UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

SALVINO IZIDRO DE ARAUJO SEGUNDO

Do ensino-aprendizagem da Álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1º grau: representações múltiplas

Campina Grande – PB
2012

SALVINO IZIDRO DE ARAUJO SEGUNDO

Do ensino-aprendizagem da Álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1º grau: representações múltiplas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba.

Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Campina Grande - PB
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

A659e Araújo Segundo, Salvino Izidro de.

Do ensino-aprendizagem da Álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1º grau [manuscrito] : representações múltiplas / Salvino Izidro de Araújo Segundo. – 2012.

116 f.: il.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

“Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática”.

1. Ensino de matemática. 2. Educação matemática. 3. Álgebra. I. Título.

21. ed. CDD 371.337

SALVINO IZIDRO DE ARAUJO SEGUNDO

Do ensino-aprendizagem da Álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1º grau: representações múltiplas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba.

Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (UEPB) - Orientador

A. Paula Bispo da Silva

Profa. Dra. Ana Paula Bispo da Silva (UEPB)

Izabel Maria Barbosa de Albuquerque

Profa. Dra. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque (UFCG)

Campina Grande - PB
2012

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, meu Senhor, que tem realizado bênçãos maravilhosas na minha vida.

Bendize, ó minha alma, ao Senhor! Senhor, Deus meu, tu és, magnificentíssimo; estás vestido de glória e de majestade (Salmo 104:1).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele de nada sou capaz.

Aos meus pais, Salvino Izidro de Araujo e Maria de Lourdes Lopes de Araujo, por ser parte integrante da minha vida, por me apoiarem em tudo que foi preciso, por estarem ao meu lado nos momentos difíceis e compartilharem os momentos de alegria e principalmente a minha mãe por ser uma mulher guerreira, amiga e sensata que sempre buscou o melhor para os seus filhos.

A minha esposa, Maria de Fatima Belchior de Souza, companheira e fonte de inspiração que sempre incentivou e acreditou no caminhar da minha pesquisa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Silvanio de Andrade, pelo excelente trabalho de orientação realizado na minha pesquisa, do qual admiro pela alta capacidade de ser amigo e profissional, incentivando e cobrando nos momentos adequados.

Aos meus irmãos, Samara e Sandro, e demais familiares pelo carinho e compreensão da minha ausência.

Aos colegas que fizeram parte da minha trajetória no mestrado e na graduação na Universidade Estadual da Paraíba, que participaram e colaboraram no meu aprendizado.

As professoras Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic e Dra. Izabel Maria B. de Albuquerque que colaboraram significativamente no Exame de Qualificação.

Aos demais professores que fizeram parte da minha formação acadêmica.

Aos amigos que sempre me ensinaram o valor da amizade e da lealdade.

RESUMO

ARAUJO SEGUNDO, Salvino Izidro de. *Do Ensino-Aprendizagem da Álgebra ao Ensino de Equações Polinomiais do 1º Grau*: Representações Múltiplas. Dissertação de Mestrado. Campina Grande: MECM/UEPB, 2012.

O presente trabalho trata das dificuldades, compreensão e apropriação de conceitos algébricos, por parte dos alunos do Ensino Fundamental II, no ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau, na perspectiva das reapresentações múltiplas. Será apresentada uma discussão inicial sobre a história do ensino-aprendizagem da Álgebra, evidenciado a necessidade de uma metodologia de sala de aula que priorize a compreensão do conteúdo; também se fará uma síntese do estado da arte das pesquisas sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra, abordando-se portanto *as ideias de representações múltiplas como uma ferramenta* que medeia a compreensão, construção e aquisição de conceitos algébricos, especificamente as equações polinomiais do 1º grau. O caminho investigativo usado foi o da pesquisa pedagógica (LANKSHEAR, KNOBEL, 2008), no qual atuou-se na qualidade de professor pesquisador. O trabalho de sala de aula foi desenvolvido em uma turma do 7º ano do ensino fundamental, de uma escola pública do Estado da Paraíba. Construiu-se uma proposta pedagógica, cujo ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau que ocorre em Blocos; cada Bloco, com seu próprio objetivo e conteúdo a ser trabalho, nível de problemas e tipo de representação a ser priorizada, até se chegar à união de todos os objetivos, conteúdos e representações. Evidenciou-se que a utilização da proposta pedagógica pode minimizar, ou até mesmo superar, as dificuldades apresentadas pelos alunos com esse conteúdo de Álgebra.

Palavras-chave: Educação Matemática. Álgebra. Equações Polinomiais do 1º grau. Representações Múltiplas.

ABSTRACT

ARAUJO SEGUNDO, Salvino Izidro de. *Of Teaching-Learning of the Algebra to Teaching of Polynomial Equations of the 1st Degree*: Multiple Representations. Master Dissertation. MECM/UEPB, 2012.

The present work deals with the difficulties, understanding and ownership of algebraic concepts by the students of primary school II, in the teaching and learning of polynomial equations of the first degree. Will be presented a bibliography on the history of teaching and learning of algebra, highlighted the need for a methodology for the classroom that focuses on knowledge construction, also will summarize the state of the art of research on teaching and learning of algebra, covering up the ideas of multiple representations as a tool that mediates the understanding, construction and acquisition of algebraic concepts, specifically the polynomial equations of the first degree. The path used in the development of investigative research was the educational research (Lankshear, Knobel, 2008), in which we operate as a research professor. The work of the classroom was developed in a class of Year 7 primary school, a public school in the Paraíba State, becoming the teaching-learning of polynomial equations of the 1st Degree in the context of multiple representations and problem solving.

Keywords: Mathematics Education. Algebra. Polynomial Equations of the 1st Degree. Multiple Representations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O propósito, nesse trabalho, é de desenvolver, em sala de aula, uma proposta pedagógica para o ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau na perspectiva das representações múltiplas.

Pretende-se abordar o processo de ensino-aprendizagem de Álgebra, trabalhando-se o tópico de equações polinomiais do 1º grau, já que nas últimas décadas o debate a respeito de respostas para as questões *como ensinar* e *como aprender* têm tomado cada vez mais espaço no meio da Educação Matemática, levantando-se observações sobre as dificuldades dos alunos e as metodologias didáticas dos professores. Assim, um estudo direcionado ao ensino-aprendizagem da Álgebra, oferecendo subsídios para uma reflexão, procurando contribuir para a superação das dificuldades dos alunos na assimilação do conteúdo dessa disciplina, pode a ampliar a capacidade dos professores e educadores matemáticos na realização de um ensino-aprendizagem com compreensão.

A Álgebra sofreu diversas reformas, quanto à sua escrita e ao seu ensino ao longo da história. Essas reformas ocorreram primeiramente na escrita e na notação concernente aos três estágios da Álgebra, chamados de retórica, sincopada e simbólica. Posteriormente, passou-se a se pensar no seu ensino.

No século passado, até a década de 80, o ensino de Álgebra era fundamentado principalmente na memorização e utilização de procedimentos e notações, assim como as pesquisas também focavam esse tipo de ensino, mas, com o questionamento dos pesquisadores de Educação Matemática as pesquisas começaram a se voltar para a questão como ensinar e, posteriormente, acrescentando a seu foco a questão como aprender.

A partir de então se passou a dar maior importância à compreensão dos significados que o aluno adquire no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Álgebra, dentre eles, o das equações polinomiais do 1º grau.

Atualmente, diante das características presentes em várias pesquisas da Educação Matemática e dos temas dos principais eventos internacionais, observa-se que o ensino-aprendizagem de Álgebra tem um dos seus focos voltado para o uso das representações múltiplas.

Independente da preocupação dos educadores e professores com o ensino de Álgebra e com as inúmeras pesquisas realizadas nessa área, algo que não se pode refutar, inclusive pela questão da comprovação empírica evidente em sala de aula diante das experiências vivenciadas, é a existência das dificuldades dos alunos, tanto hoje como também em décadas passadas, com a construção, aquisição, compreensão e utilização de conceitos algébricos.

Essas dificuldades podem ser causadas por diferentes razões, como, por exemplo, limitações referentes a conteúdos anteriores considerados como pré-requisitos para a compreensão do conteúdo a ser abordado, assim como a metodologia de ensino empregada pelo professor ao ministrá-los, o que caracteriza ponto crucial neste trabalho.

Seja como aluno, professor, pesquisador ou qualquer outro profissional, todos que já passaram por um processo de ensino-aprendizagem tiveram alunos que apresentaram dificuldades para compreender determinados conteúdos. Consequentemente, não conseguem construir adequadamente os conceitos envolvidos no conteúdo trabalhado em sala de aula, muitas vezes devido ao fato de a metodologia de ensino empregada pelo professor enfatizar memorizações, procedimentos operatórios e regras. Mas essas dificuldades podem não estar relacionadas com a metodologia de ensino utilizada e, sim, com o fato de o próprio professor se deparar com dificuldades para construir, para si próprio, os conceitos a serem abordados em sala de aula, mesmo quando não há o objetivo de produzir um ensino-aprendizagem que priorize a superação dessas dificuldades.

Diante desse fato, foi necessário refletir a respeito do ensino-aprendizagem de Álgebra na prática escolar. Por conseguinte, o fato de, antecipadamente, ter-se constatado, no trabalho com o conteúdo dessa disciplina, a existência dessas dificuldades apresentadas pelos alunos, o pesquisador se preparou para enfrentar situações atípicas decorrentes do desenvolvimento contínuo de distintas formas de atuação de professores em sala de aula.

Todavia, o surgimento antecipado dessas informações mediante, a consulta de pesquisas existentes na área que procuram não só mostrar a existência de dificuldades, como também, em alguns casos, identificá-las com o objetivo de superá-las, além das experiências vividas em sala de aula pelo pesquisador, podem proporcionar um impacto indireto, ou até mesmo direto na elaboração de uma proposta pedagógica para o ensino-aprendizagem que corresponda às necessidades de ambos, alunos e professores. Dessa forma, realizou-se um mapeamento do tema observando o que as pesquisas indicam sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra.

A percepção da existência dessas dificuldades oferece subsídios para a reflexão em direção a um caminhar mais próximo possível de um ensino que valorize a construção, aquisição e compreensão do conteúdo em questão, mais pontuado nas equações polinomiais do 1º grau por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Esse é o objeto deste trabalho.

Este trabalho foi direcionado na perspectiva das representações múltiplas, identificando, assim, situações didático-pedagógicas que possam contribuir de forma a apreciar a construção, a aquisição e a compreensão do conteúdo de equações polinomiais do 1º grau, na sala de aula, e proporcionar aos professores, educadores matemáticos e demais interessados, alguns subsídios para uma reflexão sobre o ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Entre uma grande variedade de pesquisas na área, há a de Scarlassari (2007), na qual a pesquisadora descreve aulas desenvolvidas num processo mecânico, mas que enfatiza o desenvolvimento de conceitos.

Já na pesquisa de Ribeiro (2001) foram criadas duas situações com ênfase na resolução de questões: uma de forma procedural e outra com o auxílio da intervenção do pesquisador e da coletividade por meio de uma oficina, na qual observa que os alunos, trabalhando coletivamente sobre questões de Álgebra, com a intervenção do professor, têm um melhor rendimento em suas resoluções do que aqueles que trabalham no procedural, mecânico, com o uso de regras.

Vale ressaltar que, nas pesquisas, a Álgebra escolar, atualmente, tem sido pensada no contexto de uma Álgebra de produção de significado e de representações múltiplas. Mas, na prática escolar, tanto por observação própria como por meio de pesquisas, observa-se que o seu ensino-aprendizagem é ainda muito procedural, mecânico, cheio de regras e exercícios, sem que o professor tenha a preocupação de saber como o aluno pode aprender determinados conteúdos, como produz significados e que representação usa.

As representações múltiplas compreendem uma forma externa de expressar situações matemáticas, sejam elas na forma da representação verbal, representação tabular, representação numérica, representação algébrica ou representação geométrica.

Utilizar, em sala de aula, uma metodologia de ensino de Álgebra com representações múltiplas, é saber usar os meios algébricos, numéricos, geométricos, tabulares e até mesmo os lógicos de resolução de problemas.

É necessário enfatizar que o desafiador cenário educacional pode oferecer uma interessante oportunidade para a verificação de diferentes metodologias de ensino, proporcionando subsídios para a elaboração de uma metodologia didática, que venha favorecer a um ensino-aprendizagem que contribua para a construção, aquisição e compreensão do conteúdo. Entretanto, mesmo com a proposta apresentada neste trabalho, ainda assim existem dúvidas a respeito de como um modelo de proposta pedagógica possa vir a ressaltar sua importância diante do ensino-aprendizagem de Álgebra, devido à relatividade dos meios convencionais de abordagens dos conteúdos normalmente observados em sala de aula, no que se refere à metodologia de ensino dessa disciplina adotada por parte dos professores. Isso direciona a busca de uma aplicação da proposta pedagógica em sala de aula, na tentativa de identificar e analisar os possíveis resultados alcançados por ela, quando aplicada em sala de aula.

Assim, diante dos objetivos já mencionados, este trabalho, metodologicamente, é de cunho qualitativo e adota a modalidade de pesquisa pedagógica. Realizaram-se intervenções em sala de aula onde o pesquisador também foi professor dos sujeitos pesquisados. As intervenções se deram em dois momentos em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, o primeiro momento ocorreu em 2010 e o segundo em 2011, ambos em turma de 7º ano.

As intervenções foram destinadas à observação da relação de ensino-aprendizagem entre o professor e o aluno para a elaboração e aplicação prática da proposta pedagógica. As intervenções e os registros escritos dos alunos, no que se refere às atividades abordadas no decorrer da aplicação da proposta, são os dados necessários para as devidas análises.

A metodologia de ensino-aprendizagem adotada no trabalho de sala de aula foi Resolução de Problemas, aplicada ao conteúdo de equações polinomiais do 1º grau (a equação nomeia matematicamente um problema), quando possível de forma contextualizada, iniciando-se a resolução do problema com o uso da representação numérica e da representação tabular com o auxílio da representação verbal e, posteriormente, com a utilização das representações algébricas e geométricas, e, consequentemente, o uso das representações múltiplas.

No decorrer das aulas, buscou-se trabalhar cada problema individualmente e, posteriormente, em equipes constituídas de dois alunos, assim, os alunos podiam, inicialmente, decidir sua estratégia para a resolução e, após certo tempo, definido de acordo com o desenvolvimento dos alunos em sala de aula, eles passavam a trabalhar em equipe, visando interagir com os demais a sua estratégia, explorar o problema e promover a oportunidade dos alunos transformarem seu nível de desenvolvimento potencial em real.

Procurou-se trabalhar dentro da zona de desenvolvimento proximal do aluno. Na teoria de Vygotsky o conceito de zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial, em que, no nível de desenvolvimento real, o aluno é capaz de realizar as tarefas de modo independente e, no nível de desenvolvimento potencial, realiza as tarefas com a orientação ou participação de outra pessoa mais preparada. Para isso, sempre que possível, os problemas foram resolvidos, inicialmente, de forma individual e, após a observação do nível de desenvolvimento real da turma para a resolução dos problemas oferecidos, os alunos trabalharam de forma coletiva, com a mediação do professor-pesquisador, a fim de observar o nível de desenvolvimento potencial, no qual o espaço entre estes dois níveis, a zona de desenvolvimento proximal, pudesse vir a ser o fator norteador para a aplicação de atividades posteriores em sala.

Posteriormente, ao obterem-se em mãos materiais que indicavam a compreensão dos alunos, sobre problemas de equações polinomiais do 1º grau com o uso da representação numérica e tabular, reunidos com os padrões observáveis em tais representações, por parte dos alunos no decorrer das atividades e por nosso intermédio, ao utilizar a mediação, procurou-se proporcionar uma ponte para a representação algébrica, utilizando-se os recursos já mencionados.

Para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos abordados em sala de aula, no decorrer da aplicação da proposta pedagógica, procurou-se sanar as eventuais dúvidas sobre o conteúdo, assim como comprovar os resultados aritméticos e algébricos no campo geométrico, trabalhando-se a resolução dos problemas com o uso da representação geométrica.

Com as conexões entre as representações no mesmo problema, foi produzida uma possível construção dos conceitos do conteúdo, procurando-se responder a pergunta: *É possível desenvolver um conteúdo em um ensino-aprendizagem que* *contribua para a construção, aquisição e compreensão do conteúdo com o uso das representações múltiplas?*

Outro ponto do trabalho a ser refletido é sobre os termos ensino e aprendizagem. Ao trabalhar com esses dois termos em separado, numa primeira vista, pode-se pensar que há uma separação entre eles não só na escrita, mas na sua utilização e no seu entendimento. Acredita-se que eles tanto estão envolvidos nas questões da Educação como há uma participação efetiva de um em relação ao outro, principalmente na sala de aula, quando o professor ensina e o aluno aprende.

Portanto, o termo que expressa a visão de ensino e de aprendizagem na perspectiva de estarem interligados, em um processo, o professor, o aluno e a relação entre eles, é o termo composto ensino-aprendizagem, o qual será o termo escolhido para ser utilizado no decorrer deste trabalho.

O capítulo 2, intitulado *Compreendendo o ensino-aprendizagem da Álgebra*, traz uma abordagem desse tema, por meio dos subtítulos: Álgebra: da sua história ao seu ensino – mostra as principais mudanças que ocorreram na notação algébrica ao longo do tempo, no âmbito de sua história e das reformas de ensino ocorridas no século XX; Ideias sobre as representações múltiplas – identifica as principais representações e sua utilização; Entendendo a Álgebra – traz as ideias de atividade algébrica e pensamento algébrico que caracterizam a Álgebra, objeto do trabalho; Vygotsky e a sala de aula – relação da teoria de Vygotsky com o ensino-aprendizagem na sala de aula.

O capítulo 3, intitulado *Pesquisas sobre ensino-aprendizagem da Álgebra*, traz uma investigação na literatura do ensino de Álgebra, com o objetivo de obter informações para verificar, ou até mesmo comprovar, a existência de dificuldades dos alunos na aprendizagem de conteúdos de Álgebra, não só quanto ao aspecto prático, quanto ao aspecto teórico. Visa obter subsídios necessários à elaboração da proposta pedagógica para um ensino-aprendizagem de Álgebra, mediante a utilização da ferramenta representações múltiplas. As fontes investigadas são de pesquisas realizadas em instituições nacionais, como, por exemplo, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), sendo completada com a literatura internacional como o Yearbook (2001) do NCTM – Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos.

O capítulo 4, intitulado *Ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau em sala de aula: Trabalhando com as representações múltiplas*, está subdividido em: *Momento 01: um primeiro contato com a sala de aula pesquisada* – apresenta uma visão dos acontecimentos ocorridos na primeira intervenção em sala de aula, bem como comentários dos dados levantados por meio dos registros dos alunos e a forma de organização para a elaboração da proposta pedagógica*; Observações do Momento 01*; *Momento 02: ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau na sala de aula: um plano em perspectiva* – traz as ideias da estrutura da proposta pedagógica preconizada no momento 01 que podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula; *Momento 02: ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau na sala de aula: descrição da aplicação da proposta pedagógica* – é realizada a aplicação da proposta pedagógica na segunda intervenção em sala de aula e, nesse subtópico, é apresentada uma descrição de como foi efetivado esse ensino, bem como são apresentados alguns dados levantados e algumas conclusões. A primeira e a segunda intervenção ocorreram em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, situada na cidade de Campina Grande, Paraíba, em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, fase escolar em que os alunos, normalmente, têm os primeiros contatos com a Álgebra.

2. COMPREENDENDO O ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

2.1. Álgebra: da sua história ao seu ensino

Álgebra e Matemática, palavras distintas na escrita e que estão interligadas no que cada uma representa no campo educacional, mas que muitos insistem em separá-las, como se houvesse uma distinção entre elas, não só na escrita, mas também quanto ao ensino (por parte dos professores), na aprendizagem (na visão dos alunos), na confluência do ensino-aprendizagem, ou na história da Matemática. Nesse tópico, faz-se necessária uma breve história da Matemática (consequentemente, também da Álgebra), não só no âmbito da sua descoberta (ou criação, como muitos defendem), mas também na perspectiva das reformas quanto à forma de ensinar Álgebra, que ocorreram no decorrer do tempo.

Dificilmente será encontrada uma origem precisa para o surgimento da Matemática, mais ainda da Álgebra, mas há pesquisas que apontam para o surgimento desta por volta de 3000 a.C., na região da bacia do Mediterrâneo, pois é comprovado que os babilônios e os egípcios a utilizavam desde essa época. Dentre os pesquisadores que trazem a parte histórica sobre o desenvolvimento da Álgebra, há: Araujo Segundo (2009), Keppke (2007), Panossian (2008) e Scarlassari (2007).

Com base nas pesquisas supracitadas, pode-se observar que, desde a época de 3000 a.C. até os dias atuais, a Álgebra passou por diversas modificações, tanto no âmbito da sua notação matemática como no âmbito da resolução de questões que envolvem seu conteúdo. Dentre as modificações que influenciaram principalmente o desenvolvimento da escrita algébrica, destacam-se três estágios: Álgebra retórica, Álgebra sincopada e Álgebra simbólica.

No primeiro estágio, chamado de Álgebra retórica (a arte de bem argumentar), que é o primeiro momento da utilização da Álgebra pelos babilônios e pelos egípcios, na época da possível origem da Álgebra, esta era escrita e utilizada na forma de prosa, como, por exemplo, na seguinte situação: *o quadrado do dobro da idade é igual ao quádruplo da idade*.

Nesse primeiro estágio, as situações algébricas e até mesmo os argumentos da resolução dos problemas eram escritas nessa forma de prosa, sem haver a utilização de símbolos ou simplificações na escrita.

Grandes matemáticos, que deixaram contribuições expressivas para o avanço da Álgebra, como, por exemplo, Tales de Mileto (625 – 574 a.C.), Pitágoras de Samos (560 – 480 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.), viveram em uma época em que a Álgebra se encontrava no estágio retórico.

No segundo estágio, chamado de Álgebra sincopada (supressão de fonemas), a Álgebra passou a sofrer modificações no que se refere à sua escrita, surgindo, assim, abreviações na notação algébrica. Distinguem-se a ideia de escrita e notação, tomando-se como base o fato de que na escrita ocorre o ato de transcrever, literalmente, a situação matemática, fato presente na Álgebra retórica, enquanto que na notação aparece a utilização de símbolos para expressar as situações algébricas, que ocorre na Álgebra sincopada.

Na Álgebra sincopada a utilização da prosa ainda continuou presente, mas com certa moderação, já que, a partir desse estágio, começaram a aparecer as abreviações, mais utilizadas nas operações e quantidades que ocorriam com maior frequência, como, por exemplo: *o quadrado de uma incógnita*, escrita literalmente na forma de prosa, no primeiro estágio, que passou a ser abreviada por ΔY , pela notação algébrica, no estágio da Álgebra sincopada.

Um dos principais colaboradores para a sincopação da Álgebra, isto é, aquele que proporcionou mudanças para a transição da Álgebra retórica para a Álgebra sincopada foi Diofanto, por volta do século III d.C.

Por fim, o terceiro e último estágio, o estágio da Álgebra simbólica. Surgiu por volta de 1500 d.C. No decorrer dos anos, esse estágio sofreu inúmeras modificações, só havendo uma maior estabilização na notação algébrica por volta do século XVII e é, justamente, a Álgebra simbólica que a humanidade utiliza.

No estágio da Álgebra simbólica surgiram as mais diversas obras matemáticas que contribuíram, direta e indiretamente, para sua evolução, ensejando um processo de reformulação e modernização na notação. Alguns dos colaboradores que contribuíram para essa modernização foram: Isaac Newton (1642 – 1727 d.C.); Johann Bernoulli (1667 – 1748); Leonhard Euler (1736 – 1813); Laplace (1749 – 1827); Dedekind (1831 – 1916).

Aproximadamente a partir do século XVI, que é o provável período de evidenciação do estágio da Álgebra simbólica, a Álgebra evoluiu, mediante os resultados expressivos encontrados pelos matemáticos, no que se refere à resolução das equações algébricas, que eram apresentadas como o principal foco de conteúdo na Álgebra. Alguns desses resultados são citados por Ponte (2005), como, por exemplo, essencialmente, a descoberta do Teorema Fundamental da Álgebra, que traz o resultado de que toda equação algébrica da forma P(x) = 0, de grau $n \geq 0$, em que P(X) é um polinômio; admite pelo menos uma raiz complexa, sendo essa raiz real ou não. Com base nesse teorema, diante da utilização da decomposição, chegou-se à conclusão de que uma equação de grau *n* tem *n* raízes.

Outra descoberta ocorrida nesse período e que influenciou diretamente a evolução da Álgebra, foi realizada por Abel (1802-1829) sobre a impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior a quatro.

Essas descobertas, assim como inúmeras outras, referentes à resolução de equações algébricas, bem como de sistemas de equações, são evidências de que a Álgebra era vista de um modo procedural. Era baseada, fundamentalmente, no conteúdo de equações, apresentando irrelevâncias quanto a aspectos que, nos dias atuais, são fundamentais para seu ensino-aprendizagem, como, por exemplo, o pensamento algébrico que, de acordo com Ponte (2005), está interligado com o estudo das estruturas (compreender padrões, relações e funções), com a simbolização (utilização de símbolos algébricos para representar e analisar situações matemáticas) e com a modelação (representar e compreender relações quantitativas por meio de modelos matemáticos).

Após a modernização da notação algébrica, ao longo dos anos e durante os três estágios da Álgebra, surgiram, no século XX, de forma mais evidente, os questionamentos sobre seu ensino. Ela era apresentada como uma ferramenta para manipulação de símbolos, formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas, e esse aspecto refletia-se nos currículos escolares, gerando dificuldades aos alunos quanto às adaptações e às complexidades desse instrumento, em um meio procedural.

Em um primeiro momento, tem-se Kieran (2007), mencionando pesquisas do início do século XX, pesquisas de Hotz (1918) e Reever (1926), que apresentavam como foco a dificuldade dos alunos em resolver vários tipos de equações algébricas de 1º grau. Posteriormente, matemáticos e profissionais com vínculos na Álgebra, nas mais diversas áreas da Ciência, clamavam não só por benfeitorias na sua escrita, isto é, melhor interpretação, universalização da notação e simplificação na escrita, mas também por modificações no ensino dessa disciplina que proporcionassem um aprendizado que contribuísse para a construção, aquisição e compreensão do conteúdo, já que não era suficiente ter apenas uma Álgebra fácil de ser escrita e que era compreendida por poucos. Necessitavam de uma Álgebra, da qual muitos não só conseguissem utilizar-se dela de forma eficiente e hábil, mas também o fizessem com compreensão dos seus conceitos.

Com relação ao seu ensino, a partir do século XX surgiram inúmeras mudanças. Nesse século, as mudanças, na área da Álgebra, não eram tanto relativas à modernização da notação algébrica, mas, sim, aos procedimentos: como se deveria ensinar Álgebra, de modo a influenciar a confluência *ensino-aprendizagem*.

Assim, a questão no século XX não se reduzia mais à produção da Álgebra como ferramenta para manipulação de símbolos na resolução de questões, mas, sim, a de saber como ensinar a Álgebra aos alunos em sala de aula, a fim de que seu conhecimento pudesse perdurar e produzir novos conhecimentos nesse campo.

Procurando trazer alguns comentários da história das reformas de ensino da Álgebra, tomou-se como base os acontecimentos norte-americanos mencionados por Kieran (2007).

Na década de 60, de acordo com essa autora, o ensino da Álgebra foi diferenciado por trazer a influência das ideias da Psicologia do desenvolvimento cognitivo, defendidas, principalmente, por Piaget. Com isso, seu ensino, que antes priorizava as notações, passava a oferecer espaço para uma proposta de ensino que se preocupava com o cognitivo, com a ideia de compreensão de conceitos.

A partir da década de 80, as ideias de Piaget não só influenciaram os pesquisadores e as reformas do ensino da Álgebra, como também foram incorporadas nessa área. Com isso, as ideias do construtivismo, representado por Piaget, e do socioconstrutivismo, representado por Vygotsky, passaram a tomar forma e corpo com seu princípio fundamental: a construção do conceito, por parte do sujeito, no campo da cognição. Essas influências direcionaram os pesquisadores a procurar mover sua atenção para os erros cometidos pelos alunos, para as formas de compreensão dos conceitos e procedimentos algébricos. Dessa forma, mesmo o foco sendo a cognição, como ocorreu na década de 60, esse foco passou a ser mais abrangente.

De acordo com Kieran (2007), pode-se observar que, a partir da década de 90 em diante, o ensino da Álgebra continuou seguindo seu caminho na linha do construtivismo (e do socioconstrutivismo), da cognição, mas, cada vez mais, numa forma mais ampla por meio da qual os pesquisadores passaram a se preocupar não só com seu ensino em sala de aula, mas também com fatores que influenciassem a aprendizagem, como os fatores sociais representados, por exemplo, pelos instrumentos culturais. Isso acarretaria uma maior quantidade de estudos com foco nas relações professor-aluno e aluno-aluno, por meio dos quais as pesquisas se direcionavam, também, para identificar e mapear o caminho para o desenvolvimento e a compreensão do significado algébrico, com atenção voltada para os conteúdos da Álgebra escolar e para as demais atividades algébricas.

Portanto, seguindo as ideias precursoras das reformas do ensino da Álgebra, no século XX e XXI, que se utilizam da cognição, este trabalho está sendo desenvolvido considerando como ferramenta de ensino-aprendizagem da Álgebra as *representações múltiplas* que são utilizadas no campo da cognição para a compreensão e construção dos conceitos inerentes aos conteúdos algébricos.

2.2. Ideias sobre as representações múltiplas

Para se conseguir uma proposta pedagógica, cujo modelo estrutural será aqui preconizado, há necessidade de uma reflexão sobre a questão de os alunos se depararem com fortes obstáculos no ensino-aprendizagem de Álgebra, mediante sua apresentação na forma de expressões e equações, apresentação, normalmente, utilizada pelos professores em sala de aula, afastando o aluno da Matemática do seu dia a dia e dos processos de assimilação.

Uma proposta pedagógica para o ensino-aprendizagem dos conteúdos algébricos, constando da utilização das representações múltiplas, pode proporcionar uma aprendizagem que valorize e contribua para a construção, aquisição e compreensão dos conteúdos algébricos.

A ideia de representações múltiplas tem aparecido em publicações do *Principles and Standards for School Mathematics*[1] (2000) produzido pelo NCTM[2], dos EUA e Cuoco & Curcio (2001), também publicação do NCTM, entre outros.

