



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

NATANAEL SILVA RIBEIRO

UM PASSEIO POR ALGUNS TÓPICOS DA GEOMETRIA PLANA COM
A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

CAMPINA GRANDE
2025

NATANAEL SILVA RIBEIRO

**UM PASSEIO POR ALGUNS TÓPICOS DA GEOMETRIA PLANA COM
A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA**

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Linha de Pesquisa: Ensino Básico Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo.

CAMPINA GRANDE

2025

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

R484p Ribeiro, Natanael Silva.

Um passeio por alguns tópicos da geometria plana com a utilização do GeoGebra [manuscrito] / Natanael Silva Ribeiro. - 2025.

108 f. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo, Departamento de Matemática - CCT".

1. Geometria plana. 2. GeoGebra. 3. Software educativo. I. Título

21. ed. CDD 327.7

NATANAEL SILVA RIBEIRO

UM PASSEIO POR ALGUNS TÓPICOS DA GEOMETRIA PLANA COM A
UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada à
Coordenação do Curso de Mestrado
Profissional em Matemática em
Rede Nacional da Universidade
Estadual da Paraíba, como
requisito parcial à obtenção do
título de Mestre em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Linha de Pesquisa: Ensino Básico
Matemática.

Aprovada em: 29/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Aldo Trajano Louredo** (***.317.454-**), em **23/09/2025 18:32:13** com chave **c4e9837e98c411f0a8ab2ecdfe2f4a5a**.
- **Israel Buriti Galvão** (***.241.144-**), em **23/09/2025 18:44:11** com chave **711b613498c611f0bd22f66ead1dd7a4**.
- **Simone Vasconcelos da Silva** (***.126.891-**), em **24/09/2025 14:48:18** com chave **a770ccee996e11f09162a2b8c33bc66c**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 25/09/2025

Código de Autenticação: 5ab74b



À minha mãe, Neide, e à minha
esposa, Ingrid.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, à minha família e a todos os colegas e professores!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“ A Geometria existe por toda a parte, é preciso olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

(Johannes Kepler).

RESUMO

A presente pesquisa incentiva professores e estudantes das escolas públicas a terem um olhar diferenciado sobre entes geométricos. Realizamos revisões bibliográficas de alguns tópicos de Geometria que são pouco abordados na Educação Básica, mas que têm bastante aplicabilidade na resolução de problemas olímpicos. Nosso ponto de partida foram os conceitos básicos da Geometria Plana, começamos pela semelhança de triângulos e posteriormente aplicamos uma sequência didática em duas turmas do nono ano de uma escola do município de Juarez Távora-PB. Fizemos uso do *software* GeoGebra em quase todas as etapas dessa sequência didática e em grande parte desta pesquisa, nosso principal objetivo é utilizá-lo como uma ferramenta didática auxiliadora nas provas dos teoremas, na compreensão dos conceitos, na visualização e construção de figuras e na elaboração do produto didático que acompanha este trabalho. Em seguida, abordamos os teoremas da Bissetriz Interna e da Bissetriz Externa e suas aplicações, ambos os teoremas são muito importantes na resolução de problemas, desde os mais simples aos mais sofisticados. Nesse contexto, exploramos outros dois importantes resultados, o Teorema de Ceva em suas formas usual e trigonométrica e o Teorema de Menelaus, ambos seguidos de algumas aplicações. Por fim, apresentamos o famoso Teorema da Borboleta com sua demonstração detalhada e ainda demos espaço aos quadriláteros inscritíveis acompanhados por uma lista de exercícios.

Palavras-chave: geometria plana; geogebra; software educativo.

ABSTRACT

This research encourages teachers and students from public schools to have a differentiated view of geometric entities. We conducted bibliographic reviews of some topics in Geometry that are rarely addressed in Basic Education, but which have significant applicability in solving Olympic problems. Our starting point was the basic concepts of Plane Geometry; we began with the similarity of triangles and later applied a didactic sequence in two ninth-grade classes at a school in the municipality of Juárez Távora-PB. We made use of the GeoGebra software in almost all stages of this didactic sequence and in a large part of this research; our main objective is to use it as a supportive teaching tool for theorem proofs, understanding concepts, visualizing and constructing figures, and developing the didactic product that accompanies this work. Next, we addressed the theorems of the Internal Angle Bisector and the External Angle Bisector and their application, both theorems are very important in solving problems, from the simplest to the most sophisticated. In this context, we explore two other important results, Ceva's Theorem in its usual and trigonometric forms, and Menelaus's Theorem, both followed by some applications. Finally, we present the famous Butterfly Theorem with its detailed proof and also give space to inscribable quadrilaterals accompanied by a list of exercises.

Keywords: plane geometry; geogebra; educational software.

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 10 |
| 1.1 | Objetivos | 11 |
| 1.1.1 | Objetivo geral | 11 |
| 1.1.2 | Objetivos específicos | 11 |
| 1.2 | Organização do trabalho | 12 |
| 2 | ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA | 13 |
| 3 | SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E RELAÇÕES MÉTRICAS | 16 |
| 3.1 | Feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal | 16 |
| 3.1.1 | Transversal ao feixe | 16 |
| 3.1.2 | Ângulos formados por um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal | 17 |
| 3.2 | Teorema de Tales | 20 |
| 3.3 | Semelhança de triângulos | 23 |
| 3.4 | Casos de semelhança de triângulos | 24 |
| 3.5 | Relações métricas no triângulo retângulo | 30 |
| 3.5.1 | Outras relações métricas. | 31 |
| 4 | APLICAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA | 34 |
| 4.1 | Objeto de conhecimento | 35 |
| 4.2 | Objetivo | 35 |
| 4.3 | Objetivos específicos | 35 |
| 4.4 | Etapas de desenvolvimento | 36 |
| 4.4.1 | Conhecimentos prévios | 36 |
| 4.4.2 | Teorema de Tales | 39 |
| 4.4.3 | Triângulos semelhantes | 41 |
| 4.5 | Conclusão | 54 |
| 5 | ALGUNS BELOS PROBLEMAS DE GEOMETRIA | 56 |
| 5.1 | Teorema da Bissetriz Interna | 56 |
| 5.2 | Teorema de Menelaus | 70 |
| 5.3 | Exercícios propostos | 80 |
| 6 | TEOREMAS DE PAPILON | 82 |
| 6.1 | O Teorema da Borboleta | 82 |
| 6.2 | Aplicações dos quadriláteros inscritíveis | 92 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 6.2.1 | Concorrência de circunferências | 92 |
| 6.2.2 | A reta de Simson-Wallace | 99 |
| 6.2.3 | A reta de Simson-Wallace para quadriláteros | 101 |
| 6.3 | Exercícios propostos | 103 |
| 7 | CONCLUSÃO | 106 |
| | REFERÊNCIAS | 106 |

1 INTRODUÇÃO

O estudo da Semelhança de Triângulos e das Relações Métricas no triângulo retângulo está presente em todos os livros didáticos de matemática dos ensinos Fundamental e Médio, sem exceção, isto é fato. Diante dos mais variados desafios metodológicos que os professores de matemática enfrentam tentando repassar o conhecimento desses conceitos aos estudantes, resolvemos dar uma parcela de contribuição através deste trabalho. Nossa missão é fazer com que o entendimento de diversos conteúdos por parte dos alunos seja cada vez melhor e mais prazeroso.

O trabalho educativo nas escolas do nosso país não é uma tarefa fácil, diariamente enfrentamos problemas nas salas de aulas que causam algumas consequências aos estudantes, tais como a evasão escolar, a desistência, as notas baixas nas avaliações, entre outros. Por esta razão, devemos nos atentar às inovações tecnológicas que estão à nossa volta.

Pensando nisso, recorreremos ao uso do *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, que é um dos *softwares* mais utilizados no cotidiano escolar. Essa ferramenta educacional digital é muito útil para os alunos visualizarem diversos objetos geométricos. Por exemplo, figuras planas, figuras tridimensionais (sólidos), segmentos de reta, pontos, áreas, volumes, gráficos de funções, etc. Além disso, o uso deste aplicativo possibilita um melhor entendimento dos conteúdos por parte dos estudantes.

Utilizamos este recurso tecnológico para nos auxiliar no ensino da semelhança de triângulos durante a aplicação de uma sequência didática em uma Escola de Ensino Fundamental situada no município de Juarez Távora-PB. Além disso, fizemos uso do GeoGebra para construir a grande maioria das figuras que compõem esta dissertação e também para construir algumas animações de demonstrações de teoremas.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p.265), mais precisamente, em sua 5ª competência específica de matemática para o Ensino Fundamental, devemos: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados”.

Ou seja, é plenamente possível e indicado o uso das tecnologias, desde que se queira, no ambiente escolar.

Com o desejo de ir mais além, abordamos neste trabalho resultados matemáticos de geometria que, em geral, não são apresentados nos livros didáticos da educação básica, mesmo os mais aprofundados. Demos destaque a vários teoremas no decorrer deste trabalho, tais como o Teorema de Tales, o Teorema da Bissetriz Interna e da Bissetriz Externa, o Teorema de Ceva, o Teorema de Menelaus, o Teorema da Borboleta, entre outros.

Fizemos em detalhes as demonstrações dos teoremas citados com o intuito de facilitar a

assimilação e a compreensão de quem vier a usufruir deste material. Apresentamos alguns problemas clássicos de geometria que são encontrados na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) e em outras referências internacionais. Também foram feitas diversas aplicações destes resultados de uma forma didática e de maneira que possa contribuir para o desenvolvimento do leitor em suas atividades escolares, ainda tivemos o cuidado de utilizar aplicações cujas soluções pudessem ser entendidas e apreciadas pelo público da educação básica.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem o propósito de despertar estudantes e professores da educação básica, de forma singela, para os conhecimentos que os conceitos matemáticos podem atingir, em particular, os da geometria plana. Tais conceitos formam uma base muito importante para diversos teoremas e resultados geométricos que foram explorados no decorrer dessa dissertação.

1.1.2 Objetivos específicos

- Fazer com que estudantes da educação básica tenham o primeiro contato com o GeoGebra;
- Utilizar o *software* GeoGebra para construir figuras com a participação dos alunos;
- Oferecer ao público em geral uma fonte de informações a respeito da semelhança de triângulos e suas aplicações;
- Incentivar e despertar o interesse de professores e alunos pelo uso do GeoGebra como instrumento auxiliar nas aulas de matemática e também na resolução de exercícios e problemas mais sofisticados;
- Tornar as aulas mais dinâmicas e prazerosas através do GeoGebra, explorar, entre suas diversas funções, a visualização de figuras planas e espaciais;
- Trabalhar o conceito de semelhança de triângulos envolvendo suas aplicações através de teoremas e problemas olímpicos;
- Elaborar e aplicar uma sequência didática que permite o uso do *software* GeoGebra como recurso tecnológico para um melhor engajamento e aprendizado dos estudantes;
- Explorar, demonstrar e aplicar determinados teoremas que, em geral, não são vistos nos livros didáticos mas podem ter suas provas compreendidas através de resultados elementares da geometria plana.

- Contribuir de maneira eficaz para o melhoramento e aperfeiçoamento do ensino de matemática nas escolas públicas da educação básica.

1.2 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

Na Introdução, temos as considerações iniciais sobre o tema, destacando os principais motivos e desafios que nos levaram a desenvolver esta dissertação. Expomos também os objetivos gerais e específicos com o intuito de que estes sejam alcançados e fizemos um apanhado geral sobre a estrutura do trabalho.

No Capítulo 2, damos ênfase aos aspectos históricos da semelhança de triângulos e das relações métricas; com uma pesquisa de cunho histórico contemplamos alguns dos principais resultados da semelhança de triângulos obtidos ao longo dos séculos. Além disso, também damos destaque às principais e mais importantes contribuições de grandes sábios da história da Geometria da cultura ocidental, no que diz respeito à noção de semelhança.

Em seguida, no Capítulo 3, destacamos formalmente os conceitos de semelhança de triângulos e de relações métricas no triângulo. Neste capítulo fizemos uma abordagem ampla das principais referências bibliográficas utilizadas nas escolas públicas, (Dante, 2018) e também nas universidades, como nos cursos de graduação (Barbosa, 2012) e de mestrado (Caminha, 2022)), a fim de reunirmos nesta dissertação uma formalização mais rica e relevante para o ensino desses conteúdos na sala de aula.

No Capítulo 4, nos direcionamos ao uso do *Software* GeoGebra no ensino de geometria, em particular, no ensino da semelhança de triângulos e das relações métricas. A utilização deste recurso foi feita através de uma sequência didática aplicada em duas turmas de 9º ano, no turno da manhã da Escola Municipal de Ensino Fundamental Luís Ribeiro Coutinho, situada na cidade de Juarez Távora no estado da Paraíba.

No Capítulo 5, apresentamos alguns belos problemas de geometria, destacamos o Teorema da Bissetriz Interna, o Teorema da Bissetriz Externa, o Teorema de Ceva, o Teorema de Menelaus, além do Corolário de Tales e exemplos de aplicações desses resultados. Por fim, deixamos uma lista de exercícios para professores e alunos que se interessem por problemas olímpicos, resolvê-los.

Acerca do Capítulo 6, apresentamos o Teorema de Papillon ou o Teorema da Borboleta, este nome deve-se à semelhança entre a figura descrita pelo teorema e uma borboleta. Além disso, temos uma seção que trata sobre os quadriláteros inscritíveis e algumas aplicações. Buscamos aplicar os resultados obtidos na resolução de problemas olímpicos e de outros exemplos, como é o caso dos quadriláteros inscritíveis.

Por fim, no Capítulo 7, explanamos as considerações finais sobre o trabalho, levamos em consideração os pontos que mais se destacaram ao longo desta dissertação, bem como a enorme parcela de contribuição dada pelo *software* GeoGebra.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA

Ao longo do tempo muitos povos ajudaram a construir o caminho milenar trilhado pela matemática, em particular, pela Geometria, que é uma das mais belas áreas da matemática.

Conforme (Roque; Carvalho, 2012) os conhecimentos geométricos dos povos da Babilônia e do Egito eram voltados para uma geometria métrica, isto é, eles realizavam medições de comprimentos, áreas e volumes de acordo com suas necessidades, entretanto, não se sabe ao certo como eles adquiriram estes conhecimentos. Os babilônios também calculavam volumes de sólidos geométricos com perfeição, como por exemplo, o cilindro circular reto e os prismas retos, de bases triangulares e quadrangulares.

De acordo com (Ribeiro, 2017), no Antigo Egito, alguns agricultores privilegiados pelo Faraó Soséstris cultivavam suas plantações às margens do Rio Nilo, onde cada um faziam de pedras, suas próprias cercas. Todos os anos as cheias do Nilo invadiam aquelas terras férteis para a agricultura e deixavam os terrenos daqueles trabalhadores com as cercas derrubadas. Então, entravam em ação os estiradores de corda, que eram uma espécie de funcionários do faraó, enviados para refazer as medições e marcações das cercas que haviam sido derrubadas, estes, por sua vez, utilizavam cordas marcadas com nós.

Isso nos mostra que há muito tempo os povos egípcios já tinham seus conhecimentos geométricos e os utilizavam de acordo com suas necessidades. Esses fatos citados remetem ao ano 3000 a.C.

Desde a Antiguidade, o ser humano se encanta com as formas geométricas presentes na natureza e, de maneira espontânea, consegue perceber e fazer analogias a tais formas. Por exemplo, os corpos celestes sempre despertaram a curiosidade dos grandes astrônomos e físicos da época. A Lua, o Sol e os planetas lembram circunferências quando vistos aqui da terra, enquanto as posições entre três quaisquer desses corpos lembram um triângulo.

Foi através da semelhança de triângulos que grandes sábios da Antiguidade, ao longo dos tempos, resolveram problemas até então inéditos para a ciência.

Como por exemplo, no Artigo do professor Geraldo Ávila, publicado na revista do Professor de Matemática-RPM 54, em que destaca o grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.), que calculou a distância da Terra à Lua e da Terra ao Sol, usando triângulos retângulos, semelhanças de triângulos e proporções. Vale ressaltar que os resultados obtidos por Aristarco, acerca dessas distâncias, não são exatamente iguais aos que conhecemos hoje, mas para a época foi uma boa aproximação.

Ainda segundo Ávila, na RPM 55, outro grande nome foi o de Eratóstenes (276 a.C.-196 a.C.), que conseguiu calcular o raio da Terra com a utilização de estudos de ângulos correspondentes em um feixe de paralelas cortadas por transversais, também com a proporcionalidade entre medidas e comprimentos de arcos e na razão entre o comprimento

de uma circunferência e seu diâmetro.

Nicolau copérnico (1473-1543), nascido na Polônia, resgatou a teoria heliocêntrica de Aristarco, de que as órbitas dos planetas em torno do Sol eram circulares (que não deram certo na época) e fez cálculos como o das distâncias dos planetas até o Sol, utilizando proporcionalidade de arcos e semelhança de triângulos.

O alemão Johannes Kepler (1571-1630), retomou às ideias de Nicolau Copérnico e descobriu que as órbitas planetárias são na verdade elípticas e ainda apresentou as três leis que hoje conhecemos por "Leis de Kepler". Por trás dessas leis existe muita proporcionalidade.

Podemos ver que ao longo da História, várias contribuições foram dadas em diferentes épocas, esses feitos foram de grande contribuição tanto para a sociedade daquela época quanto para o avanço no estudo da Geometria, uma vez que, em todas essas descobertas mencionadas foram aplicados muitos conceitos geométricos que conhecemos hoje. Recorrendo a uma época mais distante, antes da Era Cristã, temos Tales de Mileto:

Segundo (Roque; Carvalho, 2012), Tales de Mileto (624 a.C. - 548 a.C., aproximadamente), foi um dos primeiros matemáticos gregos a despertar o olhar dos povos de sua época, através da sua brilhante ideia de calcular a altura de uma das pirâmides do Egito utilizando a proporcionalidade. Tales é considerado um dos mais importantes gênios da Antiguidade.

Figura 1 – Tales de Mileto.



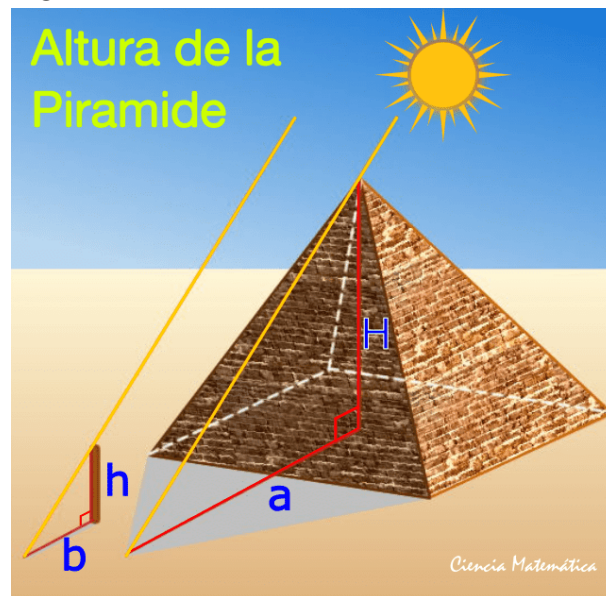
Fonte: Wikipédia.

Conforme (Boyer; Merzbach, 2012), ao retornar do Egito, Tales levou para a Grécia muitos conhecimentos geométricos dos egípcios; enquanto viajou para a Babilônia, aprendeu astronomia. Ainda segundo Boyer, em 585 a.C. Tales assombrou o mundo com a previsão de um eclipse solar, mas a veracidade desse feito é duvidosa.

A semelhança de triângulos, que é uma forma de proporcionalidade, é um conceito matemático que nos permite calcular distâncias inacessíveis, como é o caso da altura da pirâmide Quéops, encontrada por Tales.

Tales comparou o comprimento da sombra da pirâmide com o comprimento da sombra de uma estaca fincada verticalmente no solo, os comprimentos dessas duas sombras podiam ser medidos facilmente, bem como a altura da estaca, foi assim que Tales encontrou através da semelhança de triângulos a altura da pirâmide:

Figura 2 – Calculando a altura da Pirâmide.



Fonte: Disponível em: <https://menteplus.com/educacion/biografias/tales>.

A Figura 2, é uma representação do processo realizado por Tales, em que H é a altura da pirâmide e h é a altura da estaca, como a sombra da pirâmide tem comprimento a e a sombra da estaca tem comprimento b , podemos utilizar as relações de semelhança entre os triângulos e encontrar o valor de H .

$$\frac{H}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow H = h \cdot \frac{a}{b}.$$

Essa é uma famosa e antiga aplicação da semelhança de triângulos. Nossa intenção agora é apresentar uma formalização desses conceitos no Capítulo 3 e posteriormente aplicá-los em uma sequência didática que será desenvolvida no Capítulo 4.

3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E RELAÇÕES MÉTRICAS

O estudo da semelhança de triângulos é imprescindível ao estudo das relações métricas. É através da semelhança de triângulos que conseguimos obter e provar importantes resultados de forma simples e dedutiva. Por isso, neste Capítulo, iremos apresentar de maneira clara e objetiva tal conceito.

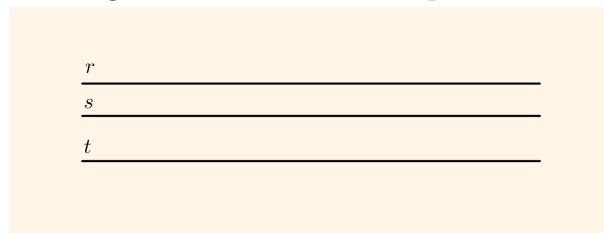
3.1 Feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal

Introduziremos agora alguns conceitos básicos com relação as retas paralelas e aos ângulos que se formam quando essas retas são cortadas por uma outra reta, que chamamos de reta transversal.

Para dar nomes às retas usamos sempre as letras minúsculas do nosso alfabeto, enquanto para nomear os pontos, fazemos uso das letras maiúsculas.

Dizemos que duas ou mais retas de um mesmo plano formam um **feixe de retas paralelas** quando, tomadas duas a duas, continuam sendo paralelas. Vejamos na figura a seguir um feixe de paralelas formado pelas retas r , s e t .

Figura 1 – Feixe de retas paralelas



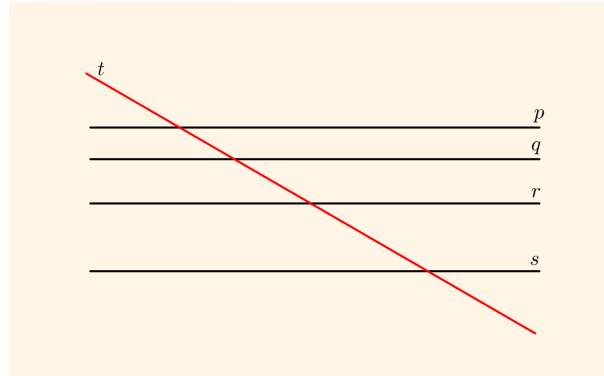
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Dadas as retas r e s , indicaremos o paralelismo entre essas duas retas, usando a notação: $r \parallel s$.

3.1.1 Transversal ao feixe

Quando uma reta intersecta ao menos uma das retas de um feixe de retas paralelas, então ela intersecta todas as outras retas desse feixe. Dizemos que essa reta é **transversal ao feixe de retas paralelas**. Vejamos.

Figura 2 – Feixe de paralelas cortadas por uma transversal



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Como podemos observar na figura anterior, as retas p , q , r e s formam um feixe de retas paralelas e a reta t é uma transversal a esse feixe.

3.1.2 Ângulos formados por um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal

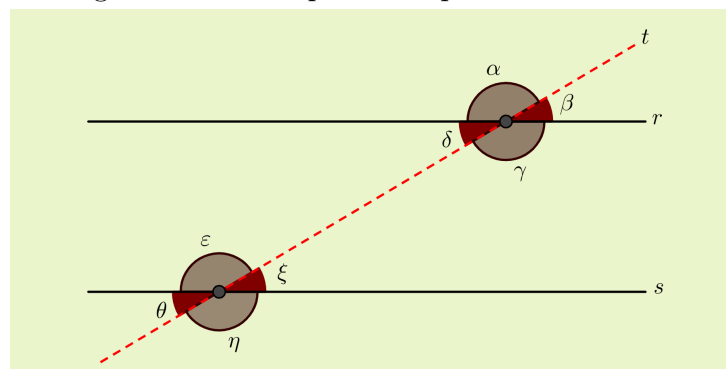
Os ângulos determinados pela intersecção de um feixe de retas paralelas com uma transversal são classificados em **ângulos opostos pelo vértice**, **ângulos correspondentes**, **ângulos alternos internos**, **ângulos alternos externos**, **ângulos colaterais internos** e **ângulos colaterais externos**.

Agora, vamos demonstrar cada um desses tipos de ângulos. Para a demonstração usaremos um feixe com apenas duas retas paralelas e uma transversal, mas a demonstração é válida para qualquer quantidade de retas, já que todas são paralelas duas a duas.

- Ângulos opostos pelo vértice

Consideremos as retas r e s tal que $r \parallel s$ e t é uma reta transversal às retas r e s . Conforme a figura a seguir.

Figura 3 – Ângulos formados por retas paralelas em uma transversal.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Demonstração. Vamos demonstrar que os ângulos opostos pelo vértice α e γ são congruentes.

Como os ângulos α e β são suplementares:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta. \quad (3.1)$$

Analogamente, os ângulos β e γ também são suplementares. Daí,

$$\beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \beta. \quad (3.2)$$

Por outro lado, a soma das medidas dos ângulos α , β , γ e δ é igual a 360° . Isto é:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ. \quad (3.3)$$

Substituindo na equação (3.3) os valores de α e de γ encontrados nas equações (3.1) e (3.2), respectivamente, obtemos:

$$(180^\circ - \beta) + \beta + (180^\circ - \beta) + \delta = 360^\circ \Rightarrow$$

$$180^\circ + 180^\circ - \beta + \beta - \beta + \delta = 360^\circ \Rightarrow \beta = \delta.$$

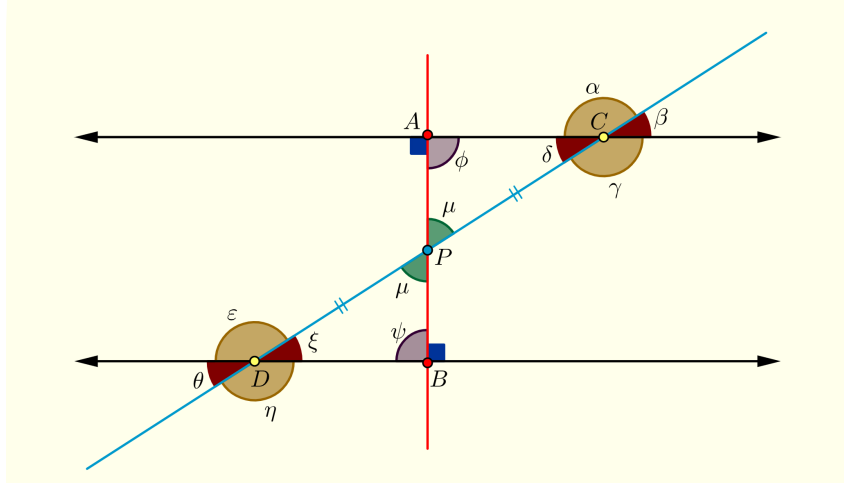
Portanto, fica demonstrado que os ângulos opostos pelo vértice β e δ são congruentes. De forma totalmente análoga, mostra-se que os ângulos opostos pelo vértice α e γ , ξ e θ e ϵ e η também são congruentes. \square

Observação 3.1. Dizemos que dois triângulos são congruentes quando todos os lados e ângulos de um deles forem respectivamente congruentes(iguais) a todos os lados e ângulos do outro.

O resultado a seguir irá nos auxiliar nas demonstrações dos outros tipos de ângulos formados pela intersecção de duas paralelas com uma transversal.

Vamos considerar novamente as retas paralelas r e s e a transversal t . Sejam C e D os pontos de intersecção da reta t com as retas r e s , respectivamente. Tracemos a reta u perpendicular às paralelas r e s nos pontos A e B de tal modo que a intersecção de u com t é P , ponto médio do segmento \overline{CD} .

Figura 4 – Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.



Fonte: Dante, 2018.

Note que os ângulos \hat{APC} e \hat{BPD} são congruentes, pois são ângulos opostos pelo vértice. Por construção, P é ponto médio de \overline{CD} , logo, $\overline{CP} = \overline{PD}$ e os ângulos ϕ e ψ têm medidas iguais a 90° cada, uma vez que a reta u é perpendicular as retas r e s .

Portanto, os triângulos APC e BPD são congruentes pelo caso **Lado-Ângulo Adjacente-Ângulo Oposto** (LAA_o), e consequentemente os ângulos δ e ξ têm medidas iguais, o que implica $\delta = \xi$.

- Ângulos correspondentes

Na Figura 4, temos quatro pares de ângulos correspondentes congruentes. Vamos mostrar agora que $\alpha = \epsilon$.

De fato, note que $\alpha + \delta = 180^\circ$ (pois são ângulos suplementares), do mesmo modo $\epsilon + \xi = 180^\circ$ (pois também são ângulos suplementares) e $\delta = \xi$ (como mostramos anteriormente). Logo:

$$\alpha + \delta = \epsilon + \xi.$$

E como $\delta = \xi$, temos

$$\alpha + \delta = \epsilon + \delta \Rightarrow \alpha = \epsilon.$$

Portanto, os ângulos correspondentes α e ϵ são congruentes. Isto é, $\alpha = \epsilon$.

De forma análoga, mostra-se que os ângulos β e ξ , γ e η , δ e θ são correspondentes.

- Ângulos alternos internos

Vamos demonstrar que $\gamma = \epsilon$.

De fato, os ângulos γ e α são opostos pelo vértice, logo, $\gamma = \alpha$. E os ângulos α e ϵ são correspondentes, isto é, $\alpha = \epsilon$. Portanto, $\gamma = \epsilon$.

De forma análoga, podemos mostrar que o outro par de ângulos alternos internos δ e ξ também têm medidas iguais, isto é, $\delta = \xi$.

- Ângulos alternos externos.

Demonstraremos que os ângulos alternos externos α e η são congruentes. Ora, note que $\epsilon = \eta$ (pois são ângulos opostos pelo vértice) e $\epsilon = \alpha$ (pois são ângulos correspondentes). Logo, concluímos que $\alpha = \eta$.

Analogamente, prova-se que $\beta = \theta$.

- Ângulos colaterais internos.

Provaremos agora que os ângulos colaterais internos γ e ξ são suplementares, isto é, $\gamma + \xi = 180^\circ$.

Veja que $\gamma + \delta = 180^\circ$, pois são ângulos suplementares, ao mesmo tempo em que $\delta = \xi$, pois são alternos internos. Logo,

$$\gamma + \xi = 180^\circ.$$

Do mesmo modo podemos demonstrar que $\delta + \epsilon = 180^\circ$.

- Ângulos colaterais externos.

Mostraremos agora que os ângulos colaterais externos α e θ são suplementares, ou seja, $\alpha + \theta = 180^\circ$.

De fato, como $\alpha + \delta = 180^\circ$ e $\delta = \theta$, então

$$\alpha + \theta = 180^\circ.$$

3.2 Teorema de Tales

O Teorema de Tales é um dos resultados mais importantes da geometria plana, este resultado foi alicerçado na ideia de que, em um mesmo plano, um feixe de retas paralelas cortadas por duas retas transversais determinam segmentos proporcionais.

