UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

WERTSE DOS SANTOS VIEIRA

CONCEBENDO ERGONOMIAS COGNITIVAS PARA O ENSINO DA CINEMÁTICA EM MECÂNICA NEWTONIANA

Campina Grande – Paraíba
Setembro de 2010

WERTSE DOS SANTOS VIEIRA

CONCEBENDO ERGONOMIAS COGNITIVAS PARA O ENSINO DA CINEMÁTICA EM MECÂNICA NEWTONIANA

Dissertação apresentada ao mestrado da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências com habilitação em Física.

Orientador: Prof. Dr. Eládio José de Góes Brennand

Campina Grande – Paraíba
Setembro de 2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

V657c Vieira, Wertse dos Santos.

Concebendo ergonomias cognitivas para o ensino da cinemática em mecânica newtoniana [manuscrito]/ Wertse dos Santos Veira. – 2010.

70 f. : il. color.

Digitado

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, 2010.

"Orientação: Prof. Dr. Eládio José de Góes Brennand, Departamento de Física".

1. Ensino de Física. 2. Cinemática. 3. Mecânica. 4. Álgebra. I. Título.

22. ed. CDD 530.7

WERTSE DOS SANTOS VIEIRA

CONCEBENDO ERGONOMIAS COGNITIVAS PARA O ENSINO DA CINEMÁTICA EM MECÂNICA NEWTONIANA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências com habilitação em Física pela Universidade Estadual da Paraíba.

Aprovada em 14 / 10 / 2010.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eládio José de Góes Brennand
Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Examinador Externo

Profa. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire
Examinador Interno

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eládio José Goes Brennand pela orientação e oportunidade;

À Coordenação, professores e funcionários do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UEPB;

Aos amigos da turma Leonardo, Abdon e em especial a Humberto e Kalina pela força concedida no dia-a-dia das aulas e na estrada que liga João Pessoa a Campina Grande;

Ao amigo Prof. Dr. Jean Spinelly, pela amizade construída, pelos incentivos e conselhos indispensáveis.

Aos colegas com quem convivi durante as disciplinas do programa;

À minha esposa Andrea, sempre uma força ao meu lado, me transmitindo paz e amor;

Ao meu filho Ravi, o sol que ilumina minha busca constante pela superação;

À minha família, em especial a minha Mãe, meu grandioso pai e irmã pelo apoio, força e incentivo;

Aos grandes amigos da vida;

E àquelas pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho ou estiveram presentes ao meu lado nesta jornada.

"Se deres as costas à **luz**, **nada** *mais verás além do que tua própria sombra..."*

RESUMO

O ensino de física é de fundamental importância no avanço do conhecimento científico e tecnológico na nossa sociedade. Atualmente o ensino desta ciência passa por uma crise, e reflete na formação dos estudantes tanto nos níveis iniciais quanto nos superiores. Na maioria das vezes, os alunos desenvolvem aversão as aulas de Física, por não receberem de forma coerente as explicações formais de seus conceitos, bem como, o ferramental matemático que os modelam. Esta pesquisa tem como objetivo introduzir formalmente os principais conceitos da Cinemática em Mecânica Newtoniana além de modelá-los com um aparato matemático adequado a sua representação. Neste trabalho, a álgebra de Clifford foi escolhida como a linguagem matemática apropriada à abordagem físico-matemática, enquanto a operacionalização didática dos conteúdos foi norteada pela aprendizagem significativa de David Ausubel, pois permite explorar a estrutura cognitiva do educando, além de manipular seus mecanismos para a retenção dos conceitos hierárquicos da Física de forma substancial.

Palavras chave: Aprendizagem Significativa, Álgebra de Clifford, Cinemática, Ensino de Física.

ABSTRACT

The teaching of physics is of fundamental importance in advancing scientific and technological knowledge in our society. Currently the teaching of science in a crisis, and reflects the training of students both in the initial levels as the higher. In most cases, students develop an aversion to physics classes, which did not receive consistently formal explanations of their concepts, as well as the mathematical tools that shape them. This research aims to formally introduce the main concepts of Newtonian Mechanics Kinematics in addition to model them with an adequate mathematical apparatus for their representation. In this work, the Clifford algebra was chosen as the mathematical language appropriate to the physical-mathematical approach, while the operationalization of the teaching content was guided by David Ausubel's meaningful learning because it allows exploring the learner's cognitive structure, and mechanisms to manipulate their retention of the hierarchical concepts of physics substantially.

Key-words: Meaningful Learning Algebra Clifford, Kinematics, Phys.

LISTA DE FIGURAS

Figura 31: Representação da velocidade $\vec{v}$ em três instantes de observação.................. 53

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conhecimento científico e seu reflexo tecnológico tem sido de fundamental importância para a construção e manutenção das sociedades atuais. Com isso surge a necessidade de melhorar cada vez mais a formação dos seus indivíduos buscando estratégias para relacionar a qualidade do acesso à informação com a aquisição do conhecimento. Dessa forma, educar o jovem para uma boa formação científica implica num grande avanço social no que diz respeito à exploração de novas oportunidades, bem como, ampliar as atividades em ciência e tecnologia.

No novo ensino médio brasileiro, os conteúdos em Ciências são planejados e organizados, no intuito de preparar o jovem para o exercício responsável da cidadania. Com isto, espera-se que o jovem cidadão tenha formação científica suficiente para discutir e questionar de forma responsável temas polêmicos como: energia nuclear, aquecimento global, efeito estufa, dentre outros temas cuja explicação requer conhecimento científicos.

A precária situação da educação brasileira em todos os graus de escolaridade não permite a formação de jovens cidadãos conscientes (BRASIL, 2006; GRECA, 2003; SOUZA, 2001; MATHEUS *et al.*, 2005). Tal problema não é exclusividade das classes menos favorecidas, bem como atinge toda a sociedade, dada a existência de uma estrutura organizada e interligada.

Uma melhoria na qualidade da educação em ciências pode garantir uma boa formação de cidadãos capazes de produzir maiores avanços tecnológicos e, conseqüentemente, fortalecer o desenvolvimento do país. Em outras palavras, tanto o desenvolvimento científico e tecnológico como o exercício da cidadania são fortemente prejudicados quando a educação científica de um país é deficiente. Nesse processo de inovação social, a discussão sobre a importância do avanço no conhecimento científico e tecnológico traz para a cena a contribuição da mais fundamental das ciências da natureza – a Física. Atualmente, o ensino desta ciência não tem possibilitado o aprendizado adequado. Dentro desse contexto, há necessidade de investimentos em pesquisa na busca de soluções para os grandes desafios impostos às instituições educativas (DE GÓES BRENNAND, 2007).

O processo ensino-aprendizagem da Física, no Brasil, tem sido reconhecido em diversos estudos como deficiente tanto no que se refere à formação docente quanto discente, traduzido na débil aprendizagem dos conceitos físicos e do aparato matemático (BRASIL, 2006; GRECA, 2003; SOUZA, 2001; MATHEUS *et al.*, 2005). Há que se relatar a existência de problemas estruturais, tais como, os deficientes ou inexistentes laboratórios didáticos nos estabelecimentos de ensino vez que as escolas públicas, na maioria das vezes, encontram-se em condições precárias de funcionamento e as particulares concentram seus esforços em cargas horárias de aulas expositivas voltadas apenas para resoluções de exercícios envolvidos no processo vestibular. Além disso, a dificuldade da formação continuada dos professores contribui para aumentar os problemas citados anteriormente e agravar a deficiência maior no ensino desta Ciência (BRASIL, 2006; GRECA, 2003; SOUZA, 2001; MATHEUS *et al.*, 2005).

O ensino da Física, em todos os níveis, tem sido uma tarefa difícil. Grande parte dos alunos estudam esta Ciência mais por uma imposição curricular do que por satisfação pessoal. Em geral, o ensino de Física caracteriza-se pelo excesso de atenção dada a exercícios repetitivos, a problemas resolvidos mecanicamente e à utilização de uma sucessão de "fórmulas", muitas vezes, decoradas de forma literal e arbitrária, em detrimento de uma análise mais profunda, visando à compreensão dos fenômenos físicos envolvidos. Com isto, há a necessidade de se refletir sobre esta problemática na tentativa de buscar novas estratégias para o ensino de Física (BRASIL, 2006; GRECA, 2003; SOUZA, 2001; MATHEUS *et al.*, 2005).

Um dos graves problemas no ensino de Física tem sido o uso de um ferramental matemático fragmentário. A fragmentação deve-se ao uso de diversas estruturas matemáticas nos diferentes domínios da Física, o que dificulta a conexão entre elas e, muitas vezes, não proporciona uma fácil intuição das propriedades dos fenômenos estudados. Na maioria dos livros do ensino médio, os capítulos, que se referem ao estudo da cinemática, abordam tanto os conceitos físicos quanto matemáticos diferentes formas, tais como: escalares e vetores, deslocamentos escalares e vetoriais, velocidades escalares, angulares e vetoriais, velocidades médias e instantâneas, acelerações escalares, vetoriais, angulares, médias e instantâneas, que na maiorias das vezes só geram confusões nos educandos.

Tendo em vista estes problemas de ordem formal, tanto no aparato matemático quanto nos conceitos físicos abordados em cinemática; pretendemos a partir da crítica construtiva da linguagem matemática usada em Física, introduzir uma linguagem unificada desenvolvida durante as últimas décadas com o intuito de simplificar e clarificar as estruturas do ensino desta ciência (HESTENES, 2003).

A Matemática é considerada no ensino de Física como um corpo de imutáveis verdades para serem assimiladas e aplicadas, entretanto, a profunda influência da matemática em nossas concepções do mundo físico tem sido pouco analisadas. Dois exemplos clássicos desta influência sustentam nossa argumentação: o desenvolvimento da geometria analítica e do cálculo infinitesimal - indispensável para a estruturação por Newton da mecânica clássica - e o desenvolvimento da análise tensorial - para a criação por Einstein da Teoria Geral da Relatividade. Estes dois exemplos servem para chamar a atenção sobre o fato de que estas duas teorias não teriam sido concebidas sem os conceitos matemáticos necessários para seu desenvolvimento. No entanto, é preciso reconhecer que a geometria analítica, que fornece a fundamentação matemática para a mecânica clássica, é insuficiente para a Relatividade Geral. Este fato nos alerta para a possibilidade da existência, na Física, de limites impostos pelo instrumental matemático, reduzindo nossa habilidade de conceber o mundo físico. Isto traz graves conseqüências para o ensino de Física em todos os níveis. Assim, a concepção de ferramentas matemáticas que otimizem a aprendizagem é uma temática relevante para as pesquisas referentes ao ensino de Física (HESTENES, 1999; SOBCZYK, 1999).

Vários estudos (HESTENES, 1999; SOBCZYK, 1999) indicam um sistema matemático composto pela álgebra de Clifford e pelo cálculo infinitesimal desenvolvido sobre ela, denominado cálculo geométrico, como uma linguagem mais clara e sem fragmentações para o tratamento dos fenômenos Físicos (HESTENES, 1999; SOBCZYK, 1999). Esta estrutura matemática aplicada à Física proporciona uma melhor intuição das propriedades dos sistemas estudados, tendo como principais características:

I. Possibilitar uma excelente codificação algébrica dos conceitos geométricos, tais como magnitude, direção, sentido e dimensão;
II. Estabelecer um método livre de coordenadas para formular e resolver equações da Física;
III. Permitir uma boa articulação com os sistemas matemáticos em uso na Física;
IV. Apresentar um excelente desempenho computacional, comparado com outros sistemas matemáticos usados na Física.

Dentro desse contexto, é proposto como trabalho dessa dissertação a adaptação desse novo aparato matemático para representar as principais grandezas estudadas em cinemática, tais como, referencial, posição, deslocamento, velocidade e aceleração.

Organização do Trabalho

No Capítulo I, apresenta-se uma visão histórica do desenvolvimento das idéias que contribuíram no desenvolvimento da álgebra Clifford, bem como uma apresentação formal das propriedades dos vetores e suas operações, quais sejam, Soma, produto por escalar, produto de dois vetores. Além de desenvolver a álgebra de Clifford num plano.

No Capítulo II, abordam-se os conceitos fundamentais da teoria cognitivista de David Ausubel, além de uma exploração dos mapas conceituais de Novak.

No Capítulo III, discute-se os conceitos de sistemas de referência, posição, tempo, velocidade e aceleração, tanto na forma linear quanto angular. Deixando claros os aspectos importantes na descrição do movimento de corpos no espaço físico intuitivo bi-dimensional.

No Capítulo IV, desenvolve-se um mapa conceitual de Novak norteado pela teoria cognitivista ausubeliana, onde constrói-se um material instrucional para o primeiro ano do ensino médio com os elementos básicos da cinemática modelados quantitativamente de forma natural e intuitiva com a álgebra de Clifford.

Para finalizar, foram apresentadas as considerações finais.

Procedimento Metodológico

Tratando-se de uma pesquisa de cunho teórico-exploratório, que objetiva construir estratégias para introduzir a álgebra de Clifford como modelador dos conceitos da cinemática para a primeira série do ensino médio, direcionada pela teoria cognitiva de David Ausubel. Este trabalho é organizado, no que concerne à sua execução, em dois momentos distintos: Momento Teórico-hermenêutico e o Momento de Exploração Cognitiva.

No momento teórico-hermenêutico, foram feitos estudos bibliográficos sistemáticos para caracterizar os conceitos fundamentais presentes no domínio da cinemática em contextos diversos de abordagem epistemológica, bem como o estudo detalhado das propriedades da álgebra de Clifford tendo como propósito a aplicação deste novo formalismo na modelagem dos conceitos estudados (DE GÓES BRENNAND, 2007).

No momento de exploração cognitiva, os estudos concentraram-se na exploração conceitual e na utilização da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel para organizar os conceitos dentro de um modelo cognitivo. Compatibilizamos de forma pedagógica os conceitos modelados às características e necessidades de aprendizagem dos alunos, levando em conta o nível de ensino em questão. Para tanto, buscamos entender o cognitivismo ausubeliano de forma situada e finalística, ou seja, dentro de um contexto específico de ação e, voltada para alcançar um objetivo. Visamos analisar os processos cognitivos implicados na organização dos conteúdos compreendendo estes aspectos como sendo constituídos de modos operatórios, de seqüências de ação, de sucessões de busca e de tratamento de informações. Criamos etapas de desenvolvimento temporal das atividades a serem propostas e as estratégias a serem utilizadas (DE GÓES BRENNAND, 2007).

Buscamos uma construção didática onde os conteúdos do domínio da cinemática foram organizados a partir dos seguintes parâmetros: Subsunçores, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. A partir destes parâmetros, foi construído um mapa conceitual dos conteúdos e produzido um material didático para o ensino de Física.

CAPÍTULO 1: OS FUNDAMENTOS DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

1.1 Aspectos Históricos

Na Grécia antiga, Euclides e outros pensadores tentaram representar elementos geométricos através de elementos algébricos, tais como: retas, áreas e volumes. Dessa forma, os termos x^2 e x^3 seriam possíveis representações tanto da área de um quadrado de lado x, quanto do volume de um cubo de lado x, respectivamente. Surgia, então, a possibilidade de descrever-se as operações geométricas por meio de operações algébricas. Nesse caso, a idéia era representar os lados do quadrado por um numero x e a operação geométrica formando o quadrado a partir de seus lados pelo produto $x.x = x^2$ (HESTENES, 1999).

Apesar de tentadora, essa idéia foi abandonada pelos gregos, pois nem todos os segmentos de reta podiam ser representados por números (assim como os gregos os conheciam). Por exemplo: dado um quadrado de lado unitário a sua diagonal é justamente a raiz quadrada de 2, e o que hoje chamamos números irracionais não era conhecido pelos gregos. Além disso, foram ficando complicadas as interpretações geométricas de x^4, x^5... Mesmo assim, nota-se uma grande busca pelos gregos de representar elementos geométricos por elementos algébricos e, conseqüentemente, operações geométricas por operações algébricas. Nesta busca grega está a idéia de representar operações geométricas por meio de operações algébricas (HESTENES, 1999).

