significativa é preferível à aprendizagem mecânica, ou arbitrária, pois constituí um método mais simples, prático e eficiente. Muitas vezes um indivíduo pode aprender algo mecanicamente e só mais tarde percebe que este se relaciona com algum conhecimento anterior já dominado. Neste caso ocorreu então um esforço e tempo demasiado para assimilar conceitos que seriam mais facilmente compreendidos se encontrassem uma "âncora", ou um conceito *subsunçor*, existente na estrutura cognitiva (MOREIRA e MASINI, 2000).

O *subsunçor* é uma estrutura específica ao qual uma nova informação pode se integrar ao cérebro humano, que é altamente organizado e detentor de uma hierarquia conceitual que armazena experiências prévias do aprendiz (MOREIRA e MASINI, 2000).

Uma grande questão levantada pela Teoria de Ausubel diz respeito a origem dos *subsunçores*. Se eles não estiverem presentes para viabilizar a aprendizagem significativa como poderia se criá-los?

Segundo Ausubel (1980), a aprendizagem mecânica é necessária e inevitável no caso de conceitos inteiramente novos para o aprendiz, mas posteriormente ela passará a se transformar em Significativa. Para acelerar esse processo, Ausubel propõe os organizadores prévios, âncoras criadas a fim de manipular a estrutura cognitiva, relacionando conceitos aparentemente não relacionáveis através da abstração.

Para que ocorra aprendizagem significativa, de acordo com Ausubel, é necessário que:

- O material assimilado seja potencialmente significativo, ou seja, não arbitrário em si. Mesmo materiais arbitrários podem se tornar potencialmente significativo através dos organizadores prévios;
- Ocorra um conteúdo mínimo na estrutura cognitiva do indivíduo, com subsunçores em suficiência para suprir as necessidades relacionais e o aprendiz apresente uma disposição para o relacionamento e não para simplesmente memorizá-lo mecanicamente muitas vezes até simulando uma associação.

A aprendizagem significativa se divide em três tipos:

(i) Aprendizagem representacional

É basicamente uma associação simbólica primária. Atribuindo significados a símbolos como, por exemplo, força resultante ao símbolo $\vec{F}$.

(ii) Aprendizagem de conceitos

É uma extensão da aprendizagem representacional, mas num nível mais abrangente e abstrato, como o significado de força resultante, por exemplo.

(iii) Aprendizagem proposicional

É o inverso da representacional. Necessita é claro do conhecimento prévio dos conceitos e símbolos, mas seu objetivo e promover uma compreensão sobre uma proposição através da soma de conceitos mais ou menos abstratos. Por exemplo, um corpo se mantém em movimento retilíneo e uniforme quando a força resultante que atua sobre ele é nula.

A aprendizagem significativa também pode possuir uma das seguintes naturezas:

(i) Subordinada

Quando a informação nova é logo absorvida pelo subsunçor, sem alterá-la. Por exemplo, quando o indivíduo tem subsunçores para o conceito de velocidade escalar média e aprende velocidade escalar instantânea.

(ii) Superordenada

Quando a informação nova é ampla demais para ser assimilada por qualquer *subsunçor* existente, sendo mais abrangente que estes e então passa a assimilá-los. Por exemplo, se o indivíduo tem *subsunçores* para velocidade, aceleração (sob aspectos escalares e vetoriais) e massa, e depois aprende o conceito geral de força. Esse último conceito é que na realidade absorverá os três originais.

(iii) Combinatória

Quando a informação nova não é suficientemente ampla para absorver os *subsunçores,* mas em contrapartida é muito abrangente para ser absorvida por estes. Como exemplo, podemos citar o conceito de luz. Ela se relaciona com o conceito de onda, mas poderia não ser assimilada por este, pois possuí peculiaridades as quais poderia ser associada ao conceito de partícula, mas não de forma exclusiva a ponto de ser definitivamente assimilado. Apesar de se relacionar com ambos ainda mantém certa independência.

Chamamos de aprendizagem por recepção aquela que ocorre quando o que deve ser aprendido é apresentado na sua forma final. Já a aprendizagem por descoberta é quando o conteúdo principal a ser aprendido é descoberto pelo aprendiz. Ausubel acredita que a aprendizagem por recepção ou por descoberta só será significativa se o novo conteúdo se incorporar de forma substantiva, não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva. Nas palavras do próprio Ausubel:

> Ao longo das últimas cinco décadas, introduziram-se em larga escala programas de atividades, métodos de projetos, várias formas de se maximizar a experiência não verbal na sala de aula e uma ênfase da 'autodescoberta' e da aprendizagem para e através da resolução de problemas, em resposta à vasta insatisfação em relação às técnicas de instrução verbal (AUSUBEL, 2003, p. 6)

Nesse sentido, o material direcionado à aprendizagem significativa deve ser potencialmente significativo, ou seja, deve possuir características de natureza substantiva e não arbitrária.

Um material é considerado de natureza substantiva quando ele está aliado às idéias relevantes em relação ao tema abordado, já contido na estrutura cognitiva do aluno. Tais ideias, conforme argumenta Nunes e Santos (2006), servirão de esteio ao novo conteúdo a ser aprendido.

O material não arbitrário é aquele que se relaciona com a estrutura cognitiva do aluno sem alterar o seu significado. Palavras e símbolos sempre apresentam o mesmo significado independente da ocasião ou forma com que estão relacionados. Especialmente, eles podem ser organizados através da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa.

A diferenciação progressiva fundamenta-se no pressuposto de que a aprendizagem se processa numa estrutura hierárquica por natureza, desenvolvendo-se de cima para baixo em termos de abstração, generalidade e inclusão, condicionando o caráter, a amplitude e a incorporação substantiva de novas informações como requisitos imprescindíveis à viabilização, de fato, da aprendizagem significativa *por recepção.* Nunes e Santos (2006) argumentam que é mais fácil para o aluno aprender as partes de um todo mais amplo do que aprender a partir de partes desconexas, para chegar a um conceito mais geral. Nesse sentido o que é mais relevante deve ser logo introduzido e explorado através de exemplos, situações, exercícios etc. Moreira e Greca (2000) ressaltam que as idéias mais inclusivas devem ser sempre retomadas para que seja favorecida a sua progressiva diferenciação.

A reconciliação integrativa trata de absorver semelhanças e contornar diferenças entre os novos conteúdos e as idéias relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz, constituindo-se basicamente do provimento de relações que objetivam facilitar não somente a assimilação, mas, sobretudo, a compreensão das novas informações (AUSUBEL, 2003).

Como sabemos, David Ausubel, em sua teoria da aprendizagem significativa, postulou que o significado lógico do material de aprendizagem se transforma em significado psicológico quando o aluno aprende de forma significativa algum conceito. Com base nas idéias de Ausubel, Joseph Novak idealizou a estratégia dos mapas conceituais para colocar no papel esse processo de transformação psicológica (MARTINS et al., 2006).

Do ponto de vista de sua estruturação, os *mapas conceituais* apresentam-se bastante flexíveis, mas embora Moreira e Greca (op. cit.) reitere a inexistência de regras fixas para delineá-los, descreve também alguns aspectos que devem ser observados na elaboração dos mesmos. O primeiro deles aponta no sentido de que geralmente tais mapas apresentam uma estrutura hierárquica, na qual os conceitos são organizados a partir dos mais amplos, colocados na parte superior, passando pelos intermediários, até chegar aos mais específicos situados na parte inferior. Essa formatação, bem longe de representar relações de poder ou de atribuições comuns aos organogramas e fluxogramas usuais, sugere uma inequívoca observância aos princípios da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integrativa*, porquanto, para a *teoria ausubeliana*, a construção do conhecimento corresponde a uma atividade cognitiva composta por etapas organizadas de maneira seqüencial e hierárquica, interrelacionando-se desde a apreensão da nova informação até sua sistematização cerebral. A *diferenciação progressiva* corresponde exatamente ao princípio segundo o qual as idéias mais gerais e inclusivas são apresentadas antes, criando as condições necessárias para a posterior diferenciação das mesmas, conformando uma tendência natural da consciência humana quando exposta a um campo de conhecimento inteiramente novo. Já a *reconciliação integrativa* trata-se do modo como Ausubel também descreve as relações buscando apontar similaridades e diferenças entre idéias, com vistas a contornar discrepâncias reais ou imaginárias (MOREIRA e MASINI, 2001). Ou seja, gradualmente os conceitos vão se especializando e, concomitantemente, estabelecendo relações que produzem significados que configura uma situação típica de aprendizagem significativa.

A fundamentação teórica que permeia a constituição de um mapa conceitual, por inferência, leva a que os critérios concernentes ao grau de *generalidade* e *inclusividade* identifiquem as circunstâncias às quais o mesmo se destina. Isto significa dizer que, dependendo de sua abrangência ou especificidade, os mapas conceituais podem ser aplicáveis especificamente ao conteúdo de uma aula, ao planejamento de um curso de curto prazo, bem como a uma ação mais ousada, em termos de desenvolvimento de um programa educacional mais complexo (NOVAK, 2000a ; 2000b ; 2003).

Contudo, a principal propriedade de um mapa conceitual está na possibilidade que a pessoa tem de exteriorizar seus conhecimentos ao construir o seu próprio mapa, com isso, compatibilizando a formação de uma seqüência lógica de *conceitos subsunçores* e de ordenação das novas idéias do material didático capazes de direcionar significativamente a aprendizagem. Segundo corrobora Moreira (2004, p. 6), a pragmática dos mapas de conceitos converte-os em instrumentos indispensáveis para: 1) identificar a estrutura de significados aceita no contexto da matéria de ensino; 2)identificar os subsunçores (significados) necessários para a aprendizagem significativa da matéria de ensino; 3) identificar os subsunçores preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz; 4) organizar seqüencialmente o conteúdo e selecionar materiais curriculares, usando as idéias de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa como princípios programáticos; 5) ensinar usando organizadores prévios, para fazer pontes entre os significados que o aluno já tem e os que ele precisaria ter para aprender significativamente a matéria de ensino, bem como para o estabelecimento de relações explícitas entre o novo conhecimento e aquele já existente e adequado para dar significados aos novos materiais de aprendizagem. A Figura 23, mostrada na página seguinte, apresenta um mapa conceitual articulando os conceitos pertinentes a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

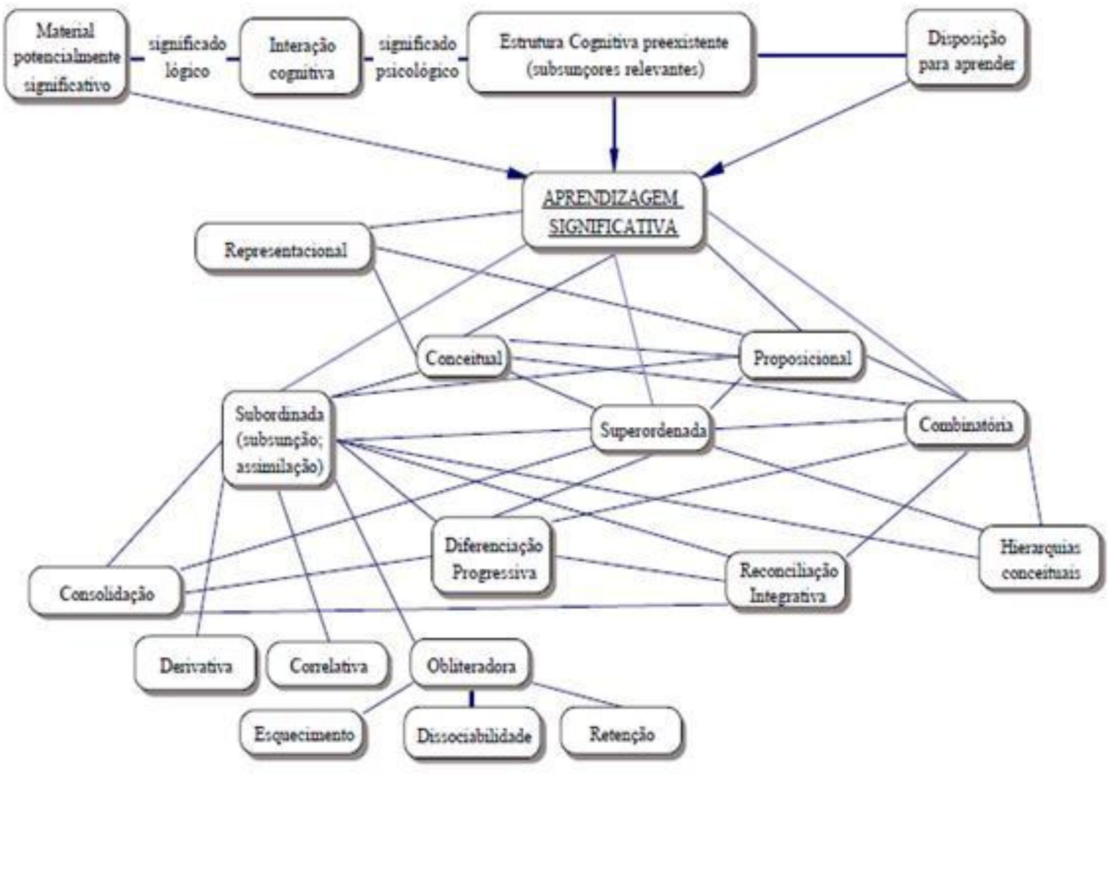


Figura 23
Mapa Conceitual
Fonte: Moreira (2004, p. 2)

Nas duas intervenções realizadas, os pressupostos de Ausubel foram adotados com o objetivo de favorecer a aprendizagem significativa. Nesse contexto um dos critérios para a escolha dos participantes foi o de possuírem subsunçores em suficiência para tal[10]. O material elaborado para apresentação e articulação dos conceitos procurou seguir os princípios da Diferenciação Progressiva e da Reconciliação Integrativa (pré-requisitos de um material potencialmente significativo). O formalismo de Clifford serviu como Organizadores Prévios para posterior inserção no estudo do Eletromagnetismo. Mapas Conceituais foram um dos instrumentos de avaliação. O percurso metodológico desse trabalho (apresentado a seguir) e análise dos dados obtidos, apresentada no capítulo 5, proporcionará mais detalhes.

[10] Para tanto, conforme mostrado na seção 4.3, o público-alvo para as duas intervenções foram alunos do terceiro ano do Ensino Médio (que tinham certa familiaridade com os conteúdos de Eletromagnetismo), alunos de graduação e pós-graduação em Física e professores, também de Física, do Ensino Médio.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA

Ao definirmos as questões que pretendemos investigar neste trabalho, a abordagem metodológica utilizada foi de natureza qualitativa que, segundo Lüdke e André (1986, p.13), "envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes", em que serão adotadas técnicas empíricas.

Além disso, a proposta desta pesquisa, do ponto de vista de seus objetivos (GIL, 1991), é caracterizada como descritiva, pois visa descrever características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis, que envolve o de técnicas padronizadas de coleta de dados (questionário e observação sistemática). E do ponto de vista dos procedimentos técnicos, teve o pesquisador como participante (observador). De acordo com Lüdke e André (1986), o pesquisador, apesar de falar sobre os objetivos da pesquisa, não revela seu total interesse, somente parte do que pretende. Esse posicionamento é tomado para que não haja alterações nos sujeitos estudados.

Os sujeitos da pesquisa foram alunos do terceiro ano do Ensino Médio, professores de Física e Matemática com formação acadêmica em nível de Mestrado, professores de Física e Matemática com formação acadêmica em nível de licenciatura e acadêmicos do curso de Licenciatura Plena em Física (prováveis futuros professores).

O percurso metodológico deste trabalho consistiu na elaboração e aplicação de duas intervenções, na forma de dois mini-cursos aos sujeitos da pesquisa, propondo a Álgebra de Clifford como um formalismo aplicável no tratamento matemático dispensado a obtenção do vetor força magnética. A teoria de aprendizagem adotada foi a de David Ausubel por ser adaptável ao processo ensino aprendizagem de conceitos associados ao estudo de eletromagnetismo através do referido formalismo. A primeira intervenção foi na

UEPB[11] em Campina Grande–PB. A segunda foi no IFMA[12] em Imperatriz – MA. O percurso metodológico, para ambas, foi desenvolvido através das ações descritas a seguir.

4.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Levantamento, seleção e leitura crítica da produção literária acerca do emprego da Álgebra em um contexto histórico, enfatizando os trabalhos de Euclides, Argand, Gauss, Hamilton e Grassmann, precursores das Álgebras de Gibbs-Heaviside e Clifford, que constituem objetos de estudo deste trabalho.

Estudo da teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

4.2 CONFECÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

4.2.1 Elaboração de Proposta de Unidade Didática (Apêndice A)

4.2.2 Elaboração e aplicação de um Questionário (Apêndice B), Questionário 1, com perguntas abertas e objetivas, visando verificar:

- Se o aluno tem algum conhecimento prévio a respeito do tema abordado; e,
- Suas expectativas sobre o mini-curso.

4.2.3 Elaboração de uma apostila contendo (Apêndice C):

- Aspectos históricos acerca da Álgebra Vetorial e Geométrica.

[11] Universidade Estadual da Paraíba
[12] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

- Os principais conceitos pertinentes à Álgebra Vetorial mostrando os seus alcances e limitações;
- Tópicos mostrando os principais aspectos da Álgebra Geométrica (Álgebra de Clifford) bem como sua relação com a de Gibbs;
- Aplicação desses tópicos na obtenção das características do vetor força magnética sobre uma carga pontual q, deslocando-se em um campo magnético $\vec{B}$, com velocidade $\vec{v}$; e,
- Apontamentos indicando inconsistências da tradicional Álgebra Vetorial, presente nos livros didáticos de Física, na apresentação do conceito de Força Magnética.

4.2.4 Lista de exercícios propondo (Apêndice D):

- Questões abertas abordando aspectos pertinentes à Álgebra Geométrica;
- Problemas retirados de publicações destinadas ao Ensino Médio para que sejam resolvidos por meio dos formalismos de Gibbs e Clifford; e,
- Construção de Mapas Conceituais.

4.2.5 Elaboração e utilização de um segundo Questionário (Apêndice E), Questionário 2, também com perguntas abertas e objetivas, buscando investigar:

- A opinião do aluno sobre o mini-curso;
- Se a Álgebra Geométrica deveria ser implementada no ensino e em que nível; e,
- A viabilidade da aplicação desse formalismo no Ensino Médio.

4.3 DESCRIÇÃO DAS INTERVENÇÕES

4.3.1 PRIMEIRA INTERVENÇÃO

Nomeada como Intervenção I, a mesma foi realizada em Campina Grande – PB, no dia 11 de Abril de 2009 com carga horária de 10 horas, sendo 6 (seis) horas presenciais (das 8:00 às 14:00 h, com 15 minutos de intervalo) e 4 (quatro) horas à distância para a execução das atividades propostas. Foram convidados alunos do curso de Licenciatura Plena em Física do Centro de Ciências e Tecnologia da UEPB e do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, desenvolvido e ministrado na Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa. Acrescenta-se que os alunos do Mestrado exercem regularmente sua prática docente como professores de Física ou Matemática no Ensino Médio (condição para serem matriculados no mesmo). A razão da escolha do público residiu no fato de acreditarmos que a viabilidade do formalismo deveria ser avaliada não só por todos aqueles que elencam o processo ensino-aprendizagem dos conteúdos de Física no Ensino Médio - no qual estão inseridos os professores – como também os futuros profissionais da área. No entanto, compareceram apenas 4 (quatro) participantes – 2 (dois) do curso de Licenciatura e 2 (dois) do Mestrado. Ao evento, se fez presente a orientadora deste trabalho.

4.3.2 SEGUNDA INTERVENÇÃO

Realizada em Imperatriz – MA, no dia 06 de Julho de 2010 com carga horária de 8 horas, sendo 4 (quatro) horas presenciais (das 8:00 às 12:00 h, com 15 minutos de intervalo) e 4 (quatro) horas à distância para a execução das atividades propostas. Foram convidamos 5 (cinco) professores do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFMA) – Campus Imperatriz - MA e 5 (cinco) alunos do terceiro ano do Ensino Técnico Integrado também do referido Instituto. O total de participantes convidados foram 10 (dez). No entanto, compareceram 5 (cinco) docentes e 3 (três) alunos.

4.4 PROPOSTA DE UNIDADE DIDÁTICA

Distribuída aos participantes no início de cada Intervenção (Apêndices A1 e A2). Foi caracterizada, principalmente, pela descrição geral de todos meios de ensino – conteúdos, procedimentos e recursos – que foram utilizados no desenvolvimento das ações educativas, em função dos objetivos pretendidos em cada mini-curso.

4.5 TEORIA DA APRENDIZAGEM APLICADA

Construção de objetos de aprendizagem considerando a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. Estes objetos de aprendizagem procuraram vincular a Álgebra Geométrica como organizadores prévios para posterior incorporação no processo ensino-aprendizagem dos conteúdos a serem abordados nas intervenções. Tal estratégia propõe a tornar a aprendizagem desses conteúdos significativa. Para tanto, foi conveniente fazer um paralelo entre Álgebra de Gibbs e a de Clifford a fim de identificar as inconsistências da Álgebra Vetorial.

4.6 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS: AVALIAÇÃO

4.6.1 Questionários aplicados aos alunos (Apêndices B e E)

4.6.2 Lista de exercícios (Apêndice D)

4.6.3 Ficha de avaliação pessoal (Apêndice F)

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com base nas subseções 4.3.1 e 4.3.2 deste trabalho, foram elaboradas duas intervenções que consistiram em um conjunto de atividades fundamentadas em aspectos históricos e matemáticos acerca dos pressupostos que sustentam a Álgebra Geométrica ou Álgebra de Clifford. Cada intervenção teve como propósito dar a cada participante significado às operações com a referida Álgebra no tratamento matemático direcionado ao estudo do vetor Força Magnética. Nas duas Intervenções, a grande maioria dos participantes desconhecia completamente a existência dessa Álgebra.

5.1 – PRIMEIRA INTERVENÇÃO[13]

Aconteceu em Campina Grande – PB, na Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Centro de Ciências e Tecnologia da UEPB, onde estiveram presentes, como participantes, alunos do curso de Licenciatura Plena em Física e do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências e Matemática. Os registros fotográficos desta intervenção encontram-se nos Apêndices H1 e H2

As ações foram divididas em momentos distintos, descritos a seguir:

5.1.1 - PRIMEIRO MOMENTO: APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO 1

Após a entrega do plano de curso (Apêndice A.1), preenchimento de Questionário, denominado aqui de Questionário 1, (Apêndice B) onde os participantes puderam expressar as suas expectativas bem como os conhecimentos prévios acerca do formalismo a ser abordado. As respostas aos

[13] Nos Apêndices H1 e H2 estão os registros fotográficos desta intervenção.

questionamentos apontaram que a metade dos participantes não tinha nenhum conhecimento prévio sobre a Álgebra de Clifford – a outra metade alegou que tinha apenas ouvido falar. Todos foram unânimes em acreditar ser um ferramental "poderoso" na descrição dos fenômenos físicos e que a intervenção iria enriquecer os seus conhecimentos. As perguntas foram:

a) Você já ouviu falar em Álgebra Geométrica ou Álgebra de Clifford?

b) A princípio, qual a noção ou o que você pensa a respeito da mesma?

c) O que você espera desse mini-curso?

As respostas ao Questionário 1 encontram-se na Tabela 1. Cada aluno foi referenciado por uma letra e as Intervenções por I e II correspondendo, respectivamente, a primeira e a segunda Intervenção. Assim, o questionário do aluno A, da primeira Intervenção foi denominado de Questionário I-A.

A duração deste momento foi de 15 (quinze) minutos.

TABELA 1- RESPOSTAS DOS PARTICIPANTES DO MINI-CURSO DA INTERVENÇÃO 1 AO QUESTIONÁRIO 1.

QUESTIONÁRIO[14]	RESPOSTAS
1-I-A OU ALUNO A	•Sim. •Uma Álgebra mais geral que a de Gibbs. Assim, uma ferramenta mais poderosa. •Poder apresentar conceitos básicos da Álgebra de Clifford, para no futuro buscar aperfeiçoamento na área.
1-I-B OU ALUNO B	•Sim •A Álgebra de Clifford é um formalismo matemático que propicia ao aprendente uma visualização dos fenômenos naturais através de seus objetos geométricos, o que facilita o aprendizado. •Poder aperfeiçoar os conhecimentos da mesma.
1-I-C OU ALUNO C	Não •Eu imagino que essa “nova” Álgebra tenha como finalidade proporcionar um novo ferramental que auxilie na compreensão de situações físicas. •Espero aumentar o meu leque de conhecimentos com relação ao estudo de Geometria.
1-I-D OU ALUNO D	•Não •Que deve ser uma outra forma de quantificar os fenômenos que nos cercam, isso para o estudo da Física. •Que amplie os meus conhecimentos no que se refere ao estudo do eletromagnetismo, e que eu possa ver esse conteúdo pela óptica dessa ferramenta matemática.

5.1.2 – SEGUNDO MOMENTO: APRESENTAÇÃO DA APOSTILA

Aos participantes, foi distribuída a Apostila, apresentada no Apêndice C e descrita no Apêndice I. Considerando que o conteúdo a ser ministrado tinha

[14] Os índices 1, I e A na palavra questionário, referem-se, respectivamente, ao questionário de número 1, da primeira intervenção do aluno A. O total de alunos na intervenção I foram quatro, então temos as letras A, B. C e D.

como escopo a aprendizagem significativa[15], esse documento faz parte de um material potencialmente significativo, ou seja, de natureza substantiva e não arbitrária[16], a ser trabalhado ao longo da Intervenção I.

Em seguida, através de Slides, foram apresentados aos participantes aspectos históricos relacionados à Álgebra Geométrica. O propósito dessa etapa foi oferecer requisitos que permitissem uma melhor compreensão acerca dos principais episódios que precederam às Álgebras Vetorial e Geométrica, bem como os fatos mais relevantes que levaram à escolha da Álgebra de Gibbs, por parte da comunidade científica de uma época, na descrição dos fenômenos físicos. Estas informações são de fundamental importância, pois, de acordo com Pagliarini (2007, p. 19):

> Através desse ensino historicamente embasado que se tem uma grande possibilidade de se atingir os estudantes de forma a lhe dar subsídios para que possam ter uma concepção mais sofisticada acerca da natureza da atividade científica (PAGLIARINI, 2007 *apud* ABD – EL – KHALICK & LEDERMAN, 2000) .