Um feixe de retas paralelas é um conjunto de retas não coincidentes e coplanares, ou seja, é um conjunto de retas distintas e que pertencem a um mesmo plano. Ver figura 5.

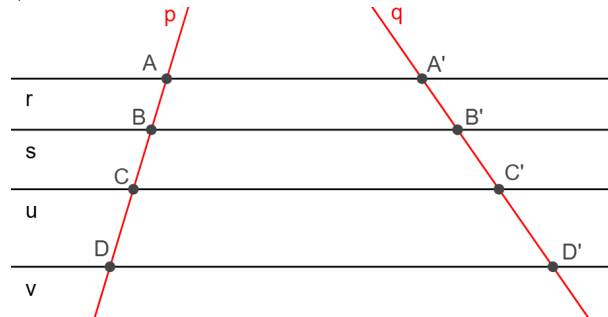
Figura 5 – (feixe de retas paralelas)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Na figura a seguir, podemos observar um feixe de retas paralelas cortadas por duas retas transversais, p e q , que as interceptam nos pontos A, B, C, D e A', B', C', D' , respectivamente.

Figura 6 – (feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

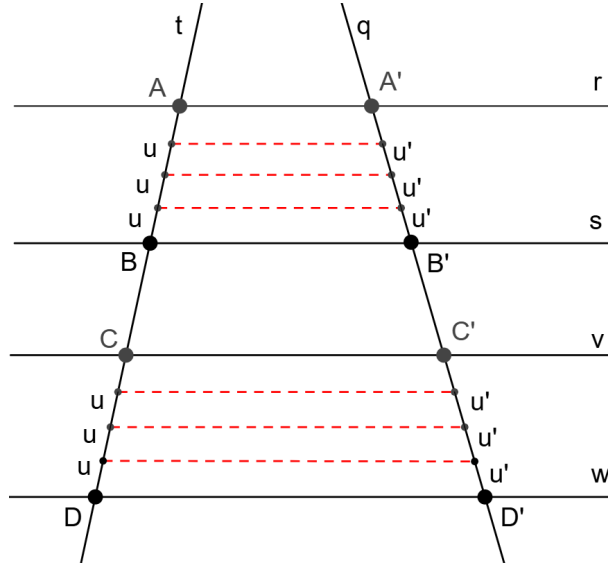
Dizemos que os pontos A e A' são correspondentes, bem como os pontos B e B' , C e C' , D e D' também são. Do mesmo modo, os segmentos AB e $A'B'$ são correspondentes. Assim como BC e $B'C'$, igualmente CD e $C'D'$.

O resultado que enunciaremos a seguir é o **Teorema de Tales**. Este teorema nos dirá como podemos aplicar as proporções entre os segmentos citados anteriormente.

Teorema 3.1. (Tales). *Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.*

Demonstração. Consideremos um feixe de paralelas e duas transversais como ilustrado na figura 7.

Figura 7 – Feixe de paralelas cortadas por duas transversais



Fonte: Dante, 2018.

Suponhamos que exista um segmento u de tal modo que $\overline{AB} = m \cdot u$ e $\overline{CD} = n \cdot u$, onde m e n são números naturais, ou seja, \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos comensuráveis. Dessa forma, tomando a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}. \quad (3.4)$$

Pelos pontos que dividem os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} em m e n partes congruentes ao segmento de medida u , podemos traçar retas paralelas ao feixe de modo que os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ fiquem divididos em m e n partes iguais a u' , respectivamente. Isto é,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{m \cdot u'}{n \cdot u'} = \frac{m}{n}. \quad (3.5)$$

Das relações (3.4) e (3.5), obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

□

Observação 3.2. É possível provar que a proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ vale também quando \overline{AB} , \overline{CD} , $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são segmentos incommensuráveis (ver Caminha, p. 127-129).

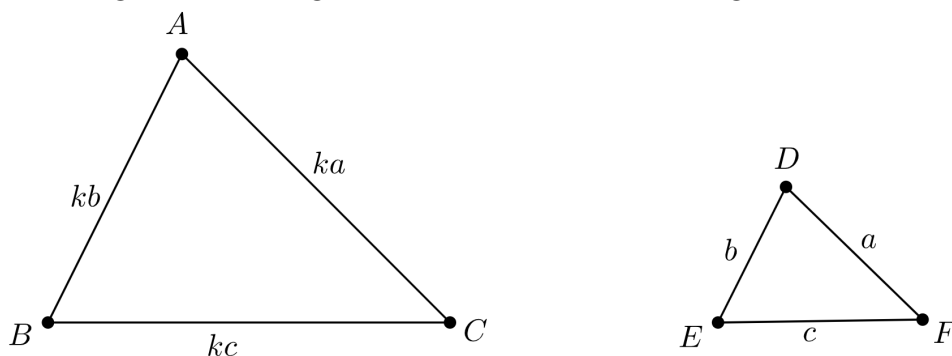
3.3 Semelhança de triângulos

Apresentaremos agora o conceito de semelhança entre dois triângulos, além disso, vamos enfatizar o estudo da **congruência de triângulos**, que é um assunto muito abordado nos ensinos fundamental e médio. Na próxima seção veremos que a congruência de triângulos é apenas um caso particular da **semelhança de triângulos**.

Definição 3.1. Dois triângulos são semelhantes se possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Na Figura 8, podemos dizer que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF?

Figura 8 – Triângulo ABC semelhante ao triângulo DEF .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Por definição, esses dois triângulos devem ter, além dos três ângulos internos congruentes, os seus três lados correspondentes proporcionais. Ou seja, existe um número real positivo k , tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k.$$

Ao número k damos o nome de razão de semelhança entre os triângulos ABC e DEF , nesta respectiva ordem. Também podemos realizar a semelhança entre os triângulos DEF e ABC , isto é, na ordem inversa, de modo que a razão é $\frac{1}{k}$.

Temos informações de proporcionalidade a partir dos lados da Figura 8. Por outro lado, não temos a convicção de que os três ângulos internos de ambos os triângulos são congruentes, já que as marcações indicadas pela figura não nos revela isso. Será que mesmo assim os triângulos ABC e DEF são semelhantes?

A resposta para essa pergunta é sim e o porquê disso será dado na próxima seção, quando estudarmos os casos de semelhança de triângulos.

Ao longo do texto usaremos várias notações e simbologias, sempre que necessário chamaremos a atenção para as mesmas. Por exemplo, para indicarmos que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF , escrevemos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

3.4 Casos de semelhança de triângulos

Nesta seção, seguindo as referências (Dante, 2018), (Barbosa, 2012) e (Caminha, 2022), iremos apresentar os casos de semelhança de triângulos. Em outras palavras, vamos mostrar que para dois triângulos serem semelhantes não é necessário seguirmos todas as condições da Definição 3.1. Cada um dos casos de semelhança a seguir nos dirá uma condição necessária e suficiente para que dois triângulos sejam semelhantes. Vejamos.

- **1º caso de semelhança de triângulos: Lado - Lado - Lado (LLL)**

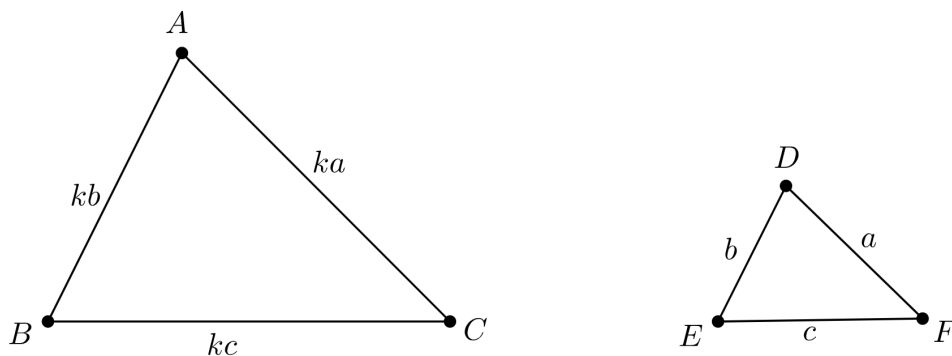
Teorema 3.2. *Sejam ABC e DEF dois triângulos, tais que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Então, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Isto é, o **caso LLL** nos diz que, além dos lados homólogos proporcionais, os dois triângulos possuem os seus três ângulos internos respectivamente congruentes.

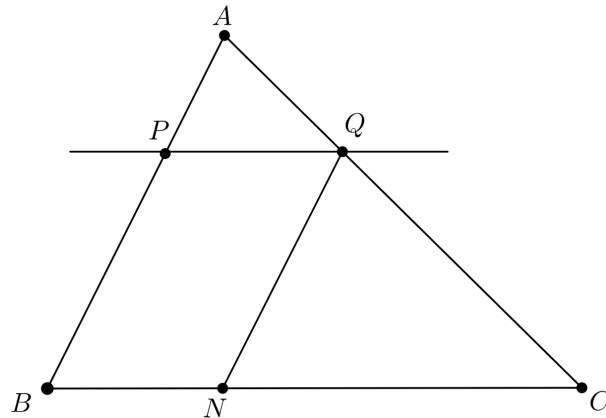
Figura 9 – Caso de semelhança LLL.



Fonte: Dante, 2018.

Demonstração. Seja k o fator de proporcionalidade entre as razões do teorema enunciado, então $\overline{AB} = k \cdot \overline{DE}$, $\overline{BC} = k \cdot \overline{EF}$ e $\overline{AC} = k \cdot \overline{DF}$. Sem perda de generalidade, suponhamos k maior que 1 e sobre o lado AB marquemos o ponto P tal que $\overline{AP} = \overline{DE}$ (por construção). Ver figura 10.

Figura 10 – Demonstração do caso LLL.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Sobre o lado \overline{AC} tomemos o ponto Q de tal modo que a reta \overleftrightarrow{PQ} é paralela ao lado \overline{BC} . Logo, pelo Teorema de Tales, segue que

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k}.$$

O que implica,

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{AQ} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AC} \Rightarrow \overline{AQ} = \overline{DF}.$$

Agora, tracemos o segmento paralelo ao lado AB , que parte de ponto Q e intersecta o lado BC no ponto N , formando o paralelogramo $BNPQ$. Aplicando o teorema de Tales mais uma vez na figura 10, obtemos

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{EF}.$$

Portanto, mostramos que

$$\overline{AP} = \overline{DE}, \overline{AQ} = \overline{DF} \text{ e } \overline{PQ} = \overline{EF}.$$

Ou seja, os triângulos APQ e DEF são congruentes pelo **caso LLL**, o que acarreta

$$\hat{B} = \hat{ABC} = \hat{APQ} = \hat{DEF} = \hat{E}.$$

Do mesmo modo, obtemos $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{F}$. □

• **2º caso de semelhança de triângulos: Ângulo - Ângulo (AA)**

Teorema 3.3. *Dados os triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então, os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. No $\triangle ABC$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ. \quad (3.6)$$

Analogamente, no $\triangle DEF$

$$\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ. \quad (3.7)$$

Das equações (3.6) e (3.7), obtemos:

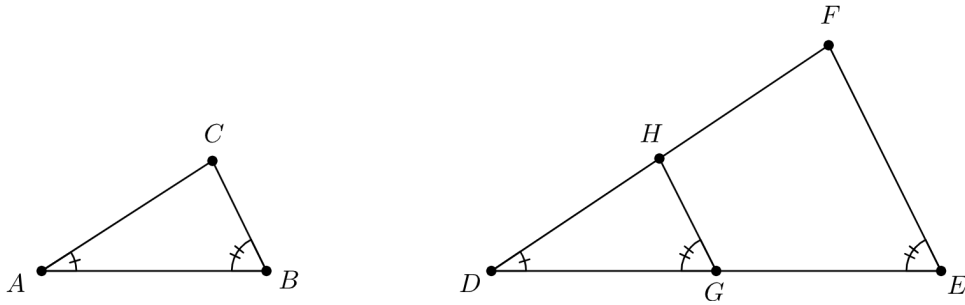
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{D} + \hat{E} + \hat{F}.$$

Mas, por hipótese $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Daí,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} \Rightarrow \hat{C} = \hat{F}.$$

Isso mostra que os três ângulos dos dois triângulos são respectivamente congruentes. Agora, vamos provar que os lados são proporcionais.

Figura 11 – Demonstração do caso AA.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Sobre o lado \overline{DE} tomamos o ponto G , de modo que $\overline{DG} = \overline{AB}$. A partir do ponto G , traçamos um segmento paralelo ao lado \overline{EF} que encontra o lado \overline{DF} no ponto H , obtendo assim o triângulo DGH que é congruente ao triângulo ABC , pois $\hat{BAC} = \hat{GDH}$, $\overline{AB} = \overline{DG}$ e $\hat{ACB} = \hat{DEH} = \hat{DGH}$. (Observe que os ângulos \hat{DEF} e \hat{DGH} são correspondentes).

Pelo Teorema de Tales, segue que:

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DF}}. \quad (3.8)$$

Mas, $\overline{DG} = \overline{AB}$ e $\overline{DH} = \overline{AC}$, logo, da igualdade (3.8) obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

De forma análoga, podemos demonstrar que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

O que prova o teorema. □

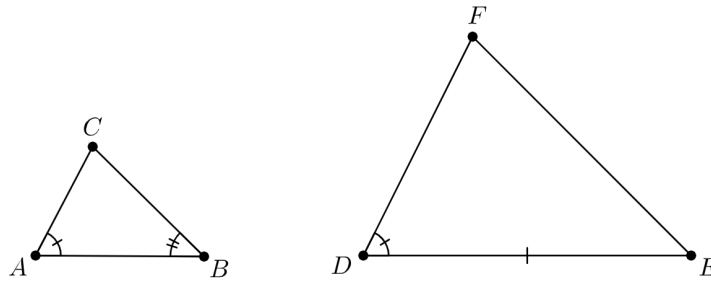
• **3º caso de semelhança de triângulos: Lado - Ângulo - Lado (LAL)**

O teorema a seguir nos diz que se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais, e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Teorema 3.4. *Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então, os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Sejam ABC e DEF dois triângulos, conforme a figura a seguir.

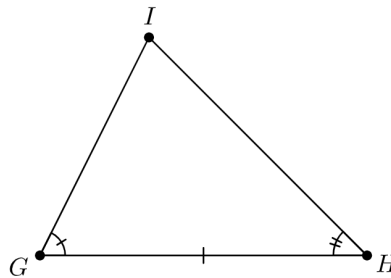
Figura 12 – Demonstração do caso LAL.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Agora, vamos construir o triângulo GHI de modo que $GH = DE$, $\hat{G} = \hat{A}$ e $\hat{H} = \hat{B}$.

Figura 13 – Construção auxiliar para demonstração do caso LAL.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

De acordo com o Teorema 3.3, os triângulos ABC e GHI são semelhantes (**caso AA**). Então, como consequência dessa semelhança, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GI}}.$$

Mas, por construção $\overline{GH} = \overline{DE}$ e, por hipótese, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, o que acarreta

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \overline{GI} = \overline{DF}.$$

Note que $\overline{GH} = \overline{DE}$ (construção), $\hat{B}\hat{A}\hat{C} = \hat{E}\hat{D}\hat{F}$ (hipótese) e $\overline{GI} = \overline{DF}$ (semelhança). Logo, com essas informações concluímos que os triângulos DEF e GHI são congruentes pelo **caso LAL**.

Portanto, o triângulo ABC é semelhante ao triângulo GHI e este, por sua vez, é congruente ao triângulo DEF , o que implica

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF.$$

E assim fica provado o teorema. □

A seguir iremos apresentar três resultados obtidos como consequência da semelhança entre dois triângulos, são eles: o Teorema 3.5, o Teorema 3.6 e o Teorema 3.6.1.

Teorema 3.5. *Sejam ABC e DEF dois triângulos semelhantes com razão de semelhança k . Se p e p' são, respectivamente, os perímetros desses triângulos, então*

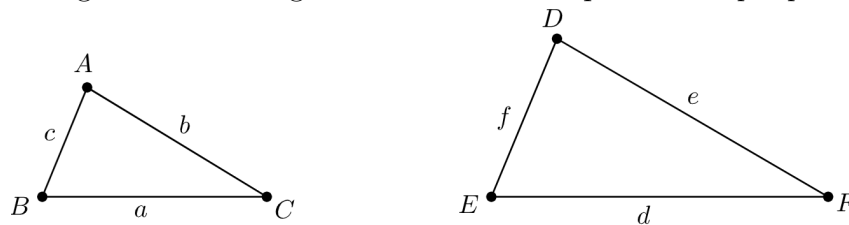
$$\frac{p}{p'} = k.$$

Demonstração. Consideremos os triângulos ABC de lados medindo a, b, c e DEF cujas medidas dos lados são d, e, f .

Sejam p e p' os respectivos perímetros dos triângulos ABC e DEF , então:

$$p = a + b + c \quad \text{e} \quad p' = d + e + f.$$

Figura 14 – Triângulos semelhantes de perímetros p e p' .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Como ABC e DEF são triângulos semelhantes, temos:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k.$$

O que implica,

$$\frac{a}{d} = k \Rightarrow a = k \cdot d. \quad (3.9)$$

$$\frac{b}{e} = k \Rightarrow b = k \cdot e. \quad (3.10)$$

$$\frac{c}{f} = k \Rightarrow c = k \cdot f. \quad (3.11)$$

Substituindo os valores das igualdades (3.9), (3.10) e (3.11) em $p = a + b + c$, obtemos

$$p = k \cdot d + k \cdot e + k \cdot f \Rightarrow p = k \cdot (d + e + f) \Rightarrow p = k \cdot p' \Rightarrow \frac{p}{p'} = k.$$

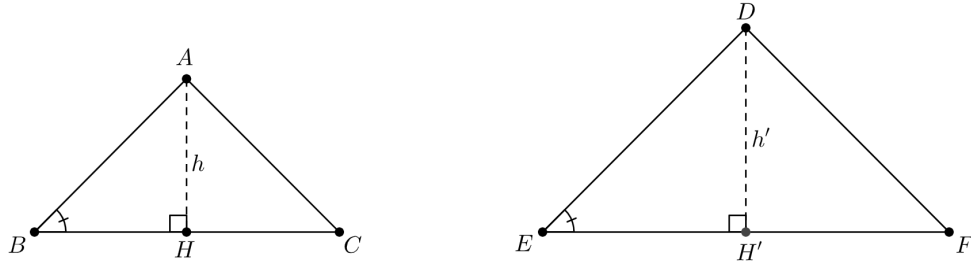
Como queríamos demonstrar. \square

Teorema 3.6. *Sejam ABC e DEF dois triângulos semelhantes com razão de semelhança k . Se h e h' são, respectivamente, as alturas desses triângulos, então*

$$\frac{h}{h'} = k.$$

Demonstração. Na figura seguinte temos ABC e DEF dois triângulos semelhantes, cujas alturas estão respectivamente representas por $\overline{AH} = h$ e $\overline{DH'} = h'$.

Figura 15 – Triângulos semelhantes de alturas h e h' .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Note que, por hipótese $\hat{A}BC = \hat{D}EF$ e como as alturas \overline{AH} e $\overline{DH'}$ formam com as bases \overline{BC} e \overline{EF} respectivamente, ângulos retos, então $\hat{A}HB = \hat{D}H'E$. Logo, os triângulos ABH e DEH' são semelhantes pelo **caso AA**. Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{EH'}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{DH'}} = k.$$

O que implica,

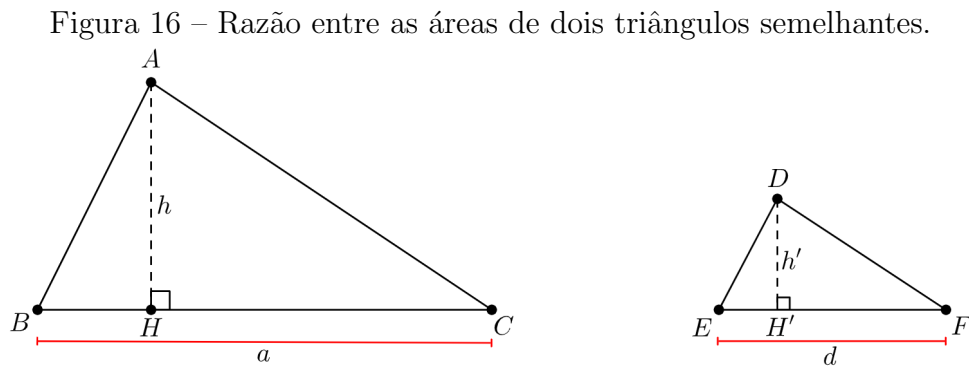
$$\frac{h}{h'} = k.$$

Como queríamos demonstrar. \square

Corolário 3.6.1. *Sejam ABC e DEF dois triângulos semelhantes com razão de semelhança k . Se S e S' denotam, respectivamente as áreas desses triângulos, então*

$$\frac{S}{S'} = k^2.$$

Demonstração. Como S e S' são as respectivas áreas dos triângulos ABC e DEF , conforme a figura 16:



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad S' = \frac{d \cdot h'}{2}$$

Daí,

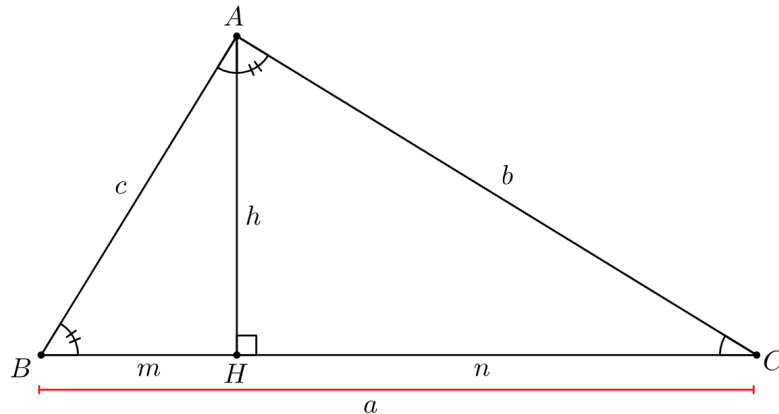
$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{d \cdot h'}{2}} = \frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{d \cdot h'} = \frac{a}{d} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2.$$

Como queríamos demonstrar. \square

3.5 Relações métricas no triângulo retângulo

Nesta seção iremos estudar os resultados referentes às relações métricas no triângulo retângulo. Tais resultados são obtidos por meio da semelhança de triângulos aplicada a um triângulo retângulo.

Seja ABC um triângulo retângulo, onde $\hat{BAC} = 90^\circ$. Traçando a altura \overline{AH} , obtemos dois novos triângulos, ABH e AHC que são semelhantes ao triângulo ABC e também são semelhantes entre si. Vejamos.

Figura 17 – Triângulo retângulo no vértice A .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Com essas informações podemos enunciar a proposição a seguir.

Proposição 3.1. *Em todo triângulo retângulo, a altura do vértice do ângulo reto é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Demonstração. Note que os triângulos ABH e AHC são retângulos em H , pois \overline{AH} é a altura do triângulo ABC .

Como $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ e $\hat{B} + \hat{BAH} = 90^\circ$, temos: $\hat{BAH} = \hat{C}$.

Do mesmo modo, $\hat{HAC} + \hat{C} = 90^\circ$, ou seja, $\hat{HAC} = \hat{B}$.

Portanto, os triângulos ABH e AHC são semelhantes entre si e também são semelhantes ao triângulo ABC . (**caso AA**). Sendo assim, a semelhança entre os triângulos ABH e AHC nos fornece:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}.$$

O que implica,

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}.$$

Isto é,

$$h^2 = m \cdot n$$

como queríamos demonstrar. □

3.5.1 Outras relações métricas.

De forma análoga à proposição anterior e considerando agora a semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle ABH$ temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

O que é equivalente a,

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} = \frac{a}{c}.$$

Ou seja,

$$c^2 = a \cdot m. \quad (3.12)$$

Observe agora que da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle AHC$, temos outra relação.

Ora,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

O que implica,

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n} = \frac{a}{b}. \quad (3.13)$$

Daí,

$$b^2 = a \cdot n. \quad (3.14)$$

Em resumo, as relações (3.12) e (3.14) nos diz que, em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida de um dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção deste cateto.

Ainda, pela expressão (3.13), temos mais uma relação métrica:

$$a \cdot h = b \cdot c. \quad (3.15)$$

Esta última nos diz que, em todo triângulo retângulo, o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura é igual ao produto das medidas dos catetos deste triângulo.

No que segue, vamos apresentar o famoso teorema de Pitágoras, um dos resultados mais importantes da geometria Euclidiana.

Teorema 3.7. *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração. Para provarmos este teorema basta considerarmos as expressões (3.12) e (3.14), uma vez que ambas são consequências da semelhança entre os triângulos ABC , ABH e AHC .

$$c^2 = a \cdot m \text{ e } b^2 = a \cdot n$$

De fato, somando membro a membro essas duas expressões e lembrando que $m+n=a$, obtemos:

$$c^2 + b^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow c^2 + b^2 = a \cdot (m + n) \Rightarrow c^2 + b^2 = a \cdot a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Como queríamos demostrar.

□

4 APLICAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O desafio de educar, diante das circunstâncias que se apresentam, em especial no contexto da Educação Básica, no que se refere à construção de um aprendizado significativo que propicie ao educando habilidades e condições de adquirir conhecimentos e desenvolver um olhar crítico, reflexivo e dedutivo sobre os entes matemáticos é uma tarefa árdua. Acompanhar a evolução tecnológica é uma necessidade que acarreta em novas práticas pedagógicas e que podem tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, prazeroso e compreensível.

Neste Capítulo iremos nos dedicar a fazer uma análise da aplicação de uma sequência didática em duas turmas de 9^o ano (A e B), no turno da manhã, na Escola Municipal de Ensino Fundamental Luís Ribeiro Coutinho, localizada na cidade de Juarez Távora, Paraíba. Escola essa, onde trabalho atuando como professor de matemática.

Fizemos uma comparação entre as turmas mencionadas. Na turma A, apresentamos o conteúdo semelhança de triângulos de forma tradicional e em seguida, utilizamos o GeoGebra como uma ferramenta didática, onde realizamos atividades de constatação dos casos de semelhança tais como as apresentadas na Etapa 2 desta sequência didática, enquanto na turma B abordamos o mesmo assunto apenas do modo tradicional, fazendo uso de caneta e quadro branco.

Nosso estudo se estrutura em autores que defendem a ideia de que a sequência didática é uma forma significativa de ensinar, como é o caso de Lisiane Peretti e Antoni Zabala.

Para (Zabala, 1998), as sequências de atividades ou sequências didáticas são um: “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”

Ou seja, o autor valoriza um ensino organizado, que busque meios de alcançar aquilo que esperamos. Portanto, trabalhar conteúdos em sala de aula de maneira inovadora, utilizando tecnologias da educação de forma significativa, organizando o tempo de cada etapa e avaliando de acordo com os critérios preestabelecidos, são fatores importantes para um resultado satisfatório.

Segundo o artigo **Sequência didática na matemática**, (Peretti; Costa, 2013) destacam que:

Assim, uma sequência didática como recurso para resolução de cálculos faz-se necessária para um melhor entendimento sobre o conteúdo a ser trabalhado, contextualizando-o, gerando um ensino integrado com outras disciplinas, tornando-as com significados que são dados pelas próprias situações didáticas e pela associação aos problemas reais [Peretti e Costa, 2013, p. 3].

Isto é, a autora defende a ideia de que também podemos utilizar esse momento para

realização de atividades cujo objetivo seja esclarecer determinadas operações matemáticas que ainda estão obscuras para os alunos e ao mesmo tempo sugere uma abordagem do conteúdo de forma que haja significado real para os estudantes.

A aplicação desta sequência didática surgiu motivada pelas inquietações geradas no ensino de geometria, em particular, no que diz respeito ao ensino de **semelhança de triângulos** e suas aplicações no Ensino Fundamental. Além disso, sabemos que atualmente professores de todo os níveis de ensino estão enfrentando dificuldades para ganhar a atenção dos alunos em suas aulas, isso se deve, em parte, ao avanço tecnológico global. Crianças, jovens e até mesmo adultos estão cada vez mais acostumados ao uso das telas, pensando nisso, vamos fazer uso do *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, que irá auxiliar na compreensão e na assimilação desses conteúdos por parte dos estudantes.

4.1 Objeto de conhecimento

- Semelhança de triângulos.

4.2 Objetivo

O objetivo principal desta sequência didática é fazer com que os estudantes sejam capazes de **reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes** (EF09MA12), bem como aplicar os principais resultados obtidos da semelhança entre eles.

4.3 Objetivos específicos

- Identificar qual caso de semelhança está sendo aplicado em determinado problema;
- Compreender o conceito de semelhança de triângulos;
- Perceber estes conceitos aplicados em diversas situações do cotidiano escolar e da sociedade como um todo;
- Ser capaz de calcular a razão de semelhança entre dois triângulos;
- Identificar meios para calcular alturas de objetos a partir da projeção de suas sombras;
- Desenvolver estratégias para calcular medidas inacessíveis;
- Entender que a congruência de triângulos é um caso particular da semelhança de triângulos.

4.4 Etapas de desenvolvimento

A presente sequência de atividades está organizada em três etapas básicas, na primeira delas temos o diagnóstico, onde podemos analisar as dificuldades e os conhecimentos que os estudantes já possuem. Na segunda etapa temos a utilização do *software* GeoGebra e a execução das construções referentes aos três casos de semelhança feitos através de um tutorial com o passo a passo para verificação de cada um desses casos, ou seja, aqui utilizamos meios para que os alunos vivam experiências reais de forma dinâmica, eficaz e significativa. Por último, temos a avaliação e as conclusões, onde analisamos o desempenho entre a turma que fez uso do GeoGebra e a que não fez. Observamos os pontos fracos e fortes e refletimos sobre a contribuição desse *software* no processo de ensino-aprendizagem.

A sequência didática em tela, foi desenvolvida e executada em cinco encontros com a turma do 9º ano A, onde cada encontro equivale a duas horas-aula de quarenta e cinco minutos cada.

Etapas 1: Semelhança de triângulos

4.4.1 Conhecimentos prévios

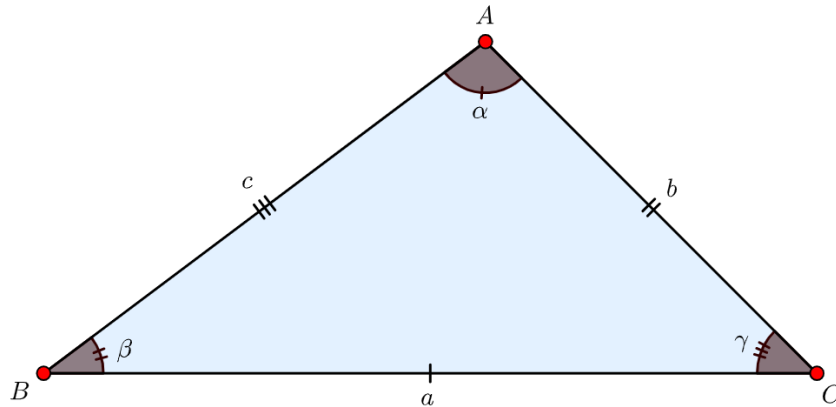
“Ao iniciar a sequência didática, é necessário efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados, jogos, análise e reflexão” (Peretti; Costa, 2013).