Existia um conceito que impedia os gregos de desenvolver tais idéias. O conceito chave é o de congruência. Este conceito definia a igualdade de segmentos de reta através da sua magnitude.

Já no renascimento, a idéia de se representar operações geométricas por meio de operações algébricas voltou à tona. Pensadores como Gottfried W. Leibniz e René Descartes empreenderam muitos esforços neste caminho. Descartes, não conseguiu avançar no desenvolvimento dessas idéias basicamente pelo fato de adotar o mesmo conceito de congruência dos gregos. Leibniz, que é um dos criadores do cálculo infinitesimal, teve uma idéia diferente, no sentido de que a sua álgebra era definida como uma álgebra de posição. Neste momento histórico, foi escrito um ensaio muito interessante sobre o assunto, mas também não teve sucesso e ficou esquecido por vários anos (HESTENES, 1999).

Em torno de 1833, este ensaio foi descoberto, daí então, foi criado um prêmio para quem desenvolvesse as idéias de Leibniz. Neste concurso houve apenas um inscrito, e que desenvolveu com sucesso a representação de operações geométricas por meio de operações algébricas. Este grande matemático inscrito no concurso foi Grassmann. O que permitiu a Grassmann desenvolver com êxito essas idéias foi o fato dele não usar a noção de congruência dos gregos. Grassmann usou a idéia de congruência comparando os segmentos de reta em magnitude e também direção (DORAN, 2002; LASENBY, 2002).

A observação nesse caso é que se pode atribuir a um segmento de reta não apenas um número representando seu comprimento ou magnitude, mas também uma direção, ou seja, introduziu a noção de paralelismo.

A pesquisa desenvolvida por H. Grassmann em 1844 não chamou tanta atenção dos matemáticos, exceto para o jovem matemático Willian K. Clifford e, posteriormente, pelo grande Elie J. Cartan. Atualmente, a estrutura matemática desenvolvida por Grassmann é conhecida por álgebra exterior ou álgebra de Grassmann.

Ainda em 1844, Willian R. Hamilton havia publicado um sistema que denominou quatérnions que consiste em uma generalização dos números complexos, que por sua vez é uma generalização do conceito de números reais. Os quatérnions são objetos bem adequados para descrição de operação no espaço tridimensional, tais como, as rotações (DORAN, 2002; LASENBY, 2003).

Já em 1878, W. Clifford publicou um trabalho em que foi mostrada a unificação dos sistemas de Grassmann e de Hamilton. Aproveitando a estrutura geral da álgebra de Grassmann, o sistema de Clifford permitiu a generalização do sistema dos quatérnions de Hamilton. A denominação original de Clifford para esta estrutura foi álgebra geométrica, que hoje é denominada álgebra de Clifford.

Apesar da álgebra de Clifford apresentar um sistema formal e coerente, aplicada a espaço de dimensões arbitrárias. O sistema desenvolvido por Clifford não teve a devida divulgação pelo fato de Clifford ter morrido prematuramente aos 33 anos de idade, bem como, o grande sucesso encontrado pelo sistema algébrico desenvolvido por Gibbs no tratamento dos problemas do eletromagnetismo, teoria que estava em seu esplendor no final do século 19 (DORAN, 2002).

1.2 Vetor como um Número

Na Física existe uma classe de grandezas que para sua perfeita descrição há a necessidade de se definir além de sua magnitude, a sua direção. Estas grandezas são tratadas com um ferramental matemático conhecido como cálculo vetorial.

Quando se pergunta “O que é um vetor?” para a maior parte dos alunos do ensino médio, as respostas são diversas e sempre direcionadas a uma falta de compreensão da natureza desses objetos matemáticos. Mas, o que é realmente um vetor? De uma maneira geral, podemos dizer que o vetor é uma espécie de número, que não expressa somente uma magnitude como os números reais, mas incorpora também o conceito de direção. Uma pergunta que surge imediatamente é: “Como representar esses números?”

A partir de agora será feita uma representação desses “números” e, para tornar mais intuitiva sua visualização, o ponto de partida será o espaço físico intuitivo tridimensional. Este espaço é aquele no qual são vivenciadas as nossas experiências diárias.

Denotaremos por E^3 o espaço físico intuitivo formado por pontos, sem que nele haja pontos privilegiados. A Figura 1 mostra um “pedaço” do E^3 com alguns pontos destacados.

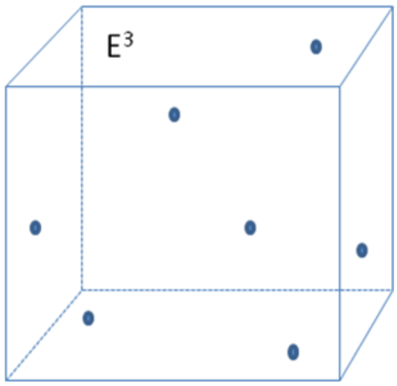


Figura 1: Representação do espaço tridimensional

A imagem matemática deste espaço é definida pelo conjunto $E^3 = \{(x,y,z)$, tal que $x,y,z \in R\}$, ou seja, o conjunto formado pelo produto cartesiano RxRxR (DE GÓES BRENNAND, 2008). Os números x, y e z são chamados de coordenadas canônicas de um ponto qualquer deste espaço, denominadas respectivamente abscissa, ordenada e cota. Para indicar que as coordenadas canônicas, ou simplesmente coordenadas, do ponto P são x, y e z, será usada a seguinte notação $P = (x,y,z)$. Dois pontos desse espaço são considerados iguais se satisfizerem a seguinte condição:

$$A = B \Leftrightarrow (x_A = x_B, y_A = y_B, z_A = z_B) \quad (1)$$

A Figura 2 mostra os pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ ligados por um segmento de reta orientado.

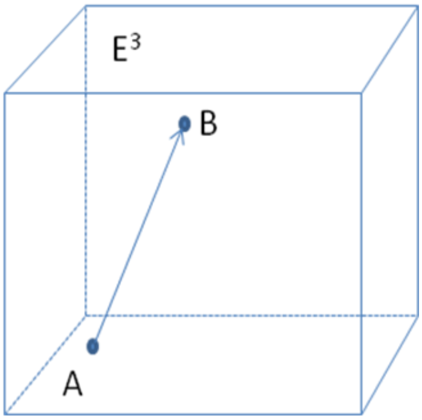


Figura 2: Representação geométrica do vetor ligado

Ao par ordenado (A,B) de pontos do E^3 dá-se o nome de *vetor ligado* de origem A e extremidade B, conforme ilustrado na Figura 2. Este vetor será representado por $\overrightarrow{AB}$ (DE GÓES BRENNAND, 2008).

Se A = (x_a,y_a,z_a) e B = (x_b,y_b,z_b), as coordenadas canônicas do vetor ligado $\overrightarrow{AB}$ são:

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \tag{2}$$

Por exemplo, se A = (-1,2,-1) e B = (3,-2,5), então $\overrightarrow{AB} = (4,-4,6)$

Dois vetores ligados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são ditos eqüipolentes se têm as mesmas coordenadas canônicas. A relação de eqüipolência expressa uma igualdade entre vetores ligados e é denotada por $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Ou seja,

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_b - x_a = x_d - x_c \\ y_b - y_a = y_d - y_c \\ z_b - z_a = z_d - z_c \end{cases} \tag{3}$$

.

Geometricamente a relação de eqüipolência $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ entre os vetores ligados está representada na Figura 3, onde os pontos ABCD do E^3 formam um paralelogramo.

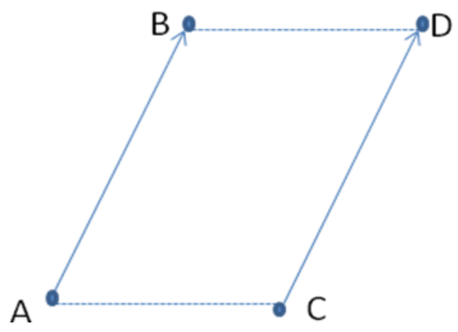


Figura 3: Representação geométrica da relação de eqüipolência vetorial

A eqüipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos vetores ligados e, por definição, deve satisfazer as seguintes propriedades:

- **Reflexiva:** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$.
- **Simétrica:** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$
- **Transitiva:** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ **e** $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$

Isto permite definir um objeto matemático denominado *vetor livre*, o qual representa uma classe de equivalência de vetores ligados eqüipolentes. Em outras palavras, o vetor livre é o conjunto de todos os vetores ligados que têm as mesmas coordenadas (DE GÓES BRENNAND, 2008). O vetor livre é perfeitamente representado por qualquer um dos representantes da classe e será denotado por $\vec{v}$. O conjunto de todos os vetores livres representantes das classes de equivalência de vetores ligados do espaço E^3 é denotado por V^3.

É conveniente observar a distinção entre E^3 e V^3. Para formar a imagem geométrica de V^3, primeiro faz-se necessária a escolha de um ponto particular em E^3. Este ponto será chamado de *origem*, isto é, O = (0,0,0). Evidentemente que este espaço não é mais o nosso espaço físico intuitivo, já que existe um ponto privilegiado.

Passando pelo ponto O pode-se traçar uma infinidade de retas. Considere três dessas retas. Tomando pontos destas retas de coordenadas P = (x_p, y_p, z_p),Q = (x_q, y_q,z_q), R = (x_r, y_r, z_r) e S = (x_s, y_s, z_s). Assim define-se os seguintes vetores livres:

$$\overrightarrow{OP} = (x_p - 0, y_p - 0, z_p - 0) = (x_p, y_p, z_p) = \vec{u}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (x_q - 0, y_q - 0, z_q - 0) = (x_q, y_q, z_q) = \vec{v} \qquad \overrightarrow{OR} = (x_r - 0, y_r - 0, z_r - 0) = (x_r, y_r, z_r) = \vec{w}$$

$$\overrightarrow{OS} = (x_s - 0, y_s - 0, z_s - 0) = (x_s, y_s, z_s) = \vec{h} \qquad (4)$$

Portanto, o conjunto de todos os vetores livres com origem no ponto O representa a imagem geométrica de V^3, como mostra a Figura 4 (DE GÓES BRENNAND, 2008).

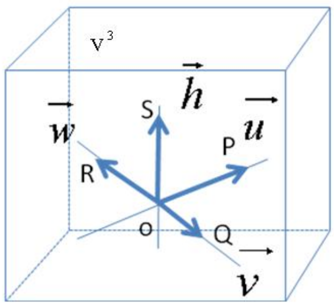


Figura 4: Representação gráfica do espaço v^3

1.3 Operações com Vetores: Produto de Clifford

Tendo em vista a construção intuitiva da estrutura apresentada no item anterior, nossa tarefa seguinte é definir operações com objetos dessa estrutura, isto é, vetores.

Na seqüência serão definidas três aplicações em V^3: a soma, o produto de um vetor por escalar e o produto de dois vetores, no qual enfatizaremos os pontos de vistas algébricos e geométricos.

1.3.1 Soma

A soma dos vetores $\vec{u}+\vec{v}$ é definida geometricamente como um vetor que tem origem na origem do vetor $\vec{u}$ e extremidade na extremidade do vetor $\vec{v}$, como representado na Figura 5 (CALVET, 2001).

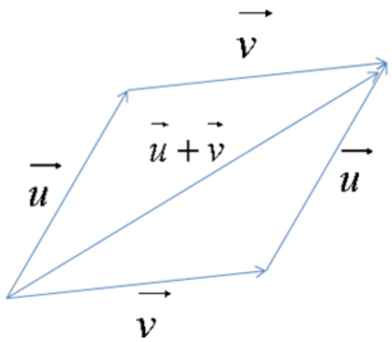


Figura 5: Representação geométrica da soma de dois vetores

Esta operação satisfaz as propriedades, comutativa e associativa.

1.3.1.1 Propriedade comutativa

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \tag{5}$$

A propriedade comutativa é claramente vista na Figura 5. Este fato permite definir uma regra para adicionar vetores, conhecida como a *regra do paralelogramo* (CALVET, 2001).

1.3.1.2 Propriedade associativa

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{6}$$

A propriedade associativa é vista na Figura 6 e permite uma regra para adicionar vetores, conhecida como a *regra do polígono* (CALVET, 2001).

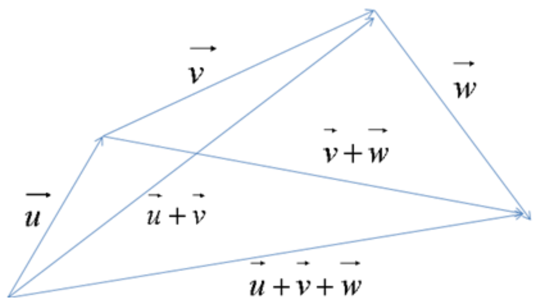


Figura 6: Representação geométrica da soma de três vetores

Na soma o elemento neutro é conhecido por *vetor nulo,* cuja magnitude tem valor zero. O vetor nulo é definido pela soma de um vetor com seu vetor oposto. O vetor oposto é representado por $-\vec{u}$ e possui mesma direção de $\vec{u}$, porém sentido contrário, isto é,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}. \tag{7}$$

1.3.2 Produto de um vetor por um escalar

O produto de um vetor $\vec{u}$ por um escalar *k* é o vetor $k\vec{u}$, conforme a Figura 7. Este vetor tem a mesma direção do vetor $\vec{u}$ e sua magnitude é *k* vezes a magnitude de $\vec{u}$. Terá o mesmo sentido de $\vec{u}$ se *k*>0, e sentido oposto de $\vec{u}$ se *k*<0.

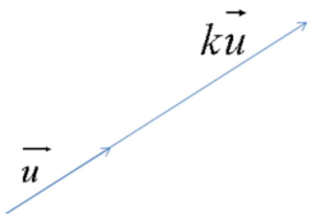


Figura 7: Representação geométrica do produto de um vetor por um escalar para *k >1*

No produto de um vetor por um escalar, a propriedade comutativa $k\vec{u} = \vec{u}k$ é válida.

Dois vetores $\vec{u},\vec{v}$ com mesma direção são sempre proporcionais e linearmente dependentes, pois sempre existe um número real *k* que pode se escrever $\vec{v} = k\vec{u}$, onde k é o quociente de ambos os vetores e se representa da seguinte forma:

$$k = \vec{u}^{-1}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}^{-1} \tag{8}$$

1.3.3 Produto de dois vetores

O Produto de dois vetores é definido mediante as seguintes propriedades:

I) Distributiva em relação à soma vetorial

$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w} \tag{9}$$

II) A multiplicação de um vetor por ele mesmo deve ser igual ao quadrado do seu comprimento, que, por definição, é um número real positivo e pode ser representado por:

$$\vec{u}\vec{u} = |\vec{u}|^2 \tag{10}$$

III) Associativa em relação ao produto de dois vetores e ao produto de um vetor por um escalar. Dados $\vec{u},\vec{v}$ vetores e l,k escalares então,

$$k(\vec{u}\vec{v}) = (k\vec{u})\vec{v} = k\vec{u}\vec{v} \tag{11}$$

e

$$k(l\vec{u}) = (kl)\,\vec{u} = kl\vec{u} \tag{12}$$

A partir dessas propriedades, pode-se deduzir o produto de dois vetores.

Supondo que a soma dos vetores $\vec{u},\vec{v}$ seja o vetor $\vec{w}$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \tag{13}$$

multiplicando a equação (13) por ela mesma temos:

$$\vec{w}\vec{w} = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) \tag{14}$$

aplicando a propriedade distributiva tem-se que,

$$\vec{w}\vec{w} = \vec{u}\vec{u} + \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u} + \vec{v}\vec{v} \tag{15}$$

tomando sempre o cuidado de seguir a ordem dos fatores, pois estes podem ser comutativos ou não.