Nesse contexto, foram abordados:

- A contribuição de René Descartes no formalismo analítico oferecido à Geometria Euclidiana;
- O tributo de Argand e Gauss no estudo de um novo campo da Matemática que foi de fundamental importância na formulação das Álgebras de Clifford e Gibbs: os Números Complexos;
- O aporte desse formalismo para o desenvolvimento da análise vetorial no plano e as tentativas de estendê-la no espaço – que culminou no trabalho de Hamilton, os Quaternions;

---

[15] Quando um novo conceito interage com o conhecimento prévio, na estrutura cognitiva do aprendiz, dizemos que ocorreu o que Ausubel et al. (1978) chama de aprendizagem significativa.

[16] Ausubel (1980) argumenta que um material é substantivo quando ele está aliado às idéias relevantes em relação ao tema abordado, já contido na estrutura cognitiva do aluno. Já um material não arbitrário é aquele que é organizado através da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa.

- Os estudos de Grassmann que propõem que as grandezas físicas fossem representadas por objetos geométricos ao invés de numéricos, em que surgiu o conceito de objetos vetoriais;
- A influência dos trabalhos de Hamilton e Grassmann nos trabalhos de Gibbs-Heaviside e Clifford;
- O trabalho de Clifford e as razões pelas quais o seu formalismo não foi adotado no estudo dos fenômenos físicos; e,
- O resgate dos trabalhos de Clifford através de David Hestenes.

O segundo momento teve 45 minutos de duração. Todos os participantes foram unânimes em destacar que não tinham nenhum conhecimento prévio dos aspectos abordados, o que aponta para a necessidade da inserção de História e Filosofia das Ciências (HFC) na exposição dos conteúdos pertinentes ao estudo dos fenômenos naturais:

> A HFC pode humanizar as ciências, tornando-as mais próximas dos interesses éticos, políticos e sociais de uma comunidade [...] pode tornar as aulas de ciências mais desafiadoras e reflexivas, permitindo, desse modo, o desenvolvimento do pensamento crítico [...] pode contribuir para um entendimento mais integral de matéria científica, dando mais significado às fórmulas e as equações [...] pode melhorar a formação do professor, no sentido de melhor compreensão da estrutura das ciências (MATTHEWS, 1995 p.165).

5.1.3 - TERCEIRO MOMENTO: A ÁLGEBRA DE GIBBS

Utilizando a Apostila e slides como suporte didático, foram apresentados tópicos da Álgebra de Gibbs e seus objetos vetoriais. Considerando que todos os participantes possuíam os conceitos básicos da Álgebra Vetorial como subsunçores, a atuação teve como escopo apontar, ao longo da exposição, as incongruências intrínsecas nesse formalismo. Para tanto foram abordados:

- Sistemas de coordenadas retangulares;
- Grandezas físicas escalares e vetoriais;

- Conceito de vetor e suas propriedades;
- Adição e subtração de vetores;
- Produto de um número por um vetor;
- Produto escalar e vetorial;

O fato dos participantes demonstrarem conhecimentos prévios a respeito de propriedades de simetria de vetores contribuiu no entendimento de que o produto cruzado, ou produto vetorial entre dois vetores, não gera um vetor e sim um pseudovetor:

> De fato, decorre da definição de produto vetorial que, se três grandezas físicas são correlacionadas por esse produto, uma delas, necessariamente, possui direção e sentido convencionados. Assim, devem-se distinguir vetores que possuem direção e sentido *naturais* (por exemplo, deslocamento, velocidade, aceleração, força, campo elétrico) denominados *vetores polares* ou simplesmente *vetores,* daqueles com direção e sentido convencionados (por exemplo, deslocamento angular infinitesimal, velocidade angular, momento angular, torque, campo magnético), denominados *vetores axiais* (devido ao eixo de referência) ou *pseudovetores* (MENON, 2009 p. 4)

A ausência dessa advertência nos livros didáticos de Física, que utilizam o produto vetorial no tratamento matemático direcionado à descrição de algumas grandezas (MENON, 2009, p. 1), levou os participantes a conceberam essa inquietação com surpresa. Também nenhum dos participantes soube explicar, ou justificar, a regra da mão direita, que, concordando com Menon (2009), permanece uma incógnita com a qual os alunos simplesmente se acostumam:

> Porém, no caso do produto vetorial, o resultado é um vetor normal aos dois fatores e, pior ainda, seu sentido é *convencionado* pela "regra da mão direita". Isso não é nada intuitivo e não sendo explicado ou justificado, permanece uma incógnita com a qual os alunos, infelizmente, acabam se acostumando, assim como com algumas grandezas "estranhas", como vetores deslocamento angular (infinitesimal), velocidade angular, momento angular, torque e campo magnético (MENON, 2009 p. 3).

A duração deste momento foi de 60 minutos.

5.1.4 - QUARTO MOMENTO: PROBLEMA SOBRE FORÇA MAGNÉTICA

Nesta etapa foi apresentado, através de slides, um problema retirado do livro FÍSICA, Volume 3, Eletricidade, de autoria de Djalma Nunes Paraná, Editora Ática, 1993. Apesar de ser uma publicação antiga, retrata de forma satisfatória o perfil das questões e problemas de eletromagnetismo que são oferecidas até hoje no Ensino Médio. No nosso caso, o problema escolhido abordou o conceito de força magnética, cujo escopo era a obtenção das características do vetor força magnética que age sobre cargas elétricas em movimento ou correntes elétricas dentro de um campo magnético (Apêndice C). No processo resolutivo, foi adotado o produto vetorial de Gibbs. O objetivo da atividade foi levar ao aprendiz à reflexão de que o referido vetor, obtido através desse produto, conduz a inquietações que emanam, novamente, em problemas de simetria de vetores. Silva e Martins (2002) argumentam:

> Entre as várias leis físicas associadas com o produto vetorial, vamos considerar a expressão da força magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Alguém pode se perguntar como pode ser possível o produto entre o vetor polar e o vetor axial $\vec{B}$ produzir o vetor polar $\vec{F}$ (SILVA e MARTINS, 2002 p. 4).

Confrontando com o que foi no terceiro momento, foi ressaltado que o vetor força magnética, a luz da Álgebra de Gibbs, é na verdade um pseudo-vetor e que esse formalismo, historicamente utilizado no estudo do eletromagnetismo é, segundo Vaz (1996), uma simplificação, com imperfeições, dos formalismos de Hamilton e Grassmann.

A duração desse momento foi de 15 minutos. Não foi sugerida a resolução de mais problemas ou exercícios. Foi concedido um intervalo de 15 minutos.

5.1.5 - QUINTO MOMENTO: ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Após o intervalo, as atividades tiveram prosseguimento com a apresentação de tópicos relacionados à Álgebra Geométrica.

Inicialmente foi apresentado a Álgebra de Clifford como um formalismo matemático que considera novos objetos vetoriais[17] além de segmentos de retas orientados. Em seguida foi introduzido um novo operador chamado produto externo ou produto de Grassmann e suas respectivas propriedades. Como conseqüência desse produto, foi proporcionada a definição de um subespaço bidimensional chamado bivetor.

> A Álgebra Geométrica introduz um operador que é, em alguns casos, o oposto do produto ponto. É chamado de produto externo e ao invés de projetar um vetor sobre o outro, ele estende um vetor sobre o outro. [...] A entidade resultante é um subespaço bidimensional, que chamaremos de bivetor (SUTTER, 2003 p. 4)

Após a apresentação das propriedades desse "novo" objeto geométrico foi enfatizado que o produto vetorial, na Álgebra de Clifford, passará a ser chamado de 2-vetor, ao invés de um vetor comum[18]. Tal afirmação gerou controvérsias: alunos alegaram que seria impossível representar um vetor através de um fragmento de plano orientado, pois ele é, na verdade, um segmento de reta orientado. A inquietação foi abrandada com a apresentação do conceito de dualidade onde o dual de um objeto geométrico foi idealizado como outro objeto com o mesmo número de componentes. Dessa forma, o dual de um 2-vetor seria um 1-vetor, sendo o segundo, ortogonal ao primeiro (VAZ, 1996, p. 241). Mesmo com a ilustração de ambos mostrada em slide a equivocada associação com a regra da mão direita ainda estava presente na opinião dos participantes[19].

Uma vez definido os propósitos do trabalho, deu-se início a um processo expositivo mais detalhado dos aspectos matemáticos que norteiam a Álgebra Geométrica ou de Clifford, obedecendo a seguinte ordem:

---

[17] 2-vetores, 3-vetores e k-vetores: objetos geométricos provenientes do formalismo de Grassmann, desconsiderados por Gibbs.

[18] Até então, todos os participantes do evento concebiam que o produto entre dois vetores emanava em um escalar ou em um vetor.

[19] De fato, foi associado ao bivetor o paralelogramo definido pelos dois vetores participantes do produto. Ao dual, o pseudovetor cuja direção e sentido é obtido, segundo o formalismo de Gibbs, pela regra da mão direita. O mesmo equívoco foi verificado na segunda intervenção.

- Obtenção do produto externo entre dois vetores escritos em função de suas componentes e de seus respectivos versores num espaço euclidiano R_2, tendo como suporte as propriedades do produto externo;
- Demonstração produto geométrico ou de Clifford, tendo como conceito subsunçor o Produto Escalar entre dois vetores iguais (módulo do vetor). Para fins de clareza foi utilizado o espaço euclidiano bidimensional;
- Aplicação do Produto geométrico aos versores de um sistema; e,
- Utilização das relações obtidas para efetuar o Produto Geométrico entre dois vetores distintos, escritos como combinação linear de suas componentes e versores, em um espaço euclidiano R_2.

Após a apresentação do produto de Clifford entre dois vetores iniciou-se um debate entre os participantes, aonde se chegou a um consenso no qual:

- O Produto Geométrico emana em um escalar e um bivetor, ao contrário do Produto Vetorial de Gibbs que resulta apenas em um vetor;
- O Produto de Clifford é a soma dos Produtos de Gibbs-Heaviside (também chamado de Produto Interno, Produto Ponto ou Escalar) e de Grassmann (Produto Externo);
- Através desse produto é permissível operar com os versores; e,
- Essa operação permite um maior aprofundamento no conceito de dualidade a fim de encontrar um objeto geométrico 1-vetor, ortogonal a um determinado bivetor, cujo módulo é equivalente.

Dando continuidade às atividades foi dado um tratamento matemático mais enraizado ao conceito de dualidade, com a apresentação do operador Hodge. Diante das considerações apresentadas foi possível mostrar, de forma clara e precisa, que o objeto geométrico 1-vetor, obtido pelo produto cruzado de Gibbs é o dual 2-vetor calculado pelo produto externo de Grassmann, resolvendo o problema de simetria, característico da Álgebra Vetorial. Conforme argumenta Vaz (1996):

> [...] Uma vez que na definição da dualidade entra o elemento de volume $I = e_1 e_2 e_3$, e como este está relacionado com a orientação do espaço, quando fazemos uma inversão espacial a base $\{e_1 e_2 e_3\}$ originalmente orientada segundo a regra da mão direita muda de orientação para segundo a regra da mão esquerda,e daí $I \mapsto -I$. Como o 2-vetor $v \wedge u$ não é alterado, o vetor normal associado através da operação de dualidade passa a ser definido pela orientação oposta e, portanto $*(v \wedge u)$ muda de sinal (VAZ, 1996 p.242).

Nesse contexto foi concluído um trabalho em que os conceitos da Álgebra de Clifford teve como propósito servir de organizadores prévios[20], objetivando fazer pontes entre os significados que os participantes já tinham (os da Álgebra de Gibbs) e os que eles precisariam ter para aprender significativamente os conceitos pertinentes a obtenção do 1-vetor Força Magnética, sem as inconsistências encontradas pela Álgebra Vetorial. A duração deste momento foi de 60 minutos.

5.1.6 - SEXTO MOMENTO: PROBLEMA SOBRE FORÇA MAGNÉTICA PELA ÁLGEBRA DE CLIFFORD.

Considerando que os participantes já tinham subsunçores suficientes para a obtenção das características do vetor força magnética **F**, via Álgebra Vetorial, contraídos no estudo das grandezas contemplados pelo Eletromagnetismo, e certa familiaridade com aspectos matemáticos da Álgebra Geométrica – adquirida ao longo da apresentação do mini-curso – foi possível, utilizando o formalismo de Clifford, demonstrar que o referido vetor é o dual do 2-vetor gerado a partir da representação, no espaço euclidiano tridimensional,

---

[20]Âncoras criadas a fim de manipular a estrutura cognitiva, relacionando conceitos aparentemente não relacionáveis através da abstração (Ausubel, 1980).

das coordenadas retangulares, referentes à velocidade da carga e campo magnético.

Nesse sentido foi demonstrado, através de slides, que o problema da inversão espacial, presente na estrutura de Gibbs, estava resolvido[21]. Para tanto, foi ressaltado que:

- O produto vetorial entre dois vetores resulta em um vetor axial. Nesse caso surge uma inconsistência na álgebra de Gibbs quando aplicada a esse produto, pois o primeiro membro representa um vetor polar e o segundo membro, um vetor axial;
- Essa inconsistência desaparece na Álgebra de Clifford. Quando uma grandeza física resulta do produto geométrico de dois vetores esse produto gera um bivetor e um escalar, não outro vetor;
- O aparente problema é que o vetor representativo é sempre ortogonal àqueles que se multiplicam, mesmo apresentando a mesma magnitude do 2-vetor gerado; e,
- A solução consiste associar esse vetor representativo ao dual do 2-vetor.

Antes de o momento ser finalizado, foi resolvido, pelo ministrante, o mesmo problema (Apêndice C) apresentado na seção 5.1.4, dessa vez através do formalismo de Clifford. Esse momento teve 60 minutos de duração.

5.1.7 - SÉTIMO MOMENTO: LISTA DE EXERCÍCIOS

Ao término da apresentação dos slides foi distribuída uma Lista de Exercícios[22] (Apêndice D). O objetivo dessa atividade foi verificar:

---

[21] A entidade 1-vetor força magnética, obtida via Álgebra Geométrica, não mais se tratava de um pseudovetor uma vez que agora se invertia perante uma inversão espacial – fazendo jus ao seu caráter polar.

[22] Em função do reduzido número de alunos presentes na intervenção, foi decidido entre os participantes que a atividade seria feita em conjunto e que apenas um documento seria entregue.

[22] Diagramas conceituais idealizados por Novak e Gowin, fundamentados na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, que procuram refletir a organização conceitual de uma área de conhecimento.

- Se o material utilizado na intervenção foi potencialmente significativo, ou seja, de natureza substantiva e não arbitrária;
- Se os tópicos de Álgebra Geométrica, abordados ao longo da intervenção, mostraram eficácia como organizadores prévios – a serem articulados no estudo do vetor força magnética; e,
- Se a aprendizagem foi mecânica ou significativa.

Nesse contexto, a Lista de Exercícios foi dividida em 3 etapas: A primeira oferecendo perguntas abertas em que os participantes puderam dissertar a respeito de algumas características do formalismo abordado. Nesse aspecto foi dada uma atenção especial ao caráter idiossincrático das respostas tendo em vista a verificação de que a proposta não foi apreendida de maneira literal e arbitrária na mente dos participantes. Nesse sentido Moreira (1997) ressalta:

> [...] Na aprendizagem significativa o novo conhecimento nunca é internalizado de maneira literal, porque no momento em que passa a ter significado para o aprendiz entra em cena o componente idiossincrático da significação. Aprender significativamente implica atribuir significados e estes têm sempre componentes pessoais. Aprendizagem sem atribuição de significados pessoais, sem relação com o conhecimento preexistente, é mecânica, não significativa (MOREIRA, 1997, p. 7).

A segunda propondo problemas, retirados de livros de Física de Ensino Médio, a serem resolvidos pelo formalismo de Clifford.

Finalmente, na terceira e última parte, foi sugestionado a construção de mapas conceituais[23]: um sobre personagens e episódios que conduziram aos formalismos de Clifford e Gibbs, e outro articulando os conceitos dos formalismos de Gibbs e Clifford até a obtenção do vetor Força Magnética. Nesse sentido, foi advertido que os conceitos a serem relacionados deveriam ser dispostos de forma hierárquica obedecendo aos critérios da diferenciação progressiva[24] e da reconciliação integrativa[25].

---

[24] Princípio segundo o qual as idéias mais gerais e inclusivas são apresentadas antes, criando as condições necessárias para a posterior diferenciação das mesmas.
[25] Trata de absorver semelhanças e contornar diferenças entre os novos conteúdos e as idéias relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Todavia a não familiaridade com essa técnica de análise contribuiu para que os participantes do curso de Licenciatura tivessem grandes dificuldades na realização da atividade proposta. Em função desse entrave, os mesmos foram construídos em sala, coletivamente. A colaboração dos alunos de Mestrado – que dominavam razoavelmente a técnica – foi de grande utilidade. Para facilitar a construção e compreensão dos mapas foi utilizado o CMap Tools[26].

É interessante ressaltar que apenas os itens dissertativos e os mapas conceituais foram feitos na etapa presencial da intervenção. A segunda parte foi, a pedido dos alunos, resolvida à distância e entregue em um momento posterior. A duração desse momento – destinado às questões dissertativas e à confecção dos mapas – foi de 60 minutos.

5.1.8 - OITAVO MOMENTO: QUESTIONÁRIO 2

O último momento presencial das ações consistiu no preenchimento de um novo questionário, denominado Questionário 2, que foi preenchido em um intervalo de tempo de aproximadamente 30 minutos. De acordo com as respostas, apresentadas na Tabela 2, todos acharam o encontro interessante, pois foi apresentado um formalismo coerente e que muito pode contribuir no processo ensino-aprendizagem do conceito de força magnética e outras grandezas físicas.

Quando indagados se a Álgebra Geométrica deveria ser praticada no ensino, a resposta foi sim: Ensino Médio e Superior.

Embora todos concordassem com a possível viabilidade da proposta para o Ensino Médio, foi constatada apreensão na falta de um consenso entre comunidade científica e educadores em Ciências para que a mesma seja colocada em prática. Foram verificadas, também, inquietações a respeito da

[26] Através do computador o indivíduo pode ter a sua disposição alternativas que se revelam eficazes na construção e compartilhamento de Mapas Conceituais. Cabral & Oliveira (2003, p. 02) apontam os Softwares *CMap Tools* e *CMap Server* como uma dessas alternativas, oferecidos gratuitamente pela Internet, e descrevem suas principais características e recursos disponíveis.

aplicação desse formalismo, em função da total predominância da álgebra de Gibbs nos livros didáticos. As perguntas foram:

1) O que você achou do curso?
2) A álgebra geométrica deveria ser praticada no ensino?
3) Quais os níveis que deveria ser a sua implementação?
4) Você acharia viável para o Ensino Médio? Por quê?
5) Faça um comentário pessoal sobre essa nova álgebra.

A Tabela 1 apontou que dois dos quatro participantes da Intervenção I já tinham ouvido falar da existência do formalismo de Clifford. Isso é justificado pelo trabalho de divulgação do projeto "Álgebra de Clifford e Aprendizagem Significativa: pilares para a construção de uma nova abordagem para o ensino de Física" desenvolvido por professores do CCT da UEPB[27].

[27] Ver seção 2.1.2

TABELA 2- RESPOSTAS DOS PARTICIPANTES DO MINI-CURSO DA INTERVENÇÃO 1 AO QUESTIONÁRIO 2.

QUESTIONÁRIO	RESPOSTAS
2-I-A OU ALUNO A	•Interessante •Sim •Médio •Sim, porque desde o início do trabalho vetorial o aluno teria uma base mais direta sobre o tratamento dessas grandezas. •Certamente ela teria um grande avanço e melhoramento na concepção do aluno, mas são precisos cuidados com relação ao choque que ele pode provocar com a concepção já herdada do aluno sobre a álgebra de Gibbs.
2-I-B OU ALUNO B	•Interessante. •Sim •Médio e Superior •Sim, pois estamos diante de uma álgebra coerente. •A álgebra geométrica ou de Clifford é um formalismo matemático adequado para se aplicar em toda a física, haja em vista que ela possibilita a visualização dos fenômenos naturais como também novos métodos de resolução.
3-I-C OU ALUNO C	•Interessante •Sim •Médio •Sim, uma álgebra que corrige vários problemas deve ser levada em consideração. Deve-se levar em consideração também que para aplicá-la um consenso entre sociedade seria interessante. •Gostei muito, vou inclusive procurar estudar o assunto, pois é clara as suas vantagens.
41-I-D OU ALUNO D	•Interessante •Sim •Médio e superior •Acredito que sim, pois aborda uma nova forma de compreender as discussões que norteiam as ferramentas matemáticas necessárias ao estudo da força magnética •É algo novo e como tal gera muitas expectativas principalmente no que se refere a busca por resolução das inconsistências presentes na álgebra utilizada atualmente.

5.2 – SEGUNDA INTERVENÇÃO[28]

A Intervenção II ocorreu em Imperatriz – MA, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFMA) – Campus Imperatriz, onde estiveram presentes, como participantes, professores de Ensino Médio e Tecnológico Integrado e alunos do terceiro ano do Ensino Médio e Tecnológico Integrado. Os registros fotográficos desta Intervenção encontram-se no Apêndice H.

De forma semelhante à Intervenção I, as ações foram divididas em momentos distintos, descritos na sequencia a seguir.

5.2.1 – PRIMEIRO MOMENTO: APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO 01

Preenchimento do Questionário 01 (Apêndice C) onde os participantes puderam expressar as suas expectativas bem como os conhecimentos anteriores acerca do formalismo a ser abordado. O tempo gasto para o preenchimento foi de 15 minutos.

Ao contrário da Intervenção I, as respostas apontaram que nenhum dos participantes tinha ouvido falar sobre a Álgebra de Clifford. Uma possível justificativa para esse fato pode residir no reduzido número de publicações, em nível de Brasil, que aborde a Álgebra Geométrica como um formalismo adaptável no tratamento matemático dispensado à Física[29]:

Dessa forma, dos oito participantes[30], cinco responderam que, devido ao total desconhecimento do assunto, não tinham qualquer noção ou conceito formado que permitissem falar a respeito. Dois afirmaram que deveria ser um formalismo a ser aplicado na Física e na Geometria. Um alegou que ela deve ajudar no estudo de Forças Magnéticas.

Mesmo não conhecendo o formalismo de Clifford, todos declararam acreditar que deveria ser uma Álgebra bastante útil no aprimoramento de conceitos e na resolução de problemas. As perguntas foram as mesmas apresentadas no Questionário 01, distribuído na Intervenção I. As respostas de cada participante são apresentadas a seguir, na Tabela 3.

---

[29] Uma maior divulgação dessa álgebra através de trabalhos de pesquisa científica, nas IES que ofereçam cursos de Licenciatura Física e Matemática, poderia constituir elemento atenuante dessa realidade.

[30] Dois eram pós-graduados (em nível de mestrado) em Física; um pós-graduado (em nível de mestrado) em Matemática; um pós-graduado (em nível de doutorado) em Engenharia Elétrica; um pós graduado (em nível de especialização) em Matemática e três alunos do Instituto.

TABELA 3- RESPOSTAS DOS PARTICIPANTES DO MINI-CURSO DA INTERVENÇÃO II AO QUESTIONÁRIO 01.

QUESTIONÁRIO	RESPOSTAS
1-II-A OU ALUNO A	•Não •Sem resposta •Uma alternativa para Prática Pedagógica no que diz respeito ao Eletromagnetismo e também a análise vetorial no curso de Física para o Ensino Médio.
1-II-B OU ALUNO B	•Não •Como não tenho conhecimento da Álgebra de Clifford não posso falar a respeito. •Espero obter as noções básicas desta álgebra e ver como posso aplicá-la no cotidiano da sala de aula, bem como buscar fontes para aprofundamento de conceitos.
1-II-C OU ALUNO C	•Não •Deve ser aplicada em conceitos geométricos e/ou físicos. •Seja importante para ter mais facilidades em problemas complexos.
1-II-D OU ALUNO D	•Não. •Deve tratar de uma forma de generalizar os conceitos de Geometria. •Conhecer e aplicar os princípios e conceitos da Álgebra de Clifford.
1-II-E OU ALUNO E	•Não. •Devido ao meu desconhecimento do assunto não tenho nenhum conceito formado. •Conhecer e aprender sobre a Álgebra de Clifford, desconhecida até o momento para mim.
1-II-F OU ALUNO D	•Não •Eu penso que ela deve ajudar a encontrar soluções precisas em forças magnéticas. •Obter conhecimentos sobre essa Álgebra de Clifford e poder aplicá-la em meus estudos.
1-II-G OU ALUNO G	•Não •Nenhuma •Ter noção de um método de abordagem geométrica alternativa.
1-II-H OU ALUNO H	•Não •Não respondeu •Espero tomar conhecimento sobre essa nova visão de Álgebra Geométrica. Espero aprender sobre as novas operações que fundamentam essa álgebra bem como sua harmonia com as outras álgebras clássicas.

5.2.2 - SEGUNDO MOMENTO: APRESENTAÇÃO DA APOSTILA.

Foi distribuído, junto a apostila[31], o plano de curso (Apêndice A.2). Através do mesmo foram apresentados os objetivos; conteúdos a serem trabalhados; carga horária; aspectos metodológicos da intervenção; estratégias de avaliação e os recursos a serem utilizados.

Assim como na Intervenção I, foram apresentados aos participantes, utilizando a mesma seqüência adotada na seção 5.1.2, aspectos históricos e filosóficos acerca das Álgebras Vetorial e Geométrica buscando oferecer, ao público participante, informações a respeito de episódios relevantes que culminaram na escolha da Álgebra de Gibbs, por parte da comunidade científica de uma época, para a descrição dos fenômenos físicos. Também foi citada a ausência destas informações nos livros didáticos utilizados no Ensino Médio e Superior.