Ou seja, é o momento de verificar o que os estudantes já sabem a respeito do conteúdo abordado, nesta etapa pode ser aplicado um teste de sondagem para diagnosticar melhor os conhecimentos prévios dos alunos. Também vale ressaltar aqui, a importância da construção/confecção de materiais didáticos por parte dos estudantes. Por exemplo, a construção de pirâmides feitas com cartolina, papelão ou outros materiais semelhantes é uma ótima atividade para posteriormente ser utilizada como exemplo de um problema de medição de alturas inacessíveis.

No que segue, temos duas questões que foram utilizadas para sondar os conhecimentos prévios dos alunos acerca de conceitos básicos da Geometria Plana, referentes aos elementos de um triângulo e à semelhança de triângulos.

Exercícios

1. Considere o triângulo a seguir.

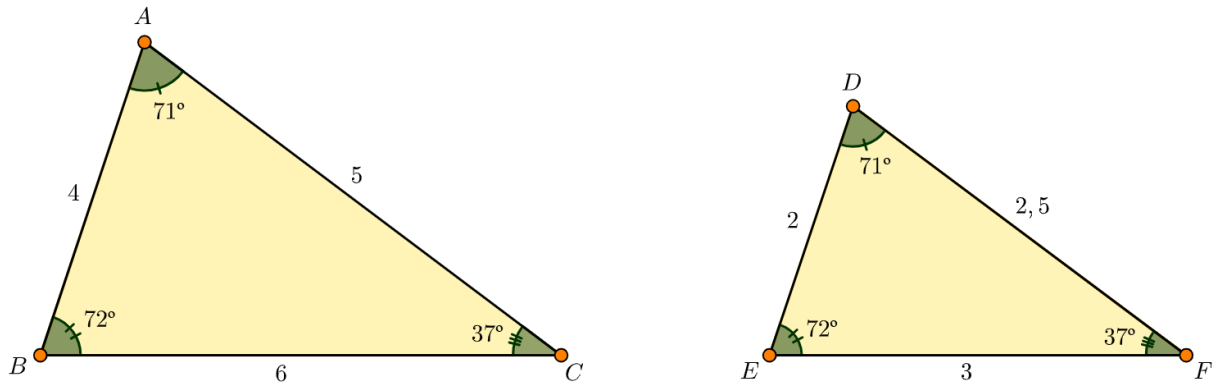
Figura 1 – Triângulo ABC .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Responda:

- (a) Quantos vértices tem esse triângulo? Quais são eles?
- (b) Quantos ângulos internos possui o triângulo? Quais são eles?
- (c) Quem são os lados desse triângulo?
- (d) Quais são as medidas dos lados desse triângulo? Justifique sua resposta.
- (e) Esse triângulo é escaleno? Justifique sua resposta.
- (f) O que é um triângulo equilátero? Esse triângulo é isósceles? Justifique.
- (g) O que é um triângulo acutângulo?
- (h) Quando é que um triângulo é classificado como triângulo retângulo? E obtusângulo?
- (i) Quanto vale a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo?
- (j) Como podemos nomear esse triângulo?

2. Considere os triângulos ABC e DEF , ilustrados na figura a seguir.

Figura 2 – Triângulos ABC e DEF .

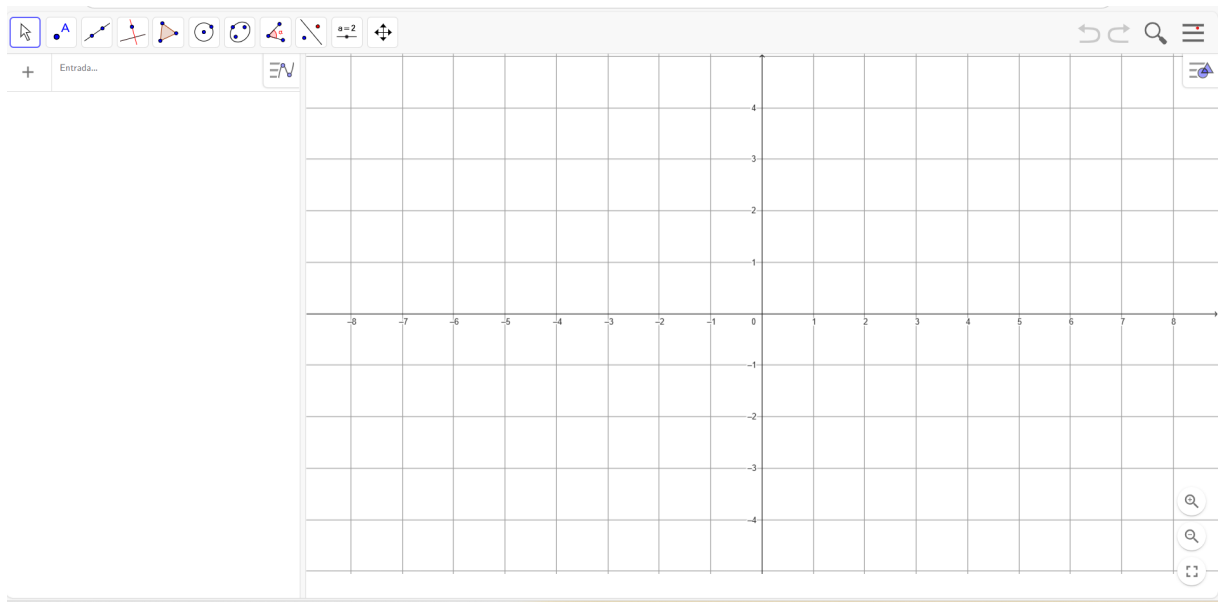
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

- Esses triângulos são semelhantes?
- Para que esses dois triângulos sejam semelhantes é necessário que todos os seus ângulos sejam congruentes e todos os seus lados correspondentes sejam respectivamente proporcionais?
- Se apenas dois ângulos do triângulo ABC forem congruentes a dois ângulos do triângulo DEF , esses triângulos são semelhantes? Justifique.
- Se apenas os três lados do triângulo ABC forem proporcionais aos três lados do triângulo DEF , isso nos garante que esses triângulos são semelhantes? Justifique.
- Se o triângulo ABC apresenta apenas dois lados proporcionais a dois lados do triângulo DEF e o ângulo compreendido entre esses dois lados no triângulo ABC é congruente ao ângulo compreendido entre os dois lados no triângulo DEF , então esses dois triângulos são semelhantes? Justifique.

De forma resumida, a aplicação desse teste diagnóstico apontou que a maioria dos estudantes dessa turma, apresentam dificuldades e falta de domínio dos entes geométricos. Mais de 90% não têm segurança em suas falas sobre as respostas do questionário proposto.

Nesse primeiro contato também é apresentado aos estudantes o GeoGebra, estes estudantes tiveram a oportunidade de conhecer as principais ferramentas desse *software*. Entre outras coisas, pode-se apresentar aos alunos alguns conceitos como pontos, retas (paralelas, perpendiculares, concorrentes, bissetrizes, mediatrizes, etc.), polígonos, circunferências, ângulos e muitas outras opções. Veja a figura.

Figura 3 – Apresentação da interface do *software* GeoGebra à turma.



Fonte: Print screen do GeoGebra.

Figura 4 – Apresentação do *software* GeoGebra à turma.



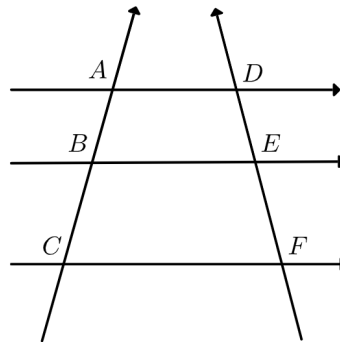
Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

4.4.2 Teorema de Tales

Aqui apresentamos para a turma o Teorema de Tales. Inicialmente retomamos a ideia de retas paralelas e também de transversal ao feixe. Em seguida, mostramos aos alunos enunciado formal do Teorema de Tales, a saber:

Teorema 4.1. *Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.*

Figura 5 – Teorema de Tales.



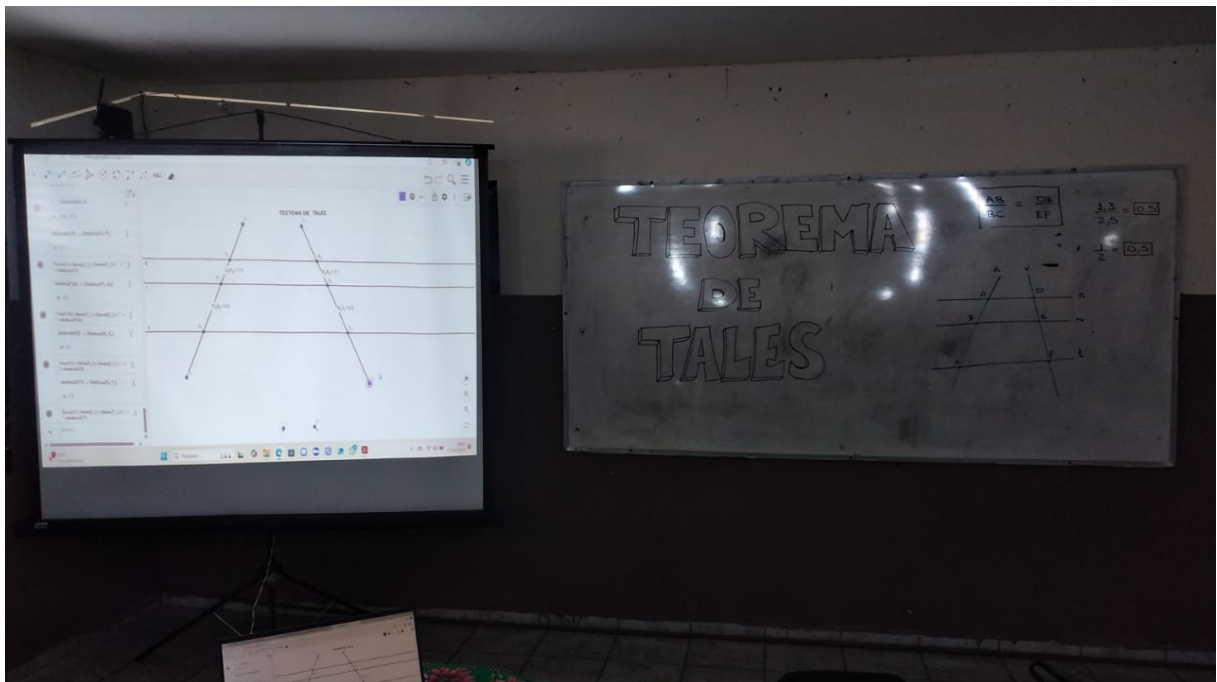
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em resumo, o teorema de tales afirma que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}.$$

Nesse momento, sugere-se utilizar o GeoGebra para convencer os alunos de que essas proporcionalidades entre os segmentos realmente acontecem. Vejamos.

Figura 6 – Abordando o Teorema de Tales no GeoGebra.

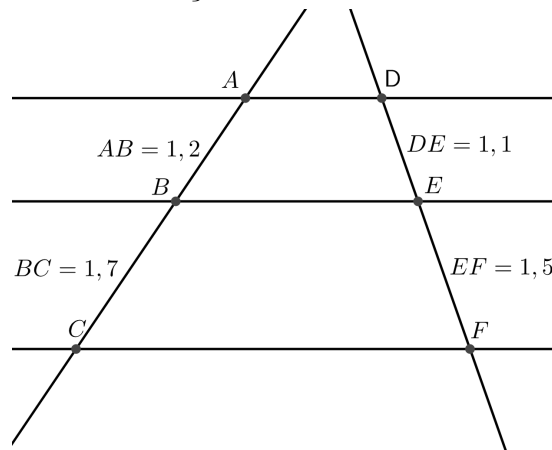


Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

- **Teste prático: Verificando com o GeoGebra.**
 - Com o *software* GeoGebra aberto construa três retas paralelas, r , s e t ;
 - Construa outras duas retas, u e v , transversais às paralelas;

- Os pontos de intersecção entre as retas paralelas e as retas transversais nomeie por A, B, C, D, E e F , respectivamente;
- Com a ferramenta **distância** clique no ponto A e depois no ponto B , automaticamente aparecerá: $\overline{AB} = 1,2$;
- Repita o processo para os segmentos $\overline{BC}, \overline{DE}$ e \overline{EF} .

Figura 7 – Verificação no GeoGebra com os alunos.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Após o término do processo de construção pode-se concluir que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{1,2}{1,7} = \frac{1,1}{1,5} = 0,7.$$

Lembrete: o número 0,7 que se obtém da razão entre os segmentos proporcionais chama-se **constante de proporcionalidade**.

4.4.3 Triângulos semelhantes

Definição 4.1. Dois triângulos são semelhantes se possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

• Casos de semelhança de triângulos.

1. **(LLL)** Se dois triângulos quaisquer têm os seus três lados correspondentes diretamente proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.
2. **(AA)** Se dois triângulos quaisquer têm dois de seus ângulos internos correspondentes congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

3. **(LAL)** Se dois triângulos quaisquer têm dois de seus lados correspondentes diretamente proporcionais e se o ângulo compreendido entre esses lados no primeiro triângulo for congruente ao ângulo compreendido entre os lados no segundo triângulo, então esses triângulos são semelhantes.

Estes casos de semelhança que acabamos de listar são apresentados aos estudantes sem suas demonstrações, nosso objetivo aqui é utilizar o *software* GeoGebra para convencê-los de que é possível construir um triângulo semelhante a um dado triângulo utilizando apenas um dos casos de semelhança mencionados. Essas três construções foram feitas em uma sequência de seis aulas em que para cada construção são destinadas duas horas-aula. A segunda etapa nos mostra como fazer esse passo a passo.

Etapla 2: Construindo triângulos semelhantes com o uso do GeoGebra.

Esse é o momento de construir triângulos semelhantes, isto é, dado um triângulo qualquer, como podemos construir outro triângulo semelhante ao primeiro? A resposta para essa indagação é dada através dos casos de semelhança listados anteriormente.

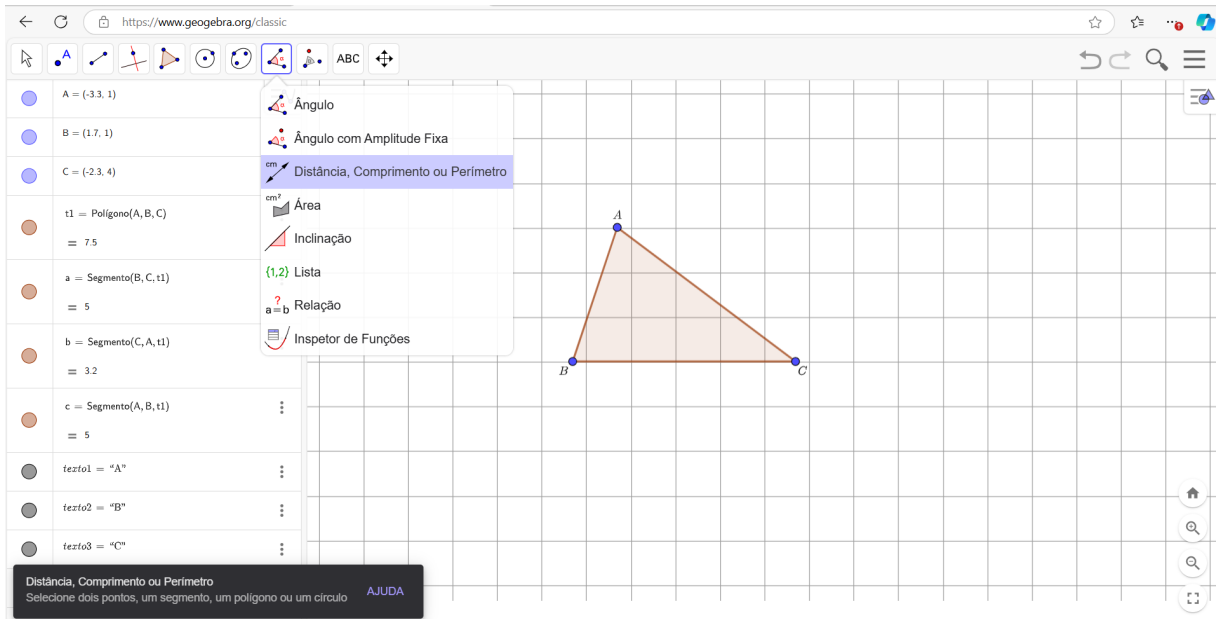
Faremos agora três construções referentes aos casos mencionados, utilizaremos o GeoGebra como uma ferramenta auxiliadora e facilitadora do entendimento desses critérios por parte dos estudantes.

- **Construção 1.** Dado o triângulo ABC , construa o triângulo DEF semelhante ao primeiro, utilizando apenas o **caso (LLL)**.

Passos:

1. Com o software GeoGebra construa um triângulo ABC qualquer;
2. Com a ferramenta **distância**, meça o comprimento do lado \overline{BC} ;

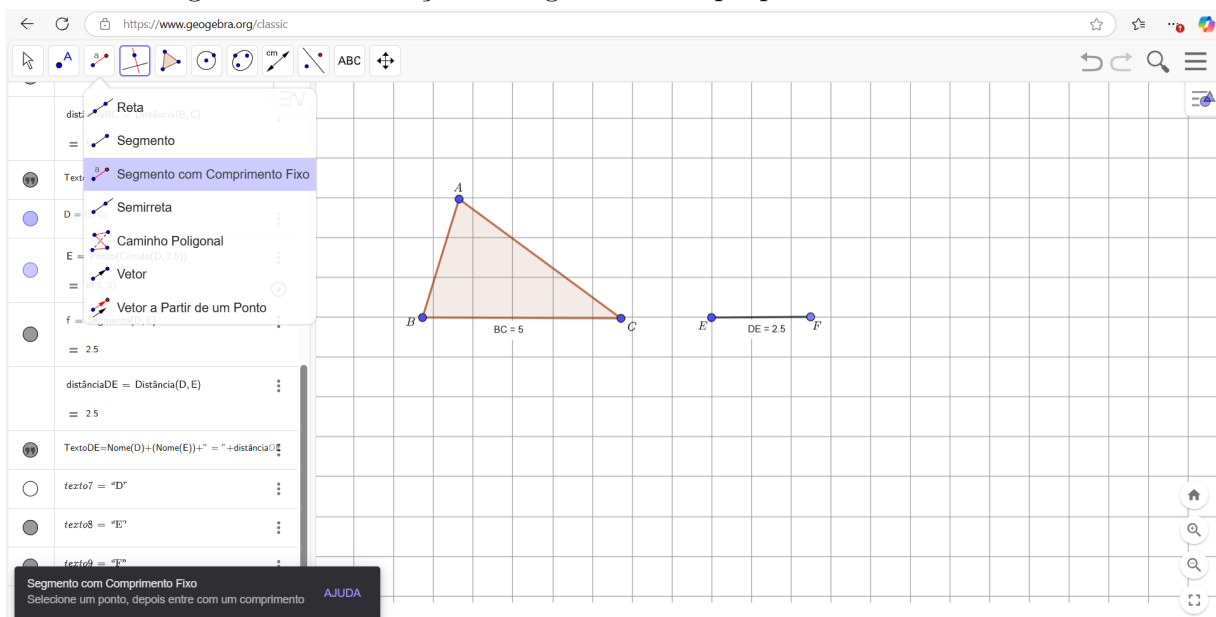
Figura 8 – Triângulo ABC prestes a ter o lado \overline{BC} medido.



Fonte: Print screen do GeoGebra.

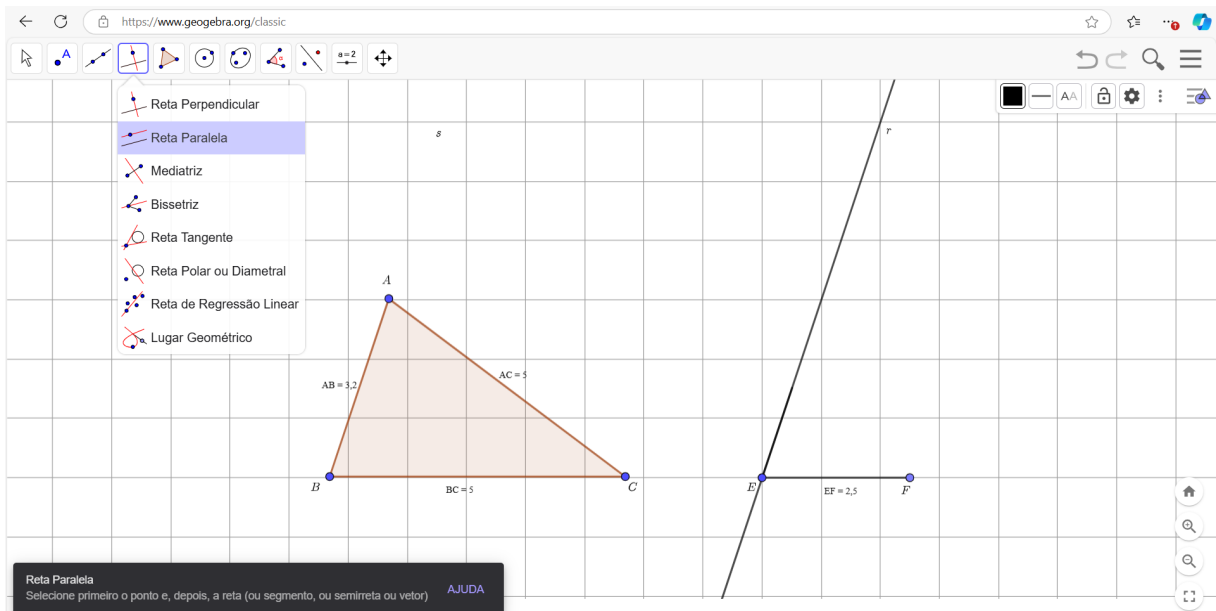
- Escolha uma constante k . Com a ferramenta **segmento de comprimento fixo**, construa o segmento \overline{EF} de comprimento proporcional ao comprimento do lado \overline{BC} , tal que $\overline{EF} = k \cdot \overline{BC}$;

Figura 9 – Construção do segmento \overline{EF} proporcional ao lado \overline{BC} .



Fonte: Print screen do GeoGebra.

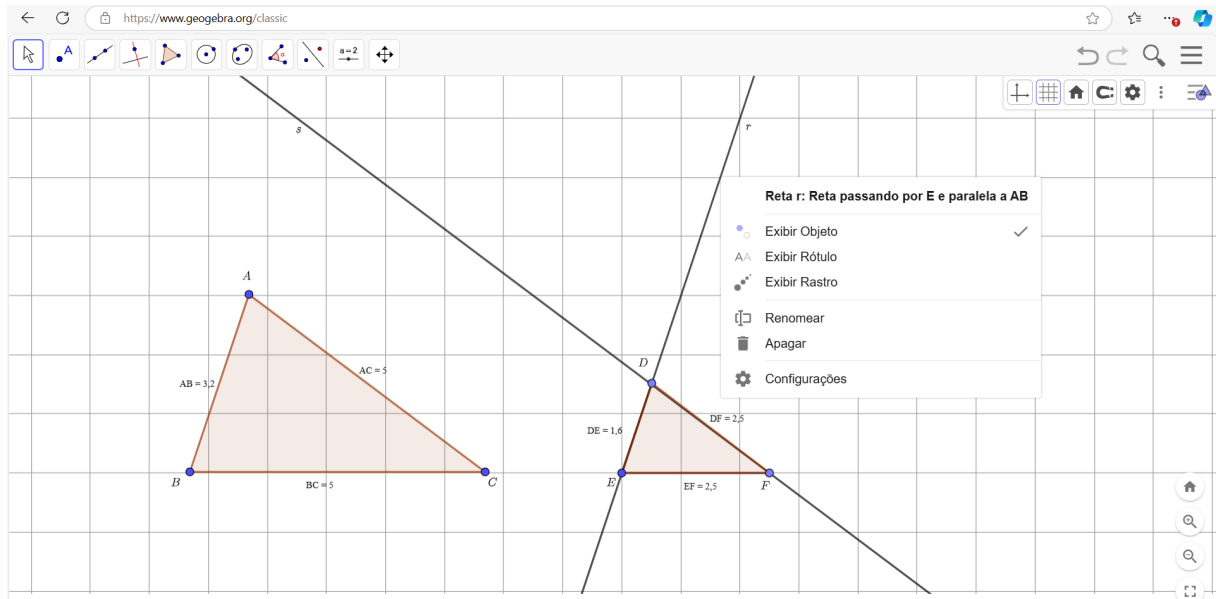
- Em seguida, selecione a opção **reta paralela** e construa uma reta r paralela ao lado \overline{AB} que passa pelo ponto E ;

Figura 10 – Construção da reta paralela r .

Fonte: Print screen do GeoGebra.

5. Com a ferramenta **segmento de comprimento fixo**, construa sobre a reta r o segmento \overline{DE} , de comprimento proporcional ao lado \overline{AB} , escolha a mesma constante k do passo 3;
6. Faça o mesmo com o lado \overline{AC} , com a ferramenta **reta paralela**, construa uma reta s paralela ao lado \overline{AC} passando pelo ponto F ;
7. Com a ferramenta **segmento de comprimento fixo**, construa sobre a reta s o segmento \overline{DF} , de comprimento proporcional ao lado \overline{AC} ;
8. Denote a intersecção das retas r e s pelo ponto D ;

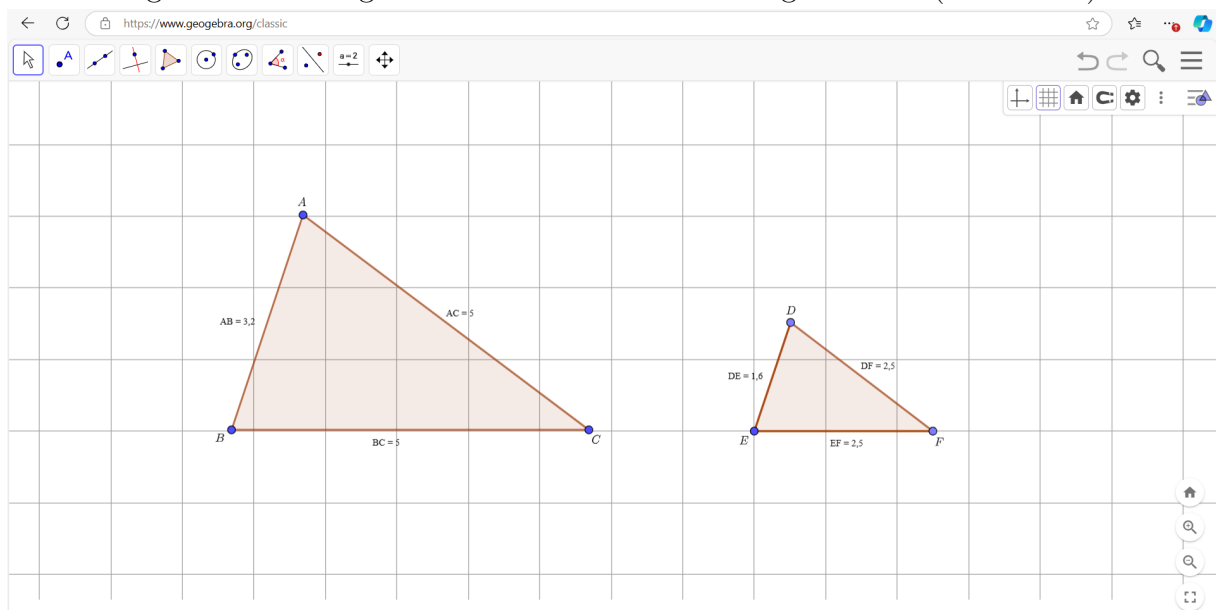
Figura 11 – Segmentos \overline{DE} e \overline{DF} sobre as retas r e s .



Fonte: Print screen do GeoGebra.

9. Agora, com a ferramenta **polígono**, clique nos pontos D , E e F , formando o triângulo DEF .
10. Por fim, apague as retas paralelas que foram traçadas para auxiliar na construção. Faça isso clicando com o botão direito do *mouse* sobre a reta e depois clique na opção **exibir objeto**.

Figura 12 – Triângulo DEF semelhante ao triângulo ABC (caso LLL).



Fonte: Print screen do GeoGebra.

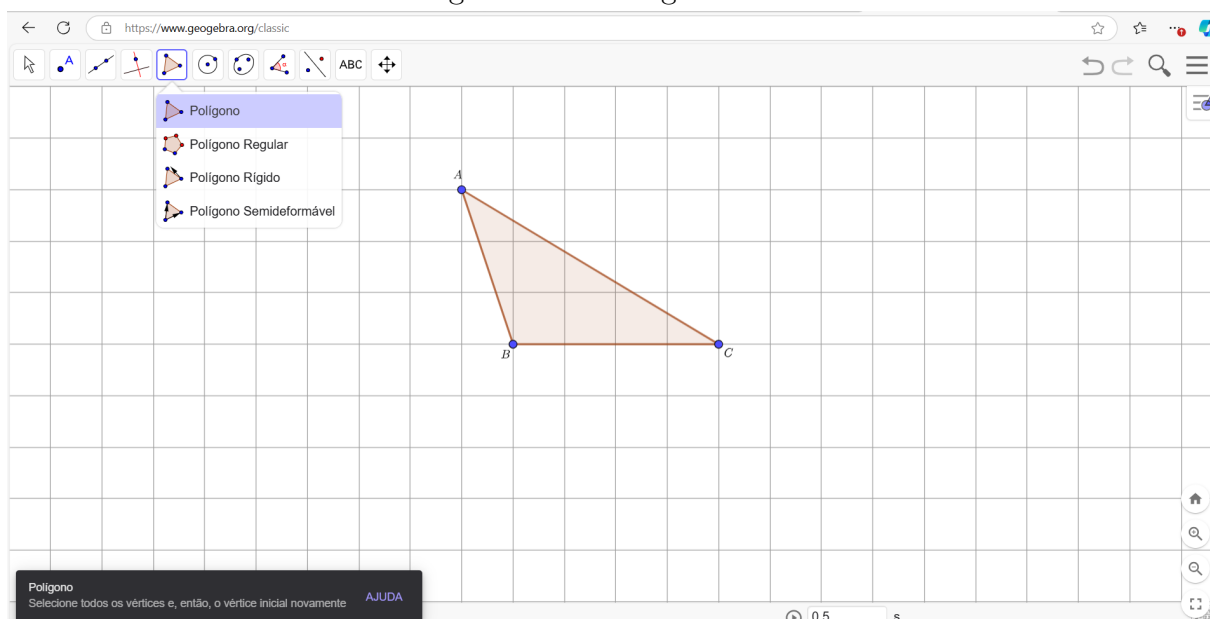
Agora, vamos justificar o **caso AA** através da **construção 2**.

- **Construção 2.** Dado o triângulo ABC , construa o triângulo DEF semelhante ao primeiro utilizando apenas o **caso AA**.