Com isto, se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, aplica-se o teorema de Pitágoras da seguinte forma:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Rightarrow \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}\vec{v} = -\vec{v}\vec{u} \tag{16}$$

sendo fácil ver que o produto de dois vetores perpendiculares é anti-comutativo.

Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são proporcionais tem-se que,

$$\vec{u} \,||\, \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = k\vec{u},\ k\ real \Rightarrow \vec{u}\vec{v} = \vec{u}k\vec{u} = k\vec{u}\vec{u} = \vec{v}\vec{u} \tag{17}$$

Na equação 17 foram aplicadas as propriedades comutativa e associativa do produto de um vetor por um escalar. Sendo assim, é fácil ver que o produto de dois vetores proporcionais é comutativo. Se $\vec{w}$ é a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos, podemos representar seu módulo por:

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}| \tag{18}$$

então,

$$\vec{w}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| \tag{19}$$

para $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a zero,

mas se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são anti-paralelos tem-se que,

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| - |\vec{v}| \tag{20}$$

daí,

$$\vec{w}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \tag{21}$$

onde $\vec{u}\vec{v} = -|\vec{u}||\vec{v}|$ para o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ igual a π (CALVET, 2001).

A pergunta que surge é: “Qual seria o produto de dois vetores com qualquer direção?” Para calcular o produto de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, multiplica-se o vetor $\vec{u}$ pela componente proporcional e perpendicular do vetor $\vec{v}$, conforme a Figura 8.

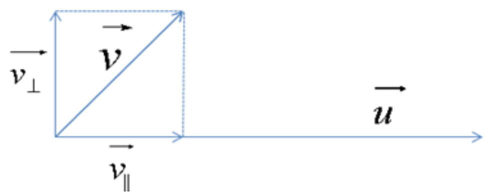


Figura 8: Representação das componentes paralela e perpendicular do vetor $\vec{v}$ em relação ao vetor $\vec{u}$

Aplicando a propriedade distributiva temos,

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u}(\overrightarrow{v_{\|}} + \overrightarrow{v_{\perp}}) = \vec{u}\overrightarrow{v_{\|}} + \vec{u}\overrightarrow{v_{\perp}} \tag{22}$$

O primeiro termo do lado direito desta equação, isto é, $\vec{u}\overrightarrow{v_{\|}}$, que representa o produto de um vetor pela componente paralela de outro vetor, é chamado de produto interior e será denotado por um ponto, da seguinte forma:

$$\vec{u}.\vec{v}\ . \tag{23}$$

Tomando a projeção do vetor $\vec{v}$ na direção do vetor $\vec{u}$, conforme a Figura 9,

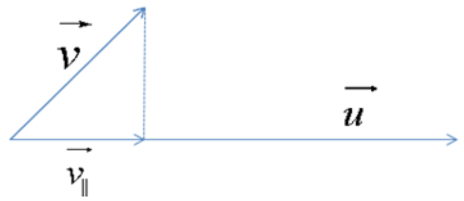


Figura 9: Representação geométrica da componente paralela para o cálculo do produto interno

Considerando que a projeção de $\overrightarrow{v_{\|}}$ em $\vec{u}$ é proporcional ao cosseno do ângulo entre os vetores, o produto interior pode ser escrito como:

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}\overrightarrow{v_{\|}} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha\ . \tag{24}$$

O produto interior é sempre um número real (CALVET, 2001).

O segundo termo da equação 22, isto é, $\vec{u}\overrightarrow{v_{\perp}}$, que representa o produto de um vetor $\vec{u}$ pela componente ortogonal de um vetor $\vec{v}$, é chamado de produto externo ou produto de Grassman e será denotado pelo símbolo $\wedge$ (cunha) da seguinte forma:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u}\overrightarrow{v_{\perp}}\ . \tag{25}$$

O produto de Grassman representa a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{v_\perp}$, conforme a Figura 10,

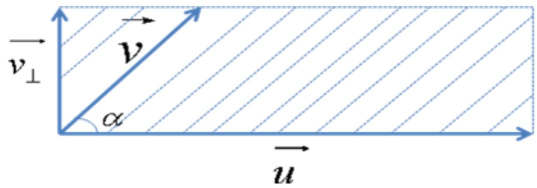


Figura 10: Representação geométrica da componente perpendicular para o cálculo do produto de Grassman

sendo assim, podemos escrever

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}\overrightarrow{v_\perp}| = |\vec{u}||\vec{v}||\sin\alpha|. \tag{26}$$

Visto que o produto externo é o produto dos vetores ortogonais, então é anti-comutativo, ou seja:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}. \tag{27}$$

Podemos representar o produto de Grassman $\vec{u} \wedge \vec{v}$ por uma área orientada no sentido anti-horário, conforme a Figura 11,

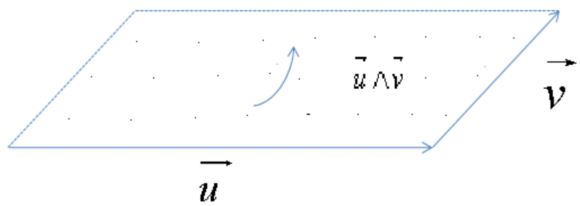


Figura 11: Representação geométrica da orientação da área pelo produto $\vec{u} \wedge \vec{v}$

ou por uma área orientada no sentido horário dado por $\vec{v} \wedge \vec{u}$, conforme a Figura 12.

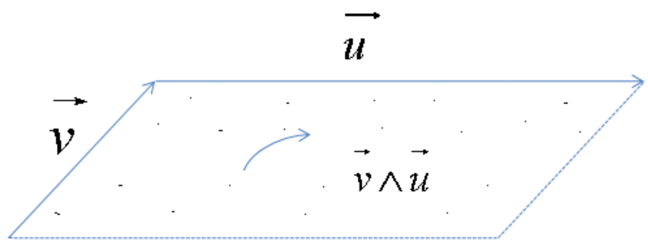


Figura 12: Representação geométrica da orientação da área pelo produto $\vec{v} \wedge \vec{u}$

Note que os sentidos das orientações das áreas estão intimamente ligados ao fato do produto de Grassman ser anti-comutativo. O produto de Grassman é chamado de bivetor ou 2-vetor (DORAN, 2002; LASENBY, 2003).

Quando dois vetores são permutados, o sinal que orienta o ângulo é mudado. Então, o sinal de orientação do vetor no cosseno permanece igual e no seno muda. Por esse motivo, o produto interior é comutativo, enquanto que o produto de Grassman é anti-comutativo (CALVET, 2001).

1.3.4 Semelhanças entre o produto de Grassman $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$

Módulos:

I - O módulo do produto vetorial $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha|$

II - O módulo produto de Grassman $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha|$

O módulo do produto vetorial é semelhante ao módulo do produto de Grassman.

Orientações:

I – O produto vetorial tem uma orientação que é dada por um vetor perpendicular ao plano onde estão contidos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados na Figura 13 (ALONSO e FINN, 1972).

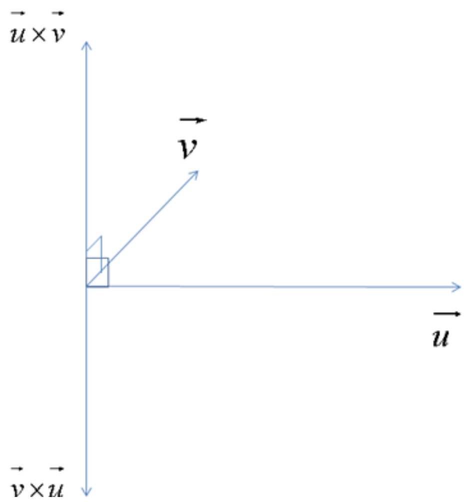


Figura 13: Representação geométrica das orientações dos produtos vetoriais $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$.

Veja que o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ tem sua orientação apontada para cima e $\vec{v}\times\vec{u}$ para baixo.

II – Como vimos nas Figuras 11 e 12, o produto de Grassman é um 2-vetor e tem também uma orientação que pode ser dada no sentido anti-horário por $\vec{u}\wedge\vec{v}$, ou no sentido horário por $\vec{v}\wedge\vec{u}$.

Tanto o produto vetorial quanto o produto de Grassman, quando invertem as ordens dos vetores no produto, há uma inversão na orientação. Isto acontece devido ao fato destes produtos serem anti-comutativos. Da forma exposta acima podemos dizer que é notável a semelhança entre um 2-vetor e o produto vetorial.

Finalmente, o produto de dois vetores será definido como a soma dos produtos interior e de Grassman, e denominado produto de Clifford, ou seja:

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{v}\,. \tag{28)}$$

É interessante salientar que, partindo da definição do produto de Clifford, os produtos interior e de Grassman podem ser escritos, respectivamente, da seguinte forma:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{\vec{u}\vec{v}+\vec{v}\vec{u}}{2} \tag{29}$$

e

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \frac{\vec{u}\vec{v}-\vec{v}\vec{u}}{2} \tag{30}$$

indicando que o produto interior é a parte simétrica do produto de Clifford, enquanto que o produto de Grassman representa a parte anti-simétrica.

Os produtos de Grassman, interior e de Clifford dependem apenas das magnitudes dos vetores e do ângulo entre eles. Quando ambos os vetores são rotacionados, preservando o ângulo formado entre eles, os produtos também são preservados. A Figura 14 mostra graficamente a rotação dos vetores.

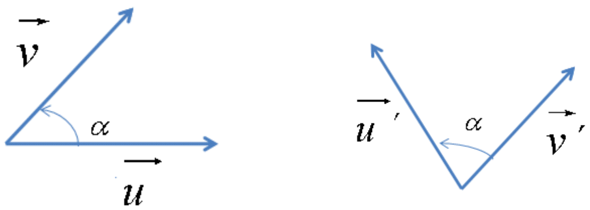


Figura 14: Rotação dos vetores mantendo os ângulos

Surge então a pergunta: Qual o módulo do produto de Clifford?

Visto que o produto interior e de Grassman são linearmente independentes e ortogonais, o módulo do produto de Clifford deve ser calculado através de uma generalização do teorema de Pitágoras (CALVET, 2001):

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow |\vec{u}\vec{v}|^2 = |\vec{u}.\vec{v}|^2 + |\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 \tag{31}$$

$$|\vec{u}\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.(\cos^2\theta + sen^2\theta) = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 \tag{32}$$

portanto, o módulo do produto de Clifford é o produto dos módulos de cada vetor, isto é,

$$|\vec{u}\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}| \tag{33}$$

1.4 Operações com vetores: Álgebra de Clifford no plano

Num plano podemos orientar os seguintes objetos:

I) Um ponto contido numa reta, pertencente ao plano, e que representaremos por um escalar de base 1 e o chamaremos de 0-vetor, conforme a Figura 15.

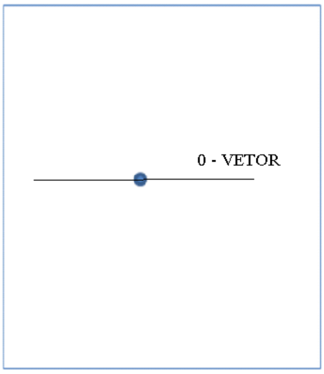


Figura 15: Ponto representado numa reta pertencente ao plano

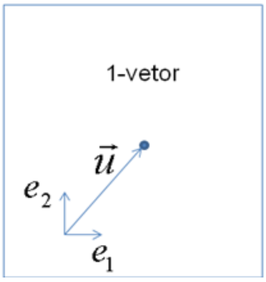
Este ponto terá a liberdade de "caminhar" para a direita ou para a esquerda e será representado pelo sinal positivo (+) ou negativo (-), respectivamente (DORAN, 2002; LASENBY, 2003).

II) Um vetor (1-vetor) $\vec{u}$, que pode ser escrito como a combinação linear de uma base de vetores ortonormais $\{e_1, e_2\}$, conforme a Figura 16.

Para os vetores ortonormais temos:

* $e_1^2 = e_2^2 = 1$ (magnitude unitária)

* $e_1 . e_2 = 0$ (Produto interior)



$$\vec{u} = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

Figura 16: (1-vetor) $\vec{u}$ escrito como combinação linear de $\{e_1, e_2\}$

III) Um elemento de área orientado que chamaremos de bivetor ou (2-vetor), representado por $e_1 \wedge e_2$ que é o produto de Grassaman. Este é o elemento de maior graduação nesse espaço (DORAN, 2002; LASENBY, 2003). Ver Figuras 17 e 18.

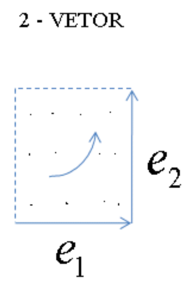


Figura 17: 2-vetor $e_1 \wedge e_2$

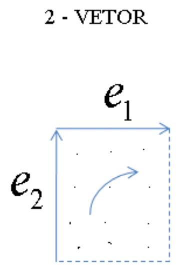


Figura 18: 2-vetor $e_2 \wedge e_1$

fazendo o produto de Clifford dos vetores e_1 e e_2 temos,

$$e_1 e_2 = e_1 . e_2 + e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \tag{34}$$

já que o produto interior $e_1 . e_2 = 0$

Do que vimos anteriormente podemos concluir:

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1 \tag{35}$$

1.4.1 Multiplicação de um 2-vetor por um 1-vetor

Vamos multiplicar um 2-vetor pelos vetores e_1 e e_2 de duas maneiras diferentes.

- Multiplicando o 2-vetor à esquerda de um 1-vetor temos,

$$(e_1 e_2) e_1 = (-e_2 e_1) e_1 = -e_2 e_1 e_1 = -e_2 \tag{36}$$

e

$$(e_1 e_2) e_2 = (e_1 e_2) e_2 = e_1 e_2 e_2 = e_1 \tag{37}$$

A Figura 19 mostra a rotação do vetor e_1 na multiplicação pelo o 2-vetor $(e_1 e_2)$ a esquerda.

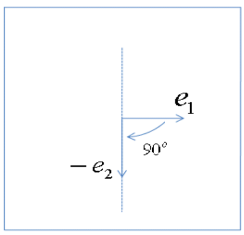


Figura 19: Representação geométrica da multiplicação de um 2-vetor $(e_1 e_2)$ à esquerda do 1-vetor e_1

Já a rotação do 1-vetor e_2 na multiplicação pelo o 2-vetor $(e_1 e_2)$ a esquerda é mostrada na Figura a seguir:

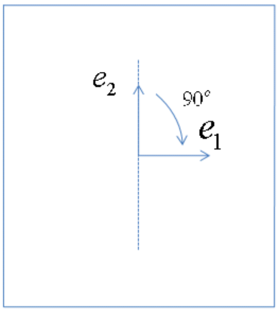


Figura 20: Representação geométrica da multiplicação de um 2-vetor $(e_1 e_2)$ à esquerda do 1-vetor e_2

Desta forma, podemos ver que multiplicando 1-vetor por um 2–vetor à esquerda gera uma rotação de 90^o no sentido horário (DORAN, 2002; LASENBY, 2003).

- Multiplicando o 2-vetor à direita de um 1-vetor temos,

$$e_1(e_1 e_2) = e_1 e_1 e_2 = e_2 \tag{38}$$

e

$$e_2(e_1 e_2) = e_2(-e_2 e_1) = -e_2 e_2 e_1 = -e_1 \tag{39}$$

A Figura 21 mostra a rotação do vetor e_1 na multiplicação pelo o 2-vetor $(e_1 e_2)$ a direita.