O documento *Principles and Standards* apresenta dez (10) *standards* (padrões). Cinco deles são padrões de conteúdo: 01. Números e Operações, 02. Álgebra, 03. Geometria, 04. Medida, 05. Análise de Dados e Probabilidade, e cinco outros padrões de procedimentos: 06. Resolução de Problemas, 07. Raciocínio e Prova/Demonstração, 08. Comunicação, 09. Conexões e 10. Representação. Nesse documento, a *Representação* ganha destaque como norma também, sendo discutida ao longo de todo o currículo escolar.

Nessa discussão de representação, utilizada nos *Principles and Standards* (2000), há também a ideia de *representações múltiplas* conforme abordada no livro de Cuoco & Curcio (2001) e essa ideia pode ser considerada como uma alternativa viável para o ensino da Álgebra.

De acordo com o *Principles and Standards* (2000):

> O termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma à forma em si mesma. (STANDARDS 2000, p. 75)

Desse modo, pode-se observar que a ideia de representações múltiplas, neste trabalho, é similar à ideia de representação apresentada no *Principles and Standards* (2000). Neste trabalho, o termo representações múltiplas significa diversas representações externas, que compreendem a representação verbal, a representação numérica, a representação tabular, a representação algébrica e a representação geométrica que, quando são realizadas conexões entre elas, podem influenciar nas representações internas que os alunos realizam, favorecendo o ensino-aprendizagem.

Dentro das representações múltiplas (as múltiplas formas de representação), cada representação é constituída por pontos que favorecem o ensino-aprendizagem, mas cada uma, por si só, não produz todas as condições necessárias à aprendizagem.

---

[1] *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*

[2] *National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional dos Professores de Matemática)*

Por conseguinte, há a necessidade de se trabalhar em conjunto com várias representações, aumentando, assim, a probabilidade de que haja um preenchimento por parte das representações múltiplas das lacunas deixadas, quando trabalhada isoladamente cada representação.

Friedlander e Tabach (2001) trazem a ideia de quatro (04) representações, que são: a representação verbal, a representação numérica, a representação gráfica e a representação algébrica. A representação verbal – comumente utilizada para expressar detalhes de situações problemas, ou para comunicar a interpretação da solução final, e até mesmo, para explicar processos de resolução apresentados na forma escrita – pode proporcionar maior percepção do ambiente matemático e de seus padrões, facilitando a conexão entre a matemática escolar e a matemática vivenciada no cotidiano pelos alunos.

Por um lado, o uso da representação verbal possibilita não só um subterfúgio do rigor de Matemática e de seus símbolos, para uso de expressões mais familiares aos alunos, mas também facilita a compreensão da escrita matemática, ao ser relacionada com o idioma vernáculo, permitindo ao aluno obter maior possibilidade de assimilação dos conteúdos algébricos.

Por outro lado, o próprio idioma vernáculo, no caso, o português, é repleto de dubiedade, quanto ao significado das palavras, podendo direcionar o aluno a um caminho errôneo na compreensão e percepção dos conceitos trabalhados pelo professor em sala de aula, devido às interpretações errôneas, gerando dificuldades na comunicação matemática realizada pelo professor.

A representação verbal é uma ferramenta a mais para o ensino da Álgebra escolar, mas requer o uso de outra representação que venha suprir as desvantagens supracitadas.

A representação numérica aparece no ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos com a utilização dos números e das operações necessárias; pode ter como exemplo, nas equações polinomiais do 1º grau, a resolução de questões por meio de tentativa e erro, em que ocorre a atribuição de um valor numérico à incógnita da equação em questão e verifica-se, após efetuar as operações, se a sentença é verdadeira.

Na Matemática escolar, a representação numérica, frequentemente, precede a representação algébrica, mas isso não deve ser tomado como uma regra rígida. A utilização da representação numérica antes da representação algébrica, no ensino dos conteúdos matemáticos e na forma de ensinar esses mesmos conteúdos, faz o aluno trazer para a sala de aula suas experiências cotidianas com a aritmética.

Tome-se como exemplo esta situação: ao ensinar o aluno que (7+7+7)/3 é igual a 7 porque primeiro são somadas as parcelas 7, obtendo-se uma soma igual a 21, e depois, dividindo-o por 3, obtém-se 7, ele estará trabalhando no campo da representação numérica. Mas, ao direcioná-lo a trabalhar com a adição de n parcelas iguais, cuja soma é dividida por n (n > 0), encontrando-se o número repetido que, no exemplo citado, é o número 7. Mostrando ao aluno que, na situação da adição de uma quantidade de parcelas iguais, ser dividido pela quantidade de termos então será obtido, como resultado, o próprio termo, nessa situação estará generalizando-se e trabalhando-se com a representação algébrica.

Essas duas formas de resolver o mesmo problema são independentes, o aluno pode ter total capacidade de compreensão, independente de que forma lhe for ensinada primeiro. Assim, não necessariamente deve ser obrigatório utilizar a representação algébrica apenas após a abordagem com a representação numérica.

De acordo com Friedlander e Tabach (2001), a representação numérica pode ser uma ponte para a representação algébrica, gerando maior compreensão do contexto das questões trabalhadas em sala de aula, bem como do conteúdo abordado – neste caso direcionando a Álgebra, mais pontualmente, nas equações polinomiais do 1º grau.

Utilizar exclusivamente a representação numérica pode gerar uma perda para o aluno, pois o impede da possibilidade de usufruir das ideias da generalização, deixando de lado uma visão geral da abordagem da questão e do conteúdo.

Diante da perspectiva de Friendlander e Tabach (2001), a representação numérica é uma ferramenta a mais para o ensino da Álgebra escolar, mas requer o uso de outra representação que venha suprir as lacunas deixadas por ela. Assim, é indicado que utilize outras representações em conjunto com a numérica que venha suprir as necessidades em que o professor priorize construir e estruturar os conceitos, no intuito de aplicá-los nas resoluções de equações e com isso realizar um ensino-aprendizagem baseado em uma metodologia didática que privilegia a construção do conteúdo da Álgebra escolar com compreensão.

A representação algébrica é coexistente com a representação numérica, uma influencia no desenvolvimento da outra. A representação algébrica procura generalizar o que pode ser visto pontualmente na representação numérica, assim como também procura identificar e representar padrões de forma eficaz diante do conteúdo abordado, mas, de acordo com Friedlander e Tabach (2001), a utilização, de forma exclusiva, da representação algébrica pode dificultar o desenvolvimento da habilidade de interpretação dos resultados obtidos por parte dos alunos.

Prosseguindo com as ideias de Friendlander e Tabach (2001) referentes às representações, observa-se que a representação geométrica, na qual se utiliza de gráficos e ilustrações, realizando-se uma comunicação visual, trabalha no campo da intuição do aluno; sua utilização é aceitável pelos alunos que têm afinidade com abordagens visuais, mas que, devido, normalmente, faltar precisão nesse tipo de representação, os objetivos a serem alcançados no ensino-aprendizagem do conteúdo de equações polinomiais do 1º grau podem ser comprometidos e, consequentemente, sua utilidade.

Pode-se observar que cada representação terá um impacto mais consistente em um ensino-aprendizagem que direcione o aluno na construção, aquisição e compreensão do conteúdo, de acordo com a atividade e o conteúdo matemático que se tem em mãos, em que cada representação apresenta vantagens e desvantagens. Dessa forma, a utilização das representações múltiplas pode possibilitar que as vantagens das representações em conjunto possam suprir as desvantagens apresentadas pelas representações isoladas, ajudando o aluno a conseguir realizar conexões entre as representações múltiplas, bem como migrar de uma representação para outra, podendo, assim, efetivar a construção, aquisição e compreensão do conteúdo algébrico pelo aluno.

Na literatura, no que se refere às representações múltiplas, encontram-se pesquisadores que defendem seu uso e/ou de ideias a elas relacionadas no ensino-aprendizagem da Álgebra, como, por exemplo, Robayna:

> Para o processo ensino-aprendizagem da álgebra, o professor pode valer-se, ainda, das atividades que explorem as diferentes linguagens matemáticas (habitual, aritmética, geométrica e algébrica), que possibilitam a adequação das características e capacidades de cada aluno, oferecendo-lhes amplas possibilidades de exploração de um mesmo conceito e segundo vários ângulos. (ROBAYNA *et al*, 1996 *Apud* MIRANDA; GRANDO, 2006, p. 67.)

Além da literatura nacional, exemplificada por Robayna, também há na literatura internacional pesquisadores que defendem a utilização das representações múltiplas e/ou das ideias relacionadas a elas no ensino-aprendizagem da Álgebra;

por exemplo, Friedlander e Tabach (2001), que afirmam: *The use of verbal, numerical, grafical, and algebraic representations has the potential of making the processo of learning álgebra meaningful and effective*[3].

Além dos *Principles and Standards* (2000), Robayna (2006) e Friedlander e Tabach (2001), ainda há pesquisadores que defendem o uso de mais de uma representação, podendo ser entendidas como representações múltiplas; por exemplo, a pesquisadora Kieran (2007, p. 712) que assim observa: *The opportunity to coordinate objects and actions within two different representations, such as the graphical and the letter-symbolic, is considered by many to be crucial in creating meaning in algebra*[4].

A pesquisadora Kieran (2007) traz um levantamento de pesquisas que mostram o uso de representações múltiplas, juntamente com o uso da tecnologia no ensino-aprendizagem da Álgebra:

> *Generational Activity with Multiple Representations*. Most of the approaches to algebra that make use of multiple representations define themselves as functional approaches. Tabach and Friedlander (cited in Kieran & Yerushalmy, 2004) suggested that three factors allow for a functional approach in the teaching and learning of algebra: the potential to produce ample numerical tables, the need to use general expressions to express the data in these tables, and the possibility of obtaining a wide variety of corresponding graphs. […] *Tabular Representations and the Letter-Symbolic***.** Recent studies involving the tabular displays of spreadsheets have investigated whether and how the use of spreadsheet methods lends meaning to algebra. […] *Connections Among Representations*. […] research continues to show that various technological environments can help in developing students' algebraic thinking by building links among symbolic, tabular, and graphical representations[…]. (KIERAN 2007, pp. 718-719)[5].

---

[3] Tradução nossa. O uso das representações verbal, numérica, gráfica e algébrica tem o potencial de fazer o processo de aprender álgebra significante e eficaz.

[4] Tradução nossa. A oportunidade para coordenar objetos e ações dentro de duas representações diferentes, como a gráfica e a letra-simbólica, é considerada, por muitos, crucial na criação de significado em álgebra.

[5] Tradução nossa: *Atividade Geracional com várias representações*. A maioria das abordagens de álgebra que faz uso de representações múltiplas se define como abordagens funcionais. Tabach e Friedlander (citados em Kieran e Yerushalmy, 2004) sugerem três fatores que permitem uma abordagem funcional no ensino e na aprendizagem da álgebra: o potencial de produzir ampla tabela numérica, a necessidade de usar expressões gerais para expressar os dados dessas tabelas, e a possibilidade de obtenção de uma ampla variedade de gráficos correspondentes [...] *Representações Tabulares e de Letra-Simbólica*. Estudos recentes envolvendo as exposições de quadros de planilhas têm investigado se e como o uso de métodos de planilha dá significado para a álgebra. [...] *Conexões Entre Representações***.** [...] a pesquisa continua a mostrar que os diversos ambientes tecnológicos podem ajudar no desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos através da construção de vínculos entre representações simbólicas, tabular e gráfica [...].

Goldin e Shteingold (2001) também defendem o uso das representações múltiplas, dizendo:

> Let us remark immediately that a mathematical representation cannot be understood in isolation. […]The representational systems important to mathematics and its learning have structure, so that different representations within a system are richly, related to one another. (GOLDIN E SHTEINGOLD 2001, p. 1)[6]

A defesa do uso das representações múltiplas é feita pelos pesquisadores supracitados e pelo documento *Principles and Standards* (2000) com base na contribuição que as representações múltiplas podem proporcionar ao ensino-aprendizagem. O *Principles and Standards* (2000, p. 75) observa que *A forma pela qual as ideias matemáticas são representadas é essencial para o modo como as pessoas compreendem e utilizam essas ideias*. E no *Principles and Standards* (2000, p. 76) também se encontra que *As representações podem ajudar os alunos a organizar o seu raciocínio. A utilização das representações pelo aluno poderá ajudar a tornar as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão*.

Diante de todas essas questões, devidamente ponderadas e mencionadas, referentes às representações múltiplas, tanto no aspecto de conceito como na justificativa da validade do seu uso no ensino-aprendizagem da Álgebra, pretende-se realizar uma expansão desse trabalho, com o objetivo de propor uma opção de reestruturação da metodologia didática, comumente apresentada por professores em sala de aula, por meio de uma proposta pedagógica que utilize as representações múltiplas como uma ferramenta para obter um ensino-aprendizagem da Álgebra com foco na construção, aquisição e compreensão do conteúdo.

Evidentemente, a expansão desse trabalho deve passar por modificações realizadas pelo professor, ao utilizá-lo em sala de aula, independentemente dos conhecimentos utilizados nele, para atingir um nível de significância para cada turma, pois cada turma e cada aluno têm seu próprio aspecto de conhecimento algébrico.

Outro ponto que está relacionado com as representações múltiplas, além da sua forma externa e sua utilização, é a influência que as representações múltiplas

---

[6] Tradução nossa: Notemos imediatamente que uma representação matemática não pode ser entendida de forma isolada. [...] Os sistemas representacionais são importantes para a matemática e sua estrutura de aprendizagem, de modo que diferentes representações dentro de um sistema são ricamente, relacionados entre si.

proporcionam internamente, isto é, no campo cognitivo do aluno. Quanto a esse aspecto, deve-se salientar que, nos *Principlesand Standards*, há uma preocupação com o interior, além do externo, e que, de acordo com Goldin e Shteingold (2001), a interação das representações externas como, por exemplo, a numérica e a algébrica, com as representações internas como, por exemplo, a atribuição de significado às notações algébricas por parte dos alunos, é fundamental para a eficácia do ensino e da aprendizagem. Para Goldin e Shteingold (2001), sejam quais forem os significados e as interpretações feitas internamente pelos alunos, o professor pode trazê-las para uma representação externa.

Sendo assim, pode-se observar que tanto as representações internas como as externas andam de mãos dadas, quando se pretende obter um ensino-aprendizagem que valorize a construção, a aquisição e a compreensão da Álgebra.

Portanto, ao utilizar a representação externa no ensino-aprendizagem da Álgebra, está se trabalhando indiretamente com a representação interna que o aluno pode fazer da representação externa realizada pelo professor, aproximando-se assim cada vez mais do conceito de representação abordado no *Principles and Standards* (2000) e de sua utilização, assim como dos pesquisadores já mencionados anteriormente.

2.3. Entendendo a Álgebra

Durante várias décadas tem-se perguntado *como se aprende* e *como se ensina*. Tais perguntas tornaram-se um enigma e até mesmo um problema no meio educacional. Um enigma, pois não há, até o presente momento, unanimidade na resposta, o que dificulta, evidentemente, uma possível solução adequada para essa questão; e, também, um problema, pois há interesse dos profissionais da área da Educação, bem como de outros profissionais, de que haja uma modificação no ensino para que possa ocorrer uma aprendizagem com compreensão de fato, mas é sabido que esta só será viável a partir do momento em que conseguir determinar o caminho adequado a ser seguido, a fim de que haja um ensino que promova uma aprendizagem com resultados mais perceptíveis do que aqueles que, normalmente, são utilizados em sala de aula até o presente momento.

No meio educacional, não apenas se têm realizado perguntas, mas buscado respostas para elas, pelo menos, um direcionamento que leve a um caminhar em uma estrada mais próxima, ou até mesmo coincidente, por um caminho que direciona a solução desses problemas.

Muitos estudiosos, educadores, professores e demais interessados na área da Educação envolveram-se com as questões do ensino e da aprendizagem sem chegar a uma conclusão, de forma unânime, para as perguntas: *Como se aprende?* E *como se ensina?*

Dentro desse campo, o educacional, no qual ocorrem as mais diversas pesquisas no que se refere ao ensino e à aprendizagem, há o campo da Educação Matemática, que, não diferente daquele já mencionado, busca respostas para essas perguntas.

A questão trazida à tona, no momento, refere-se ao fato de que, não necessariamente, se precisa de uma resposta pronta e fixa, mas, sim, de um caminho a ser seguido e mutável, de acordo com os objetivos a serem alcançados pelos professores em sala de aula, até mesmo porque o ensino e a aprendizagem envolvem o ser humano que tem características cognitivas mutáveis (sem se referir à questão física, que pode influenciar diretamente no desempenho da aprendizagem, mas que não é objeto desse trabalho).

Vale ressaltar que, na perspectiva do ensino e da aprendizagem da Álgebra, não serão tratados isoladamente esses aspectos, mas, sim, a confluência entre ambos, não só na sua escrita, mas principalmente no seu caminhar, por existir também uma cumplicidade entre eles.

O professor, ao ensinar, estará proporcionando a oportunidade de que um aluno aprenda. Um aluno aprende quando alguma coisa lhe é ensinada por algo ou alguém, inclusive, cada indivíduo pode aprender a partir das experiências que teve e observa, e tal concepção pode ser válida para qualquer ser humano; com isso, o caminho do ensino e o da aprendizagem podem ser os mesmos, estarem paralelos ou simplesmente se cruzarem. Dessa forma, o termo que melhor se enquadra, e expressa, a visão de ensino e de aprendizagem a ser adotada nesse trabalho, é *ensino-aprendizagem*.

Essa perspectiva de ensino-aprendizagem será direcionada ao conteúdo a ser abordado: a Álgebra. Como o objetivo é de trabalhá-lo com foco nas equações polinomiais do 1º grau, utilizando-se a ferramenta das representações múltiplas, então há necessidade não só de trabalhar com o conteúdo em termos de conceitos, aplicações, resolução das equações polinomiais do 1º grau e de problemas relacionados, mas também compreender que o ensino-aprendizagem da Álgebra está muito além do que meras representações de conteúdos, que o mesmo está interligado com uma atividade algébrica, assim como com o pensamento algébrico, no campo da cognição, e que é preciso que se tenha uma maior compreensão do que é uma atividade algébrica e o pensamento algébrico, para poder compreender o que é a Álgebra em um todo e, só assim, trabalhar com seus subtópicos, como, por exemplo, as equações polinomiais de 1º grau.

Talvez, a princípio, perguntar o que é Álgebra seja uma pergunta considerada ingênua, mas, ao questionarem-se, os professores de Matemática em sala de aula, assim como os educadores matemáticos, é possível encontrar profissionais com dificuldade não só de explicar o que realmente é Álgebra, mas com dificuldade de identificar a presença e a utilização desta no decorrer das aulas e, consequentemente, com dificuldades de expressar o que é a *atividade algébrica* e o *pensar algebricamente*, ou quando esse pensamento ocorre.

Lins e Gimenez (1997) trazem diversas concepções de atividade algébrica, além de procurar mostrar que as concepções referentes à Álgebra estão ligadas aos conceitos atribuídos à atividade algébrica. De acordo com Lins e Gimenez (1997), mediante a concepção que se tenha da atividade algébrica, também haverá uma concepção do que é a Álgebra.

Para esses autores, entre as concepções que os professores possuem, referentes à atividade algébrica, uma delas é a visão de conteúdos ligados à Álgebra como, por exemplo, as equações. A abordagem de equações é caracterizada como uma realização de uma atividade algébrica, mesmo que esse conteúdo possa ser considerado um conteúdo da Álgebra, com unanimidade entre os profissionais da área. Não há consenso quando se busca reconhecer todos os conteúdos que fazem parte ou não da Álgebra. Há dificuldades em identificar com clareza, por exemplo, os gráficos, como conteúdos algébricos ou não. A partir do momento em que não há um consenso sobre os conteúdos algébricos, isso implica em uma dificuldade em propor e/ou desenvolver um currículo da Álgebra escolar que venha proporcionar um subsídio a mais na construção, aquisição e compreensão da Álgebra lecionada em sala de aula.

Um segundo ponto abordado por Lins e Gimenez (1997), referente à concepção sobre a atividade algébrica, está ligado à visão de processos e nomenclaturas: é a ideia de *trabalhar com letras*. Para os defensores dessa visão, a atividade algébrica ocorre quando há a utilização de notações algébricas. Dessa forma, a Álgebra relaciona-se muito mais com a questão da escrita do que com a ideia de representar ideias gerais por meio do uso de *letras*. Para eles, nessa visão *letrista* da Álgebra, há um pano de fundo que está relacionado com o desenvolvimento da escrita algébrica, no decorrer do tempo, vinculando os estágios da história da Álgebra (retórica, sincopada e simbólica) com os estágios da escrita da criança no decorrer dos seus anos letivos. Alguns pesquisadores defendem que a escrita dos alunos tem um desenvolvimento, na aparência, relativamente semelhante ao desenvolvimento da escrita algébrica no decorrer da história, proporcionando uma ideia de fases de desenvolvimento intelectual, enquanto outros pesquisadores dizem que tais níveis de desenvolvimento podem ser meramente instruções inadequadas passadas aos alunos no ensino-aprendizagem da Álgebra.

Um terceiro ponto, abordado por Lins e Gimenez (1997), foge da visão direcionada a uma maior preocupação com o que se apresentava diante dos *olhos* para expressar se há uma atividade algébrica ou não. Nesse ponto, observa-se a valorização atribuída ao cognitivo, isto é, não é necessário apenas ver para crer o que está acontecendo à Álgebra, mas apenas perceber que ela está presente no pensamento do aluno no decorrer da atividade. Ao observar o aluno e verificar a existência de pensamento algébrico, quer dizer, sentir se ele dá atenção não apenas ao que está descrito matematicamente, mas também às relações existentes, de tal forma a representar e raciocinar sobre essas relações de modo abstrato, pode-se chegar à conclusão de que há uma atividade algébrica e, consequentemente, está se trabalhando com a Álgebra.

Independente desses pontos de vista e de outros pontos não mencionados neste trabalho, todos buscam uma atividade algébrica que está relacionada com a Álgebra da sala de aula.

Como se pode observar, há um vínculo direto entre a concepção atribuída à atividade algébrica e à concepção de Álgebra. Lins e Gimenez (1997) trazem a sua opinião referente a ela: *A atividade algébrica consiste no processo de produção de significado para a álgebra*, assim como eles expõem a ideia de Álgebra:

> A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade (LINS; GIMENEZ, 1997).

2.4. Vygotsky e a sala de aula

Lev Semenovich Vygotsky nasceu na cidade Orsha, na antiga Bielorrússia, em 17 de setembro de 1896. Segundo Oliveira (1997), Vygotsky teve parte da sua educação formada em casa e apenas aos 15 anos ingressou em escola privada. Posteriormente, ingressou na Universidade de Moscou, formando-se em Direito em 1917. Visando aprofundamento dos seus conhecimentos estudou História, Filosofia, Psicologia, Literatura e Medicina. Vygotsky foi professor e também pesquisador nas áreas da Psicologia, Pedagogia, Filosofia e Literatura.

Segundo Oliveira (1997), Vygotsky e seus colaboradores trabalharam com o estudo da formação de conceitos que podem ser aplicados em sala de aula, pois são processos que direcionam a aprendizagem.

De acordo com Vygotsky (2005), a formação de conceitos na criança passa por três fases, a primeira fase a do sincretismo, a segunda a do pensamento por complexo, para só então a criança chegar à fase do pensamento por conceitos quando os conceitos já estão formados.

Uma criança, quando se encontra na fase do sincretismo, ao escutar a palavra *não*, pode realizar distintas ações, devido à associação que normalmente os adultos fazem de tal palavra envolvendo outras, podendo representar como, por exemplo, *ficar parado* com *afastar-se,* dentre outras, pois a criança não compreende, nessa fase, o conceito da palavra *não*.

Nessa fase pode ocorrer a seguinte situação: uma criança, ao direcionar-se a uma tomada para colocar a mão, ao ouvir um adulto mencionar *não* (por exemplo: *Não mexa*), poderá tomar a decisão de ficar parada, mas, mesmo assim, direcionar a mão à tomada; ao ouvir a palavra *não* pela segunda vez, pode compreender que tomou a decisão equivocada e assim optar pela segunda ação – evitar colocar a mão na tomada –, ao invés de essa decisão ser tomada na primeira ação, por não ter associado o conceito da palavra *não* com outra palavra utilizada pelo adulto nessa situação.

Na fase dos complexos, de acordo com Vygotsky (2005), a criança constrói um pensamento coerente e objetivo, ocorrendo um agrupamento concreto de objetos unidos por ligações factuais, diferentemente do conceito que agrupa os objetos de acordo com um atributo.

Segundo Vygotsky (2005), o conceito está predisposto a sofrer modificações. Dessa forma, os conceitos abordados em sala de aula, pelo professor, também estão sujeitos a sofrer modificações, sendo necessário que utilize os recursos disponíveis que favoreçam à construção do conceito, diante das modificações que estes podem sofrer ao longo da abordagem do conteúdo, a fim de haver um ensino-aprendizagem com compreensão. Alguns dos pontos influenciadores dessas modificações são o conhecimento prévio dos alunos e suas experiências vivenciadas fora da escola, pois, para Vygotsky (2007), *o aprendizado das crianças começa muito antes de elas frequentarem a escola. Qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia*. Observando que o conceito é algo modificável em Vygotsky (2005), pode-se citar:

> [...] um conceito não é uma formação isolada, fossilizada e imutável, mas sim uma parte ativa do processo intelectual, constantemente a serviço da comunicação, do entendimento e da solução de problemas. (VYGOTSKY 2005, 66-67).

Outro fator, que está relacionado com a modificação dos conceitos pelos alunos refere-se aos recursos empregados na metodologia do professor, pois o aluno pode reagir mais rapidamente a determinados recursos do que a outros e, assim, modificar expressivamente seus conceitos, de acordo com o que for proposto pelo professor. Portanto, essa modificação a que o conceito está propenso a sofrer também é realizada mediante a escolha do recurso a ser utilizado em sala de aula para o ensino-aprendizagem. Esse recurso pode consistir das representações múltiplas: a representação verbal, a representação numérica, a representação tabular, a representação algébrica e a representação geométrica. Vygotsky (2005, p.111) assim observa: *Nossos experimentos estabeleceram, por exemplo, que a criança reage a uma ação representada graficamente mais cedo do que à representação de um objeto*.

Tratar de recursos é importante para a construção dos conceitos, mas também deve ser ponderada a maneira como se trabalha com tais recursos, pois se faz necessário que o professor evite abordar o ensino-aprendizagem baseado na manipulação simbólica, resolução e correção de listas de exercícios, transmitindo para o aluno a responsabilidade de memorizar regras e processos mecanizados, sem a necessidade de identificar e ressaltar o porquê delas. O professor deverá, sim, proporcionar ao aluno a possibilidade de tratar os conceitos abordados de uma forma mais compreensível, oferecendo a oportunidade de o aluno construir e compreender os conceitos. Em Vygotsky (2005), pode-se encontrar ideias e trabalhos de seus colaboradores, assim como de outros pesquisadores, que relatam sobre o processo mecânico, o qual, ao ser evitado pelo professor em sala de aula, poderá favorecer a compreensão do conceito:

> Os experimentos de Ach revelaram que a formação de conceitos é um processo criativo, e não um processo mecânico e passivo; que um conceito surge e se configura no curso de uma operação complexa, voltada para a solução de algum problema; e que só a presença de condições externas favoráveis a uma ligação mecânica entre a palavra e o objeto não é suficiente para a criação de um conceito. (VIGOTISKI, 2005, p. 67).

É observável, na prática da sala de aula, na qual encontram, até com certa facilidade, professores que trabalham priorizando a memorização de regras como passo fundamental para a aprendizagem dos conceitos trabalhados. Mas, de acordo com Vygotsky, (2005), apenas a memorização de regras ou processos não significa a construção do conceito e/ou um ensino-aprendizagem com compreensão. É preciso instigá-lo com problemas para a formação de um novo conceito, apoiados em uma ferramenta que proporcione a compreensão do novo conceito. Dessa forma, o ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau pode ser iniciado com a resolução de problemas que envolvem o conteúdo, direcionando o aluno a utilizar-se das representações múltiplas.

Em Vygotsky (2005), a utilização de resolução de problemas é abordada como sendo um caminho a favorecer a aprendizagem de crianças:

> A memorização de palavras e sua associação com os objetos não leva, por si só, à formação de conceitos; para que o processo se inicie, deve surgir um problema que só possa ser resolvido pela formação de novos conceitos. (VYGOTSKY, 2005, p. 68).

Até o presente momento, nesse subtópico, o que se tem mostrado é que se deve evitar a memorização de regras e o uso exclusivo do trabalho mecânico das listas de exercícios, passando a construir o conceito, com o apoio da resolução de problemas, o que pode favorecer o ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau.

A ferramenta indicada são as representações múltiplas e, em se tratando dos problemas, estes não devem abranger apenas os que envolvem o conteúdo, mas devem ter características peculiares à zona de desenvolvimento potencial. Para Vygotsky (2007), há dois níveis de desenvolvimento: nível de desenvolvimento real (o aluno é capaz de fazer sozinho) e nível de desenvolvimento proximal (o que o aluno faz com o apoio de outros). A diferença entre esses dois níveis é a zona de desenvolvimento proximal:

> Ela [a zona de desenvolvimento proximal] é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VYGOTSKY, 2007, p. 97).

Como, de acordo com Vygotsky (2007), essa zona de desenvolvimento proximal tanto define as funções psicológicas que amadureceram como as que estão em processo de maturação – delineando o futuro imediato do desenvolvimento da criança, propiciando ao professor acesso ao que já foi atingido pelo aluno, assim como aquilo que o aluno pode atingir –, então se faz necessário que o professor venha a intervir dentro da zona de desenvolvimento proximal, para que o conteúdo ensinado não se traduza apenas numa repetição do que o aluno já sabe, mas que também signifique que o aluno possa ser capaz de atingir o entendimento dos conceitos abordados, de forma mais evidente, podendo obter um ensino-aprendizagem do conteúdo com compreensão.

> [...] o aprendizado orientado para os níveis de desenvolvimento que já foram atingidos é ineficaz do ponto de vista do desenvolvimento global da criança. Ele não se dirige para um novo estágio do processo de desenvolvimento, mas, em vez disso, vai a reboque desse processo. Assim, a noção de zona de desenvolvimento proximal capacita-nos a propor uma nova fórmula, a de que o ‘bom aprendizado’ é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento. (VYGOTSKY, 2007, p. 102).