Passos:

1. Com o *software* GeoGebra, construa um triângulo ABC qualquer;

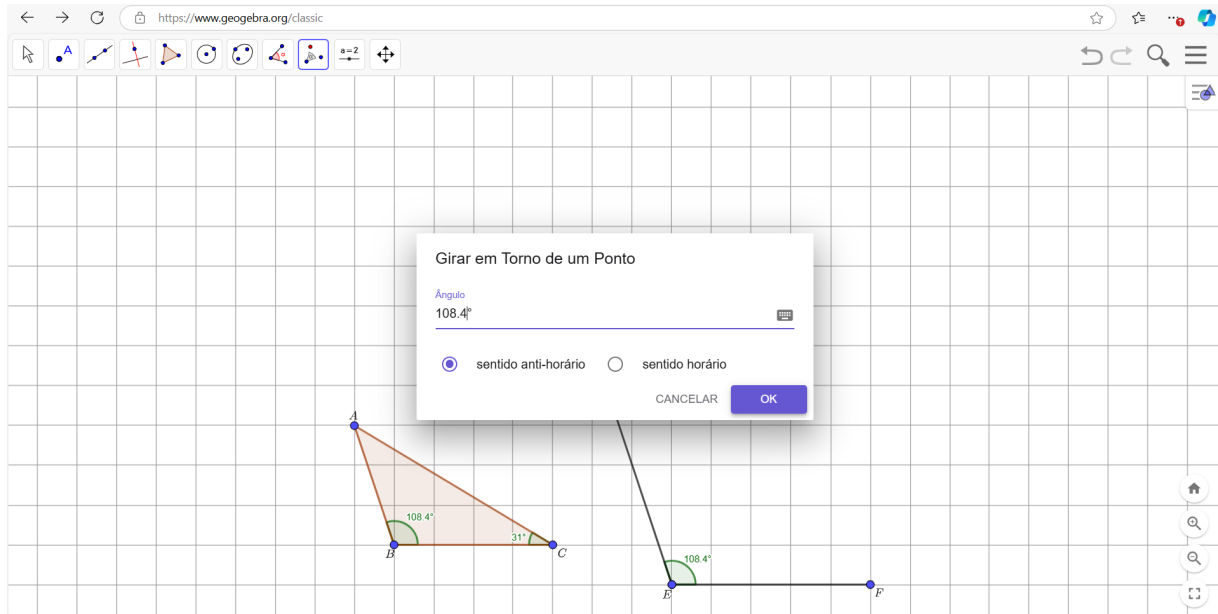
Figura 13 – Triângulo ABC .



Fonte: Print screen do GeoGebra.

2. Construa o segmento de reta \overline{EF} de qualquer tamanho utilizando a ferramenta **segmento**;
3. Clique na opção **girar em torno de um ponto**, em seguida, clique no ponto E e depois sobre o segmento \overline{EF} . Nesse momento aparecerá uma caixa de diálogo perguntando a medida do ângulo desejado.
4. Informe a medida do ângulo, que deverá ser a mesma do ângulo \widehat{ABC} , ainda na caixa de diálogo clique na opção **sentido anti-horário**.

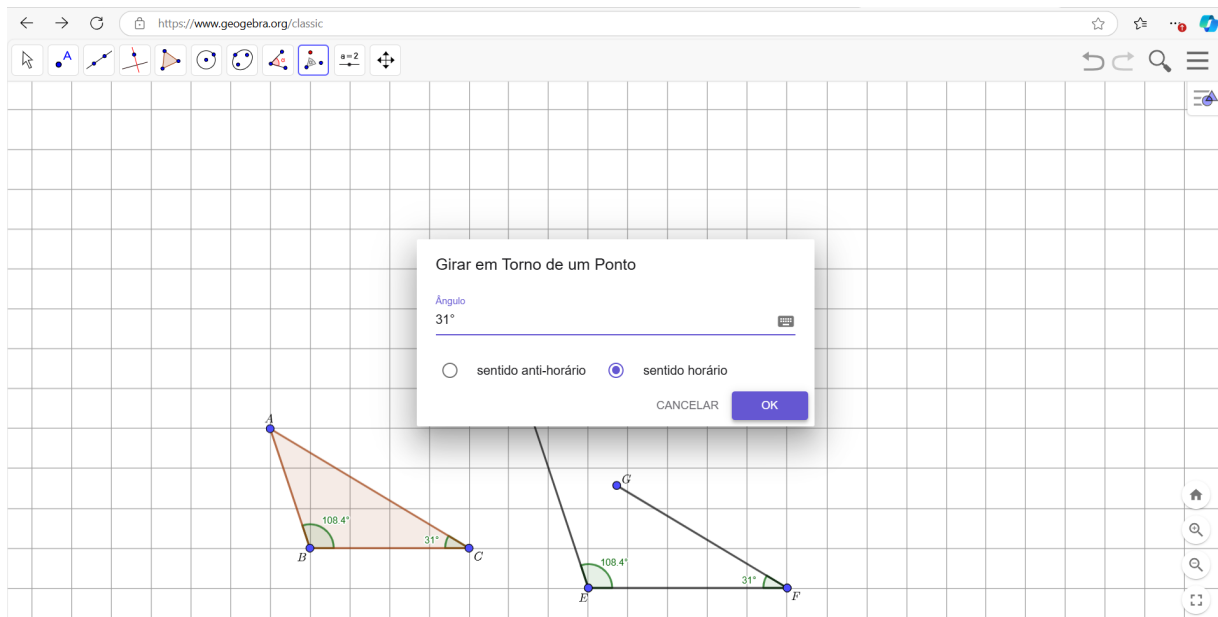
Figura 14 – Construindo o ângulo $\widehat{E} = 108,4^\circ$.



Fonte: Print screen do GeoGebra.

5. Novamente, clique na ferramenta **girar em torno de um ponto**, clique no ponto F e depois sobre o segmento \overline{EF} . Na caixa de diálogo digite a medida do ângulo desejado, que deverá ser a mesma do ângulo \widehat{ACB} . Ainda na caixa de diálogo clique em **sentido horário**.

Figura 15 – Ângulos \widehat{E} e \widehat{F} depois de construídos.

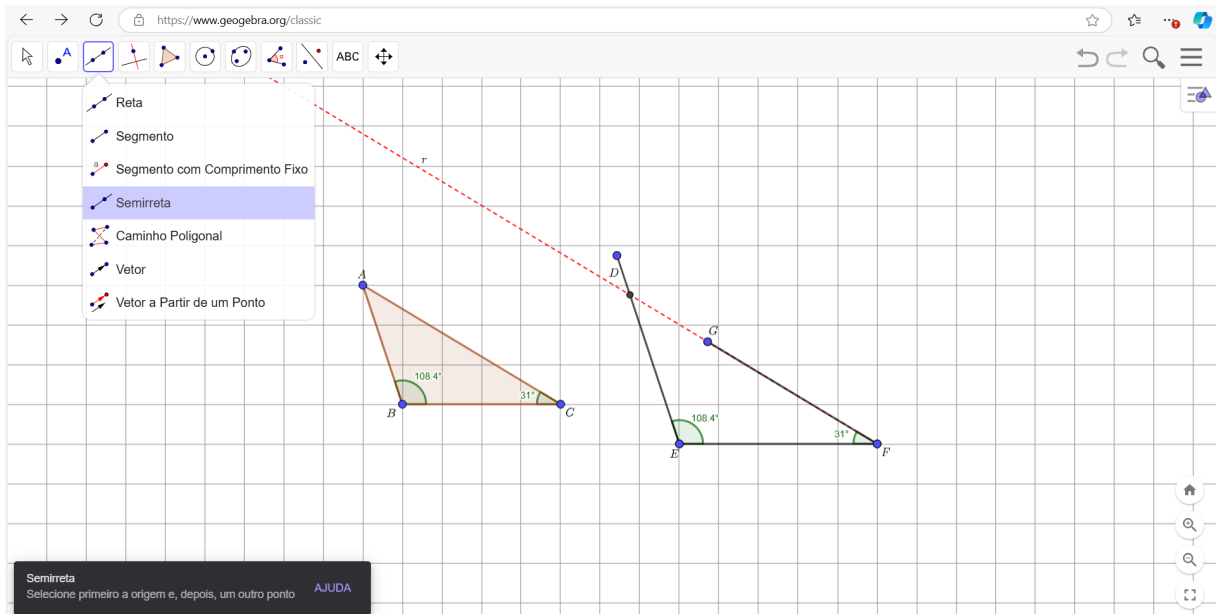


Fonte: Print screen do GeoGebra.

6. Prolongue o segmento auxiliar \overline{FG} . Faça isso com a ferramenta **semirreta**. Trace

a semirreta r de origem em F que contém G . Na intersecção da semirreta com o lado oposto marque o ponto D .

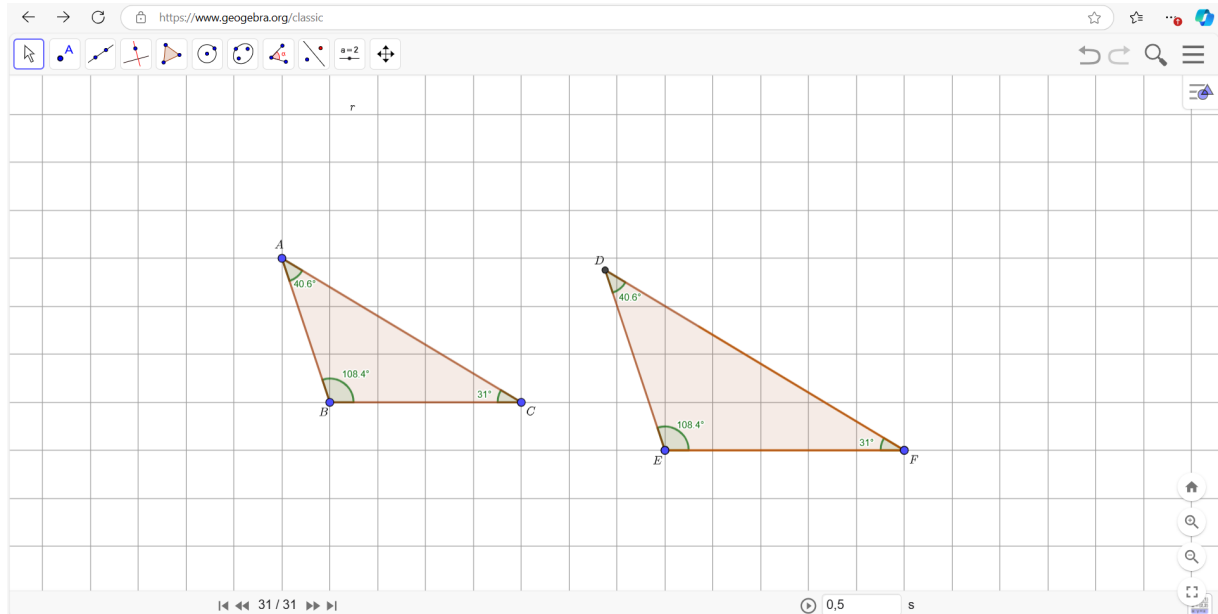
Figura 16 – Prolongamento do segmento \overline{FG} pela semirreta r .



Fonte: Print screen do GeoGebra.

7. Com a ferramenta polígono, clique nos pontos D , E e F , obtendo o triângulo DEF .
8. Finalmente, clique com o botão direito do *mouse* sobre cada um dos segmentos auxiliares que formaram os ângulos e, em seguida, clique em **exibir objeto**, fazendo com que só reste o triângulo DEF , semelhante ao triângulo ABC pelo **caso AA**.
9. Ainda, de acordo com a definição de triângulos semelhantes, podemos constatar a proporcionalidade entre os lados dos triângulos construídos, basta utilizar a ferramenta **distância** para medir cada um dos lados desses triângulos.

Figura 17 – Triângulo DEF semelhante ao triângulo ABC (caso AA).



Fonte: Print screen do GeoGebra.

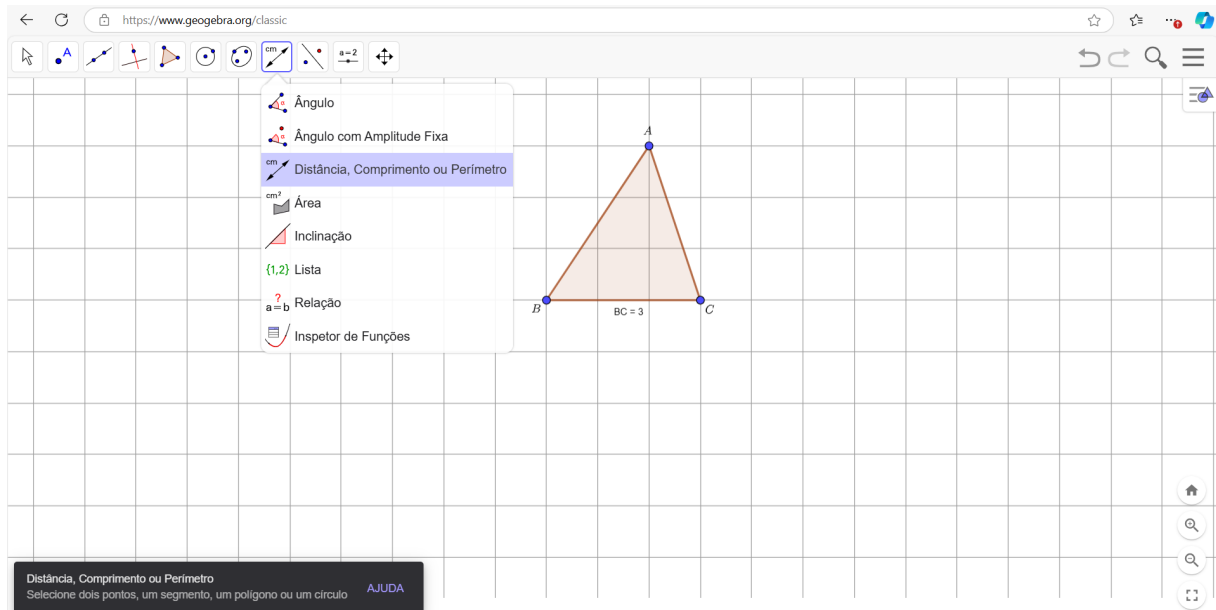
A seguir, temos a última construção que justifica a semelhança entre dois triângulos pelo **caso LAL**.

- **Construção 3.** Dado o triângulo ABC , construa o triângulo DEF semelhante ao primeiro, utilizando apenas o **caso LAL**.

Passos:

1. Com o *software* GeoGebra aberto, desenhe um triângulo ABC qualquer;
2. Na janela 8 clique na opção **distância**, clique nos pontos B e C a fim de obter a medida do lado \overline{BC} ;

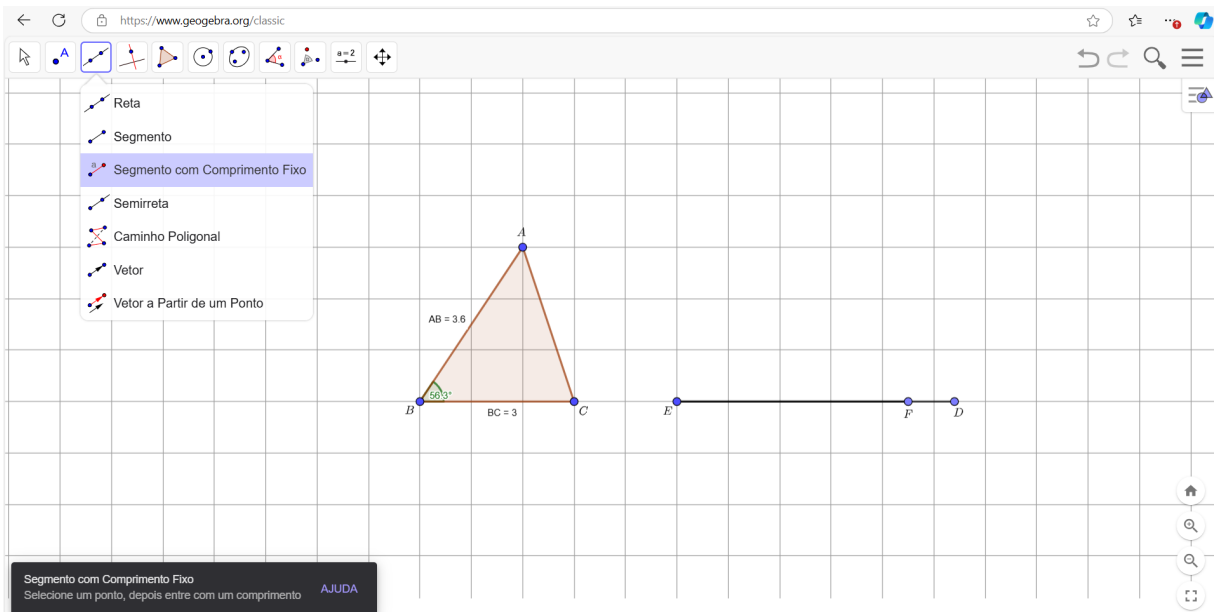
Figura 18 – Triângulo ABC com o lado \overline{BC} sendo medido com a ferramenta **distância**.



Fonte: Print screen do GeoGebra.

3. Escolha arbitrariamente uma constante de proporcionalidade. Com a ferramenta **segmento com comprimento fixo** construa o segmento \overline{EF} proporcional ao lado \overline{BC} , tal que $\overline{EF} = k \cdot \overline{BC}$;
4. Novamente com a ferramenta **segmento com comprimento fixo**, construa o segmento \overline{ED} . Faça isso clicando no ponto E e depois clique sobre o segmento \overline{EF} , em seguida digite a medida de comprimento desejada na caixa de diálogo, essa medida deve ser proporcional ao lado \overline{AB} ;

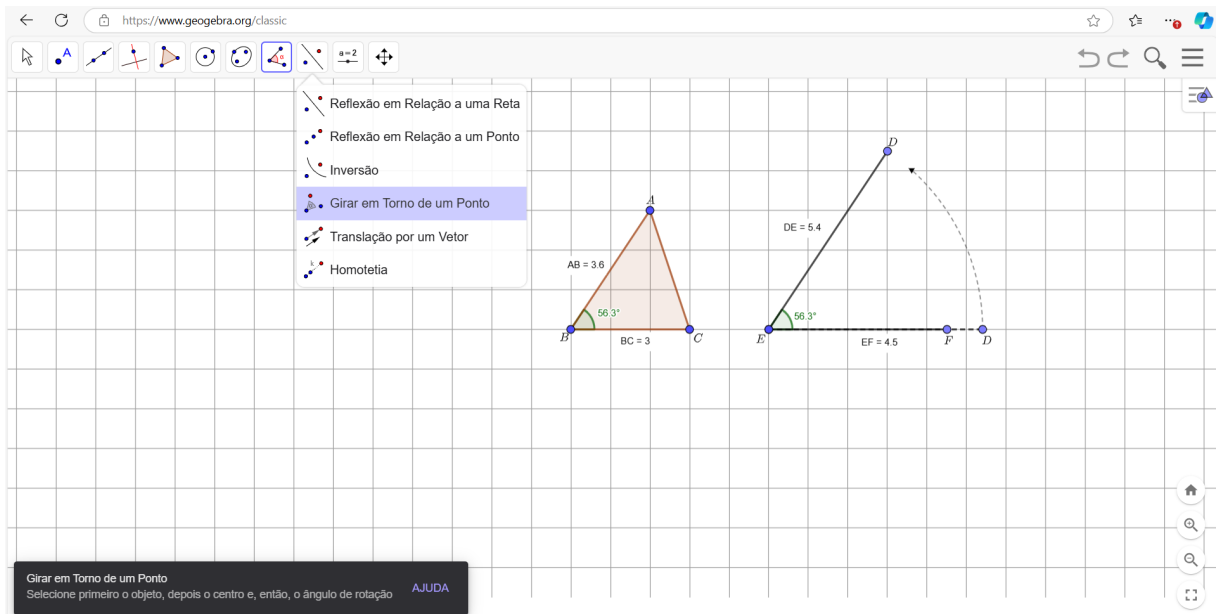
Figura 19 – Construção dos segmentos \overline{EF} e \overline{DE} proporcionais aos segmentos \overline{BC} e \overline{AB} , respectivamente.



Fonte: Print screen do GeoGebra.

5. Com a ferramenta **girar em torno de um ponto**, clique no ponto D e em seguida clique no ponto E , na caixa de diálogo insira a medida do ângulo desejado, que deve ser a mesma do ângulo \widehat{ABC} ;
6. Após utilizar a opção **girar em torno de um ponto**, aparecerá os segmentos \overline{DE} e \overline{EF} e o ângulo \widehat{DEF} compreendido entre eles, cuja medida é a mesma do ângulo \widehat{ABC} .

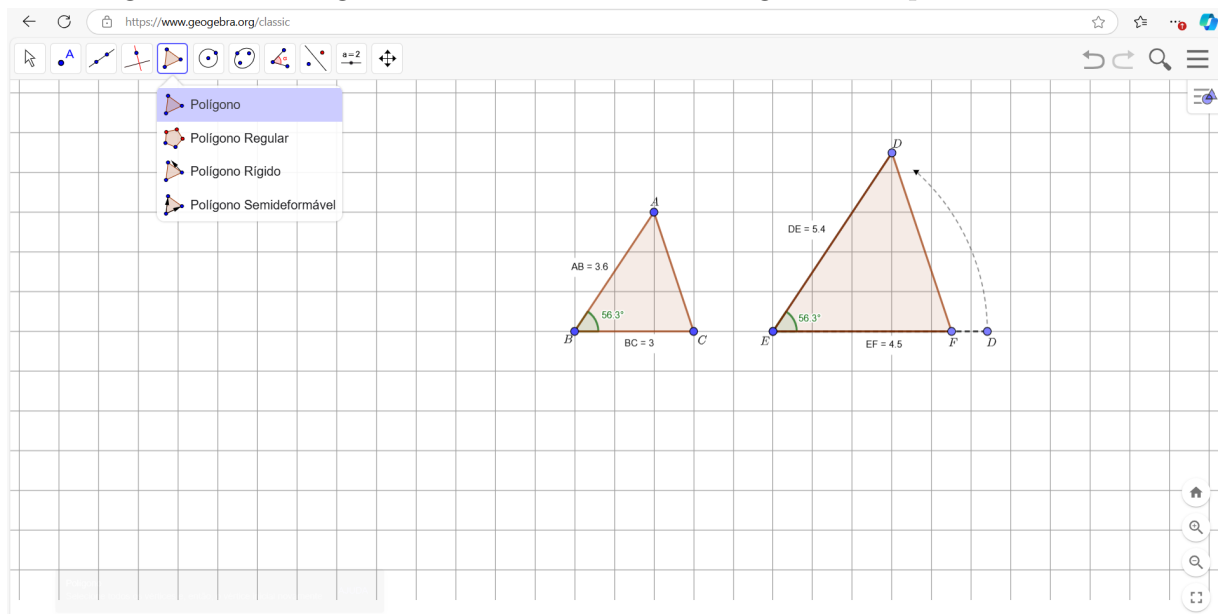
Figura 20 – Segmento \overline{DE} sendo deslocado $56,3^\circ$ no sentido anti-horário em relação ao segmento \overline{EF} .



Fonte: Print screen do GeoGebra.

7. Com a ferramenta **polígono** selecionada, clique nos pontos D , E e F , obtendo o triângulo DEF semelhante ao triângulo ABC pelo **caso LAL**.

Figura 21 – Triângulo DEF semelhante ao triângulo ABC pelo **caso LAL**.



Fonte: Print screen do GeoGebra.

8. Ainda, de acordo com a definição de semelhança entre dois triângulos, pode-se verificar que os lados do triângulo ABC são respectivamente proporcionais aos lados

do triângulo DEF .

Etapas 3: Uma aplicação da semelhança de triângulos: Cálculo de alturas inacessíveis.

Nessa aula os alunos confeccionaram algumas pirâmides de bases quadrangular, a turma foi dividida em cinco grupos de cinco e seis alunos e cada grupo fica responsável por construir o sólido.

Figura 22 – Alunos confeccionando pirâmides.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Um dos objetivos dessa atividade é fazer com que os estudantes tenham uma maior percepção das formas geométricas tridimensionais. Outro ponto importante é a utilização dessas pirâmides em uma atividade prática, onde os alunos serão capazes de calcular as alturas dessas pirâmides utilizando os conhecimentos adquiridos no estudo da semelhança de triângulos a partir de projeções de sombras.

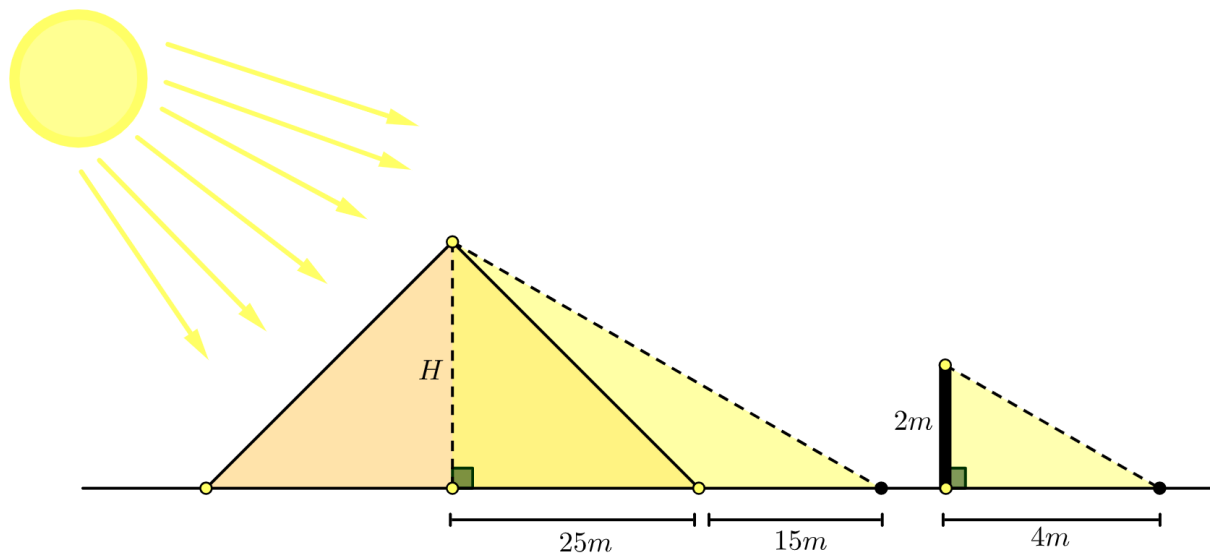
Atividade Prática Avaliativa

Nesse contexto, aplicamos os conhecimentos de semelhança para realizar uma atividade prática com a turma, essa tarefa pode ser feita individualmente ou em pequenos grupos. No nosso caso, vamos realizar as medições das alturas das pirâmides confeccionadas pelos alunos.

Como as pirâmides construídas foram todas retas, então podemos aplicar os conceitos de semelhança e obter uma boa aproximação nos resultados de suas alturas. Dessa forma, os alunos devem colocar as pirâmides confeccionadas em uma posição que a luz da lâmpada da sala de aula faça o papel do Sol, também podemos fazer essa simulação com lâmpada, bocal e fios trazidos de casa. Nesse momento devemos orientar os alunos para colocarem uma régua verticalmente ao lado da pirâmide, de modo que a luz da lâmpada também projete a sombra da régua e da pirâmide simultaneamente. Os estudantes precisam entender que podemos medir metade da base da pirâmide e o comprimento da sombra projetada pela lâmpada. Do mesmo modo, podemos medir a altura da régua e o

comprimento de sua sombra. É hora de mostrar aos alunos a representação das sombras da pirâmide e da régua através de triângulos semelhantes. A próxima Figura exemplifica uma situação parecida que foi usada como exemplo no quadro, porém as medidas não estão em proporção.

Figura 23 – Calculando a altura de uma pirâmide.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

De acordo com os estudos desenvolvidos ao longo dessa sequência de atividades e com os conhecimentos prévios dos alunos acerca do assunto, aplicamos as relações de semelhança entre o triângulo maior e o menor ou vice-versa e obtemos o valor da altura procurada.

$$\frac{H}{2m} = \frac{25m + 15m}{4m} \Rightarrow \frac{H}{2m} = \frac{40m}{4m} \Rightarrow 4H = 80m \Rightarrow H = 20m.$$

4.5 Conclusão

De acordo com o que foi analisado na aplicação desta sequência didática, pode-se notar que, atrair a atenção dos alunos está sendo um desafio cada vez maior, é evidente a dificuldade de concentração dos jovens na sala de aula. Fazendo-se uso do *software* GeoGebra, notamos inicialmente uma maior concentração dos alunos, porém, após os primeiros dez minutos de aula, em média, percebe-se o início da desconcentração dos mesmos.

Entretanto, quando paramos para observar e comparar o desempenho de aprendizado e fixação das ideias entre a turma que foi trabalhada com o *software* e a turma que não fez uso do GeoGebra, podemos concluir que esta ferramenta educacional proporciona grandes avanços no ensino da Geometria, como por exemplo a visualização de figuras como um todo e também das partes que as constituem: pontos, retas, ângulos, segmentos, etc.

Na (BNCC, 2018), especificamente em suas competências gerais 4 e 5, é ressaltado o uso das tecnologias como uma prática que incentiva a modernização dos recursos:

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. (Base Nacional Comum Curricular).
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Base Nacional Comum Curricular).

Dessa forma, temos a convicção de que o uso do GeoGebra nas aulas de matemática desempenha o seu papel de forma brilhante, contribuindo significativamente para bem comum dos nossos alunos. Notamos essa contribuição fortemente quando comparamos o desempenho entre as turmas A e B envolvidas neste trabalho.

Os alunos da turma A que vivenciaram as experiências concretas com o uso do GeoGebra demonstraram melhor rendimento e engajamento nas atividades realizadas, enquanto a turma B não demonstrou muito interesse e envolvimento com as atividades.

5 ALGUNS BELOS PROBLEMAS DE GEOMETRIA

Neste Capítulo, seguindo as referências de autores como (Iezzi, 2013), (Oliveira, 2017), (Caminha, 2022) e referências internacionais voltadas a problemas olímpicos como (Hang; Wang, 2017) e o livro intitulado por Geometría Una Visión de La Planimetría... (2014) (Geometría, 2014)), abordamos resultados importantes da geometria plana e os apresentamos de forma detalhada, explicitando as etapas das demonstrações por meio de figuras. Veremos alguns problemas de geometria que em geral não são apresentados em livros didáticos da educação básica. Mais precisamente, iremos nos dedicar aos teoremas das bissetrizes internas e externas e aos teoremas de Ceva, Menelaus e suas aplicações. Os resultados apresentados neste capítulo foram utilizados em uma oficina preparatória para a Olimpíada Paraibana de Matemática (OPM) em Setembro de 2024.

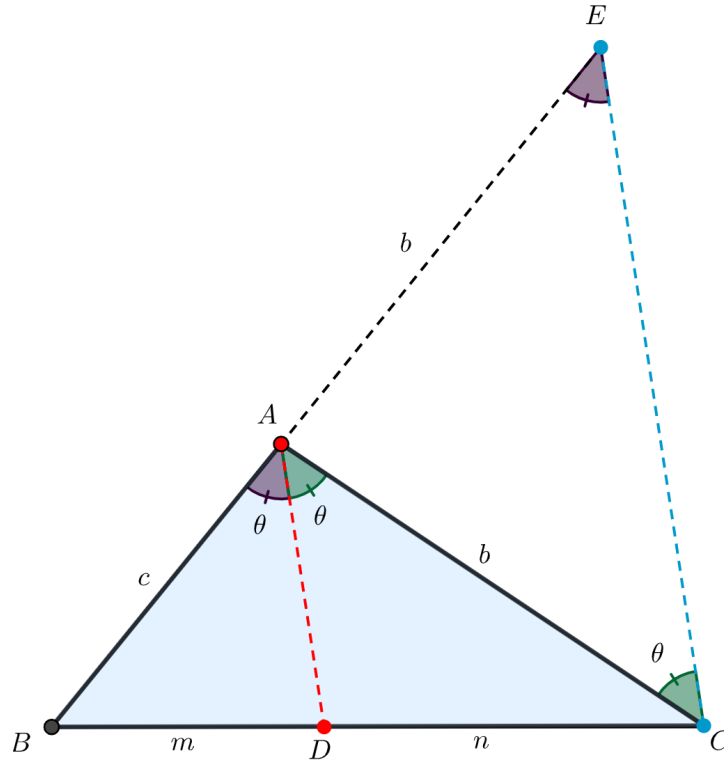
5.1 Teorema da Bissetriz Interna

Veremos a seguir um importante resultado da geometria, o teorema da bissetriz interna. Com este resultados podemos resolver vários problemas de matemática, tanto nas salas de aulas quanto em outras ocasiões como cursos, oficinas e formações que são voltados para a resolução de problemas.