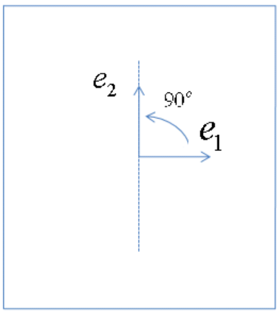


Figura 21: Representação geométrica da multiplicação de um 2-vetor $(e_1 e_2)$ à direita do 1-vetor e_1

Por fim, a rotação do 1-vetor e_2 na multiplicação pelo o 2-vetor $(e_1 e_2)$ a direita é mostrada na Figura a abaixo:

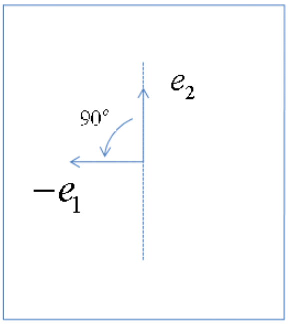


Figura 22: Representação geométrica da multiplicação de um 2-vetor $(e_1 e_2)$ à direita do 1-vetor e_2

Portanto, multiplicando o 1-vetor por um 2-vetor à direita gera uma rotação de 90^o no sentido anti-horário (DORAN, 2002; LASENBY, 2003).

1.4.2 Multiplicação de um 2-vetor por um 2-vetor

Multiplicando o 2-vetor $e_1 e_2$ por ele mesmo teremos o quadrado do bivetor

$$(e_1 e_2)\,(e_1 e_2) = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_2 e_1 e_1 e_2 = -1 \tag{40}$$

Isso se deve ao fato de que duas multiplicações consecutivas, (à esquerda ou à direita) de um 1-vetor por $(e_2 e_1)^2$ gera uma rotação de 180°, que equivale à multiplicar por -1 (DORAN, 2002; LASENBY, 2003).

1.4.3 Multivetor

Considerando os três objetos orientados do plano, 0-vetor, 1-vetor e 2-vetor, definimos um multivetor como sendo uma combinação linear dos elementos da base:

$$\{1, (e_1, e_2), e_1 e_2\}\,.$$

ou seja

$$A = a_o + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 (e_1 e_2) \tag{41}$$

onde, a_o, a_1, a_2, a_3 são escalares.

Sobre o conjunto de todos os multivetores gerados por essa base podemos definir a operação de soma e produto da seguinte forma:

1.4.3.1 Soma

Dado dois multivetores

$$A = a_o + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3(e_1e_2) \quad \text{e} \quad B = b_o + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3(e_1e_2) \tag{42}$$

definimos a soma como:

$$A + B = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)(e_1e_2) \tag{43}$$

1.4.3.2 Produto

Definimos o produto como:

$$AB = [a_o + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3(e_1e_2)][b_o + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3(e_1e_2)] \tag{44}$$

Consideração a ordem da multiplicação temos:

$$\begin{aligned}
AB &= a_ob_o + a_ob_1e_1 + a_ob_2e_2 + a_ob_3(e_1e_2) + \\
&+ a_1b_oe_1 + a_1b_1e_1e_1 + a_1b_2e_1e_2 + a_1b_3e_1(e_1e_2) + \\
&+ a_2b_oe_2 + a_2b_1e_2e_1 + a_2b_2e_2e_2 + a_2b_3e_2(e_1e_2) + \\
&+ a_3b_o(e_1e_2) + a_3b_1(e_1e_2)e_1 + a_3b_2(e_1e_2)e_2 + a_3b_3(e_1e_2)(e_1e_2)
\end{aligned}$$

Usando as propriedades acima trabalhadas obtemos

$$\begin{aligned}
AB &= a_ob_o + a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 + (a_ob_1 + a_1b_o + a_3b_2 - a_2b_3)e_1 + (a_ob_2 + a_1b_3 + a_2b_o - a_3b_1)e_2 + \\
&+ (a_ob_3 + a_1b_2 + a_3b_o - a_2b_1)(e_1e_2)
\end{aligned} \tag{45}$$

desta forma, podemos reescrever a equação acima como

$$AB = M = p_o + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3(e_1e_2) \tag{46}$$

onde,

$$p_o = a_o b_o + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 \tag{47}$$

$$p_1 = a_o b_1 + a_1 b_o + a_3 b_2 - a_2 b_3 \tag{48}$$

$$p_2 = a_o b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_o - a_3 b_1 \tag{49}$$

$$p_3 = a_o b_3 + a_1 b_2 + a_3 b_o - a_2 b_1 \quad . \tag{50}$$

Observe que as duas operações definidas acima são fechadas para o conjunto dos multivetores, ou seja, tanto a soma quanto o produto de dois multivetores geraram um multivetor. Portanto, o conjunto de multivetores dotados de operações de soma e produto acima definidos constitui uma álgebra não comutativa, denominada álgebra de Clifford - $\boldsymbol{Cl_2}$ (DORAN, 2002; LASENBY, 2003).

CAPÍTULO 2: MODELO COGNITIVISTA AUSUBELIANO E MAPAS CONCEITUAIS

2.1 Aprendizagem Significativa

David Ausubel propôs em meados de 1960 a sua Teoria da aprendizagem significativa, no qual procura explicar os mecanismos internos que ocorrem na mente humana com relação ao aprendizado e à estruturação do conhecimento. Ausubel na sua teoria concentrou-se numa questão que nenhum pesquisador até aquele momento tinha se preocupado que era a aprendizagem que ocorria na sala de aula. Ausubel acreditava na aprendizagem por retenção, no qual valorizava a aula do tipo expositiva que é de grande importância para o cotidiano acadêmico. Este foi o grande foco da sua pesquisa.

Neste sentido, o maior legado deixado por Ausubel é justamente o de técnicas e reflexões acerca da aula do tipo "tradicional", o enfoque, o cuidado e o trabalho de ideais que um professor deveria ter neste contexto, no sentido de propiciar o melhor aprendizado possível para seus alunos. Uma de suas contribuições foi a distinção das diferenças entre a aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica. Em sua teoria existem três requisitos básicos para que ocorra uma aprendizagem significativa por parte do aluno: a oferta de um novo conhecimento estruturado de maneira lógica; a existência de conhecimentos na estrutura cognitiva que possibilite a sua conexão com o novo conhecimento; a atitude explicita de apreender e conectar o seu conhecimento com aquela que pretende absorver.

Segundo Ausubel, os principais conceitos relativos à aprendizagem se articulam esquematicamente da seguinte forma:

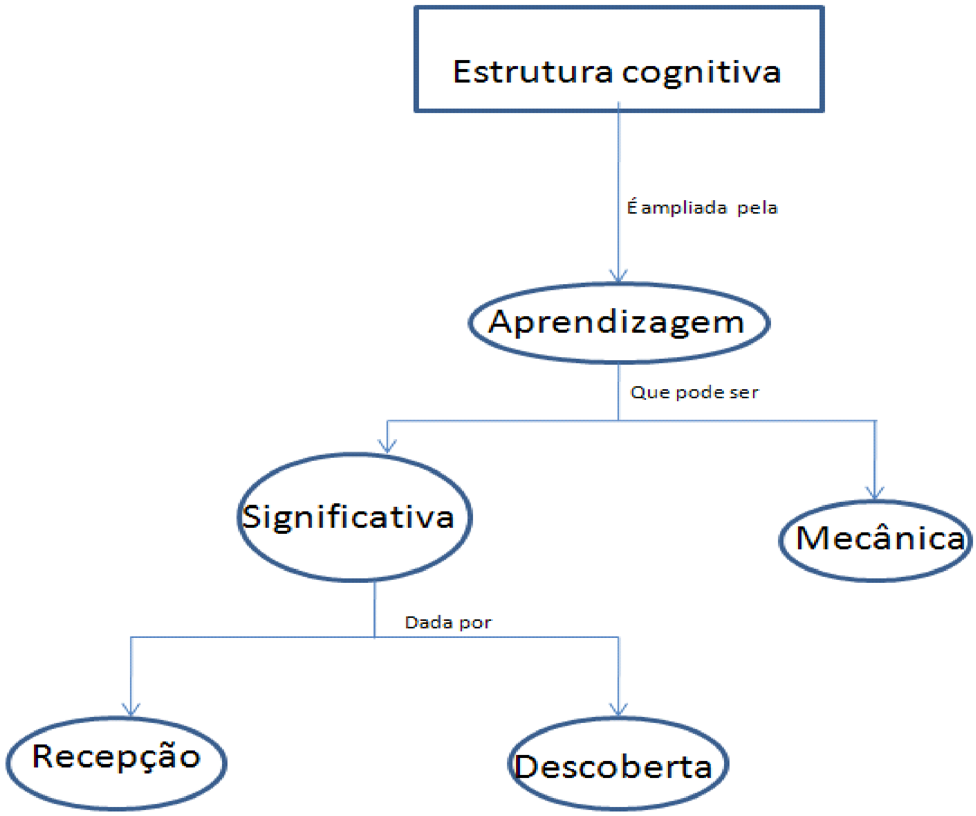


Figura 23: Representação do mapa conceitual sobre aprendizagem

A estrutura cognitiva para Ausubel, é o conteúdo total e organizado de idéias de um dado indivíduo; ou, no contexto da aprendizagem de certos assuntos, refere-se ao conteúdo e organização de suas idéias naquela área particular de conhecimento. Ou seja, a ênfase que se dá é na aquisição, armazenamento e organização das idéias no cérebro do indivíduo. Com isso, pode-se perceber que para Ausubel a estrutura cognitiva de cada indivíduo é extremamente organizada e hierarquizada, no sentido que as várias idéias se encadeiam de acordo com a relação que se estabelece entre elas. Além disso, é nesta estrutura que se ancoram e se reordenam novos conceitos e idéias que o indivíduo vai progressivamente internalizando, isto é, aprendendo.

Para David Ausubel, a aprendizagem consiste na modificação da estrutura cognitiva, através da incorporação de novas idéias a ela. Dependendo do tipo de relação que se tem entre as idéias já existentes "conhecimentos prévios" nesta estrutura e as novas que se estão internalizando, pode ocorrer um aprendizado que varia do mecânico ao significativo.

Com isso, a aprendizagem significativa tem lugar quando as novas idéias vão se relacionando de forma não-arbitrária e substantiva com as idéias já existentes. Por "não-arbitrariedade entende-se que existe uma relação lógica e explícita entre a nova idéia e alguma(s) outra(s) já existente(s) na estrutura cognitiva do indivíduo. Assim, por exemplo, entender o conceito de velocidade só será de fato significativo para o indivíduo, se de alguma forma houver uma clara relação entre este, e o conceito de espaço e tempo.

Além de não ser arbitrária a aprendizagem, para ser significativa precisa ser também substantiva, ou seja, uma vez aprendido determinado conteúdo desta forma, o indivíduo conseguirá explicá-lo com as suas próprias palavras. Assim, um mesmo conceito pode ser expresso em linguagem sinônima e transmitir o mesmo significado.

Como exemplo, quando o aluno aprende significativamente que o conceito de velocidade é diferente do conceito de aceleração. Pois a velocidade é a variação do vetor posição de uma partícula com relação ao tempo, e a aceleração a variação do vetor velocidade da partícula com relação ao tempo. Portanto, ele deverá ser capaz de expressar isso de diversas formas, como: “A velocidade é a rapidez com que o vetor posição varia e que a aceleração é a rapidez com que o vetor velocidade varia”; “um corpo pode ter velocidade mesmo que não tenha aceleração, ou que um corpo pode estar muito acelerado e com pouca velocidade” ou que pode ter muita velocidade e pouca aceleração. De forma substantiva ele aprendeu o conceito de vetor e sua aplicação nos conceitos de espaço e tempo. A “substantividade” do aprendizado significa, então, que o aluno apreendeu o sentido, o significado daquilo que se ensinou, de modo que pode expressar este significado com as mais diversas palavras e sentidos.

Para Ausubel, o objetivo maior do ensino acadêmico é que todas as idéias sejam aprendidas de forma significativa. Isso porque é somente deste jeito que estas novas idéias serão “armazenadas” por bastante tempo e de maneira estável. Além disso, a aprendizagem significativa permite ao aluno o uso do novo conceito de forma inédita, independentemente do contexto em que este conteúdo foi primeiramente aprendido.

Como podemos observar, não podemos falar da aprendizagem significativa sem comentar a mecânica, pois é o extremo oposto e que está muito presente em nossas escolas. Neste caso, as novas idéias não se relacionam de forma lógica e clara com nenhuma idéia já existente na estrutura cognitiva do sujeito, são simplesmente “decoradas”. Desta maneira, elas são armazenadas de forma arbitrária, o que não garante flexibilidade no seu uso, nem longevidade. Como conseqüência, não ocorre à flexibilidade (o aprendizado não é substantivo), o indivíduo não é capaz de expressar o novo conteúdo com linguagem diferente daquela com que este material foi primeiramente aprendido. De fato, ele não aprendeu o significado, o sentido do novo material, mas simplesmente decorou a seqüência de palavras que o definia. Por conta disso, ele será incapaz de utilizar este conhecimento em contexto diferente daquele no qual fora primeiramente apresentado a estes conceitos e idéias.

De acordo com a teoria cognitivista de David. Ausubel a Aprendizagem Significativa pode ser efetivada por dois processos:

I - Por descoberta

Na Descoberta o aprendiz de forma solitária efetiva o processo de aprendizagem, descobrindo alguma relação, mecanismos ou lei como pode acontecer na sua atividade diária de tarefas escolares. A descoberta torna-se significativa se a nova informação interagir de forma coesa com as idéias importantes "já existentes" presentes na estrutura cognitiva dele.

II – Por Recepção

Na Recepção o aprendiz recebe a informação previamente preparada com potencial significativo pelo professor, como exemplo, uma aula expositiva bem estruturada, e neste processo o aluno atuar no sentido de relacionar as informações a sua estrutura cognitiva.

Contudo, é importante ratificar que, apesar de Ausubel em sua teoria de aprendizagem ter enfatizado a soberania da aprendizagem significativa, ele compreendia que no processo de ensino-aprendizagem existem circunstâncias em que a aprendizagem mecânica era inevitável. No ensino de História das ciências, por exemplo, conhecer e entender os eventos que se sucederam no surgimento e desenvolvimento da mecânica clássica requer, muitas vezes, que se saibam os nomes dos principais filósofos e as diversas datas.

2.1.1 Fatores substantivos da facilitação pedagógica

São fatores que facilitam a ação pedagógica, esta relacionada com seleção dos temas mais relevantes que são trabalhados com os alunos. Com isso, é importante selecionar as idéias básicas para não sobrecarregar o aluno de informações desnecessárias, dificultando a aquisição de uma estrutura cognitiva adequada. (MOREIRA e MASINI, 2001).

Ausubel acredita que a aprendizagem por subordinação é mais fácil para o ser humano do que a por superordenação. Ou seja, ele acredita que os conceitos devem ser sempre estudados a partir de idéias mais gerais para as mais específicas. Por conseguinte, o que se propõe é que se ofereça ao aluno preferencialmente os conceitos ditos mais inclusivos, ou seja, os conceitos mais amplos, nos quais os conceitos mais restritos, quando forem trabalhados, poderão se ligar de maneira subordinada. Quando a aprendizagem se dá por subordinação os conceitos âncoras necessários para propiciar a aprendizagem significativa são denominados de subsunçores.

Neste sentido, quando da seleção dos aspectos mais relevantes de um determinado conteúdo, devem ser privilegiados os conceitos ou idéias mais gerais, que poderão servir como âncora para futuras aprendizagens. Se for feito de outra forma, optando-se por conceitos mais específicos, pode acontecer que eles não sejam potencialmente significativos para os alunos, uma vez que estariam faltando idéias de esteio mais relevantes, que estão justamente associadas com os conceitos mais amplos ou inclusivos.