Diante do que já foi mencionado sobre Vygotsky e as representações múltiplas, há um motivo que leva a utilizá-los conjuntamente. As ideias de Vygotsky, além de serem harmônicas com os conceitos inerentes às representações, também pode oferecer maior entendimento das representações múltiplas, já que o professor, ao trabalhar em sala de aula com estas, fluindo de uma representação para outra, pode estar proporcionando a transformação do nível de desenvolvimento potencial dos alunos em nível de desenvolvimento real, no qual tais níveis de desenvolvimento são explicados através da zona de desenvolvimento proximal, zona esta que é um ponto importante na teoria do socioconstrutivismo de Vygotsky, sobre a qual se falou anteriormente.

A princípio, há dois itens a serem considerados em sala de aula para a realização do ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau: as representações múltiplas e a resolução de problemas. Partindo-se da resolução de problemas com um direcionamento ao uso das representações, no qual o elo entre trabalhar com a resolução de problema e usar as representações múltiplas é a mediação. De acordo com Oliveira (1997), a mediação para Vygotsky é a intervenção de um elemento intermediário em uma relação. No caso da sala de aula, essa mediação pode ser realizada pelo professor, por um aluno ou até mesmo pelo próprio material trabalhado. A mediação que pode ser mais significante para o ensino-aprendizagem é aquela que se baseia em perguntas que instiguem o aluno a refletir mais sobre sua ação do que propriamente a identificação da solução do problema.

Segundo Oliveira (1997), que trata da mediação na perspectiva de Vygotsky, assim como Vygotsky (2005; 2007), o professor, na sala de aula, deve intervir na zona de desenvolvimento proximal do aluno. Essa intervenção é por meio da mediação, para proporcionar a construção e a estruturação dos conceitos, no intuito de aplicá-los nas resoluções de equações polinomiais do 1º grau e, com isso, realizar um ensino-aprendizado baseado em uma metodologia didática que privilegia a construção, a aquisição e a compreensão do conteúdo em questão.

A teoria construtivista – para a qual o indivíduo constrói o conhecimento internamente – segundo Kieran (2007), foi desenvolvida principalmente por Piaget, que influenciou expressivamente as reformas de ensino da Álgebra a partir da década de 60, e por Vygotsky (socioconstrutivismo), cujas ideias sustentam uma influência mais direta na sala de aula. Vygotsky desenvolveu suas ideias apoiado em três elementos: o sujeito (quem aprende), o objeto (o que se aprende) e o social (o outro ou o meio). Essas ideias podem ser pensadas na sala de aula observando-se três elementos: o sujeito (o aluno), o objeto (o que ele aprende) e o professor (o outro ou o meio). Oliveira (1997) opta pelo termo aprendizado, devido a considerar a aprendizagem envolvendo o social (interação).

Com base em Vygotsky (2005; 2007), direcionado para a sala de aula, reconhece-se que as representações múltiplas são ferramentas que podem ser utilizadas em uma mediação pelo professor, com o objetivo de provocar no aluno um salto do concreto para o abstrato, assim como proporcionar ao aluno sair do conhecimento real para usar seu conhecimento potencial. Dessa forma, o professor pode passar a ter subsídios para que o ensino de Álgebra, baseado apenas na manipulação simbólica, possa ajustar-se a um ensino-aprendizagem que favoreça, de forma expressiva, a construção, aquisição e compreensão do conteúdo, passando a ter outras representações distintas da simbólica que poderão estar agindo no campo cognitivo do aluno.

As representações múltiplas podem proporcionar possibilidades de uma maior compreensão dos conceitos trabalhados pelo professor que se utiliza da mediação – que ajuda a desenvolver o conhecimento. O professor pode utilizar a mediação para instigar o aluno a realizar conexões entre as representações múltiplas, as quais transformam o objeto a ser trabalhado no campo cognitivo do aluno. Ressalta-se que o professor, ao utilizar em sala de aula uma metodologia de ensino-aprendizagem de Álgebra com representações múltiplas, usa os meios algébricos, numéricos, geométricos, tabulares e até mesmo os lógicos de resolução de problemas no ensino-aprendizagem do conteúdo.

Propor ao professor uma metodologia de ensino-aprendizagem da Álgebra, baseado no uso da ferramenta das representações múltiplas, nas ideias de Vygotsky (sobre zona de desenvolvimento proximal, mediação e interação), não significa dizer que ele em sala de aula esteja trabalhando de uma forma errônea, ou que os resultados alcançados são insatisfatórios, não só porque é comum acontecer de pesquisadores identificarem *erros* na metodologia do professor, mas, quando o pesquisador vai para a sala de aula poderá cometer os mesmos erros. Pode-se pensar que se não houvesse algo de positivo na metodologia de ensino baseada no procedural, não haveria alunos aprendendo.

Mas o que se pretende é identificar e propor para a sala de aula uma metodologia de ensino-aprendizagem para a Álgebra que possibilite maior probabilidade de ocorrer à construção, aquisição e compreensão do conteúdo do que simplesmente a manipulação de símbolos por meios procedurais. Nessa perspectiva, faz-se necessário que o trabalho possua uma aplicação dessa proposta, para que haja uma metodologia de ensino isenta ou mínima de erros no modo como ensinar Álgebra. Justamente por isso, foi proposto, neste trabalho, a intervenção em sala de aula.

3. PESQUISAS SOBRE ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Para realizar uma pesquisa de forma adequada, um dos pontos necessários é examinar trabalhos no campo da Educação Matemática na área da Álgebra. Posteriormente à observação das pesquisas na área é que se indica como introduzir uma perspectiva para o tema abordado, e, no caso deste trabalho, é no intuito de obterem-se subsídios necessários para a elaboração de uma proposta pedagógica, visando a um ensino-aprendizagem da Álgebra com compreensão.

Dessa forma, observam-se algumas pesquisas científicas da literatura nacional como na internacional; por exemplo, a pesquisa de Scarlassari (2007) intitulada:*Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do Ensino Fundamental.* Essa pesquisa traz, a princípio, uma observação das aulas de Álgebra sobre o desenvolvimento relacionado à manipulação simbólica, resolução e correção de uma lista de exercícios de Álgebra, identificada no meio educacional, por alguns professores, como sendo um método tradicional.

Diante da observação do método empregado e mediante a obtenção de dados provenientes das respostas dos alunos a uma lista de exercícios, a pesquisadora caracterizou tal situação como sendo a situação A na sua pesquisa. Posteriormente, criou uma segunda situação, definida como situação B, caracterizada pela aplicação da mesma lista de exercícios da situação A, em outra escola, após ser trabalhado o desenvolvimento dos nexos conceituais da Álgebra como linguagem e unidade.

Uma das conclusões defendida por Scarlassari (2007), com base nas suas observações e no desenvolvimento da pesquisa é:

> “[...] Comparamos as dificuldades encontradas nas duas situações para os mesmos exercícios. Esta comparação indica que os alunos da situação B encontraram menos dificuldades para realizar as atividades e que a frequência dos erros, nessa situação, foi menor. Este trabalho permitiu afirmar que a Situação B de ensino proporcionou uma aprendizagem mais significativa [...]”. (SCARLASSARI, 2007, p. 7)

Uma segunda pesquisa observada foi a de Ribeiro (2001): *Analisando o desempenho de alunos no Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do*

SARESP. Durante a pesquisa, houve uma aplicação das questões de Álgebra do SARESP 1997 (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) a uma amostra de vinte alunos da Rede Pública Estadual de São Paulo. Em um segundo momento, questões abertas semelhantes às do SARESP foram aplicadas aos mesmos alunos, na forma de oficina, com a participação do pesquisador. Ribeiro procurou identificar possíveis causas para os erros mais frequentes e detectou que há influência na aprendizagem mediante a metodologia de ensino; *Detectamos a grande diferença que faz o tipo de ensino utilizado por nós e nossa postura em sala de aula, no resultado do desempenho dos alunos*. (RIBEIRO, 2001), e concluiu que *uma aprendizagem que tenha pouca preocupação com a construção do conhecimento e compreensão dos significados, acaba por tornar-se ineficiente e rapidamente esquecida pelos alunos* (RIBEIRO, 2001). Dessa forma, identificado um elo entre as representações múltiplas e o ensino-aprendizagem, pois o uso daquelas, na metodologia de ensino do professor em sala de aula, tem, como um dos objetivos, a construção do conhecimento, pelos alunos, por meio da utilização e das conexões que possa realizar entre as representações.

Outra pesquisa, de Panossian (2008), foi realizada com alunos do 7º ano, intitulada *Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino*. Nela foram empregadas situações-problema, coletivamente, nas quais a pesquisadora teve um comportamento participativo, com intervenção por meio de questionamentos dirigidos aos alunos sobre as soluções encontradas. A pesquisa foi realizada em cinco encontros com os estudantes, sendo definida uma situação-problema para cada encontro, cujo objetivo está assim explicitado: *Consideram-se, neste trabalho, as dificuldades dos estudantes em relação à álgebra que podem estar associadas às especificidades do conhecimento algébrico, às questões de metodologia e didática do ensino (...)* (PANOSSIAN, 2008). Um dos pontos de sua conclusão é:

> Definir, estruturar e propor uma situação-problema para um grupo de estudantes apresentou-se como uma ação da maior relevância, considerando que, dependendo de como fosse proposta e encaminhada, tal situação-problema poderia abrir possibilidades para o processo de generalização, abstração e formação de conceitos em sua forma empírica ou teórica. (PANOSSIAN, 2008, p. 173).

Assim as questões de metodologia influenciam o desempenho dos alunos. Os recursos que venham aumentar as possibilidades de aprendizagem, como as representações múltiplas, favorecem um ensino-aprendizagem da Álgebra com compreensão.

Um dos estudos internacionais que tem um sentido relevante para este trabalho, é: *Algebra: What are teaching?* (SAUL 2001), segundo o qual, ao analisar os casos *patológicos*, pode-se aprender muito sobre o que se está pesquisando. O autor busca na análise das dificuldades de alunos uma compreensão sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra.

Inicialmente, Saul (2001) trata de dois alunos: Barry, que tinha uma visão aritmética e resolvia as equações lineares por tentativa e erro, com dificuldade de operar com as variáveis, e Merry que tinha dificuldade com o idioma de Álgebra e conseguia fatorar $3X + 3Y$, mas fatorar $3X + 7X^2$ era difícil para ela. Nesse estudo, Saul (2001) diz que o aluno precisa experimentar três (3) níveis para obter a compreensão da Álgebra. Nível 1: a Álgebra como generalização da Aritmética; Nível 2: a Álgebra sendo pensada sobre as operações binárias nos conjuntos e suas propriedades; Nível 3: o reconhecimento de forma algébrica (construir uma representação interna semelhante aos conteúdos abordados na Álgebra).

Um aspecto comum nas dissertações mencionadas, assim como nos demais trabalhos de pesquisadores e educadores matemáticos, no âmbito nacional e internacional – é a constatação da existência de dificuldades na aprendizagem e utilização dos conceitos algébricos no ensino-aprendizagem da Álgebra – muito embora muitos desses pesquisadores e educadores matemáticos se proponham a identificar uma metodologia de ensino que venha contribuir para um ensino-aprendizagem da Álgebra com compreensão.

O ensino baseado na manipulação simbólica, resolução e correção de listas de exercícios transmitindo ao aluno a responsabilidade de memorizar regras e processos mecanizados, sem a necessidade de identificar e ressaltar o porquê das regras, comumente identificado nas escolas, é equivocado e ineficiente, enquanto há pesquisas que se destinam, ao contrário, a um ensino-aprendizagem da Álgebra escolar que atribua prioridade à construção e à estruturação de conceitos.

Qualquer esforço para a produção de uma proposta pedagógica que venha servir de reflexão para um melhor ensino-aprendizagem da Álgebra com compreensão será um auxílio a mais para o professor, em sala de aula, poder superar essas dificuldades.

4. ENSINO-APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU EM SALA DE AULA: TRABALHANDO COM AS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

Esta pesquisa é de caráter qualitativo, na modalidade *pesquisa pedagógica*.

A reunião dos pontos mencionados a seguir, leva a identificar a pesquisa como sendo de caráter qualitativo:

1- Colocou-se no foco da pesquisa o sujeito: o professor e o aluno. Os problemas trabalhados ocorreram no ambiente de sala de aula.
2- Convergiu-se para uma abordagem da prática do professor em sala de aula voltada a um ensino-aprendizagem com compreensão.
3- Enfatizaram-se os processos utilizados pelos alunos na resolução de situações-problemas, observando-se os conceitos e as estratégias, utilizados por eles, ao trabalhar com a Álgebra.
4- A fonte dos dados da pesquisa foi o diário de anotações do professor-pesquisador e o material produzido pelos alunos. O diário de anotações foi escrito no decorrer das aulas, principalmente, nos instantes em que os alunos trabalhavam em equipe, enquanto que o material produzido pelos alunos era constituído dos problemas trabalhados e suas resoluções.
5- Os dados coletados são descritivos e sua coleta é proveniente do contato direto do pesquisador com o sujeito pesquisado.
6- A análise foi direcionada para uma observação da escrita diante dos registros promovidos pelos alunos no decorrer das intervenções em sala de aula, procurando obter informações importantes que constituam subsídios para identificar o conhecimento prévio dos sujeitos pesquisados, compreender suas estratégias na resolução dos problemas e seu desenvolvimento durante o processo de ensino-aprendizagem.
7- Evitou-se a quantificação em medidas das conclusões feitas.

De acordo com Lankshear e Knobel (2008), a pesquisa pedagógica tem a característica de ser não quantitativa, em um âmbito em que o professor pesquisa sua própria sala de aula; apresenta o objetivo de melhorar o ensino-aprendizagem, tanto na perspectiva do aluno, contribuindo para sua formação, quanto do professor, favorecendo a percepção de seu papel em sala de aula.

Assim, diante dos pontos que direciona a identificar esta pesquisa como qualitativa e pelo fato de investigar a própria sala de aula, com o propósito de construir-se uma proposta pedagógica mediante intervenção em sala de aula, realizando-se observações da prática e da aprendizagem apresentada pelos alunos, identifica-se esta pesquisa na modalidade de *pesquisa pedagógica*.

A pesquisa se deu em dois momentos de intervenções em sala de aula. O primeiro momento, com 15 aulas de 45 minutos, ocorreu em 2010 em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, em uma turma de 7º ano no turno da tarde; na turma havia 23 alunos matriculados, mas com uma frequência em média de 18 alunos. O segundo momento, com 24 aulas de 45 minutos, ocorreu em 2011, na mesma escola e mesmo turno, em uma turma do 7º ano; havia 19 alunos matriculados com uma presença constante de 17 alunos. As intervenções mantiveram-se dentro da mesma perspectiva de metodologia de ensino-aprendizagem, através da *Resolução de Problemas,* visando o processo da resolução.

Durante as aulas, buscou-se trabalhar cada problema individualmente e, posteriormente, em equipes constituídas de dois alunos. A princípio, o problema era entregue aos alunos para que pudessem tomar sua própria decisão sobre uma estratégia para a resolução e, após certo tempo, definido de acordo com o desenvolvimento dos alunos em sala de aula, eles passavam a trabalhar em equipe, visando explorar o problema, interagir com os demais alunos por meio da troca de ideias, e promover a oportunidade dos alunos transformarem seu nível de desenvolvimento potencial em real.

As equipes eram formadas de acordo com a afinidade dos próprios alunos. Em caso do número de alunos em sala de aula ser ímpar, constituía-se uma equipe de três alunos; o aluno que se apresentasse sozinho ingressava em uma equipe de acordo com a afinidade com a equipe ou indicação do pesquisador; no caso de indicação, o aluno ingressava na equipe que havia apresentado maiores dificuldades em aulas anteriores.

Ao final de cada aula eram recolhidos todos os materiais entregues aos alunos com as resoluções dos problemas apresentada por eles. Ao final de cada conjunto de problemas trabalhado os alunos recebiam uma cópia das suas resoluções para terem a possibilidade de sanar eventuais dúvidas em outra ocasião.

Mas pesquisar a própria sala de aula, visando sugerir alterações da prática do professor com o intuito de oferecer melhorias no processo de ensino-aprendizagem, provavelmente, será alvo de rejeição por parte de alguns professores, que, quando se encontram em uma situação de acomodação, preferem manter-se nela, e do aluno que, condicionado a seguir sempre a mesma metodologia de ensino, pode repudiar outra; então, foi necessário abordar, na metodologia da pesquisa, um momento que ensejasse observar o impacto da metodologia de ensino, para só, então, se esboçar uma proposta pedagógica que valorizasse um ensino-aprendizagem com compreensão. Tal proposta, flexível, buscava também nortear o professor trabalhar os conteúdos e proporcionar aos alunos a adquirir os conhecimentos com compreensão e que esses conhecimentos perdurassem.

A partir do momento em que foi observada a própria prática docente, foi possível inserir-se no mundo do professor, conhecer a realidade dele, sem priorizar a teoria. Já que nenhuma teoria consegue explicar e dizer, de forma precisa e concisa, como se deve ensinar para que haja melhor aprendizagem, foi possível realizarem-se os primeiros saltos para a elaboração da proposta pedagógica, acompanhada da necessidade de colocá-la em ação, aplicando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino que pode ser aplicada em sala de aula quando há o intuito de colaborar com a construção, aquisição e utilização de conceitos matemáticos, já que seu uso pode contribuir para estimular a curiosidade do aluno pelo conteúdo trabalhado, possibilitando uma ampliação do interesse pela Álgebra, à medida que instiga a criatividade e o trabalho mental. Essa metodologia de ensino ganhou maior destaque no campo da Educação Matemática, principalmente, a partir da década de 80, quando foi apresentada no NCTM (Conselho Nacional dos Professores de Matemática dos Estados Unidos), como primeiro padrão de procedimento no ensino da Matemática escolar. A partir de então, diversos documentos foram publicados referentes à Resolução de Problemas, gerando dúvidas e ponderações sobre as ideias envolvidas nessa metodologia de ensino.

A Resolução de Problema procura colocar em foco o aluno e sua compreensão, ao fazer Matemática usando o raciocínio, a exploração e o questionamento, compreendendo as etapas da estratégia adotada na resolução do mesmo, sendo necessário que haja, por parte do professor, o compromisso em relação ao seguinte: cada problema deve estar dentro do alcance do conhecimento do aluno; durante a resolução, o professor deve ser o coadjuvante, realizando mediações que levem o aluno a questionar sua estratégia e, após a resolução, administre explorações do problema, produzindo outras simulações que possam favorecer a construção dos conceitos necessários à compreensão do conteúdo abordado.

Com as pesquisas na área da Educação Matemática, a Resolução de Problema tem levado a perceber que – visando a uma aprendizagem do aluno que zele pela compreensão e que se ausente dos procedimentos de aplicação de fórmulas e manipulação simbólica –, tem se mostrado eficiente para perceber e alcançar os objetivos propostos no ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos, o que sugere sua utilização como metodologia de ensino na aplicação da proposta pedagógica, nos momentos de intervenção em sala de aula.

Então, procura-se nessa pesquisa um ensino-aprendizagem da Álgebra, por meio da Resolução de Problema, com o objetivo tanto de compreendê-la melhor como de utilizar as situações-problemas como ponto de partida para que os alunos produzam os primeiros saltos na aquisição e/ou construção dos conceitos, com compreensão, inerentes aos conteúdos abordados, bem como ao seu desenvolvimento, conceitos esses que estão voltados à produção de ideias a partir das estratégias adotadas na resolução de cada situação-problema e da exploração dos mesmos, distanciando-se dos procedimentos e das regras.

Mas, para isso, é preciso compreender como se identifica um problema, as contribuições que pode oferecer, as estratégias para sua resolução e suas possíveis explorações. É primordial compreender, num primeiro momento, o que é um problema. É possível deparar-se com essa compreensão quando se conhecem as características de um problema.

Um problema envolve um objetivo a ser alcançado e, a princípio, não se conhece qual o caminho a ser trilhado. A linguagem utilizada no problema é acessível à faixa etária e ano de escolaridade do aluno; deve estimular o uso do raciocínio e ser ponto inicial para a construção e/ou aquisição dos conceitos inerentes ao conteúdo abordado.

Também, é necessário que o problema e a estratégia de resolução estejam dentro da zona de desenvolvimento proximal, pois se o aluno já conhece o procedimento adequado para a resolução do problema, isto é, a resolução está dentro do nível de desenvolvimento real do aluno, então este problema passará a ser uma tarefa puramente mecânica; enquanto que, se o problema está acima do nível de desenvolvimento potencial do aluno, este apresentará um nível de dificuldade que possivelmente não oferecerá a possibilidade de construção, aquisição e utilização do conceito matemático que se pretende trabalhar no problema.

Na perspectiva dessa pesquisa, pretende-se que os problemas trabalhados em sala de aula tenham algumas características que serão mencionadas nos parágrafos posteriores, mas ressalta-se que tais características não obedecem a uma ordem de prioridade, assim como a presença de todas as características mencionadas não é uma regra obrigatória para os problemas, mesmo sendo relevante a presença de tais características, que são um norte para identificar se o problema pode ser aplicado em um segundo momento da pesquisa.

Inicialmente, cada problema não apresenta informações que direcionem, de forma direta, a um padrão para sua resolução, solicitando que o aluno realize mais de uma leitura para identificar dados que estejam relacionados entre si e que seus conhecimentos prévios possam auxilia-lo na construção de uma estratégia para sua resolução, e, com isso, propiciar um estímulo ao raciocínio mental, capacitando-o a interpretar as informações recebidas.

Uma segunda característica dos problemas é a de apresentar um objetivo, ao abordar uma situação que pode estar presente no cotidiano do aluno, estimulando-lhe a curiosidade pelo conteúdo trabalhado, no qual a resolução o direcione à construção de um conceito inerente às equações do 1º grau.

Outra característica dos problemas é que, mesmo o aluno construindo uma estratégia que possa obter um resultado satisfatório, não necessariamente é a única estratégia que o encaminha à solução desejada, diante do objetivo a ser alcançado no problema. Isso possibilita um debate em sala de aula, provocando uma exploração do problema.

E, por fim, e não menos importante, qualquer que seja o contexto e a situação trabalhada no problema, faz-se necessária a presença de uma característica na sua escrita. A linguagem utilizada não deve se esquivar das ideias matemáticas, mas deverá, também, ser acessível ao aluno, evitando gerar dubiedade na situação envolvida no problema e no seu objetivo, ou seja, o fenômeno deve estar claro, bem como o que se pretende solucionar.

As intervenções em sala de aula ocorreram em dois momentos *(períodos)*, em uma escola pública do Estado da Paraíba, em turmas do 7º ano.

O primeiro momento, realizado de 30/09/2010 a 26/10/2010, de contato inicial do pesquisador com a sala de aula, teve como objetivo observar os pontos viáveis à elaboração e aplicação da proposta pedagógica em sala de aula: o uso das representações múltiplas no ensino-aprendizagem da Álgebra.

Nesse primeiro momento, foi preciso realizar uma prática que não fosse apenas uma fórmula apresentada pelo roteiro dos livros didáticos, mas que fugisse da mecanização comumente apresentada pelos professores que identificam o que fazer em cada aula, com planos de ensino rígidos e impostos. A prática em sala de aula deve ser composta não só de um planejamento flexível, de acordo com a necessidade dos alunos e os objetivos a serem alcançados, mas também, principalmente, de uma metodologia de ensino que possa valorizar a compreensão dos conteúdos.

No decorrer do primeiro momento foram utilizados, principalmente, um problema de introdução, referente à metodologia de ensino, e três conjuntos de problemas referentes ao conteúdo de equações polinomiais do 1º grau, que estão descritos a seguir:

Problema de introdução, referente à metodologia de ensino:

> *"Marcelo tem 43 anos, hoje, e seu filho 18 anos. Daqui a quantos anos a idade de Marcelo será o dobro da idade do filho?".*

1º Conjunto de problemas trabalhados no encontro 02:

> *Problema 1.1.1: Salvino pensou em três números consecutivos, cuja soma é 42. Quais foram os números que Salvino pensou?*
>
> *Problema 1.1.2: A comunidade do Bairro Vida Bela resolveu realizar um bingo. A urna do bingo contém 63 bolas. Cada bola é de uma única cor; as cores das bolas são azul, vermelha e amarela. O número de bolas azuis é o dobro das vermelhas e o*

número das amarelas é o triplo das azuis. Quantas bolas de cada cor existem na urna?

Problema 1.1.3: José fez umas compras no valor de R$ 415,00 no mercadinho do Bairro e, por ser amigo de Mario, que é o dono do mercadinho, dividiu o valor das compras em três prestações de valores diferentes. A segunda prestação foi o dobro da primeira e a terceira foi R$ 15,00 a mais que a segunda. Qual é o valor de cada prestação que José irá pagar a Mario, o dono do mercadinho?

2º Conjunto de problemas trabalhados no encontro 03:

Problema 1.2.1: Ronaldo e Erika realizaram economias durante o ano para poderem realizar compras ao final do ano. Com suas economias, Ronaldo e Erika, compraram um liquidificador, um fogão e uma geladeira por R$ 1.050,00. O preço do fogão foi o quíntuplo do preço do liquidificador. O preço da geladeira foi o triplo do preço do fogão. Qual foi o preço do liquidificador?

Problema 1.2.2: Mario, que possuía um mercadinho, ampliou o seu estabelecimento para um supermercado e agora possui um estacionamento. No estacionamento do supermercado de Mario têm motos e carros estacionados. As motos e carros somam 26 veículos e 82 rodas. Quantas motos há no estacionamento do supermercado de Mario?

Problema 1.2.3: Salvino e Ronaldinho jogam juntos no mesmo time de futebol. No último campeonato, Salvino e Ronaldinho, marcaram juntos 39 gols. Salvino marcou 5 gols a mais que Ronaldinho. Salvino marcou quantos gols no campeonato?

Problema 1.2.4: Samara que é Agente Comunitário de Saúde atendeu 780 famílias no primeiro semestre de 2010. No mês de Janeiro, Samara atendeu 110 famílias e em Fevereiro atendeu 150 famílias. O número de famílias atendidas nos outros meses do semestre (até junho) foi o mesmo em cada mês. Quantas famílias foram atendidas por Samara em maio de 2010?

Problema 1.2.5: Uma rádio de Campina Grande contratou entrevistadores para realizar pesquisa de opinião no Bairro do Santo Antônio sobre seus programas. Se cada entrevistador visitar 100 residências, ainda assim 60 residências não serão visitadas; entretanto, se cada entrevistador visitar 103 residências, dessa forma, todas serão visitadas. Quantos entrevistadores foram contratados?

3º Conjunto de problemas trabalhados no encontro 04:

> *Problema 1.3.1: Uma urna de bingo contém 99 bolas. Cada bola é de uma única cor; as cores das bolas são azul, vermelha e amarela. O número de bolas azuis é o dobro das vermelhas e o número das amarelas é o triplo das azuis. Há quantas bolas azuis?*
>
> *Problema 1.3.2: José fez umas compras no valor de R$ 590,00 dividido em três prestações. A segunda prestação foi o dobro da primeira e a terceira foi R$ 15,00 a mais que a segunda. Qual é o valor da primeira prestação?*
>
> *Problema 1.3.3: Joel e Carlos jogam juntos no mesmo time de futebol. No último campeonato Joel e Carlos marcaram juntos 37 gols. Joel marcou 5 gols a mais que Carlos. Joel marcou quantos gols?*

O segundo momento, realizado de 18/10/2011 a 15/12/2011, refere-se à aplicação da proposta pedagógica em sala de aula, a qual será detalhada mais adiante.

4.1.1. Momento 01: um primeiro contato com a sala de aula pesquisada

Com base nas ideias de Vygotsky o aluno é dotado de conhecimentos, pressupõe-se que sejam provindos dos conteúdos abordados em sala de aula, da sua experiência de vida ou até mesmo do senso comum.

A partir de uma metodologia de ensino que priorize a compreensão, considerando a mediação e a socialização no processo de ensino-aprendizagem, pode-se interferir nesses conhecimentos e no pensamento, levando o aluno a refletir sobre determinados fenômenos, podendo-se até mesmo modificar seus conhecimentos ou levá-lo a construir novos conceitos.

A construção dos conceitos e ideias não é um processo isolado; a interação e a mediação são influenciadoras na construção dos conceitos e na modificação. Assim, acredita-se que em um processo de ensino-aprendizagem que valoriza a compreensão, a construção do conhecimento pode ocorrer a partir do momento que estejam inclusos, no processo, alguns elementos, como, por exemplo, o conhecimento prévio, a mediação, a interação, a resolução de problemas e as representações múltiplas, já que o conhecimento não é algo estático, mas, sim, mutável e sujeito à evolução, de acordo com a necessidade do aluno e as ferramentas à disposição para auxiliar no seu desenvolvimento. Diante desses elementos, o aluno poderá internalizar os processos, os conceitos, as ideias e, posteriormente, utilizá-los.

Cada aluno pode adequar ou mudar seus conhecimentos prévios para novos conhecimentos, de acordo com suas necessidades. Algo que pode influenciar nessa mudança, além da situação-problema que venha instigá-lo, é a troca de informação entre aluno-aluno e aluno-professor, por meio da interação e da mediação, que podem fazer com que o potencial que o aluno possui para a aprendizagem de determinado conteúdo passe a ser real, expressivo e observável.

Logo, a teoria presente nas obras de Vygotsky que se referem à mediação, à interação, à zona de desenvolvimento proximal, à linguagem e ao pensamento dão conta da influência, de forma direta, a compreensão sobre o modo como o aluno pode construir seus conceitos.

Portanto, neste trabalho pretende-se procurar refletir não só sobre a influência que se pode ter dos elementos trazidos na teoria de Vygotsky, quanto à aprendizagem do aluno, mas também sobre a presença deles na possível produção do conhecimento, diante dos fenômenos e conteúdos presentes na resolução de situações-problemas, com o uso das representações múltiplas, durante as intervenções em sala de aula.

Para a realização dessas reflexões, sentiu-se a necessidade de efetuar intervenções em sala de aula. Assim, a primeira intervenção foi realizada em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, do turno da tarde, de uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio da cidade de Campina Grande, Paraíba. A escolha dessa escola e da turma visou satisfazer as duas condições seguintes: 1- a turma participante do trabalho deveria ser do 7º ano, devido ao fato de ser nessa fase escolar que os alunos têm os primeiros contatos com a Álgebra; 2- a escola e o professor da disciplina de Matemática deveriam concordar com a realização da intervenção, proporcionando, assim, um levantamento de dados a serem observados pelo pesquisador.