Teorema 5.1. (*Bissetriz Interna*) *Uma bissetriz interna de um triângulo, divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC como mostra a figura a seguir.

Figura 1 – Teorema da Bissetriz Interna.



Fonte: Oliveira, 2017.

No prolongamento do lado \overline{AB} , tomemos o ponto E de tal modo que o segmento $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$. Note que o segmento \overline{BE} é transversal em relação às paralelas \overline{AD} e \overline{CE} , o que implica,

$$\angle BAD = \angle BEC = \theta.$$

Por outro lado, o segmento \overline{AC} também é transversal em relação às paralelas \overline{AD} e \overline{CE} , ou seja,

$$\angle CAD = \angle ACE = \theta.$$

Observe que o triângulo ACE é isósceles de base \overline{CE} , isto é, o lado $\overline{AC} = \overline{AE} = b$. Aplicando o teorema de Tales no triângulo BCE , temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{c}{b}.$$

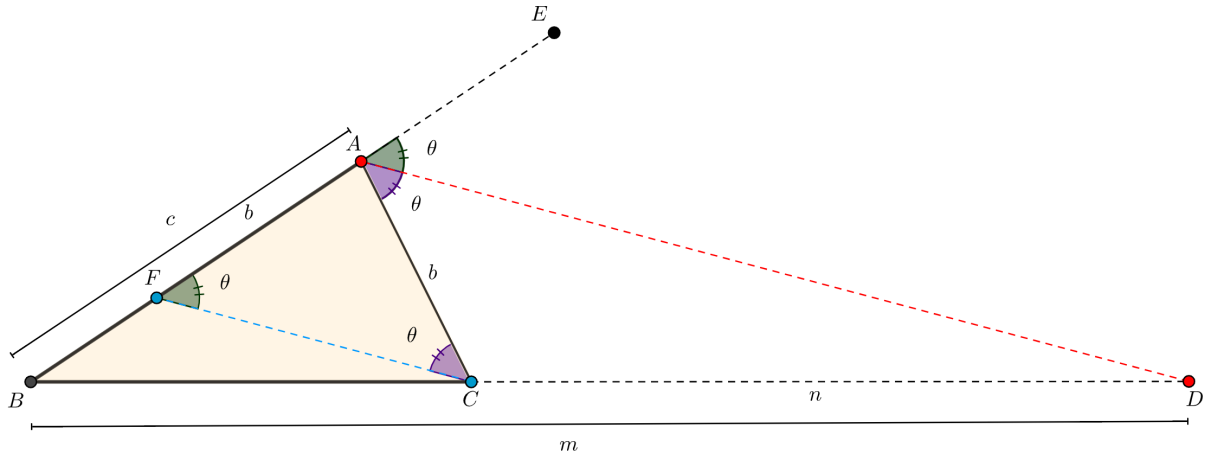
Como queríamos demonstrar. □

Teorema 5.2. (Bissetriz Externa). *Seja o triângulo ABC tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se a bissetriz de um ângulo externo desse triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subaditivos) proporcionais*

aos lados adjacentes.

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC descrito no enunciado, conforme a figura.

Figura 2 – Teorema da Bissetriz Externa.



Fonte: Oliveira, 2017.

Na figura, \overline{AD} é uma bissetriz externa que divide o ângulo $\angle CAE$ em duas partes iguais. Sobre o lado \overline{BA} tomamos o ponto F de tal modo que o segmento $\overline{FC} \parallel \overline{AD}$. Daí, temos:

$$\angle AFC = \angle EAD = \angle CAD = \angle ACF.$$

Ou seja, como $\angle AFC = \angle ACF$, o triângulo AFC é isósceles de base \overline{FC} , implicando $\overline{AC} = \overline{AF} = b$.

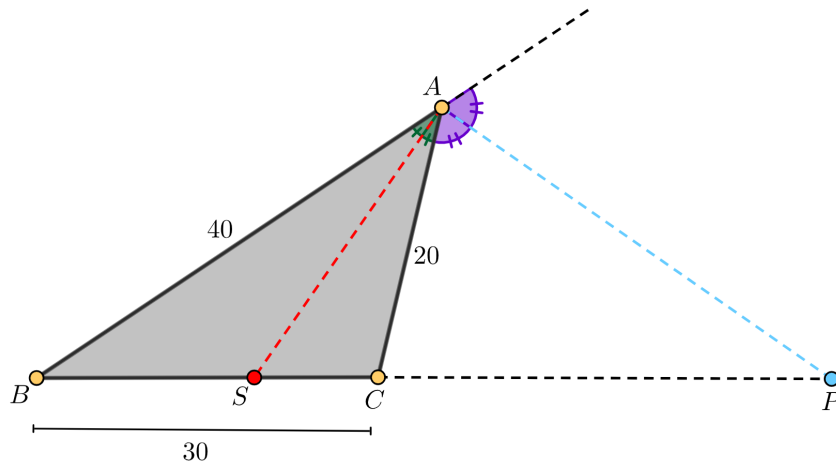
Agora, aplicando o Teorema de Tales no triângulo ABD , obtemos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{FA}} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{c}{b}.$$

Como queríamos demonstrar. □

Exemplo 5.1. No triângulo ABC da figura abaixo, \overline{AS} é a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$ e \overline{AP} é a bissetriz externa do suplemento desse ângulo. Calcule a medida do segmento \overline{SP} .

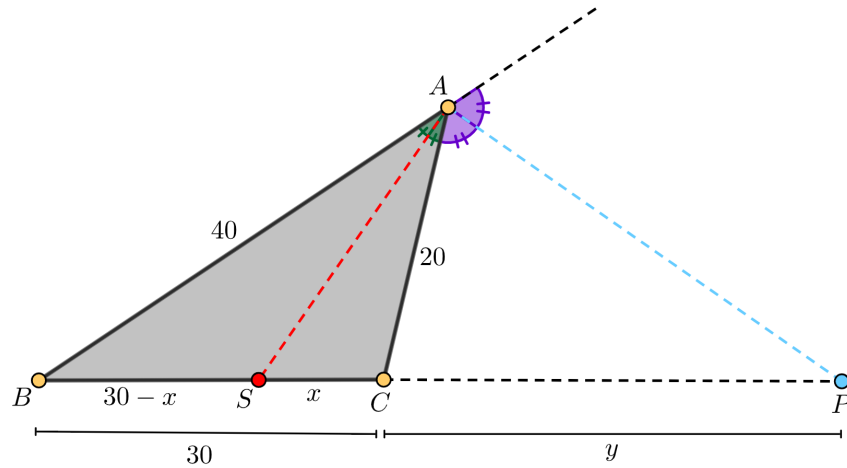
Figura 3 – Bissetriz Interna e Externa.



Fonte: Oliveira, 2017.

solução: Considere as medidas indicadas na figura.

Figura 4 – Dados do problema da Bissetriz Interna e externa.



Fonte: Oliveira, 2017.

Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo ABC , temos:

$$\frac{30 - x}{x} = \frac{40}{20} \Rightarrow 40x = 600 - 20x \Rightarrow 60x = 600 \Rightarrow x = 10.$$

Aplicando o teorema da bissetriz externa a esse mesmo triângulo, obtemos:

$$\frac{30 + y}{y} = \frac{40}{20} \Rightarrow 40y = 600 + 20y \Rightarrow 20y = 600 \Rightarrow y = 30.$$

Note que, $\overline{SP} = x + y \Rightarrow \overline{SP} = 10 + 30 = 40$.**Exemplo 5.2.** Em um triângulo ABC , tem-se $\angle B\hat{A}C = 36^\circ$ e $\overline{AB} = \overline{AC} = a$. Mostre

que

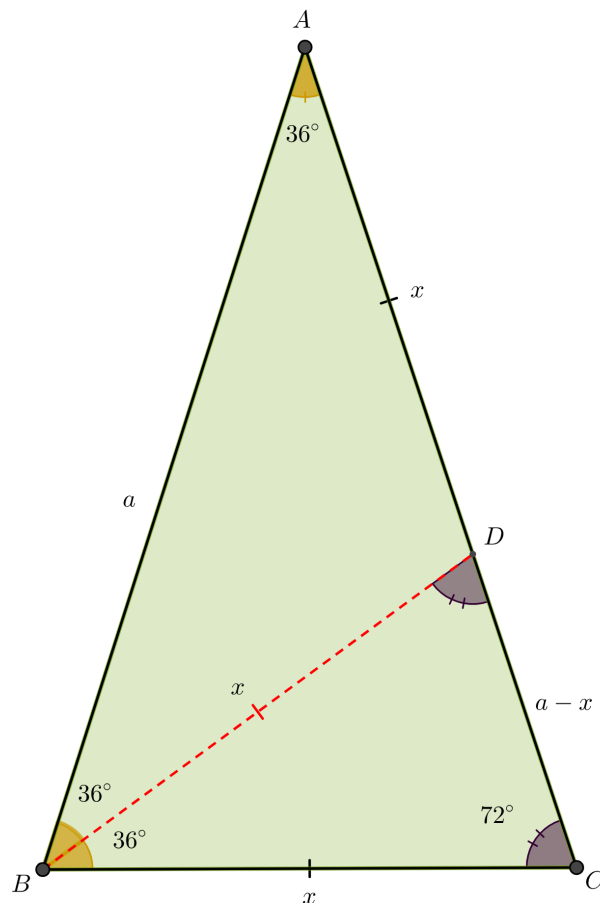
$$\overline{BC} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) a.$$

Solução: Como o triângulo ABC é isósceles, temos

$$\angle \hat{ABC} = \angle \hat{ACB} = 72^\circ.$$

Traçando a bissetriz \overline{BD} relativa ao ângulo \hat{ABC} , a qual intercepta o lado \overline{AC} em D . (ver figura).

Figura 5 – Bissetriz Interna.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Observe que $\angle \hat{ABC} = 72^\circ$ e como \overline{BD} é Bissetriz, segue que

$$\angle \hat{ABD} = \angle \hat{CBD} = \angle \hat{BAC} = 36^\circ.$$

Logo, o triângulo ABD é isósceles de base \overline{AB} , isto é, $\overline{AD} = \overline{BD} = x$. Por outro lado, o ângulo \hat{BDC} é ângulo externo do ΔABD , ou seja,

$$\angle \hat{BDC} = \angle \hat{ABD} + \angle \hat{BAC} = 72^\circ = \angle \hat{ACB}.$$

Daí, o triângulo BCD é isósceles de base \overline{CD} e consequentemente $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{AD} = x$. Como $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD}$ resulta que $\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD}$. Ou seja, $\overline{CD} = a - x$. Agora, aplicando o teorema da bissetriz interna no triângulo ABC , obtemos:

$$\frac{a - x}{x} = \frac{x}{a} \Rightarrow x^2 = a^2 - ax \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Resolvendo esta equação do 2º grau na incógnita x , encontramos como solução

$$x = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}.$$

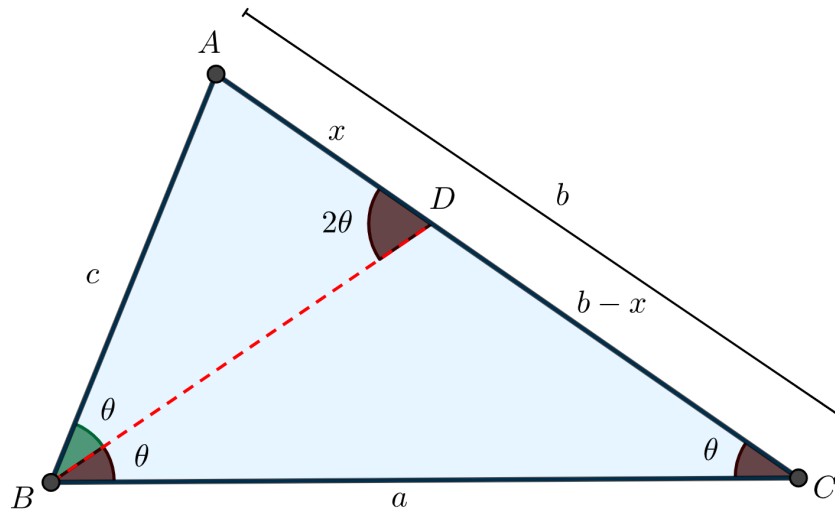
Como $x = \overline{BC}$ e colocando a em evidência chegamos a

$$\overline{BC} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) a.$$

Exemplo 5.3. (OCM). Seja ABC um triângulo tal que, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Se $\hat{A}BC = 2\hat{A}CB$, mostre que $b^2 = c(a + c)$.

Solução: Tome o ângulo $\hat{A}CB = \theta$ e \overline{BD} bissetriz interna de $\hat{A}BC$. Como $\hat{A}BC = 2\theta$, tem-se $\hat{D}BC = \theta$.

Figura 6 – Triângulo ABC com Bissetriz Interna \overline{BD} .



Fonte: (Olimpíada Cearense de Matemática - OCM).

Pelo teorema do ângulo externo, $\hat{A}DB = \hat{D}BC + \hat{B}CD = 2\theta$. Note que os triângulos ABD e ABC são semelhantes pelo **caso AA** (o ângulo \hat{A} é comum aos dois triângulos enquanto os ângulos $\hat{A}DB$ e $\hat{A}BC$ são congruentes e iguais a 2θ).

A semelhança entre os triângulos ABD e ABC nos fornece:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{c}{b}.$$

Isto é,

$$x = \frac{c^2}{b}. \quad (5.1)$$

Tomando $\overline{AD} = x$, como $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD}$, tem-se que $\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} \Rightarrow \overline{CD} = b - x$.

Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo ABC , obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{x}{b-x} \Rightarrow ax = c(b-x) \Rightarrow ax + cx = bc.$$

Logo,

$$x = \frac{bc}{a+c}. \quad (5.2)$$

Das expressões (5.1) e (5.2), concluimos que,

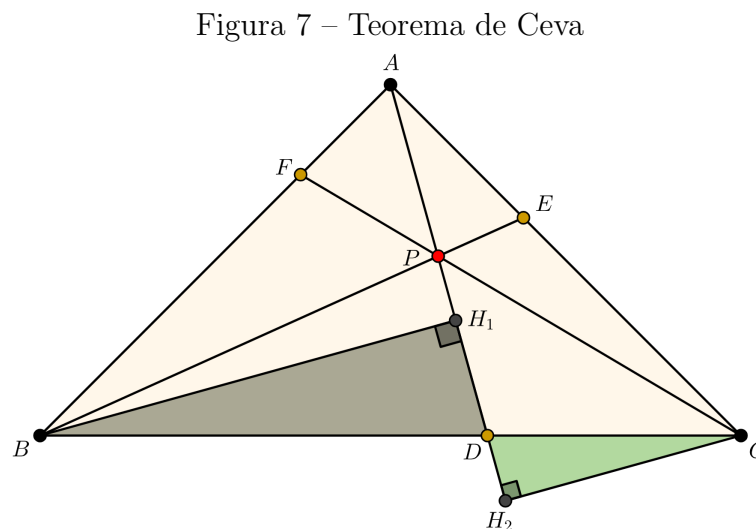
$$\frac{c^2}{b} = \frac{bc}{a+c} \Rightarrow b^2c = c^2a + c^3 \Rightarrow b^2 = \frac{c^2a + c^3}{c} \Rightarrow b^2 = c(a+c).$$

E isso mostra o resultado.

Teorema 5.3 (Ceva). *Seja ABC um triângulo qualquer e sejam D, E e F respectivamente pontos sobre os lados \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BD} respectivamente. Então, os segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes, se e somente se,*

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1.$$

(\Rightarrow) Suponhamos que os segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes em P . Ver figura abaixo.



Fonte: Oliveira, 2017.

Observe inicialmente que os triângulos retângulos BH_1D e CH_2D são semelhantes, pelo (**caso AA**). Assim,

$$\frac{\overline{BH_1}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DH_2}}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{\overline{BH_1}}{\overline{DH_2}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Como $\overline{BH_1}/\overline{CH_2}$, denotamos a razão entre as áreas de ABP e ACP por:

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AP} \cdot \overline{BH_1}}{\frac{1}{2}\overline{AP} \cdot \overline{CH_2}} = \frac{\overline{BH_1}}{\overline{CH_2}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}.$$

Logo,

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}. \quad (5.3)$$

De maneira análoga, obtemos

$$\frac{[CBP]}{[ABP]} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \text{ e } \frac{[ACP]}{[BCP]} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}. \quad (5.4)$$

De (5.3) e (5.4), e multiplicando membro a membro, obtemos

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{[ACP]}{[BCP]} \cdot \frac{[ABP]}{[ACP]} \cdot \frac{[CBP]}{[ABP]} = 1.$$

Demonstração. (\Leftarrow) Suponhamos que $\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1$. Suponhamos, por absurdo, que as cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} não são concorrentes. Suponhamos que \overline{AD} e \overline{BE} se interceptam no ponto P , enquanto \overline{CF} não passa por P . Seja $\overline{F'}$ o ponto de intersecção de \overline{CP} com \overline{AB} , então como as retas \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BE} , $\overleftrightarrow{CF'}$ são concorrentes em P , temos

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{BF'}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1. \quad (5.5)$$

Como

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1. \quad (5.6)$$

A partir de (5.5) e (5.6), obtemos:

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{BF'}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$$

e portanto, $F = F'$, como queríamos demonstrar.

□

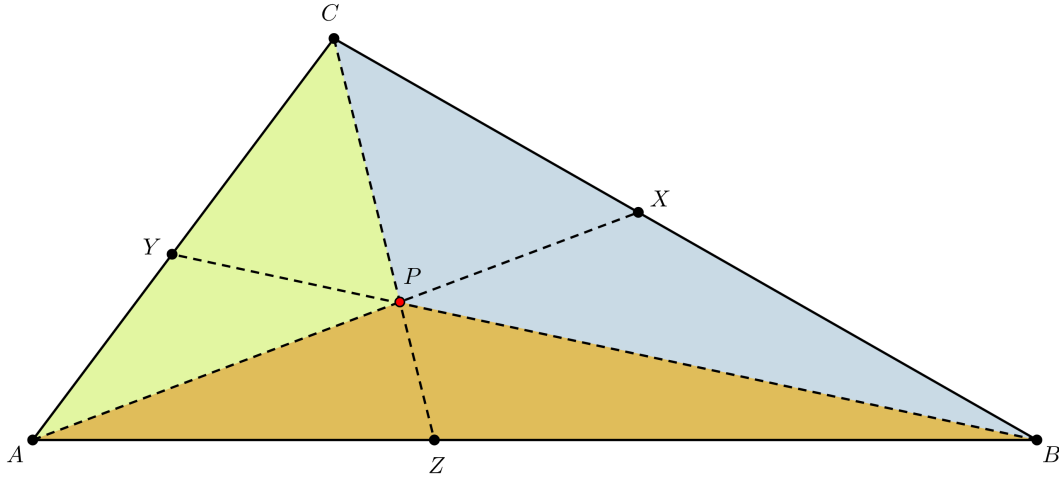
No que segue, apresentamos um resultado muito famoso que o Teorema de Ceva na forma trigonométrica.

Teorema 5.4 (Teorema de Ceva na forma trigonométrica). *As cevianas AX, BY, CZ*

do triângulo ABC são concorrentes se e somente se

$$\frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XAC} \cdot \frac{\sin \angle CBY}{\sin \angle YBA} \cdot \frac{\sin \angle ACZ}{\sin \angle ZCB} = 1.$$

Figura 8 – Teorema de Ceva na forma trigonométrica



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Demonstração. Usando a lei dos senos e o fato de que os senos de ângulos suplementares são iguais, obtemos

$$\frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XAC} = \frac{\frac{BX}{BA} \cdot \sin \angle BXA}{\frac{XC}{CA} \cdot \sin \angle CXA} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CA}{AB}.$$

De forma análoga chegamos ao mesmo resultado para

$$\frac{\sin \angle CBY}{\sin \angle YBA} = \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\sin \angle ACZ}{\sin \angle ZCB} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BC}{CA}.$$

Agora obtemos o produto parcialmente telescópico

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XAC} \cdot \frac{\sin \angle CBY}{\sin \angle YBA} \cdot \frac{\sin \angle ACZ}{\sin \angle ZCB} &= \left(\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CA}{AB} \right) \cdot \left(\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AB}{BC} \right) \cdot \left(\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BC}{CA} \right) = \\ &= \left(\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} \right) \cdot \left(\frac{CA}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \right) = \\ &= \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}. \end{aligned}$$

O teorema de Ceva afirma que AX, BY, CZ são concorrentes se e somente se

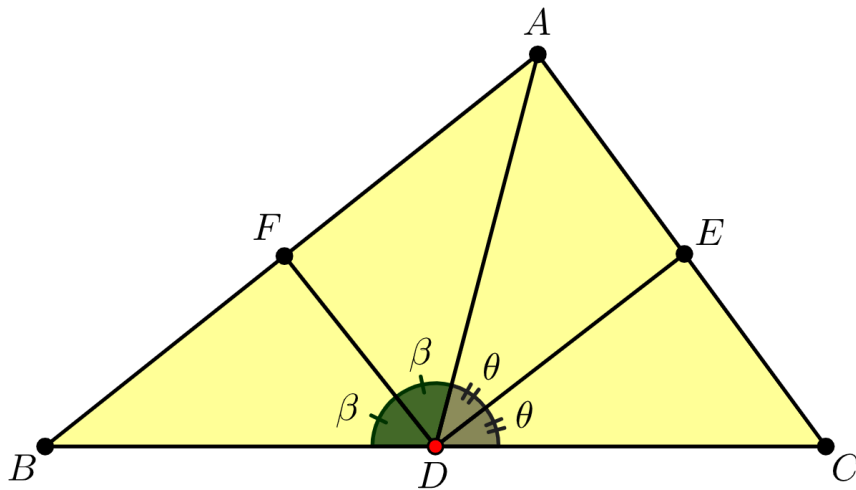
$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 5.4. Em um triângulo ABC o ponto $D \in \overline{BC}$. Se \overline{DE} é a bissetriz do ângulo \widehat{ADC} e intercepta \overline{AC} no ponto E . Traçando $\overline{DF} \perp \overline{DE}$ e interceptando \overline{AB} em F . Mostre que, \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes.

Solução: Como \overline{DE} é a bissetriz do ângulo \widehat{ADC} e $\overline{DF} \perp \overline{DE}$, \overline{DF} é a bissetriz do ângulo \widehat{ADB} (prove isso!).

Figura 9 – \overline{DF} é a bissetriz do ângulo \widehat{ADB}



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Pelo Teorema da Bissetriz Interna, aplicado aos triângulos ABD e ACD , obtemos

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}.$$

Como

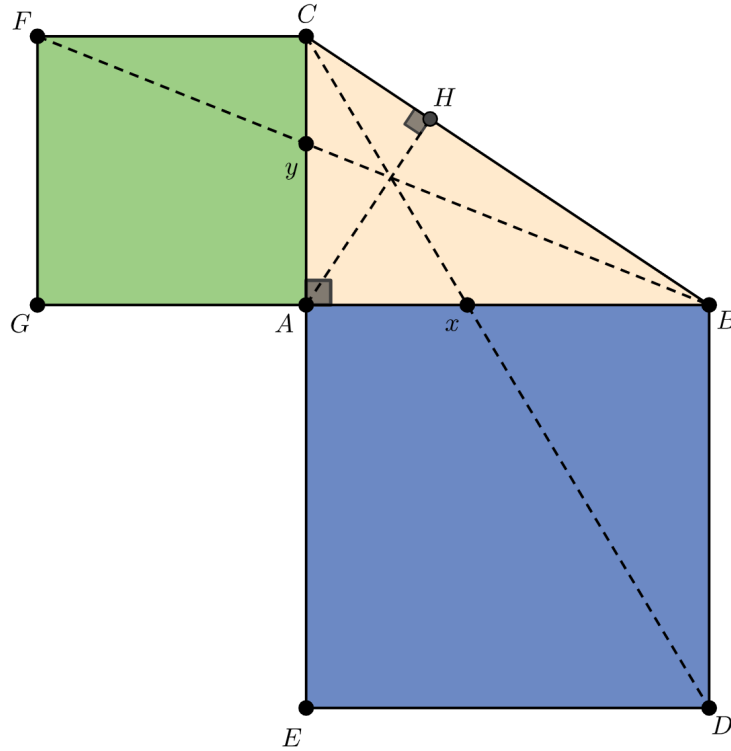
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1.$$

Pelo Teorema de Ceva, resulta que \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes. \square

Exemplo 5.5 (IME 1988). Sobre os catetos $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ de um triângulo retângulo ABC , com $\overline{AC} = a$, constroem-se dois quadrados $ABDE$ e $ACFG$. Mostre que os segmentos \overline{CD} , \overline{BF} e a altura \overline{AH} são concorrentes.

Solução: Vamos usar a figura abaixo para facilitar o entendimento

Figura 10 – Construção dos dois quadrados.



Fonte: Oliveira, 2017.

Observe inicialmente que os triângulos retângulos ACH e BCA são semelhantes, pelo (**caso AA**). Daí, obtemos

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{HC}}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \overline{HC} = \frac{b^2}{a} \text{ e } \overline{HB} = \frac{c^2}{a}.$$

Assim,

$$\overline{HC} = \frac{b^2}{a} \text{ e } \overline{HB} = \frac{c^2}{a}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = \frac{\frac{c^2}{a}}{\frac{b^2}{a}}. \quad (5.7)$$

Como os triângulos retângulos BYA e BFG são semelhantes, pelo (**caso AA**), obtemos

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{GB}} \Rightarrow \overline{YA} = \frac{bc}{a+b}.$$

Desde que, $\overline{CY} + \overline{YA} = b$ temos $\overline{CY} = \frac{b^2}{a+b}$. Assim,

$$\overline{YA} = \frac{bc}{a+b} \text{ e } \overline{CY} = \frac{b^2}{a+b}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\frac{b^2}{a+b}}{\frac{bc}{a+b}}. \quad (5.8)$$

Novamente, usando o fato que os triângulos retângulos CXA e CDE são semelhantes, temos:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} \Rightarrow \overline{AX} = \frac{bc}{b+c}.$$

Como $\overline{AX} + \overline{XB} = c$ temos $\overline{XB} = \frac{c^2}{b+c}$. Assim,

$$\overline{AX} = \frac{bc}{b+c} \text{ e } \overline{XB} = \frac{c^2}{b+c}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\frac{bc}{b+c}}{\frac{c^2}{b+c}}. \quad (5.9)$$

Multiplicando membro a membro, (5.9), (5.7) e (5.8), obtemos

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\frac{bc}{b+c}}{\frac{c^2}{b+c}} \cdot \frac{\frac{c^2}{a}}{\frac{b^2}{a}} \cdot \frac{\frac{b^2}{a+b}}{\frac{bc}{a+b}} = 1.$$

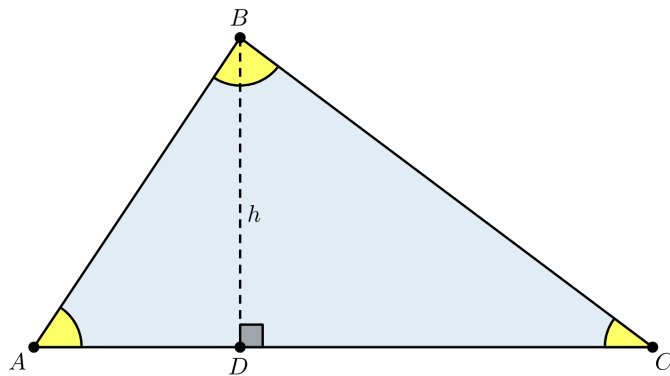
Daí e do Teorema de Ceva, resulta que os segmentos \overline{DC} , \overline{EF} e \overline{AH} são concorrentes. \square

Observação 5.1 (Cálculo de área de um triângulo). Se ABC é um triângulo, então a área do triângulo ABC , a qual é denotada por $[ABC]$ é dada por

$$[ABC] = \frac{(\overline{AB}) \cdot (\overline{AC}) \cdot \widehat{A}}{2}.$$

O resultado é análogo para os outros ângulos.

Figura 11 – Cálculo da área do triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

De fato, temos

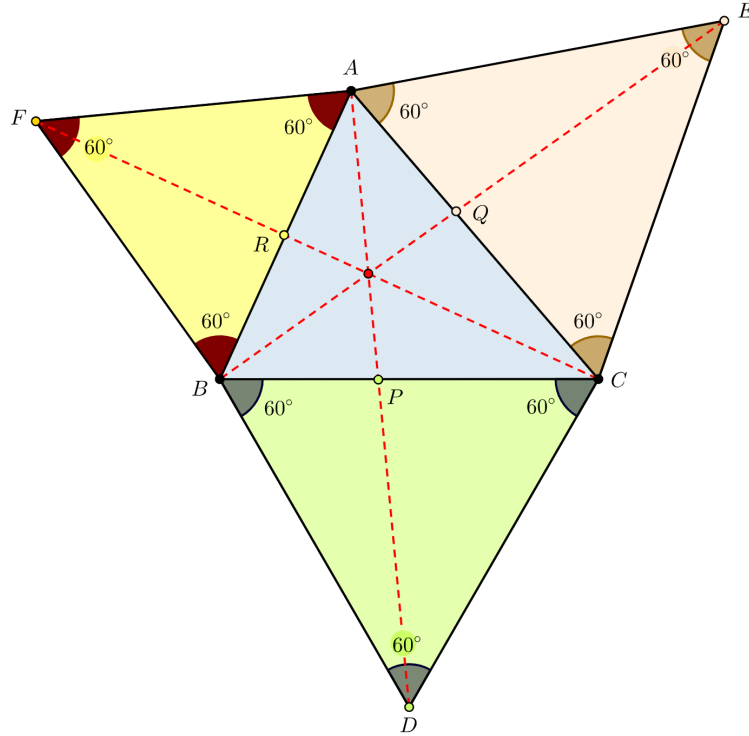
$$[ABC] = \frac{(\overline{AC}) \cdot h}{2} \text{ e } \widehat{A} = \frac{h}{\overline{AB}}.$$

Destas duas igualdades o resultado segue.

Exemplo 5.6. Em um triângulo ABC , desenha-se os triângulos equiláteros ABF , BCD e ACE cujas bases estão sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} respectivamente. Mostre que os segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes.

Solução: Vamos considerar a figura abaixo para ajudar no entendimento.

Figura 12 – Construção de três triângulos equiláteros.



Fonte: Hang; Wang, 2017.

Temos uma aplicação do Teorema de Ceva. Digamos que, \overline{AD} intercepta \overline{BC} no ponto P , \overline{BE} intercepta \overline{AC} no ponto Q e \overline{CF} intercepta \overline{AB} no ponto R . Queremos mostrar que:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = 1.$$

Daí, pelo Teorema de Ceva, os segmentos: \overline{AP} , \overline{BQ} e \overline{CR} são concorrentes e portanto, os segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes.