Este momento teve 30 minutos de duração. Como na Intervenção I, foi visível o quase total desconhecimento desses aspectos pelo público presente, tal constatação pôde ser verificada quando um dos partícipantes solicitou uma explicação mais detalhada do que seria "Quaternion"[32] (formalismo desenvolvido por Hamilton, essencial na descrição das duas álgebras). Mais uma vez, como citado na seção 5.1.2, ficou evidenciado o que a ausência de HFC deixa lacunas no processo ensino-aprendizagem de Ciências, como argumenta Silva e Martins (2002):

> A análise histórica do desenvolvimento do cálculo vetorial é um exemplo de como a história da ciência pode fornecer elementos úteis para a estruturação da prática pedagógica, especialmente com relação à física e matemática. O ensino tradicional produz simplificações nos conteúdos apresentados, muitas vezes torna-os impossíveis de serem entendidos pelos estudantes (SILVA e MARTINS, 2002, p.1).

---

[31] A mesma utilizada na primeira intervenção.

[32] Considerando que o autor da pergunta é professor titular da instituição e detém o título de mestre (em Física), ficou a interrogação se a pergunta se traduzia em uma dúvida ou em uma forma de mensurar o conhecimento de quem ministrou o curso.

5.2.3 - TERCEIRO MOMENTO: A ÁLGEBRA DE GIBBS.

Empregando a mesma sequencia utilizada na seção 5.1.3 e o mesmo material didático (apostila e slides) foi feita uma breve revisão dos objetos vetoriais de Gibbs. Neste momento do mini-curso, alguns dos participantes (professores do Ensino Médio Integrado) alegaram que a abordagem havia sido feita de forma superficial, dando, inclusive, sugestões de melhores estratégias na apresentação dos conceitos inerentes à Álgebra Vetorial. Tais críticas foram de grande valia, uma vez que os mesmos contribuíram na supressão de eventuais dúvidas dos três alunos presentes, sobre os aspectos matemáticos da Álgebra abordada.

Mesmo com a constatação de que os participantes tinham como conceitos subsunçores os objetos geométricos de Gibbs foi perceptível a não familiaridade com as propriedades de simetria de vetores. Isso pôde ser comprovado na não aceitação por parte dos participantes (especificamente os professores) de que o produto cruzado entre dois vetores não gera um vetor e sim um pseudovetor. Tal comportamento aponta para a necessidade da inserção dessas propriedades nos livros de Física de Ensino Médio e Superior, como também a utilização dessas propriedades para fazer um alerta sobre as lacunas presentes na Álgebra de Gibbs, nesse livros. Entre elas podemos citar a regra da mão direita, que nenhum dos participantes soube explicar ou justificar a sua utilização.

> Nos livros-texto de física e de matemática utilizados em cursos básicos universitários, as operações de multiplicação de dois vetores (produtos escalar e vetorial) são introduzidas apenas como definições, sem nenhuma referência ou discussão a respeito das razões formais e/ou motivações que levaram ao estabelecimento de tais estruturas (MENON, 2009, p. 1).

> A regra da mão direita é apenas uma regra mnemônica. [...] Na realidade, a direção do produto vetorial é de fato uma convenção. No entanto, por trás desta convenção há propriedades de simetria dos vetores não arbitrárias. Existem os vetores polares e os vetores axiais, e eles têm propriedades de simetria muito diferente (SILVA e MARTINS, 2002, p. 2).

A duração deste momento foi de 45 minutos.

5.2.4 – QUARTO MOMENTO: PROBLEMA SOBRE FORÇA MAGNÉTICA.

O mesmo problema resolvido na Intervenção I, cuja fonte foi citada na seção 5.1.2, foi apresentado aos participantes. No processo resolutivo foi adotado, mais uma vez, o produto vetorial de Gibbs. Concluída a resolução foram apresentados, como organizadores prévios, alguns tópicos referentes à simetria de vetores nos quais foram destacados os conceitos de vetor polar e vetor axial. Neste contexto foi ressaltado que um vetor polar (força, velocidade) se inverte perante uma reflexão perpendicular, enquanto um vetor axial (momento angular, campo magnético), não. Também foi esclarecido que o produto vetorial entre um vetor polar e outro axial resulta em um vetor axial (SILVA e MARTINS, 2002, p. 4). O propósito dessa intercessão foi deixar claro que o vetor força magnética, obtido pelo produto vetorial entre os vetores velocidade e campo magnético, deveria ser um vetor polar e não um axial – o que o torna um pseudo-vetor.

A duração do quarto momento foi de aproximadamente 30 minutos, também não foi sugestionada a resolução de mais problemas. Foi concedido um intervalo de 15 minutos.

5.2.5 - QUINTO MOMENTO: ÁLGEBRA DE CLIFFORD.

Após o intervalo, foi dada continuidade às atividades com a apresentação de tópicos relacionados à Álgebra Geométrica.

Basicamente foi seguida a mesma sequencia da seção 5.1.5. Após a apresentação dos objetos vetoriais de Clifford foram introduzidos os conceitos de produto externo ou produto de Grassmann, mais as suas propriedades, para posterior definição do subespaço bidimensional intitulado pela Álgebra Geométrica de bivetor ou 2-vetor – acrescido de suas características. Nesse sentido, assim como na seção 5.2.5, foi ressaltado que o produto vetorial, na Álgebra de Clifford, passará a ser chamado de 2-vetor, ao invés de um vetor comum. Em seguida, foi introduzido o conceito de dualidade onde o dual de um objeto geométrico foi apresentado como outro objeto com o mesmo número de componentes.

Tal fato gerou polêmica entre os participantes. A primeira inquietação foi manifestada quando um deles não conseguiu visualizar os três componentes de um 2-vetor em um espaço euclidiano tridimensional. A segunda, pelo mesmo participante, foi a persistente associação do 2-vetor e o seu dual com o vetor resultante, obtido pelo produto cruzado de Gibbs: O 2-vetor foi associado ao plano cuja magnitude é obtida através do produto vetorial, o vetor àquele ortogonal ao plano cujo sentido é obtido pela regra da mão direita. O que foi apresentado até aquele momento não mostrou ser suficiente para conceber uma proposta alternativa a de Gibbs.

Na tentativa de abrandar as constantes inquietações, deu-se início a um processo expositivo mais detalhado dos aspectos matemáticos que norteiam a Álgebra Geométrica ou de Clifford. Para tanto foi obedecida a mesma ordem sequencial utilizada na seção 5.1.6. Dessa forma, ao término da apresentação do produto de Clifford entre dois vetores foi aberto um espaço para cada um dos participantes manifestar as suas dúvidas a respeito do que havia sido exposto até então.

Alguns confessaram ainda não haver assimilado completamente a idéia da existência de novos objetos geométricos além de vetores e escalares (o que é perfeitamente compreensível em função da predominância paradigmática do formalismo de Gibbs). Todavia, todos os professores presentes admitiram que a exposição apresentava coerência e que seria interessante outro encontro onde os mesmos participantes, certamente, teriam maior autonomia depois de ler a apostila com mais calma. Tal sugestão, até a presente data, ainda não foi colocada em prática.

Mesmo assim, como na seção 5.1.5, foi possível demonstrar que:

- O Produto Geométrico emana em um escalar e um bivetor, ao contrário do Produto Vetorial de Gibbs que resulta apenas em um vetor;

- O produto de Clifford é a soma dos produtos de Gibbs-Heaviside (também chamado de Produto Interno, Produto Ponto ou Escalar) e de Grassmann (Produto Externo);
- Através desse produto é permissível operar com os versores; e,
- Essa operação permite um maior aprofundamento no conceito de dualidade a fim de encontrar um objeto geométrico 1-vetor, ortogonal a um determinado bivetor, cujo módulo é equivalente.

Dando continuidade às atividades foi dado um tratamento matemático mais arraigado ao conceito de dualidade, com a apresentação do operador Hodge. Dessa forma, assim como na seção 5.1.5, foi plausível demonstrar que o 1-vetor, obtido através do produto vetorial é equivalente ao inverso do dual do módulo do 2-vetor, calculado pelo produto externo ou de Grassmann. A maioria dos participantes concordou que o problema de simetria, característico da Álgebra Vetorial, foi atacado de forma coesa. Dessa forma, foi encerrado o momento em que os conceitos pertinentes à Álgebra Geométrica procuraram servir de organizadores prévios para o estabelecimento de relações entre o formalismo de Clifford e Gibbs a fim de proporcionar novos significados no tratamento matemático dispensado à obtenção do 1-vetor força magnética, sem as inconsistências inerentes da Álgebra Vetorial. Esse momento teve 45 minutos de duração.

5.2.6 – SEXTO MOMENTO: O VETOR FORÇA MAGNÉTICA PELA ÁLGEBRA DE CLIFFORD.

Após a apresentação de tópicos da Álgebra Geométrica, que funcionaram como organizadores prévios para posterior incorporação do formalismo de Clifford no estudo do Eletromagnetismo, especificamente na obtenção das características do 1-vetor Força Magnética, foi demonstrado que o referido vetor é, na verdade, o dual do 2-vetor gerado a partir da representação, no espaço euclidiano tridimensional, das coordenadas retangulares referentes a velocidade da carga e campo magnético. A duração desse momento foi de 15 minutos.

5.2.7 – SÉTIMO MOMENTO: A LISTA DE EXERCÍCIOS.

Através de slides foi demonstrado o processo resolutivo do mesmo problema citado na seção 5.2.4, desta vez utilizando a Álgebra de Clifford. Em seguida, foi distribuída a Lista de Exercícios[33] que foi parcialmente respondida de forma coletiva. Nesse sentido, vale ressaltar que as questões dissertativas, propostas na primeira parte da lista, foram respondidas ficando em aberto os problemas de eletromagnetismo, a serem resolvidos pela Álgebra de Clifford, oferecidos na segunda parte. Sendo a proposta de construção de mapas conceituais parte integrante da mesma, a apresentação dessa estratégia potencialmente facilitadora de uma aprendizagem significativa (MOREIRA, 1997, p. 1) provocou inquietação nos participantes – os mesmos alegaram o quase total desconhecimento da existência dessa técnica como instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem e meio de avaliação (MOREIRA 1997, apud MOREIRA e BUCHWEITZ, 1993). Tal inquietação tornou o processo resolutivo da última parte da lista credora de um acompanhamento especial por parte do ministrante da intervenção[34]. Nesse contexto, os Mapas foram construídos em sala (Apêndice G), coletivamente, sob o acompanhamento do ministrante. Isso aponta para a necessidade de maior difusão da fundamentação teórica que permeia a constituição dos Mapas conceituais objetivando uma maior utilização desse organismo no processo ensino aprendizagem dos conceitos de Física no quotidiano da prática docente. Este momento teve 45 minutos de duração.

5.2.8 – OITAVO MOMENTO: QUESTIONÁRIO 02.

[33]A mesma aplicada na primeira intervenção.
[34] Vale lembrar que na primeira intervenção a metade da turma já conhecia as técnicas de construção e as formas de utilização dos mapas.

O último momento presencial da Intervenção II foi o preenchimento do Questionário 02 (Apêndice E), que durou 20 minutos, semelhante ao proposto na seção 5.1.8. De acordo com as respostas, dos oito participantes, sete acharam o curso interessante, porém, apenas um respondeu que o aplicaria. Talvez este um quase consenso seja justificado pela total ausência de conhecimentos prévios a respeito desse formalismo ou pela metodologia aplicada na intervenção. Provavelmente esse problema teria sido atenuado se a Apostila tivesse sido distribuída com uma ou duas semanas de antecedência, antes da Intervenção, para um estudo prévio por parte dos participantes.

Quando indagados se a Álgebra Geométrica deveria ser implementada no ensino, sete participantes responderam que sim (um alegou que precisava de uma reflexão mais cuidadosa). Todavia, quatro acreditaram na viabilidade da proposta para o Ensino Médio. O primeiro justificou que deveria substituir o tradicional estudo de vetores. O segundo alegou que proporcionaria melhor entendimento no estudo de vetores e, consequentemente, no estudo do eletromagnetismo. O terceiro concebeu a viabilidade com ressalvas, argumentando que seria necessária a inserção de produto escalar e vetorial – o que leva a crer que o mesmo imaginou a Álgebra de Gibbs como um pré-requisito da Álgebra de Clifford. O quarto destacou que deve existir uma adequação do material antes de ser aplicado – nesse caso o participante acredita que o material utilizado na exposição de conceitos ao longo da intervenção não seria potencialmente significativo para ser utilizado em turmas de Ensino Médio.

Dos quatro que não acreditaram na compatibilidade da proposta para esse nível de ensino, três argumentaram que os alunos não têm conhecimentos prévios de vetores, Cálculo Vetorial e Álgebra Linear – mais uma vez, ficou constatada a percepção da Álgebra de Gibbs como conceitos subsunçores para posterior incorporação da Álgebra de Clifford na estrutura cognitiva do aprendiz. Um achou que não seria viável, mas não explicou o porquê. As repostas aos questionários, referente à cada participante, constam na Tabela 4.

TABELA 4- RESPOSTAS DOS PARTICIPANTES DO MINI-CURSO DA INTERVENÇÃO 2 AO QUESTIONÁRIO 2.

QUESTIONÁRIO	RESPOSTAS
2-II-A OU ALUNO A	•Aplicaria •Sim •Médio •Sim, desde que houvesse o ensino de produto escalar e vetorial;
2-II-B OU ALUNO B	Interessante •Sim •Superior •Não! Devido a falta de conhecimento prévio considerado necessário sobre vetores. •Interessante! Uma nova ferramenta que possibilita uma nova maneira de tratar matematicamente processos físicos. Merece uma atenção especial na possibilidade de sua aplicação.
2-II-C OU ALUNO C	•Interessante •Sim •Médio •Sim! Porque ajudaria o aluno a ter um entendimento melhor sobre a força magnética, vetores e também ajudaria a achar soluções sobre problemas com vetores e força magnética. •É uma Álgebra interessante para adquirir conhecimentos importantes em vetores, força magnética.
2-II-D OU ALUNO D	•Interessante •Sim •Superior •Não, o aluno de ensino médio não tem fundamentos numéricos que lhe permitam compreender o conteúdo. •Surpreendente, trata de maneira interessante dos k-vetores em n dimensões. É muito interessante como é possível trabalhar algebricamente com diferentes figuras geométricas.
1-II-E OU ALUNO E	•Interessante •Sim •Superior •Acho que sim, porém deve ser implementado através de material didático adequado. •Achei interessante, porém preciso ter mais tempo para um melhor entendimento. Acredito que após o melhor entendimento seja possível fazer melhores considerações.
2-II-F OU ALUNO D	•Interessante •Sim •Médio •Sim, pois como vetores são dados também no ensino médio, poderia ser aplicado nele. •Pode até parecer complexa, mas se bem explicada será entendida.
1-II-G OU ALUNO G	•Interessante •Sim Superior •Penso que não é viável por falta de uma base matemática consistente de cálculo vetorial e Álgebra Linear. •Como uma primeira visão do tema, achei interessante sendo que o mesmo despertou minha curiosidade para buscar uma visão mais aprofundada.
2-II-H OU ALUNO H	•Interessante •Preciso de uma reflexão mais cuidadosa. •Superior •É possível •Na verdade eu precisaria ver com mais cuidado, mais detalhe, mas observando superficialmente ela oferece uma visão mais ampla em alguns aspectos.

Finalmente, ao fazerem um comentário pessoal sobre a nova Álgebra, todos a acharam interessante, apesar de ter-lhes parecido complexa. Mesmo assim, mostraram interesse em se aprofundar no assunto, pois acreditaram ser um formalismo eficiente no tratamento matemático dos processos físicos. É provável que a completa falta de conhecimentos prévios a respeito desse “novo” formalismo, a total predominância da Álgebra Vetorial na história acadêmica dos participantes, bem como a metodologia adotada na intervenção tenha contribuído em eventuais conflitos na assimilação dos conceitos apresentados. Esta suposição pode ser justificada quando um dos participantes acrescentou em seus comentários que a viabilidade da sua aplicação no Ensino Médio dependia em uma aplicação prévia no Ensino Superior para que essa Álgebra se tornasse mais popular que o Cálculo Vetorial.

Todos os aspectos didáticos e metodológicos, atitudes e comportamentos, além de observações adicionais acerca de cada conteúdo abordado nas duas Intervenções, foram anotadas em fichas de avaliação individual, apresentada no Apêndice F e preenchidas no Apêndice J.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É notória que a estrutura matemática de Clifford supre todas as lacunas deixadas por Gibbs na obtenção das características do vetor força magnética, proporcionando maior significado no processo ensino aprendizagem. Isso indica que esse formalismo é perfeitamente adaptável para a obtenção de outras grandezas no estudo dos fenômenos físicos. Apesar de aparentar tratar-se de uma álgebra complexa, por considerar novos objetos geométricos, seus conceitos podem tornar-se significativos se aplicados em turmas de Ensino Médio, como inferiram alguns participantes das intervenções realizadas nas duas cidades. O uso integrado de Mapas Conceituais pode constituir uma estratégia didática eficiente, pois além de explorar de forma hierárquica a articulação dos conceitos na estrutura cognitiva do aprendiz, constitui de um eficaz coadjuvante na apresentação dos conceitos em sala de aula.

Todavia, de acordo com os resultados obtidos, existe um longo caminho a ser percorrido para democratização da proposta apresentada nesse estudo. De acordo com os dados coletados, o primeiro entrave é a total predominância da Álgebra de Gibbs nos livros didáticos que tratam do estudo do Eletromagnetismo. Nessa direção, os resultados obtidos revelaram o total desconhecimento, por parte do público-alvo, dos aspectos históricos e filosóficos que precederam a Álgebra Vetorial, indicando que o saber a ser ensinado, que se faz por meio de livros-texto e manuais de ensino, omitem os processos que levaram ao referido formalismo. Dessa forma, o que foi produzido por Gibbs ainda é concebido como um saber aceito e estabelecido, deixando à margem qualquer pista a respeito da linha de pensamento que ele utilizou em seu trabalho. Nesse contexto, qualquer proposta de ação pedagógica fundamentada no formalismo de Clifford, não deve preterir episódios e personagens que o antecederam. O uso de mapas conceituais nessa etapa do trabalho é de fundamental importância.

A formação acadêmica é condição necessária à prática docente. Nessa direção, foi argumentado por um participante que a viabilidade da aplicação da Álgebra Geométrica no Ensino Médio dependia em uma aplicação prévia no Ensino Superior para que essa estrutura se tornasse mais popular que a

Álgebra Vetorial. Mesmo considerando que essa argumentação seja decorrente de possíveis de falhas metodológicas na aplicação da Intervenção II, é plausível considerar que a falta de um consenso entre educadores e comunidade científica constitua em um segundo empecilho.

Uma reformulação na Grade Curricular dos cursos de Licenciatura em Física, propondo a utilização da Álgebra de Clifford ainda nos primeiros períodos, seria um passo significativo para o surgimento de publicações que viessem popularizar esse formalismo. Tal procedimento evitaria a equivocada concepção que a Álgebra de Gibbs é pré-requisito da Álgebra de Clifford, como foi evidenciado no preenchimento dos Questionários.

É inquestionável a eficácia do uso integrado de mapas conceituais na apresentação dos conceitos e avaliação da aprendizagem, como foi citado no primeiro parágrafo desse capítulo. No entanto, a falta de familiaridade com esse recurso didático causou inquietações no público-alvo. É recomendável um trabalho prévio, objetivando uma maior desenvoltura por parte dos integrantes de turma, em outra intervenção.

Entretanto, a estrutura desta álgebra permite uma modelagem matemática mais intuitiva, que tem como característica a representação e manipulação de conceitos geométricos básicos, tais como: magnitude, direção e sentido. Além disso, permite o aprofundamento do conceito físico sem a necessidade de outro sistema matemático.

O texto é finalizado deixando a proposta para que novos trabalhos sejam desenvolvidos, sob a luz desse formalismo, objetivando a obtenção de novas grandezas físicas, contempladas no processo ensino aprendizagem de Física no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

AFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Física Matemática: métodos matemáticos para Engenharia e Física**, Rio de Janeiro, Elaviser, 2007. 900p.

ALVES FILHO, J.P. **Regras da Transposição Didática Aplicadas ao Laboratório Didático.** Cad.Cat.Ens.Fís.,v.17, n.2 p.174-188, ago.2000.

AUSUBEL, David P. ***Aquisição e Retenção do Conhecimento: uma perspectiva cognitiva*.** Tradução Lígia Teopisto. Lisboa: Editora Plátano, 2003.

AUSUBEL, David P., NOVAK, Joseph, D. ;HANESIAN, Helen . **Educational psychology: a cognitive view.** 2a ed. New York: Holt, Rinehart and Winston. 1978. 733p.

AUSUBEL, David Paul, Novak, Joseph e Hanesian, Helen. **Psicologia Educacional**, Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BRASIL. **Lei das Diretrizes e Bases da Educação (LDB)**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação e Cultura. Brasília, 2006.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Física**. Ministério da Educação. Secretaria da Educação e Cultura. Brasília, 1998.

CABRAL, Anderson R. Y.; OLIVEIRA, Taiana R. **Como criar Mapas Conceituais usando o Cmap Tools versão 3.x.** Universidade Luterana do Brasil – ULBRA; Curso Sistemas de Informação; Guaíba, 2003.

DORAN, C. & LASENBY, A. **Physical Applications of Geometric Álgebra.** Disponível em: www.mrao.cam.ac.uk/~clifford/ptIIIcourse (Acesso em 07/2009).

DORAN, C. & LASENBY, A. **Geometric Algebra for Physicists**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

Fávero, MH & Souza, CMSG (2001). **A resolução de problemas em Física: revisão de pesquisa, análise e proposta metodológica.** Investigações em Ensino de Ciências, vol. 6, no. 1, jan./abr., pp. 143-196.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar Projetos de Pesquisa.** 3 ed. São Paulo: Atlas, 1991.

HESTENES, David. **New Foundations for Classical Mechanics**. London: Kluwer Academic Publishers, 2nd Edition, 1999. *Space-Time Algebra*, New York: Gordon & Breach, 1989.

HESTENES, David. **Multivector Functions,** J. Math. Anal. And Appl. **24**, 467-473 (1968)

HESTENES, David. **Vectors, Spinors and Complex Number in Classical and Quantum Physics,** Am. J. Phys. 39, 1013-1028 (1967)

HESTENES, David. **Reforming the Mathematical Language of Physics**, Am. J. Phys. 71 (2), 104-121 2003.

HESTENES, David. **Spacetime Physics with Geometric Algebra**, Am. J. Phys. 71 (7), 691-714 2003.

HESTENES, David. & SOBCZYK, Garret. **Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics.** London: Kluwer Academic Publishers, Reprinted, 1999.

HÜLSENDEGER, Margarete Jerusa Varela Centeno. **Pós e contras da utilização da História das Ciências no ensino de Física.** Disponível em: http://www.cienciamao.usp.br/ (acesso: 05/2008).

VAZ, Jr., **A Álgebra Geométrica do Espaço Tempo e Teoria da Relatividade.** Revista Brasileira de Ensino de Física, 22, 234 (1997).

LUDKE M. & ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas,** São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, Kleber Daum. **Análise Vetorial em Física.** Disponível em http://www.ebah.com.br/analise-vetorial-em-fisica-kleber-daum-machado-pdf-a21851.html (acesso em 04/2009).

MATHEUS, T. A. M. et al**.** **A Resolução de situações problemáticas experimentais em Física Geral à luz da Teoria dos Campos Conceituais.** XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física. Porto Alegre: 2005. Anais. P. 10 - 18.

MATTHEWS, Michel R., **História Filosofia e Ensino de Ciências: A tendência atual de reaproximação. Cad. Cat. Ens. Fís., v. 12, n. 3: p. 164-214, dez. 1995.**

MENON, M. J. **Sobre as origens das definições produtos escalar e vetorial**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2305 (2009), Brasil.

MOREIRA, M.A. e MASINI, E.F.S. (2001) **Aprendizagem Significativa: A Teoria de Aprendizagem de David Ausubel.** São Paulo: Centauro Editora. 2ª edição.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem Significativa Subversiva**. Série Estudos – periódico do mestrado em educação da UCDB. Campo Grande, n. 21, p. 15-32, 2006.

MOREIRA, Marco Antonio. **Conferência de encerramento do IV Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa**. Maragogi, AL, Brasil, 8 a 12 de setembro de 2003.

MOREIRA, Marco Antonio. Aprendizagem Significativa Crítica. Disponível em http://vicenterisi.googlepages.com/aprend_signif-PostWeingartner.pdf. (Acesso em: 05/2009).

MOREIRA, Marco A.; GRECA, Ileana M. **Introdução à Mecânica Quântica: seria o caso de evitar a aprendizagem significativa (subordinada)?** Trabalho apresentado no III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significatica. Peniche, Portugal, 11 a 15 de setembro de 2000.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem Significativa: da visão clássica à visão crítica.** Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/visaoclasicavisaocritica.pdf (Acesso em: 09/2009)

NOVAK, J. D. ; Mintzes, J J e Wandersee, **J H Ensinando Ciência para a Compreensão.** Plátano Lisboa: 2000.

NOVAK, J. D.**The Promise of New Ideas and New Technology for Improving Teaching and Learning** Cell Biology Education Vol2, p122, 2003.

NOVAK, J. D. **Aprender, criar e utilizar o conhecimento. Mapas conceituais como ferramentas de facilitação nas escolas e empresas.** Lisboa: Plátano Universitária, 2000.

NUNES, Sérgio da Costa & SANTOS, Renato Pires. **Análise Pedagógica de Portais Educacionais Conforme a Teoria da Aprendizagem Significativa**. Disponível em: http://www.cinted.ufrgs.br/renote/jul2006/artigosrenote/a13_21149.pdf (Acesso em: 02/2009).

PAGLIARINI, Cassiano Resende. **Uma análise da História e Filosofia presente nos livros didáticos de Física no Ensino Médio.** Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/Ciencias/Dissertacoes/1017.pdf (Acesso em 08/2010)

PARANÁ, Djalma Nunes. **Física, Volume 3 – Eletricidade.** Editora ática, 1993. São Paulo – SP.