O horário da disciplina de Matemática, na turma em que houve as intervenções, era constituído de cinco (05) aulas, distribuídas entre as segundas-feiras e terças-feiras. A cada dia em que ocorreu a intervenção, foi esta designada de *encontro*. Cada aula teve uma duração de quarenta e cinco (45) minutos.

<u>Encontro 01 (aulas 01 e 02)</u>: Apresentação do docente à turma pesquisada.

Conteúdos trabalhados: primeiras ideias de incógnita; representação numérica e tabular.

Objetivo: Estabelecer um melhor diálogo entre docente e turma e normas de andamento; dar a oportunidade aos alunos de usarem um raciocínio que os levassem a perceber que é possível trabalhar com valores desconhecidos em um problema; construir uma estratégia para a resolução de problemas, por meio da representação numérica e tabular, que seja um apoio para a resolução de demais problemas.

Esse encontro foi destinado a promover uma aproximação com a turma, inserindo o aluno e estimulando-o a participar desse trabalho, assim como compreender os conhecimentos prévios dos alunos relacionados à Álgebra e/ou as equações.

Inicialmente, fez-se uma breve apresentação à turma, falando-se sobre a trajetória educacional e apresentando-se alguns dados pessoais. Em seguida, foi solicitado a cada aluno que se apresentasse dizendo seu nome, bairro onde reside e um assunto que a professora da turma já havia lecionado. Isso permitiu obter um conhecimento melhor da turma, tanto nos aspectos sociais quanto aos conteúdos já trabalhados em sala de aula.

Com relação aos conteúdos já ministrados em sala de aula, os alunos não conseguiram expressá-los com a nomenclatura adequada, mas procuraram identificá-los por meio de alguns exemplos verbais e escritos (no quadro de giz).

Obteve-se maior noção do que os alunos já haviam evidenciado em sala de aula, ao conversar, em particular, com a professora titular da turma, que, gentilmente, concordou com o uso do seu horário para o andamento do trabalho.

Dessa forma, com os exemplos dos alunos e a conversa com a professora, foi possível observar que os alunos já haviam conhecido a Álgebra, não em sua totalidade, mas noções de como operar com a adição e a subtração, envolvendo as incógnitas, identificadas, por eles, como letras.

Mesmo diante das informações sobre os conteúdos trabalhados em sala de aula, eram evidentes as dificuldades que a turma apresentava, em um primeiro instante, com relação aos conteúdos algébricos, não só pelo fato de não haver concordância, entre os alunos, quanto ao conteúdo que a professora havia lecionado, como também, principalmente, por realizarem adição e subtração, com incógnitas, diante dos exemplos deles próprios em sala, aparentando, assim, que o único conhecimento adquirido por eles era o da *existência das incógnitas*, sem demonstrar clareza quanto à forma adequada de realizar operações que as envolviam, assim como não havia por parte deles, a princípio, o conceito de incógnitas, ou o que a incógnita representa em uma equação polinomial do 1º grau.

Dando continuidade à aula, foram apresentadas algumas normas do andamento didático das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula:

1- Haveria atividades que seriam realizadas individualmente (sendo passada a ideia de que cada aluno realizaria a sua própria tarefa), mas haveria atividades em coletivo (sendo realizada, em equipe de 2 ou 3 alunos, a maioria das atividades).

2- Fazia-se necessário que os alunos dedicassem atenção na hora em que o professor-pesquisador estivesse explicando e no instante destinado às atividades, assim como o professor (pesquisador) deveria dedicar atenção na hora dos comentários dos alunos e quando estes estivessem realizando as atividades individualmente e em equipe.

Concluída essa parte, foram trabalhados, com os alunos, alguns problemas que exploravam valores desconhecidos, realizando-se, assim, os primeiros saltos na formação da ideia de incógnita, de equação e sua resolução.

O conteúdo foi abordado com um problema de introdução. Procurou-se mostrar ao aluno que a metodologia de ensino priorizava a resolução de problema e o uso das representações.

Com o objetivo de estimular o aluno a produzir interpretações a partir do que não está escrito de forma direta, iniciou-se a resolução do problema, possibilitando a ele a ideia de que todos os seres humanos possuem ou conhecem um *pai* e um *filho* e que tanto um como o outro envelhecem juntamente, pois o tempo que passa para um também passa para o outro. A partir de então, foi realizada a leitura, pausadamente, do problema.

Após a pergunta do problema, uma das respostas mencionada por um aluno foi *5 anos*. A resposta de 5 anos foi rejeitada por alguns alunos e, ao mesmo tempo, gerou dúvidas em outros; com a afirmação de alguns de que a resposta certa era 5 anos, e como a maioria estava com dúvida, tal situação fez com que todos os que falaram, categoricamente, que não eram 5 anos se calassem.

Após um momento de diálogo entre eles, em que obtiveram a idade de Marcelo e do seu filho, após transcorrer um tempo de cinco anos, deu-se continuidade na mediação do problema e a situação apresentada naquele instante originou as seguintes perguntas: 1- O que é o dobro de um número? Os alunos responderam que eram duas vezes; após a resposta, foram feitos alguns exemplos de dobro de um número em que se dizia um número e os alunos respondiam com o dobro do número dado; 2- A idade que tinham obtido de Marcelo era o dobro da de seu filho? Obviamente a resposta deles para a segunda pergunta foi *não*, mas, ao mesmo tempo, estavam comparando o dobro de 18 adicionando 5, que resulta em 41, com a idade de Marcelo, 43 anos, o que é um equívoco, pois, inicialmente, deveriam realizar a adição de 18 anos com os 5 anos para só então obter o dobro, o que resultaria em 46 anos.

Dessa forma, mais uma vez foi realizada uma pergunta: – Mas se passarem 5 anos para o filho, será que também não passariam 5 anos para o pai? Esse foi o momento de maior dúvida, pois concordavam que os 5 anos transcorrem para ambos, mas viam que agora seus resultados também estavam equivocados, passando, posteriormente, a realizar o dobro da idade do filho e, comparando com a do pai, considerando o aumento do tempo decorrido para ambos.

A partir desse instante começou a surgir a ideia de resolução do problema por meio de *tentativa e erro,* em que alguns alunos perguntavam: – *Então, qual é a resposta?* e outros diziam: – *Tem que procurar outro, por que 5 não dá*; e assim se sugeriu uma segunda solução, que foi de 20 anos (procurando mostrar que a Matemática não é algo pronto e que o professor não é detentor exclusivo da verdade). Observaram que 20 anos não era um valor condizente com o problema; então, alguns alunos sugeriram 10 anos.

Transcreveu-se para o quadro de giz, cada *tentativa* e o resultado que obtinham. Com as tentativas e os resultados expostos, observaram que a próxima tentativa deveria ser menor que 10 (assim como maior que 5), chegando a ser indicado o de 7 anos.

Após a obtenção e a confirmação do resultado correto, foi valorizada, para a turma, a maneira como obtiveram o resultado, procurando mostrar que não só a Matemática não é fechada, isto é, que não há uma única maneira de resolver um problema, mas que eles podem utilizar as mais diversas estratégias para alcançar seus objetivos.

Posteriormente, os cálculos trabalhados pelos alunos, no decorrer da resolução do problema, que já se encontravam no quadro de giz, foram organizados na forma de tabela, procurando-se produzir um entendimento para utilizarem essa forma de organização, juntamente com a tentativa e erro, como uma ferramenta para a resolução de problemas, ferramenta que é nada mais do que a representação numérica e tabular.

Após a obtenção do resultado para o problema inicial, deu-se início à exploração do problema, levantando-se outras hipóteses, como, por exemplo, o de o filho ter uma idade maior que 18 anos ou o pai ter uma idade maior que 43 anos, assim como outras hipóteses levantadas pelos alunos, como, por exemplo, se houvesse outro filho (que ocasionou uma discussão em sala sobre *vantagens* e *desvantagens* de ter irmão). Após se dar início à exploração, mediante as hipóteses levantadas, foi indicado que os alunos trabalhassem em equipe para solucionar o problema com as outras hipóteses ou dados por eles mesmos levantadas.

<u>Encontro 02 (aulas 03; 04 e 05)</u>: Uso das representações numérica, tabular e verbal.

Conteúdos trabalhados: Incógnita; representação numérica e tabular; primeiras ideias de equações polinomiais do 1º grau.

Objetivo: Promover a ideia de usar a representação numérica e tabular como estratégia para resolver situações-problemas inerentes às equações polinomiais do

1º grau; apresentar diretamente a ideia de incógnita; estimular a leitura e o raciocínio na interpretação de situações-problemas que favoreçam a construção e utilização de estratégias em problemas posteriores; observar o nível de desenvolvimento real e potencial da turma.

A resolução do primeiro conjunto de problemas foi trabalhada mediante o uso da representação numérica e tabular por meio da tentativa e erro. Tais problemas foram elaborados visando apresentar uma estrutura semelhante, envolvendo três incógnitas que se relacionavam por meio de alguma condição exposta neles; dessa forma, poderiam ser resolvidos por estratégias semelhantes.

Inicialmente, quando os alunos trabalharam individualmente o primeiro conjunto de problemas, alegarão que os problemas não identificavam o que fazer ou como fazer para *achar a resposta*.

Assim, entendeu-se que o contato do aluno, diante dos seus conhecimentos prévios, com uma estratégia que resolvesse o problema, não foi imediato, sendo necessária uma mediação entre ambos, pois a princípio os alunos se depararam com uma situação que apresentava estar além das suas possibilidades de resolução, como se o problema os tivesse dominado.

Para realizar-se essa mediação, utilizando a linguagem, recorreu-se, primeiramente, à interação entre os alunos, mediante a verbalização das suas ideias sobre o problema. Diante da sua interação, realizaram-se questionamentos com o fim de incentivá-los a refletir sobre as ideias expostas, os dados do problema e como poderiam estes ser utilizados na construção de uma estratégia para a resolução do problema.

Pôde-se observar que, naquele instante, efetuaram-se internalizações sobre o que estava sendo exposto verbalmente, ocorrendo modificações na compreensão do problema, pelos alunos, e assim superando-se, parcialmente, a dificuldade imposta inicialmente por eles.

Dessa forma, utilizou-se a representação verbal, procurando realizar uma mediação entre o conhecimento prévio do aluno e o objetivo a ser alcançado no problema, realizando-se perguntas que proporcionassem reflexão e interpretação; como, no problema 1.1.1, em que foram feitas as seguintes perguntas:

− Se fosse você, que número teria pensado?

Após a obtenção de respostas numéricas de alguns alunos, uma segunda pergunta foi lançada a turma:

− Mas esses números são os mesmos de Salvino no problema? Por quê?

A partir desse instante, alguns alunos começaram a perceber que havia uma relação entre os números e sua soma, surgindo, por parte deles, a ideia da utilização da representação numérica e tabular para solucionar o problema.

Nesse encontro, parte das aulas foi destinada para que os alunos procurassem resolver os problemas individualmente. Após as intervenções, e com a utilização da representação numérica e tabular, por meio da tentativa e erro, organizados em forma de tabela, foi permitido o trabalho em coletivo, com equipes de dois e três alunos.

Os problemas foram passados um a um, em que os alunos iniciavam o trabalho de forma individual e só posteriormente, no mesmo encontro, foi determinado que trabalhassem em equipe, na qual trocaram ideias, chegando a maior consenso sobre que estratégia utilizar para resolver os problemas.

Dessa forma, realizou-se o trabalho em sala de aula, para que se pudesse observar o nível de desenvolvimento real da turma e o nível de desenvolvimento potencial e, assim, procurar observar o nível de problemas a serem trabalhados em situações posteriores, pois é necessário que os problemas sejam condizentes com a zona de desenvolvimento proximal apresentada pelos alunos.

Problema 1.1.1:

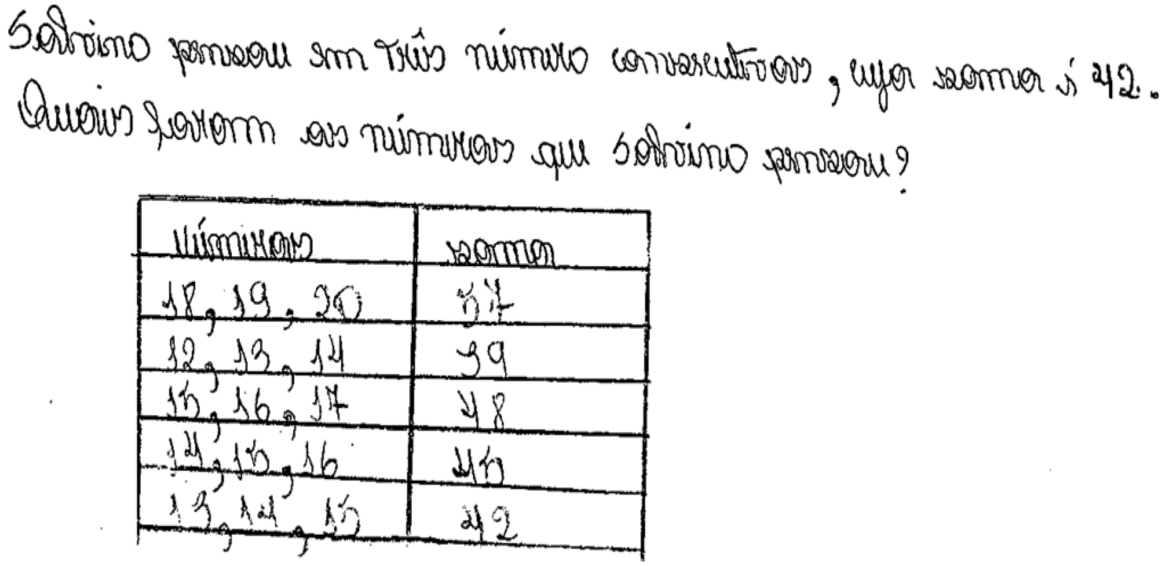
Observando as resoluções dos alunos, elas foram classificadas em três categorias:

Categoria 01: Os alunos resolvem o problema usando a representação numérica e tabular, os conceitos e ideias e têm controle das estratégias usadas.

Mesmo, inicialmente, com a dificuldade de usar uma estratégia para a resolução do problema, após a interação envolvida em sala e com mediação – sendo construída uma relação entre o conhecimento prévio dos alunos e o problema em questão, sem alterar o objetivo que se pretendia alcançar –, os alunos internalizaram os conceitos e as ideias que estavam envolvidas no problema, bem como as operações a serem utilizadas e, assim, construíram uma estratégia de resolução que envolvia a representação numérica e tabular, usando adequadamente os conceitos/ideias de números consecutivos e as operações envolvidas no problema.

Assim, escolhiam três números consecutivos e, quando a soma das parcelas era maior que o total dado no problema, então, optavam, aleatoriamente, por outros números consecutivos que representavam um valor menor do que os escolhidos anteriormente e assim sucessivamente até encontrar o número desejado; também usavam um raciocínio similar quando a soma era menor que o total apresentado no problema.

Segue exemplo:



Sabrina pensou em três número consecutivos, cuja soma é 42. Quais foram os números que Sabrina pensou?

números	soma
18, 19, 20	57
12, 13, 14	39
15, 16, 17	48
14, 15, 16	45
13, 14, 15	42

Observa-se que, nessa equipe, após a primeira tentativa com os números consecutivos 18, 19 e 20, cuja soma é igual a 57, ela optou por outros números consecutivos menores que os anteriores que foram 12, 13 e 14 cuja soma é 39, que é menor do que o total dado. Nessa situação, na terceira tentativa, os alunos utilizaram um raciocínio similar e escolheram outros números consecutivos, cujo valor era maior que os anteriores, continuando a utilizar esse raciocínio durante a resolução do problema.

Outro exemplo de equipe presente nessa categoria, isto é, que observou os conceitos utilizados para a resolução do problema, é exemplificado a seguir:

2ª Salvino pensou em três números consecutivo cuja soma é 42 quais foram os números que salvino pensou

números	somas
30,31,32	93
21,22,23	66
10,11,12	33
12,13,14	39
14,15,16	45
13,14,15	42

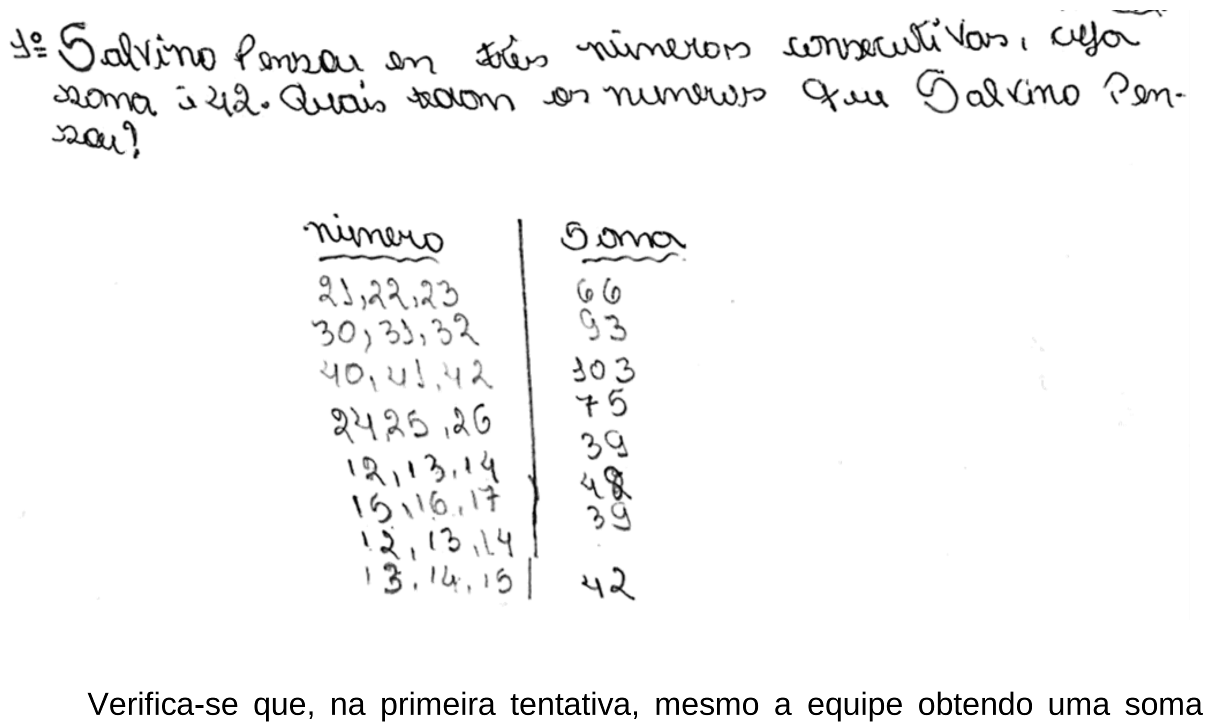
Observa-se que na primeira tentativa a equipe utilizou, aleatoriamente, os números consecutivos 30, 31 e 32, cuja soma é 93. Para a segunda tentativa, resolveu procurar outros números consecutivos menores que os escolhidos na primeira tentativa, já que a soma das parcelas da primeira tentativa é maior que o total dado no problema. Os números escolhidos na segunda tentativa foram 21, 22 e 23, mas sua soma é 66, continuava maior que o total dado, o que levou os alunos a escolherem outros números; dessa vez, escolheram 10, 11 e 12, cuja soma é 33, menor que 42. Utilizando um raciocínio similar buscaram novos números, mas agora maiores que os anteriores. A equipe procurou manter-se nesse raciocínio durante a resolução do problema.

Categoria 02: Os alunos resolvem o problema usando a representação numérica e tabular; usam parcialmente as operações, os conceitos e as ideias e têm certa dificuldade no estabelecimento de estratégias.

A dificuldade inicial apresentada pelo problema não foi totalmente superada, pois solicitava alguns conhecimentos prévios, que eram defasados em alguns alunos, como, por exemplo, as quatro operações básicas. Mediante a interação e mediação promovidas em sala de aula, os alunos conseguiram entender o que o problema solicitava e o objetivo que pretendiam alcançar, assim, conseguiram construir uma estratégia apenas para iniciar sua resolução. Caminhar na estratégia não foi traçado antecipadamente, assim como não foi verificado passo a passo. A estratégia de resolução utilizada envolvia a representação numérica e tabular, usando adequadamente a ideia de números consecutivos, mas com dificuldade no caminhar da estratégia e nas operações envolvidas no problema.

Assim, os alunos trabalhavam com os números consecutivos de forma adequada, mas inicialmente não percebiam que, se a soma dos consecutivos fosse maior que o total dado, deveriam optar por outros números menores que os escolhidos primeiramente, ou que, se a soma dos consecutivos fosse menor que o total dado, deveriam optar por outros números maiores que os escolhidos. Essa percepção, quando ocorria por parte da equipe, era feita no decorrer da resolução do problema, provavelmente, quando os alunos começavam a observar os resultados obtidos nas tentativas iniciais.

Segue exemplo a seguir:

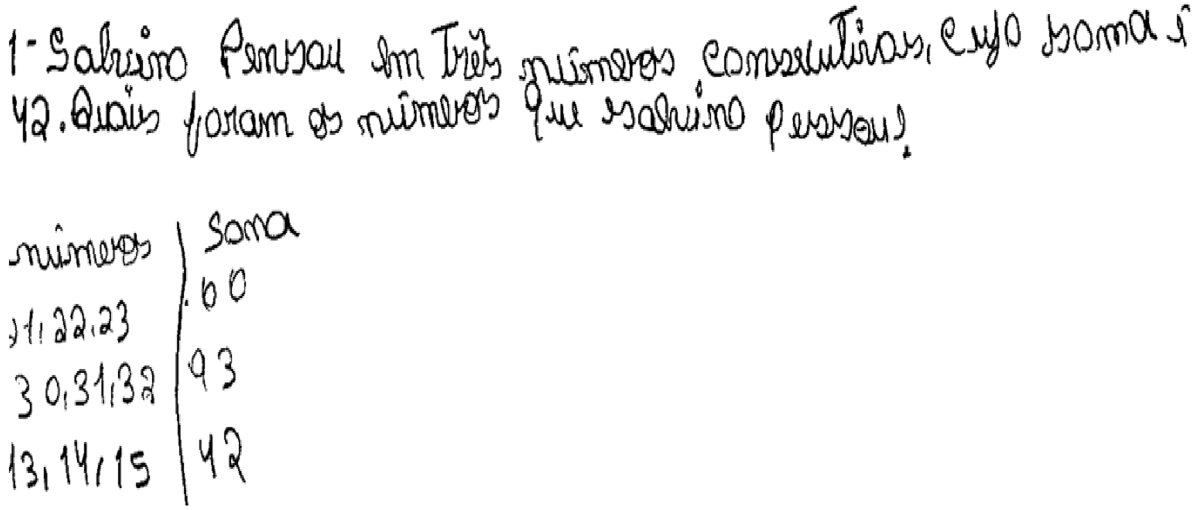

1º Salvino pensou em três números consecutivos, cuja soma é 42. Quais foram os numeros que Salvino pensou?

número	soma
21, 22, 23	66
30, 31, 32	93
40, 41, 42	103
24 25, 26	75
12, 13, 14	39
15, 16, 17	48
12, 13, 14	39
13, 14, 15	42

Verifica-se que, na primeira tentativa, mesmo a equipe obtendo uma soma maior que o total dado no problema com os números consecutivos 21, 22 e 23, os alunos não perceberam de imediato a necessidade de utilizar outros números consecutivos que representassem uma soma menor que 66. Essa percepção, provavelmente, ocorre após quatro tentativas quando utilizaram os números consecutivos 12, 13 e 14.

Essa equipe pode não ter percebido que a sétima tentativa é igual à quinta, pois se trata da soma dos mesmos números. Também houve um resultado errôneo, no que se refere à operação de adição na sexta tentativa, pois a soma das parcelas 15, 16 e 17 tem soma igual a 48, ao invés de 42, como apresentou a equipe. Existe a possibilidade de a equipe ter percebido o equívoco na soma e não a ter corrigido, pois, além de haver uma pequena rasura na escrita da soma, continuou com a resolução do problema até encontrar, novamente, a soma igual a 42.

Outro exemplo de equipe presente na categoria 02 a seguir:


1-Sabino Pensou Im Três números consecutivos, cujo soma é 42. Quais foram os números que sabino pensou?

números	soma
21, 22, 23	60
30, 31, 32	93
13, 14, 15	42

Assim como na outra equipe, exemplificada anteriormente, observa-se que, na escrita da resolução do problema apresentado, há indícios de que essa equipe teve dificuldade de perceber, a partir da primeira tentativa, a ideia de que a soma das parcelas 21, 22 e 23 é superior ao total dado no problema e que seria conveniente utilizar, na segunda tentativa, números menores que os optados na primeira tentativa.

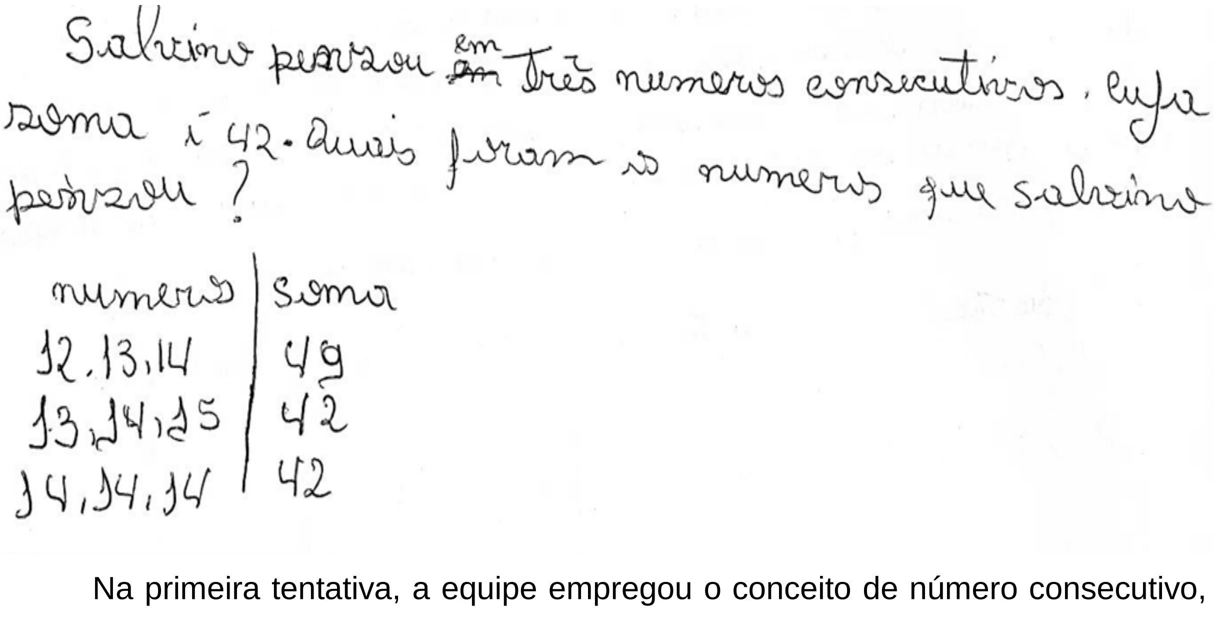
<u>Categoria 03</u>: Os alunos resolvem o problema usando a representação numérica tabular; usam parcialmente as operações, têm dificuldade no estabelecimento de estratégias e no uso dos conceitos.

As equipes de alunos que constituíram essa categoria foram as que apresentaram as maiores dificuldades, tanto no aspecto do conhecimento prévio, como na construção e encaminhamento da estratégia para a resolução do problema. Após a mediação promovida e a interação entre eles, esperava-se que o uso da representação numérica e tabular na estratégia de resolução do problema estivesse evidente para eles, mas era necessário que, por meio da verbalização, internalizassem os conceitos e as operações que deveriam utilizar, juntamente com a ferramenta da representação numérica e tabular.

De fato, essas representações foram perceptíveis na escolha da estratégia dos alunos, mas as dificuldades quanto aos conhecimentos prévios, aos conceitos/ideias envolvidas no problema e quanto à compreensão de como utilizá-los fizeram com que essas equipes se distanciassem das demais, no que se refere à compreensão do que estava sendo trabalhado em sala de aula e no andamento da resolução do problema, inclusive, ocorreu que, em alguns momentos, a linguagem não estava relacionada com o pensamento.

Assim, diante do conceito de números consecutivos e da ideia da soma desses números, observou-se que os alunos não se prenderam ao conceito de forma concisa, tanto que aparecem números iguais e os mesmo são integrados como parte da resolução do problema. Na escrita da resolução do problema foi apresentada uma possível dificuldade no entendimento da ideia, envolvendo a soma dos números consecutivos e o total dado no problema.

Segue exemplo:



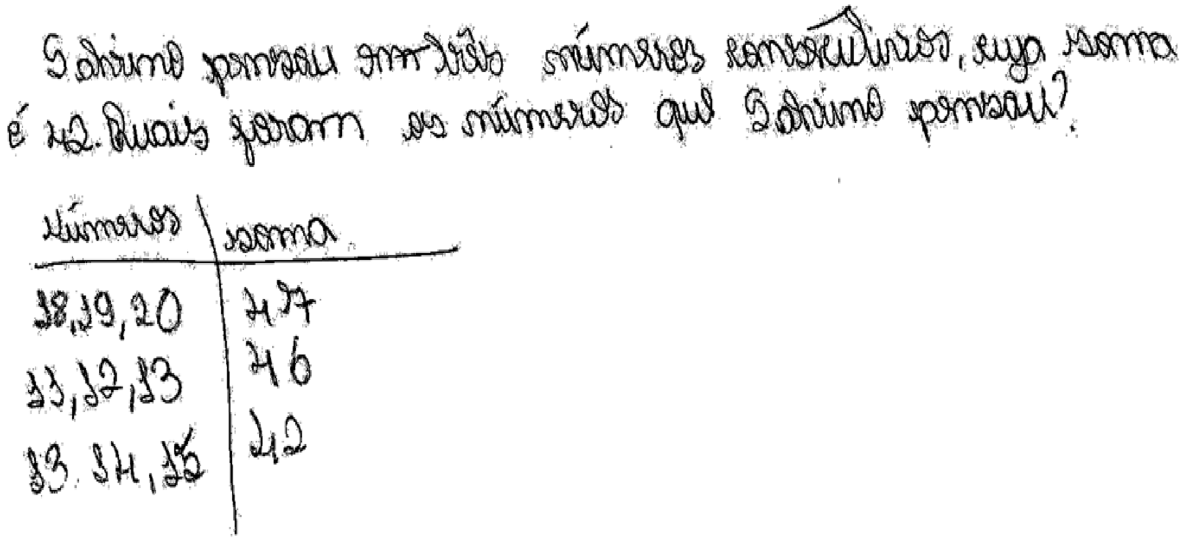
Sabrina pensou ~~em~~ em três numeros consecutivos, cuja soma é 42. Quais foram os numeros que Sabrina pensou?

numeros	soma
12,13,14	49
13,14,15	42
14,14,14	42

Na primeira tentativa, a equipe empregou o conceito de número consecutivo, utilizando os números 12, 13 e 14, mas obteve a soma 49, em vez de 39; aparentemente, houve um equívoco com relação à soma das dezenas dos números.