Como princípios programáticos para o seqüenciamento do conteúdo de ensino, Ausubel propõe a diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.

Diferenciação Progressiva

A diferenciação progressiva corresponde exatamente ao princípio segundo o qual as idéias mais gerais e inclusivas são apresentadas antes, criando as condições necessárias para a posterior diferenciação das mesmas, conformando uma tendência natural da consciência humana quando exposta a um campo de conhecimento inteiramente novo. Isso Ausubel justifica através de dois motivos:

- É mais fácil para o ser humano compreender os aspectos diferenciados de um todo [mais inclusivo] previamente aprendido, do que formular o todo mais inclusivo a partir das suas partes diferenciadas previamente aprendidas. Ou seja, generalizar a partir de conceitos mais específicos é mais difícil do que aprender conceitos particulares a partir de um mais geral.

- Este tipo de hierarquia é a que acontece na mente de cada pessoa: as idéias mais gerais ou mais inclusivas ocupam o topo da estrutura cognitiva, e têm subordinadas a si, idéias progressivamente mais específicas, ou seja, menos inclusivas.

Reconciliação Integrativa

Já a reconciliação integrativa, trata-se do modo como Ausubel também descreve as relações buscando apontar similaridades e diferenças entre idéias, com vistas a contornar discrepâncias reais ou imaginárias (MOREIRA e MASINI, 2001). Ou seja, gradualmente os conceitos vão se especializando e, concomitantemente, estabelecendo relações que produzem significados que configura uma situação típica de aprendizagem significativa. Assim, a reconciliação integrativa consiste, basicamente, no delineamento explícito das relações entre idéias, de assinalar semelhanças e diferenças relevantes entre as mesmas, e de reconciliar inconsistências reais ou aparentes.

No trabalho pedagógico, a reconciliação integrativa deve acontecer em dois contextos: na preparação do material instrucional, e no relacionamento das idéias nele contidas com a estrutura cognitiva do aluno. Na preparação e no uso do material instrucional, alguns cuidados devem ser tomados como, por exemplo:

- Evitar uso de palavras distintas para representar os conceitos equivalentes, pois podem gerar confusão no aluno, motivando-o a aprender de forma mecânica. Usando o caso da própria teoria ausubeliana, se os termos subsunçor, idéia âncora, idéia de esteio, idéia relevante, idéia mais inclusiva, idéia mais geral e idéia mais ampla não forem devidamente esclarecidos, pode-se acreditar que se referem a conceitos distintos quando na verdade, são sinônimos.
- Na apresentação dos vários tópicos constitutivos de um mesmo material, se deve explicitar eventuais relações existentes entre eles, visto que parte da aprendizagem só será de fato conseguida caso estas relações sejam percebidas.
- Evidenciar as diferenças existentes entre conceitos aparentemente semelhantes, a fim de que eles não sejam retidos como se fossem idênticos.

Já, no que diz respeito ao relacionamento das novas idéias apresentadas e aquelas já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, alguns cuidados seriam:

- Evidenciar eventuais diferenças entre as idéias já estabelecidas e aquelas que se está aprendendo, a fim de que, caso haja alguma analogia entre elas, isso não leve os alunos a reduzirem uma à outra ou a confundirem ambas.
- Esclarecer eventuais contradições (aparentes ou reais) entre os conceitos que estão sendo aprendidos e aqueles que já se sabe. Caso isso não seja feito, pode acontecer de o aluno recusar o novo aprendizado, ou de retê-lo como algo isolado do anterior. Assim, pode-se recusar o princípio da diferenciação progressiva por se alegar (corretamente) que é impraticável apresentar o conceito mais abrangente de

polígonos antes do conceito menos abrangente de triângulo. No entanto, se este princípio for analisado dentro do conjunto limitado dos conceitos relativos a uma disciplina a eventual contradição desaparece.

Organizadores Prévios

Uma vez feita à seleção, o seqüenciamento e a preparação dos conteúdos mais pertinentes do curso; avaliando posse, clareza e estabilidade das necessárias idéias de esteio para se trabalhar significativamente este novo material, Ausubel propõe uma fase seguinte, que seria a da preparação dos organizadores prévios, em função destes três fatores mencionados. Segundo Ausubel, organizadores prévios são materiais introdutórios destinados a facilitar a aprendizagem de tópicos específicos ou conjunto de idéias consistentemente relacionadas entre si.

A finalidade de um organizador prévio é prover idéias de esteio, ou evidenciá-las na estrutura cognitiva do aluno, de modo a potencializar ao estudante uma aprendizagem significativa. Portanto, ele não deve ser confundido com introdução ou resumo, uma vez que sua função não é de fornecer apenas uma visão geral sobre o que se vai estudar, ou apontar os pontos principais do conteúdo em questão, mas de potencializar a criação de relações não-arbitrárias e substantivas entre os novos conceitos e as idéias que lhes servirão de âncora na estrutura cognitiva do aluno através da "inserção", ou da explicitação destas idéias.

A vantagem do organizador prévio é permitir ao aluno o aproveitamento das características de um subsunçor, ou seja:

a) Identificar o conteúdo relevante na estrutura cognitiva e explicar a relevância deste conteúdo para a aprendizagem do novo material;
b) Dar uma visão geral do material em um nível mais alto de abstração, salientando as relações importantes;
c) Prover elementos organizacionais inclusivos, que levem em consideração de forma mais eficiente e ponham em melhor destaque o conteúdo específico do novo material (MOREIRA e MASINI, 2001).

2.2 Mapas Conceituais

Os mapas conceituais representam à organização e representação do conhecimento. Por exemplo, para organizar os materiais didáticos pode-se representá-los em gráficos que visam expressar a relação entre palavras que formam um determinado conceito ou as relações entre conceitos que compõem significados. Estes diagramas constituem uma técnica desenvolvida por *Joseph Novak* e seus colaboradores, a partir de 1972 na Universidade Cornell nos Estados Unidos e que se amoldam substancialmente à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, que, inclusive prefaciando a edição mais recente de sua obra, faz referência a esse ”mapeamento cognitivo” como um esforço sem precedentes da parte do seu idealizador (MOREIRA; MASINI, 2001).

Do ponto de vista de sua estruturação, os mapas conceituais apresentam-se bastante flexíveis, mas embora Moreira reitere a inexistência de regras fixas para delineá-los, descreve também alguns aspectos que devem ser observados na elaboração dos mesmos. O primeiro deles aponta no sentido de que geralmente tais mapas apresentam uma estrutura hierárquica, na qual os conceitos são organizados a partir dos mais amplos, colocados na parte superior, passando pelos intermediários, até chegar aos mais específicos situados na parte inferior. Essa formatação, bem longe de representar relações de poder ou de atribuições comuns aos organogramas e fluxogramas usuais, sugere na teoria ausubeliana, a inequívoca observância aos princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa. Na teoria ausubeliana, a construção do conhecimento corresponde a uma atividade cognitiva composta por etapas organizadas de maneira seqüencial e hierárquica, interrelacionando-se desde a apreensão da nova informação até sua sistematização cerebral.

A fundamentação teórica que permeia a constituição de um mapa conceitual, por inferência, leva a que os critérios concernentes ao grau de generalidade e exclusividade que identifiquem as circunstâncias às quais o mesmo se destina. Isto significa dizer que, dependendo de sua abrangência ou especificidade, os mapas conceituais podem ser aplicáveis especificamente ao conteúdo de uma aula, ao planejamento de um curso de curto prazo, bem como a uma ação mais ousada, em termos de desenvolvimento de um programa educacional mais complexo (NOVAK, 2000).

Contudo, a principal propriedade de um mapa conceitual está na possibilidade que o individuo tem de exteriorizar seus conhecimentos ao construir o próprio mapa, com isso compatibilizando a formação de uma seqüência lógica de *conceitos subsunçores* e de ordenação das novas idéias do material didático capazes de direcionar significativamente a aprendizagem. A pragmática dos mapas de conceitos converte-os em instrumentos indispensáveis para: 1) identificar a estrutura de significados no contexto da matéria de ensino; 2) identificar os subsunçores necessários para a aprendizagem significativa da matéria de ensino; 3) identificar os subsunçores preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz; 4) organizar seqüencialmente o conteúdo e selecionar materiais curriculares usando as idéias de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa como princípios programáticos; 5) ensinar usando organizadores prévios, na intenção de criar pontes entre os significados que o aprendiz tem e aqueles que precisa ter para aprender significativamente a matéria de ensino; bem como para o estabelecimento de relações explícitas entre o novo conhecimento e aquele já existente e adequado para dar significados aos novos materiais de aprendizagem (MOREIRA; MASINI, 2001).

CAPÍTULO 3: CONCEITOS CINEMÁTICOS EM MECÂNICA NEWTONIANA

3.1 A Relatividade do Movimento

Quando você está sentado na cadeira de um ônibus indo em direção a sua escola e visualiza as casas, as árvores e os postes da rede elétrica, você tem plena convicção de que está se movimentando com o ônibus, e que as casas, as árvores e os postes da rede elétrica estão parados. Isto acontece porque os seus "sentidos" estão preparados para perceber o movimento a partir do ambiente de onde você vem tendo suas experiências de observação desde criança, ou seja, a superfície terrestre, existindo uma tendência natural de tomar como referência para o movimento elementos que se encontram fixos nesta superfície. Você é levado a crer que tudo que está fixo nesta superfície está parado e tudo que muda de posição está em movimento. Mesmo estando dentro do ônibus que está mudando sua posição na superfície terrestre, devido ao contato visual com o que está fora, você toma como referência de observação o que seus sentidos estabelecem como "parados", ou seja, árvores, casas e postes concluindo assim que você está parado e o ônibus é que está em movimento. Mas o que de fato está parado ou em movimento?

Imagine agora outra experiência em que você está neste mesmo ônibus, parado numa estação, e observa os objetos fixos no interior deste, como cadeiras, lâmpadas no teto, motorista, passageiro, cobrador; a sua convicção é de que o ônibus está em "Repouso". Se o mesmo começar a se afastar da estação lentamente e em linha reta, ou seja, sem variação brusca de movimento, e você observando apenas o interior do ônibus, dirá que nada se modifica, tudo ali permanece da mesma forma, e você continua com a convicção de que o ônibus está em "Repouso". Entretanto se você fixar o olhar pela janela e observar a estação se afastando, terá plenas convicções de que o ônibus está em "Movimento". Assim, podemos concluir que as diferentes experiências observacionais do fenômeno do movimento estão relacionadas ao fato deste ser intrinsecamente relativo (GALILEU, 1988).

3.2 Espaço, Posição e Deslocamento

Intuitivamente a percepção do movimento nos induz a noção de dimensão do espaço físico intuitivo no qual temos nossas experiências diárias. Este espaço pode ser caracterizado com as noções de altura, largura e profundidade que são as dimensões relativas às mudanças de posição de um objeto em movimento. Dessa forma, podemos traçar três eixos coordenados, tendo como ponto privilegiado, a origem dos eixos no observador, conforme a Figura 24.

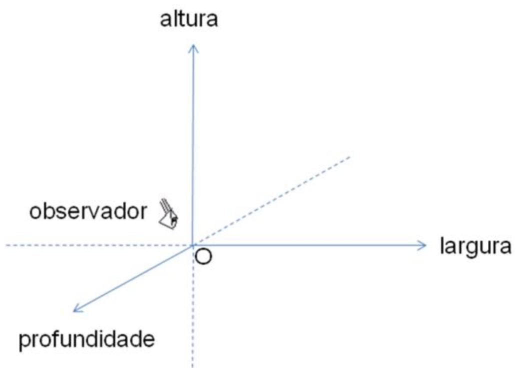


Figura 24: Representação geométrica do espaço físico intuitivo com a origem dos eixos no observador

Os eixos representantes da largura, altura e profundidade denotaremos por x, y e z, com o observador situado no ponto de coordenada (0,0,0).

Para localizar um objeto neste espaço, podemos usar a estrutura dos vetores visto no capitulo 2 desta pesquisa, logo o ponto O é um ponto privilegiado do espaço, e qualquer vetor nos V^3 pode ser representado como combinação de vetores sobre os eixo x, y e z e tendo origem no ponto O.

Nesta pesquisa faremos uma descrição dos aspectos importantes da cinemática sem a necessidade de uma descrição do movimento em três dimensões. A partir de agora, vamos descrever o movimento em duas dimensões. Tomando como ponto de partida a coordenada (0,0) e o objeto “P” localizado no plano xy de coordenada (x_{Pi}, y_{Pi}), o vetor com origem em (0,0) e extremidade em (x_{Pi}, y_{Pi}) é o vetor ligado que representa a posição do objeto. Uma vez localizado o objeto P neste espaço que chamaremos de V^2, podemos escrever as coordenadas do vetor ligado como $\overrightarrow{OP} = (X_{Pi} - 0,\ Y_{Pi} - 0,)$. A classe de equivalência desse vetor ligado será representada por $\vec{P_i}$ e chamaremos de vetor posição no inicio da observação, ou seja, o vetor livre que representa a posição inicial do objeto, que é mostrado conforme a Figura 25.

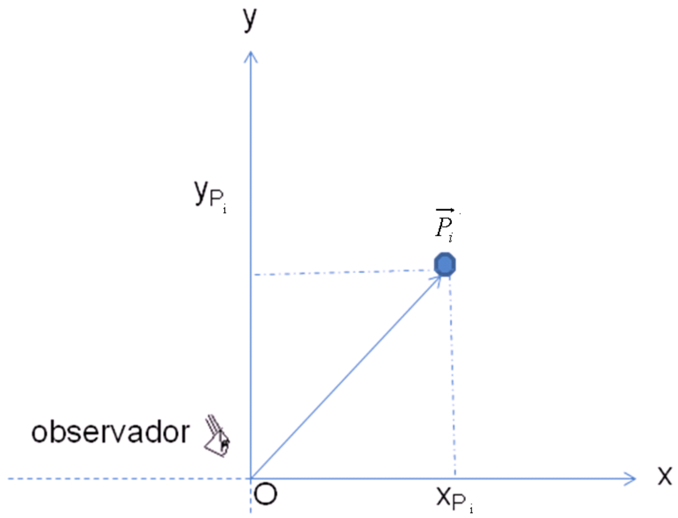


Figura 25: Representação geométrica do vetor posição inicial $\vec{P_i}$.

Se o objeto muda a posição em relação ao observador, esta nova posição será representada pelo vetor posição final de coordenadas $\vec{P_f} = (X_{Pf} - 0, Y_{Pf} - 0,)$ conforme a Figura 26.

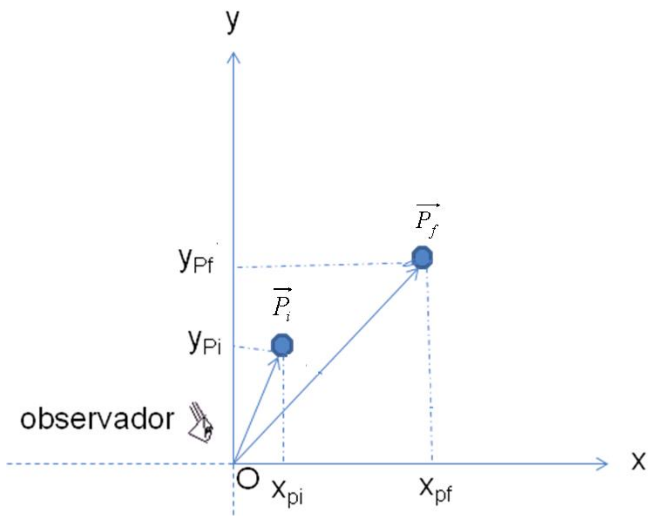


Figura 26: Representação geométrica dos vetores posições inicial $\vec{P_i}$ e final $\vec{P_f}$.