SILVA, Cibele Celestino & MARTINS, Roberto de Andrade. **A História da Ciência Ajudando a Desvendar algumas Dificuldades Conceituais no Ensino do Produto Vetorial.** Disponível em: http://www.ifi.unicamp.br/~ghtc/cibelle-cv2.html (Acesso: 05/2009).

SUTER, Jaap. **Geometric Algebra Primer.** Disponível em http://www.jaapsuter.com (Acesso em 05/2009).

VIEIRA, Ricardo Soares. **Tópicos de Álgebra Geométrica.** Disponível em: http://geocities.ws/rickrsv/teorias_arquivos/topicos.pdf (Acesso em 05/2009)

APÊNDICES

APÊNDICE A.1- PLANO DE CURSO

(PRIMEIRA INTERVENÇÃO)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PROPOSTA DE UNIDADE DIDÁTICA

A ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

PROFESSOR MINISTRANTE: Prof. Humberto José Gama da Silva

PROFESSORA ORIENTADORA: Profª. Drª. Morgana Lígia Freire

1 OBJETIVOS:

1.1 Mostrar os alcances e limitações da Álgebra de Gibbs-Heaviside (Álgebra Vetorial), através de uma pequena abordagem referente aos conceitos básicos desse formalismo e algumas aplicações do mesmo na resolução de exercícios pertinentes à força magnética apresentados nos livros didáticos de Física no Ensino Médio.

1.2 Apresentar os fundamentos básicos da Álgebra Geométrica (Álgebra de Clifford) para, posteriormente, relacioná-la com a de Gibbs-Heaviside.

1.3 Aplicar os conceitos pertinentes à Álgebra geométrica na resolução de exercícios referentes à força magnética apresentados em livros didáticos de Física no Ensino Médio.

1.4 Proporcionar ao aluno elementos que possibilitem, através do entendimento da essência da Álgebra de Clifford, a percepção das inconsistências inerentes da Álgebra de Gibbs.

1.5 Propor a Álgebra de Clifford como um formalismo matemático perfeitamente aplicável no processo ensino aprendizagem de alguns conceitos pertinentes ao eletromagnetismo direcionados ao Ensino Médio.

2 CONTEÚDOS:

2.1 Aspectos Históricos

2.2 A Álgebra de Gibbs e os objetos vetoriais

2.2.1 Vetor

2.2.2 Operação com vetores

i Multiplicação de um vetor por um número

ii Vetor unitário

iii Produto Escalar

iv Produto vetorial

2.3 A Álgebra de Clifford

2.3.1 As inconsistências da Álgebra de Gibbs

2.3.2 O bivetor

2.3.3 Produto externo ou produto de Grassmann

2.3.4 Propriedades do produto externo

2.3.5 Introdução do conceito de dualidade

2.3.6 Aspectos matemáticos da Álgebra de Clifford

i Obtenção do produto externo ou produto de Grassmann

ii Representação geométrica do produto de Grassmann no espaço $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

iii Produto geométrico ou produto de Clifford.

iv Operação dualidade: o operador Hodge.

v Obtenção do dual de um bivetor

2.3.7 A Álgebra de Clifford e o conceito de Força Magnética

i As inconsistências da álgebra de Gibbs na obtenção do vetor força magnética.

ii O bivetor força magnética

iii A obtenção do dual do bivetor força magnética iv A relação entre a força magnética obtida através da álgebra de Gibbs e a de Clifford.

v Aplicação.

3 CARGA HORÁRIA: 10 H.A

4 CLIENTELA:

- Alunos do curso de Licenciatura Plena em Física do Centro de Ciências e Tecnologia da UEPB.
- Alunos do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da UEPB.

5 METODOLOGIA

Aulas expositivas visando a construção de objetos de aprendizagem considerando a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. Esses objetos de aprendizagem devem, a priori, vincular a álgebra geométrica como organizadores prévios para posterior incorporação no processo ensino-aprendizagem de alguns conceitos pertinentes ao estudo da força magnética que atua sobre uma carga de prova, com velocidade constante, dentro de um campo magnético uniforme. Tal estratégia propõe tornar a aprendizagem desses conceitos potencialmente significativa e livre das inconsistências inerentes da álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside. Para tanto, é de fundamental importância o uso integrado de mapas conceituais e textos para representações múltiplas na descrição dos fenômenos a serem abordados.

6 AVALIAÇÃO

6.1 Participação dos alunos;

6.2 Freqüência;

6.3 Desempenho em exercícios práticos a serem desenvolvidos em sala ou à distância;

6.4 Construção de mapas conceituais;

6.5 Avaliação da própria aula, onde os alunos poderão expressar suas opiniões sobre as atividades desenvolvidas;

7 RECURSOS DIDÁTICOS

7.1 Quadro e pincel

7.2 Data show

7.3 Apostilas

7.4 Endereços na Internet

8 NÚMERO DE ALUNOS: 10 (previsto)

APÊNDICE A.2- PLANO DE CURSO

(SEGUNDA INTERVENÇÃO)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PROPOSTA DE UNIDADE DIDÁTICA

A ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

PROFESSOR MINISTRANTE: Prof. Humberto José Gama da Silva

PROFESSORA ORIENTADORA: Profª. Drª. Morgana Lígia Freire

1 OBJETIVOS:

1.1 Mostrar os alcances e limitações da Álgebra de Gibbs-Heaviside (Álgebra Vetorial), através de uma pequena abordagem referente aos conceitos básicos desse formalismo e algumas aplicações do mesmo na resolução de exercícios pertinentes à Força Magnética apresentados nos livros didáticos de Física no Ensino Médio.

1.2 Apresentar os fundamentos básicos da Álgebra Geométrica (Álgebra de Clifford) para, posteriormente, relacioná-la com a de Gibbs-Heaviside.

1.3 Aplicar os conceitos pertinentes à Álgebra Geométrica na resolução de exercícios referentes à Força Magnética apresentados em livros didáticos de Física no Ensino Médio.

1.4 Proporcionar ao aluno elementos que possibilitem, através do entendimento da essência da Álgebra de Clifford, a percepção das inconsistências inerentes da Álgebra de Gibbs.

1.5 Propor a Álgebra de Clifford como um formalismo matemático perfeitamente aplicável no processo ensino aprendizagem de alguns conceitos pertinentes ao Eletromagnetismo direcionados ao Ensino Médio.

2 CONTEÚDOS:

2.1 Aspectos Históricos

2.2 A Álgebra de Gibbs e os objetos vetoriais

2.2.1 Vetor

2.2.2 Operação com vetores

i Multiplicação de um vetor por um número

ii Vetor unitário

iii Produto Escalar

iv Produto vetorial

2.3 A Álgebra de Clifford

2.3.1 As inconsistências da Álgebra de Gibbs

2.3.2 O bivetor

2.3.4 Produto externo ou produto de Grassmann

2.3.5 Propriedades do produto externo

2.3.6 Introdução do conceito de dualidade

2.3.7 Aspectos matemáticos da Álgebra de Clifford

i Obtenção do produto externo ou produto de Grassmann

ii Representação geométrica do produto de Grassmann no espaço $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

iii Produto geométrico ou produto de Clifford.

iv Operação dualidade: o operador Hodge.

v Obtenção do dual de um bivetor

2.3.8 A Álgebra de Clifford e o conceito de Força Magnética

i As inconsistências da Álgebra de Gibbs na obtenção do vetor força magnética.

ii O bivetor força magnética

iii A obtenção do dual do bivetor força magnética

iv A relação entre a força magnética obtida através das Álgebras de Gibbs e a de Clifford.

v Aplicação

3 CARGA HORÁRIA: 8 H.A

4 CLIENTELA:

- Alunos do terceiro ano do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Educação Tecnológica (IFMA) – Campus Imperatriz.
- Professores do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Educação Tecnológica (IFMA) – Campus Imperatriz.

5 METODOLOGIA

Aulas expositivas visando a construção de objetos de aprendizagem considerando a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. Esses objetos de aprendizagem devem, a priori, vincular a álgebra geométrica como organizadores prévios para posterior incorporação no processo ensino-aprendizagem de alguns conceitos pertinentes ao estudo da força magnética que atua sobre uma carga de prova, com velocidade constante, dentro de um campo magnético uniforme. Tal estratégia propõe tornar a aprendizagem desses conceitos potencialmente significativa e livre das inconsistências inerentes da álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside. Para tanto, é de fundamental importância o uso integrado de mapas conceituais e textos para representações múltiplas na descrição dos fenômenos a serem abordados.

6 AVALIAÇÃO

6.1 Participação dos alunos;

6.2 Freqüência;

6.3 Desempenho em exercícios práticos a serem desenvolvidos em classe ou em casa;

6.4 Construção de mapas conceituais;

6.5 Avaliação da própria aula, onde os alunos poderão expressar suas opiniões sobre as atividades desenvolvidas;

7 RECURSOS DIDÁTICOS

7.1 Quadro e pincel

7.2 Data show

7.3 Apostilas

7.4 Endereços na Internet

8 NÚMERO DE ALUNOS: 10 (previsto)

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 1

(PARA AMBAS AS INTERVENÇÕES)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

QUESTIONÁRIO 1

01) Você já ouviu falar em álgebra geométrica ou álgebra de Clifford?

( ) Sim ( ) Não

02) A princípio qual a noção ou o que você pensa a respeito da mesma?

03) O que você espera desse curso?

Obrigado por participar!

APÊNDICE C - APOSTILA ELABORADA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO PARA A FORÇA MAGNÉTICA

1. INTRODUÇÃO

A Física utiliza a Matemática na descrição dos fenômenos naturais, o que aponta para o reconhecimento da Matemática como elemento de fundamental importância na compreensão desses fenômenos. Todavia, o processo metodológico direcionado ao processo ensino-aprendizagem de alguns conteúdos do domínio da Física muitas vezes emprega um ferramental matemático nem sempre apropriado. Um exemplo clássico é o uso da álgebra de Gibbs-Heaviside: Mesmo com as suas incoerências ela ainda é amplamente utilizada na grande maioria dos livros didáticos do Ensino Médio e Superior.

Por outro lado, nas últimas três décadas, a Álgebra de Clifford tem sido utilizada e reconhecida como um formalismo adaptável a diferentes domínios da Física levando educadores e pesquisadores acreditar que sua introdução resultará em uma melhor compreensão dos conceitos pertinentes aos mais diversos campos da mais fundamental das ciências naturais.

Em nosso estudo direcionaremos esse formalismo ao estudo do eletromagnetismo, especificamente no tratamento do vetor força magnética $\vec{F}$ que age sobre uma carga elétrica q com velocidade $\vec{v}$ dentro de um campo magnético $\vec{B}$. Para tanto, será feita uma pequena abordagem referente aos aspectos históricos que envolvem a utilização desse “novo” recurso. Em seguida faremos um levantamento dos principais conceitos pertinentes à álgebra de Gibbs-Heaviside (álgebra vetorial) com o propósito de mostrar os seus alcances e limitações. O passo seguinte será a apresentação de tópicos mostrando os principais aspectos da álgebra geométrica (álgebra de Clifford) para, posteriormente, relacioná-la com a de Gibbs. O objetivo será apontar algumas inconsistências da álgebra vetorial usando, como suporte, o conceito de dualidade.

Nesse contexto, será resolvido um problema, retirado de uma publicação destinada ao Ensino Médio, utilizando como ferramental matemático as duas álgebras: a de Gibbs-Heaviside e a de Clifford.

2. Aspectos históricos

A história do Cálculo Vetorial remonta da Grécia Antiga com a Geometria de Euclides (Vieira, 2008). No século XVIII René Descartes deu a Geometria Euclidiana uma concepção analítica, que possibilitou maior evidência às grandezas vetoriais. No mesmo século, Jean R. Argand e Carl F. Gauss apresentaram os *Números Complexos*. De acordo com Vieira (2008, p. 02), eles perceberam que esses números poderiam ser representados por um par ordenado em um plano (Argand-Gauss), onde um dos eixos representava o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o outro o conjunto $\mathbb{I}$ dos números imaginários.

A existência e a aceitação dos números complexos pela comunidade científica estão intrinsecamente relacionadas com o fato de eles poderem ser representados na forma geométrica. Esse fato contribuiu para o desenvolvimento da Análise Vetorial em um plano e às tentativas de estendê-los no espaço (Vieira, 2008).

O intuito de descobrir uma generalização para a representação dos números complexos no espaço levou William Rowan Hamilton a descobrir os Quatérnios. Dessa forma, Vieira (2008, p. 02) argumenta que os Quatérnios de Hamilton foram de fundamental importância na estruturação do Cálculo Vetorial, pois as suas propriedades se adequavam ao estudo dos fenômenos físicos – o que contribuiu para o surgimento de novas estruturas, entre elas, a de Grassmann.

Vieira (2008, p. 03) adverte que a complexidade dos trabalhos de Grassmann e seu parco prestígio dentro da comunidade científica da época fizeram com que poucos matemáticos reconhecessem os seus trabalhos e propagassem suas idéias. Entre eles, Vieira (2008, p. 03) destaca Gibbs e Heaviside – que fizeram uso do formalismo de Grassmann na elaboração de uma estrutura popularmente conhecida como a Álgebra Vetorial, amplamente utilizada, a partir do século XIX, na descrição dos fenômenos físicos.

Todavia, na Álgebra de Gibbs-Heaviside não existia mais o primoroso formalismo inerente dos trabalhos de Grassman. Os bivetores, trivetores, entre outros, foram substituídos por apenas 1-vetores e escalares. Para Vaz (1996, p. 235), se estudarmos os trabalhos de Hamilton e Grassmann, veremos que a Álgebra Vetorial de Gibbs nada mais é do que um apanhado de conceitos disfarçados sob o manto de uma notação falaciosa. A Álgebra de Gibbs, além de não ser uma generalização dos sistemas de Hamilton e Grassmann, só funciona no sistema tridimensional e também sofre de deficiências internas ausentes naqueles sistemas.

Considerando a Álgebra Geométrica tão eficiente e isenta das inconsistências do formalismo de Gibbs, surge uma indagação: por que desde o século XIX a Álgebra Geométrica não foi adotada no estudo dos fenômenos físicos? Por que a álgebra de Gibbs foi a elegida?

Doran e Lasemby (2007, p.11) ressaltam que Clifford morreu precocemente com apenas 33 anos, no auge de seu potencial – o advento de sua álgebra foi o mesmo ano do falecimento de grandes admiradores do seu trabalho (Grassmann e Maxwell). Segundo Doran e Lasemby (2007, p.11), Gibbs gozava de excelente reputação perante a comunidade científica da época, uma vez que a sua Álgebra era de simples entendimento e se adequava à teoria do Eletromagnetismo, tornando-se “a vitrine do final do século XIX”. Já Menon (2009) ressalta que Clifford, ao falecer, provavelmente tenha deixado a sua obra incompleta. Para Vieira (2008, p. 04), os trabalhos de Clifford, assim como os de Hamilton e Grassmann, eram bastante complexos para a época em que foram publicados.

Chegada a era da relatividade especial, os físicos perceberam que era necessário um sistema capaz de trabalhar com o espaço quadrimensional. Mas as idéias de Clifford e Grassmann não se faziam presentes, nessa geração (DORAN e LASEMBY, 2007).

Em 1920, segundo Doran e Lasemby (2007, p.11), a Álgebra de Clifford reaparece como a Álgebra subjacente ao *quantun spin*. Em particular, as Álgebras das matrizes de Pauli e Dirac, que possuem a mesma estrutura da Álgebra Geométrica, tornaram-se indispensáveis na elaboração da teoria quântica, com a diferença que no formalismo de Clifford, o conceito de *spinnor* aparece de forma bem mais simples. Todavia estas eram tratadas apenas como álgebras, pois a forma geométrica estava perdida.

Os trabalhos de Clifford continuaram na obscuridade até o ano de 1960 quando David Hestenes começou a investigar a forma geométrica subjacente às álgebras de Pauli e Dirac e chegou a conclusão que poderia mudar os rumos da álgebra vetorial de Gibbs.

A resistência oferecida pela comunidade científica a adotar a Álgebra Geométrica da descrição dos fenômenos físicos constituiu, ao longo desses quase cinqüenta anos, um obstáculo no trabalho de Hestenes (Doran e Lasemby 2007). Segundo Doran e Lasemby (2007, p.12), a principal argumentação dos físicos é que a Álgebra Geométrica é um formalismo viável apenas na descrição de alguns fenômenos pertinentes à Mecânica Quântica.

3 Álgebra de Gibbs: Aspectos Matemáticos:

3.1 Vetor:

O conceito de vetor foi criado com o propósito de descrever grandezas que possuem propriedades geométricas como direção e sentido, impossível de serem descritas através de números. Elas recebem o nome de grandezas vetoriais.

Vetor é um segmento de reta, orientado por uma flecha, que possui um tamanho e uma orientação espacial (Machado, 2007). A representação de um vetor pode ser feita através de uma letra (maiúscula ou minúscula) com uma seta sobre ela, como em $\vec{A}$ ou $\vec{B}$. Também é possível representá-lo através de letras em negrito, como em **a** ou **B**.

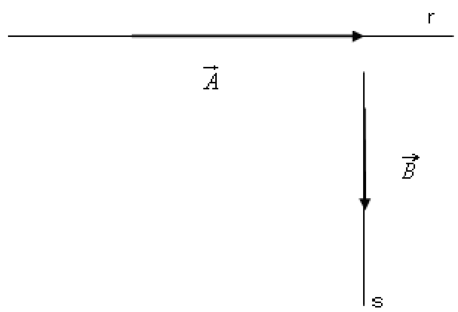


Figura 01: Representação dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$

3.2 Produto de um número por um vetor

É possível multiplicar um vetor por um número. O resultado é outro vetor, cujo módulo corresponde ao tamanho do vetor inicial multiplicado pelo respectivo número. Dessa forma, Machado (2007, p. 13) ressalta que o vetor $\vec{B} = k\vec{A}$ pode ser maior do que $\vec{A}$ se $|k| > 1$; igual a $\vec{A}$ se $|k| = 1$; e menor do que $\vec{A}$ se $|k| < 1$. Quando ocorrer $k < 0$, o produto é um vetor cujo sentido é contrário ao inicial. Se $k = 0$, o resultado é um vetor nulo, conforme mostra a figura 02.

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{A}, \vec{C} = 2\vec{A}, \vec{D} = 1\vec{A}, \vec{E} = -1\vec{A}$$

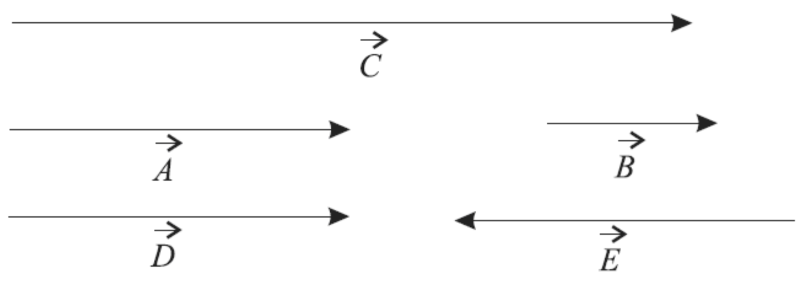


Figura 02: Multiplicação de um número por um vetor
Fonte: Machado (2007, p. 13)

A propriedade da multiplicação de um número por um vetor possibilita a definição de um vetor unitário. O vetor unitário, com módulo igual a 1, também é chamado de *versor*. Dessa forma, admitindo a existência de um vetor $\vec{A}$ de módulo igual a 1 é perfeitamente possível escrever:

$$\left|\vec{A}\right| = 1 \qquad \text{ou} \qquad A$$

A sua representação também pode ser um vetor qualquer V , que define certa orientação no espaço. Dessa forma, considerando $\left|\vec{V}\right| = 1$, é possível escrever:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}V \text{ , } \vec{B} = 2V \text{ , } \vec{C} = -V \text{ , } \vec{D} = -V$$

Considere um sistema de eixos coordenados x, y, z. Convencionou-se que o versor na direção x é representado por $\hat{i}$; na direção y, representado por j e na direção z, por k. O conjunto desses versores forma uma base para o espaço tridimensional, representada por $\mathbb{R}3 = \left\{\hat{i}, j, k\right\}$.

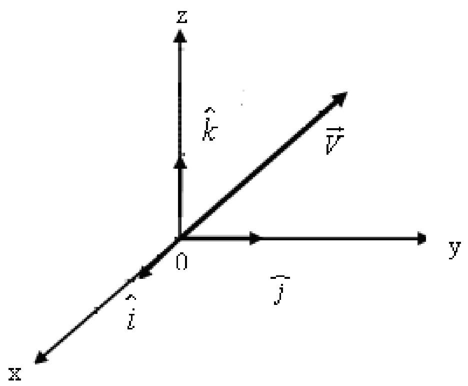


Figura 03: Os versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ para um sistema de coordenadas retangulares

Assim o vetor $\vec{V}$ com origem em 0 de um sistema de eixos coordenados, conforme mostrado na Figura 03, pode ser escrito em função das suas componentes (x,y,z) e de seus respectivos versores (i, j, k) da seguinte forma:

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y j + V_z k \qquad (01)$$

O módulo do vetor $\vec{V}$, ou de qualquer outro no espaço R_3, é encontrado pela versão tridimensional do Teorema de Pitágoras:

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}} \qquad (02)$$

3.3 Produto Escalar

Consiste na projeção de um vetor sobre o outro. Também é conhecido como produto ponto.

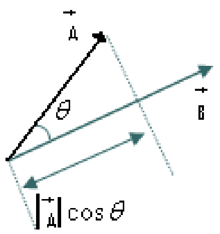


Figura 04: Projeção do vetor $\vec{A}$ sobre o vetor $\vec{B}$

No produto escalar o resultado é um número real. Para dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, sua definição é:

$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta = AB\cos\theta \qquad (03)$$

Considere o produto escalar de versores na base $R_3 = \left\{\hat{i}, j, k\right\}$. Conforme mostrado na Figura 03, estes versores, de módulo 1, são ortogonais. Uma base, com essas características, é denominada *ortonormal*. Dessa forma, o produto escalar entre os vários versores é:

$$\begin{aligned}
&\hat{i}.\hat{i} = 1\\
&\hat{i}.j = j.\hat{i} = 0\\
&j.j = 1\\
&\hat{i}.k = k.\hat{i} = 0\\
&k.k = 1\\
&j.k = k.j = 0
\end{aligned} \qquad (04)$$

Admitindo dois vetores $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y j + A_z k$ e $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y j + B_z k$, o produto escalar entre os dois é:

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\,j + A_z\,k).(B_x\hat{i} + B_y\,j + B_z\,k) \qquad (05)$$

Usando a propriedade distributiva na equação 05 e fazendo o produto escalar entre os versores como mostrado na equação 04, obtemos:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (06)$$

É possível utilizar a definição de produto escalar para encontrar o módulo de um vetor:

$$\vec{B}.\vec{B} = \left|\vec{B}\right|^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$
$$\left|\vec{B}\right| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

(07)

3.4 Produto vetorial:

Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, de origens coincidentes, que formam entre si um ângulo θ diferente de 0 e 360°, definem um paralelogramo (Figura 05). A área correspondente a esse paralelogramo é o módulo do produto vetorial C, representado por:

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| sen\theta$$

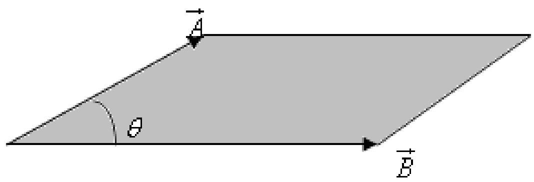


Figura 05: Paralelogramo definido pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$

O vetor resultante obtido é, por definição, ortogonal ao plano que contém os dois vetores, estabelecendo, dessa forma, a sua direção.

Utilizando a expressão que define o produto vetorial, é possível estabelecer uma relação entre os versores, semelhante ao que foi feito no produto escalar. Se os vetores estão escritos numa base $R_3 = \left\{\hat{i}, j, k\right\}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{i} &= 0 \\ j \times j &= 0 \\ k \times k &= 0 \end{aligned} \tag{08}$$

Ou seja, o produto vetorial de um versor por ele mesmo é nulo. Significa que eles estão dispostos em paralelo. O sentido é obtido pela regra da mão direita, Figura 06, como explica Machado (2004, p. 41):

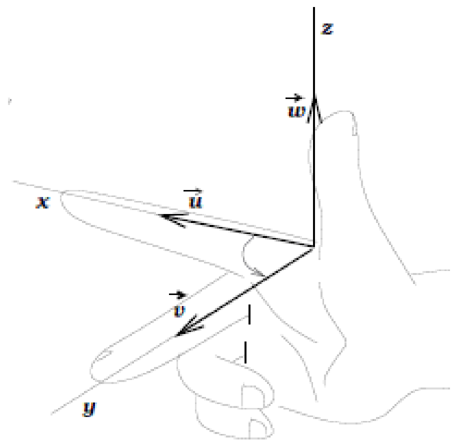


Figura 06: Regra da mão direita
Fonte: Machado (2004, p. 41)

Pela regra da mão direita é possível obter:

$$\begin{array}{lll} \hat{i} \times j = k & j \times k = \hat{i} & k \times \hat{i} = j \\ j \times \hat{i} = -k & k \times j = -\hat{i} & \hat{i} \times k = -j \end{array} \tag{09}$$

Considere dois vetores $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y j + A_z k$ e $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y j + B_z k$. O produto vetorial entre eles é:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y j+A_z k)\times(B_x\hat{i}+B_y j+B_z k) \qquad (10)$$

Utilizando a propriedade distributiva na última equação e fazendo o produto vetorial entre os versores, temos:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)j+(A_xB_y-A_yB_x)k \qquad (11)$$

Diante das considerações feitas até agora, algumas inquietações surgem:

- O produto cruzado entre dois vetores não gera um vetor, e sim um pseudo-vetor;
-
- Observando atentamente a Figura 05, se invertermos os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o vetor $\vec{C}$ não se inverte;

- A regra da mão direita não é explicada ou justificada, permanecendo, dessa forma, uma incógnita.