Na segunda tentativa, os alunos optaram por números consecutivos maiores que os da primeira e a sua soma foi menor que a desta. Tal situação pode ter-lhes provocado a ideia de que uma das duas tentativas estava inadequada, mas isso não foi percebido na sua escrita. Posteriormente, continuaram com a resolução, encontrando, para o total de 42, três números iguais, fugindo assim da ideia de números consecutivos.

Outro exemplo de equipe que procede dentro das características dessa categoria, isto é, que mostra também a mesma dificuldade com a operação de adição, não percebendo a questão das dezenas, mesmo se utilizando o conceito de consecutivo, é exemplificado a seguir:



[illegible] pensou em três números consecutivos, cuja soma é 42. Quais foram os números que [illegible] pensou?

números	soma
18,19,20	47
11,12,13	46
13. 14, 15	42

Na primeira tentativa, a equipe utilizou o conceito de números consecutivos com os números 18, 19 e 20, e indicou uma soma igual a 47, mas somar esses três números tem como resultado 57, demonstrando um possível equívoco com relação às dezenas, assim como na segunda tentativa a equipe utiliza os números 11, 12 e 13 e indica uma soma igual a 46, mais uma vez diferente do resultado correto com relação às dezenas, pois, na adição das parcelas 11, 12 e 13 obtém-se 36.

Nas duas situações, possivelmente, ocorre a adição das unidades de forma correta, mas nas dezenas há uma diferença de uma dezena para mais ou para menos, demonstrando a possibilidade de haver dificuldade com processos procedurais como a regra do *vai um* (normalmente apresentada com esse termo pelos professores), regra essa que esclarece que da unidade para a dezena, quando a soma das unidades completa uma (1) dezena, *vai um* para a dezena a ser adicionado.

Observando duas tentativas em sequência, considerando três números consecutivos, vê-se que quanto menor os números escolhidos para a segunda tentativa, menor será a sua soma, mas os alunos dessa equipe não conseguiram observar isso de forma evidente. Na segunda tentativa, foram escolhidos três números consecutivos estritamente menores do que na primeira tentativa, mas obtiveram uma soma quase igual com a primeira tentativa.

Assim, como ocorreu no exemplo anterior, observou-se que, na terceira tentativa, a equipe aumentou os números consecutivos, com relação aos números da segunda tentativa, o que deveria também ocorrer com a soma, mas a soma obtida pela equipe foi de 42, menor que a soma igual a 46 obtida na tentativa anterior.

As resoluções dos demais problemas (problemas 1.1.2 e 1.1.3) trabalhadas em sala de aula nesse mesmo encontro mantiveram-se dentro das três categorias mencionadas anteriormente.

Encontro 03 (aulas 06 e 07): Desenvolvendo a ideia de representação numérica.

Conteúdos trabalhados: Continuidade do conteúdo do encontro anterior.

Objetivo: Oferecer aos alunos um raciocínio que os levasse a perceber que se pode trabalhar com números desconhecidos em um problema; construir uma estratégia para a resolução de problemas, por meio da representação numérica e tabular, que seja um apoio para a resolução de demais problemas.

Iniciou-se esse encontro mostrando-se aos alunos como eles próprios haviam resolvido os problemas do encontro anterior, bem como seus acertos e seus possíveis equívocos.

Posteriormente, foram propostos problemas envolvendo as equações polinomiais do 1º grau, promoveu-se uma continuidade do conteúdo, alterando-se as características de alguns dos problemas, no que se referem aos elementos encontrados neles. Essa alteração foi diretamente feita pelo aumento da quantidade de incógnitas e das relações entre elas, pois nesse encontro trabalhou-se com o 2º conjunto de problemas referente ao momento 01.

Houve uma alteração na metodologia de ensino, nesse encontro, na intervenção do professor (pesquisador), que evitou ser direcionada à sala (como sendo uma aula expositiva), passando a realizar intervenções individualmente aos alunos ou na equipe, quando trabalhavam coletivamente. Devido ao fato de haver três (3) alunos que não frequentaram as aulas iniciais, no momento em que a turma trabalhava individualmente, então, procurou-se inseri-los no trabalho, utilizando-se uma representação verbal, informando-lhes a respeito do que foi trabalhado nos encontros anteriores. Esses alunos não conseguiram trabalhar individualmente, sendo inseridos, nesse encontro, sempre em equipes com outros que estavam presentes nos encontros anteriores.

Como a maioria deles já conhecia a estratégia de resolução, por meio de tentativa e erro, após estarem diante dos problemas, inicialmente, foi feita uma leitura do primeiro problema, do 2º conjunto de problemas, realizando-se perguntas para verificar a compreensão da turma sobre o problema.

O Problema 1.2.1 proposto para ser resolvido individualmente à turma foi resolvido pela maioria dos alunos, que comentavam que *o problema é parecido* com os do encontro anterior.

O Problema 1.2.2 por se tratar de uma situação que pode ser resolvida por um sistema de equações, ou com um número maior de relações entre as incógnitas do que as apresentadas até o presente momento à turma, então, inicialmente, foi sugerido aos alunos que trabalharem individualmente, a fim de que cada um construísse suas próprias interpretações, bem como para poder ser verificado, pelo pesquisador, se havia um nível de desenvolvimento real para esse tipo de problema; e, posteriormente, foi trabalhado o mesmo problema, em equipe formada por dois alunos, com exceção das que continham os alunos faltosos do encontro anterior, que trabalharam constantemente em equipe.

Quando os alunos começaram a trabalhar em equipe, de início, observou-se, visualmente, o desempenho das equipes, procurando evidenciar quais os que conseguiram resolver o problema, e foi constatada certa dificuldade da maioria das equipes em obter um resultado satisfatório para o problema. Mas seria preciso enfatizar que a percepção das dificuldades dos alunos assume importante posição no estabelecimento do ensino-aprendizagem como um todo, pois, a partir do momento que se detecta a existência da dificuldade, e quais são elas, é possível traçar uma estratégia que procure auxiliar o aluno a superá-las.

Um ponto que interferiu na resolução do problema foi a mudança de atitude de alguns alunos em sua equipe, quando comparado com os problemas do encontro anterior, pois alguns ficaram a esperar pela *solução* do problema, por parte do seu colega, e outros não demonstraram motivação para resolvê-lo, alegando terem *errado* o do encontro anterior.

Foi necessário intervir motivando-os e mostrando a capacidade deles, procurando levá-los a observar que estava ao alcance deles resolver tais problemas. Dessa forma, chegou-se a resolver o problema 1.2.2, utilizando-se as ideias dos alunos; isso fez com que percebessem que podiam resolver o problema, assim como os demais.

Como as equipes já estavam formadas e os alunos já haviam recebido o conjunto de problemas, para evitar certo desperdício de tempo, separando-os e agrupando-os em equipes, então, a partir do problema 1.2.3, foram mantidas as equipes, nas quais trocaram ideias necessárias à resolução dos problemas, chegando a maior consenso sobre como resolvê-los. Alguns problemas com cálculos aritméticos, principalmente os que os alunos consideram de tabuada, fizeram com que não chegassem à solução desejada do problema, mesmo identificando a maneira adequada a ser utilizada na sua resolução.

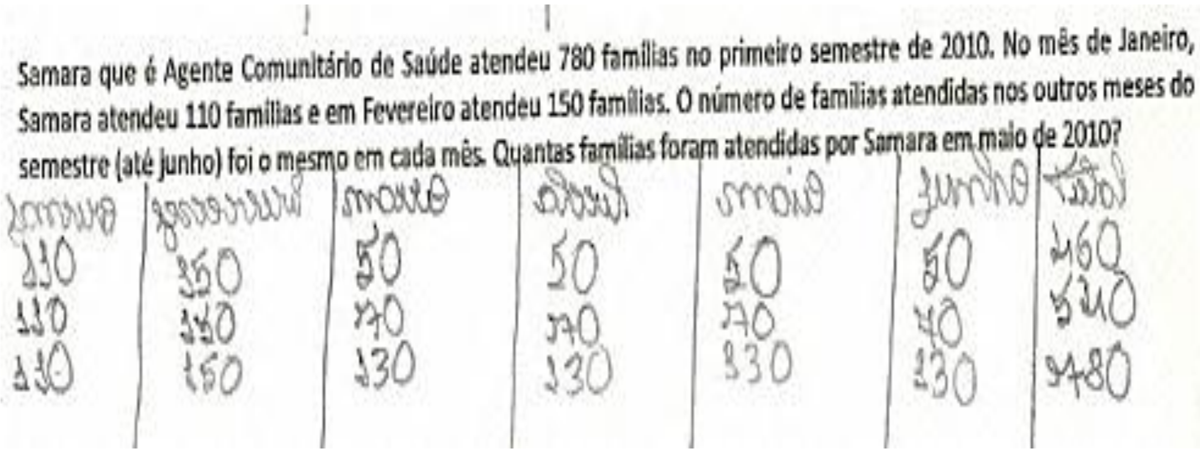
A princípio, sem analisar de forma precisa, os três alunos que frequentavam pela primeira vez as aulas e que precisaram trabalhar sempre em equipe, e considerando as categorias apresentadas no encontro 02, nesse conjunto de problemas houve alunos que fizeram parte de equipes que constituíam a categoria 02[7] e trabalharam de acordo com a categoria 01[8], bem como ocorreu migração dos alunos de equipes da categoria 03[9] para a categoria 02.

Não se conseguiu identificar nenhum aluno que fez parte de alguma equipe da categoria 03, no encontro 02, e que passou a trabalhar de acordo com os alunos das equipes da categoria 01.

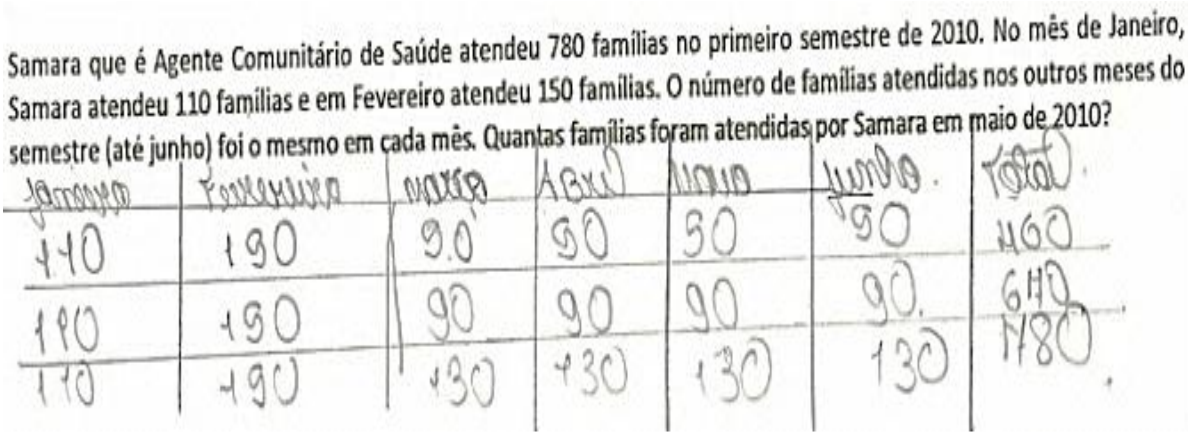
Para o 2º conjunto de problemas, seguem exemplos das categorias 01, 02 e 03, respectivamente, com o problema 1.2.4:

---

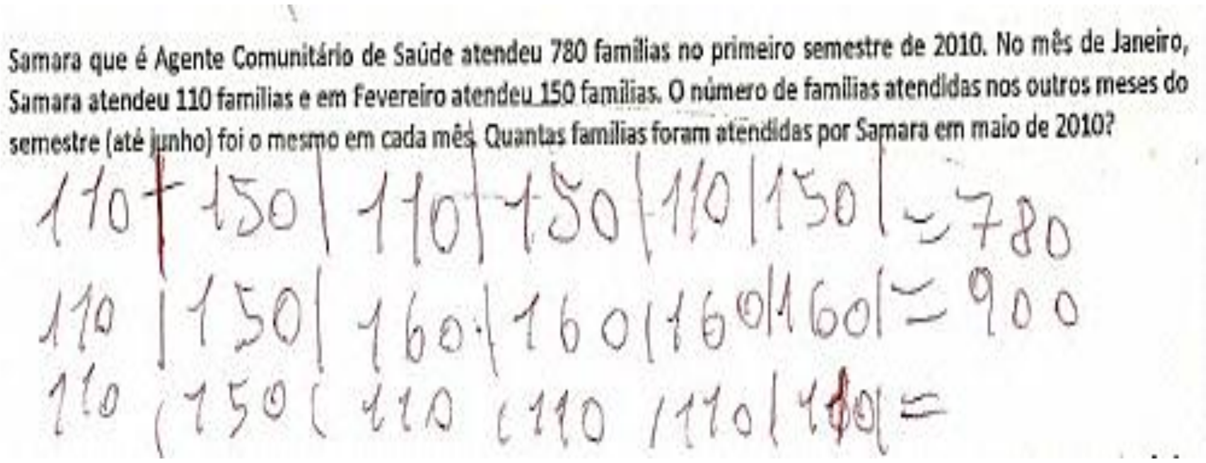
[7] Os alunos resolvem o problema usando a representação numérica e tabular, usam parcialmente as operações, conceitos e ideias e tem certa dificuldade no estabelecimento de estratégias.
[8] Os alunos resolvem o problema usando a representação numérica e tabular, conceitos e ideias e tem controle das estratégias usadas.
[9] Os alunos resolvem o problema usando a representação numérica e tabular, usam parcialmente as operações, tem dificuldade no estabelecimento de estratégias e no uso dos conceitos.


Samara que é Agente Comunitário de Saúde atendeu 780 famílias no primeiro semestre de 2010. No mês de Janeiro, Samara atendeu 110 famílias e em Fevereiro atendeu 150 famílias. O número de famílias atendidas nos outros meses do semestre (até junho) foi o mesmo em cada mês. Quantas famílias foram atendidas por Samara em maio de 2010?

janeiro	fevereiro	março	abril	maio	junho	total
110	150	50	50	50	50	460
110	180	70	70	70	70	540
110	150	130	130	130	130	1480


Samara que é Agente Comunitário de Saúde atendeu 780 famílias no primeiro semestre de 2010. No mês de Janeiro, Samara atendeu 110 famílias e em Fevereiro atendeu 150 famílias. O número de famílias atendidas nos outros meses do semestre (até junho) foi o mesmo em cada mês. Quantas famílias foram atendidas por Samara em maio de 2010?

janeiro	fevereiro	março	abril	maio	junho	total
110	190	90	90	50	90	460
110	190	90	90	90	90	640
110	190	130	130	130	130	1780


Samara que é Agente Comunitário de Saúde atendeu 780 famílias no primeiro semestre de 2010. No mês de Janeiro, Samara atendeu 110 famílias e em Fevereiro atendeu 150 famílias. O número de famílias atendidas nos outros meses do semestre (até junho) foi o mesmo em cada mês. Quantas famílias foram atendidas por Samara em maio de 2010?

110 | 150 | 110 | 150 | 110 | 150 | = 780

110 | 150 | 160 | 160 | 160 | 160 | = 900

110 | 150 | 110 | 110 | 110 | 110 | =

Encontro 04 (aulas 08, 09 e 10): Introduzindo a representação algébrica.

Conteúdo trabalhado: Resolução de equações polinomiais do 1º grau, representação numérica e tabular, representação algébrica.

Objetivo: Proporcionar a compreensão da construção e utilização de uma estratégia para a resolução de problemas, por meio da representação numérica e tabular, que represente um apoio para a resolução de demais problemas; introduzir as primeiras ideias algébricas das equações polinomiais do 1º grau a partir da generalização da aritmética.

Como os alunos já haviam compreendido o processo de resolução dos problemas propostos, então se elaborou mais um conjunto de problemas, dessa vez, para ser resolvido apenas de forma individual, pois o objetivo visado era observar o rendimento dos alunos, após a interação com os demais, referente à resolução dos problemas, assim como sua reação ao deparar-se em momentos semelhantes ao de avaliação proposta pela professora titular.

Assim, na primeira aula desse encontro, foi solicitado que resolvessem individualmente o 3º conjunto de problemas. Imediatamente uma das perguntas que mais surgiu, por parte deles, no decorrer dos primeiros minutos, foi:

− É prova?

Tratou-se de tranquilizá-los, informando-lhes de que não era *prova* e sim uma atividade para ser feita individualmente, para que cada um pudesse mostrar o que aprendeu. Assim, procurou-se evitar o máximo possível intervir nos dados fornecidos pelos alunos, ao resolver os problemas, e, principalmente, por meio do diálogo, tentou-se deixar claro que deveriam assimilar a possibilidade de não sofrer interferência do fator psicológico, que poderiam ser acompanhados no momento da avaliação, pois se acredita que, em alguns casos, sabendo que estão sobre avaliação, podem sofrer interferência no seu desempenho, de forma negativa, já que, nessa situação, alguns priorizam a questão da *pontuação* mínima a ser alcançada, ao invés do seu conhecimento.

Nas duas aulas restantes desse mesmo encontro, trabalhou-se a resolução de problemas, tanto do conjunto de problemas desse encontro como dos aplicados nos encontros anteriores. O ponto de partida para expor a resolução dos problemas foram os argumentos, de forma verbal, que os alunos indicaram. A resolução dos dois conjuntos de problemas não foi feita na forma de aula apenas expositiva, mas utilizando-se a representação verbal (sem explicitar aos alunos essa nomenclatura), na qual cada problema foi resolvido tomando-se como base as ideias expostas verbalmente pelos alunos geradas, tanto nesse encontro, como durante o processo de ensino-aprendizagem ocorrido nos encontros anteriores.

Com base nas resoluções dos problemas trabalhados em sala de aula, foram trazidas aos alunos algumas explorações, sugerindo a alteração dos dados, das situações expostas e da pergunta chave de cada problema. Dessa forma, os alunos foram incentivados a perceber padrões, nas resoluções dos problemas, que direcionavam a uma generalização. Essa generalização foi o ponto inicial para o uso da representação algébrica na resolução de problemas de equações polinomiais do 1º grau.

Diante de tal situação, os alunos foram mediados com o fim de trabalhar os problemas com a representação algébrica (sem explicitar-lhes essa nomenclatura de representação algébrica).

<u>Encontro 05 (aulas 11 e 12)</u>: Desenvolvendo a ideia da representação algébrica e representação geométrica.

Conteúdo trabalhado: Resolução de equações polinomiais do 1º grau, representações algébrica e geométrica; representações múltiplas.

Objetivo: Proporcionar aos alunos a utilização das representações múltiplas na resolução das equações polinomiais do 1º grau na direção de um ensino-aprendizagem com compreensão.

Nesse encontro foram trabalhados, pelo menos, um problema de cada encontro anterior, utilizando-se a forma algébrica. Os alunos demonstraram, por meio de comentários verbais, a compreensão dos conceitos referentes à utilização dos meios algébricos, ao procurar representar algebricamente situações apresentadas nos problemas, ao identificarem padrões existentes nos mesmos.

A princípio, demonstravam a compreensão das ideias algébricas envolvidas nos problemas, quanto à generalização da Aritmética por meio de padrões apresentados nas resoluções dos problemas, da representação numérica e tabular, realizadas pelos próprios alunos, mas, ao mesmo tempo, apresentavam dificuldades em realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão envolvendo incógnitas, apresentando, às vezes, resultados errôneos, por exemplo, ao adicionar

23y com 18y obtinham 31y ao invés de 41y, ou perguntavam como somar *y* com *y,* já que apareciam na *casa das unidades*.

Assim, percebeu-se que as dificuldades apresentadas não eram decorrentes apenas da questão de conceitos, mas também por haver dificuldades com as operações na forma aritmética, principalmente, com a multiplicação e a adição. Dessa maneira, foi necessário utilizar mais tempo para explicar aos alunos como realizar operações que envolvem incógnitas.

Para isso, foi necessário fazer um resgate dos conhecimentos prévios das operações aritméticas e realizar alguns exemplos de operações com incógnitas. Com as comparações feitas pelos alunos foi possível desenvolver melhor a compreensão em relação ao modo de trabalhar as incógnitas nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

A partir do momento que se conseguiu perceber uma compreensão satisfatória nas operações com as incógnitas, realizou-se a continuidade na resolução de alguns dos problemas propostos dos encontros anteriores por meio da representação algébrica, para só então dar-se início a um trabalho voltado à representação geométrica.

Para a representação geométrica, usou-se o plano cartesiano, conteúdo que havia sido trabalhado pela professora titular nas aulas de geometria. Apresentaram-se as generalizações feitas na representação algébrica, por meio do gráfico de uma reta no plano cartesiano, pois o gráfico de uma equação polinomial do 1º grau é uma reta.

A partir do momento em que os alunos conheciam as estratégias de resolução dos problemas, por meio da representação numérica e tabular e algébrica, com a presença da representação geométrica, foi solicitado que, ao invés de realizarem-se explorações nos problemas – até mesmo porque já as haviam utilizado em encontros anteriores –, resolvessem os que não foram trabalhados nesse encontro, utilizando, pelo menos, duas das representações apresentadas a eles: representação numérica e tabular, algébrica e geométrica. Assim, poder-se-ia procurar observar como empregariam as representações múltiplas, ao trabalharem as equações polinomiais do 1º grau.

<u>Encontro 06 (aulas 13, 14 e 15)</u>: Apresentação do conteúdo para a turma.

Conteúdo trabalhado: Incógnita; operações algébricas; equações polinomiais do 1º grau.

Objetivo: Proporcionar ao aluno um material escrito do conteúdo de equações polinomiais do 1º grau e assim procurar sanar as eventuais dúvidas sobre o conteúdo.

Esse último encontro, desse primeiro momento constituído de três aulas, destinou-se a apresentar o conteúdo trabalhado em todos os encontros: equações polinomiais do 1º grau; com ideias da Álgebra.

Os alunos já conheciam algumas ideias referentes às equações polinomiais do 1º grau, como, por exemplo, a igualdade, a incógnita e os termos independentes e os que dependem da incógnita, mesmo quando não haviam sido trabalhadas as definições e os conceitos, ou exposto o conteúdo de uma forma explícita, mas a forma como o processo foi, então, realizado providenciou a construção de ideias que se direcionavam à compreensão do conteúdo e aos conceitos envolvidos.

Dessa forma, diante das ideias dos alunos, adquiridas nos encontros anteriores, que favoreceram a construção dos conceitos referentes à Álgebra, foi realizada uma aula expositiva, explicitando o conteúdo intitulado *noções de álgebra,* abordado no livro didático, mostrando o conceito de incógnita e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão envolvendo incógnitas, tal como o conteúdo inicial de equações polinomiais do 1º grau.

Essa exposição, juntamente com a compreensão já adquirida pelos alunos, no que diz respeito ao conteúdo, evidenciou maior compreensão por parte deles sobre a Álgebra. Essa compreensão proporcionou uma diminuição das dúvidas sobre como realizar operações algébricas.

Para finalizar esse encontro, e esse primeiro momento da pesquisa, foi exposta aos alunos a ideia do que são as equações polinomiais do 1º grau e como podem apresentar-se nas situações-problema, bem como o modo pelo qual os alunos podem trabalhar com elas, ao apresentar a resolução dos problemas propostos por meio algébrico. Assim, puderam perceber que as equações polinomiais do 1º grau estão envolvidas diretamente com a Álgebra.

Segue um quadro com o cronograma do momento 01:

30 de Setembro de 2010	O pesquisador conhecendo o ambiente escolar da turma a ser pesquisada.
4 de Outubro de 2010	Encontro 01 (aulas 01 e 02): Apresentação do docente à turma pesquisada.
5 de Outubro de 2010	Encontro 02 (aulas 03; 04 e 05): Uso das representações numérica, tabular e verbal.
11 e 12 de Outubro de 2010	Não houve aula, feriado municipal e nacional.
18 de Outubro de 2010	Encontro 03 (aulas 06 e 07): Desenvolvendo a ideia de representação numérica.
19 de Outubro de 2010	Encontro 04 (aulas 08, 09 e 10): Introduzindo a representação algébrica.
25 de Outubro de 2010	Encontro 05 (aulas 11 e 12): Desenvolvendo a ideia da representação algébrica e representação geométrica.
26 de Outubro de 2010	Encontro 06 (aulas 13, 14 e 15): Apresentação do conteúdo para a turma.

4.1.2. Considerações do Momento 01

A maioria dos alunos, normalmente, demonstrava motivação para participar do ensino-aprendizagem; assimilava a forma de se trabalhar com resolução de problemas e contribuía com os demais, expondo suas ideias e suas dúvidas. Era visível a presença da curiosidade não só pela aprendizagem. As primeiras aulas pareceram marcadas, principalmente, pela sua ansiedade em saber o que iria ocorrer com a turma, referente às notas e à presença daquele *novo professor*.

Aparentemente, nos primeiros encontros, tal preocupação pode ter interferido no desempenho dos alunos, fugindo um pouco da sua realidade o fato de poderem ter um ensino-aprendizagem com compreensão, quando essa proposta pedagógica é aplicada pelo professor titular da turma.

Acredita-se nessa possibilidade, pois os alunos se preocupavam em questionar: *Como são suas provas? Tem os pontos que a professora deu... e aí como vai ser isso? A professora vai voltar? Por que o senhor não fica com a gente? Se eu fizer as questões ganho ponto? Quando eu não faço a atividade da professora ela não dá ponto, mas o senhor é bonzinho, né?* Dentre outras questões, visavam compreender como era aquele *novo professor* que se encontrava na sala de aula, no que se refere à metodologia de ensino e sua avaliação.

Com esse conjunto de dúvidas dos alunos, as primeiras aulas não fluíram como o esperado e isso pode ter influenciado alguns alunos a apresentar maior dificuldade de compreender a metodologia de ensino empregada na sala de aula, já que suas prioridades estavam voltadas não apenas para a aprendizagem do conteúdo, mas também em relação ao novo professor.

Assim, nessa intervenção da pesquisa, observou-se que houve certa ruptura na mudança de professores, pois o afastamento do professor titular da sala de aula, com sua substituição imediata pelo professor-pesquisador, provocou uma mudança drástica aos alunos.

Dessa forma, devido aos alunos, a princípio, terem demonstrado estar providos de dúvidas e anseios, com relação ao seu futuro na disciplina, a ponto de interferir diretamente no ensino-aprendizagem, então, com o objetivo de que isso seja minimizado, ou até mesmo superado na intervenção do momento 02, pretende-se que ocorra uma inclusão de forma gradativa do professor-pesquisador na sala de aula. Essa será utilizada para a aplicação da proposta pedagógica, produzida com base no momento 01, e servirá como levantamento de dados para análise nessa pesquisa, assim para a realização do momento 02; e, iniciada a aplicação da proposta pedagógica de ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau, com o uso das representações múltiplas, será utilizada uma demanda maior de tempo.

4.2. Momento 02: ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau na sala de aula: um plano em perspectiva

Diante, principalmente, dos dados e das observações realizadas no momento 01 e dos demais elementos abordados nessa pesquisa, preconiza-se, nesse momento 02, uma proposta pedagógica para o ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau com o uso das representações múltiplas, tratada em Blocos e destinada ao nível de Ensino Fundamental. A passagem de um Bloco para outro ocorre à medida que cada Bloco for completado, independente do número de aulas necessárias para sua conclusão.

Nesse segundo momento da pesquisa, também ocorre a aplicação e discussão da proposta pedagógica em sala de aula, que tem como objetivo colaborar para uma reflexão, referente ao ensino-aprendizagem, sobre as equações polinomiais do 1º grau, com o uso das representações múltiplas, priorizando a compreensão e construção de ideias e conceitos.

A metodologia de ensino-aprendizagem adotada foi a de resolução de problemas, explorando situações e formas de resolução dos problemas com os alunos dos problemas propostos. Os alunos iniciavam a resolução dos problemas individualmente e, posteriormente, no mesmo encontro, trabalhavam em equipe, assim como ocorreu na maioria dos encontros do momento 01.

Optou-se por essa metodologia, devido ao fato de haver o objetivo de proporcionar uma oportunidade de observar-se o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial dos alunos envolvidos nessa pesquisa e, dessa forma, foi observado o nível de problemas a serem trabalhados em situações posteriores na sala de aula, condizente com a zona de desenvolvimento proximal apresentada pelos alunos.

A seguir, foi apresentado o desenvolvimento da proposta realizada: Bloco 01, 02, 03, 04, e 05.

Bloco 01:

<u>Conteúdos</u>: Primeiras ideias de incógnita, equações polinomiais do 1º grau e os princípios da igualdade.

Objetivos e Justificativas**:** Na aritmética, principalmente quando o professor leciona expressões numéricas, facilmente se encontram situações em que os professores utilizam questões com valores conhecidos, envolvendo operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão), com o objetivo de encontrar certo valor após as operações.

Com o propósito de trabalhar com a Álgebra, partindo da Aritmética, o primeiro Bloco é iniciado com problemas que utilizam um valor desconhecido, juntamente com as operações elementares, obtendo um resultado já pré-definido; neste caso, no conteúdo de equações polinomiais do 1º grau, trata-se das equações polinomiais do 1º grau do tipo $ax + b = c$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, em que esse valor desconhecido é identificado como sendo a incógnita do problema.

Muitos dos problemas em que os alunos se deparam na vida cotidiana podem ser resolvidos com esse tipo de equação. Esses problemas poderão servir de base para a construção e/ou o desenvolvimento do pensamento, frente às primeiras ideias de incógnita e de equação polinomial do 1º grau. É necessário lembrar que a incógnita é um valor fixo desconhecido, a princípio, que se busca descobri-lo na resolução do problema. A equação polinomial do 1º do grau é uma igualdade entre duas expressões matemáticas, que se verifica para determinado valor da incógnita.

Nesse Bloco, os alunos trabalharam um conjunto de problemas, por meio da tentativa e erro, utilizando a representação numérica e tabular.