Note que,

$$[ABP] = \frac{(\overline{BP}) \cdot h}{2} \text{ e } [ACP] = \frac{(\overline{PC}) \cdot h}{2}. \quad (5.10)$$

Por (5.10), podemos escrever

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\frac{(\overline{BP}) \cdot h}{2}}{\frac{(\overline{PC}) \cdot h}{2}} = \frac{[ABP]}{[ACP]}. \quad (5.11)$$

Raciocinando da mesma maneira, obtemos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{[BDP]}{[CDP]}. \quad (5.12)$$

Logo, de (5.11) e (5.12), obtemos:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{[BDP]}{[CDP]}. \quad (5.13)$$

Pelas propriedades das proporções e (5.13), obtemos:

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{[BDP]}{[CDP]} \Rightarrow \frac{[BDP]}{[CDP]} = \frac{[ABP] + [BDP]}{[ACP] + [CDP]} = \frac{[ABC]}{[ACD]}$$

o que implica

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{[ABC]}{[ACD]}. \quad (5.14)$$

Note que,

$$A\widehat{B}D = A\widehat{B}C + 60^\circ, \quad A\widehat{C}D = A\widehat{C}B + 60^\circ \text{ e } B\widehat{A}E = B\widehat{A}C + 60^\circ.$$

Destes fatos e da Observação (5.1), obtemos

$$[ABC] = \frac{1}{2}[(\overline{AB}) \cdot (\overline{BD}) \cdot \sen A\widehat{B}D] = \frac{1}{2}[(\overline{AB}) \cdot (\overline{BD}) \cdot \sen (A\widehat{B}C + 60^\circ)] \quad (5.15)$$

e

$$[ACD] = \frac{1}{2}[(\overline{AC}) \cdot (\overline{CD}) \cdot \sen A\widehat{C}D] = \frac{1}{2}[(\overline{AC}) \cdot (\overline{CD}) \cdot \sen (A\widehat{C}B + 60^\circ)] \quad (5.16)$$

Como $\overline{BD} = \overline{CD}$, (pois são lados do triângulo equilátero BCD) de (5.14), (5.15) e (5.16), resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} &= \frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{\frac{1}{2}[(\overline{AB}) \cdot (\overline{BD}) \cdot \sen (A\widehat{B}C + 60^\circ)]}{\frac{1}{2}[(\overline{AC}) \cdot (\overline{CD}) \cdot \sen (A\widehat{C}B + 60^\circ)]} = \\ &= \frac{(\overline{AB}) \cdot \sen (A\widehat{B}C + 60^\circ)}{(\overline{AC}) \cdot \sen (A\widehat{C}B + 60^\circ)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{(\overline{AB}) \cdot \sin(\widehat{ABC} + 60^\circ)}{(\overline{AC}) \cdot \sin(\widehat{ACB} + 60^\circ)}. \quad (5.17)$$

De forma análoga, obtemos:

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = \frac{(\overline{BC}) \cdot \sin(\widehat{ACB} + 60^\circ)}{(\overline{AB}) \cdot \sin(\widehat{BAC} + 60^\circ)} \quad (5.18)$$

e

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = \frac{(\overline{AC}) \cdot \sin(\widehat{BAC} + 60^\circ)}{(\overline{BC}) \cdot \sin(\widehat{ABC} + 60^\circ)}. \quad (5.19)$$

Multiplicando (5.17), (5.18) e (5.19), membro a membro e cancelando os termos comuns no segundo membro, obtemos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, os segmentos \overline{AP} , \overline{BQ} e \overline{CR} são concorrentes e consequentemente, os segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes. \square

5.2 Teorema de Menelaus

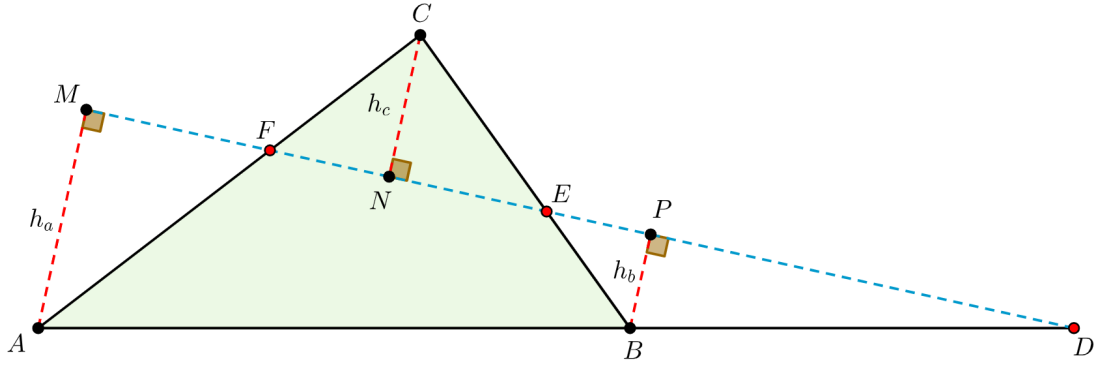
O Teorema foi enunciado originalmente por Menelau de Alexandria por volta do ano 100 a.C. e demonstrado pelo matemático italiano **Giovanni Ceva** em 1678.

Teorema 5.5 (Menelaus). *Sejam ABC um triângulo e $D \in \overleftrightarrow{AB}$, $E \in \overleftrightarrow{AC}$ e $F \in \overleftrightarrow{BC}$. Então, os pontos D, E e F estão alinhados se, e somente se,*

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos que os pontos D, E e F estão alinhados. Traçamos por A, B e C as alturas respectivas aos triângulos AFD , BDE e CFE , as quais são as alturas relativas aos vértices A, B e C destes triângulos, as quais são denotadas por: h_a , h_b e h_c respectivamente. Assim, $h_a = \overline{AM}$, $h_b = \overline{BP}$ e $h_c = \overline{CN}$. Ver figura abaixo:

Figura 13 – Teorema de Menelaus



Fonte: Oliveira, 2017.

Como as alturas são perpendiculares, resulta que \overline{AM} , \overline{BP} e \overline{CN} são perpendiculares à reta que passa pelos pontos M, F, N, E, P e D respectivamente. Então, esses três segmentos são paralelos. Portanto, os triângulos AMD é semelhante ao triângulo BPD , os triângulos BPE é semelhante ao triângulo CNE e os triângulos AMF é semelhante ao triângulo CNF .

- $\triangle AMD \sim \triangle BPD$, tem-se:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{h_a}{h_b} \quad (5.20)$$

- $\triangle BPE \sim \triangle CNE$, tem-se:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{h_b}{h_c} \quad (5.21)$$

- $\triangle AMF \sim \triangle CNF$, tem-se:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{h_c}{h_a} \quad (5.22)$$

Multiplicando membro a membro (5.20), (5.21) e (5.22), obtemos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{h_a}{h_b} \cdot \frac{h_b}{h_c} \cdot \frac{h_c}{h_a} = 1.$$

(\Leftarrow) Suponhamos que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$. Suponhamos que a reta \overleftrightarrow{ED} intercepta o lado \overline{AC} no ponto F' . Pela ida do Teorema de Menelaus, obtemos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF'}}{\overline{F'A}} = 1. \quad (5.23)$$

Agora, usando a hipótese que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$ e (5.23), obtemos

$$\frac{\overline{F'A}}{\overline{CF'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{CF}} \Rightarrow F = F'.$$

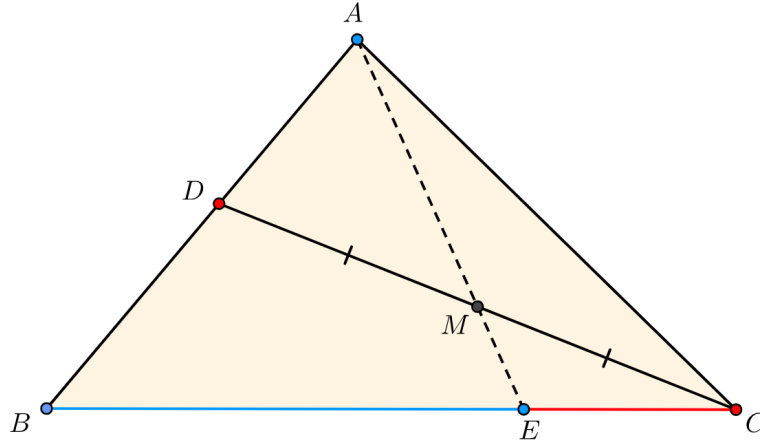
Portanto, os pontos D , E e F estão alinhados. \square

Observação 5.2. (i) A demonstração do teorema de Menelaus foi dada quando a transversal corta dois lados e o prolongamento de um terceiro lado do triângulo. Porém, a demonstração continua válida quando a transversal corta o prolongamento dos três lados. (ii) O teorema de Menelaus não é válido se um dos pontos D , E e F pertencer à interseção de um par dessas retas.

Exemplo 5.7. No triângulo ABC , seja $D \in \overline{AB}$, tal que, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}$. O ponto médio de \overline{CD} é denotado por M . Supomos que as retas \overleftrightarrow{AM} e \overleftrightarrow{BC} se interceptam em E . Determine $\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$.

Solução: De acordo com o teorema de Menelaus aplicado à reta \overleftrightarrow{AE} que intercepta o triângulo BCD temos:

Figura 14 – M é ponto médio de \overline{CD}



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{DM}}{\overline{CM}} = 1. \quad (5.24)$$

Usando o fato que

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{2}{3}$$

e que M é ponto médio de \overline{BC} , resulta que:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{DA}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ e } \frac{\overline{DM}}{\overline{CM}} = 1. \quad (5.25)$$

Substituindo (5.25) em (5.24), obtemos:

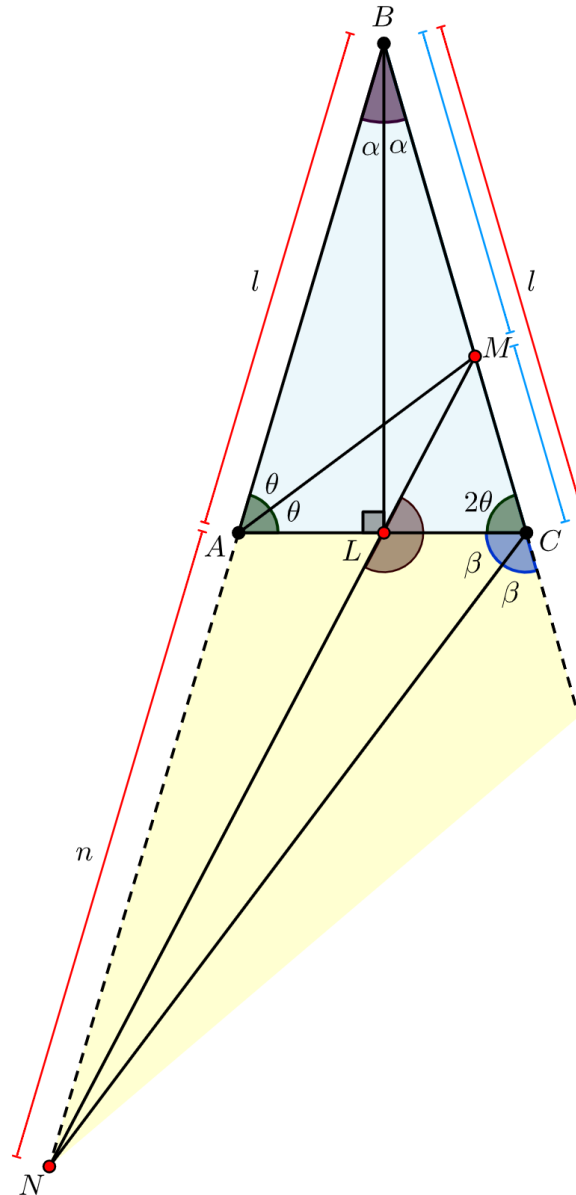
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \cdot \frac{9}{4} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{4}{9}.$$

Portanto, $\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{4}{9}$. □

Exemplo 5.8. Em um triângulo isósceles de base \overline{AC} se traçam as bissetrizes internas \overline{AM} , \overline{BL} e a bissetriz externa \overline{CN} . Calcule a $\angle M\hat{L}N$.

Solução: Vamos considerar a figura abaixo para facilitar o entendimento.

Figura 15 – Aplicação do teorema de Menelaus.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Note inicialmente que $\overline{AL} = \overline{LC} = a$, pois o triângulo BAC é isósceles, a bissetriz \overline{BL} é também mediana relativa a base \overline{AC} .

No triângulo ABC , pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{l}{2a}. \quad (5.26)$$

No triângulo ABC , pelo teorema da bissetriz externa, temos:

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{l+n}{n}. \quad (5.27)$$

De (5.26) e (5.27), resulta que

$$\frac{l}{2a} = \frac{l+n}{n}. \quad (5.28)$$

Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo ABC , sendo interceptado pelo segmento de reta \overline{NM} , o qual intercepta o lado \overline{AC} em L e o lado \overline{BC} em M e por (5.28), obtemos:

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = \left(\frac{l+n}{n} \right) \cdot \frac{a}{a} \cdot \left(\frac{2a}{l} \right) = \frac{l+n}{n} \cdot \frac{n}{l+n} = 1.$$

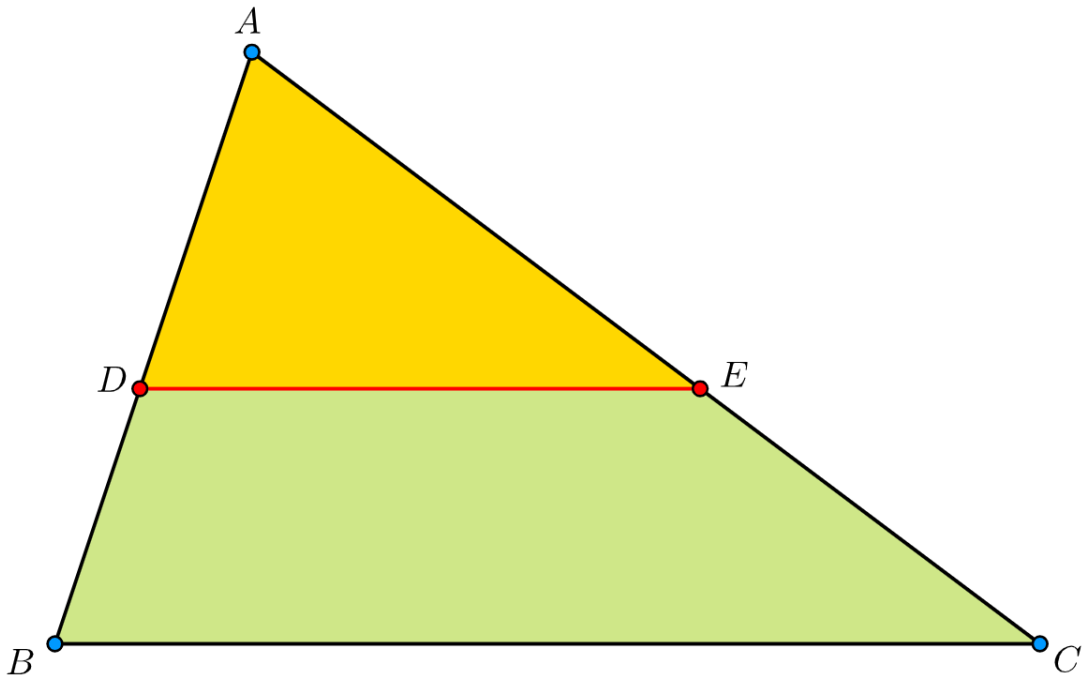
Portanto, pelo o teorema de Menelaus, os pontos N, L e M estão alinhados e consequentemente, a medida do $\angle M\hat{L}N = 180^\circ$. \square

O próximo resultado é um Corolário do Teorema de Tales.

Corolário 5.5.1 (Corolário de Tales). *Seja ABC um triângulo, com $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$ respectivamente, tal que, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Então,*

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}.$$

Figura 16 – \overline{DE} é paralelo a \overline{BC}



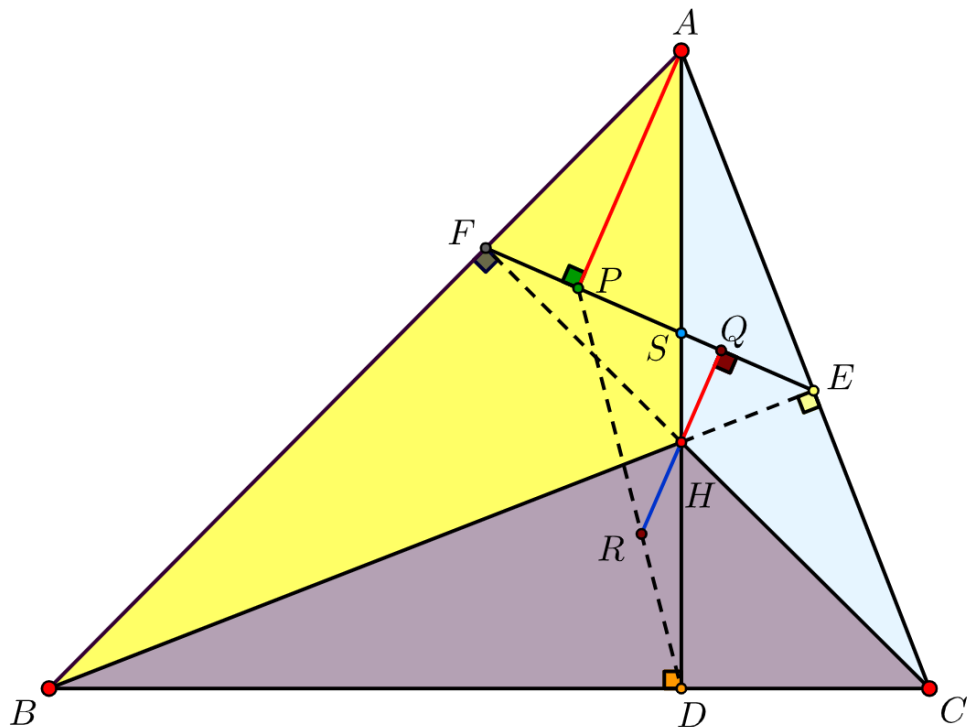
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

A prova deste corolário é obtida através da semelhança entre os triângulos ABC e ADE .

Exemplo 5.9 (Estados Unidos 2011). Seja ABC um triângulo acutângulo não isósceles, onde \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} são alturas e H é o ortocentro. Os segmentos \overline{AD} e \overline{EF} se interceptam em S e $\overline{AP} \perp \overline{EF}$ em P e $\overline{HQ} \perp \overline{EF}$ em Q . Se os segmentos \overline{DP} e \overline{QH} se interceptam em R , mostre que $\overline{HQ} = \overline{HR}$.

Solução: Para a prova usaremos o Teorema de Menelaus. Considere as Figuras abaixo:

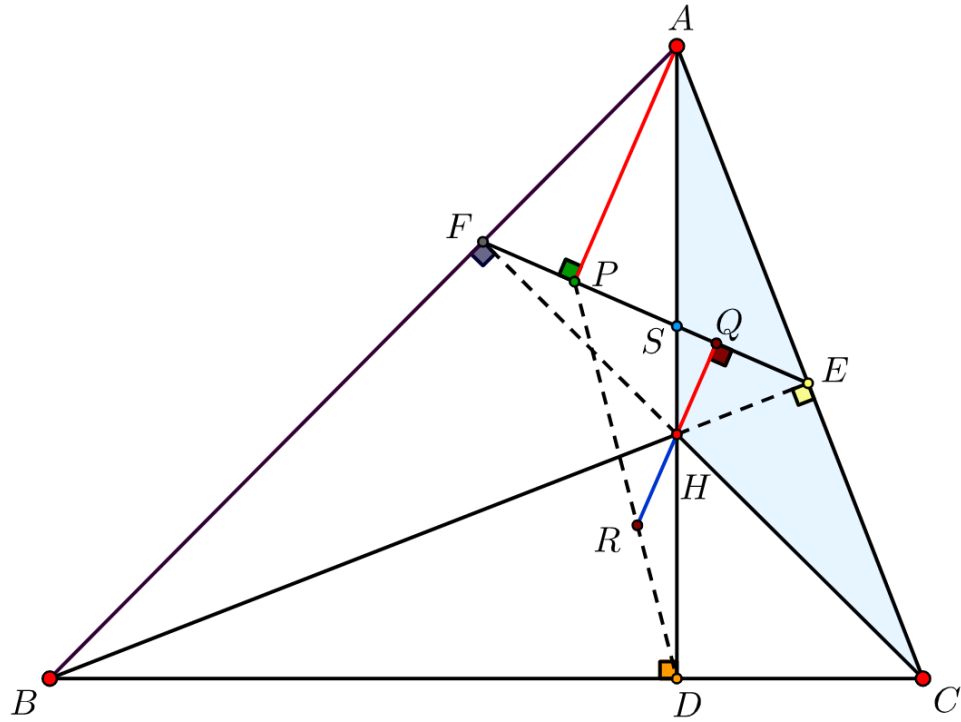
Figura 17 – Dados do problema



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo AHC e o segmento \overline{EF} , temos:

Figura 18 – Aplicação do teorema de Menelaus ao triângulo AHC

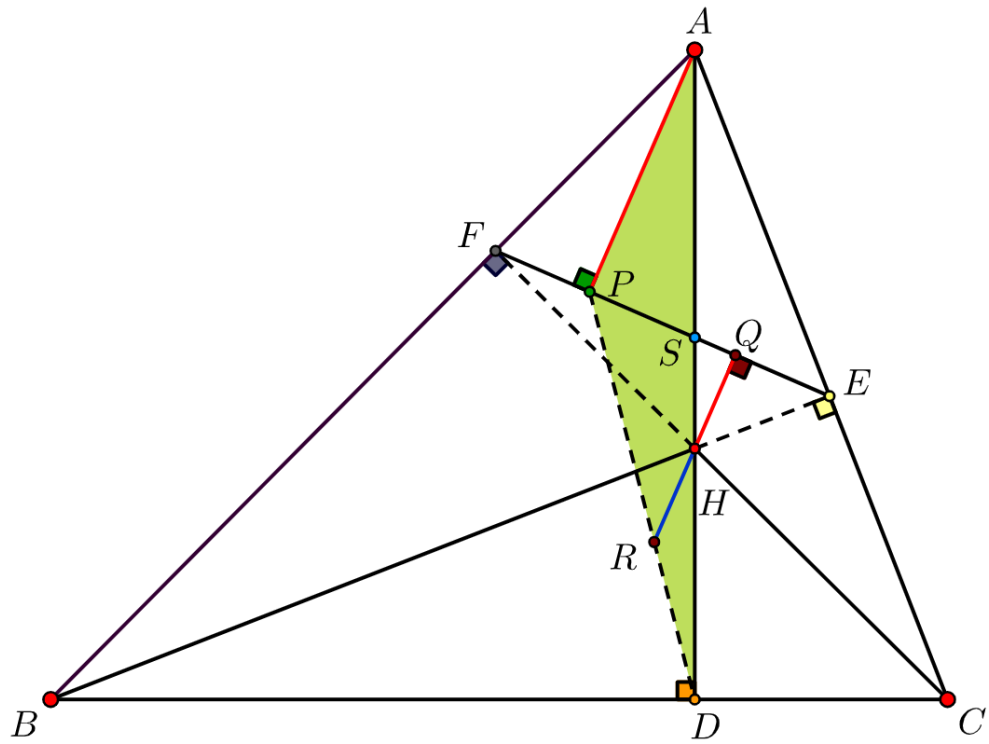


Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{HS}} \cdot \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1. \quad (5.29)$$

Considere o triângulo DPA . Como $\overline{AP}/\overline{QR}$ (ver Figura 18), pela Observação 5.5.1, obtemos:

Figura 19 – Triângulo DPA .

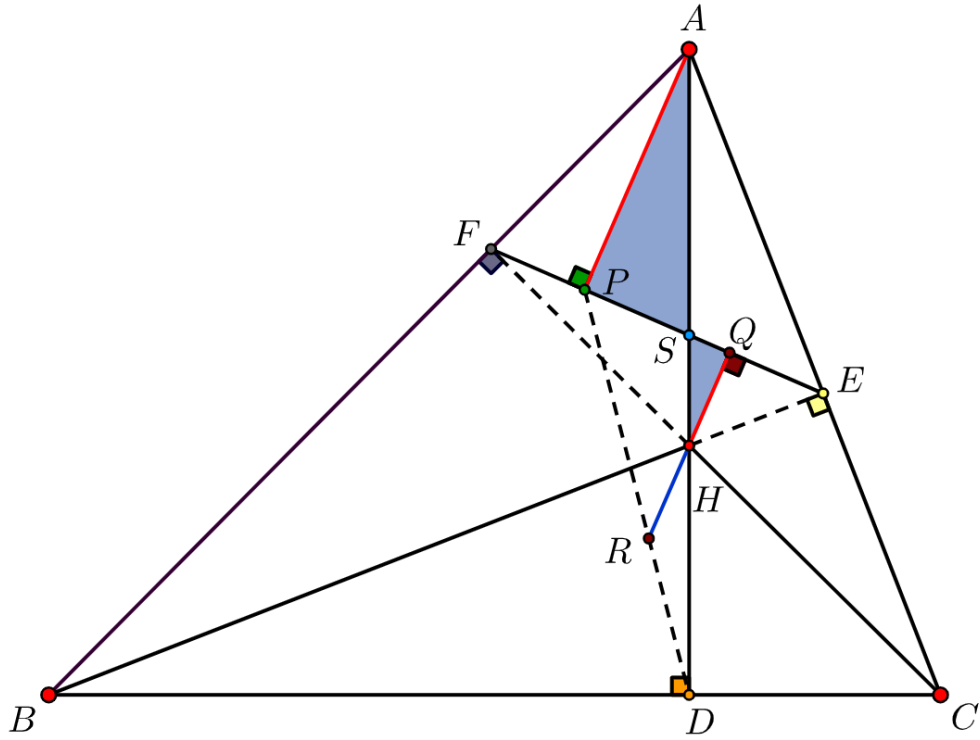


Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

$$\frac{\overline{HR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}.$$

Note que os triângulos SQH e SPA , são semelhantes, (ver figura baixo)

Figura 20 – Triângulos semelhantes SQH e SPA .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

pelo caso AAA , pois $\overline{AP} // \overline{QR}$ e portanto,

$$\frac{\overline{HR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{HS}}{\overline{AS}}.$$

Afirmção: $\frac{\overline{HS}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}$ implica $\frac{\overline{HQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{HR}}{\overline{AP}}$ e portanto, $\overline{HQ} = \overline{HR}$.

Por (5.29) é suficiente mostrar que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{HD}} \cdot \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1, \quad (5.30)$$

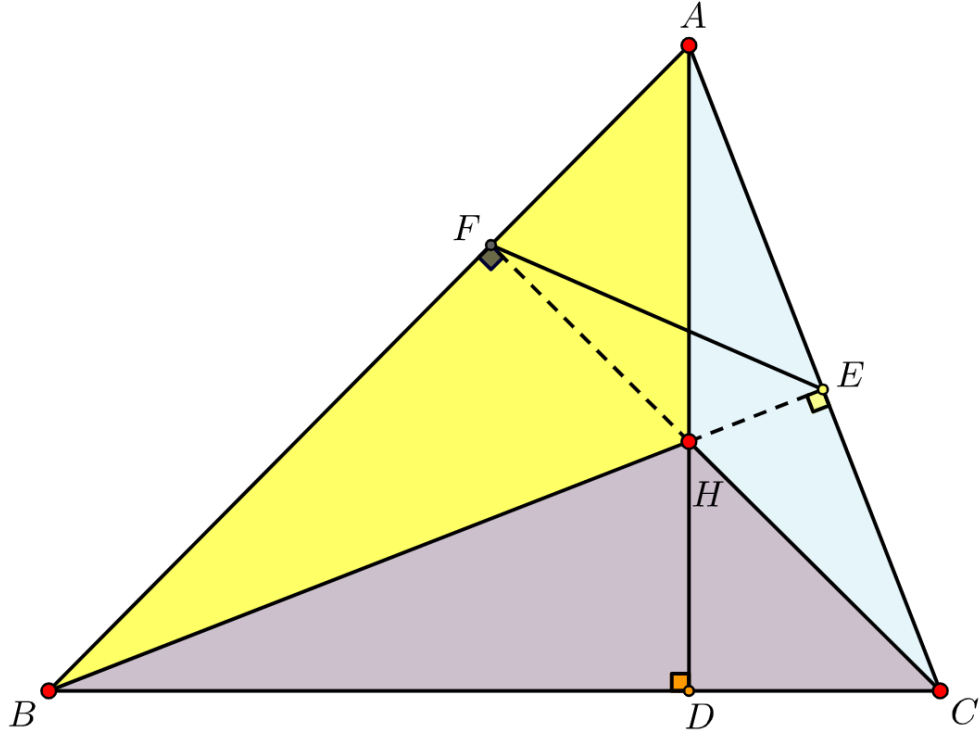
pois

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{HS}} \cdot \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{HD}} \cdot \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{HS}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{HD}} \Rightarrow \frac{\overline{HS}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}.$$

Mostrando (5.30), obtemos a afirmação.

Sejam $S_1 = [ABH]$, $S_2 = [BCH]$ e $S_3 = [ACH]$. Ver Figura abaixo:

Figura 21 – Triângulos $S_1 = [ABH]$, $S_2 = [BCH]$ e $S_3 = [ACH]$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{HD}} = \frac{\frac{\overline{AD} \cdot (\overline{BC})}{2}}{\frac{\overline{HB} \cdot (\overline{BC})}{2}} = \frac{[ABC]}{[BHC]} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2},$$

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = \frac{\frac{\overline{HF} \cdot (\overline{AB})}{2}}{\frac{\overline{CF} \cdot (\overline{AB})}{2}} = \frac{[AHB]}{[ABC]} = \frac{S_1}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

Observe que $\angle C\hat{E}H = 90^\circ$, pois \overline{BE} é a altura relativa ao vértice B do triângulo ABC , porque H é o ortocentro do triângulo. Assim, obtemos:

$$S_2 = [BHC] = \frac{\overline{EC} \cdot \overline{BH}}{2} \text{ e } S_1 = [ABH] = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BH}}{2}$$

o que implica

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{HD}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2}, \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = \frac{S_1}{S_1 + S_2 + S_3} \text{ e } \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (5.31)$$

Multiplicando membro a membro cada termo de (5.31), obtemos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{HD}} \cdot \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2} \cdot \frac{S_1}{S_1 + S_2 + S_3} \cdot \frac{S_2}{S_1} = 1. \quad \square$$

No que segue, deixamos uma lista de atividades das quais a maioria está disponível em www.obm.org.br, onde os professores podem utilizar para trabalhar com seus alunos.