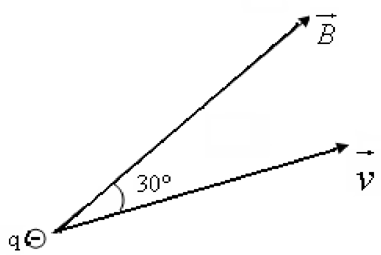
Observe o exemplo a seguir:

4. Aplicação

Na figura, o vetor indução magnética tem intensidade B = 1,0 T e o elétron de carga q = -1,6 . 10^{-19} C se desloca com velocidade v = 10 m/s. Caracterize o vetor força magnética agindo sobre o elétron.

Dados:

B = 1T
q = -1,6 . 10^{-19}C
v = 10 m/s

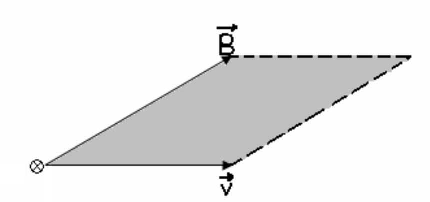


F = qvBsenθ

F = -1,6 . 10^{-19} . 10 . 1 sen30°

F = -8.10^{-19} N

O módulo é igual a:

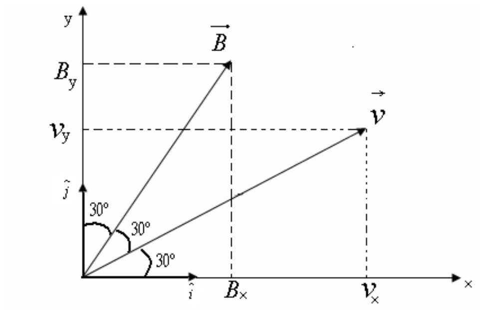


$F = 8.10^{-19} N$

Direção: perpendicular ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$

Sentido: Definido pela Regra da Mão Direita: entrando no plano em função do sinal da carga q

O mesmo problema pode ser resolvido pelo produto vetorial, sento os fatores expressos como combinação linear de seus versores.



$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y j$

$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y j$

Onde :

$$v_x = \vec{v}\cos 30^o \rightarrow v_x = 10.\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow v_x = 5\sqrt{3}$$

$$v_y = \vec{v}sen\theta \rightarrow v_y = 10.\frac{1}{2} \rightarrow v_y = 5$$

$$B_x = \vec{B}cos60^o \rightarrow B_x = 1.\frac{1}{2} \rightarrow B_x = \frac{1}{2}$$

$$B_y = \vec{B}sen60^o \rightarrow B_x = 1.\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow B_x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (v_x \hat{i} + v_y j) \times (B_x \hat{i} + B_y j)$$

Aplicando a propriedade distributiva no segundo membro e fazendo o produto vetorial entre os versores:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (v_x B_y - v_y B_x)k$$

Fazendo as devidas substituições:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (5\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - 5\frac{1}{2})k$$

Finalmente encontramos:

$$\vec{v} \times \vec{B} = 5k$$

O vetor força magnética é obtido pela seguinte expressão:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Substituindo os valores:

$$\overrightarrow{F_m} = -1,6.10^{-19}.5k$$

$$\overrightarrow{F_m} = -8.10^{-19}\,k(N)$$

O módulo dessa força será:

$$F_m = 8.10^{-19}\,N$$

Direção, de acordo com a regra da mão direita, é perpendicular ao plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

O sentido é entrando no plano de acordo com o sinal de q.

5. A Álgebra de Clifford: aspectos gerais.

Para atacar inconsistências, como as que foram apontadas na seção 3.4, vamos lançar mão de um novo formalismo matemático. Esse formalismo recebe o nome de Álgebra Geométrica ou Álgebra de Clifford, em homenagem a seu precursor. Esses objetos abrangem desde os escalares até k-vetores. Alguns desses objetos representaremos a seguir:

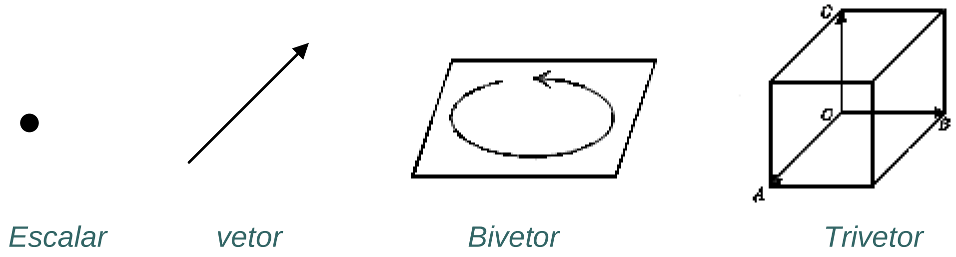


Figura 07: Objetos geométricos utilizados na álgebra de Clifford

No estudo da Álgebra de Gibbs as propriedades pertinentes aos vetores são: módulo, direção e sentido. Na álgebra geométrica, acrescentaremos uma nova característica aos objetos vetoriais: A GRADE.

A grade de um objeto vetorial permite a sua classificação de acordo com o objeto geométrico (ponto, reta, plano, triedro,) a que está associado. Logo, a grade dos escalares é 0, a grade dos vetores é 1, a grade dos bivetores é 2 e assim por diante. Sendo a grade de um k-vetor igual a k.

Nosso estudo ficará restrito aos escalares, vetores e bivetores**.**

Um bivetor é que um fragmento de plano orientado: o valor de sua área informa a magnitude da grandeza por ele representada, a direção é a mesma do plano suporte do fragmento e o sentido pode ser horário ou anti-horário. Devemos, agora, ter em mente que o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, na Álgebra de Clifford, passa a ser um 2-vetor (bivetor) ao invés de um vetor comum. Assim, considere $\vec{a}$ e $\vec{b}$ orientados no espaço:

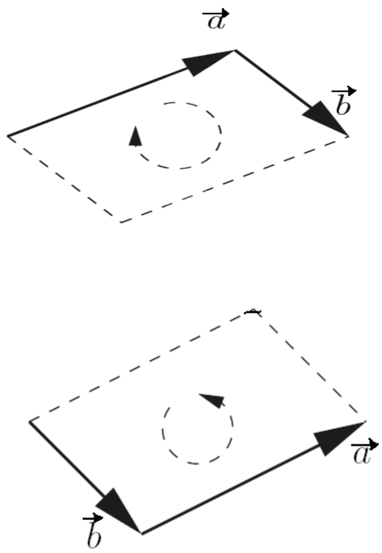


Figura 08: Fragmentos de planos orientados ou bivetores
Fonte: Sutter (2003, p. 07)

A área orientada delimitada pelo paralelogramo corresponderá ao módulo desse bivetor – que equivale ao módulo do vetor $\vec{c}$, ortogonal ao paralelogramo formado entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O sentido pode ser horário ou anti-horário.

Vamos admitir a existência de um operador, chamado de produto externo ou produto de Grassmann, para calcular o módulo desse bivetor. O produto externo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nada mais é do que a extensão do vetor $\vec{a}$ sobre o vetor $\vec{b}$ ou vice-versa, assim como o produto escalar é a projeção de um vetor sobre outro. O símbolo $\wedge$ (cunha) é usado para representá-lo. Assim, considerando dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o produto externo entre os dois é escrito como $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Em termos matemáticos o produto externo é anticomutativo:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \tag{12}$$

Se estendermos o vetor $\vec{a}$ ou o vetor $\vec{b}$ através dele mesmo não obteremos nenhuma área, logo:

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{a} &= 0 \\ \vec{b} \wedge \vec{b} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

A seguir serão apresentadas algumas propriedades importantes do produto externo:

$$(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Propriedade associativa

$$\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b})\lambda$$

Propriedade comutativa

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$$

Propriedade distributiva

Considerando o que foi exposto, surge uma inquietação: como é possível representar o vetor $\vec{c}$ através de um fragmento de plano orientado se ele é, na verdade, um segmento de reta orientado?

A resposta reside em um conceito de fundamental importância no estudo da Álgebra de Clifford: o de *dualidade*. Dentro de um mesmo sistema n-dimensional, o *dual de um objeto vetorial* consiste em outro objeto vetorial que apresenta o mesmo número de componentes. O número binomial [n k], definido como:

$$[nk] = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (13)$$

onde k é a grade e n a dimensão, determina o número de componentes de um objeto vetorial. Por exemplo, em um sistema tridimensional é possível descrever desde 0-vetores até 3-vetores.

0-vetor → N_0 = [n 0] = 1,

1-vetor → N_1 = [n 1] = 3,

2-vetor→ N_2 = [n 2] = 3,

3-vetor→ N_3 = [n 3] = 1,

É possível observar que 1-vetores e 2-vetores formam um dual, uma vez que ambos, dentro de um sistema tridimensional, apresentam três componentes.

A importância de se determinar o dual de um vetor reside no fato de que, a partir de um p-vetor, é possível definir um q-vetor dual que represente a mesma grandeza, só que de forma mais clara. Dessa forma é possível definir dualidade como sendo a operação cujo objetivo é transformar um p-vetor em um q-vetor dual. O q-vetor procurado deve ter o mesmo módulo do p-vetor original uma vez que ambos devem representar a mesma grandeza. Em um sistema tridimensional a direção do q-vetor dual é ortogonal a do p-vetor original. A escolha do sentido é arbitrária, ou seja, depende apenas de uma mera convenção. A Figura 09 ilustra um bivetor e o seu dual:

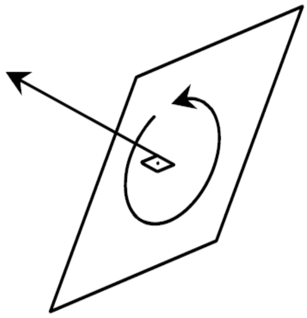


Figura 09: Um bivetor e o seu dual
Fonte: Vieira (2007, p. 22)

6. Aspectos matemáticos:

6.1 O produto de Grassmann no espaço bidimensional

A propriedade da multiplicação de um número por um vetor possibilita a definição de um vetor unitário, que foi dado o nome de versor. Numa base $\mathbb{R}^3$ a simbologia atribuída a esses versores foi $\hat{i}$, j e k. Considerando a possibilidade de se operar com sistemas n-dimensional, esses versores serão chamados, agora, de $e_1, e_2, ...e_n$. Dessa forma, admitindo um sistema n-dimensional, a base para o mesmo será. $\left\langle e_1, e_2, ...e_n \right\rangle$

Considere um sistema de eixos perpendiculares semelhante ao cartesiano, conforme ilustra a figura 10. Vamos associar à cada eixo um versor e_i, colinear ao respectivo eixo e coincidente com a origem, de forma que as coordenadas de um ponto qualquer agora se tornem um vetor (Vieira, 2008).

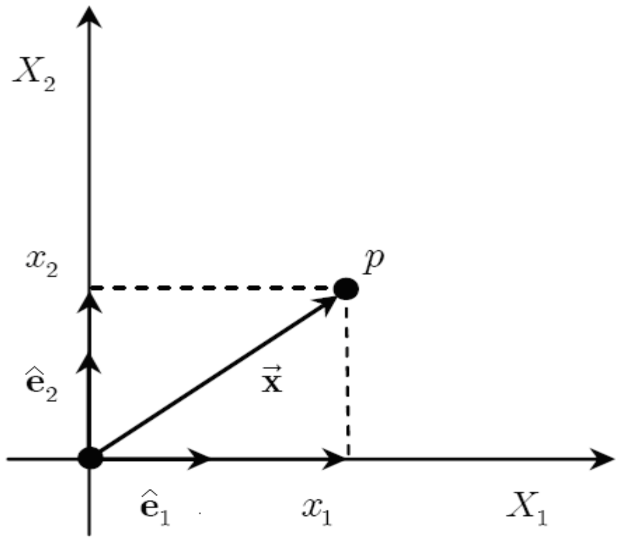


Figura 10: O sistema de coordenadas vetoriais
Fonte: Vieira (2008, p. 07)

Dessa forma um dado ponto p de um sistema pode ter a seguinte representação vetorial, em termos de suas componentes nos respectivos eixos:

$$\vec{x} = \left\langle x_1 e_1, x_2 e_2, \ldots x_n e_n \right\rangle \tag{14}$$

Como é de nosso conhecimento um dado vetor pode ser escrito como uma expressão algébrica ou combinação linear. Dessa forma, é possível representar o vetor $\vec{x}$ por:

$$\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots x_2 e_n \,. \tag{15}$$

Para um sistema n-dimensional, o módulo é obtido pelo teorema de Pitágoras.

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots (x_n)^2} \tag{16}$$

Considere dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. A Figura 11 ilustra a decomposição de dois números reais $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $b = (\beta_1, \beta_2)$ em uma base $\langle e_1, e_2 \rangle$ (SUTER, 2003).

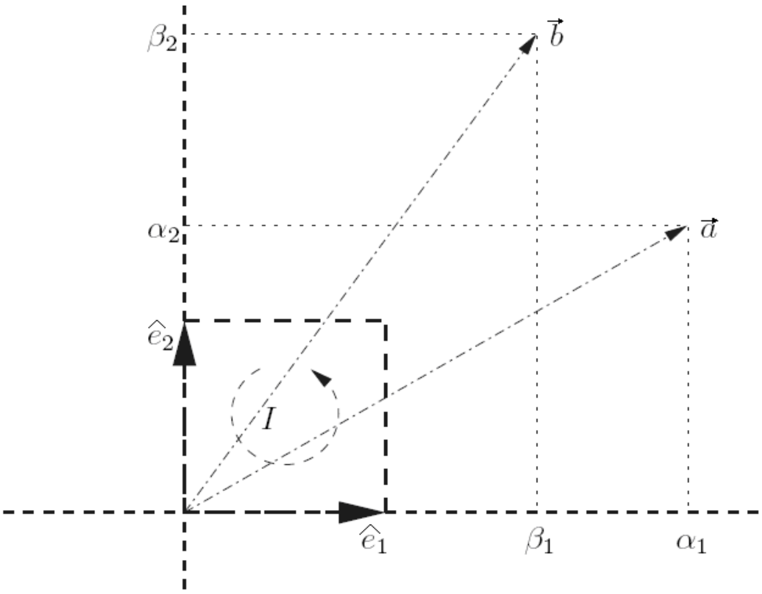


Figura 11: Uma base bidimensional
Fonte: Sutter (2003, p.09)

Decompondo esses dois vetores se obtêm:

$$\vec{a} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$
$$\vec{b} = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \qquad (17)$$

O produto externo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \wedge (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \qquad (18)$$

Aplicando as propriedades distributiva, comutativa e associativa na Equação 18, e as características do produto externo, apresentadas na seção 3.2, demonstra-se:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 \wedge e_2 \qquad (20)$$

Fazendo $e_1 \wedge e_2 = I'$, a equação 20 pode ser reescrita:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)I' \qquad (21)$$

Onde *I'* é um bivetor de área unitária.

6.2 O produto de Grassmann no espaço tridimensional

Agora, a base ortogonal consistirá de três versores que aqui chamaremos de $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$. Como resultado, segundo Suter (2003, p. 10) existirão três bases bivetoriais, as quais denominaremos de $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_{12}$, $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{13}$ e $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{23}$, conforme é mostrado na Figura 18.

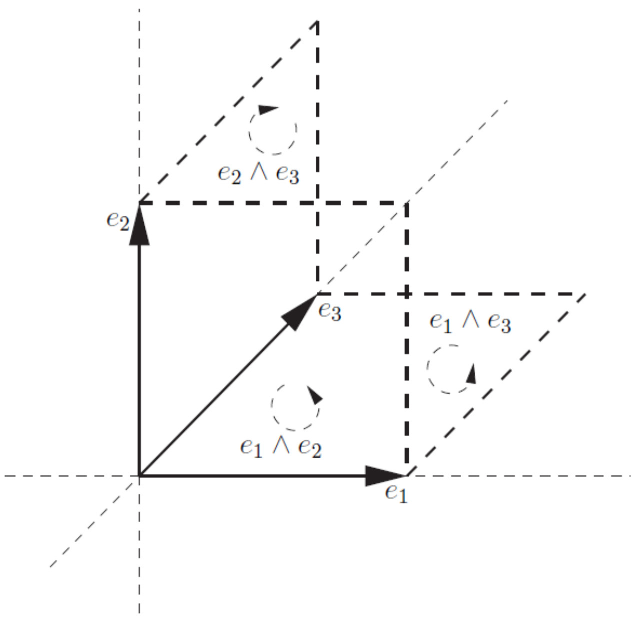


Figura 12: Uma base bivetorial tridimensional
Fonte: Sutter (2003, p. 10)

Nessa direção, considere dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em R_3.

$$\vec{a} = \alpha_1\hat{e}_1 + \alpha_2\hat{e}_2 + \alpha_3\hat{e}_3$$
$$\vec{b} = \beta_1\hat{e}_1 + \beta_2\hat{e}_2 + \beta_3\hat{e}_3 \qquad (22)$$

O produto externo entre ambos torna-se:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1\hat{e}_1 + \alpha_2\hat{e}_2 + \alpha_3\hat{e}_3) \wedge (\beta_1\hat{e}_1 + \beta_2\hat{e}_2 + \beta_3\hat{e}_3) \quad (23)$$

Utilizando a propriedade distributiva e as regras do produto externo, é possível escrever:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_1\beta_2)\hat{e}_{12} + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\hat{e}_{13} + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\hat{e}_{23} \quad (24)$$

Que é o produto externo de dois vetores em um espaço euclidiano tridimensional.

Suter (2003, p.13) argumenta que essa expressão é bastante parecida com a definição do produto vetorial de Gibbs. Mas não é a mesma coisa! O produto externo trabalha em todas as dimensões, enquanto o produto vetorial, na grande maioria de suas aplicações, é apenas definido em três dimensões. Além disso, o produto vetorial calcula um subespaço perpendicular ao invés de um paralelo. Como veremos adiante, isso pode causar problemas em algumas situações.

6.3 O PRODUTO GEOMÉTRICO OU PRODUTO DE CLIFFORD

Vamos considerar uma geometria ortogonal onde, como sabemos, é válido o Teorema de Pitágoras. Nesse sentido, considere um vetor $\vec{v}$ em um sistema bidimensional (Vieira, 2008):

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 \quad (25)$$

Comecemos a escrever o quadrado do módulo de $\vec{v}$ pela expressão:

$$\vec{v}\vec{v} = (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2)(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) = |\vec{v}|^2. \quad (26)$$

Usando a propriedade distributiva, teremos:

$$\vec{v} = v_1 v_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + v_2 v_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 = \left|\vec{v}\right|^2. \qquad (27)$$

A partir da geometria euclidiana temos que $\left|\vec{v}\right|^2 = v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2}$, dessa forma é possível obter:

$$v_1 v_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + v_2 v_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 = v_1^2 + v_2^2 \qquad (28)$$

Observe que os dois primeiros termos já fornecem o quadrado do vetor $\vec{v}$, logo isso leva à relação $v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 = 0$. Colocando em evidência os coeficientes desta relação, teremos:

$$v_1 v_2 \left(\vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1\right) = 0 \qquad (29)$$

Admitindo $\vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1 = 0$, se obtêm:

$$\left(\vec{e}_1 \vec{e}_2\right) = -\left(\vec{e}_2 \vec{e}_1\right)$$

Generalizando esses argumentos para sistemas n-dimensional encontramos, portanto, as seguintes relações que definem o produto geométrico na geometria euclidiana ortogonal:

$$\vec{e}_i \vec{e}_i = 1$$
$$\left(\vec{e}_i \vec{e}_j\right) = -\left(\vec{e}_j \vec{e}_i\right)$$

Vieira (2008, p. 11) demonstra como utilizar essas relações na obtenção do produto geométrico entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, escritos em um sistema bidimensional:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$$
$$\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2$$

Assim:

$$\vec{v}\vec{w} = \left(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2\right)\left(w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2\right). \qquad (30)$$

Usando a propriedade distributiva:

$$\vec{v}\vec{w} = v_1w_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + v_2w_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + v_1w_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + v_2w_1\vec{e}_2\vec{e}_1 \qquad (31)$$

Aplicando as relações que define o produto geométrico, encontramos:

$$\vec{v}.\vec{w} = \left(v_1w_1 + v_2w_2\right) + \left(v_1w_2 - v_2w_1\right)\vec{e}_1\vec{e}_2 \qquad (32)$$

Observe que o primeiro termo da Equação 32 corresponde a um escalar, pois não contém versores. Esse termo é comumente chamado de produto de Gibbs-Heaviside e é geralmente representado por $\vec{v}.\vec{w}$. Aqui vamos chamá-lo de produto interno. Para evitar confusões com o produto numérico, vamos representá-lo por $\vec{v} \vee \vec{w}$.

Pela geometria, o produto interno pode ser definido pela seguinte relação:

$$v \vee w = \left(v_1w_1 + v_2w_2\right) = |\vec{v}|.|\vec{w}|\cos\alpha_{vw} \qquad (33)$$

Passemos agora para o segundo termo do produto geométrico expresso na Equação 33, qual seja: $\left(v_1w_2 - v_2w_1\right)\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Esse termo é conhecido como produto externo ou produto de Grassmann. Como já é de nosso conhecimento ele pode ser representado por $|\vec{v} \wedge \vec{w}|$ e resulta num bivetor.

Se substituíssemos o formalismo analítico por outro puramente geométrico, chegaríamos a seguinte relação:

$$\left|\vec{v}\wedge\vec{w}\right|=\left(v_1w_2-v_2w_1\right)\vec{e}_1\vec{e}_2=\left|\vec{v}\right|.\left|\vec{w}\right|sen\alpha_{vw} \qquad (34)$$

Verifiquem que a Equação 34 é aquela que define o paralelogramo de lados $\left|\vec{v}\right|$ e $\left|\vec{w}\right|$ e cujo ângulo obtuso é α_{vw}. Assim o produto externo está associado a fragmentos de plano e não a segmentos de retas, logo não pode ser um vetor. Também não pode ser um escalar, pois os versores $\vec{e}_1\vec{e}_2$ garantem características vetoriais, orientando-o no sentido horário ou anti-horário. Isto tudo nos leva associar de forma inevitável uma natureza bivetorial ou 2-vetor.

Logo, o produto geométrico de dois vetores resulta em um multivetor, contendo um 0-vetor e um 2-vetor. Tal produto foi definido por Clifford como produto geométrico. Podemos escrever o produto de Clifford como uma soma entre o produto de Gibbs e Heaviside e o de Grassmann:

$$\underset{Clifford}{\vec{a}\vec{b}} = \underset{Gibbs-Heaviside}{\vec{a}\vee\vec{b}} + \underset{Grassmann}{\vec{a}\wedge\vec{b}} \qquad (35)$$

Para um sistema n-dimensional, os produtos Gibbs e Grassmann são definidos por:

$$\begin{aligned} \vec{v}\vee\vec{w} &= v_1w_1+v_2w_2+\ldots v_nw_n \\ \vec{v}\wedge\vec{w} &= \sum_{1,2}^{m,n}\left(v_iw_j-v_jw_i\right)\vec{e}_i\vec{e}_j \end{aligned} \qquad (36)$$

Vamos, a partir de agora, trabalhar com o produto geométrico. De início consideraremos o produto geométrico de dois versores iguais:

$$e_1e_1=e_1\vee e_1+e_1\wedge e_1 \qquad (37)$$

É possível obter o produto geométrico desses versores da seguinte forma:

$$e_1 e_1 = e_1 \vee e_1 + e_1 \wedge e_1$$
$$e_1 e_1 = 1 + 0$$
$$e_1 e_1 = 1 \quad (38)$$

Utilizando o mesmo raciocínio para dois versores ortogonais:

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1 \quad (39)$$

6.4 Operação dualidade

Como nos referimos no final da seção 3.2, dentro de um mesmo sistema n-dimensional, o *dual de um objeto vetorial* consiste em outro objeto vetorial que apresenta o mesmo número de componentes.

Como o módulo do q-vetor dual deve ser igual ao do p-vetor original é preferível que se opere apenas com os versores do sistema. Para tanto, multiplica-se geometricamente o p-vetor original pelos versores da base do sistema considerado. Nesse processo, os versores iguais do p-vetor e da base se cancelam de acordo com as regras da multiplicação geométrica, o resultado é o q-vetor dual com n – p versores onde todos são diferentes, em cada termo, do p-vetor de origem. O fato de estes versores serem todos diferentes dos anteriores faz com que o q-vetor seja ortogonal ao p-vetor original (VIEIRA, 2007).

O operador matemático referente à dualidade é chamado de operador Hodge (em homenagem a seu precursor) e é representado por *, onde: *= $e_1 e_2 e_3$.