Em cada problema deve haver explorações da pergunta chave (a pergunta a ser respondida no problema).

Problemas Propostos:

> *Problema 2.1.1: A idade de Marcelo somado com 17 anos é 35 anos. Qual é a idade de Marcelo?*

Inicialmente, realizar uma discussão referente à história da Álgebra, mostrando o estágio da Álgebra retórica e sincopada para direcionar o aluno a solucionar esse problema por tentativa e erro.

Posteriormente, fazer duas tentativas e erros com números que resultarão em erros. Registrar as duas tentativas iniciais, com respectivos resultados, em uma tabela, e solicitar que o aluno descubra a solução do problema, pois o objetivo é obter uma resolução do problema por parte dos alunos com o uso da representação numérica, juntamente com seu conhecimento prévio de Aritmética.

Assim, o aluno deverá utilizar seus conhecimentos prévios de Aritmética, para escolher os novos valores para empregar nas demais tentativas, conhecimento esse que pode influenciar na sua aprendizagem do conteúdo.

> *Problema 2.1.2: Maria nasceu em janeiro 2001. Em janeiro de 2010, o dobro da idade de Maria mais a idade de Marcos eram 25 anos. Quantos anos tinha Marcos em janeiro de 2010?*

O objetivo com esse problema é instigar, mais ainda, o surgimento de valores desconhecidos, ou seja, as incógnitas, mas sem expressar aos alunos a incógnita propriamente dita, na forma algébrica representada por uma letra do alfabeto, e, sim, a ideia ou conceito que a envolve.

A princípio há duas incógnitas: a idade de Maria e a idade de Marcos. A idade de Maria é obtida pela subtração de 2010 e de 2001, obtendo-se como resultado nove 9 anos de idade. A primeira incógnita pode ser investigada pelo aluno por meio da discussão sobre a idade dele, ao questionar quantos anos eles têm e como pode saber essa idade.

Diante da informação da idade de Maria e, consequentemente, com a obtenção do dobro da sua idade, direcionar os alunos a resolver o problema da idade de Marcos, da mesma forma como foi resolvido o problema anterior: pela tentativa e erro, utilizando a representação numérica e a representação tabular.

> *Problema 2.1.3: Durante o ano Aline juntou algumas economias para comprar uma bicicleta e um par de patins no valor total de R$ 426,00. Qual é o preço do par de patins, sabendo que o dobro do preço do par de patins com o preço da bicicleta é de R$ 734,00?*

Nesse problema o objetivo é verificar a assimilação que os alunos obtiveram referente à estratégia utilizada na resolução dos problemas com a tentativa e erro, bem como sanar eventuais dúvidas dos alunos e observar seu nível de desenvolvimento potencial.

Os alunos trabalharão em equipes de dois ou três alunos para procurar solucionar o problema. Diante do desenvolvimento do Bloco 01, pode-se identificar que o problema 2.1.3 pode ser resolvido de duas maneiras: 1- Utilizar uma tabela atribuindo valores aos pares de patins e a bicicleta e verificar se os resultados satisfazem o problema; 2- Verificar que da primeira situação de compra, envolvendo apenas a bicicleta e um par de patins, para a segunda situação há um acréscimo de um par de patins, bem como um aumento no valor da compra de um total de R$ 426,00 para R$ 734,00. Nesse caso, a equação 426 + x = 734, em que x representa o valor do par de patins, pode representar algebricamente o problema.

Mas deve-se atribuir ênfase na resolução desse problema usando o modo 1 (utilizando a representação numérica e tabular) e introduzir, de forma direta, as primeiras ideias de incógnitas para os alunos, ao mostrar o modo 2 (surgimento da incógnita x).

> *Problema 2.1.4: Na casa de João há um reservatório com capacidade para 190 litros de água, mas havia apenas 125 litros. João resolveu encher o reservatório com um balde e para isso usou cinco (5) baldes cheios para completar o reservatório. Qual é a capacidade de litros do balde?*

> *Problema 2.1.5: Um pote cheio de azeite pesa 5 kg. Com azeite pela metade, pesa 2,75 kg. Quanto pesa o pote vazio?*

Os problemas 2.1.4 e 2.1.5 serão colocados para os alunos trabalharem em equipe, constituídas de dois ou três alunos, sem realizar uma orientação inicial para a turma, procurando instigá-los a resolver sozinhos para se perceber o nível de desenvolvimento real e transformar o nível de desenvolvimento potencial em real, fazendo a zona de desenvolvimento proximal sofrer variações.

Após as equipes iniciarem a resolução, realizar mediações nas mesmas, referentes à interpretação dos problemas e ao caminhar da sua resolução. Nessa mediação, utilizar as ideias indicadas pelos alunos. O objetivo é instigá-los sobre a presença da incógnita nos problemas. A metodologia de ensino e as estratégias utilizadas na resolução desses problemas são as mesmas dos problemas anteriores desse Bloco.

Bloco 02:

Conteúdos: A ideias de incógnita, equações polinomiais do 1º grau na forma algébrica.

<u>Objetivos e Justificativas</u>: Após a resolução dos problemas do Bloco 01, trabalhando indiretamente com as primeiras ideias de incógnita e de equações polinomiais do 1º grau, utilizando a representação numérica e tabular por meio da tentativa e erro, tratar nesse Bloco 02, de forma direta, as incógnitas, os princípios aditivo e multiplicativo e as equações polinomiais do 1º grau.

O princípio aditivo trata de dois pontos: 1- adição de um mesmo número aos dois membros da equação, 2- subtração de um mesmo número aos dois membros da equação; o princípio multiplicativo trata de dois pontos: 1- multiplicação dos dois membros da equação pelo mesmo número (diferente de zero), 2- divisão dos dois membros da equação pelo mesmo número (diferente de zero).

Essa abordagem é realizada por meio da resolução dos problemas apresentado pelos alunos no Bloco 01, observando padrões existentes na resolução dos problemas propostos e a interpretação algébrica do determinado fenômeno apresentado. Diante dessas observações e interpretações, procurar-se-á realizar generalizações utilizando a representação algébrica.

O problema 2.1.1 é uma equação polinomial do 1º grau do tipo $ax + b = c$ sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, que, de acordo com a interpretação matemática do problema, poder-se-á representá-lo, algebricamente, por um caso particular de equação, como sendo $x + 17 = 35$, em que x representa a idade de Marcelo.

A resolução é dada pelo princípio aditivo, ao ser adicionado aos dois membros da equação o número –17 (dezessete negativo), obtendo a equação equivalente $x + 17 + (-17) = 35 + (-17)$, e por fim, com o uso das operações aritméticas, obter o resultado $x = 18$, ou seja, a idade de Marcelo é de 18 anos.

No problema 2.1.2, a idade de Maria pode ser investigada com base na ideia de que se sabe a sua própria idade, ao subtrair-se o valor do ano que se está pelo o valor do ano em que se nasce; portanto, Maria possui nove (9) anos, já que $2010 - 2001 = 9$. Para encontrar-se a idade de Marcos, utilizar a ideia de equação polinomial do 1º grau, abordando a situação com a equação do tipo $ax + b = c$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, investigar o problema por meio da equação $2 \cdot 9 + x = 25$, em que x representa a idade de Marcos.

Primeiramente, resolver a operação de multiplicação presente no primeiro membro, obtendo a equação equivalente $18 + x = 25$; posteriormente, utilizar o princípio aditivo e, assim, a equação passará a ser $18 + x - 18 = 25 - 18$. Lembrar aos alunos a propriedade comutativa na adição e com isso obter que $x = 17$, ou seja, a idade de Marcos é de 17 anos.

O problema 2.1.3 pode ser tratado com a equação já mencionada anteriormente com os alunos: $426 + x = 734$, em que x representa o preço do par de patins. Aplicar o princípio aditivo na equação polinomial do 1º grau, obtendo a equação equivalente $426 + x – 426 = 734 – 426$, e, após a realização das operações aritméticas nos dois membros da equação, obter $x = 308$, ou seja, o preço do par de patins é de R$ 308,00.

Para a resolução do problema 2.1.4, comentar com os alunos que os cinco (5) baldes foram utilizados para encher o que faltava de água no reservatório, que, no caso, para saber isso, utiliza-se uma operação de subtração entre a capacidade do reservatório e o total de água presente no mesmo.

Essa interpretação do problema pode direcionar a equação $5x = 190 – 125$, em que x representa a capacidade de água de um balde, equação que é do tipo $ax+b = c$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Na resolução, realizar a subtração presente no segundo membro da igualdade, obtendo a equação polinomial do 1º grau $5x = 65$, e, posteriormente, aplicar o princípio multiplicativo. Ao multiplicar os dois membros por um quinto (1/5), obter-se-á a equação $5x·(1/5) = 65·(1/5)$, e, com essa resolução, proporciona-se o resultado de $x = 13$, ou seja, o balde tem capacidade de 13 litros de água.

Para o problema 2.1.5, iniciar uma discussão referente ao fato de que, independente da quantidade de azeite, o pote em si permanece com o mesmo peso e que o problema apresenta dois momentos: 1- o pote cheio de azeite; 2- o pote com metade do azeite.

No segundo momento do problema, houve uma diminuição do peso de 5 kg para 2,75 kg e essa diferença representa a metade do azeite que não está presente no segundo momento, ou seja, tem-se a equação $x/2 = 5 – 2,75$, em que x representa o peso total do azeite. Realizando-se a operação de subtração no segundo membro, tem-se que $x/2 = 2,25$. Utilizando-se o princípio multiplicativo, multiplicando-se os dois membros por dois (2), obter-se-á a equação $(x/2) · 2 = 2,25 · 2$, e o resultado $x = 4,5$. Portanto, o peso total do azeite é de 4,5 kg. Resultado este que ainda não é a solução do problema.

No primeiro momento do problema 2.1.5, tem-se a equação $y + x = 5$, em que y representa o peso do pote e x o peso do azeite. Agora, como se conhece o valor de $x = 4,5$, pode-se substituir o mesmo na equação, obtendo-se que $y + 4,5 = 5$. Utilizando-se o princípio aditivo, adicionando-se $-4,5$ (quatro vírgula cinco negativo) em cada membro, tem-se $y + 4,5 - 4,5 = 5 - 4,5$; logo, obtém-se $y = 0,5$. Portanto, o peso do pote é de 0,5 kg.

Nesse problema, também será abordada a questão de se ter mais de uma incógnita no mesmo problema, procurando construir as primeiras ideias de sistemas de equações polinomiais do 1º grau.

Nesse Bloco 02, procurar mediar, entre os alunos, utilizando-se a representação verbal, para que possam fluir da representação numérica para a representação algébrica, diante do auxílio da resolução de um conjunto de problemas extras. Tais problemas serão fundamentados nas investigações em sala de aula dos problemas propostos inicialmente.

Após uma noção da compreensão dos alunos sobre as equações polinomiais do 1º grau, frente às representações numérica e algébrica, possibilitar uma construção do conhecimento por meio da representação geométrica, ao utilizar-se da reta numérica e do gráfico de uma reta em um plano cartesiano, que é o gráfico de uma equação polinomial do 1º grau, confirmando os resultados obtidos na resolução dos problemas.

Portanto, o objetivo com esses dois primeiros Blocos é produzir uma oportunidade para o aluno construir conceitos inerentes ao conteúdo de equações polinomiais do 1º grau. Após uma possível construção do conhecimento, por parte do aluno, formalizar conceitos das equações polinomiais do 1º grau. Tais conceitos podem ser os apresentados no livro didático adotado na escola, ou da preferência do professor. Consequentemente, o aluno também já terá conhecimento de resolução de equações do 1º grau.

Bloco 03:

Conteúdos: Equações polinomiais do 1º grau, representações múltiplas.

Objetivos e Justificativas: Nesse Bloco, além de mobilizar os conceitos e processos de resolução de equações evidenciados nos Blocos anteriores, utilizar problemas em que os alunos poderão optar pela representação numérica, algébrica ou geométrica para resolvê-los. Solicitar, posteriormente, a resolução do mesmo problema, por meio de uma segunda representação, distinta da escolhida inicialmente, favorecendo a compreensão do conteúdo. Essa será uma maneira de inferir a possibilidade de os alunos fluírem entre as representações.

Problemas Propostos:

> *Problema 2.3.1: A soma dos lados de um retângulo (perímetro) é 36 cm. Sabendo-se que a largura é 6 cm menor que o comprimento, quanto mede cada lado desse retângulo?*
>
> *Problema 2.3.2: Seu Manoel ao receber R$ 70,00 pensou assim: se eu somar esse dinheiro à metade do que tenho guardado, posso pagar a primeira das quatro prestações iguais da TV. A TV custa R$ 600,00. Quanto seu Manoel tem guardado?*
>
> *Problema 2.3.3: O médico disse a Sandro: na próxima vez que você voltar aqui, eu quero que esteja no seu peso ideal. Assim, seu peso ideal é ¾ do seu peso atual mais 2 kg. Qual é seu peso atual se seu ideal é de 77 kg?*

Ao mesmo tempo em que se procura ver a possibilidade de o aluno fluir entre as representações nesse Bloco, também serão trabalhados os conceitos de fração e perímetro, principalmente no caso de a turma não compreender, ainda, esses conceitos.

Bloco 04:

<u>Conteúdos</u>: Sistema de equações polinomiais do 1º grau.

<u>Objetivos e Justificativa</u>: Aprimorar os conhecimentos de equações polinomiais do 1º grau, por meio de problemas que podem apresentar várias incógnitas, havendo relações entre as incógnitas, de tal forma que possa ser resolvido os problemas, por meio de várias equações polinomiais de 1º grau, em um único processo de resolução. Dessa forma, estar-se-á, indiretamente, construindo a ideia de sistema de equações polinomiais do 1º grau. A resolução dos problemas desse Bloco sobre sistemas de equações polinomiais, ao utilizar-se a representação algébrica, priorizará o processo normalmente intitulado de substituição, que consiste em apresentar apenas uma incógnita em um dos membros de uma equação, isto é,

isolar a incógnita no primeiro membro e, posteriormente, substituí-la em outra equação.

Problemas Propostos:

Problema 2.4.1: Miguel e Carlos jogam juntos no mesmo time de futebol. No último campeonato, marcaram juntos 39 gols. Miguel marcou 5 gols a mais que Carlos. Miguel marcou quantos gols no campeonato?

Problema 2.4.2: João e Maria realizaram economias durante o ano para poderem realizar compras ao final do ano. Com suas economias, compraram um liquidificador, um fogão e uma geladeira por R$ 1.050,00. O preço do fogão foi o quíntuplo do preço do liquidificador. O preço da geladeira foi o triplo do preço do fogão. Qual foi o preço do liquidificador?

Problema 2.4.3: A comunidade do Bairro Vida Bela resolveu realizar um bingo. A urna do bingo contém 63 bolas. Cada bola é de uma única cor; as cores das bolas são azul, vermelha e amarela. O número de bolas azuis é o dobro das vermelhas e o número das amarelas é o triplo das azuis. Quantas bolas de cada cor existem na urna?

Problema 2.4.4: José fez umas compras no valor de R$ 415,00 no mercadinho do Bairro e, por ser amigo de Mario que é o dono do mercadinho, dividiu o valor das compras em três prestações de valores diferentes. A segunda prestação foi o dobro da primeira e a terceira foi R$ 15,00 a mais que a segunda. Qual é o valor de cada prestação que José irá pagar a Mario, o dono do mercadinho?

Bloco 05:

Conteúdo: Formalização do conteúdo ministrado em sala de aula.

Objetivos e Justificativas: Esse Bloco passa a ser o fechamento do conteúdo, explicitando-o de forma escrita para os alunos, ao realizar uma descrição dos conceitos inerentes ao conteúdo de equações polinomiais do 1º grau e, portanto, proporcionar subsídios a mais para os alunos revisarem o conteúdo em outro momento e aprimorarem seus conhecimentos construídos no decorrer da aplicação da proposta. O material utilizado para apresentar tal escrita pode ter como base o livro didático adotado pela escola. Com as ideias desenvolvidas no decorrer dos quatro primeiros blocos, procurando favorecer a construção dos conceitos inerentes às equações polinomiais do 1º grau, juntamente com a escrita do conteúdo apresentada nesse Bloco, tem-se o objetivo de diminuir, ou até mesmo sanar, alguma eventual dúvida sobre o conteúdo.

4.3. Momento 02: ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau na sala de aula: descrição da aplicação da proposta pedagógica.

Nessa seção, descreve-se a aplicação da proposta pedagógica preconizada na seção anterior. A aplicação ocorreu em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental e Médio de uma Escola Estadual da cidade de Campina Grande, Paraíba.

Nesse momento, opta-se pela inserção na turma, de forma gradativa. O horário das cinco aulas de Matemática da turma estava distribuído como segue: uma aula na terça, uma na quarta, na quinta e duas na sexta, no turno da tarde.

Devido à necessidade de a professora titular trabalhar os conteúdos de Geometria, então ficou acordado que ela utilizaria o horário da quarta-feira para ministrar o conteúdo dessa disciplina e as aulas das terças, quintas e sextas para o levantamento dos dados da pesquisa, por meio da aplicação da proposta pedagógica. Também seriam utilizadas outras aulas pela professora, quando houvesse necessidade de realizar atividades avaliativas e atividades extras na turma referente ao conteúdo de Geometria.

<u>Aulas 01 a 04 – 18 a 21/10/11</u>: Observação das aulas da professora titular da turma.

Nessas quatro aulas foram observadas as aulas da professora regente da turma, nas quais se abordou o conteúdo de Geometria.

O objetivo visado era inserir-se na turma, habituar os alunos com a presença do pesquisador e conhecê-la melhor, para depois fazer a aplicação da proposta pedagógica e o levantamento de dados, a fim de analisar a possibilidade de desenvolver o conteúdo de equações polinomiais do 1º grau em sala de aula, tendo em vista o uso das representações múltiplas.

Na turma havia vinte alunos matriculados, mas com presença, em média, de dezesseis nas aulas. A maioria com doze anos de idade e todos frequentavam, pela primeira vez, o 7º ano do Ensino Fundamental, provindos, em maioria, do 6º ano da mesma escola.

A professora usou uma metodologia de ensino que priorizava a memorização de regras e definições, acompanhada de exemplos e exercícios, sem explicitar os porquês do que era ensinado.

Era visível a falta de participação dos alunos para o desenvolvimento da aula e das atividades realizadas, apresentando dificuldades diante dos conteúdos ensinados. Assim, a maioria deles ficava simplesmente esperando o fim da aula, sem demonstrar qualquer tipo de participação, outros com conversas paralelas e a grande minoria transcrevendo para o caderno as informações expostas pela professora no quadro de giz.

<u>Aulas 05 e 06 – 25 e 27/10/1</u>: Participação do pesquisador, como colaborador, nas atividades desenvolvidas pelos alunos em sala, sob a regência da professora oficial da turma.

Nessas aulas, a professora destinou-se, principalmente, a fazer com que os alunos resolvessem atividades do livro didático adotado na escola e de outras fontes suas.

No decorrer das atividades, quando eram resolvidas pelos alunos, procurou-se auxiliar a professora titular, realizando-se mediações individuais com os alunos, buscando direcioná-los na resolução das atividades, assim como lhes mostrando o *pesquisador* como professor, mas deixando claro que estava auxiliando e não substituindo a professora.

As mediações eram de auxílio na interpretação do enunciado das atividades, evidenciando o processo utilizado pela professora na sua resolução e, principalmente, questionando sobre as ideias que continham sobre o modo como resolver tais atividades, a fim de utilizá-las na construção de uma estratégia que pudesse ser utilizada para solucionar o que havia sido solicitado pela professora.

Deve-se enfatizar que a professora não trabalhava com a resolução de problemas na perspectiva de realiza exploração das questões apresentadas aos alunos, mas, sim, com questões que valorizavam a utilização de procedimentos para obter a solução.

Sendo assim, mesmo que essa pesquisa possua uma metodologia de ensino voltada à resolução de problema nessas aulas, que a prioridade aí tenha consistido na inserção do pesquisador na turma e em observá-la, as aulas ocorriam de acordo com a metodologia de ensino utilizada pela professora titular, logo os exercícios trabalhados eram direcionados a apenas obter a solução das questões.

Observou-se que, durante essas duas aulas, diante do procedimento adotado pela professora, os alunos demonstravam dúvidas a respeito de como obter a resposta das questões. Quando recorriam ao auxílio da professora, esta procurava explicar as questões mediante comentários dos processos utilizados, ao solucionar os exemplos dados em aulas anteriores.

Quando o aluno demonstrava não ter sanado sua dúvida, após a explicação da professora, compreendia-se que esse poderia ser o momento adequado em proporcionar-lhe um auxílio à compreensão da questão, realizando um questionamento; normalmente, iniciava-se com perguntas, como, por exemplo: *O que você pode-me dizer sobre este problema? Tem algo parecido neste problema com os que a professora resolveu antes? Como você acha que se resolve este problema?*

De acordo com as respostas às perguntas realizadas aos alunos, a mediação prosseguia, mas sem dizer de forma direta como solucionar o problema, procurando direcioná-los a raciocinar e interpretá-lo, a fazer conexões com problemas anteriores, destacar os dados do problema e, com isso, construir uma estratégia que os levasse à solução. Após identificarem uma estratégia para obter a resposta do problema, então, faziam-se os ajustes necessários para viabilizar, de forma mais simplificada, o caminho a ser percorrido por eles.

Dessa forma, os alunos poderiam observar que se procurava valorizar a compreensão do que estava sendo abordado, ao invés de, meramente, mencionar-lhes o que fazer, direcionando-os a construir o conhecimento necessário e não apenas memorizá-lo, bem como proporcionando-lhes a oportunidade de acrescentar uma forma de raciocinar distinta da exposta pela professora, com o objetivo de que pudessem utilizar os procedimentos adotados para solucionar as questões.

Durante o período da aula, destinado para que os alunos resolvessem as atividades, percebeu-se que o número dos que vinham em busca de auxílio para compreender as questões era bastante expressivo.

Após realizar a correção no quadro de giz das atividades propostas aos alunos, a professora resolveu outro conjunto de problemas semelhantes aos aplicadas no início da aula, questões provenientes do livro adotado pela escola e de outros livros.

Aula 07 – 01/11/11: Primeira aula ministrada pelo pesquisador, em que foram dadas informações aos alunos sobre a pesquisa e introduzida a ideia da representação numérica e tabular.

Sendo essa a terceira semana do momento 02 e estando os alunos mais habituados com a presença do pesquisador, houve uma inversão de papéis com a professora titular, isto é, aquele passou a ser o professor da turma e iniciou-se a aplicação da proposta pedagógica, enquanto a professora ficou presente na sala de aula observando de forma não participante; nas outras aulas, a professora esteve ausente.

Nessa aula, primeiramente, explicou-se aos alunos a pesquisa, comentou-se sobre a trajetória do pesquisador no campo da Educação, mencionando o caminhar como professor.

Posteriormente, foi ministrada, rapidamente, a história da Álgebra e exemplificada com questões possivelmente apresentadas nos estágio da Álgebra retórica, com o objetivo de mostrar o quanto a Matemática dos dias atuais evoluiu com o intuito de facilitar a sua utilização e escrita, procurando quebrar um mito que a maioria dos alunos defende: *Matemática é difícil e complicada*.

Nesse momento, os alunos voltaram toda sua atenção aos comentários, fizeram algumas perguntas de contexto muito variado, como, por exemplo, *Como as pessoas aprendiam matemática só escrevendo?* e *Professor ganha quanto?*

Na continuidade da aula, foi apresentado aos alunos, a título de esclarecimento sobre o que se iria trabalhar em sala de aula, o problema a seguir:

Marcelo tem 43 anos, hoje, e seu filho 18 anos. Daqui a quantos anos a idade de Marcelo será o dobro da idade do filho?

Resolveu-se esse problema com o uso da representação numérica e tabular, por meio da tentativa e erro.

Houve a ideia de exploração do problema, sugeriu-se a alteração da idade de *Marcelo* e realizada sua resolução, utilizando-se a representação numérica e tabular. Foi recomendado aos alunos que fizessem alterações nos dados do problema, de acordo com sua própria opinião, e trabalhassem sua resolução em outra oportunidade.

Durante essa aula, a resolução do problema e sua exploração com o uso da representação numérica e tabular foram de exclusividade do professor-pesquisador. Posteriormente, será detalhada a resolução de problemas por meio da representação numérica e tabular, ao descreverem-se as aulas em que os alunos participaram realizando as resoluções e explorações de problemas propostos.

O principal objetivo nessa aula era apresentar aos alunos uma forma de raciocinar e interpretar determinados tipos de problemas e mostrar que podiam construir uma estratégia de resolução com base na representação numérica e tabular, assim como produzir explorações dos mesmos, de acordo com suas interpretações e convicções, no intuito de promover maior compreensão do conteúdo abordado em sala de aula. Aparentemente, esse objetivo foi alcançado com êxito.

Aula 08 – 03/11/11: Resolução dos problemas 2.1.1 e 2.1.2.

Após deixar de ser apenas um observador das aulas da professora titular e passar a ser o professor da turma, e inserir os alunos no contexto da pesquisa, foi promovido, pelo professor-pesquisador, o início da aplicação da proposta pedagógica a partir do Bloco 01.

Nessa aula, foram trabalhados os problemas 2.1.1 e 2.1.2, do Bloco 01. Nessa aula, a resolução dos problemas deixou de ser de responsabilidade do professor-pesquisador e passou a ser dos alunos.

A turma apresentava-se, aproximadamente, em sua totalidade, pois dos 19 alunos matriculados estava presente 18 alunos. Deu-se início a aula, mencionando-se como foram trabalhados os problemas na aula anterior, via tentativa e erro. Após esta explanação, entregou-se a cada aluno, de forma impressa, os problemas 2.1.1 e 2.1.2.

Segue os problemas 2.1.1 e 2.1.2:

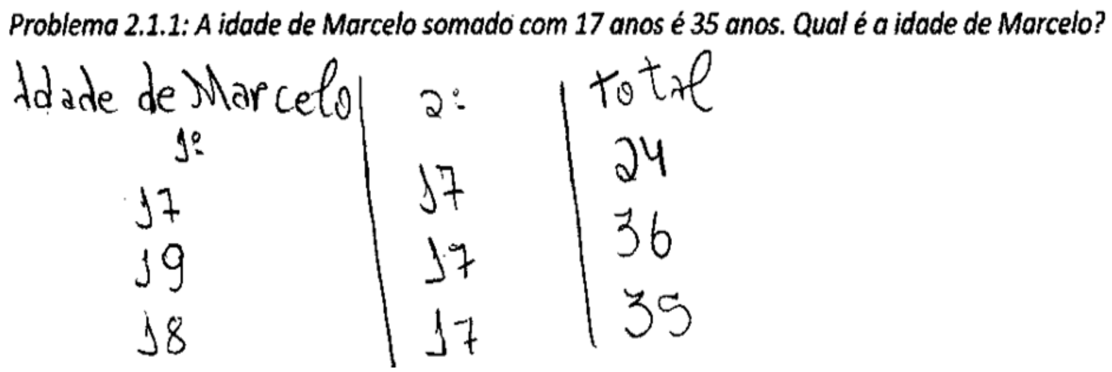
> *Problema 2.1.1: A idade de Marcelo somado com 17 anos é 35 anos. Qual é a idade de Marcelo?*
>
> *Problema 2.1.2: Maria nasceu em janeiro 2001. Em janeiro de 2010, o dobro da idade de Maria mais a idade de Marcos eram 25 anos. Quantos anos tinha Marcos em janeiro de 2010?*

Foi feita uma leitura dos problemas para a turma, em voz alta, e, posteriormente, destinou-se alguns minutos para que os alunos pudessem reler e assimilar a estratégia que poderia ser utilizada nas suas resoluções.

A partir de então, os alunos começaram a trabalhar individualmente; o silêncio extremo foi facilmente notado na sala. No início, alguns alunos liam o problema, mas não realizavam nenhuma escrita; outros começaram a resolução do problema montando a tabela para registrar as tentativas, mas sem nenhuma tentativa escrita, e alguns apresentavam a solução utilizando apenas uma operação de subtração.

Com o passar do tempo, ainda com o extremo silêncio na sala, ficou mais evidente o uso da representação numérica e tabular; assim, foi facultado espaço na aula para os alunos verbalizarem seus pensamentos sobre a estratégia para a resolução do problema. Com isso, passaram a mencionar a resolução dos problemas por tentativa e erro usando a representação numérica e tabular.

A seguir, tem-se um exemplo de como os alunos trabalharam a resolução dos problemas 2.1.1 e 2.1.2, no qual fazem parte da categoria 01 (mesmo o aluno apresentando um equívoco de escrita na primeira operação, pois verbalizou que 7 + 17 = 24):



Problema 2.1.1: A idade de Marcelo somado com 17 anos é 35 anos. Qual é a idade de Marcelo?

Idade de Marcelo 1º	2:	total
17	17	24
19	17	36
18	17	35

Problema 2.1.2: Maria nasceu em janeiro 2001. Em janeiro de 2010, o dobro da idade de Maria mais a idade de Marcos eram 25 anos. Quantos anos tinha Marcos em janeiro de 2010?

Idade de Maria	Idade de Marcos	Total
18	2	20
18	4	22
18	7	25

O objetivo visado aqui não era que todos os alunos completassem a sua estratégia de resolução do problema 2.1.1 e conseguissem uma solução satisfatória, mas que produzissem as primeiras ideias para a elaboração da estratégia, bem como sua utilização.

Considerando que a turma é heterogênea em termos de conhecimento e habilidades, o tempo dado para que todos expressassem, na sua escrita, uma estratégia, foi o suficiente para que alguns chegassem a completá-la; assim, surgiram as primeiras resoluções do problema 2.1.1.

Observando que todos usaram uma estratégia para a resolução do problema 2.1.1, solicitou-se que os alunos passassem a trabalhar em dupla, mesmo continuando cada um com seu material impresso com o problema. Nesse momento, os alunos de algumas equipes entraram em debate e passou-se a observar algumas frases mencionadas por eles como, por exemplo: *Está errado*, *Foi assim que eu fiz, Por que é desse jeito e não assim?*

Houve certo confronto de ideias em algumas equipes. Os alunos foram deixados livres para que pudessem ajudar-se mutuamente e, assim, aprenderem mais.

A intervenção nos debates das equipes foi feita apenas nos momentos em que alguns alunos ficaram *exaltados*, procurando-se pacificar o debate antes que ultrapassassem a linha do respeito ao próximo, mas sem retirar o entusiasmo pelo problema; também, quando solicitado, foram feitas intervenções às equipes.