A variação da posição é dada pela diferença entre as posições $\vec{P_f}$ e $\vec{P_i}$ assim,

$$\vec{P}_f - \vec{P_i} = (X_{Pf} - X_{Pi}, Y_{Pf} - Y_{Pi}) . \tag{51}$$

Esta variação é por definição, o deslocamento do objeto, e chamaremos de

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i\,. \tag{52}$$

Da equação 52, podemos ver que

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i + \Delta\vec{P}\,. \qquad (53).$$

A Figura 27 mostra a obtenção geométrica do vetor deslocamento $\Delta\vec{P}$ usando a regra do paralelogramo, visto no capítulo 2,

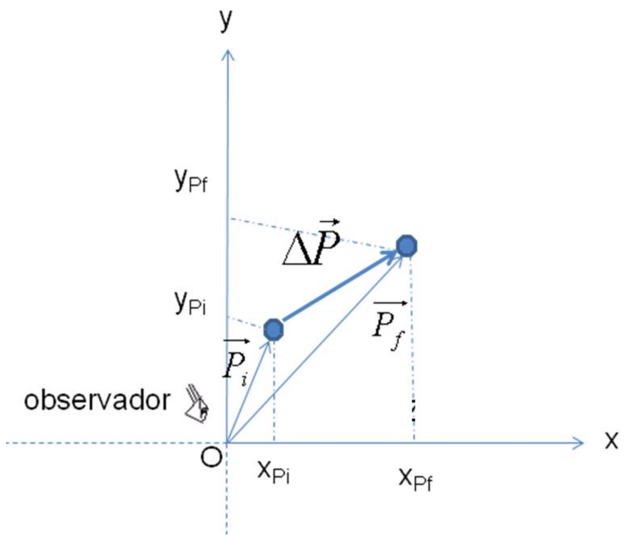


Figura 27: Representação geométrica do vetor deslocamento $\Delta\vec{P}$ da partícula.

O vetor deslocamento do objeto tem origem na posição inicial e extremidade na posição final, ou seja, origem no ponto de partida e extremidade no ponto de destino.

Ao longo do movimento, a junção das posições sucessivas do objeto $\vec{P}'$, $\vec{P}''$, $\vec{P}'''$ ... em relação ao observador, é chamado de trajetória, e está representada na figura 28.

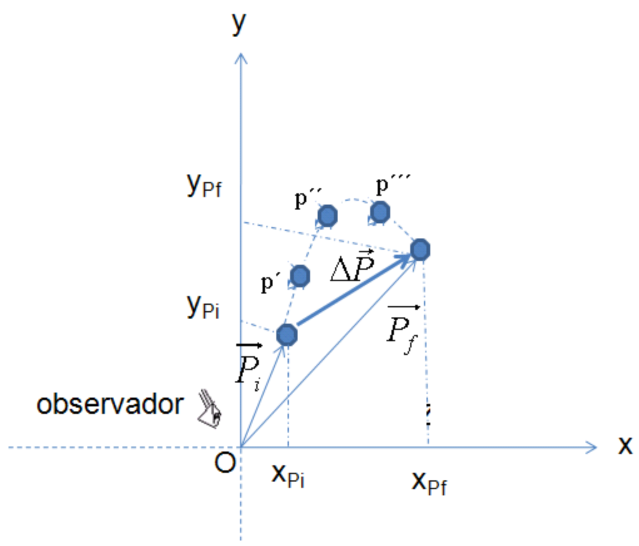


Figura 28: Representação da trajetória da partícula.

3.3 Instante de tempo e Intervalo de Tempo

A sucessão de posições ocupadas por uma partícula segue uma ordenação natural de eventos, e o transcorrer dessa ordenação chamaremos de tempo. Podemos associar cada posição ocupada a um instante de tempo representado por *t*, dessa forma para $\vec{P}^{\prime}$ teremos associado um valor $t^{\prime}$, para $\vec{P}^{\prime\prime}$, $t^{\prime\prime}$, $\vec{P}^{\prime\prime\prime}$, $t^{\prime\prime\prime}$ e assim sucessivamente. Os instantes $t^{\prime}$, $t^{\prime\prime}$ $t^{\prime\prime\prime}$... podem ser modelados matematicamente pelo conjunto dos números reais, já que o mesmo satisfaz uma relação de ordem. A diferença entre um instante e outro sucessor a ele, é definido como intervalo de tempo, denotado por

$$\Delta t = t^{\prime\prime} - t^{\prime} \tag{54}$$

3.4 Velocidade Linear e Angular

A velocidade é compreendida como uma taxa de variação de uma grandeza física no tempo. Podemos associar ao movimento de uma partícula num plano, duas velocidades:

I) Velocidade Linear

A velocidade com que uma partícula muda sua posição ao longo de uma linha e dada pela taxa de variação da posição de uma partícula $\Delta\vec{P}$ em relação ao referencial no intervalo de tempo Δt. Para esta variação da posição, quanto maior for o intervalo de tempo menor será a velocidade linear com que a partícula muda sua posição, dessa forma podemos concluir que a velocidade linear é inversamente proporcional ao intervalo de tempo. Podemos modelar matematicamente esta velocidade pela seguinte equação:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \quad . \tag{55}$$

A velocidade linear é a grandeza fundamental que representa o movimento relativo, ou seja, depende do referencial. Dessa forma, se a velocidade for não-nula a partícula se encontra em *movimento*, e se for nula em *repouso relativo.*

A modelação matemática da velocidade linear é verificada pelo *produto de um escalar por um vetor* como visto no capítulo 1.3, ou seja, o produto de um vetor $\Delta\vec{P}$ por um número ($\frac{1}{\Delta t}$).

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{\Delta t}\right).\Delta\vec{P} \tag{56}$$

Como o intervalo de tempo é dado pela diferença entre o instante de observação posterior e o instante anterior a ele, temos que $\Delta t > 0$, ou seja, um escalar positivo. Assim usando as propriedades do *produto por escalar,* podemos concluir que o vetor velocidade linear tem sempre a mesma orientação do vetor deslocamento $\Delta\vec{P}$. Conforme a Figura 29

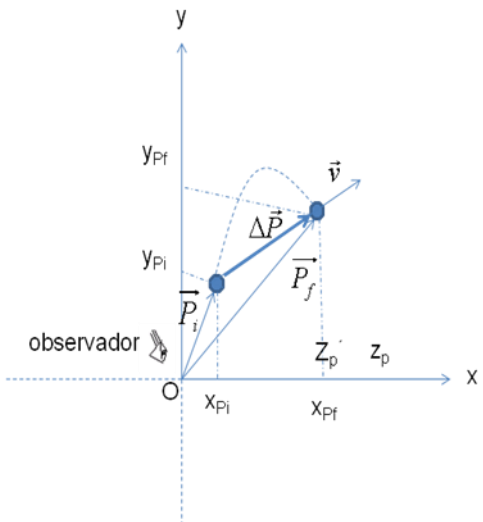


Figura 29: Representação da velocidade $\vec{v}$ da partícula.

Fazendo uma análise de dois instantes infinitamente próximos podemos ver que o vetor velocidade linear é tangente à curva que representa a trajetória da partícula (ALONSO; FINN, 1972), ver figura 30.

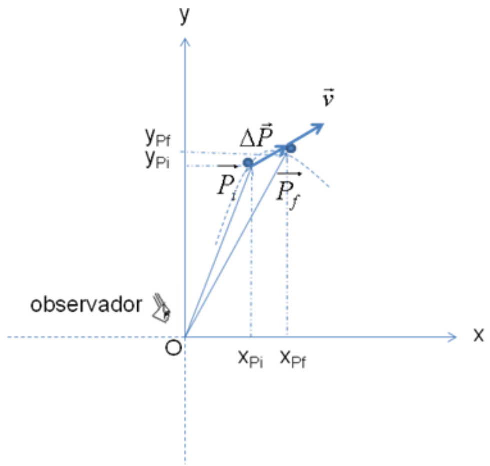


Figura 30: Representação da velocidade $\vec{v}$ no instante de observação.

Dessa forma, podemos dizer que a velocidade linear da partícula no instante de qualquer observação é tangencial.

A Figura 31 representa a velocidade linear da partícula em três instantes diferentes,

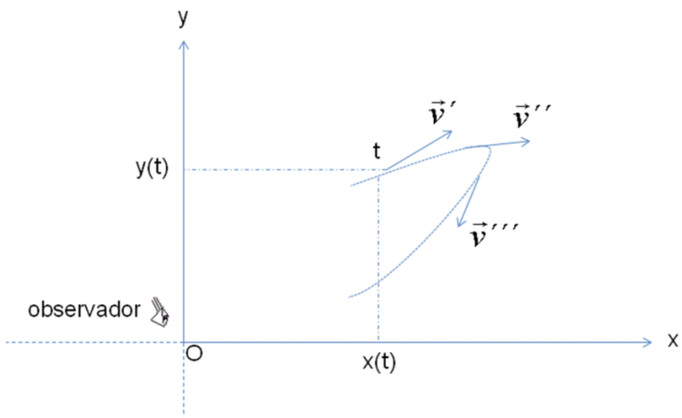


Figura 31: Representação da velocidade $\vec{v}$ em três instantes de observação

II) Velocidade angular

Para uma partícula em movimento num plano podemos relacionar a direção do seu vetor posição a um ângulo de referência θ. Este ângulo tem a liberdade de "crescer" no sentido horário ou anti-horário. Quando uma partícula varia o seu vetor posição, este pode sofrer uma mudança de direção, para esta mudança de direção associamos uma variação do ângulo $\Delta\theta$ conforme a Figura 32.

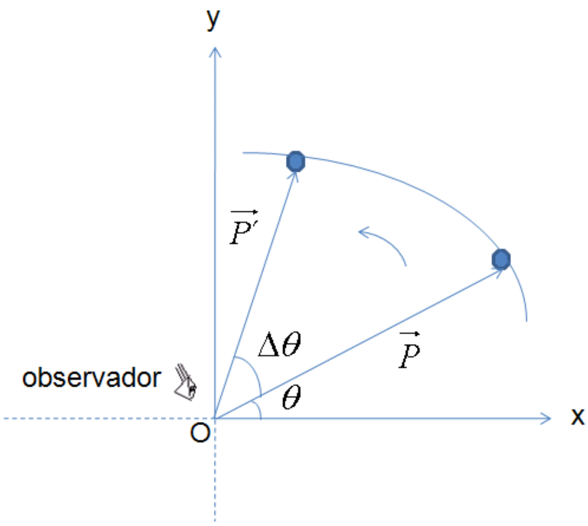


Figura 32: Representação da variação angular $\Delta\theta$.

A taxa da variação angular $\Delta\theta$ no tempo é chamada de velocidade angular, ou seja, a velocidade angular mostra a rapidez com que o ângulo θ, e conseqüentemente a direção da posição de uma partícula se dá (ALONSO e FINN, 1972). Denotaremos a velocidade angular por ω.

A velocidade ω dada pela a razão:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{57}$$

que é a taxa de variação do ângulo no tempo.

Vamos mostrar que a velocidade angular poder ser representada por um vetor denotada por $\vec{\omega}$. A Figura 33 mostra uma partícula se movimentando num plano β com velocidade linear $\vec{v}$. É fácil ver que o ângulo central θ e a localização da partícula na trajetória estão ligados pelo vetor posição $\vec{p}$. Durante o movimento, tanto o ângulo quanto à posição estão variando no tempo simultaneamente, assim podemos dizer que tanto a rapidez com que o ângulo varia, ou seja, a velocidade angular $\vec{\omega}$ quanto à rapidez com que a posição varia, ou seja, a velocidade linear $\vec{v}$, estão intimamente ligadas pelo vetor posição $\vec{p}$.

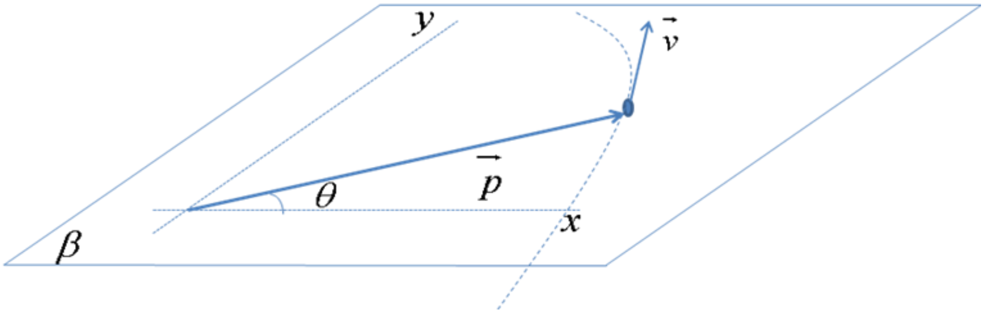


Figura 33: Representação do movimento de uma partícula no plano β com o vetor posição relacionado ao ângulo.

Sabemos que vetor velocidade $\vec{v}$ tem duas componentes, uma paralela e outra perpendicular ao vetor posição. A componente paralela não faz rotação com a origem, pois é um puramente linear, dessa forma, a componente perpendicular é que faz a tarefa da rotação do vetor posição (ALONSO e FINN, 1972). As componentes do vetor velocidade estão representadas na Figura 34.

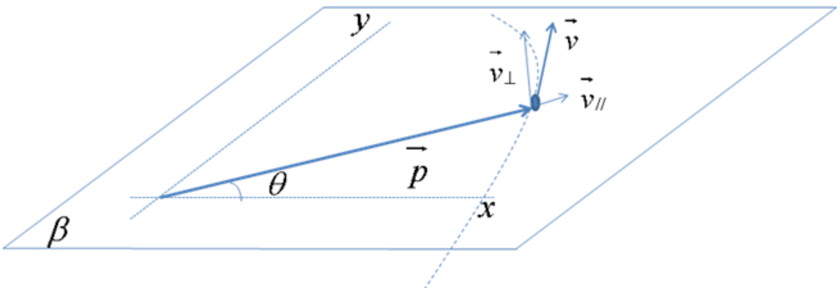


Figura 34: Representação das componentes da velocidade da partícula em movimento no plano β.

Na Figura 35, veja que a magnitude do produto vetorial $\vec{p} \times \vec{v}$ representa a área do palalerogramo cujos dois são os vetores $\vec{p}$ e $\vec{v}$.