Dessa forma, o dual de um vetor $\vec{c}$ qualquer é representado por:

$$*\vec{c} = (e_1 e_2 e_3)\vec{c} \quad (40)$$

Para um melhor entendimento, será calculado o dual de um bivetor cujos versores, de escolha arbitrária, serão $e_2 e_3$. Lembrando que serão utilizadas as propriedades de multiplicação geométrica tais como: $e_i e_j = -e_j e_i$ e $e_i e_i = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} *(e_2 e_3) &= e_1 e_2 e_3 \ (e_2 e_3) \\ &= e_1 (e_2 e_3) e_2 e_3 \\ &= e_1 (-e_3 e_2) e_2 e_3 \\ &= -e_1 e_3 (e_2 e_2) e_3 \\ &= -e_1 e_3 e_3 \\ &= -e_1 \end{aligned} \tag{41}$$

Da mesma forma é possível demonstrar que:

$$*\left(e_1 e_3\right) = -e_2 \quad \text{e} \quad *\left(e_1 e_2\right) = -e_3 \tag{42}$$

Diante das considerações apresentadas, vamos mostrar que o vetor $\vec{c}$, ortogonal ao paralelogramo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$,cujo módulo é obtido pelo produto vetorial de Gibbs $\vec{a} \times \vec{b}$, é equivalente ao dual do módulo do bivetor calculado através do produto de Grassmann $\vec{b} \wedge \vec{a}$. Para tanto, considere dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3$$
$$\vec{b} = b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3$$

$$*\vec{b} \wedge \vec{a} = (e_1 e_2 e_3)[(b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3) \wedge (a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3)] \tag{43}$$

Sabendo-se que:

$$e_i \wedge e_i = 0$$
$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$$

Teremos:

$$*\vec{b}\wedge\vec{a}=(e_1e_2e_3)[(b_xa_y-b_ya_x)e_1\wedge e_2+$$
$$(b_xa_z-b_za_x)e_1\wedge e_3+$$
$$(b_ya_z-b_za_y)e_2\wedge e_3] \qquad (44)$$

Lembrado as regras do produto geométrico é possível fazer a seguinte operação com os versores:

$$\begin{aligned}(e_1e_2e_3)e_1e_2 &= e_1e_2e_3e_1e_2 = e_1e_3e_1 = -e_3\\ (e_1e_2e_3)e_1e_3 &= -e_1e_2e_3e_3e_1 = -e_1e_2e_1 = e_2\\ (e_1e_2e_3)e_2e_3 &= -e_1e_2e_3e_3e_2 = -e_1e_2e_2 = -e_1\end{aligned} \qquad (45)$$

Daí:

$$*\vec{b}\wedge\vec{a}=(b_xa_y-b_ya_x)\left(-e_3\right)+(b_xa_z-b_za_x)e_2+(b_ya_z-b_za_y)\left(-e_1\right)$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)e_1+(a_zb_x-b_za_x)e_2+(a_xb_y-b_xa_y)e_3 \qquad (46)$$

E finalmente temos que:

$$\vec{a}\times\vec{b}\equiv *\vec{b}\wedge\vec{a}\equiv *^{-1}\vec{a}\wedge\vec{b} \qquad (47)$$

Esse resultado é importante, pois existem grandezas físicas associadas a vetores que são obtidas através do produto geométrico entre dois vetores.

7 Álgebra de Clifford e o Eletromagnetismo: o conceito de Força Magnética

De acordo com a formulação do Eletromagnetismo de Gibbs, em que as entidades são, essencialmente, escalares e vetoriais o vetor força magnética $\vec{F}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$, cuja área é calculada através do produto cruzado $\vec{v}$ x $\vec{B}$ ou pela área do paralelogramo definido pela expressão $\vec{v}\,\vec{B}$senθ – o escalar q influi apenas na magnitude do vetor resultante.

Em ambos os casos, a Álgebra de Gibbs aponta que a força que age sobre a carga é perpendicular ao campo e a velocidade, ou seja, ao plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Nesse contexto, conforme argumenta a maioria dos livros didáticos, de Ensino Médio e Superior, aparece uma força perpendicular ao plano que desvia a carga para fora deste plano cujo sentido é dado pela regra da mão direita.

Nesse caso específico a Álgebra de Gibbs aponta que a força que age sobre a carga é perpendicular ao campo e a velocidade, ou seja, ao plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Nesse contexto, conforme argumenta os livros didáticos, de Ensino Médio e Superior, aparece uma força perpendicular ao plano que desvia a carga para fora deste plano cujo sentido é dado pela regra da mão direita.

Entretanto a regra da mão direita é uma regra de memorização e, portanto, convencional. Por trás dessa convenção existem propriedades de simetria que serão mostradas a seguir.

Um vetor simétrico não muda de sinal em uma reflexão e um antissimético muda. Vetores polares (deslocamento, velocidade, força e campo elétrico) são simétricos com relação a um plano paralelo, pois o vetor refletido (Figura 13) possui a mesma direção e sentido que o vetor original (SILVA e MARTINS 2008):

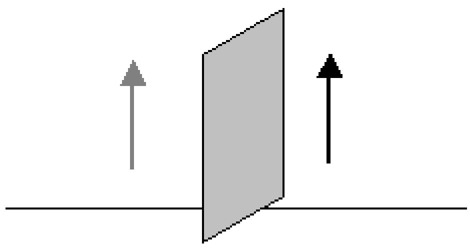


Figura 13: Um vetor polar é simétrico com respeito a uma reflexão pralela
Fonte: Silva & Martins (2002, p. 03)

Os mesmos vetores polares são antissimétricos com relação a reflexões em um plano perpendicular (Figura 14), pois a direção do vetor refletido é oposta ao original (SILVA e MARTINS, 2008).

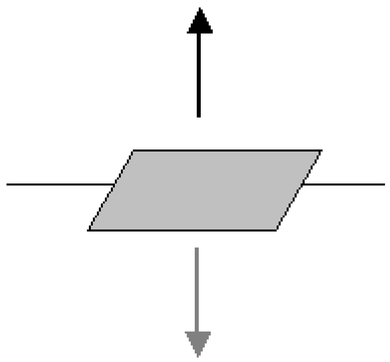


Figura 14: Um vetor polar é antissimétrico com relação a uma reflexão perpendicular
Fonte: Silva & Martins (2002, p. 03)

Já os vetores axiais (Figura 15), velocidade angular, torque, momento angular e campo magnético são antissimétricos em relação a um plano paralelo (SILVA e MARTINS, 2008):

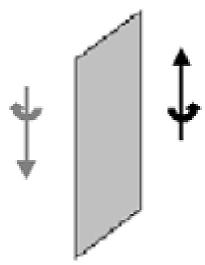


Figura 15: Um vetor axial é antissimétrico com relação a uma reflexão em um plano paralelo
Fonte: Silva & Martins (2002, p. 03)

Em relação a um plano perpendicular (Figura 16) eles são simétricos:

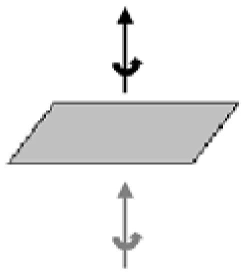


Figura 16: Um vetor axial é simétrico com relação a uma reflexão perpendicular
Fonte: Silva & Martins (2002, p. 03)

É interessante ressaltar que o produto vetorial entre dois vetores resulta em um vetor axial. Nesse caso, surge uma inconsistência na álgebra de Gibbs quando aplicada a expressão $\vec{F}$ =q $\vec{v}$ **x** $\vec{B}$, pois o primeiro membro representa um vetor polar e o segundo membro, um vetor axial. Vaz Júnior (1996, p. 241) reforça essa argumentação ao dizer que ao fazermos uma inversão especial em $\vec{v}$ e $\vec{B}$ temos $\vec{F} \mapsto q(-\vec{v}) \times (-\vec{B}) = \vec{F}$, ou seja, $\vec{F}$ resultante não se altera perante uma reflexão especial. É um pseudo-vetor.

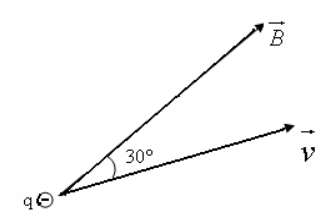
Essa inconsistência desaparece na Álgebra de Clifford. Quando uma grandeza física resulta do produto geométrico de dois vetores, esse produto gera um bivetor e um escalar: nunca um outro vetor! O aparente problema é que o vetor representativo é sempre ortogonal àqueles que se multiplicam, mesmo apresentando a mesma magnitude do bivetor gerado. A solução consiste associar esse vetor representativo ao dual do bivetor.

No que se refere à força que atua sobre uma carga elétrica em movimento dentro de um campo magnético, demonstra-se que o módulo dessa força é dado por $\left|q\vec{B} \wedge \vec{v}\right|$. É possível também demonstrar que a direção dessa força é sempre ortogonal ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Todavia ela não pode ser representada pelo bivetor resultante desse produto, uma vez que a força $\vec{F}$ é uma grandeza univetorial. Porém demonstra-se que esse vetor é o dual do bivetor gerado a partir da representação, no espaço euclidiano tridimensional, das coordenadas retangulares de $\vec{v}$ e $\vec{B}$, ou seja:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \equiv *q(\vec{B} \wedge \vec{v}) \equiv *^{-1} q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \qquad (48)$$

8 Aplicação

Na figura, o vetor indução magnética tem intensidade B = 1,0 T e o elétron de carga q = -1,6 . 10^{-19} C se desloca com velocidade v = 10 m/s. Caracterize a força magnética agindo no elétron.



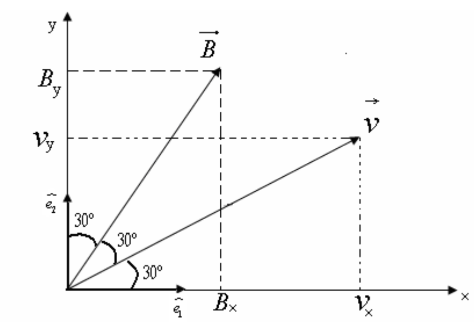
Dados:

$\vec{B}$ = 1,0T

q = -1,6 . 10^{-19}C

v = 10m/s

Fazendo as projeções ortogonais de $\vec{B}$ e $\vec{v}$ em um espaço $\mathbb{R}_2$:



Onde :

$$v_x = \vec{v}\cos 30^o \rightarrow v_x = 10.\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow v_x = 5\sqrt{3}$$

$$v_y = \vec{v}sen\theta \rightarrow v_y = 10.\frac{1}{2} \rightarrow v_y = 5$$

$$B_x = \vec{B}cos60^o \rightarrow B_x = 1.\frac{1}{2} \rightarrow B_x = \frac{1}{2}$$

$$B_y = \vec{B}sen60^o \rightarrow B_x = 1.\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow B_x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Os vetores $\vec{B}$ e $\vec{v}$ podem ser escritos em função de suas componentes em um espaço $\mathbb{R}_2$:

$$\vec{B} = B_x\hat{e}_1 + B_y\hat{e}_2$$
$$\vec{v} = v_x\hat{e}_1 + v_y\hat{e}_1$$

O produto de Grassmann entre $\vec{B}$ e $\vec{v}$ é:

$$\vec{B}\wedge\vec{v} = (B_x\hat{e}_1 + B_y\hat{e}_2)\wedge(v_x\hat{e}_1 \wedge + v_x\hat{e}_1)$$

Aplicando a propriedade distributiva no segundo membro:

$$\vec{B}\wedge\vec{v} = B_x v_x(\hat{e}_1 + \hat{e}_1) + B_x v_y(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) + B_y v_x(\hat{e}_2 + \hat{e}_1) + B_y v_y(\hat{e}_2 + \hat{e}_2)$$

Lembrando que:

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_i = 0$$
$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = -\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i$$

Podemos demonstrar que:

$$\vec{B} \wedge \vec{v} = (B_x v_y - B_y v_x)\hat{e}_1\hat{e}_2$$

Onde $e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2$ representa uma área unitária.

Substituindo os valores:

$$\vec{B} \wedge \vec{v} = (\frac{1}{2}.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}.5\sqrt{3})\hat{e}_1\hat{e}_2 \rightarrow \vec{B} \wedge \vec{v} = (-5)\hat{e}_1\hat{e}_2$$

Como é de nosso conhecimento, o bivetor força magnética é dado, pela álgebra de Clifford, pela seguinte expressão:

$$\vec{\vec{F}}_m = q\vec{B} \wedge \vec{v}$$

Fazendo as devidas substituições:

$$\vec{\vec{F}}_m = -1,6.10^{-19}.(-5)\hat{e}_1\hat{e}_2$$
$$\vec{\vec{F}}_m = 8,0.10^{-19}\hat{e}_1\hat{e}_2$$

Observe que encontramos o valor de uma entidade bivetorial $\vec{\vec{F}}_m$. Considerando que a força magnética é uma grandeza univetorial, o seu módulo corresponderá ao dual de $\vec{\vec{F}}_m$.

$$\vec{F}_m = *q\vec{B} \times \vec{v}$$

Assim:

$$\vec{F}_m = *8,0.10^{-19}\hat{e}_1\hat{e}_2$$

Lembrando que:

$$* = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$$

$$\vec{F}_m = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3(8,0.10^{-19})\hat{e}_1\hat{e}_2 \text{ ou } \vec{F}_m = (8,0.10^{-19})\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3\hat{e}_1\hat{e}_2$$

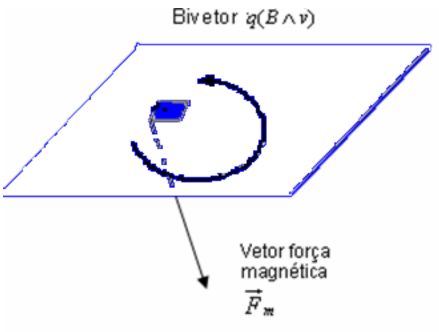
Como, através do produto de Clifford, $e_1e_2e_3e_1e_2 = -e_3$:

$$\vec{F}_m = (8,0.10^{-19})(-\hat{e}_3)$$
$$\vec{F}_m = -8,0.10^{-19}\hat{e}_3(N)$$

Assim, o módulo da força magnética que desvia a carga q, que se desloca com velocidade v, dentro de um campo magnético B, é:

$$F_m = 8,0.10^{-19}N$$

A direção será ortogonal ao bivetor $q\vec{B} \wedge \vec{v}$ e o sentido dependerá apenas do sinal da carga.



APÊNDICE D- LISTA DE EXERCÍCIOS SUGERIDA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

LISTA DE EXERCÍCIOS

PRIMEIRA PARTE: QUESTÕES DISSERTATIVAS

1) Aponte uma inconsistência pertinente à álgebra de Gibbs e faça um pequeno comentário sobre ela.

2) Estabeleça um paralelo ou faça uma comparação entre o produto cruzado de Gibbs e o produto geométrico de Clifford.

3) Expresse em poucas palavras como a álgebra geométrica acaba com o problema referente ao fato de vetores diferentes serem representados da mesma forma quando sabemos que existem entidades polares e axiais cuja simetria os diferencia de forma significativa no estudo dos fenômenos pertinentes à Física.

4) Disserte em poucas palavras sobre a influência dos trabalhos de Hamilton e Grassmann nas álgebras de Clifford e de Gibbs, destacando os aspectos que diferenciam uma da outra.

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS.

5) Uma carga elétrica puntiforme de 1,0 .10^{-5} C passa com uma velocidade de 2,5 m/s na direção perpendicular ao campo de indução magnética e fica sujeita a uma intensidade de 5,0 . 10^{-4} N. Através do formalismo de Clifford, determine a intensidade desse campo e faça um esquema representando as grandezas envolvidas.

6) Uma partícula eletrizada com carga elétrica q = 5,0 .10^{-6}C move-se, com velocidade v = 6,0 . 10^{5} m/s, em uma região onde existe um campo magnético uniforme, cujo vetor indução magnética tem intensidade B = 10T. Sendo θ o ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{v}$ determine, utilizando a álgebra geométrica, a intensidade da força magnética agente na partícula quando θ for igual a 90°.

7) Um elétron com velocidade (em m/s) dada por $\vec{v} = 2,0 .10^{6}\,\hat{i} + 3,0 .10^{6}\,\hat{j}$ penetra num campo magnético (em T) dado por $\vec{B} = 0,03\hat{i} + 0,015\hat{j}$. Determine, pela álgebra de Clifford, o módulo e o sentido da força sobre o elétron.

TERCEIRA PARTE: MAPAS CONCEITUAIS.

8) Construa um mapa conceitual articulando os conceitos dos formalismos de Gibbs e Clifford até a obtenção do vetor força magnética.

9) Construa um mapa conceitual enfocando personagens e episódios que conduziram aos formalismos de Clifford e Gibbs.

Obrigado por participar!

APÊNDICE E- QUESTIONÁRIO 2

(PARA AMBAS AS INTERVENÇÕES)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

QUESTIONÁRIO 2

1) O que você achou do curso?

( ) interessante ( )regular ( )você aplicaria

2) A álgebra geométrica deveria ser implementada no ensino?

( ) Sim ( ) Não

3) Quais os níveis que deveria ser sua implementação?

( ) médio ( ) superior

4) Você acharia viável para o ensino médio? Por quê?

5) Faça um comentário pessoal sobre essa nova álgebra.

Obrigado por participar!

APÊNDICE F – MODELO DA FICHA DE AVALIAÇÃO PESSOAL

CONTEÚDO
MÉTODO DE ENSINO
TÉCNICAS DE ENSINO
RECURSOS DIDÁTICOS
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
REFERENCIAL TEÓRICO

OBSERVAÇÕES

Relações entre técnicas de ensino com os recursos didáticos
Relação entre o conteúdo e método de ensino
Tempo destinado ao tópico
Posição do conteúdo com a seqüência programática.
Obedece a um tratamento linear e diretivo ou proporciona conflito de idéias polêmicas
Resgate do contexto histórico de sua produção e suas relações com a sociedade
Inclui aspectos de aplicação prática
Metodologia de ensino como uma construção teórica ou prática social? Ou ambas?
Outros aspectos relevantes

APÊNDICE G - RESPOSTAS E COMENTÁRIOS DA LISTA DE EXERCÍCIOS SUGERIDA SEGUNDO A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA[35]

I-1) A regra da mão direita. Ela não é uma regra que tenha um embasamento matemático coerente que justifique porque um produto vetorial gera outro vetor, muito menos o fato desse vetor ser perpendicular ao plano resultante do produto. O que se ver nos livros é que essa regra justifica um fenômeno que pode ser reproduzido experimentalmente.

C.1.I – O grupo reconheceu que a regra da mão direita não justifica a entidade 1-vetor obtida através desse preceito, e que os livros didáticos a concebem como uma "técnica" que explica um fenômeno específico. Diante dessa conclusão, fica um parecer: Por que não fazer essas considerações se tornarem mais acessíveis, através da divulgação mais trabalhos científicos que tratem desse assunto, ao público docente e discente que elencam o processo ensino-aprendizagem de Matemática e Física no Ensino Médio?

II-1) Não consegue explicar o problema de que o produto cruzado gera um vetor axial. A Álgebra de Gibbs o considera como um vetor polar. Esse impasse leva o aluno a crer que vetores polares e axiais são a mesma coisa. Uma prova disso é o vetor força magnética, obtido com o auxílio da regra da mão direita. Sabemos que ele é um vetor polar, mas pelo produto cruzado ele se torna axial.

C.1.II – O grupo participante da segunda intervenção compreendeu o problema da simetria, que não é considerado nos livros didáticos – especificamente quando apresentam a regra da mão direita como uma *norma* para obtenção da direção e sentido de um *"vetor"* cujo módulo é obtido através do produto cruzado de Gibbs. O mais oportuno é que esses aspectos não constituiriam

[35] Cada questão respondida foi referenciada por uma letra e as intervenções por I e II correspondendo, respectivamente, a primeira e a segunda intervenção. Assim, a resposta da questão 1, da primeira intervenção foi denominada de Questão I-1. Os comentários serão referenciados pela letra C. Dessa forma, o comentário referente à primeira resposta da intervenção II será identificado por C. 1. II. Como foi referido nas seções 6.1.7 e 6.2.7, a lista, por iniciativa do próprio público participante, foi discutida e respondida coletivamente. Portanto, foi avaliada uma lista para cada intervenção.

uma ação pedagógica de difícil entendimento, para o público discente em nível de Ensino Médio, uma vez que não seria necessário um formalismo matemático mais complexo – que geralmente são exigidos no Ensino Superior.

I-2) O produto cruzado de Gibbs gera um vetor axial ou um pseudovetor. Já o produto geométrico de Clifford gera um escalar (obtido pelo produto interno) e um bivetor (pelo produto de Grassmann).

C.2.I – Nesse caso, ficou claro que o produto de Clifford não emana em argumentos não justificados para atingir seu propósito. Esse fato a turma inferiu de forma clara e coesa. Considerando tratar-se de professores e/ou futuros professores de Física do Ensino Médio, seria oportuno que esses conceitos fossem articulados em suas práxis.

II-2) O produto de Gibbs possibilita determinar um plano cujo módulo é o mesmo do vetor ortogonal a ele, enquanto o produto geométrico gera um plano orientado e não um segmento orientado.

C.2.II – A resposta ficou incompleta. É óbvio o equívoco entre o produto de Gibbs (ou produto externo) e o produto de Clifford (geométrico). Provavelmente o tempo dispensado à exposição dos conceitos, ou o cansaço por parte da turma, tenha motivado a ambigüidade. Uma nova leitura sobre o material oferecido poderá solucionar o problema.

I-3) A Álgebra geométrica acaba com esse problema ao explicar a diferença entre um vetor e um pseudovetor. Tal argumentação não é levada a termo na Álgebra de Gibbs. Nela, o resultado do produto vetorial – que é um vetor axial – é considerado um vetor polar (como força, velocidade etc.).

C.3.I – Apesar do problema de simetria ter sido absorvido pela turma, evidenciado na resposta à questão 1, faltou justificar que a entidade 1-vetor, obtida pelo formalismo de Clifford, é o dual do bivetor obtido pelo produto externo de Grassmann – onde entra a definição do produto geométrico. A diferença entre este e aquele vetor contraído pela Álgebra de Gibbs reside no fato de que o primeiro não é um pseudovetor.

II-3) A partir do momento em que não é mais utilizada a regra da mão direita, ou seja, considera o produto vetorial igual a um bivetor. Então o vetor representativo passa a ser o dual do fragmento orientado.

C.3.II – Mesmo tendo citado que a entidade 1-vetor, concebida pela Álgebra Geométrica como o dual do fragmento de plano obtido pelo produto de Grassmann a resposta poderia ter sido mais consistente. Foi deixada uma lacuna conceitual ao comparar o produto vetorial com um bivetor, quando é sabido que apenas o módulo do bivetor é equivalente ao módulo do pseudovetor contraído pelo produto vetorial de Gibbs. O caráter significativo da aprendizagem desse ponto específico do formalismo de Clifford, não ficou suficientemente evidenciado.

I-4) Ambas as álgebras foram embasadas nos trabalhos de Hamilton e Grassmann. A diferença é que Gibbs não considerou os bivetores, trivetores, etc. – o que não aconteceu com Clifford, que considerou esses k-vetores. Isso tornou a sua álgebra mais completa.

II-4) A Álgebra de Clifford foi mais fiel às idéias de Grassmann e Hamilton, o que provavelmente a tenha deixado bastante complexa para ser aplicada no estudo da Física e da Matemática. Gibbs, por sua vez, simplificou sua álgebra, mas a deixou incompleta, pois desconsiderou importantes itens dos trabalhos dos precursores das duas álgebras.

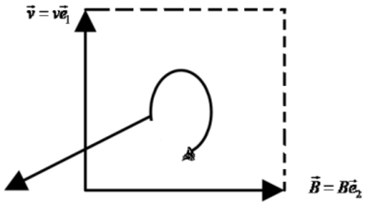
C.4.I.II[36] As respostas foram coerentes com os aspectos históricos e filosóficos que precederam os dois formalismos, o que traduziu o interesse por parte das duas turmas nesses aspectos. Isso aponta para a importância de se inserir, no processo ensino aprendizagem dessa proposta, tópicos pertinentes ao contexto histórico, social e cultural que culminou na escolha da Álgebra de Gibbs no tratamento matemático dispensado ao estudo dos fenômenos físicos pela comunidade científica de uma época. Não se trata de apontar vencidos nem vencedores, mas mostrar que existiu um consenso intelectivo que elegeu a Álgebra Vetorial para fundamentar todo o estudo da Física. Consenso este, documentado nas publicações direcionadas a todos os níveis de ensino, que

[36] Comentário válido para as duas respostas.

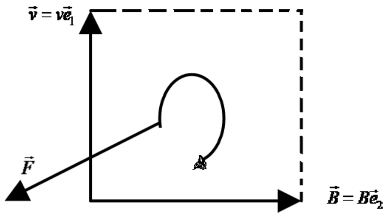
tornou a Álgebra de Gibbs um paradigma que ainda norteia esse estudo – apesar de suas incongruências.

I.5)

$$q = 1,0.10^{-5} C$$
$$v = 2,5 m/s$$
$$F = 5,0.10^{-4} N$$



$$\vec{F} = B.q.v(-\vec{e}_3)$$



$$B = \frac{F}{q.v}$$
$$B = \frac{5.10^{-4}}{1.10^{-5}.2,5}$$
$$B = 20T$$

II.5) Não fez a atividade.