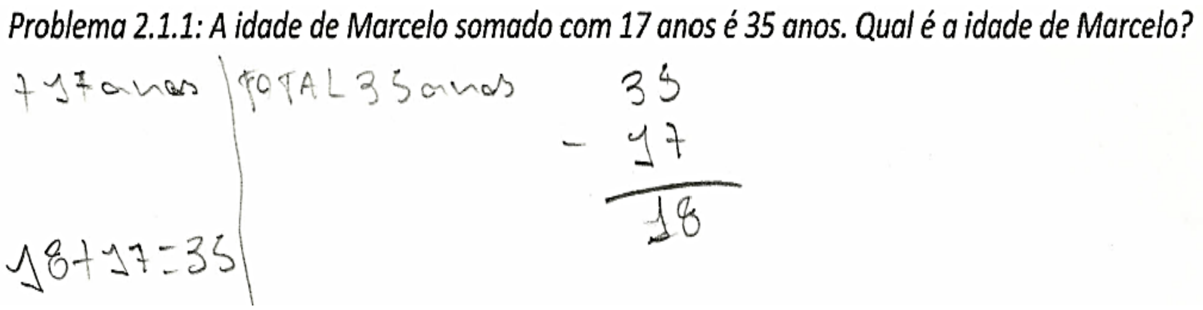
Após os alunos conseguirem completar suas resoluções do problema, iniciaram-se as explorações. Tais explorações foram ocorrendo nas duplas e não foram realizadas em toda a sala. As explorações concentraram-se na alteração dos dados do problema, de acordo com as sugestões dos próprios alunos.

Os alunos anotavam as alterações que pretendiam fazer nos problemas e, procurava-se auxiliá-los na resolução do novo problema proposto por eles.

A princípio, esperava-se que as três categorias presentes no momento 01 (p. 53-57), também fossem perceptíveis nesse momento 02.

Ao ter em mãos todo o material produzido pelos alunos na resolução dos problemas, pôde-se constatar que as categorias existentes no momento 01 também se apresentavam neste momento 02, mas, além da presença das três (3) categorias, também houve, no processo de resolução dos problemas, por parte dos alunos, alguns casos em que preferiram priorizar seu raciocínio e sua interpretação do problema a utilizarem a representação numérica e tabular trabalhadas em sala.

Segue um exemplo de aluno que não utilizou diretamente a representação numérica e tabular, mas sim apenas a operação de subtração:


Problema 2.1.1: A idade de Marcelo somado com 17 anos é 35 anos. Qual é a idade de Marcelo?

+ 17 anos | TOTAL 35 anos

$$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 17 \\ \hline 18 \end{array}$$

18+17=35

Acredita-se que esse ocorrido possa ter sido provocado pela possibilidade de os problemas estarem dentro do nível de desenvolvimento real do aluno, assim o conhecimento que se procurou trabalhar nesse processo de ensino-aprendizagem não foi totalmente aproveitado por ele.

Após esses alunos apresentarem essa estratégia de resolução e interagirem com os demais, tanto da sua equipe como da sala, a turma percebeu existir mais de uma maneira para a resolução do problema.

Assim, foi sugerido que os alunos que perceberam que a subtração é uma operação que podia solucionar o problema continuassem a trabalhar com a mesma estratégia, mas também com a representação numérica e tabular, pois nem todos os problemas implicam apenas operação de subtração. Alguns chegaram a montar a estrutura de tabela, mas normalmente não deram continuidade, alegando que obter a *resposta* já era suficiente.

Aulas 09 e 10 – 04/11/11: Exploração dos problemas 2.1.1 e 2.1.2 e resolução dos problemas 2.1.3 e 2.1.4

Procurou-se, nessas primeiras aulas, da aplicação da proposta pedagógica, sempre iniciá-las com um pequeno resumo do que aconteceu na aula anterior, já que não há uma frequência de todos os alunos às aulas, assim essa aula foi iniciada com uma abordagem dos problemas 2.1.1 e 2.1.2, com espaço aberto para os alunos mencionarem como haviam resolvidos os problemas.

Após serem relembrados os problemas trabalhados, iniciaram-se as explorações dos problemas alterando-se seus dados. Nesse instante, os alunos trabalharam individualmente, com espaço aberto a comentar com os demais suas explorações.

Alguns alunos mencionaram algumas alterações como, por exemplo, fazer o problema 2.1.1 com a idade do professor juntamente com a idade de um aluno e, no problema 2.1.2, fazer com que o ano de nascimento de Maria fosse o mesmo de um dos alunos. Para essas explorações, obteve-se a idade de um aluno e o ano de nascimento, juntamente com as informações do professor-pesquisador, reescrevendo o problema no quadro de giz para a turma.

Depois que os alunos trabalharam algumas explorações e que foram comentadas para a turma as resoluções das mesmas, começou-se a trabalhar na resolução dos problemas sugeridos para esta aula, que foram os problemas 2.1.3 e 2.1.4.

Manteve-se a ideia de trabalhar com as representações numérica e tabular, mas os problemas não foram entregues todos de uma vez, como ocorreu na aula anterior, e, sim, um após outro.

A seguir os problemas 2.1.3 e 2.1.4:

> *Problema 2.1.3: Durante o ano Aline juntou algumas economias para comprar uma bicicleta e um par de patins no valor total de R$ 426,00. Qual é o preço do par de patins, sabendo que o dobro do preço do par de patins com o preço da bicicleta é de R$ 734,00?*

> *Problema 2.1.4: Na casa de João há um reservatório com capacidade para 190 litros de água, mas havia apenas 125 litros. João resolveu encher o reservatório com um balde e para*

> *isso usou cinco (5) baldes cheios para completar o reservatório. Qual é a capacidade de litros do balde?*

Estando os alunos com o problema 2.1.3 em mãos e procurando resolvê-lo, percebeu-se dificuldade dos alunos para construírem uma estratégia para a resolução do problema, pois não percebiam todos os elementos que influenciavam diretamente na resolução, procurando trabalhar apenas com três dados do problema, como ocorreu nos problemas anteriores. Assim, apresentavam erros na forma como construir a tabela.

Os alunos que não trabalharam com as representações numérica e tabular nos problemas anteriores procuraram seguir o mesmo raciocínio que haviam utilizado, o qual não possibilitou a resolução do problema em questão.

Dessa forma, acredita-se que a metodologia de ensino que valorizava a memorização de regras e os procedimentos pelos quais os alunos passaram anos imersos na mesma, influenciou na sua tomada de decisão para a construção da estratégia para a resolução do problema.

Como a resolução do problema também está relacionado com sistemas de equações polinomiais do 1º grau, utilizando um conjunto maior de informações e operações, então seria preciso que o aluno reestruturasse a estratégia anterior para se adequar ao problema em questão e não apenas tentar aplicá-la diretamente, seria preciso compreender o que havia sido trabalhado em sala de aula e não apenas memorizar. Foi, então, realizada uma maior intervenção na leitura e interpretação do problema.

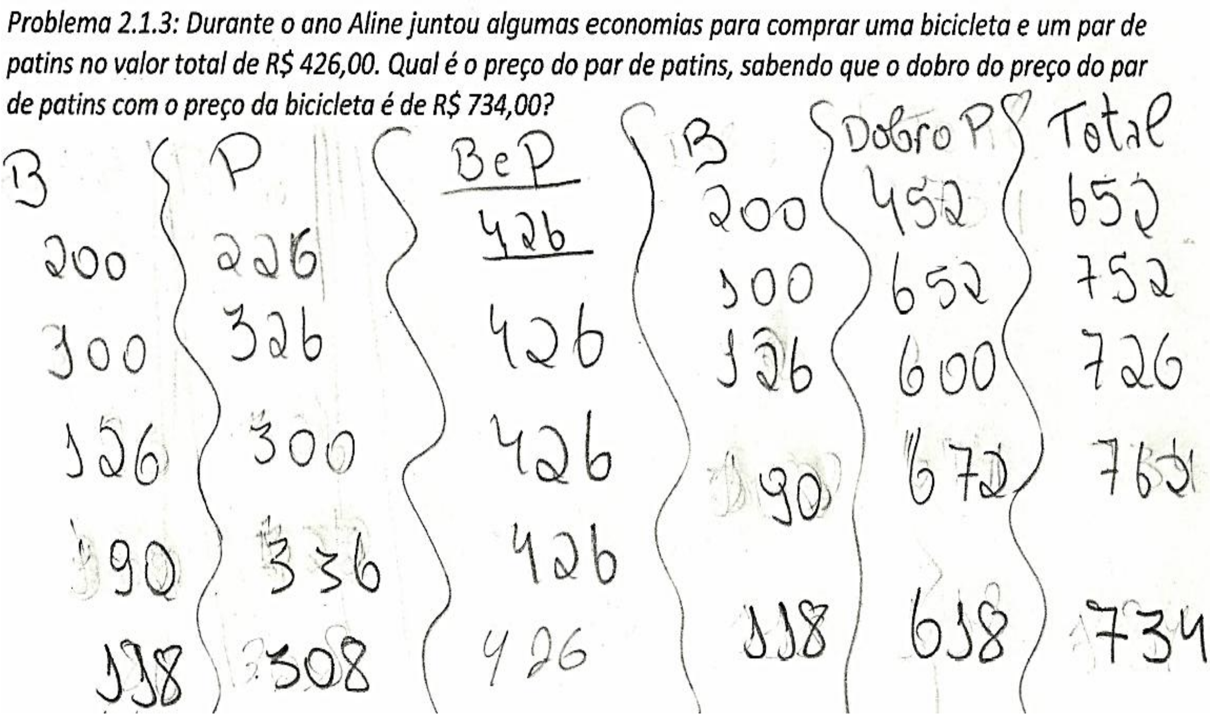
A princípio, a intervenção realizada constituiu-se de uma leitura pausada do texto com explicações dos termos e elementos envolvidos e suas implicações para a resolução do problema. Mesmo assim, ainda houve dificuldades para construir uma estratégia para a resolução, não sabiam se a estratégia de tentativa e erro proporcionaria a resolução do problema e como deveriam ser as tentativas e a obtenção do resultado proveniente de cada tentativa.

Portanto, sentiu-se a necessidade de ir mais além do que se esperava, para que os alunos pudessem entender as informações do problema, a serem usadas na representação numérica e tabular e fazerem as conexões entre elas.

Dessa forma, procedeu-se, no decorrer da aula, de modo a dar início à estratégia de tentativa e erro com base em valores propostos pela turma, que foi de R$ 400,00 para o preço da bicicleta.

A partir de algumas intervenções, os alunos perceberam que, se uma determinada compra que contém dois itens custa R$ 426,00 e um destes tem o valor de R$ 400,00, portanto, necessariamente, o outro item custa R$ 26,00, no caso, o par de patins. A partir disso, propôs-se que observassem o que aconteceria na segunda compra, considerando esses valores. Assim, o valor de R$ 26,00 para o par de patins, foi considerado pela própria turma como inadequado, pois não satisfazia a segunda parte do problema (a segunda compra), logo o preço da bicicleta deveria ser outro valor. Os alunos perceberam que o problema necessitava de duas etapas e assim passaram a trabalhar na resolução do problema com outras tentativas. Optou-se por entregar o problema 2.1.4 para eles iniciarem a resolução.

Apresentam-se a seguir exemplos da resolução dos problemas 2.1.3 e 2.1.4, apresentada pelos alunos que fazem parte da categoria 02:



Problema 2.1.4: Na casa de João há um reservatório com capacidade para 190 litros de água, mas que havia apenas 125 litros. João resolveu encher o reservatório com um balde e para isso usou cinco (5) baldes cheios para completar o reservatório. Qual é a capacidade de litros do balde?

Rese	Balde	5 Baldes	Total
125	25	125	250
125	131	65	190

Com o objetivo de atuar na zona de desenvolvimento proximal, transformando o nível de desenvolvimento potencial no nível de desenvolvimento real por meio do auxílio da interação, então se optou, a partir desse instante, por trabalhar os problemas em equipe de dois e três alunos.

Algo que chamou atenção foi que, no instante em que se aplicava a estratégia de tentativa e erro com o preço da bicicleta, proposto pelos alunos, no valor de R$ 400,00, utilizou-se involuntariamente a letra B para expressar *bicicleta*, sendo apenas uma questão de abreviação da palavra, mas alguns alunos passaram a adotar a mesma ideia de abreviação. Portanto, mesmo aparecendo o uso de algumas *letras* na escrita da resolução dos problemas, elas ainda não indicam ao aluno a formalidade de representar incógnita em uma equação.

Durante a resolução do problema 2.1.4, que eles trabalhavam em equipe, percebeu-se que havia uma preocupação dos alunos em apresentar uma resposta correta, ao invés de priorizar a compreensão do problema e a estratégia para resolvê-lo, pois foi visível a intenção de resolverem primeiro no caderno, ou em outro material, para depois transcrever para a folha que continha o problema; também procuraram apagar dados nas folhas dos problemas, buscando apresentar apenas a resposta correta, justificando com frases como, por exemplo, *está errado, [fulano] fez de outro jeito*.

Devido ao fato de ser o nível dos problemas mais elevado para essa turma e a exigir mais de tempo para a compreensão dos problemas, então não foi possível, nessa aula, realizar as explorações, deixando-se para a próxima essa parte. Para tentar evitar que alguém fora da turma respondesse para os alunos os problemas, o material foi recolhido.

Finalizando a aula, levantou-se a ideia de que, no problema 2.1.3, da primeira possibilidade de compra para a segunda, houve acréscimo de um par de patins e aumento no valor da compra, passando de R$ 426,00 para R$ 734,00, assim, poder-se-ia dizer que 426 + x = 734, em que x representa o valor do par de patins, pode representar o problema.

Aula 11 – 08/11/11: Exploração dos problemas 2.1.3 e 2.1.4

Como se pretende trabalhar os problemas apresentados no Bloco 01, ocorrendo sua resolução e exploração, então continuou-se com os problemas 2.1.3 e 2.1.4. Devolveu-se o material de cada aluno e proporcionou-se certo tempo para que algumas das equipes conseguissem concluir a resolução do problema 2.1.4 e todos realizassem a exploração dos problemas.

Observou-se a forma de trabalhar de cada equipe e constatou-se que todas buscaram a representação numérica e tabular na sua estratégia de resolução dos problemas.

Fez-se mediação, quando necessário, como, por exemplo, quando um aluno queria explicar algo para outro da mesma equipe e não conseguia expressar verbalmente o que pensava, então se buscava compreender seu pensamento para, então, colocá-lo em uma linguagem apropriada à Matemática. Essa parte foi a mais complicada da mediação, sendo necessário observar os gestos, a fala e a escrita do aluno para poder compreender-se a expressão *isso* que ele tanto utilizava em sua fala.

Foi solicitado que houvesse sempre o compartilhamento de ideias entre os alunos da equipe, procurando promover a interação entre eles.

Após observação de cada equipe, em que a maioria já havia concluído sua estratégia de resolução dos problemas, iniciaram-se as explorações destes. Os alunos começaram comentando como haviam trabalhado os problemas, mas, posteriormente, surgiram algumas dúvidas, principalmente, quanto aos valores expressos no problema 2.1.3, se eram reais ou fictícios e se poderiam resolver qualquer tipo de problema usando esse método.

Assim, as explorações foram priorizadas com base nos comentários e debates feitos pelos alunos. Foram levantadas algumas suposições que poderiam servir de exploração, por exemplo: se a modificação do tipo de objeto influenciaria na resolução; se a compra fosse feita separadamente; se o valor total da compra fosse modificado como alteraria o valor de cada objeto; se houvesse mais um objeto, além da bicicleta e patins. Diante dessas suposições, pediu-se que cada equipe que apresentou uma suposição, a trabalhasse como exploração dos problemas, e as que não apresentaram, escolhesse uma delas.

Aula 12 – 10/11/11: Explanação de conhecimentos prévios

Como os alunos expressavam não possuir conhecimento prévio adequado referente às operações decimais, então se compreendeu que havia necessidade de realizar-se um ajuste na aplicação da proposta pedagógica, nesse momento 02, incluindo uma aula para explanar sobre o conhecimento prévio necessário, a fim de trabalhar os próximos problemas.

Portanto, para seguir no caminhar previsto na proposta pedagógica, foi necessário proporcionar aos alunos a oportunidade de sanar dúvidas sobre o conhecimento prévio das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), ao utilizar os números decimais.

Devido à extensão do conteúdo de operações com números decimais e eles já terem-no estudado em outra ocasião, e ao objetivo da pesquisa estar voltado à proposta de ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau, então, buscando não fugir desse foco, dedicou-se essa aula, praticamente, à aplicação direta dessas operações em vários exemplos, para que eles pudessem *recordar* o conteúdo.

Aulas 13 e 14 – 11/11/11: Resolução do Problema 2.1.5.

Quando foi elaborada a proposta pedagógica, esta foi iniciada com problemas considerados simples e, com o passar dos tempos, esses ganharam em complexidade e informações, razão por que foi sugerido ter uma demanda maior de tempo para obter sua solução, mas, ao mesmo tempo, esperou-se que, com a compreensão da utilização da representação numérica e tabular, houvesse alunos que apresentassem facilidade nas suas resoluções desses problemas.

A elaboração da proposta pedagógica foi dada tomando-se como referência as observações levantadas no momento 01 e no que se aprendeu no caminhar da pesquisa, supondo que o aluno havia construído e adquirido os conhecimentos dos anos anteriores.

Talvez, por isso houve surpresa, em parte, com a falta de conhecimento prévio dos alunos e assim a aula não fluiu como o esperado, pois, mesmo com a explanação do conhecimento prévio sobre operações com números decimais, na aula anterior os alunos não demonstravam compreender coisas do tipo: 0,50 é menor que 1; 2,750 representa a mesma quantidade que 2,75.

As dificuldades dos alunos com os números decimais independem das ideias envolvidas nos conteúdos trabalhados nessa pesquisa, mas como as equações polinomiais do 1º grau podem envolver os números decimais, faz-se necessário que o aluno saiba como operar com esses números.

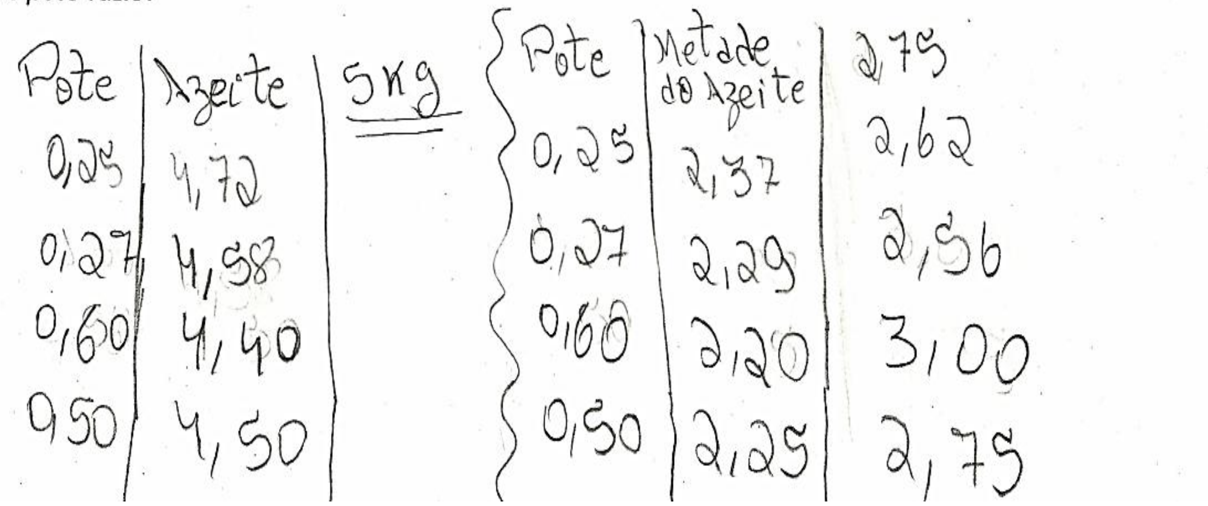
Então, após entregar o problema 2.1.5 a cada aluno e destinar essa aula à sua resolução, individualmente, todos demonstraram que compreenderam o problema: conseguiram montar uma estratégia adequada. Para isso, adotaram como base um exemplo que consideravam similar, que foi o problema 2.1.3, mas apresentaram dificuldade em aumentar ou diminuir números decimais nas tentativas, procurando aumentar ou diminuir normalmente nas unidades, ao invés de realizar alterações nas casas decimais.

Portanto, foi necessário intervir, pois havia um problema de conhecimento prévio e não de compreensão do problema, da estratégia ou da representação numérica e tabular. Assim, foi permitido aos alunos trabalharem como se fossem um único grupo na sala e com a possibilidade de recorrer a auxílio nas ideias referentes às operações com números decimais.

Assim, o material recolhido da turma foi o mesmo apresentado pela maioria dos alunos, mas observou-se que há erros, em relação às operações com números decimais, como, por exemplo, na primeira linha, há que 0,25 + 4,72 = 5; mas, mesmo assim, os alunos usaram a representação numérica e tabular, construíram adequadamente uma estratégia que possibilita a resolução do problema e tiveram controle da mesma.

A seguir um exemplo de resolução do problema 2.1.5, após os alunos trabalharem todos juntos:

Problema 2.1.5: Um pote cheio de azeite pesa 5 kg. Com azeite pela metade, pesa 2,75 kg. Quanto pesa o pote vazio?



Mas essa situação, de trabalharem todos juntos, fez com que não houvesse a possibilidade de a coleta dos dados ser acompanhada de forma adequada, devido aos alunos possuírem a característica de procurar *mostrar* que fizeram correto, então chegaram a apagar o caminhar na resolução do problema da folha de coleta de dados. Também não transcreveram alguns cálculos feitos em folhas de rascunhos, bem como migravam entre as equipes com o intuito de buscar a *solução do problema,* ao invés de compreender o que havia envolvido no problema.

Assim, acredita-se que a metodologia de ensino que prioriza a memorização de regras e processos mecanizados, sem a necessidade de identificar e valorizar o porquê de tais regras, além de ser comum no ensino dos alunos presentes nessa turma, também enseja um comportamento que colide com a implantação de uma proposta pedagógica que valoriza a compreensão, além de deixar esses alunos reféns da ideia de que a Matemática deve ser resolvida apenas de uma forma: *seguindo uma regra, sem precisar compreendê-la*.

Essa metodologia de ensino, voltada ao procedural, além de prejudicar o andamento de outras ideias a serem trabalhadas com os alunos, também pode usurpar a oportunidade de o aluno de adquirir novos conhecimentos relevantes a sua formação.

Aula 15 – 22/11/11: Resolução do problema 2.1.5 com uso da representação verbal.

Com o objetivo de não deixar os alunos com a sensação de serem incapazes de compreender e resolver o problema 2.1.5 e, ao mesmo tempo, mantê-los estimulados, com relação à metodologia de ensino e à proposta pedagógica aqui feita, já que comentavam que só fizeram o problema porque receberam ajuda nas operações com decimais, além de terem feito todos juntos, então se resolveu mostrar que eles é que tinham resolvido o problema, mostrando como fizeram, e que essa pode ser a forma adequada para resolver problemas.

Portanto, nessa aula, priorizou-se a verbalização dos próprios alunos, ao comentarem como haviam respondido o problema. Utilizou-se a mediação, por meio do questionamento da fala dos próprios alunos, buscando-se justificavas para as afirmações e contradições entre eles, como, por exemplo:

Aluno 01: Escolhi 0,25 para começar.

Aluno 02: Eu escolhi 1, mas apaguei para colocar o dele.

Professor-pesquisador: Eu escolheria 0,1. Quais destas opções poderiam utilizar?

Aluno 01: Todas?!

Professor-pesquisador: Mas por quê?

Aluno 03: Nenhuma, porque a resposta é 0,5.

Professor-pesquisador: Quando iniciou a resolução do problema, você já conhecia a resposta?

Aluno 03: Não.

Aluno 04: Todas porque tínhamos que fazer as contas começando com um número e podia ser qualquer um.

Professor-pesquisador: Turma, o que vocês podem dizer sobre o que comentamos até agora?

Vários alunos:

Todas.

Aluno 04: Está certo.

Aluno 02: Professor, quer dizer que eu poderia ter feito com 1?

Professor-pesquisador: Poderia. Mas, se você não tivesse apagado o que fez, então como estaria escrito no seu material? Turma, trabalhe essa tentativa do *aluno 02*.

Nessas mediações, juntamente com a interação da turma, os alunos foram incentivados a expressar a resolução do problema, utilizando outros valores nas suas tentativas, estimulando-os a responderem o porquê dos valores escolhidos. Observou-se que precisavam realizar novas tentativas, quando haviam chegado à solução do problema e, principalmente, tentar produzir uma compreensão do caminhar na estratégia adotada para a resolução deste.

Assim, a resolução do problema foi concluída juntamente com os alunos, por meio da representação verbal.

Procurando melhor compreensão das operações dos números decimais nesse problema, trabalhou-se, em alguns momentos, com valores financeiros, pois se observou que os alunos têm maior compreensão quando se diz, por exemplo: metade de R$ 0,50 do que 0,50 ÷ 2.

Aula 16 – 24/11/11: Exploração do problema 2.1.5

Com as eventuais dúvidas sanadas sobre o problema 2.1.5, iniciou-se um trabalho de exploração, enfatizando não só isso, como também sua complexidade. Ao utilizarem-se conhecimentos, haverá maior possibilidade de construir uma estratégia adequada que permita resolvê-lo.

Mas, mesmo os alunos apresentando uma compreensão do problema, ainda havia dificuldades em operar com números decimais; assim, uma única exploração do problema como, por exemplo, o pote cheio de azeite pesando 5,5 kg, foi o suficiente para prolongar-se por toda a aula. E, desse modo, foi concluído o Bloco 01.

Aulas 17 e 18 – 25/11/11: Resolução dos problemas 2.1.1 ao 2.1.5 utilizando a representação algébrica (Bloco 02).

Com a conclusão do Bloco 01, expressa na proposta pedagógica, foram iniciadas essas duas aulas do Bloco 02, que tratam de uma ponte entre a Aritmética e a Álgebra.

Durante o Bloco 01, utilizou-se sempre a forma aritmética na resolução dos problemas e procurou-se recolher todo o material trabalhado com os alunos em sala de aula, com exceção das investigações que eles podiam realizá-las em outra ocasião.

Como se pretende trabalhar os mesmos problemas do Bloco 01, mas agora com o uso da representação algébrica, então fotocopiaram-se os materiais recolhidos dos alunos e essas reproduções foram distribuídas entre eles, na medida em que se trabalhou cada problema.

Iniciou-se a abordagem dos problemas com observações dos padrões existentes nas resoluções dos problemas apresentados pelos alunos e concluiu-se com generalizações algébricas.

No entanto, como era inviável apresentar no quadro de giz todas as resoluções dos problemas apresentados pelos alunos, transcreveu-se apenas uma resolução de cada problema de uma equipe que se encontrava na Categoria 01 (os alunos resolvem o problema usando as representações múltiplas, os conceitos e as ideias e têm controle das estratégias usadas) e foi-lhes indicado que acompanhassem as observações feitas, assim como as feitas pelos próprios alunos, e realizassem observações nas suas resoluções dos problemas.

Procurou-se mostrar aos alunos que, no problema 2.1.1, pretendia-se obter um valor desconhecido, a idade de Marcelo, e esse valor, adicionado com 17, teria que ser 35. Assim, ao representar-se o valor desconhecido da idade de Marcelo com uma letra do alfabeto, como, por exemplo, a letra x, então teria a seguinte situação: $x + 17 = 35$.

A partir do momento em que os alunos perceberam essa situação, iniciou-se o uso do princípio aditivo, obtendo-se a equação equivalente $x + 17 – 17 = 35 – 17$, o que nos levou ao resultado de $x = 18$, ou seja, a idade de Marcelo é de 18 anos.

No problema 2.1.2, ao questionarem-se os alunos sobre como descobrir a idade de Maria, tanto sabiam a idade de Maria como também sabiam a forma adequada de obter-se essa informação. Também compreendiam a ideia de dobro.

Então, ao mencionar que a idade de Marcos era o valor desconhecido que se pretendia descobrir, podendo ser representado por uma letra do alfabeto, como, por exemplo, a letra x, e que, de acordo com o problema, se pretendia atingir o dobro da idade de Maria, adicionado com a idade de Marcos, alguns alunos foram prontamente perguntando: “18 + x?”.

Diante da pergunta, foi solicitado que mencionassem à turma por que acreditavam que era “18 + x”. Ao explicarem corretamente, foi feito um complemento, mencionando que essa *união* de idades resultava no valor de 25; logo, teria 18 + x = 25.

Posteriormente, utilizou-se o princípio aditivo e, assim, a equação passou a ser 18 + x – 18 = 25 – 18. Mencionou-se aos alunos a propriedade comutativa na adição e com isso obtive-se x = 17, ou seja, a idade de Marcos é de 17 anos.

Para o problema 2.1.3, lembrou-se aos alunos que, ao trabalhar o mesmo problema com a representação numérica e tabular, esclarece-se que da primeira possibilidade de compra para a segunda houve um acréscimo de um par de patins e um aumento no valor da compra, passando de R$ 426,00 para R$ 734,00; assim, poder-se-ia dizer que 426 + x = 734, em que x representa o valor do par de patins, podendo representar o problema. Então, pediu-se que os alunos, trabalhando em equipe, procurassem resolver o problema. Com os dois problemas iniciais expostos no quadro de giz e com a interação da turma, logo conseguiram chegar à conclusão de que x = 308, ou seja, o preço do par de patins é de R$ 308,00.

Quanto ao problema 2.1.4, comentou-se que os cinco (5) baldes foram utilizados para encher o que faltava de água no reservatório. Que a capacidade do balde era o valor desconhecido. Nesse instante, nomeou-se a *letra x* de incógnita do problema e explicou-se que a capacidade do balde seria expressa pela incógnita x. Assim, chegou-se à equação 5x = 190 – 125, em que a incógnita x representa a capacidade de água de um (1) balde. Após realizar-se a subtração presente no segundo membro da equação, utilizou-se o princípio multiplicativo, obtendo-se a equação equivalente 5x·(1/5) = 65·(1/5); assim, chegou-se ao resultado x = 13, ou seja, o balde tem capacidade de 13 litros de água.

No problema 2.1.5, mesmo utilizando o que havia sido designado na proposta, houve muitas dúvidas, por parte dos alunos, principalmente pelo surgimento de mais de uma incógnita. Talvez houvesse avançado em demasia na quantidade de conhecimentos expostos aos alunos, ficando a sugestão de dividir os problemas em duas partes: do 2.1.1 ao 2.1.4 e 2.1.5, para serem trabalhados em instantes distintos.