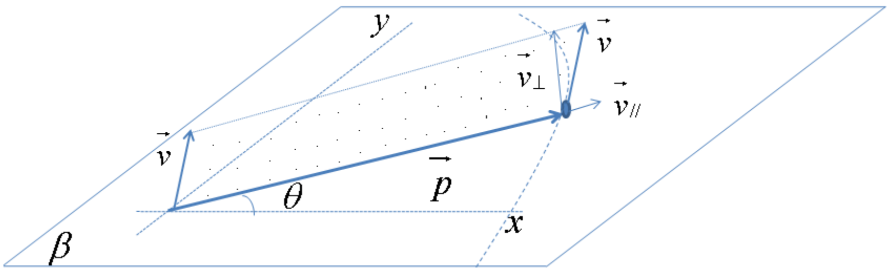


Figura 35: Representação da área dada como magnitude do produto vetorial $\vec{p} \times \vec{v}$

dividindo esta área pela magnitude de $\vec{p}$ temos a altura deste paralelogramo. Esta altura é igual a magnitude da componente $\vec{v}_\perp$ que será denotada por:

$$|v_\perp| = \frac{|\vec{p}\times\vec{v}|}{|\vec{p}|} \quad . \tag{58}$$

Como a velocidade angular $\vec{\varpi}$ está intimamente ligada a velocidade $\vec{v}_\perp$ pelo vetor posição $\vec{p}$. Podemos representá-la em magnitude como a seguinte razão:

$$|\vec{\varpi}| = \frac{|\vec{v}_\perp|}{|\vec{p}|} \quad . \tag{59}$$

Relacionando as equações (58) e (59) temos que:

$$|\vec{\varpi}| = \frac{|\vec{p}\times\vec{v}|}{|\vec{p}|^2} \quad . \tag{60}$$

Veja que, a direção e o sentido do vetor $\vec{\varpi}$ depende da direção e o sentido do produto vetorial $\vec{p}\times\vec{v}$, dessa forma podemos escrever a velocidade angular como:

$$\vec{\varpi} = \frac{\vec{p}\times\vec{v}}{|\vec{p}|^2} \quad . \tag{61}$$

A Figura 36, mostra a representação geométrica do vetor $\vec{\varpi}$

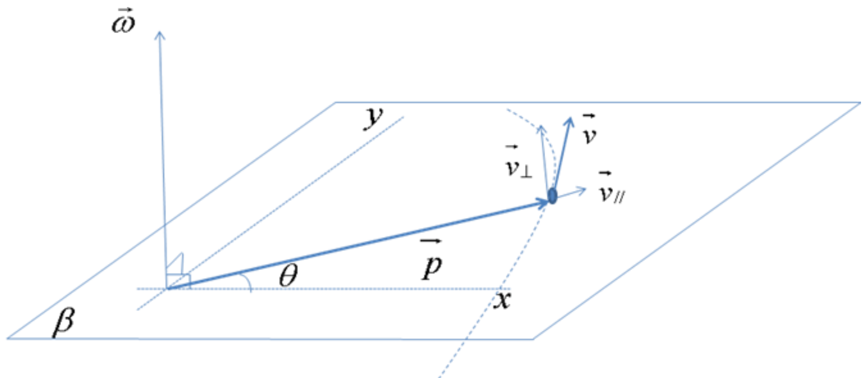


Figura 36: Representação geométrica do vetor velocidade angular $\vec{\varpi}$ da partícula em movimento no plano β

Concluimos que a velocidade angular é modelada matemáticamente por um vetor que representa o processo de mudança de orientação da posição de uma partícula que ocorre em um instante de tempo. A Figura 37 mostra a representação desse vetor para uma partícula se movimentando no num plano β, com θ crescendo no sentido anti-horário:

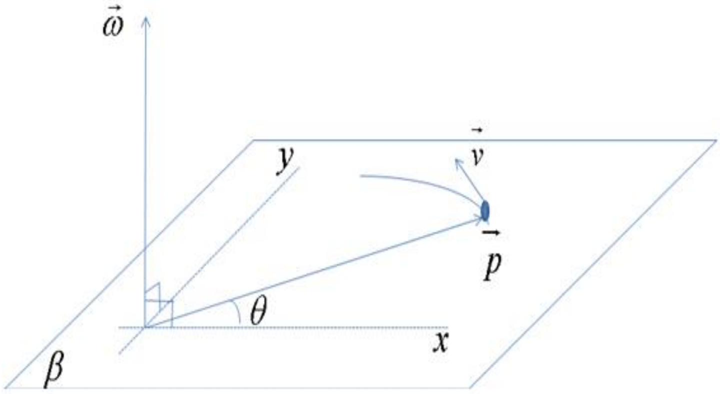


Figura 37: Representação geométrica do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ da partícula em movimento anti-horário no plano β

e a Figura 38 o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ de uma partícula se movimentando no num plano β, com θ crescendo no sentido horário:

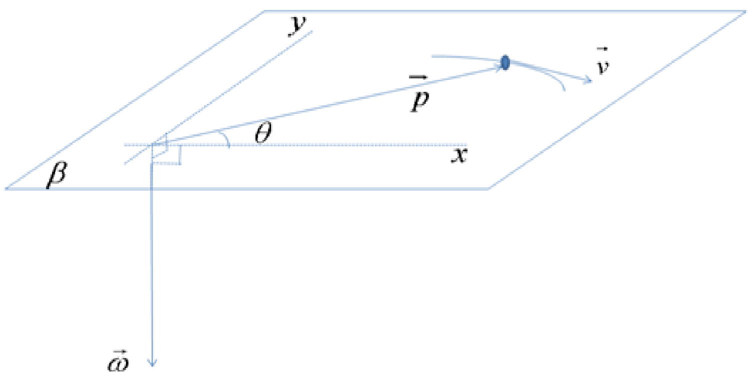


Figura 38: Representação geométrica do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ da partícula em movimento horário no plano β.

3.5 Aceleração Linear e Angular de uma Partícula

A aceleração de uma partícula é compreendida como a taxa de variação da sua velocidade no tempo. Podemos entender a aceleração como sendo a variação da "variação da posição de uma partícula no tempo". Dessa forma, se uma partícula estiver acelerada, ou seja, variando a sua velocidade, o vetor velocidade pode sofrer mudanças de magnitude e de orientação (NUSSENZVEIG, 1981). A Figura 39 ilustra estas mudanças.

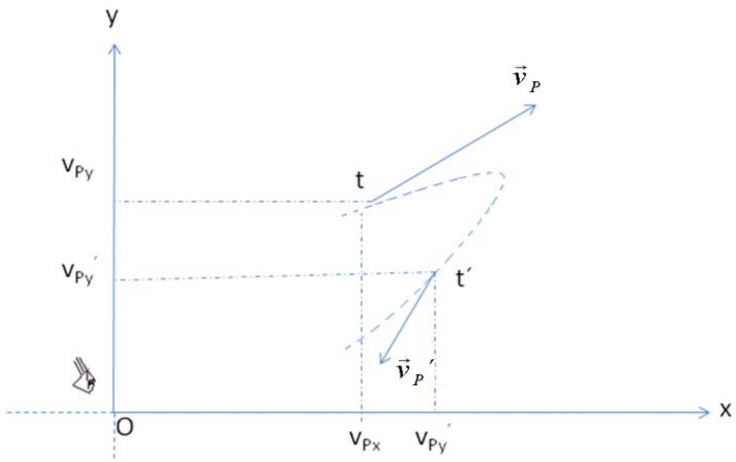


Figura 39: Representação do vetor velocidade em dois instantes de tempo

Quanto menor o intervalo de tempo observado na variação da velocidade, maior será a sua aceleração. Com isto, podemos concluir que a aceleração é inversamente proporcional ao intervalo de tempo. Podemos modelar matematicamente a aceleração por:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{62}$$

denotamos a variação da velocidade por $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{p'} - \vec{v}_p$ e o intervalo de tempo gasto nesta variação por $\Delta t = t' - t$.

Analisando a modelagem matemática da aceleração, concluímos que esta é um *produto por escalar,* então temos:

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{\Delta t}\right).\Delta\vec{v} \tag{63}$$

onde $\left(\frac{1}{\Delta t}\right)$ é o termo escalar, e $\Delta\vec{v}$ o vetor.

Dessa forma, o vetor aceleração tem a mesma orientação do vetor variação de velocidade $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{p'} - \vec{v}_p$.

Algebricamente é fácil ver que:

$$\vec{v}_{p'} = \Delta\vec{v} + \vec{v}_p \ . \tag{64}$$

A Figura 40 mostra a aceleração encontrada pela regra do paralelogramo, conforme visto no capítulo 1.

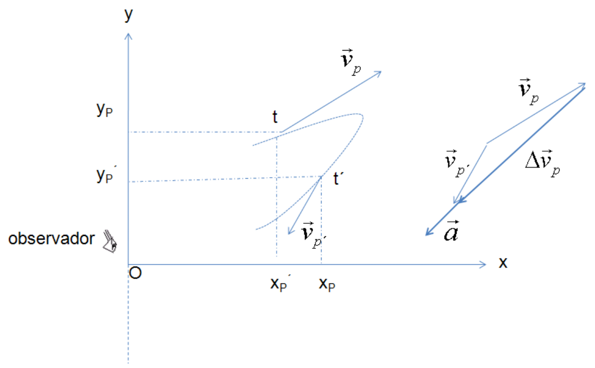


Figura 40: Representação do vetor aceleração encontrado pela regra do paralelogramo

O vetor aceleração $\vec{a}$ tem sua orientação apontada para a concavidade da trajetória.

Aceleração angular

A taxa de variação da velocidade angular $\vec{\omega}$ no tempo chamamos de aceleração angular, ou seja, a aceleração angular mostra a rapidez com que muda a velocidade angular de uma partícula em movimento (NUSSENZVEIG, 1981). Denotaremos a aceleração angular por $\vec{\alpha}$ pela razão:

$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \tag{65}$$

como é visto na equação 65, a aceleração $\vec{\alpha}$ tem sua modelação matemática dada por um *produto por escalar*, representada da seguinte forma:

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)\Delta\vec{\omega} \ . \tag{66}$$

Dessa forma, o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ tem a mesma orientação do vetor variação de velocidade angular $\Delta\vec{\omega}$. Assim, quando o módulo da velocidade angular $\vec{\omega}$ estiver aumentando com o tempo, o sentido da aceleração angular $\vec{\alpha}$ será o mesmo da velocidade angular $\vec{\omega}$ (ALONSO e FINN, 1972). Conforme é mostrado nas Figuras 41

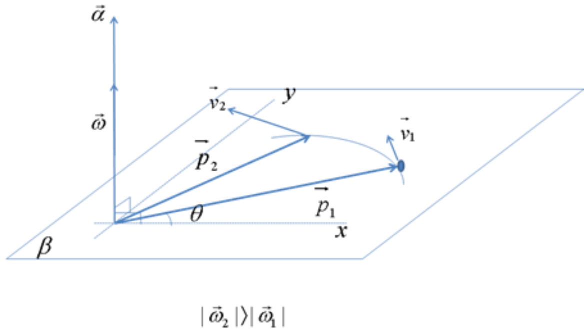


Figura 41: Representação do vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ para uma partícula em movimento no sentido anti-horário e com velocidade angular $\vec{\omega}$ aumentando em magnitude

e será contrário ao vetor velocidade angular $\vec{\omega}$, quando $\vec{\omega}$ estive diminuindo seu módulo no decorrer do tempo conforme mostra a Figura 42.

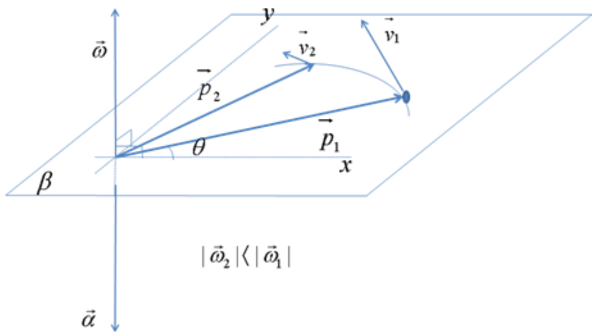


Figura 42: Representação do vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ para uma partícula em movimento no sentido horário e com velocidade angular $\vec{\omega}$ diminuindo em magnitude

Com isto concluimos os conceitos básicos da cinemática Newtoniana para uma partícula em movimento num plano.

CAPÍTULO 4: CONCEBENDO ERGONOMIAS COGNITIVAS PARA O ENSINO DA CINEMÁTICA EM MECÂNICA NEWTONIANA

Fizemos uma abordagem dos aspectos históricos de como as idéias sobre o cálculo geométrico foram surgindo até o desenvolvimento da álgebra Clifford. Vimos que um vetor é uma “espécie” de número com propriedades bastante interessantes para tratamento algébrico de objetos geométricos. A partir disso foi feita uma apresentação formal das suas propriedades e operações tais como: a soma, o produto por escalar e o produto de Clifford. Definimos os elementos orientados num plano, tais como: 0-vetor, 1-vetor, 2-vetor e o multivetor. Com estes elementos desenvolvemos uma álgebra de Clifford num plano a qual chamamos de Cl_2.

Abordamos os conceitos fundamentais da teoria cognitivista Ausubeliana tais como: estrutura cognitiva do aprendiz, aprendizagem mecânica e aprendizagens significativas por recepção e por descoberta. Exploramos os fatores substantivos da facilitação pedagógica tais como: diferenciação progressiva, reconciliação integrativa e organizadores prévios. Estes fatores se mostram como notáveis norteadores para a construção dos mapas conceituais desenvolvidos por Novak.

Fizemos uma explanação formal dos conceitos cinemáticos em mecânica Newtoniana tais como: relatividade do movimento, posição, deslocamento, tempo, velocidade linear e angular bem como suas acelerações. Mostramos com isso, os aspectos importantes na descrição do movimento de corpos no espaço físico intuitivo em duas dimensões.

É de fundamental importância neste trabalho desenvolver elementos didáticos que melhorem a aprendizagem relacionada aos conceitos básicos da cinemática. Dessa forma, há uma necessidade de criar estratégias que otimizem elementos como: a percepção, a atenção, o armazenamento e recuperação de memória. Neste sentido, a ergonomia cognitiva se mostra como área de grande relevância no que diz respeito ao processamento da informação por parte dos educandos.

Conceber uma ergonomia cognitiva, no sentido de se elaborar um material com potencial significativo, ou seja, que traga consigo uma organização dos conceitos cinemáticos de forma hieraquizada, bem como modelados com um aparato matemático de fácil aritculação com a Física, se faz necessário para um bom resultado no que diz respeito a aprendizagem significativa.

4.1 Mapa Conceitual: hierarquizando conceitos cinemáticos

De acordo com o que foi exposto acima, desenvolvemos um mapa conceitual de Novak, ilustrado na Figura 43 que servirá de orientador didático para construção de um material instrucional (o produto) contendo os elementos cinemáticos modelados com a álgebra de Clifford. Este mapa segue os princípios Ausubelianos para uma aprendizagem significativa dos conceitos abordados.

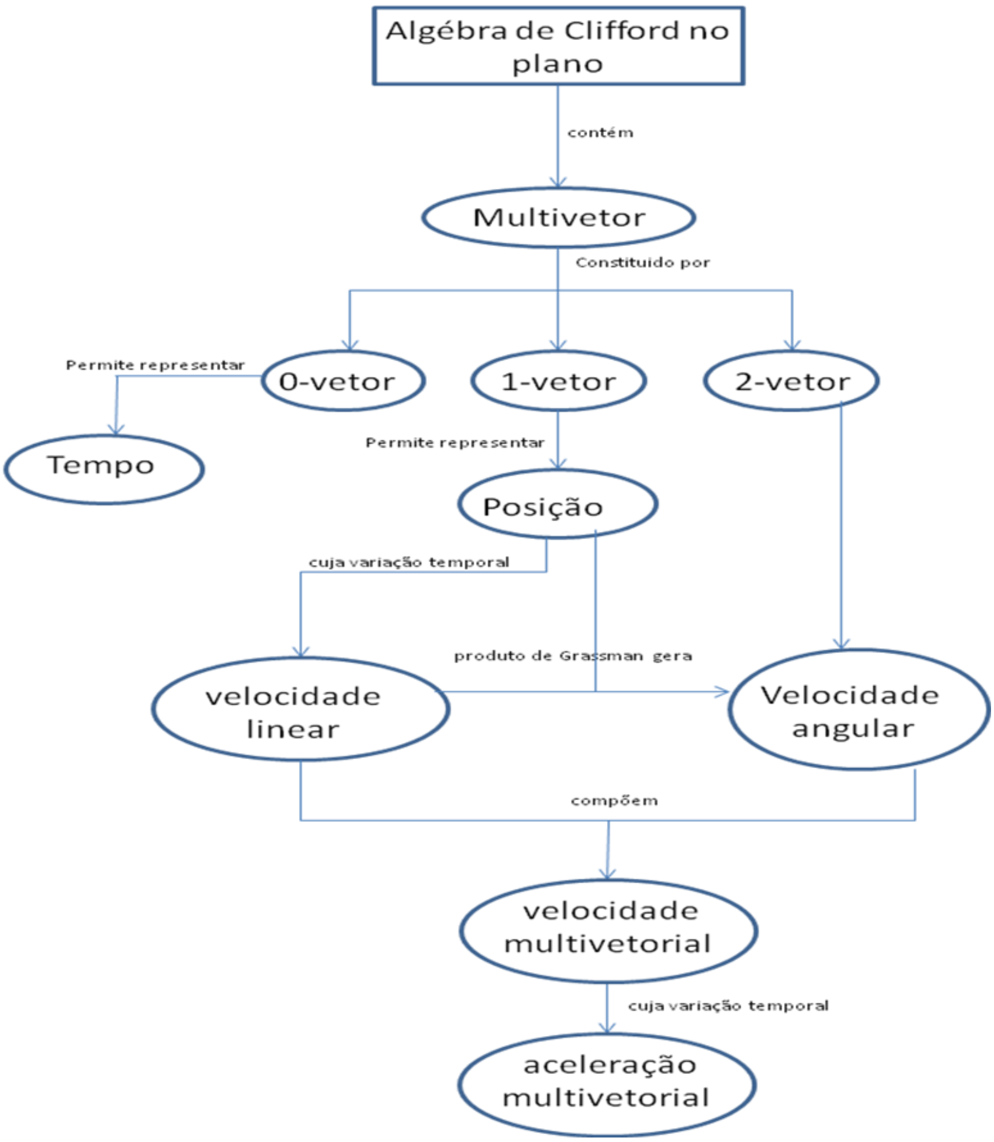


Figura 43: Mapa conceitual norteador do material instrucional para a ergonomia cognitiva da cinemática em mecânica Newtoniana modelada pela álgebra de Clifford

4.1.2 Concebendo ergonomias cognitivas

A álgebra de Clifford tem como característica fundamental representar e manipular objetos geométricos de forma algébrica. A partir disso, iremos representar os conceitos da cinemática num plano, que são puramente geométricos, explorados no capítulo 3, com este novo formalismo algébrico.