I.6)

$$q = 5,0.10^{-6} C$$
$$v = 6,0.10^{5} m/s$$
$$B = 10T$$

$$\vec{F} = *(\vec{B} \wedge q\vec{v})$$
$$\vec{F} = \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3(B\vec{e}_2 \wedge qv\vec{e}_1)$$
$$\vec{F} = B.q.v(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1)$$
$$\vec{F} = B.q.v(-\vec{e}_3)$$

$$F = 10.5,0.10^{-6}.6,0.10^{5}$$

$$F = 30N$$

Direção: ortogonal ao bivetor

Sentido: como q>0, saindo do fragmento de plano (convenção)

II.6) Não fez a atividade

I.7)

$$q = 1,6.10^{-19}C$$
$$\vec{v} = 2,0.10^{6}\hat{i} + 3,0.10^{6}\hat{j}$$
$$\vec{B} = 0,03\hat{i} + 0,015\hat{j}$$

Substituiremos os versores $\hat{i}$ e $\hat{j}$ por $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.

$$\vec{v} = 2,0.10^{6}\vec{e}_1 + 3,0.10^{6}\vec{e}_2$$
$$\vec{B} = 0,03\vec{e}_1 + 0,015\vec{e}_2$$

$$\vec{B} \wedge \vec{v} = (0,03\vec{e}_1 + 0,015\vec{e}_2) \wedge (2,0.10^{6}\vec{e}_1 + 3,0.10^{6}\vec{e}_2)$$

Aplicando a propriedade distributiva e as regras do produto externo, temos:

$$\vec{B} \wedge \vec{v} = (0,03.2.10^{6} - 0,015.10^{6})\vec{e}_1\vec{e}_2$$
$$\vec{B} \wedge \vec{v} = (0,015.10^{6})\vec{e}_1\vec{e}_2$$

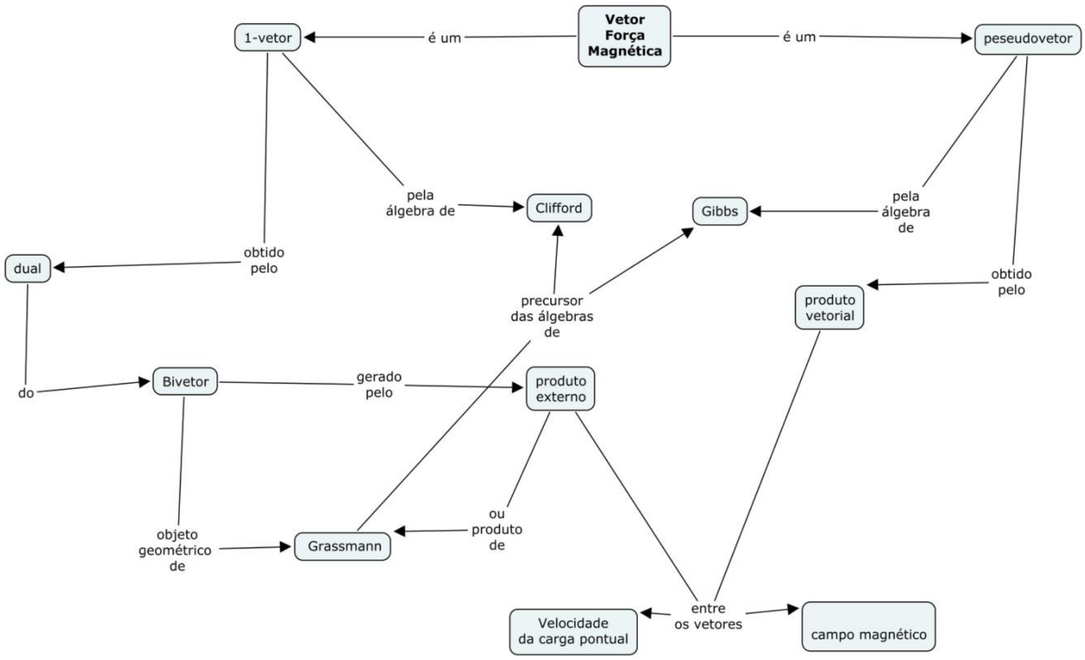
$$\vec{F} = *(\vec{B} \wedge \vec{v})q$$
$$\vec{F} = \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3(0,015.10^6)\vec{e}_1\vec{e}_2 1,6.10^{-19}$$
$$\vec{F} = 0,015.10^6.1,6.10^{-19}\left(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\right).\left(\vec{e}_1\vec{e}_2\right)$$
$$\vec{F} = 2,4.10^{-15}(-\vec{e}_3)$$
$$\vec{F} = 2,4.10^{-15}N$$

Direção: Ortogonal ao Fragmento de plano.

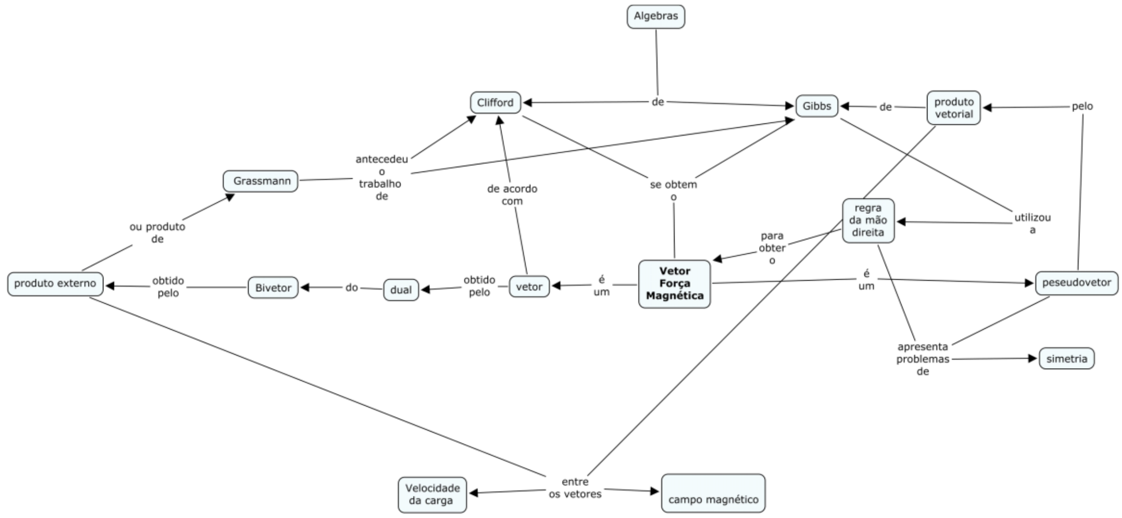
Sentido: “Entrando” no fragmento (q<0).

II.7) Não fez a atividade.

I.8)



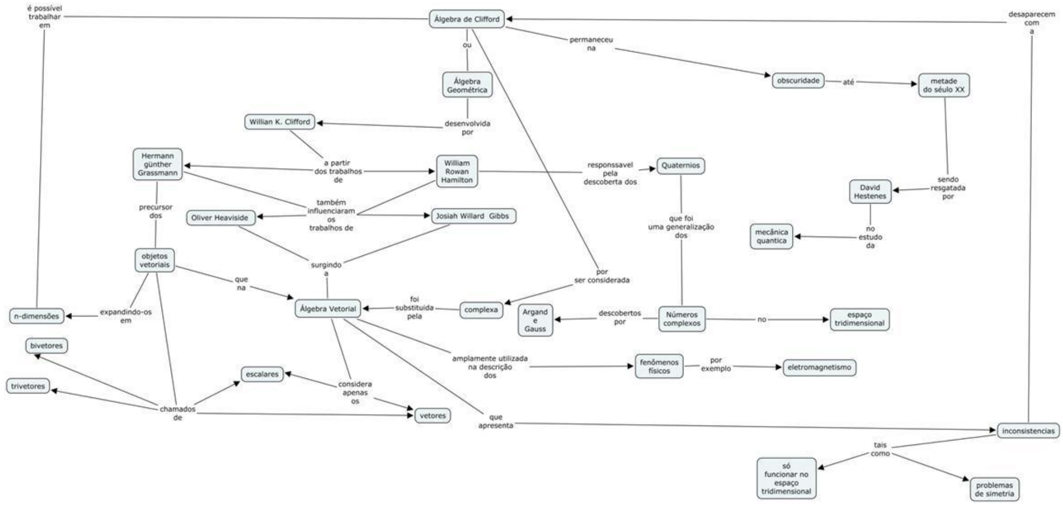
II.8)



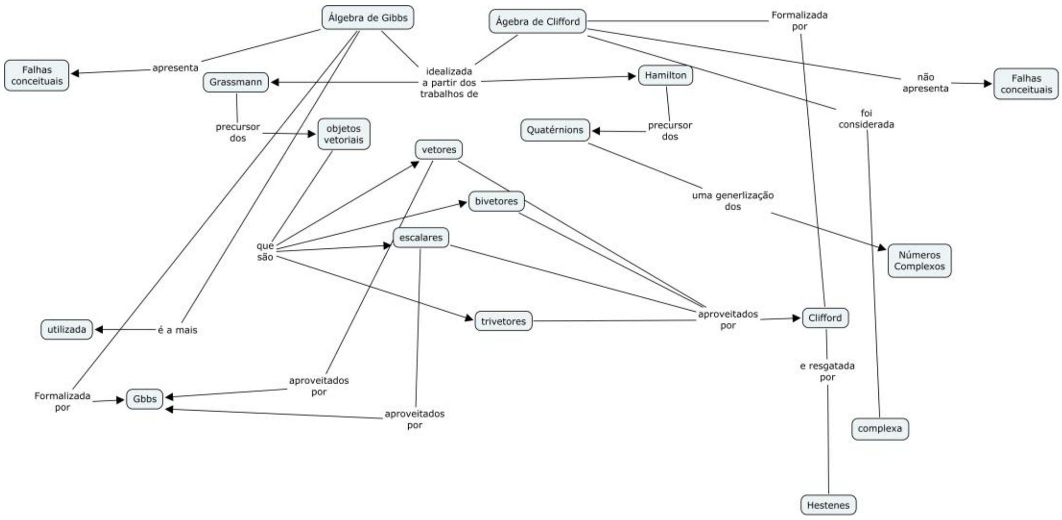
C.8.I.II) Os dois mapas foram edificados coletivamente, utilizando quadro e pincel. Antecipadamente foram selecionados os principais conceitos[37] para posterior construção. O primeiro mapa, referente à primeira intervenção, apresentou melhor qualidade no que diz respeito às ligações entre conceitos, hierarquia e transversalidade. Isso é justificado pela certa intimidade que parte da turma (alunos do curso de mestrado[38]) tinha com a construção desses diagramas. Os mesmos foram transcritos, na íntegra, para o CMap tools.

[37] Em função da falta de familiaridade com essa técnica de análise por parte das duas turmas, principalmente na segunda intervenção, foram selecionados o menor número possível de conceitos para que pudessem ser articulados a partir dos pressupostos da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa.
[38] Mestrado profissionalizante em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB

I.9)


é possível trabalhar em
Álgebra de Clifford
desaparecem com a
ou
permaneceu na
Álgebra Geométrica
obscuridade
até
metade do séulo XX
Willian K. Clifford
desenvolvida por
Hermann günther Grassmann
a partir dos trabalhos de
William Rowan Hamilton
responssavel pela descoberta dos
Quaternios
sendo resgatada por
David Hestenes
também influenciaram os trabalhos de
Oliver Heaviside
Josiah Willard Gibbs
precursor dos
que foi uma generalização dos
mecânica quantica
no estudo da
objetos vetoriais
surgindo a
por ser considerada
que na
foi substituída pela
complexa
Álgebra Vetorial
n-dimensões
expandindo-os em
Argand e Gauss
descobertos por
Números complexos
no
espaço tridimensional
bivetores
amplamente utilizada na descrição dos
fenômenos físicos
por exemplo
eletromagnetismo
trivetores
escalares
considera apenas os
chamados de
vetores
que apresenta
inconsistencias
tais como
só funcionar no espaço tridimensional
problemas de simetria

II.9)



C.9.I.II) O primeiro mapa foi construído pelos quatro participantes da primeira intervenção. É visível o maior número de informações e conceitos articulados, mesmo deixando a desejar no que diz respeito a distribuição hierárquica. O segundo foi elaborado em sala, com o auxílio do ministrante, pelos alunos da segunda intervenção. O pouco tempo dispensado à sua construção justifica o reduzido número de conceitos articulados. No entanto, o segundo diagrama foi mais fiel aos pressupostos da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, o que tornou mais fácil o seu entendimento.

APÊNDICE H- REGISTROS FOTOGRÁFICOS DAS INTERVENÇÕES

H.1 PRIMEIRA INTERVENÇÃO

Figura H.1.A: Apresentação do mini curso.

Figura H.1.B: Preenchimento do questionário 1.

Figura H.1.C: Abordagem sobre os aspectos históricos.

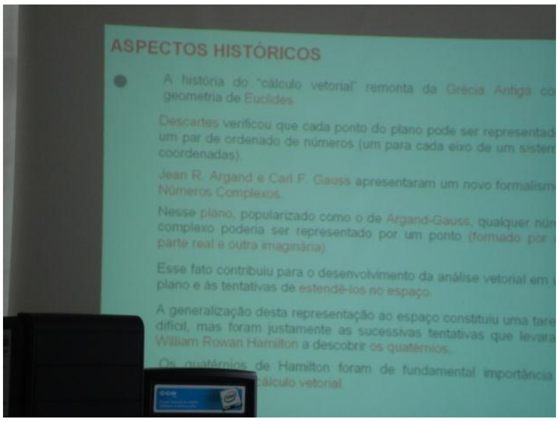


Figura H.1.D: Aspectos matemáticos da Álgebra de Gibbs.

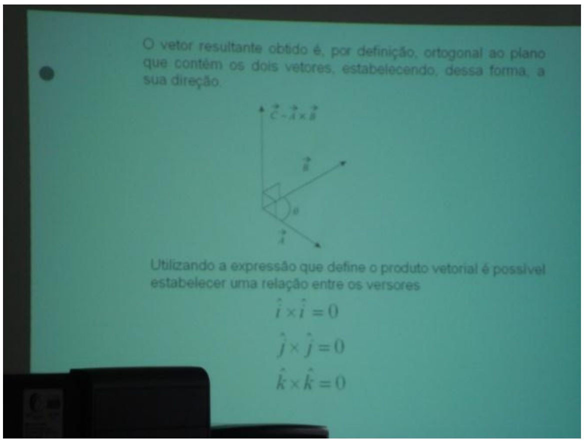


Figura H.1.E: Resolução de um exercício através dos formalismos de Gibbs e Clifford.

Figura H.1.F: Resolução da lista de exercícios:

Figura H.1.E: Preenchimento do questionário 2:

H.2 SEGUNDA INTERVENÇÃO

Figura H.2.A: Preenchimento de questionários.

Figura H.2.B: Abordagem histórica.

Figura H.2.C: Aspectos matemáticos.

Figura H.2.D: Intervalo

APÊNDICE I- DESCRIÇÃO DO PRODUTO

Em consonância com a Teoria Cognitivista de David Ausubel, a apostila foi elaborada com o propósito de oferecer um material potencialmente significativo[39] ao público presente nas duas intervenções – formado por alunos, professores e futuros professores do Ensino Médio. Dessa forma, o mesmo material também pode constituir um referencial bibliográfico perfeitamente adaptável para servir ao ensino de Física nessa etapa da Educação Básica.

Nesse contexto o texto foi estruturado como um instrumento coadjuvante no processo de aprendizagem por recepção. Ausubel (2003) acredita que a aprendizagem por recepção, só será significativa se o novo conteúdo se incorporar de forma substantiva, não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva.

Conforme foi citado no capítulo 4, um material é considerado de natureza substantiva quando ele está aliado às ideias relevantes em relação ao tema abordado, já contido na estrutura cognitiva do aluno. Já um material não arbitrário é aquele que se relaciona com a estrutura cognitiva do aluno sem alterar o seu significado.

Buscando fazer com que os conceitos fossem articulados de modo que palavras e símbolos sempre apresentassem o mesmo significado, independente da ocasião ou forma com que foram relacionados, os conceitos apresentados na apostila foram organizados sob os pressupostos da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa.

Nessa direção a mesma foi dividida obedecendo aos seguintes itens:

1 Introdução:

Foi justificado o propósito do trabalho a ser desenvolvido mostrando que algumas estruturas matemáticas, como a Álgebra Vetorial, utilizadas na descrição dos fenômenos naturais, apresentam falhas conceituais que não são

[39] Apresentando características de natureza substantiva e não arbitrária (Ausubel, 1978 et. al).

consideradas nos livros didáticos, especialmente no Ensino Médio. Nessa direção, a Álgebra de Clifford é apresentada como um formalismo que vem de encontro a essas inconsistências e perfeitamente aplicável ao Ensino Médio.

2 Aspectos Históricos:

Acreditando na proposta de que História da ciência pode tornar-se uma forma de induzir modificações no ensino de Física, já que ela cria um significado para as informações aprendidas desmistificando a Ciência como um conhecimento para poucos eleitos (Hülsendeger, 2002) tornando, dessa forma, as aulas de Física mais desafiadoras e reflexivas (Mathews, 1992), esse item teve como escopo a apresentação dos principais episódios e personagens, cujos trabalhos, traduzidos em estruturas matemáticas formalmente bem fundamentadas, anteciparam e serviram de suporte aos formalismos de Gibbs e Clifford. O propósito foi oferecer ao leitor pistas sobre a linha de pensamento que ambos utilizaram ao elaborar as suas construções bem como as razões que levaram a Álgebra Geométrica ter sido preterida no tratamento matemático dispensado ao estudo dos fenômenos naturais. Tais informações são consideradas relevantes no sentido de procurar suprir a lacuna pedagógica – bastante comum nos livros de Física – a qual deixa a impressão que o conhecimento científico é um conjunto de saberes a ser ensinado como conteúdo, em uma formatação organizada, dogmatizada e a-histórica (Alves Filho, 2000, p.179).

3 Aspectos matemáticos da Álgebra de Gibbs:

Procurando diagnosticar se o público presente nas duas intervenções tinha como subsunçores conceitos pertinentes à Álgebra Vetorial, e dessa forma estabelecer um paralelo com a Álgebra Geométrica, foi relembrado o conceito de vetor, o produto de um número por um vetor, o conceito de vetor unitário ou versor, a representação de um vetor como combinação linear de seus versores e, finalmente, a significação, sob uma exposição mais detalhada, dos produtos escalar e vetorial no espaço euclidiano $\mathbb{R}_2$ e $\mathbb{R}_3$. O propósito dessa intercessão residiu em identificar os alcances e limitações do formalismo de Gibbs buscando melhor justificar, e apreender de forma significativa, tópicos da estrutura de Clifford – apresentados posteriormente. Buscando consolidar esse propósito foi apresentado um problema, retirado de uma publicação de Física do Ensino Médio, cujo processo resolutivo foi fundamentado na Álgebra Vetorial.

3 Aspectos Gerais da Álgebra de Clifford[40]:

No material oferecido, a Álgebra Geométrica é apresentada como Organizadores Prévios para a posterior utilização dessa estrutura no tratamento matemático dispensado à obtenção das características do vetor força magnética. Dessa forma a Álgebra de Clifford foi introduzida a partir dos seus aspectos mais gerais para posteriormente ser dispensado, no item seguinte, um tratamento mais conciso. Nessa direção foram apresentados os objetos geométricos de Clifford e um subespaço bidimensional denominado bivetor – obtido a partir do produto externo de Grassmann – para substituir o tradicional produto cruzado de Gibbs. Considerando que o propósito dessa operação era obter uma entidade 1-vetor, foi apresentado o conceito de dualidade. O dual de um objeto vetorial é concebido como outro objeto vetorial com o mesmo número de componentes. Nesse contexto, o objeto geométrico 1-vetor foi proporcionado como o dual de um 2-vetor (ou bivetor). O propósito dessa etapa foi levar a inferência de que existe uma estrutura alternativa mais sólida que a de Gibbs e que, nesse caso específico, viria de encontro a não justificada regra da mão direita.

5 Aspectos matemáticos da Álgebra de Clifford:

A abordagem preliminar dos aspectos gerais dos tópicos da Álgebra Geométrica que foram selecionados para o cumprimento dos objetivos das duas intervenções, observada no item 4, possibilitou um estudo mais inclusivo

---

[40] Os conceitos mais gerais foram apresentados no item 4 enquanto os mais inclusivos, no item 5. Nesses itens foi considerado o pressuposto ausubeliano de que a aprendizagem se processa numa estrutura hierárquica por natureza, desenvolvendo-se de cima para baixo em termos de abstração, generalidade e inclusão. Esse processo visa permitir que idéias mais geral, porém relevantes, como as que foram apresentadas no item 4, fossem incorporadas à estrutura cognitiva dos participantes de modo a permitir a reconciliação com os conceitos mais inclusos, como os apresentados no item 5.

do formalismo apresentado. Nesse contexto foi desenvolvido o produto Grassmann entre dois vetores, escritos como combinação linear de seus versores, no espaço euclidiano bidimensional e tridimensional. Tal processo permitiu calcular a magnitude do 2-vetor resultante. Posteriormente, foi obtido o produto geométrico de Clifford a partir do cálculo do quadrado do módulo de um vetor escrito como combinação linear em um espaço bidimensional. Nesse sentido, foi inferido que o produto de Clifford entre dois vetores emana em um escalar mais um bivetor – e não em um vetor comum, como é proclamado na Álgebra de Gibbs.

O conceito de dualidade foi mais aprofundado com a apresentação do operador Hodge. Agora, o dual de um bivetor é apresentado como o produto geométrico entre o referido operador e os versores do 2-vetor obtido pelo produto de Grassmann. O resultado é uma entidade 1-vetor ortogonal ao referido fragmento de plano.

6. A Álgebra de Clifford e o eletromagnetismo: O conceito de força magnética

O último item tratou do conceito de força magnética, no qual foi argumentado que a Álgebra de Gibbs não leva em consideração os problemas de simetria característicos do produto vetorial. Nessa direção foi apresentado como organizadores prévios os conceitos de vetor polar e axial. O propósito desse entrecorte foi inferir que o vetor força magnética $\vec{F}$ que desvia uma carga pontual q que se desloca com uma velocidade $\vec{v}$ dentro de um campo magnético $\vec{B}$ deveria ser polar, mas torna-se axial quando obtido pela Álgebra Vetorial, tornando-se um pseudovetor. Nesse contexto o formalismo de Clifford é introduzido suprindo essa lacuna conceitual, pois mostra que a entidade 1-vetor força magnética é, na verdade, o dual do bivetor obtido pelo produto de Grassmann entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$ multiplicado pelo escalar q. Para encerrar o documento foi apresentado o processo resolutivo do mesmo problema oferecido no item 3, agora pela Álgebra Geométrica.

APÊNDICE J – AS FICHAS DE AVALIAÇÃO PESSOAL

FICHAS DA PRIMEIRA INTERVENÇÃO[41]:

FICHA 1A - ÁLGEBRA DE CLIFFORD: ASPECTOS HISTÓRICOS

CONTEÚDO
ASPECTOS HISTÓRICOS
MÉTODO DE ENSINO
Exposição verbal; ilustrações.
TÉCNICAS DE ENSINO
Exposição dialogada, aberta à participação do aluno, debate mediado pelo ministrante e a orientadora do projeto Prfª. Drª. Morgana Ligia Farias Freire.
RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro e pincel, data show, apostila, lista de exercícios, software CMap-tools, sites da Internet.
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
Intermediadora entre os conteúdos da aprendizagem e a atividade construtiva para assimilação, procurando despertar a curiosidade dos partícipes acompanhando suas ações no decorrer das atividades.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
Questões abertas oferecidas na lista de exercícios e construção de mapas conceituais. Avaliação da intervenção através de um questionário oferecido ao final da apresentação.
REFERENCIAL TEÓRICO
Apostila; sugestões de referenciais bibliográficos da Internet que tratem do assunto contemplado.

OBSERVAÇÕES

Relações entre técnicas de ensino com os recursos didáticos
Conteúdo apresentado e socializado através de slides; utilização da apostila como recurso facilitador para resolução coletiva das questões abertas oferecidas pela lista de exercícios. Utilização da mesma apostila e do CMap tools para a construção, coletiva, de Mapas conceituais. Ocorreu ação intermediadora por parte do professor na execução das atividades propostas.
Relação entre o conteúdo e método de ensino
O conteúdo foi estruturado como um instrumento coadjuvante no processo de aprendizagem por recepção, a ser incorporado de forma substantiva, não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva.
Tempo destinado ao tópico
45 minutos para exposição do conteúdo. Tempo livre para a execução das atividades pertinentes ao conteúdo abordado após o término da intervenção.
Posição do conteúdo com a seqüência programática
O conteúdo se posicionou buscando proporcionar um maior significado para as informações contidas nos tópicos que foram posteriormente apresentados, buscando torná-las, dessa forma, mais desafiadoras e reflexivas. Nesse contexto, foi possível oferecer aos participantes pistas sobre a linha de pensamento que os idealizadores das duas estruturas abordadas (Gibbs e Clifford) utilizaram para finalização de seus trabalhos, contribuindo, dessa forma, para consolidação do caráter significativo da aprendizagem.
Obedece a um tratamento linear e diretivo ou proporciona conflito de idéias polêmicas
Proporcionou conflito de idéias polêmicas contribuindo para reflexão de como a história da ciência é proporcionada na grande maioria dos livros didáticos de Física destinados ao Ensino Médio.
Resgate do contexto histórico de sua produção e suas relações com a sociedade
Foi verificado.
Inclui aspectos de aplicação prática
Sim, no contexto didático.
Metodologia de ensino como uma construção teórica ou prática social? Ou ambas?
Como uma construção teórica e prática social.
Outros aspectos relevantes
Considerou o aspecto relevante da inserção de História e Filosofia das Ciências no processo ensino aprendizagem dos conteúdos de Física; despertou a inferência de que conhecimento científico não é um corpo de conhecimentos pronto e acabado e que existem perguntas a serem feitas; proporcionou o conhecimento da existência de outros formalismos, melhores fundamentados, além daqueles insistentemente

[41] Referente ao primeiro conteúdo abordado na primeira intervenção. As fichas são referencias pelo número 1.

apresentados nos livros didáticos.

FICHA 1B - ASPECTOS MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE GIBBS.

CONTEÚDO
ASPECTOS MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE GIBBS.
MÉTODO DE ENSINO
Exposição verbal; demonstrações; ilustrações; exemplificação.
TÉCNICAS DE ENSINO
Alguns tópicos da Álgebra de Gibbs foram revisados de forma a instigar a curiosidade dos participantes. Dessa forma as demonstrações foram elaboradas a partir da descrição de fenômenos e processos reais. Os mesmos processos e fenômenos foram representados através de gráficos, esquemas e gravuras. Tais técnicas tiveram como cunho aguçar nos participantes a capacidade de concentração e observação a fim de constatar, de forma significativa, algumas inconsistências presentes nesse formalismo.
RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro e pincel, data show e apostila.
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
A familiaridade que a turma apresentava com os tópicos abordados proporcionou uma relação harmoniosa, pautada no diálogo e em construtivas trocas de informações, contribuindo expressivamente no alcance dos objetivos.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
Construção de Mapas conceituais.
REFERENCIAL TEÓRICO
Apostila; sugestões de referenciais bibliográficos da Internet que tratem do assunto contemplado.