5.3 Exercícios propostos

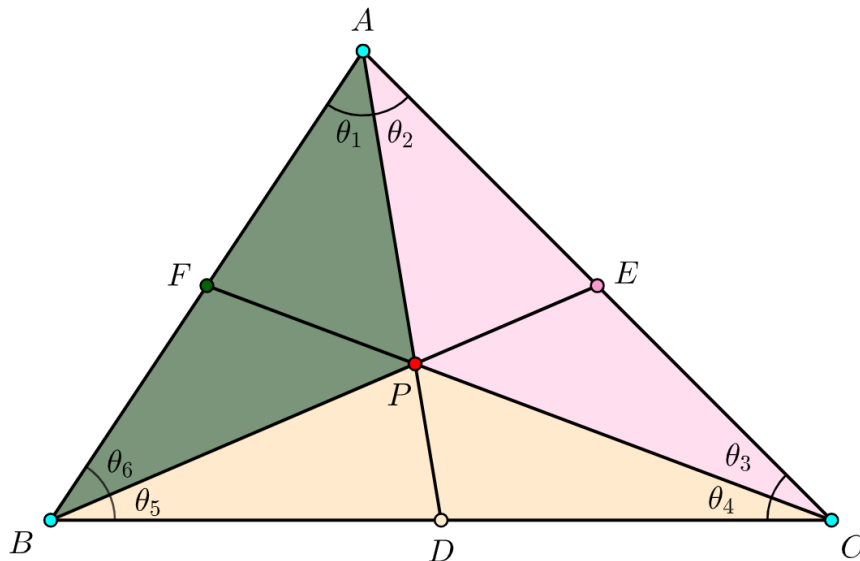
Exercício 5.1. Em um triângulo ABC , traça a bissetriz \overline{BD} e uma ceviana \overline{AE} , tal que, são perpendiculares em F e se traça uma ceviana \overline{CG} , que contém F e $\overline{DC} = 2(\overline{AD})$. Calcule $\frac{\overline{CF}}{\overline{FG}}$.

Exercício 5.2. Seja ABC um triângulo. Se \overline{AD} é a bissetriz do ângulo \widehat{ABC} e intercepta \overline{AC} no ponto D , mostre que $\overline{BD} = \frac{ac}{b+c}$, onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Exercício 5.3 (Teorema de Ceva na forma trigonométrica). Seja ABC um triângulo com $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ e $F \in \overline{BC}$. Se \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes, mostre que

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \cdot \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_4} \cdot \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_6} = 1.$$

Figura 22 – Teorema de Ceva na forma trigonométrica



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Exercício 5.4. Usando o teorema de Ceva na forma trigonométrica, mostre que as alturas de um triângulo são concorrentes.

Exercício 5.5. Mostre que as três medianas de um triângulo ABC são concorrentes.

Exercício 5.6. Seja ABC um triângulo com baricentro G . Os pontos $M \in \overline{AB}$ e $N \in \overline{AC}$ são, tais que, o segmento \overline{MN} passa por G . Mostre que:

$$\overline{AM} \cdot \overline{CN} + \overline{AN} \cdot \overline{BM} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}.$$

Exercício 5.7. *Seja ABC um triângulo dado. A bissetriz do ângulo \widehat{A} corta \overline{BC} em D . As bissetrizes de \widehat{ADB} e \widehat{ADC} intersectam \overline{AB} e \overline{AC} nos pontos E e F respectivamente. Suponhamos que os segmentos de reta \overline{BC} e \overline{EF} se intersectam no ponto P . Mostre que, $\overline{AP} \perp \overline{AD}$.*

Exercício 5.8 (Bulgária 2009). *O círculo inscrito em um triângulo ABC tem I como centro e é tangente aos lados \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} em A_1 , B_1 , C_1 respectivamente. Seja d uma reta que passa por I , e A' , B' , C' sejam os respectivos pontos simétricos de A_1 , B_1 , C_1 em relação a d . Mostre que os segmentos de retas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são concorrentes.*

Sugestão: Usar o teorema de Ceva na forma trigonométrica.

Exercício 5.9 (China 1988). *Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito em um círculo Γ . Mostre que, as diagonais \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes se, e somente se:*

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EF} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{FA}.$$

Sugestão: Usar o teorema de Ceva na forma trigonométrica.

Exercício 5.10 (Hungria 2010). *Seja $ABCD$ um quadrilátero, cuja a área é igual a S . Mostre que, se $(\overline{AB} + \overline{CD})(\overline{AD} + \overline{BC}) = 4S$, então $ABCD$ é um retângulo.*

6 TEOREMAS DE PAPILON

Neste Capítulo são apresentados resultados bastante abordados em Olimpíadas de Matemática, seguimos como referência principal o autor (Bastidas, 2025), além de outros autores de livros que contemplam problemas olímpicos, como é o caso de (Andreescu; Korsky; Pohoata, 2016) e (Chen, 2016), também fizemos uma aplicação de um resultado disponível no blog do (Madeira, 2024) e alguns exercícios propostos encontrados no *site* da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM, 2025) por Jorge Craveiro. Tratamos desses temas de forma didática e apresentamos as soluções dos problemas propostos da mesma forma. Em geral, os resultados aqui apresentados não são abordados em livros didáticos do ensino básico, em referências nacionais encontramos o próximo resultado, que é o Teorema da Borboleta, apenas no livro do professor Antônio Caminha Tópicos de Matemática Elementar, volume 2 (Caminha, 2024). Acreditamos assim, que o referido material pode ser utilizado por professores para treinamento preparatório de seus alunos em Oficinas Olímpicas e/ou outros fins.

6.1 O Teorema da Borboleta

Figura 1 – Teorema da Borboleta.



Fonte: Bastidas, 2025.

A palavra francesa *papillon* significa **borboleta**, por esta razão, aqui no Brasil os teoremas de papillon são conhecidos como o **Teorema da Borboleta**.

Isso se deve ao fato de que a figura que se obtém ao desenharmos o diagrama descrito a partir do enunciado do teorema tem uma notável semelhança com as asas de uma borboleta.

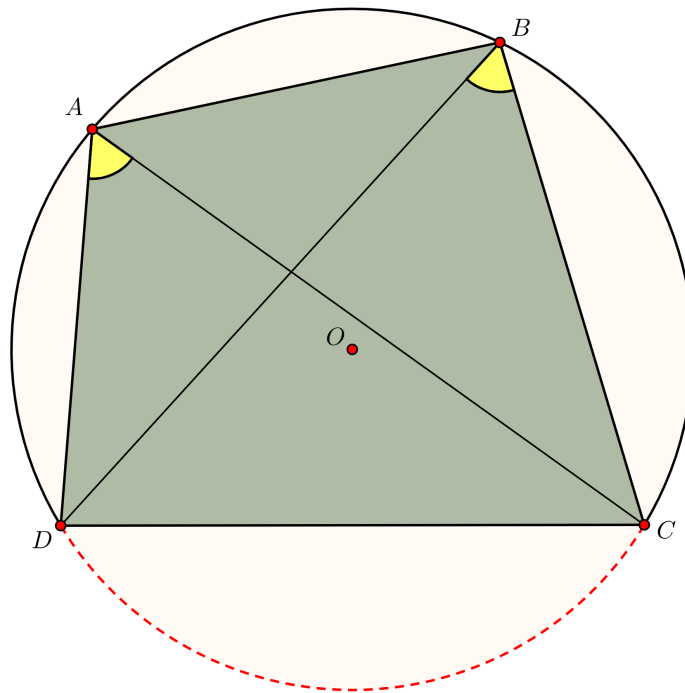
O Teorema da Borboleta só foi demonstrado pela primeira vez no ano de 1804, pelo matemático escocês William Wallace. Nesse período, a matemática passava por um momento de grande avanço, inclusive com a contribuição de Wallace na geometria projetiva e em outros ramos da matemática.

Atualmente diversas provas deste teorema já foram exploradas, como por exemplo nas áreas: analítica, geométrica e complexa.

Para nos auxiliar na demonstração deste teorema vamos fazer uso de um lema que nos apresenta um dos casos de quando um quadrilátero é inscrito.

Lema 6.1. *Um quadrilátero é inscrito se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

Figura 2 – Quadrilátero inscrito.



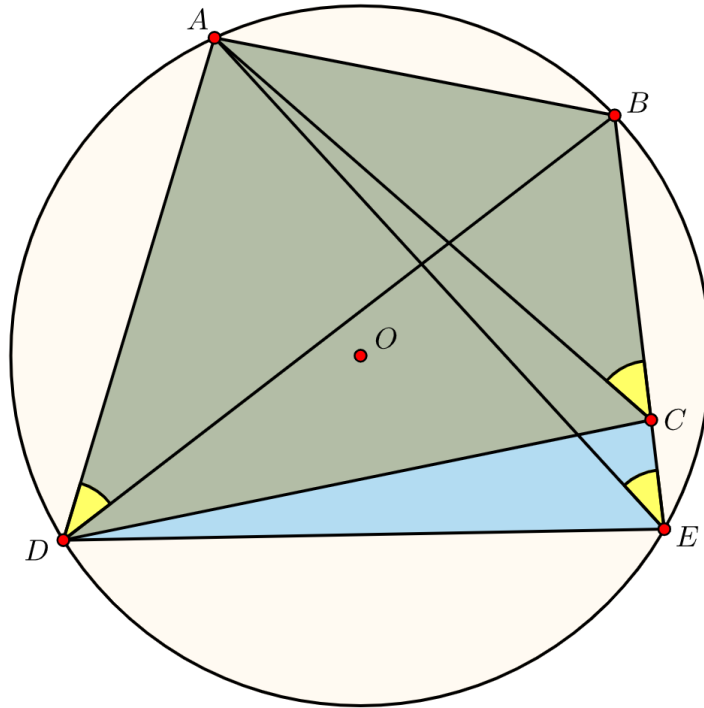
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito. Logo, os ângulos inscritos \widehat{DAC} e \widehat{DBC} compartilham metade do ângulo central \widehat{COD} . Isto é,

$$\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = \frac{\widehat{COD}}{2}.$$

(\Leftarrow) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$. Suponhamos, por absurdo, que $ABCD$ não é inscrito. Seja E a intersecção do lado \overline{BC} com a circunferência circunscrita ao triângulo ABD . Dessa forma, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{AEB}$, o que é um absurdo pela propriedade do ângulo externo. Logo, $ABCD$ é inscrito.

Figura 3 – Quadrilátero inscritível.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

□

No que segue, apresentamos o Teorema da Borboleta acompanhado de sua demonstração feita de maneira detalhada, com o objetivo de tornar seu entendimento o mais claro possível. Este resultado é bastante utilizado na resolução de problemas olímpicos, mas pouco abordado na literatura nacional.

Teorema 6.2. (Borboleta). *Seja M o ponto médio de uma corda \overline{AB} de um círculo, através do qual outras duas cordas \overline{EF} e \overline{GH} são desenhadas; \overline{EH} e \overline{FG} cruzam a corda \overline{AB} nos pontos N e L , respectivamente. Então M é o ponto médio de \overline{NL} .*

Demonstração. Faremos a prova deste teorema (*Papillon* ou *Borboleta*) através de três casos, os quais apresentaremos agora.

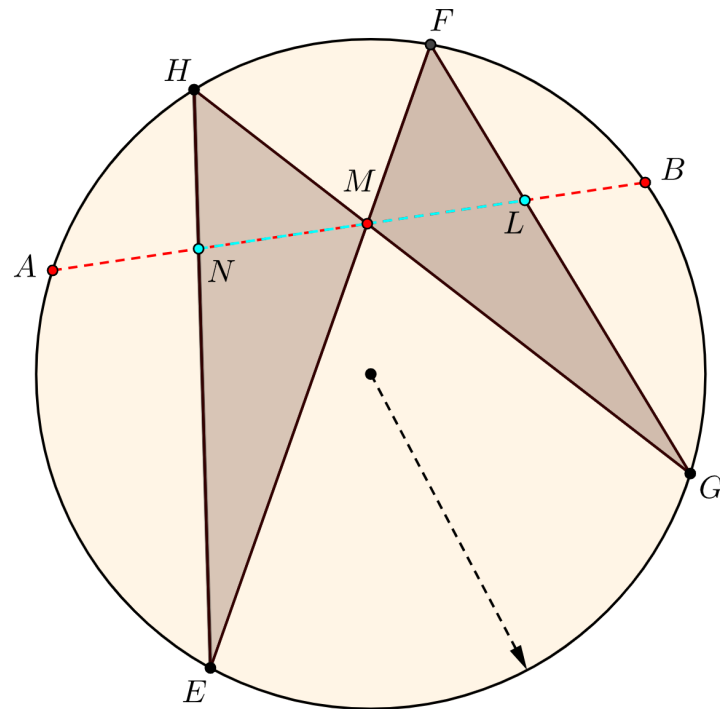
No primeiro caso, a corda \overline{AB} está contida na circunferência e os pontos N e L também.

- **1º caso:** Se $\overline{AM} = \overline{MB}$, então $\overline{NM} = \overline{ML}$.

De fato, por hipótese, $\overline{AM} = \overline{MB}$ o que implica $\overline{AB} \perp \overline{MO}$, pois \overline{MO} é um diâmetro que passa pelo ponto médio de \overline{AB} .

Observe a figura a seguir.

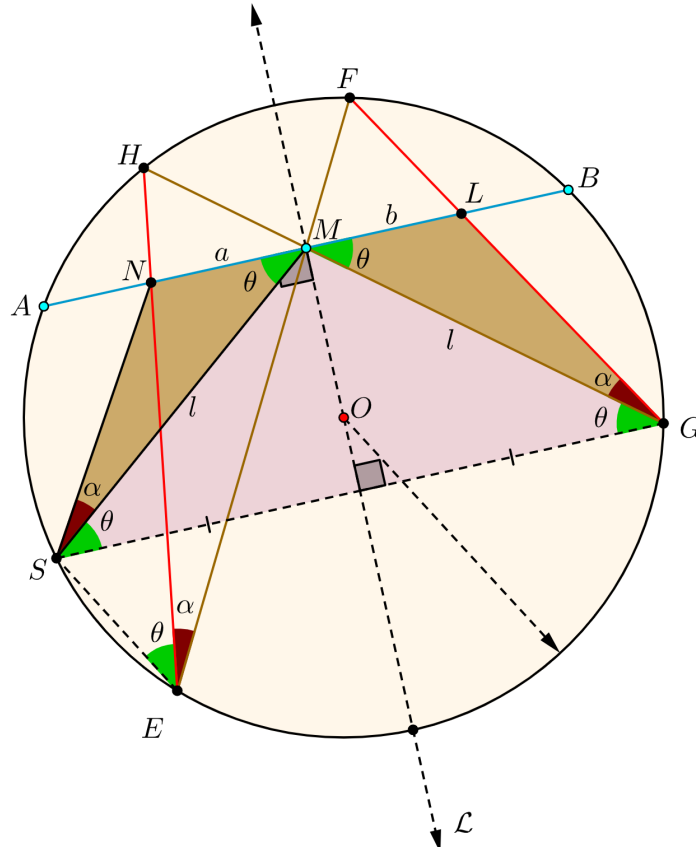
Figura 4 – Teorema da Borboleta.



Fonte: Bastidas, 2025.

A próxima figura apresenta todos os dados necessários para a demonstração do 1º caso, vejamos:

Figura 5 – Demonstração do 1º caso do Teorema da Borboleta.



Fonte: Bastidas, 2025.

A partir do ponto G traçamos o segmento \overline{GS} de modo que $\overline{GS} \perp \mathcal{L}$. Note que o $\triangle GMS$ é isósceles de base \overline{GS} , ou seja, $\overline{MS} = \overline{MG}$ e consequentemente os ângulos

$$\angle M\hat{S}G = \angle M\hat{G}S = \theta.$$

Por outro lado, o ângulo $\angle S\hat{E}H$ é ângulo inscrito e tem em comum o mesmo arco que o ângulo $\angle M\hat{G}S$, isto é,

$$\angle S\hat{E}H = \angle M\hat{G}S = \angle M\hat{S}G = \theta.$$

No quadrilátero $EMNS$ são congruentes os ângulos $\angle S\hat{E}N$ e $\angle N\hat{M}S$, já que $\angle N\hat{M}S$ e $\angle M\hat{S}G$ são ângulos alternos internos, o que implica, pelo Lema 6.1 que este quadrilátero é inscritível.

Sendo assim, existe uma circunferência que passa pelos vértices do quadrilátero $EMNS$, ou seja, os ângulos $\angle N\hat{S}M$ e $\angle N\hat{E}M$ compartilham do mesmo arco, \widehat{AB} . Logo,

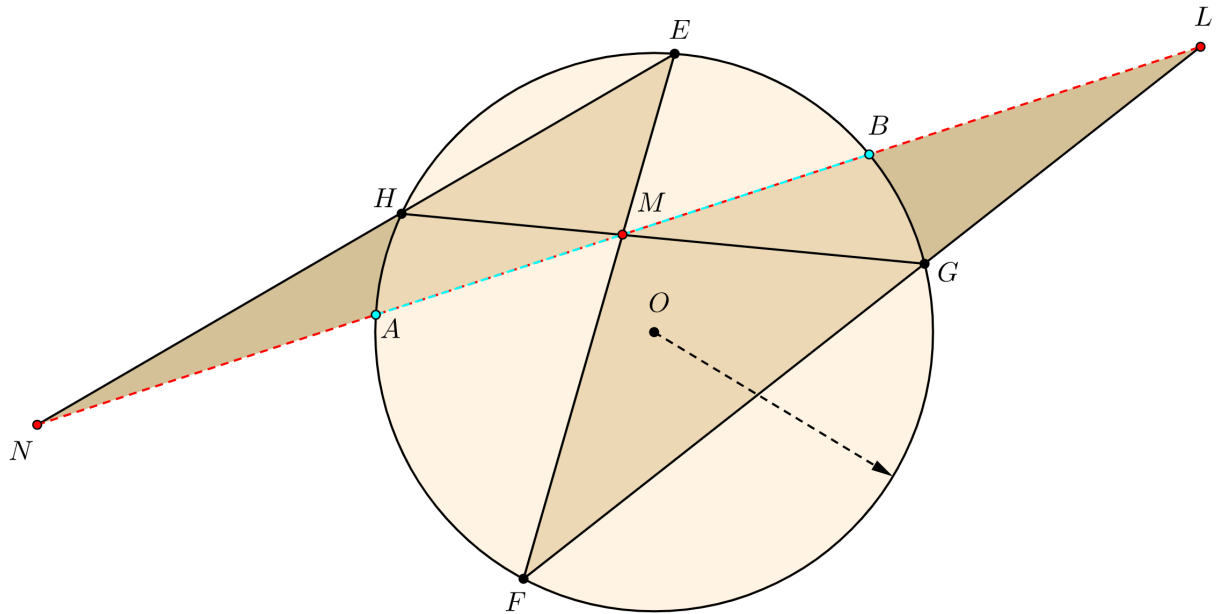
$$\angle N\hat{S}M = \angle N\hat{E}M = \alpha.$$

Portanto, os triângulos MNS e GLM são congruentes pelo **caso ALA**. Isto é, os lados \overline{MN} e \overline{LM} são iguais e, consequentemente, $a = b$, como queríamos demonstrar.

No segundo caso, a corda \overline{AB} também está contida na circunferência, mas os pontos N e L são externos à circunferência e estão sobre a reta que contém a corda \overline{AB} .

- **2º caso:** Se $\overline{AM} = \overline{MB}$, então $\overline{NM} = \overline{ML}$. De modo análogo ao que fizemos no 1º caso, temos:

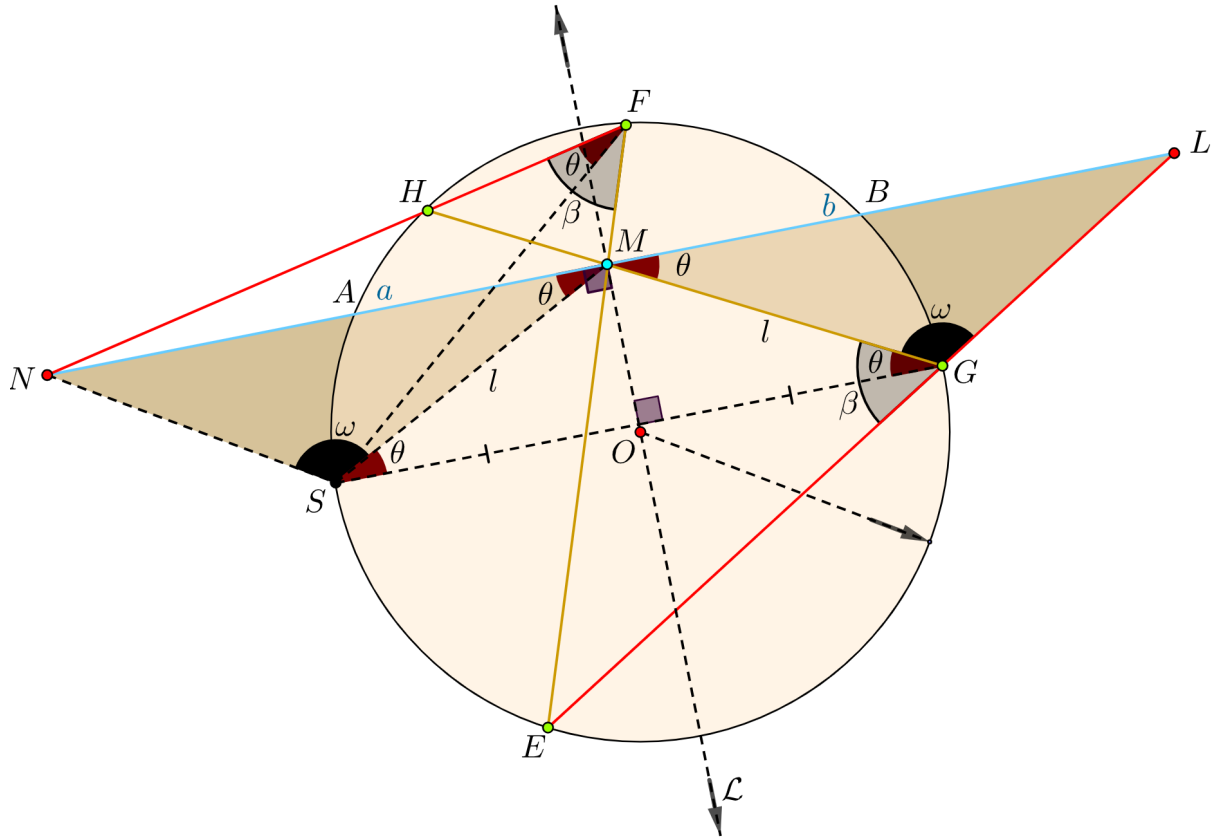
Figura 6 – 2º caso do Teorema da Borboleta.



fonte: Bastidas, 2025.

Para um melhor entendimento observemos a figura a seguir.

Figura 7 – Demonstração do 2º caso do Teorema da Borboleta.



Fonte: Bastidas, 2025.

Sobre a circunferência tome o ponto S de tal modo que $\overline{SG} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}}$. Observe que o triângulo GMS é isósceles de base \overline{GS} . Note também que:

$$\angle H\hat{F}S = \angle M\hat{G}S = \angle G\hat{M}L = \angle S\hat{M}N = \theta.$$

Pelo Lema 6.1, o quadrilátero $NFMS$ é inscritível, pois os ângulos $N\hat{M}S$ e $N\hat{F}S$ são congruentes.

Mas, se $NFMS$ é inscritível, então seus ângulos opostos somam 180° . Isto é,

$$\angle N\hat{F}M + \angle N\hat{S}M = 180^\circ.$$

Denotando o ângulo $N\hat{F}M = \beta$, temos também que o ângulo $H\hat{G}E = \beta$, uma vez que ambos são ângulos inscritos.

Como $H\hat{G}E + M\hat{G}L = 180^\circ$, concluímos, por transitividade, que $M\hat{G}L = \omega$. Logo, os triângulos MNS e GLM são congruentes pelo **caso ALA**.

Em resumo:

$$\angle N\hat{M}S = \angle G\hat{M}L = \theta$$

$$\overline{MS} = \overline{MG} = l$$

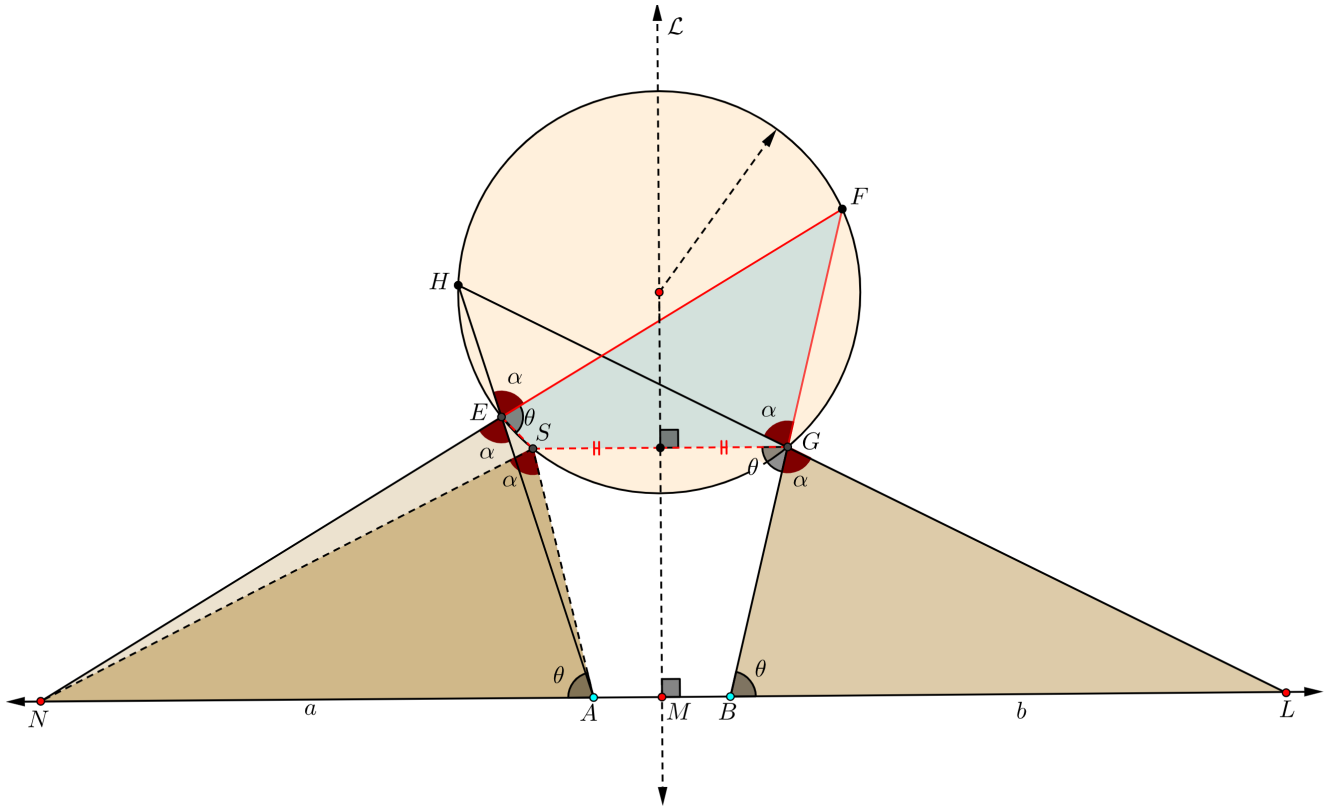
$$\angle N\hat{S}M = \angle M\hat{G}L = \omega$$

Portanto, $\overline{NM} = \overline{ML}$, ou seja, $a = b$, como queríamos mostrar.

Neste último caso não temos a corda \overline{AB} e sim a reta \overleftrightarrow{AB} , contendo os pontos N e L exteriores à circunferência, onde as propriedades do teorema também são válidas.

- **3º caso:** Para mostrarmos o último caso da demonstração do teorema da borboleta, seguimos com a mesma ideia anterior.

Figura 8 – Demonstração do 3º caso do Teorema da Borboleta.



Fonte: Bastidas, 2025.

Marcamos o ponto S sobre a circunferência de tal modo que $\overline{GS} \perp \mathcal{L}$. Como a reta \overleftrightarrow{AB} também é perpendicular a \mathcal{L} e portanto paralela a \overline{GS} e os pontos G e S são simétricos em relação a \mathcal{L} , então, podemos concluir que $\overline{BG} = \overline{AS}$.

Note que os ângulos $G\hat{B}L$ e $S\hat{G}B$ são ângulos alternos internos, portanto, congruentes. Além disso, como os segmentos \overline{BG} e \overline{AS} são simétricos em relação à reta \mathcal{L} , o ângulo $S\hat{A}N$ tem a mesma medida que $G\hat{B}L$ e $S\hat{G}B$.

Isto é,

$$G\hat{B}L = S\hat{G}B = S\hat{A}N = \theta.$$

Tomando o ângulo $\widehat{BGL} = \alpha$, o seu oposto pelo vértice tem medida igual, ou seja, $\widehat{HGF} = \alpha$. Observe que \widehat{HGF} é ângulo inscrito e compartilha o mesmo arco que o ângulo \widehat{HEF} que, por sua vez, é oposto pelo vértice ao ângulo \widehat{NEA} , isto é:

$$\widehat{BGL} = \widehat{HGF} = \widehat{HEF} = \widehat{NEA} = \alpha.$$

Veja que no quadrilátero inscrito $SEFG$, o ângulo \widehat{SEF} também tem medida igual a θ . Ora, o ângulo raso $\widehat{BGF} = 180^\circ$, logo

$$\alpha + \widehat{HGS} + \theta = 180^\circ \quad (6.1)$$

Por outro lado, os ângulos opostos do quadrilátero $SEFG$ também somam 180° , ou seja

$$(\alpha + \widehat{HGS}) + \widehat{SEF} = 180^\circ \quad (6.2)$$

Resolvendo as igualdades (6.1) e (6.2), temos:

$$\alpha + \widehat{HGS} + \theta = \alpha + \widehat{HGS} + \widehat{SEF} \Rightarrow \widehat{SEF} = \theta.$$

Agora, vamos provar que o quadrilátero $NESA$ também é inscrito. Observe que \widehat{NEF} é ângulo raso. Daí,

$$\alpha + \widehat{SEA} + \theta = 180^\circ. \quad (6.3)$$

Como vimos anteriormente, \widehat{BGF} também é ângulo raso, ou seja:

$$\alpha + \widehat{HGS} + \theta = 180^\circ. \quad (6.4)$$

Das equações (6.3) e (6.4), temos:

$$\alpha + \widehat{SEA} + \theta = \alpha + \widehat{HGS} + \theta \Rightarrow \widehat{SEA} = \widehat{HGS}.$$

Em outras palavras, concluímos que o ângulo $\widehat{NES} = \widehat{SGF}$, o que implica que o quadrilátero $NESA$, assim como o quadrilátero inscrito $SEFG$, também tem ângulos opostos medindo 180° , pois o ângulo $\widehat{SAN} = \widehat{SEF} = \theta$.