A álgebra de Clifford desenvolvida num plano bidimensional tem um elemento chamado multivetor que é representado como:

$$M = 0\text{-}vetor + 1\text{-}vetor + 2\text{-}vetor \tag{67}$$

O 0-vetor representa um escalar, o 1-vetor um segmento de reta orientado e o 2-vetor uma área orientada.

Descrevendo os elementos cinemáticos através dos elementos presentes na álgebra de Clifford, temos:

O *TEMPO* perfeitamente definido através de um valor numérico, ou seja, um escalar. Nesta nova perspectiva, o tempo será representado como um 0-vetor.

A *POSIÇÃO* definida como um segmento de reta orientado com origem num ponto privilegiado e extremidade no objeto em movimento, na álgebra de Clifford será representada por um 1-vetor.

A *VELOCIDADE LINEAR* como vimos no capítulo 3, representa a taxa de variação em relação ao tempo (0-vetor) com que a posição (1-vetor) varia sua magnitude. Dessa forma, podemos representar a velocidade linear como um 1-vetor neste novo formalismo, e será denotada por:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \tag{68}$$

Onde $\vec{v}$ é o 1-vetor velocidade linear, $\Delta\vec{P}$ o 1-vetor variação de posição e Δt o 0-vetor intervalo de tempo.

A *VELOCIDADE ANGULAR* representa a rapidez com que a direção do 1-vetor posição está variando. A velocidade angular foi demonstrada no capítulo 3 desta pesquisa através de um produto vetorial, que devido à notável semelhança com produto de Grassman, um 2-vetor, podemos representá-la como tal,

$$\omega = \frac{\vec{p} \wedge \vec{v}}{|\vec{p}|^2} \tag{69}$$

No formalismo algébrico da álgebra de Clifford podemos unificar as velocidades, linear e angular, representando através de um multivetor da seguinte forma:

$$V = \vec{v} + \sigma\omega \tag{70}$$

$\vec{V}$ é chamado de velocidade multivetorial, dada pela soma de um 1-vetor velocidade linear $\vec{v}$ com um 2-vetor velocidade angular ω. E σ, é um fator de correção dimensional (PEZZAGLIA, 2008).

Veja que, a velocidade multivetorial representa de forma clara a velocidade de uma partícula num plano proporcionando uma visualização geométrica bem mais adequada à relação de mudança de magnitude e orientação do vetor posição.

A taxa de variação da velocidade multivetorial em relação ao tempo será representada por:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{v} + \sigma\omega)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + \sigma \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \tag{70}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima, mostra a taxa de variação da velocidade linear em relação ao tempo. Como a velocidade angular é dada pela equação 69, a sua taxa de variação será:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\dfrac{\vec{p}(t+\Delta t) \wedge \vec{v}(t++\Delta t)}{|\vec{p}(t+\Delta t)|^2} - \dfrac{\vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)}{|\vec{p}(t)|^2}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\vec{p}(t+\Delta t) \wedge \vec{v}(t++\Delta t)|\vec{p}(t)|^2 - \vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)|\vec{p}(t+\Delta t)|^2}{\Delta t \; |\vec{p}(t)|^2 \; |\vec{p}(t+\Delta t)|^2} \tag{71}$$

subtraindo e somando no numerador da equação (71) o termo $\vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)|\vec{p}(t)|^2$ temos,

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\vec{p}(t+\Delta t) \wedge \vec{v}(t+\Delta t)|\vec{p}(t)|^2 - \vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)|\vec{p}(t)|^2 - \vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)|\vec{p}(t+\Delta t)|^2 + \vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)|\vec{p}(t)|^2}{\Delta t \; |\vec{p}(t)|^2 \; |\vec{p}(t+\Delta t)|^2}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\left[\left|\vec{p}(t)\right|^{2}\dfrac{\vec{p}(t+\Delta t)\wedge\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)\wedge\vec{v}(t)}{\Delta t}\right]-\left[\vec{p}(t)\wedge\vec{v}(t)\dfrac{\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|^{2}-\left|\vec{p}(t)\right|^{2}}{\Delta t}\right]}{\left|\vec{p}(t)\right|^{2}\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|^{2}} \tag{72}$$

Podemos escrever a equação (72) de acordo com a taxa de variação da seguinte forma,

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\left\{\left|\vec{p}(t)\right|^{2}\dfrac{\Delta\left[\vec{p}(t)\wedge\vec{v}(t)\right]}{\Delta t}\right\}-\left\{\vec{p}(t)\wedge\vec{v}(t)\dfrac{\Delta\left(\left|\vec{p}(t)\right|^{2}\right)}{\Delta t}\right\}}{\left|\vec{p}(t)\right|^{2}\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|^{2}} \tag{73}$$

Na equação 73, devemos calcular isoladamente a taxa de variação dada por:

$$\frac{\Delta\left(\left|\vec{p}(t)\right|^{2}\right)}{\Delta t}=\frac{\Delta\left(\left|\vec{p}(t)\right|\left|\vec{p}(t)\right|\right)}{\Delta t}=\frac{\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|-\left|\vec{p}(t)\right|\left|\vec{p}(t)\right|}{\Delta t} \tag{74}$$

Somando e subtraindo ao numerador da equação 74 o termo,

$$\left|p(t+\Delta t)\right|\left|p(t)\right| \tag{75}$$

Desenvolvemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\left(\left|\vec{p}(t)\right|^{2}\right)}{\Delta t}&=\frac{\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|-\left|\vec{p}(t)\right|\left|\vec{p}(t)\right|-\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|\left|\vec{p}(t)\right|+\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|\left|\vec{p}(t)\right|}{\Delta t}\\&=\frac{\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|\left(\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|-\left|\vec{p}(t)\right|\right)+\left|\vec{p}(t)\right|\left(\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|-\left|\vec{p}(t)\right|\right)}{\Delta t}\\&=\frac{\left(\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|-\left|\vec{p}(t)\right|\right)\left(\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|+\left|\vec{p}(t)\right|\right)}{\Delta t}\end{aligned} \tag{76 }$$

A partir da equação 76 podemos ver que:

$$\frac{\Delta\left(\left|\vec{p}(t)\right|^{2}\right)}{\Delta t}=\frac{\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|-\left|\vec{p}(t)\right|}{\Delta t}\left(\left|\vec{p}(t+\Delta t)\right|+\left|\vec{p}(t)\right|\right). \tag{77}$$

Substituindo a equação 77, na equação 73 temos:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\left\{|\vec{p}(t)|^{2}\,\frac{\Delta\left[\vec{p}(t)\wedge\vec{v}(t)\right]}{\Delta t}\right\}-\left\{\vec{p}(t)\wedge\vec{v}(t)\left[\frac{|\vec{p}(t+\Delta t)|-|\vec{p}(t)|}{\Delta t}\left(|\vec{p}(t+\Delta t)|+|\vec{p}(t)|\right)\right]\right\}}{|\vec{p}(t)|^{2}\,|\vec{p}(t+\Delta t)|^{2}} \tag{78}$$

Fazendo o intervalo de tempo Δt tão pequeno quanto se deseja na equação 78, encontramos que:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{|\vec{p}(t)|^{2}\left\{\frac{\Delta\vec{p}(t)}{\Delta t}\wedge\vec{v}(t)+\vec{p}(t)\wedge\frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}\right\}-\left\{\vec{p}(t)\wedge\vec{v}(t)\left[\frac{\Delta|\vec{p}(t)|}{\Delta t}\,2|\vec{p}(t)|\right]\right\}}{|\vec{p}(t)|^{4}} \tag{79}$$

Na equação 79 podemos destacar alguns termos conhecidos, são eles:

Velocidade linear

$$\frac{\Delta\vec{p}(t)}{\Delta t}=\vec{v}(t) \tag{80}$$

Aceleração linear

$$\frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}=\vec{a}(t) \tag{81}$$

Módulo da velocidade linear

$$\frac{\Delta|\vec{p}(t)|}{\Delta t}=|\vec{v}(t)| \tag{82}$$

Substituindo os termos 80,81 e 82 na equação 79 temos,

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{|\vec{p}(t)|^{2}\left\{\vec{v}(t)\wedge\vec{v}(t)+\vec{p}(t)\wedge\vec{a}(t)\right\}-\left\{\vec{p}(t)\wedge\vec{v}(t)\left[|\vec{v}(t)|\,2|\vec{p}(t)|\right]\right\}}{|\vec{p}(t)|^{4}} \tag{83}$$

Veja que na equação 83, o produto de Grassman entre as velocidades lineares vale zero, portanto podemos reescrever a equação 83 da seguinte forma:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\vec{p}(t) \wedge \vec{a}(t)}{\left|\vec{p}(t)\right|^2} - 2\frac{\vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)}{\left|\vec{p}(t)\right|^3}\left|\vec{v}(t)\right| \tag{84}$$

Substituindo a equação 84 na equação 70 pode-se ver que:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + \sigma\left(\frac{\vec{p}(t) \wedge \vec{a}(t)}{\left|\vec{p}(t)\right|^2} - 2\frac{\vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)}{\left|\vec{p}(t)\right|^3}\left|\vec{v}(t)\right|\right) \tag{90}$$

onde no primeiro termo do lado direito da equação temos a aceleração linear da partícula, no segundo termo a aceleração angular e no terceiro e último termo, temos a aceleração centrípeta. Estas são as acelerações da partícula se movendo no plano.

Utilizando a álgebra de Clifford na descrição do movimento da partícula num plano, representamos a taxa de variação da velocidade multivetorial em uma única entidade matemática. Esta taxa de variação será representada por *A* da seguinte forma:

$$A = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + \sigma\left(\frac{\vec{p}(t) \wedge \vec{a}(t)}{\left|\vec{p}(t)\right|^2} - 2\frac{\vec{p}(t) \wedge \vec{v}(t)}{\left|\vec{p}(t)\right|^3}\left|\vec{v}(t)\right|\right) \tag{91}$$

Este novo objeto definido pela álgebra de Clifford será chamado de multivetor aceleração.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo neste trabalho de pesquisa foi construir um material didático (o produto) com os conceitos físicos da cinemática em mecânica Newtoniana, usando um ferramental matemático que possibilita uma visão mais intuitiva das interpretações geométricas, a álgebra de Clifford. Vimos que os “escalares, os vetores e as áreas orientadas” estão presentes nesta álgebra como uma estrutura unificada chamada de multivetor.

A estrutura dessa álgebra permite o tratamento matemático das áreas da Física sem a necessidade de outro ferramental matemático paralelo.

Foi notável que na cinemática de uma partícula no plano, a modelação com o multivetor velocidade e multivetor aceleração tornou compacta e intuitiva a representação algébrica das grandezas físicas. Com este novo ferramental matemático não há a necessidade da abstração de elementos que não pertençam ao plano onde está acontecendo o movimento, como são os casos das modelações das velocidades e acelerações angulares usando o produto vetorial.

A modelação matemática feita neste trabalho, além de ser mais intuitiva, tem como característica fundamental a ordenação dos conceitos desde os mais gerais como até os mais específicos. Esta ordenação de conceitos foi exposta no mapa conceitual de Novak, que está de comum acordo com a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. É sabido que, um material instrucional preparado para uma aula expositiva da ciência Física, norteado sob a luz da teoria ausubeliana tem se mostrado como grande aliado no processo de ensino-aprendizagem conforme indicado em inúmeros trabalhos publicados.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M.; FINN, E. **Um Curso Universitário.** Volume I – Mecânica. Edgard Blücher, 1972.

AUSUBEL, D., NOVAK, J., & HANESIAN, H. **Educational Psychology:** A Cognitive View (2nd Ed.). New York: Holt, Rinehart & Winston, 1978.

BARCELOS, N.J. **Mecânica Newtonianan, Lagrangiana e Hamiltoniana.** 1.ed, 2004.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares de Física para a Educação Básica**. Secretaria de Educação do Paraná. Curitiba: 2006.

CALVET, R. G.. **Theartise of plane geometry thought geometric algrebe**. Espanha, 2001.

DE GÓES BRENNAND, E. **Álgebra de Clifford e Aprendizagem Significativa:** pilares para a construção de uma nova abordagem para o ensino da Física. Projeto guarda-chuva. Mestrado em Ensino de Física. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2007.

DE GÓES BRENNAND, E. **Fundamentos e aplicações da álgebra de Clifford no ensino de Física.** Aula conferida em pós-graduação na Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2008.

DORAN, C. **Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics**. Ph.D. thesis, University of Cambridge, 2002.

GALILEU. G. **Duas Novas Ciências**. 2. ed. São Paulo: Nova Stella, 1988.

GRECA, I. M. **Cambio conceptual:** analysis crítico propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. Ciência & Educação, 9(2): 301-315. 2003

HESTENES, David. **New Foundations for Classical Mechanics**. London: Kluwer Academic Publishers, 2 Edition, 1999.nd

LASENBY, Anthony. **Geometric Algebra for Physicists**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

MATHEUS, T. A. M. et al. A **Resolução de situações problemáticas experimentais em Física Geral à luz da Teoria dos Campos Conceituais**. XVI Simpio Nacional de Ensino de Física. Porto Alegre: 2005. Anais. P. 10 -18.

MOREIRA, M. A. & MASINI, Elcie. F. Salzano. **Aprendizagem significativa:** Teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

NOVAK, J. D. ; Mintzes, J J e Wandersee, J H **Ensinando Ciência para a Compreensão**. Plátano Lisboa: 2000.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1-Mecânica.** Edgard Blücher:1981.

PEZZAGLIA, Jr. W. M. **Physical Applications of a Generalized Clifford Calculus:** Papapetrou Equations and Metamorphic Curvature, e-Print Archive: Gr-qc/9710027, 2008.

SOBCZYK, Garret. **Clifford Algebra to Geometric Calculus:** A Unified Language for Mathematics and Physics. London: Kluwer Academic Publishers, Reprinted, 1999.

SOUZA, C. M. S. G. **A Resolução de Problemas e o Ensino de Física:** uma análise psicológica. Tese de Doutorado. Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília. 2001.