OBSERVAÇÕES

Relações entre técnicas de ensino com os recursos didáticos
Conteúdo apresentado e exemplificado através de slides; algumas demonstrações consideradas úteis foram desenvolvidas utilizando quadro e pincel; utilização da apostila e do CMap tools como recursos facilitadores para a construção, coletiva, de Mapas conceituais após o término da intervenção.
Relação entre o conteúdo e método de ensino
O conteúdo foi estruturado como um instrumento que promovesse uma revisão de tópicos da Álgebra Vetorial. Para tanto o mesmo foi trabalhado de forma expositiva tendo como recursos coadjuvantes, gráficos e ilustrações.
Tempo destinado ao tópico
60 minutos.
Posição do conteúdo com a seqüência programática
O conteúdo foi posicionado com o propósito de promover uma reflexão no sentido de apontar lacunas pedagógicas, insistentemente presentes nos livros didáticos de Física no Ensino Médio, características de uma estrutura matemática amplamente divulgada e utilizada desde o século XIX e que não são consideradas nessas publicações.
Obedece a um tratamento linear e diretivo ou proporciona conflito de idéias polêmicas
Proporciona conflito de idéias polêmicas ao ir de encontro a um tradicionalismo didático pautado em estratégias de memorização não justificadas, e nem questionadas nos livros didáticos, como a regra da mão direita.
Resgate do contexto histórico de sua produção e suas relações com a sociedade
Foi resgatado o contexto histórico, pois foram estabelecidas relações – agora sob um aspecto matemático – com episódios e personagens abordados no conteúdo avaliado na ficha anterior.
Inclui aspectos de aplicação prática
No contexto didático, sim.
Metodologia de ensino como uma construção teórica ou prática social? Ou ambas?
Ambas.
Outros aspectos relevantes
Despertou nos participantes a necessidade de apontar falhas conceituais do formalismo abordado em suas práticas docentes; oportunizou discussões de aspectos relevantes que devem ser considerados no planejamento das aulas; proporcionou um novo olhar sobre a Álgebra Vetorial.

FICHA 1C - ASPECTOS GERAIS E MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

CONTEÚDO
ASPECTOS GERAIS E MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD
MÉTODO DE ENSINO
Exposição verbal; demonstrações; ilustrações; exemplificação.
TÉCNICAS DE ENSINO
Os conceitos pertinentes à Álgebra Geométrica foram apresentados de forma a instigar a curiosidade e facilitar o processo de incorporação à estrutura cognitiva dos participantes. Para tanto, os mesmos foram dispostos a partir dos mais gerais para os mais específicos. Nesse sentido as demonstrações, gráficos, esquemas e gravuras foram fundamentados obedecendo a critérios lineares, considerando, num contexto histórico, as contribuições de outras estruturas que deram suporte aos trabalhos de Clifford. Buscando aperfeiçoar o processo foi utilizada a estratégia da construção de Mapas conceituais, como recurso facilitador da aprendizagem, ao longo da exposição. Tal estratégia também foi requisitada como critério de avaliação do conteúdo exposto.
RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro e pincel, data show e apostila; software CMap Tools.
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
Mediadora entre o conteúdo exposto, as inquietações manifestadas pelos participantes – em função do alto teor de novidade proporcionada pelo novo formalismo – e o processo de resolução das atividades propostas. Não foram verificadas situações conflituosas.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
Construção de Mapas conceituais; questões dissertativas apresentadas na lista de exercícios; preenchimento de questionários.
REFERENCIAL TEÓRICO
Apostila; sugestões de referenciais bibliográficos da Internet que tratem do assunto contemplado.

OBSERVAÇÕES

RELAÇÕES ENTRE TÉCNICAS DE ENSINO COM OS RECURSOS DIDÁTICOS
Conteúdo apresentado, exemplificado e socializado através de slides; algumas demonstrações consideradas úteis foram desenvolvidas utilizando quadro e pincel; utilização da apostila e do CMap tools como recursos facilitadores na resolução de problemas oferecidos na lista de exercícios e para a construção, coletiva, de Mapas conceituais após o término da intervenção.
RELAÇÃO ENTRE O CONTEÚDO E MÉTODO DE ENSINO
O conteúdo foi estruturado como um instrumento coadjuvante no processo de aprendizagem por recepção, a ser incorporado de forma substantiva, não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva.
TEMPO DESTINADO AO TÓPICO
60 minutos.
POSIÇÃO DO CONTEÚDO COM A SEQÜÊNCIA PROGRAMÁTICA
Os tópicos pertinentes à Álgebra Geométrica se posicionaram como Organizadores Prévios. Nessa direção o conteúdo foi apresentado objetivando facilitar a incorporação dos conceitos pertinentes à força magnética, via Álgebra de Clifford, de forma significativa.
OBEDECE A UM TRATAMENTO LINEAR E DIRETIVO OU PROPORCIONA CONFLITO DE IDÉIAS POLÊMICAS
Proporciona conflito de idéias polêmicas ao abordar uma estrutura que vai de encontro a um formalismo cujas inconsistências não são apontadas nem questionadas do processo ensino aprendizagem dos conceitos pertinentes ao estudo fenômenos naturais, principalmente no Ensino Médio.
RESGATE DO CONTEXTO HISTÓRICO DE SUA PRODUÇÃO E SUAS RELAÇÕES COM A SOCIEDADE
Foram estabelecidas relações com fatos, episódios e personagens que culminaram com o surgimento do formalismo abordado, bem como os motivos que levaram a escolha da Álgebra de Gibbs para o tratamento matemático dispensado a articulação de conceitos pertinentes ao estudo da Física. Nessa direção foram promovidos debates apontando a falta de consenso entre educadores, comunidade científica e sociedade na utilização da estrutura de Clifford no Gibbs no processo ensino aprendizagem dos fenômenos físicos no Ensino Médio e Superior.
INCLUI ASPECTOS DE APLICAÇÃO PRÁTICA
Sim, no contexto didático.
METODOLOGIA DE ENSINO COMO UMA CONSTRUÇÃO TEÓRICA OU PRÁTICA SOCIAL? OU AMBAS?
Ambas.
OUTROS ASPECTOS RELEVANTES
Proporcionou a familiaridade com um formalismo alternativo perfeitamente adaptável no processo ensino aprendizagem de Física no Ensino Médio; Permitiu a possibilidade de redimensionar o caráter e reavaliar os propósitos desse processo na apresentação e articulação de objetos geométricos na Física e na Matemática.

FICHA 1D - A ÁLGEBRA DE CLIFFORD E O ELETROMAGNETISMO: O CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

CONTEÚDO
A ÁLGEBRA DE CLIFFORD E O ELETROMAGNETISMO: O CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA.
MÉTODO DE ENSINO
Exposição verbal; demonstrações; ilustrações; exemplificação.
TÉCNICAS DE ENSINO
Conceitos de simetria de vetores foram apresentados antecipadamente buscando apontar inconsistências da Álgebra de Gibbs quando aplicada na obtenção das características do vetor força magnética. Esses conceitos foram incorporados aos da Álgebra de Clifford buscando promover um caráter significativo na obtenção das características do referido vetor através dos pressupostos dessa estrutura. Para tanto a exposição foi dialogada, onde todos os partícipes puderam expressar suas dúvidas e opiniões a respeito. Ilustrações, gravuras e exemplos aturam como coadjuvantes no processo. Também foi utilizada a estratégia da construção de Mapas conceituais na exposição do conteúdo e como item de avaliação.
RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro e pincel, data show e apostila; software CMap Tools.
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
O prévio conhecimento que a turma dispunha sobre simetria de vetores contribuiu para uma relação harmoniosa, mediadora entre o conteúdo exposto e eventuais inquietações manifestadas pelos partícipes – em particular quando foi apresentado, como exemplo, o processo resolutivo de um problema de eletromagnetismo, retirado de uma publicação voltada ao Ensino Médio, através do formalismo de Clifford.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
Construção de Mapas conceituais; resolução de problemas sobre eletromagnetismo direcionados à obtenção das características do 1-vetor força magnética – adaptados de questões oferecidas em livros de Física do Ensino Médio; preenchimento de questionários.
REFERENCIAL TEÓRICO
Apostila; sugestões de referenciais bibliográficos da Internet que tratem do assunto contemplado.

OBSERVAÇÕES

Relações entre técnicas de ensino com os recursos didáticos
Conteúdo apresentado, exemplificado e socializado através de slides; algumas demonstrações consideradas úteis foram desenvolvidas utilizando quadro e pincel; utilização da apostila e do CMap tools como recursos facilitadores na resolução de problemas oferecidos na lista de exercícios e para a construção, coletiva, de Mapas conceituais após o término da intervenção.
Relação entre o conteúdo e método de ensino
O conteúdo foi estruturado como um instrumento coadjuvante no processo de aprendizagem por recepção, a ser incorporado de forma substantiva, não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva.
Tempo destinado ao tópico
45 minutos.
Posição do conteúdo com a seqüência programática.
O conteúdo se posicionou como ponto culminante de um trabalho, apresentado na forma de um material potencialmente significativo, perfeitamente adaptável ao ensino de Física em turmas de Ensino Médio, cujo propósito foi a aplicação de um formalismo consistente, livre de inconsistências algébricas e regras de memorização não justificadas, no ensino de Eletromagnetismo.
Obedece a um tratamento linear e diretivo ou proporciona conflito de idéias polêmicas
Proporciona conflito de idéias polêmicas ao inserir, no estudo de conceitos referentes a um determinado fenômeno físico, um formalismo que diverge dos pressupostos de uma estrutura articulada a mais de um século por cientistas e educadores.
Resgate do contexto histórico de sua produção e suas relações com a sociedade
Através de um debate foi destacada a importância do trabalho de David Hestenes, na década de 1960, no sentido de despertar o interesse de alguns físicos e matemáticos em utilizar esse formalismo no tratamento matemático dispensado ao estudo de fenômenos físicos, entre eles, o Eletromagnetismo. Por outro lado, foi ressaltada a resistência por parte de educadores e comunidade científica em utilizar e divulgar essa estrutura no processo ensino aprendizagem de Física – traduzido no reduzido número de publicações que tratem do assunto, especificamente direcionadas ao Ensino Médio.
Inclui aspectos de aplicação prática
No contexto didático, sim.
Metodologia de ensino como uma construção teórica ou prática social? Ou ambas?
Ambas.
Outros aspectos relevantes
Através do resgate do contexto histórico, a intervenção permitiu alertar sobre a importância da inserção da HFC no ensino de Física; levou a inferência da necessidade da apresentação de conceitos de simetria de vetores as aulas de Física: no contexto da intervenção, em eletromagnetismo; mostrou que é perfeitamente possível inserir a Álgebra de Clifford no tratamento matemático dispensado ao estudo do eletromagnetismo, pois muitos de seus conceitos podem ser articulados por meio de uma linguagem matemática de fácil entendimento nessa etapa da Educação Básica; permite facilitar a articulação desses conceitos utilizando a técnica dos Mapas conceituais.

FICHAS DA SEGUNDA INTERVENÇÃO[42]

FICHA 2A - ÁLGEBRA DE CLIFFORD: ASPECTOS HISTÓRICOS

CONTEÚDO
ASPECTOS HISTÓRICOS
MÉTODO DE ENSINO
Exposição verbal; ilustrações.
TÉCNICAS DE ENSINO
Exposição dialogada, aberta à participação do aluno; debate mediado pelo ministrante.
RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro e pincel, data show, apostila, lista de exercícios, software CMap-tools, sites da Internet.
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
Intermediadora entre os conteúdos da aprendizagem e a atividade construtiva para assimilação; as vezes conflituosa devido ao desconhecimento por parte da turma das estruturas que sustentaram as Álgebras de Clifford e Gibbs.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
Questões abertas oferecidas na lista de exercícios e construção de mapas conceituais. Avaliação da intervenção através de um questionário oferecido ao final da apresentação.
REFERENCIAL TEÓRICO
Apostila; sugestões de referenciais bibliográficos da Internet que tratem do assunto contemplado.

OBSERVAÇÕES

Relações entre técnicas de ensino com os recursos didáticos
Conteúdo apresentado e socializado através de slides; utilização da apostila, distribuída em um momento posterior à intervenção, como recurso facilitador para resolução coletiva das questões abertas oferecidas pela lista de exercícios. Utilização da mesma apostila e do CMap tools para a construção, coletiva, de Mapas conceituais. Ocorreu ação intermediadora por parte do ministrante na execução das atividades propostas.
Relação entre o conteúdo e método de ensino
O conteúdo foi estruturado como um instrumento coadjuvante no processo de aprendizagem por recepção, a ser incorporado de forma substantiva, não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva.
Tempo destinado ao tópico
30 minutos para exposição do conteúdo. Tempo livre para a execução das atividades pertinentes ao conteúdo abordado após o término da intervenção.
Posição do conteúdo com a seqüência programática
O conteúdo se posicionou buscando proporcionar um maior significado para as informações contidas nos tópicos que foram apresentados nas seções posteriores, buscando torná-las, dessa forma, mais desafiadoras e reflexivas. Nesse contexto, foi possível oferecer aos participantes pistas sobre a linha de pensamento que os idealizadores das duas estruturas abordadas (Gibbs e Clifford) utilizaram para finalização de seus trabalhos, contribuindo, dessa forma, para consolidação do caráter significativo da aprendizagem.
Obedece a um tratamento linear e diretivo ou proporciona conflito de idéias polêmicas
Proporcionou conflito de idéias polêmicas contribuindo para reflexão de como a história da ciência é proporcionada na grande maioria dos livros didáticos de Física destinados ao Ensino Médio.
Resgate do contexto histórico de sua produção e suas relações com a sociedade
Foi verificado.
Inclui aspectos de aplicação prática
Sim, no contexto didático.
Metodologia de ensino como uma construção teórica ou prática social? Ou ambas?
Como uma construção teórica e prática social.
Outros aspectos relevantes
Considerou o aspecto relevante da inserção de História e Filosofia das Ciências no processo ensino aprendizagem dos conteúdos de Física; despertou a inferência de que conhecimento científico não é um corpo de conhecimentos pronto e acabado e que existem perguntas a serem feitas; proporcionou o conhecimento da existência de outros formalismos, melhores fundamentados, além daqueles insistentemente apresentados nos livros didáticos; proporcionou a oportunidade dos participantes manifestarem suas opiniões acerca do conteúdo abordado, expressando suas inquietações.

[42] Referente ao primeiro conteúdo abordado na segunda intervenção. As fichas são referencias pelo número 1.

FICHA 2B - ASPECTOS MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE GIBBS

CONTEÚDO
ASPECTOS MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE GIBBS.
MÉTODO DE ENSINO
Exposição verbal; demonstrações; ilustrações; exemplificação.
TÉCNICAS DE ENSINO
Alguns tópicos da Álgebra de Gibbs foram revisados de forma a instigar a curiosidade dos participantes. Dessa forma as demonstrações foram elaboradas a partir da descrição de fenômenos e processos reais. Os mesmos processos e fenômenos foram representados através de gráficos, esquemas e gravuras. Tais técnicas tiveram como cunho aguçar nos participantes a capacidade de concentração e observação a fim de constatar, de forma significativa, algumas inconsistências presentes nesse formalismo. A ausência de conhecimentos prévios sobre simetria de vetores provocou inquietações e manifestações conflituosas no que diz respeito à aceitação das inconsistências presentes no formalismo de Gibbs.
RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro e pincel e data show.
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
A ausência de familiaridade que a turma apresentava com alguns dos tópicos que foram abordados não contribuiu para uma relação harmoniosa. Alguns dos presentes, a princípio, não conseguiram conceber ou aceitar as lacunas didáticas presentes nas publicações que utilizam a Álgebra vetorial na descrição dos fenômenos naturais.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
Construção de Mapas conceituais.
REFERENCIAL TEÓRICO
Apostila; sugestões de referenciais bibliográficos da Internet que tratem do assunto contemplado.

OBSERVAÇÕES

Relações entre técnicas de ensino com os recursos didáticos
Conteúdo apresentado e exemplificado através de slides; algumas demonstrações consideradas úteis foram desenvolvidas utilizando quadro e pincel; utilização da apostila e do CMap tools como recursos facilitadores para a construção, coletiva, de Mapas conceituais após o término da intervenção.
Relação entre o conteúdo e método de ensino
O conteúdo foi estruturado como um instrumento que promovesse uma revisão de tópicos da Álgebra Vetorial. Para tanto o mesmo foi trabalhado de forma expositiva tendo como recursos coadjuvantes, gráficos e ilustrações.
Tempo destinado ao tópico
45 minutos.
Posição do conteúdo com a seqüência programática
O conteúdo foi posicionado com o propósito de promover uma reflexão no sentido de apontar lacunas pedagógicas, insistentemente presentes nos livros didáticos de Física no Ensino Médio, características de uma estrutura matemática amplamente divulgada e utilizada desde o século XIX e que não são consideradas nessas publicações.
Obedece a um tratamento linear e diretivo ou proporciona conflito de idéias polêmicas
Proporciona conflito de idéias polêmicas ao ir de encontro a um tradicionalismo didático pautado em estratégias de memorização não justificadas, e nem questionadas nos livros didáticos, como a regra da mão direita.
Resgate do contexto histórico de sua produção e suas relações com a sociedade
Foi resgatado o contexto histórico, pois foram estabelecidas relações – agora sob um aspecto matemático – com episódios e personagens abordados no conteúdo avaliado na ficha anterior.
Inclui aspectos de aplicação prática
No contexto didático, sim.
Metodologia de ensino como uma construção teórica ou prática social? Ou ambas?
Ambas.
Outros aspectos relevantes
Despertou nos participantes a necessidade de apontar falhas conceituais do formalismo abordado em suas práticas docentes; oportunizou discussões de aspectos relevantes que devem ser considerados no planejamento das aulas; proporcionou um novo olhar sobre a Álgebra Vetorial.

FICHA 2C - ASPECTOS GERAIS E MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

CONTEÚDO
ASPECTOS GERAIS E MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD
MÉTODO DE ENSINO
Exposição verbal; demonstrações; ilustrações; exemplificação.
TÉCNICAS DE ENSINO
Os conceitos pertinentes à Álgebra Geométrica foram apresentados de forma a instigar a curiosidade e facilitar o processo de incorporação à estrutura cognitiva dos participantes. Para tanto, os mesmos foram dispostos a partir dos mais gerais para os mais específicos. Nesse sentido as demonstrações, gráficos, esquemas e gravuras foram fundamentados obedecendo a critérios lineares, considerando, num contexto histórico, as contribuições de outras estruturas que deram suporte aos trabalhos de Clifford. Buscando aperfeiçoar o processo foi utilizada a estratégia da construção de Mapas conceituais, como recurso facilitador da aprendizagem como critério de avaliação do conteúdo exposto.
RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro e pincel, data show e apostila; software CMap Tools.
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
Mediadora entre o conteúdo exposto, as inquietações manifestadas pelos participantes – em função do alto teor de novidade proporcionada pelo novo formalismo – e o processo de resolução das atividades propostas. Foram verificadas situações conflituosas; alguns problemas sugeridos na lista de exercícios não foram entregues.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
Construção de Mapas conceituais; questões dissertativas apresentadas na lista de exercícios; preenchimento de questionários.
REFERENCIAL TEÓRICO
Apostila; sugestões de referenciais bibliográficos da Internet que tratem do assunto contemplado.

OBSERVAÇÕES

RELAÇÕES ENTRE TÉCNICAS DE ENSINO COM OS RECURSOS DIDÁTICOS
Conteúdo apresentado, exemplificado e socializado através de slides; algumas demonstrações consideradas úteis foram desenvolvidas utilizando quadro e pincel; utilização da apostila e do CMap tools como recursos facilitadores na resolução de problemas oferecidos na lista de exercícios e para a construção, coletiva, de Mapas conceituais após o término da intervenção.
RELAÇÃO ENTRE O CONTEÚDO E MÉTODO DE ENSINO
O conteúdo foi estruturado como um instrumento coadjuvante no processo de aprendizagem por recepção, a ser incorporado de forma substantiva, não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva.
TEMPO DESTINADO AO TÓPICO
45 minutos.
POSIÇÃO DO CONTEÚDO COM A SEQÜÊNCIA PROGRAMÁTICA
Os tópicos pertinentes à Álgebra Geométrica se posicionaram como Organizadores Prévios. Nessa direção o conteúdo foi apresentado objetivando facilitar a incorporação dos conceitos pertinentes à força magnética, via Álgebra de Clifford, de forma significativa.
OBEDECE A UM TRATAMENTO LINEAR E DIRETIVO OU PROPORCIONA CONFLITO DE IDÉIAS POLÊMICAS
Proporciona conflito de idéias polêmicas ao abordar uma estrutura que vai de encontro a um formalismo cujas inconsistências não são apontadas nem questionadas do processo ensino aprendizagem dos conceitos pertinentes ao estudo fenômenos naturais, principalmente no Ensino Médio.
RESGATE DO CONTEXTO HISTÓRICO DE SUA PRODUÇÃO E SUAS RELAÇÕES COM A SOCIEDADE
Foram estabelecidas relações com fatos, episódios e personagens que culminaram com o surgimento do formalismo abordado, bem como os motivos que levaram a escolha da Álgebra de Gibbs para o tratamento matemático dispensado a articulação de conceitos pertinentes ao estudo da Física. Nessa direção foram promovidos debates apontando a falta de consenso entre educadores, comunidade científica e sociedade na utilização da estrutura de Clifford no Gibbs no processo ensino aprendizagem dos fenômenos físicos no Ensino Médio e Superior.
INCLUI ASPECTOS DE APLICAÇÃO PRÁTICA
Sim, no contexto didático.
METODOLOGIA DE ENSINO COMO UMA CONSTRUÇÃO TEÓRICA OU PRÁTICA SOCIAL? OU AMBAS?
Ambas.
OUTROS ASPECTOS RELEVANTES
Proporcionou a familiaridade com um formalismo alternativo perfeitamente adaptável no processo ensino aprendizagem de Física no Ensino Médio; Permitiu a possibilidade de redimensionar o caráter e reavaliar os propósitos desse processo na apresentação e articulação de objetos geométricos na Física e na Matemática.

FICHA 2D - A ÁLGEBRA DE CLIFFORD E O ELETROMAGNETISMO: O CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA

CONTEÚDO
A ÁLGEBRA DE CLIFFORD E O ELETROMAGNETISMO: O CONCEITO DE FORÇA MAGNÉTICA.
MÉTODO DE ENSINO
Exposição verbal; demonstrações; ilustrações; exemplificação.
TÉCNICAS DE ENSINO
Conceitos de simetria de vetores foram apresentados antecipadamente buscando apontar inconsistências da Álgebra de Gibbs quando aplicada na obtenção das características do vetor força magnética. Esses conceitos foram incorporados aos da Álgebra de Clifford buscando promover um caráter significativo na obtenção das características do referido vetor através dos pressupostos dessa estrutura. Para tanto a exposição foi dialogada, onde todos os partícipes puderam expressar suas dúvidas e opiniões a respeito. Ilustrações, gravuras e exemplos aturam como coadjuvantes no processo. Também foi utilizada a estratégia da construção de Mapas conceituais na exposição do conteúdo e como item de avaliação.
RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro e pincel, data show e apostila; software CMap Tools.
RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO
O prévio conhecimento que a turma dispunha sobre simetria de vetores contribuiu para uma relação harmoniosa, mediadora entre o conteúdo exposto e eventuais inquietações manifestadas pelos partícipes – em particular quando foi apresentado, como exemplo, o processo resolutivo de um problema de eletromagnetismo, retirado de uma publicação voltada ao Ensino Médio, através do formalismo de Clifford.
TIPOS DE AVALIAÇÃO
Construção de Mapas conceituais; problemas propostos sobre eletromagnetismo direcionados à obtenção das características do 1-vetor força magnética – adaptados de questões oferecidas em livros de Física do Ensino Médio (não resolvidos pela turma); preenchimento de questionários.
REFERENCIAL TEÓRICO
Apostila; sugestões de referenciais bibliográficos da Internet que tratem do assunto contemplado.

OBSERVAÇÕES

Relações entre técnicas de ensino com os recursos didáticos
Conteúdo apresentado, exemplificado e socializado através de slides; algumas demonstrações consideradas úteis foram desenvolvidas utilizando quadro e pincel; utilização da apostila e do CMap tools como recursos facilitadores na resolução de problemas oferecidos na lista de exercícios e para a construção, coletiva, de Mapas conceituais após o término da intervenção. Os mapas foram construídos mediados pelo ministrante.
Relação entre o conteúdo e método de ensino
O conteúdo foi estruturado como um instrumento coadjuvante no processo de aprendizagem por recepção, a ser incorporado de forma substantiva, não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva.
Tempo destinado ao tópico
45 minutos.
Posição do conteúdo com a seqüência programática.
O conteúdo se posicionou como ponto culminante de um trabalho, apresentado na forma de um material potencialmente significativo, perfeitamente adaptável ao ensino de Física em turmas de Ensino Médio, cujo propósito foi a aplicação de um formalismo consistente, livre de inconsistências algébricas e regras de memorização não justificadas, no ensino de Eletromagnetismo.
Obedece a um tratamento linear e diretivo ou proporciona conflito de idéias polêmicas
Proporciona conflito de idéias polêmicas ao inserir, no estudo de conceitos referentes a um determinado fenômeno físico, um formalismo que diverge dos pressupostos de uma estrutura articulada a mais de um século por cientistas e educadores.
Resgate do contexto histórico de sua produção e suas relações com a sociedade
Através de um debate foi destacada a importância do trabalho de David Hestenes, na década de 1960, no sentido de despertar o interesse de alguns físicos e matemáticos em utilizar esse formalismo no tratamento matemático dispensado ao estudo de fenômenos físicos, entre eles, o Eletromagnetismo. Por outro lado, foi ressaltada a resistência por parte de educadores e comunidade científica em utilizar e divulgar essa estrutura no processo ensino aprendizagem de Física – traduzido no reduzido número de publicações que tratem do assunto, especificamente direcionadas ao Ensino Médio.
Inclui aspectos de aplicação prática
No contexto didático, sim.
Metodologia de ensino como uma construção teórica ou prática social? Ou ambas?
Ambas.
Outros aspectos relevantes
Através do resgate do contexto histórico, a intervenção permitiu alertar sobre a importância da inserção da HFC no ensino de Física; levou a inferência da necessidade da apresentação de conceitos de simetria de vetores as aulas de Física: no contexto da intervenção, em eletromagnetismo; mostrou que é perfeitamente possível inserir a Álgebra de Clifford no tratamento matemático dispensado ao estudo do eletromagnetismo, pois muitos de seus conceitos podem ser articulados por meio de uma linguagem matemática de fácil entendimento nessa etapa da Educação Básica; permite facilitar a articulação desses conceitos utilizando a técnica dos Mapas conceituais.