Após essas observações, os próprios alunos mencionaram que aqueles *padrões* expressados no quadro de giz eram válidos para qualquer uma das resoluções apresentadas por eles. Assim, mencionou-se que os padrões observados tornaram-se generalizados, ao ser o problema expresso com o uso da incógnita, na forma algébrica.

Portanto, conseguiu-se que a turma percebesse tanto os padrões existentes nas resoluções dos problemas por eles como a generalização realizada nos quatro (04) primeiros problemas com compreensão, ficando a desejar apenas no problema 2.1.5.

Assim, conseguiu-se nessas duas (2) aulas, trabalhar algebricamente os problemas do 2.1.1 ao 2.1.5, como mencionados na proposta pedagógica. Para concluir, os problemas foram resolvidos usando a representação geométrica por meio do uso do gráfico de uma reta, no plano cartesiano, pois os alunos dominavam o conhecimento prévio de plano cartesiano.

Ficou demonstrada a compreensão adequada, por parte dos alunos, ao realizarem comparações entre as representações numérica e tabular, algébrica e geométrica, mencionando que a representação tabular era mais fácil, mas mais trabalhosa que a algébrica, e que a representação geométrica não apresentava o resultado correto, devido ao fato de não terem material que expressasse um resultado com exatidão. Dessa forma, acredita-se que se obteve êxito na ponte da Aritmética para a Álgebra e na apresentação da representação geométrica. Assim, foi concluído o Bloco 02.

Aula 19 – 29/11/11: Resolução dos Problemas 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 (Bloco 3).

Nessa aula iniciou-se o Bloco 3. Com o decorrer das intervenções, os alunos adquiriram conhecimentos sobre a forma de utilizar-se das representações múltiplas, pois conheciam as representações numérica, tabular, algébrica e a geométrica.

Nessa aula, primeiramente, foi feita uma explanação dos conhecimentos prévios de perímetro e fração; posteriormente, entregaram-se todos os problemas de uma única vez e deixaram-se livres os alunos para que optassem por resolvê-los com o uso da representação múltipla, a que achasse conveniente, bem como trabalhassem em equipe de dois ou três alunos. Não demonstraram tanta dificuldade com esses conhecimentos prévios, alegando que a professora titular havia trabalhado, em *Geometria*, perímetro e, em *Matemática* fração.

A seguir os problemas do 2.3.1 ao 2.3.3:

> *Problema 2.3.1: A soma dos lados de um retângulo (perímetro) é 36 cm. Sabendo-se que a largura é 6 cm menor que o comprimento, quanto mede cada lado desse retângulo?*
>
> *Problema 2.3.2: Seu Manoel ao receber R$ 70,00 pensou assim: se eu somar esse dinheiro à metade do que tenho guardado, posso pagar a primeira das quatro prestações iguais da TV. A TV custa R$ 600,00. Quanto seu Manoel tem guardado?*
>
> *Problema 2.3.3: O médico disse a Sandro: na próxima vez que você voltar aqui, eu quero que esteja no seu peso ideal. Assim, seu peso ideal é ¾ do seu peso atual mais 2 kg. Qual é o seu peso atual se o seu ideal é de 77 kg?*

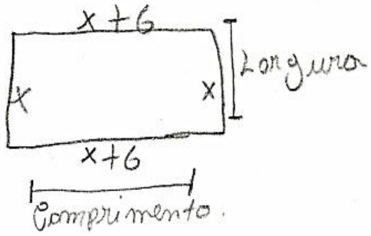
Quando os alunos iniciaram a resolução dos problemas, e foi observado como cada equipe havia optado para resolvê-los, destacou-se uma possibilidade de haver um pouco de insegurança neles para escolherem e trabalharem uma das representações, pois assim que se deparavam com algum obstáculo na resolução do problema, ao invés de procurar superar o obstáculo, procuravam contorná-lo, mudando de representação, inclusive, o início dos problemas normalmente faziam no caderno ou folha de rascunho e apenas quando identificavam a estratégia que considerava adequada é que iniciavam no material em que se apresentava o problema.

Tal situação favoreceu o uso da representação múltipla, quando foi solicitado que resolvessem o mesmo problema por outra representação, pois já se sabia que os alunos conseguiriam construir a estratégia necessária à resolução do problema. Mas, ao mesmo tempo, confrontou-se com a resistência deles em usarem mais de um tipo de representação na resolução do mesmo problema, pois acreditavam que não conseguiriam utilizar mais de uma representação, além de, principalmente, alegarem que já haviam obtido a *solução* do problema, não sendo mais necessário continuar resolvendo-o. Também foi constatado que quase nenhum aluno usou a representação geométrica na resolução de algum dos problemas.

A seguir, exemplos da resolução dos problemas 2.3.1 e 2.3.2:

Problema 2.3.1: *A soma dos lados de um retângulo (perímetro) é 36 cm. Sabendo-se que a largura é 6cm menor que o comprimento, quanto mede cada lado desse retângulo?*

$$x+6+x+6+x+x=36$$
$$4x+12=36$$
$$4x+12-12=36-12$$
$$4x=24 \quad (:4)$$
$$x=6$$



Problema 2.3.2: *Seu Manoel ao receber R$ 70,00 pensou assim: se eu somar esse dinheiro à metade do que tenho guardado, posso pagar a primeira das quatro prestações iguais da TV. A TV custa R$ 600,00. Quanto seu Manoel tem guardado?*

$$70+\frac{x}{2}=150$$
$$70-70+\frac{x}{2}=150-70$$
$$\frac{x}{2}=80 \quad (\times 2)$$
$$x=160$$

Problema 2.3.2: *Seu Manoel ao receber R$ 70,00 pensou assim: se eu somar esse dinheiro à metade do que tenho guardado, posso pagar a primeira das quatro prestações iguais da TV. A TV custa R$ 600,00. Quanto seu Manoel tem guardado?*

R$	R$ metade do g	R$	Manoel tem guardado
70,00	80,00	150,00	160,00

Aula 20 – 06/12/11: Problemas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 e suas investigações.

Com o início do mês de dezembro, em que parte dos alunos já começa a voltar suas atenções para as férias e com os resultados de algumas disciplinas sendo divulgados, ficou a dúvida se a turma manteria o mesmo ritmo de frequência e participação, principalmente após a divulgação das notas do quarto bimestre de

Matemática, por parte da professora titular. Na aula anterior, houve dificuldade de estimular os alunos a trabalharem com mais de uma representação no mesmo problema, sendo improvável conseguir observar como fluíram entre as representações, principalmente porque o fator *tempo* passou a ser desfavorável à continuidade da aplicação da proposta pedagógica, pois são poucos os dias até o fim do período de aulas e seria conveniente apresentar à turma todos os Blocos da proposta.

Os problemas propostos para o Bloco 3 foram iniciados na aula anterior, mas como a turma não concluiu a resolução de todos, então se optou por recolher o material na aula anterior e continuar nessa aula.

Ao devolver-se o material, observou-se que as resoluções das questões não eram homogêneas, isto é, os alunos optaram por representações distintas para o mesmo problema, assim como a quantidade de problemas resolvidos na aula anterior também era variada.

Os alunos que conseguiram resolver os três (3) problemas na aula anterior, ao receber o material, iniciaram as explorações dos mesmos. Os que não haviam resolvidos os problemas buscaram as demais equipes por sugestão para resolvê-los.

Assim, dividiu-se a sala em dois ambientes: 01- As equipes que estavam resolvendo os problemas e que, posteriormente, passariam para outro ambiente; 02- As equipes que estavam fazendo explorações nos problemas. As explorações tiveram como essência, principalmente, o debate entre as equipes, quando, levantada alguma sugestão, assim se detiveram a fazer interpretações e debates de suposições sobre o problema, ao invés de cálculos para os mesmos.

Algumas das suposições que provocaram o debate referem-se à modificação da figura plana, apresentada no problema 2.3.1, por outras figuras presentes na Geometria como, por exemplo, triângulo, quadrado e trapézio.

Com relação ao triângulo, os alunos questionaram, no debate, se existia largura e comprimento e se haveria os três lados com medida distinta, já que no retângulo apresentado no problema os lados não possuem a mesma medida.

As equipes chegaram a um consenso, que consiste em trabalhar com dois lados, com a mesma medida (triângulo isóscele), e um terceiro lado com 6 cm menor que os outros dois, mantendo a medida do perímetro. Posteriormente, ao alterarem a medida do perímetro, debateram, principalmente, sobre até quanto podiam diminuir o valor do perímetro do triângulo.

No quadrado, logo perceberam que os lados não podiam possuir medidas distintas, levando-os a trabalhar outra figura, o trapézio. Provavelmente, por limitações sobre conhecimentos prévios de figuras planas, os debates não evoluíram, até mesmo porque alguns alunos misturavam a ideia de trapézio com a de paralelogramo.

No problema 2.3.2, a principal exploração que fizeram foi supor que Manoel recebia uma bolsa escola no valor de R$ 32,00, quando juntasse com o que possuía, quantos meses seria preciso para pagar as prestações da TV. No problema seguinte, os alunos procuraram trabalhar a ideia de usar seu próprio peso.

Ao final da aula, pôde-se observar que duas das equipes não participaram da exploração dos problemas, então se sugeriu que as equipes que exploraram os problemas realizassem um resumo do que havia sido debatido e compartilhassem com as demais, posteriormente. Dessa forma, concluímos o Bloco 03.

<u>Aulas 21 e 22 – 09/12/11</u>: Resolução dos problemas do 2.4.1 ao 2.4.4.

Após concluírem-se os três primeiros Blocos da proposta, o que poderia resultar, no aluno, uma melhor compreensão de como trabalhar as equações polinomiais do 1º grau, passou-se a iniciar o Bloco 04, o que levaria o professor-pesquisador a trabalhar os sistemas.

Com a possibilidade do aumento da complexidade dos problemas para os alunos, optou-se a entregar os dois primeiros problemas e, posteriormente, um problema de cada vez, à medida que os alunos conseguissem resolvê-los.

A resolução dos problemas desse Bloco foi realizada sempre com os alunos em equipe, que tiveram o livre arbítrio para escolher a representação a ser utilizada para resolver o problema. Observou-se que alguns preferiram a representação numérica, enquanto outros a representação algébrica, mas nenhum optou pela representação geométrica.

A seguir os problemas do 2.4.1 ao 2.4.4:

> *Problema 2.4.1: Miguel e Carlos jogam juntos no mesmo time de futebol. No último campeonato, Miguel e Carlos marcaram*

> *juntos 39 gols. Miguel marcou 5 gols a mais que Carlos. Miguel marcou quantos gols no campeonato?*
>
> *Problema 2.4.2: João e Maria realizaram economias durante o ano para poderem realizar compras ao final do ano. Com suas economias, compraram um liquidificador, um fogão e uma geladeira por R$ 1.050,00. O preço do fogão foi o quíntuplo do preço do liquidificador. O preço da geladeira foi o triplo do preço do fogão. Qual foi o preço do liquidificador?*
>
> *Problema 2.4.3: A comunidade do Bairro Vida Bela resolveu realizar um bingo. A urna do bingo contém 63 bolas. Cada bola é de uma única cor; as cores das bolas são azul, vermelha e amarela. O número de bolas azuis é o dobro das vermelhas, e o número das amarelas é o triplo das azuis. Quantas bolas de cada cor existem na urna?*
>
> *Problema 2.4.4: José fez umas compras no valor de R$ 415,00 no mercadinho do Bairro e, por ser amigo de Mario que é o dono do mercadinho, dividiu o valor das compras em três prestações de valores diferentes. A segunda prestação foi o dobro da primeira e a terceira foi R$ 15,00 a mais que a segunda. Qual é o valor de cada prestação que José irá pagar a Mario o dono do mercadinho?*

Não houve dificuldade, por parte dos alunos, na resolução do problema 2.4.1, tanto para os que optaram pela representação numérica, como para os que optaram pela representação algébrica.

No problema 2.4.2, percebeu-se que vários alunos que optaram pela representação algébrica no problema anterior, utilizaram a representação numérica e tabular nesse problema e vice-versa, assim, mesmo quando não foram feitas as devidas observações sobre como fluíam entre as representações no Bloco 03, agora se pôde observar que conseguiam utilizar-se das representações múltiplas, de acordo com sua conveniência e interpretação do problema.

Após alguns instantes, todos os alunos conseguiram resolver os problemas 2.4.1. e 2.4.2, sem haver a necessidade de mediação. Dessa forma, os problemas 2.4.3 e 2.4.4 foram entregues. Logo, percebeu-se que passaram a demonstrar que não havia como representar o problema 2.4.3 por meio de uma única expressão algébrica e por isso só poderiam resolver por meio da representação numérica e tabular.

Foi-lhes sugerido que construíssem uma estratégia de resolução para os dois (2) problemas utilizando a representação numérica e tabular e, posteriormente, observassem os padrões existentes para procurar solucionar os problemas por meio da representação algébrica e, por fim, concluíssem usando a representação geométrica.

Mesmo com a resolução dos problemas com o uso da representação numérica e tabular, por meio da mediação auxiliando na montagem da tabela, não perceberam que havia mais de uma equação e, assim, poderiam construir um sistema de equações polinomiais do 1º grau. Portanto, foi necessário intervir diretamente e realizar, no quadro de giz, a resolução do problema 2.4.3, usando a representação geométrica a partir da generalização que apresentava os padrões na resolução de uma das equipes que utilizou a representação numérica.

Após a resolução do problema 2.4.3, os alunos perceberam que o problema 2.4.4 poderia ser resolvido por meio de uma estratégia semelhante, mas, mesmo assim, apresentavam dificuldade de montar as equações que favorecessem sua resolução.

Aula 23 – 13/12/11: Exploração dos problemas do 2.4.1, ao 2.4.4.

Como as aulas devem ser encerradas nessa semana, devido ao calendário escolar, e como havia apenas duas aulas para concluir a aplicação da proposta pedagógica, então resolveu-se destinar essa aula a exploração dos problemas com as equipes e, eventualmente, no decorrer das explorações, dar-lhes explicações sobre a ideia de haver um problema que envolve mais de uma equação, ou seja, haver um sistema de equações polinomiais do 1º grau.

Os alunos procuraram realizar a exploração principalmente nos dois (2) primeiros problemas. Não se descobriu se eles estavam empolgados com esses primeiros problemas ou se apenas evitavam chegar aos últimos. As explorações tinham um caminhar que simplificava os problemas, ao ser retirado, por parte dos alunos, alguns elementos, para que assim conseguissem expressá-los por meio de uma única expressão geométrica e, consequentemente, resolver o problema em questão.

Dessa forma, essa única aula não foi suficiente para aprofundar os conhecimentos nos sistemas de equações polinomiais do 1º grau e observar a relevância do uso das representações múltiplas, diferente do que ocorreu nos primeiros Blocos que tratavam, principalmente, do ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau, que possibilitaram a oportunidade de se trabalhar com mais tempo.

Aula 24 – 15/12/11: Bloco 05.

Apenas transcreveu-se para o quadro de giz o conteúdo apresentado no livro didático, adotado na escola, referente às equações polinomiais do 1º grau com exemplos provenientes de outros livros. Pôde-se perceber que os alunos afirmavam que, nesse instante, estavam compreendendo o que haviam aprendido no decorrer das aulas, pois já sabiam da sua utilidade.

Segue um quadro com o cronograma do momento 02:

<table>
<tr><td rowspan="3">Primeira Semana do momento 02</td><td>18 de Outubro</td><td rowspan="3">Observação não participante do pesquisador em sala de aula. Professora efetiva ministrando conteúdos.</td></tr>
<tr><td>20 de Outubro</td></tr>
<tr><td>21 de Outubro</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Segunda Semana do momento 02</td><td>25 de Outubro</td><td rowspan="2">Participação do pesquisador em momentos de atividade, mediando à resolução das atividades dos alunos de forma individual.</td></tr>
<tr><td>27 de Outubro</td></tr>
<tr><td>28 de Outubro</td><td>Ausência do pesquisador. Professora ministrando Geometria.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Terceira Semana do momento 02</td><td>1 de Novembro</td><td>Pesquisador como professor. Professora efetiva com observação não participante na sala. Trajetória na Educação Matemática, História da álgebra, Problemas exemplos.</td></tr>
<tr><td>3 de Novembro</td><td>Pesquisador como professor. Ausência da professora (inclusive nas próximas aulas). Resolução dos Problemas 2.1.1 e 2.1.2</td></tr>
<tr><td>04 de Novembro</td><td>Exploração dos problemas 2.1.1 e 2.1.2. e resolução dos Problemas 2.1.3 e 2.1.4</td></tr>
</table>

Quarta Semana do momento 02	08 de Novembro	Exploração dos problemas 2.1.3 e 2.1.4
	10 de Novembro	Explanação de conhecimentos prévios: operações com números decimais
	11 de Novembro	Resolução do Problema 2.1.5
Semana sem aula	15 de Novembro	Feriado Nacional
	17 de Novembro	Preparação da escola para a amostra pedagógica.
	18 de Novembro	Realização da amostra pedagógica.
Quinta Semana do momento 02	22 de Novembro	Explicações do problema 2.1.5
	24 de Novembro	Exploração do problema 2.1.5
	25 de Novembro	Resolução dos problemas 2.1.1, ao 2.1.5 (representação algébrica e geométrica). Bloco 02.
Sexta Semana do momento 02	29 de Novembro	Explanação de conhecimentos prévios: Perímetro, plano cartesiano e fração. Problemas 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 (Bloco 03)
	1 de Dezembro	Ausência do pesquisador. Professora ministrando Geometria
	2 de Dezembro	Não houve aula: Preparação da escola para o vestibular da UEPB.
Sétima Semana do momento 02	6 de Dezembro	Problemas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 e suas investigações.
	8 de Dezembro	Feriado municipal.
	9 de Dezembro	Resolução dos problemas do 2.4.1, ao 2.4.4. Bloco 04
Oitava Semana do momento 02	13 de Dezembro	Exploração dos problemas do 2.4.1, ao 2.4.4.
	15 de Dezembro	Bloco 05
	16 de Dezembro	Destinado a avalição da turma por parte da professora efetiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa foi iniciada com a inquietação de procurar contribuir com um ensino-aprendizagem que valorizasse a compreensão. Mas, no seu percurso, percebeu-se que se precisava ir além de uma inquietação: seria necessário trazer os elementos da metodologia da pesquisa e do ensino, das pesquisas já desenvolvidas na área, os teóricos e, principalmente, conhecer a sala de aula, o mundo do professor no seu dia a dia, para compreender como seria possível oferecer subsídios para uma reflexão voltada a um ensino-aprendizagem que valoriza a compreensão.

Frente a um levantamento bibliográfico, realizaram-se investigações sobre a existência das dificuldades dos alunos com a compreensão e construção de conceitos inerentes aos conteúdos de Álgebra, especificamente no tópico equações polinomiais do 1º grau. Buscaram-se ferramentas alternativas que auxiliassem no ensino-aprendizagem desses conteúdos, em relação aos quais se destacaram as ideias das representações múltiplas.

Além de ter esses elementos à disposição, também foi necessário unir todos eles na pesquisa. Dessa forma, procurou-se produzir algo que pudesse ser utilizado pelo professor em sala de aula ou, ao menos, ajudá-lo a refletir sobre sua prática, com o objetivo de obter-se melhor aprendizagem por parte do aluno.

Pretendeu-se oferecer ao professor a possibilidade de uma reflexão que possa direcioná-lo a trilhar novos caminhos com prioridade em um ensino-aprendizagem com compreensão – principalmente aos que fundamentam sua prática de sala de aula na manipulação simbólica e na resolução de listas de exercícios, transmitindo ao aluno a responsabilidade de memorizar regras e processos mecanizados sem a necessidade de identificar e ressaltar o porquê desses. Então, surgiu a ideia de produzir uma proposta pedagógica para o ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau com o uso das representações múltiplas, aplicada em sala de aula, para que se pudesse observar tanto os resultados alcançados por ela como a possibilidade de ser usada pelos demais professores.

Iniciou-se a produção da proposta pedagógica, observando-se as dificuldades dos alunos nas pesquisas e a indicação de pesquisadores no uso das ideias inerentes às representações múltiplas no ensino-aprendizagem. Posteriormente, realizaram-se duas intervenções.

Após as observações do primeiro momento de intervenção em sala de aula, tanto do ponto de vista do desempenho da turma na participação e na resolução dos problemas, como na metodologia empregada em sala de aula, no referido momento buscou-se realizar interpretações das leituras do material produzido no decorrer do primeiro momento.

As interpretações levaram a produzir três categorias; cada categoria associava a possível aprendizagem do aluno tanto ao conteúdo trabalhado, quanto ao uso das representações múltiplas na resolução das situações-problemas, isto é, o aluno que não apresentava, na sua escrita, dificuldade na resolução das situações-problemas, bem como demonstrava, por meio da verbalização, entendimento do que estava sendo abordado, foi inserido na categoria 01 e a cada dificuldade que apresentava, bem como o acúmulo de várias dificuldades que obtinha, levá-lo-ia a ser inserido nas categorias 02 e 03, respectivamente.

Portanto, os alunos que resolveram os problemas usando as representações múltiplas, os conceitos e as ideias e tiveram o controle das estratégias usadas para a resolução do problema foi inserido na categoria 01, enquanto os que apresentaram dificuldades nos conceitos, ou nas operações, ou nas estratégias, ficaram na categoria 02; enquanto os que apresentavam dificuldades tanto no âmbito dos conceitos e das ideias como nas operações e no uso da estratégia foram inseridos na categoria 03.

Essa categorização, construída no início da primeira intervenção, diante da possibilidade de migração dos alunos das categorias 03 e 02, na direção da categoria 01, favoreceu a observação da aprendizagem do conteúdo abordado quanto ao fato de ter podido ocorrer a formação de novos conceitos, pelo aluno, que o auxiliaram a superar suas dificuldades, podendo ter conseguido transformar seu nível de desenvolvimento potencial em nível de desenvolvimento real.

Obviamente, a observação não priorizava a quantificação, buscando ter a quantidade de alunos que migravam entre as categorias, mas sim verificar, por meio da verbalização do aluno, seu pensamento no momento da resolução das situações-problema, já que, normalmente, a escrita dos alunos observados era deficiente, ao expressar seu pensamento. Com isso, a realizada observação em cada aula foi fundamental para as conclusões, tendo o material escrito o papel de constatação do que havia sido observado na verbalização dos alunos, nos momentos de interação da turma e em caso de divergência entre sua verbalização e sua escrita. Foram utilizadas as conversas individuais para direcionar as conclusões desse trabalho.

Após o primeiro momento de intervenção, diante do material produzido e analisado, pôde-se constatar que a utilização das representações múltiplas, como uma ferramenta no ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau com a metodologia de ensino da resolução de problemas, poderia ser viável em sala de aula, mesmo com o desafiador cenário educacional em que o professor está inserido, atualmente. Portanto, constatou-se que a produção de uma proposta pedagógica nesse âmbito era possível.

Construiu-se uma proposta pedagógica, cujo ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau ocorria em Blocos; cada bloco, com seu próprio objetivo, conteúdo a ser trabalhado, nível de problemas e tipo de representação a ser priorizada, até se chegar à união de todos os objetivos, conteúdos e representações múltiplas nesse ensino-aprendizagem.

A construção da proposta pedagógica não garantia a sua eficiência em sala de aula, sendo necessária sua aplicação. Logo, foi realizada uma segunda intervenção de aplicação dessa proposta. Foi observado que muitas das pesquisas na área da Álgebra não são do conhecimento do professor que está em sala de aula nos dias atuais. Portanto, uma aplicação da pesquisa em sala de aula pode proporcionar uma disseminação dos estudos da área, propiciando uma aproximação do professor com os pesquisadores, bem como uma reflexão dos professores a respeito de sua prática em sala de aula e os resultados alcançados por essa prática.

Juntamente com as observações feitas nos momentos de intervenções em sala de aula, tanto no momento que se produzia a proposta pedagógica como quando se realizava a aplicação da mesma, concluiu-se, ao final da pesquisa, que, a princípio, é possível desenvolver o conteúdo das equações polinomiais do 1º grau com o uso das representações múltiplas em um ensino-aprendizagem que contribua para a construção, aquisição e compreensão, possibilitando resultados expressivos no meio educacional.

É preciso ressaltar que uma das áreas decisivas para a aprendizagem da Matemática, no nível de Ensino Fundamental, é a Álgebra. O conteúdo trabalhado nessa pesquisa foi o de equações polinomiais do 1º grau, mas o mais importante é que se está sugerindo, não o ensino de um conteúdo e, sim, uma proposta de ensino-aprendizagem que valorize a compreensão, isto é: *que o professor em sala de aula priorize a construção do conhecimento*.

Mesmo apresentando uma proposta pedagógica para o ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau, é preciso lembrar que, não necessariamente, o professor precisará realizar alterações na mesma, ao utilizá-la em sala de aula, pois não se está trazendo uma proposta com uma resposta acabada e imutável para o ensino-aprendizagem do conteúdo, mas, sim, um caminho a ser refletido e/ou seguido e mutável de acordo com os objetivos almejados pelo professor em sala de aula.

Portanto, é viável a aplicação da proposta pedagógica e ela pode apresentar resultados satisfatórios no ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau, mas é preciso trabalhar a ideia de valorizar a compreensão. Pois, na aplicação da proposta pedagógica, esperava-se que o aluno adquiriria conhecimentos necessários para resolver as equações polinomiais do 1º grau, com ideias relacionadas com a: identificação, interpretação e utilização das representações múltiplas ao trabalhar situações problemas; compreensão dos conceitos matemáticos; construção e utilização de estratégias para a resolução dos problemas. Pode haver uma perda dessa aprendizagem se não houver continuidade nessa metodologia de ensino ou se o aluno não colocar em primeiro plano a compreensão.

Isso ficou evidenciado nessa pesquisa, principalmente, ao término do primeiro momento, ao serem observadas as resoluções dos problemas apresentadas pelos alunos, bem como, alterações na zona de desenvolvimento proximal.

A zona de desenvolvimento proximal é um conceito da teoria de Vygotsky aplicada ao processo de ensino-aprendizagem, em que o aluno tem um nível de desenvolvimento real (ele faz sozinho) e um nível de desenvolvimento potencial (ele faz com ajuda de outro) e a diferença entre os dois níveis é a zona de desenvolvimento proximal. É na zona de desenvolvimento proximal que o professor deve atuar, valorizando a interação entre os alunos sobre o conteúdo, com a mediação do professor, procurando promover a interiorização e compreensão de novos conceitos. Mas, nos instantes de interação no momento 01, a falta de percepção, por parte do aluno, da valorização da compreensão o conduzia a esperar pelo resultado promovido por outro aluno, o que ocasionava em uma turma que apresentava uma aprendizagem esperada com alunos sem compreensão do que estava sendo trabalhado em sala de aula.

Portanto, no momento 02, foi solicitado que a interação entre os alunos ocorre-se após a iniciativa de cada aluno na construção de uma estratégia para a resolução das situações-problemas, procurando, assim, promover a interação entre todos os alunos, bem como valorizar a compreensão de cada situação-problema trabalhada em sala de aula.

Após buscar entender a compreensão dos conceitos de equações polinomiais do 1º grau promovida pelo aluno no momento 01, percebeu-se que, na aplicação da proposta, a utilização das representações múltiplas possibilitou ao aluno um conjunto de opções de caminho que o direcionava a sua aprendizagem e com a interação ocorrida em sala de aula essas opções tornaram-se perceptíveis e aplicáveis pelo aluno na resolução das situações-problemas.

Assim, conclui-se que o professor, dentre os mais variados meios para promover a aprendizagem do aluno, ao utilizar a proposta pedagógica preconizada nesta pesquisa, no ensino-aprendizagem das equações polinomiais do 1º grau, pode promover contribuições relevantes no entendimento dos conceitos inerentes ao conteúdo e, por conseguinte, promover a aprendizagem do conteúdo de forma satisfatória, mas observando que a aprendizagem é complexa e mutável e se faz necessário que o professor realize os ajustes convenientes à realidade da sua sala de aula, não se limitando a sua prática apenas a um modelo de proposta de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Rio Claro: UNESP, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).

ARAUJO SEGUNDO, Salvino Izidro de. **Ensino-aprendizagem de equação do 1º grau com uma incógnita.** 2008. 29 f. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2009.

BRASIL. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II.** Matemática: Caderno de Teoria e Prática: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática:** representações e construção em geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FRIEDLANDER, Alex; TABACH, Michal. Promoting multiple representations in algebra. In.: Yearbook 2001: **The Roles of Representation in School Mathematics**. Estados Unidos, p. 173-185.

KEPPKE, Charston Lima. **Álgebra nos currículos do ensino fundamental**. 2007. 181 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – PUC, São Paulo, 2007.

KIERAN, Carolyn. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In: LESTER, Frank. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM, 2007. p. 707-762.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica:** do projeto à implementação. Tradução Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MIRANDA, Ivanete Rocha de; GRANDO, Neiva Ignês. Álgebra no ensino fundamental: dificuldades e obstáculos. In: GRANDO, Neiva Ignês (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: contribuições para o processo ensino-aprendizagem. Passo Fundo: UPF, 2006. p. 56-74.

OLIVEIRA, Marta Kolh de. **Vygotsky:** Aprendizado e desenvolvimento – Um processo sócio-histórico. 4 ed. São Paulo: Scipione, 1997.

PANOSSIAN, Maria Lucia. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes:** indicadores para a organização do ensino. 2008. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – FEUSP, São Paulo, 2008.

PONTE. João Pedro da. Álgebra no currículo escolar. **Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática**, Lisboa, n. 85, p. 36-42, nov./dez. 2005.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Analisando o desempenho de alunos no Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. 2001. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2001.

______. **Multisignificados de equação e o ensino de matemática:** desafios e possibilidades. São Paulo: Blucher Acadêmico, 2008.

SANTOS, Leila Muniz. **Concepções do professor de matemática sobre o ensino de álgebra.** 2005. 111 f. Tese (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2005.

SAUL, Mark. Algebra: What are teaching?. In.: Yearbook 2001: **The Roles of Representation in School Mathematics**. Estados Unidos, p. 35-43.

SCARLASSARI, Nathalia Tornisiello. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNICAMP, Campinas, 2007.

VYGOTSKY, Liev Semiónovitch. **Pensamento e linguagem.** Tradução Jefferson Luiz Camargo. 3 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

______. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 7 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.