Portanto, $NESA$ é inscrito e pelo Lema 6.1, $\widehat{NEA} = \widehat{NSA} = \alpha$. Isto é, o triângulo NSA é congruente ao triângulo LGB pelo **caso ALA**, o que acarreta, $a = b$. Mas, por hipótese, $\overline{AM} = \overline{MB}$, logo, $\overline{NM} = \overline{ML}$, como queríamos demonstrar. \square

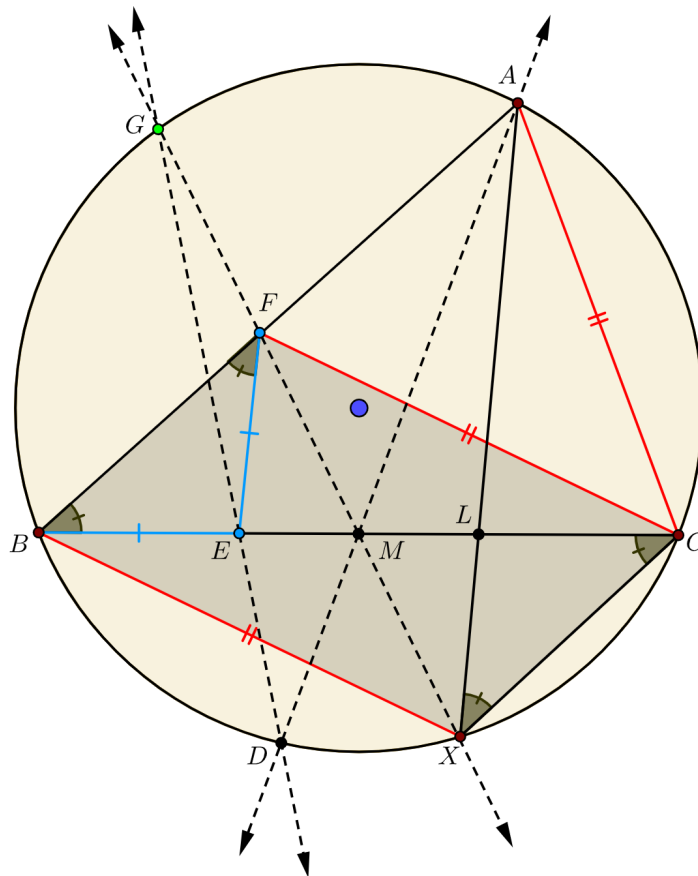
Faremos agora um exemplo de aplicação do Teorema da Borboleta, ressaltamos que a sua demonstração foi feita de maneira clara e com todos os detalhes, pois temos o objetivo de apresentar um trabalho que seja diferenciado no sentido de que o estudante que venha

à procura de informações sobre o assunto, as encontre da forma mais didática possível. Trata-se do **problema 3 da Olimpíada de Matemática do Cone Sul de 2020**, proposto por Jhefferson Lopez do Peru.

Problema

Seja ABC um triângulo acutângulo, com $\overline{AC} < \overline{BC}$ e ω a circunferência que passa por A , B e C . Seja M o ponto médio de \overline{BC} . Seja F um ponto sobre o segmento \overline{AB} tal que $\overline{CA} = \overline{CF}$ e seja E um ponto do segmento \overline{BC} tal que $\overline{EB} = \overline{EF}$. A reta \overleftrightarrow{AM} intersecta ω no ponto D (diferente de A). A reta \overleftrightarrow{DE} intersecta a reta \overleftrightarrow{FM} em G . Demonstrar que G pertence a ω .

Figura 9 – Olimpíada de Matemática do Cone Sul, 2020.



Fonte: Madeira, 18/12/2024.

Demonstração. Tracemos os segmentos $\overline{CX} \parallel \overline{AB}$, daí, $\overline{BX} = \overline{AC}$. Como por hipótese, $\overline{AC} = \overline{CF}$, logo, $\overline{BX} = \overline{AC} = \overline{CF}$. Ou seja, o quadrilátero $BXCF$ é um paralelogramo e o quadrilátero $BXCA$ é um trapézio isósceles.

Como as diagonais do paralelogramo $BXCF$ intersectam-se em seus respectivos pontos médios e por hipótese M é ponto médio de \overline{BC} , então $\overline{FX} \cap \overline{BC} = M$. Observe que $\angle LX̂C = \angle EB̂F = \alpha$, uma vez que $\overline{CX} \parallel \overline{BF}$ enquanto \overline{BC} é uma transversal.

Ainda, como $\overline{EB} = \overline{EF}$, o triângulo BEF é isósceles de base \overline{BF} e daí, $\angle B\hat{F}E = \angle E\hat{B}F = \alpha$. Note também que o ângulo inscrito $E\hat{B}F$ compartilha o mesmo arco que o ângulo inscrito $C\hat{X}L$, isto é, $\angle E\hat{B}F = \angle C\hat{X}L = \alpha$. Ou seja, o triângulo CXL é isósceles de base \overline{CX} e como o quadrilátero $BXCF$ é um paralelogramo, $\overline{CX} = \overline{BF}$, o que implica que os triângulos BEF e CXL são congruentes pelo **caso ALA**.

Logo, $\overline{XL} = \overline{CL} = \overline{BE} = \overline{FE}$, o que acarreta $\overline{BE} = \overline{CL}$ e como por hipótese M é ponto médio de \overline{BC} , então $\overline{BM} = \overline{CM}$ e portanto, $\overline{EM} = \overline{ML}$. Dessa forma, podemos concluir pelo Teorema da Borboleta que o ponto $G \in \omega$, como queríamos demonstrar. \square

6.2 Aplicações dos quadriláteros inscritíveis

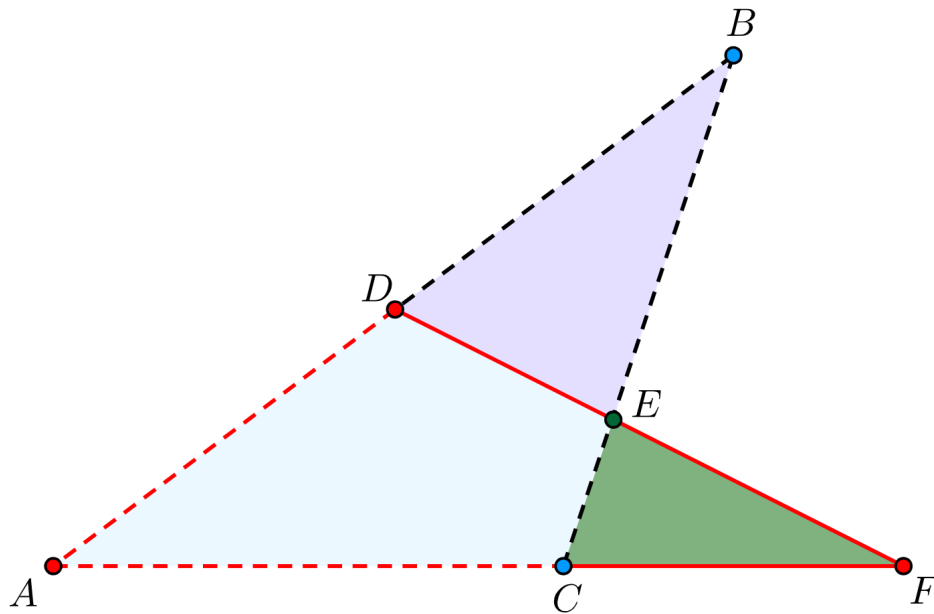
Nesta seção, iremos estudar uma das aplicações dos quadriláteros inscritíveis, a concorrência de circunferências. Vale ressaltar que todos os resultados expostos a seguir foram feitos de forma detalhada, a fim de proporcionar um melhor entendimento para o leitor. Fizemos isto com o objetivo de trazer novos conhecimentos para aqueles que procuram se aprofundar em estudos interessantes como os apresentados da forma acima. Seguimos a referência (Bastidas, 2025), intitulada por “*Circunferencia, teoria - demostraciones trazos auxiliares*”.

6.2.1 Concorrência de circunferências

Vamos iniciar este estudo através dos próximos dois teoremas, ambos tratam sobre dois casos que envolvem a concorrência de circunferências.

Teorema 6.3. *Na figura a seguir, as circunferências circunscritas aos triângulos ABC , ADF , DEB e CEF são concorrentes.*

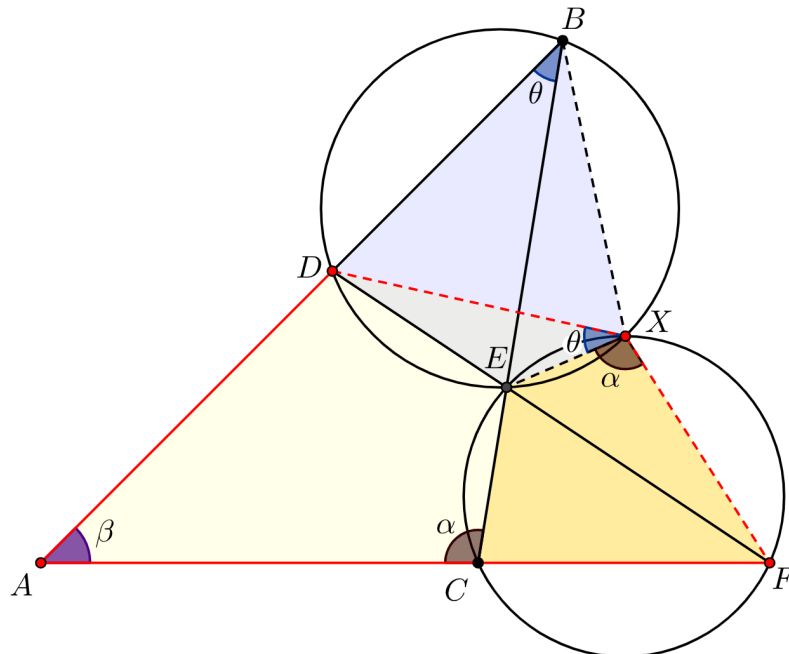
Figura 10 – Triângulos ABC , ADF , DEB e CEF .



Fonte: Bastidas, 2025.

Demonstração. Tracemos as circunferências circunscritas aos triângulos BDE e CEF secantes nos pontos E e X . Conforme a figura.

Figura 11 – Circunferências circunscritas aos triângulos BDE e CEF .



Fonte: Bastidas, 2025.

Sejam $\hat{ACB} = \alpha$, $\hat{BAC} = \beta$ e $\hat{ABC} = \theta$ as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC . Logo,

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ. \quad (6.5)$$

Note que, no quadrilátero $BDEX$ o ângulo inscrito $D\hat{B}E = \theta$ compartilha o mesmo arco que o ângulo também inscrito $D\hat{X}E$, ou seja, $D\hat{B}E = D\hat{X}E = \theta$.

Já no quadrilátero $CEXF$, o ângulo $E\hat{X}F = \alpha$, pois, o ângulo $E\hat{C}F = 180^\circ - \alpha$ e como a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito vale 180° , temos:

$$E\hat{X}F + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ \Rightarrow E\hat{X}F + 180^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow E\hat{X}F = \alpha.$$

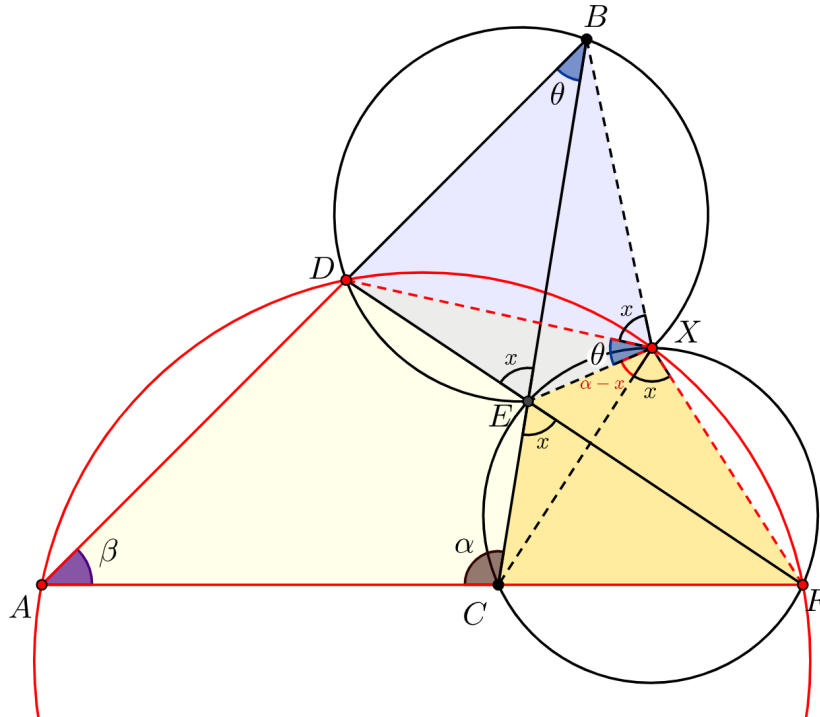
Agora, provaremos que o quadrilátero $ADXF$ também é inscritível. De fato, como o ângulo $D\hat{X}F = \alpha + \theta$ e o seu oposto é $D\hat{A}F = \beta$, então:

$$D\hat{X}F + D\hat{A}F = \alpha + \theta + \beta = 180^\circ.$$

Isto é, pela igualdade 6.5, a soma dos ângulos opostos de $ADXF$ é igual a 180° , portanto, $ADXF$ é inscritível, como queríamos provar.

Por fim, vamos mostrar que o quadrilátero $ABXC$ também é inscritível.

Figura 12 – Quadrilátero $ABXC$.



Fonte: Bastidas, 2025.

Ora, denotando $B\hat{X}D = x$, então $B\hat{E}D = x$, uma vez que ambos são ângulos inscritos de $BDEX$. Por outro lado, no quadrilátero $CEXF$ também temos $C\hat{E}F = C\hat{X}F = x$, pois $B\hat{X}D$ e $C\hat{E}F$ são opostos pelo vértice.

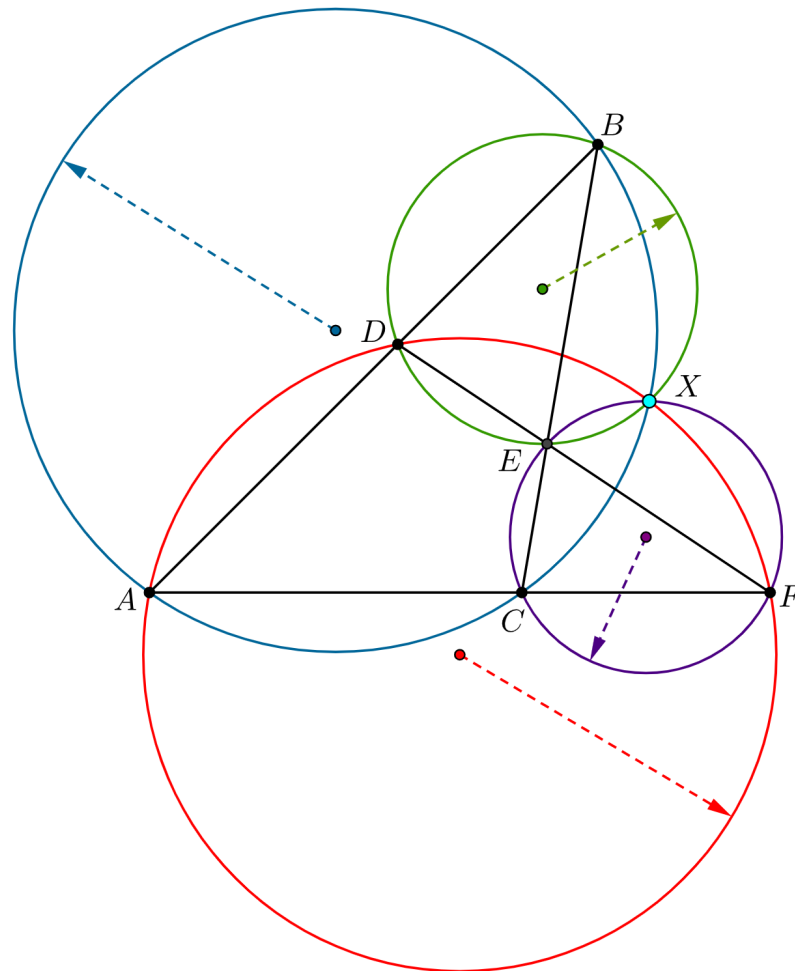
Sendo assim, o ângulo $\widehat{CXE} = \alpha - x$. Veja que, no quadrilátero $ABCX$, são opostos os ângulos \widehat{BAC} e \widehat{BXC} . Logo,

$$\widehat{BAC} + \widehat{BXC} = \beta + (\alpha - x + \theta + x) \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BXC} = \alpha + \beta + \theta.$$

Portanto, por 6.5, $\widehat{BAC} + \widehat{BXC} = 180^\circ$, mostrando assim que o quadrilátero $ABXC$ é inscritível e que de fato todas as circunferências circunscritas aos triângulos descritos no enunciado do teorema são concorrentes. \square

A figura a seguir representa as quatro circunferências concorrendo no ponto X .

Figura 13 – Circunferências concorrendo em X



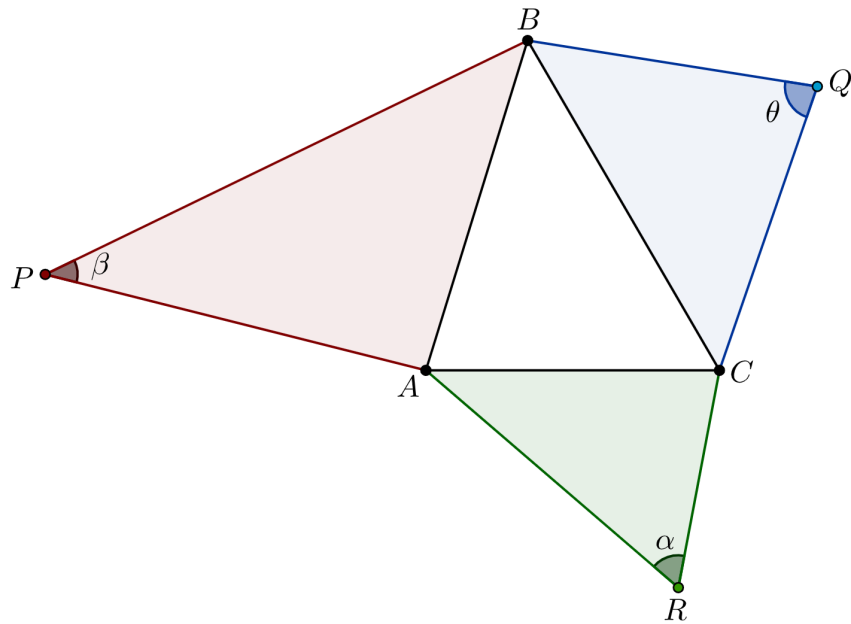
Fonte: Bastidas, 2025.

A seguir, temos o segundo teorema como foi mencionado no início desta Seção, este trata do caso em que sobre os lados de um triângulo ABC são construídos outros três novos triângulos, de tal modo que a soma de cada ângulo do vértice oposto ao respectivo

lado do triângulo ABC é igual a 180° .

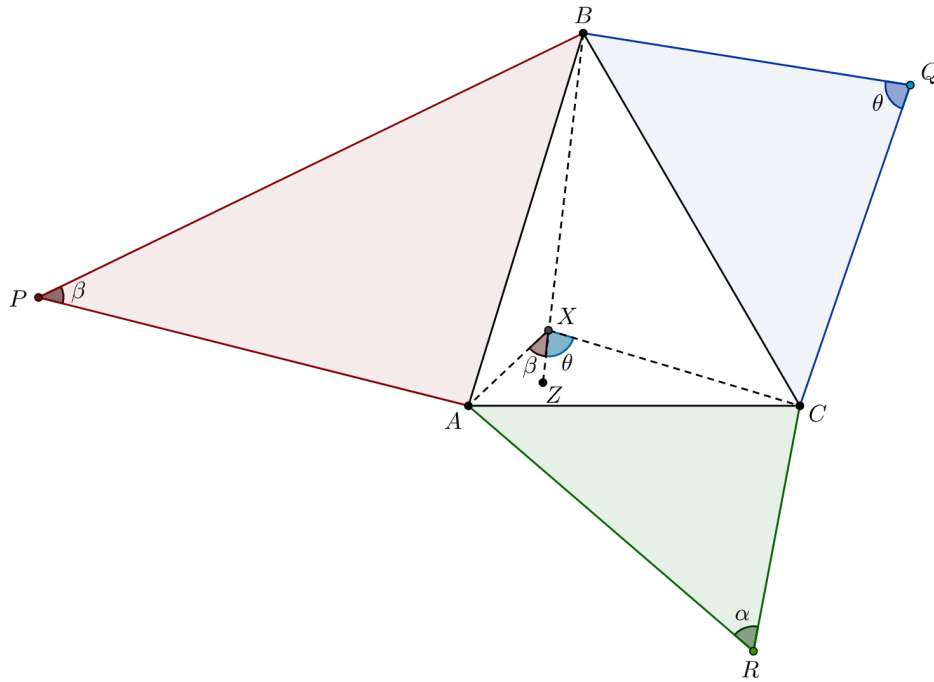
Teorema 6.4. *Se na figura a seguir $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$, então as circunferências circunscritas aos triângulos ABP , BQC e ARC são concorrentes.*

Figura 14 – A soma $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$



Fonte: Bastidas, 2025.

Demonstração. Como todo triângulo admite uma circunferência circunscrita, então, sejam B e X os pontos de interseção das circunferências circunscritas aos triângulos APB e BQC . Veja que os quadriláteros $APBX$ e $BQCX$ são inscritíveis, já que ambos possuem seus vértices sobre as respectivas circunferências.

Figura 15 – Quadriláteros $APBX$ e $BQCX$.

Fonte: Bastidas, 2025.

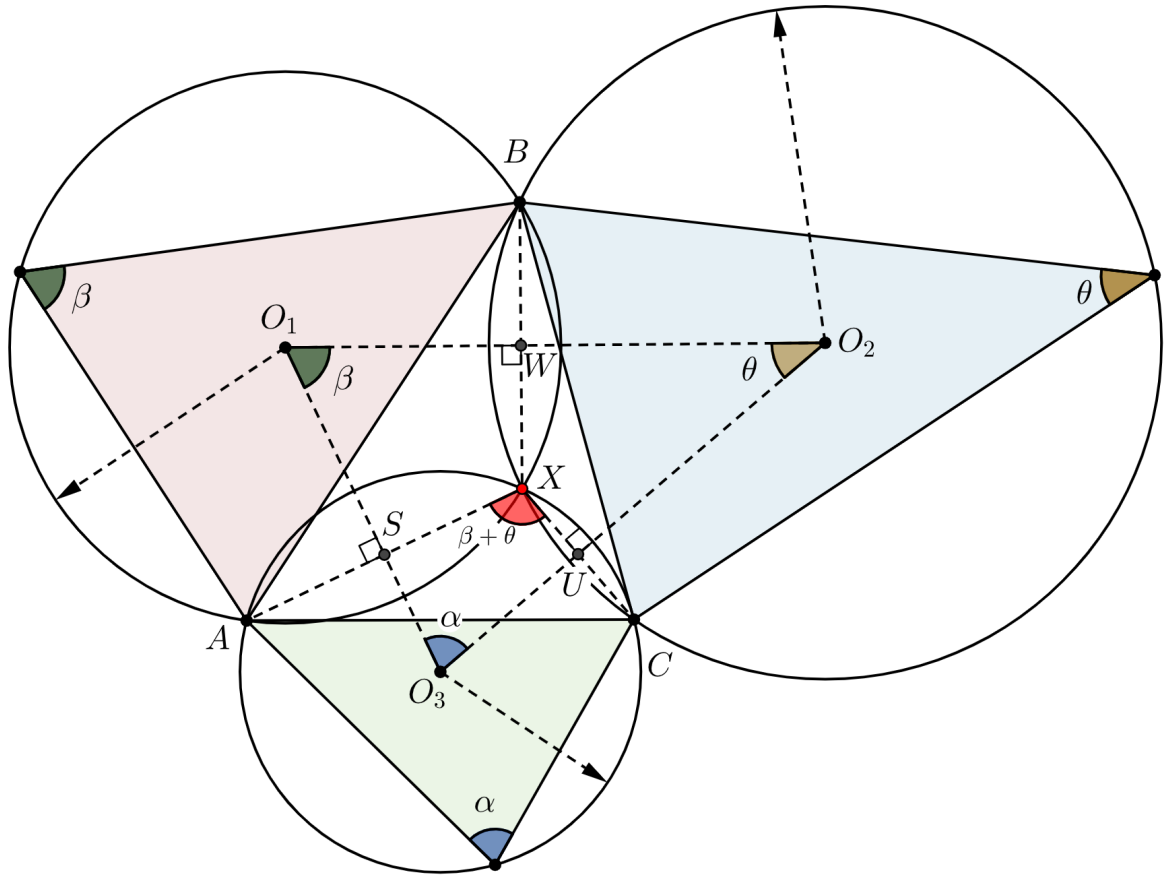
Agora basta mostrarmos que o quadrilátero $ARCX$ também é inscrito. De fato, veja que o ângulo raso $B\hat{X}Z = B\hat{X}A + A\hat{X}Z$. Escrevendo $A\hat{X}B = 180^\circ - A\hat{X}Z$ e sabendo que o quadrilátero $APBX$ é inscrito, temos:

$$A\hat{X}B + A\hat{P}B = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - A\hat{X}Z + A\hat{P}B = 180^\circ \Rightarrow A\hat{X}Z = A\hat{P}B.$$

Isto é, $A\hat{X}Z = A\hat{P}B = \beta$. De forma análoga mostra-se que $C\hat{X}Z = B\hat{Q}C = \theta$.

Por hipótese, $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$. Então, $A\hat{X}C + A\hat{R}C = (\alpha + \beta) + \theta = 180^\circ$, o que implica que $ARCX$ também é inscrito e portanto as circunferências circunscritas aos triângulos APB , BQC e ARC concorrem em X , como queríamos demonstrar. \square

A próxima figura é uma representação da interseção das circunferências citadas anteriormente.

Figura 16 – Circunferências concorrendo no ponto X .

Fonte: Bastidas, 2025.

Ainda na mesma figura, vamos ressaltar um resultado muito interessante, a saber:

Corolário 6.4.1. *O triângulo que tem vértices nos centros das circunferências circunscritas, tem seus ângulos internos de medidas α , β e θ .*

Demonstração. De fato, note que o ângulo $\hat{S}XU = \beta + \theta$, como foi visto na Figura 16, ao mesmo tempo em que o quadrilátero $SXUO_3$ é inscrito, já que os ângulos $O_3\hat{S}X$ e $X\hat{U}O_3$ são retos, isto é, $O_3\hat{S}X + X\hat{U}O_3 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Assim, também temos $S\hat{X}U + S\hat{O}_3U = (\beta + \theta) + S\hat{O}_3U = 180^\circ$. Pela igualdade 6.5, segue que:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \theta = 180^\circ \\ (\beta + \theta) + \hat{O}_3 = 180^\circ. \end{cases}$$

Subtraindo uma equação da outra encontramos $\hat{O}_3 = \alpha$.

Analogamente prova-se que $U\hat{X}W = \alpha + \beta$ e $W\hat{X}S = \alpha + \theta$ e como os quadriláteros $WXSO_1$ e $UXWO_2$ são inscritíveis chegamos a $\hat{O}_1 = \beta$ e $\hat{O}_2 = \theta$, ou seja, os ângulos internos do triângulo $O_1O_2O_3$ são, respectivamente, β , θ e α , como queríamos provar. \square

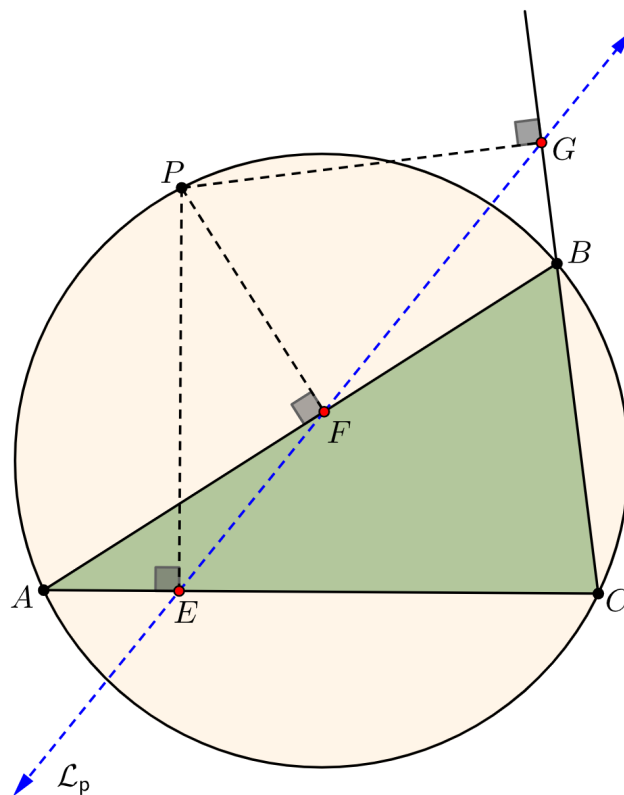
6.2.2 A reta de Simson-Wallace

A reta de Simson-Wallace é um resultado clássico da Geometria Plana. Tal resultado afirma que dado um triângulo ABC inscrito em uma circunferência ω e um ponto P qualquer pertencente a ω , sendo X , Y e Z as projeções ortogonais de P sobre os lados do triângulo ABC , prolongados ou não, então os pontos X , Y e Z são colineares e a reta que os contém é denominada reta de Simson-Wallace.

“O teorema de Simson-Wallace recebe o nome do matemático escocês e professor de matemática da Universidade de Glasgow Robert Simson (14 de Outubro de 1687 - 1 de Outubro de 1768) e do matemático, astrônomo e inventor do pantógrafo William Wallace (23 de Setembro de 1768 - 28 de Abril de 1843). Além do teorema, tanto Simson quanto Wallace tiveram grandes contribuições matemáticas(...)” (Wikipédia)

Teorema 6.5. (*Reta de Simson-Wallace*) *Em todo triângulo, as projeções ortogonais de um ponto da circunferência circunscrita aos seus lados, são colineares. A reta que contém os pés das perpendiculares baixadas desse ponto até os lados do triângulo chama-se reta de Simson-Wallace.*

Figura 17 – Reta de Simson-Wallace.



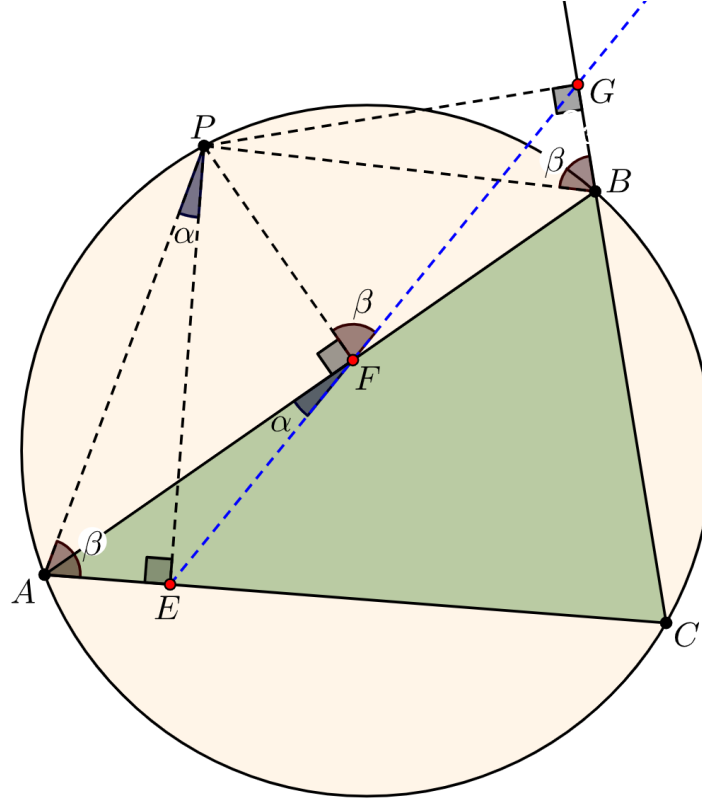
Fonte: Bastidas, 2025.

Em resumo:

- Se P está na circunferência;
- E , F e G : são colineares;
- $\vec{\mathcal{L}}$: É a reta de Simson do ponto P .

Demonstração. Vamos iniciar nossa prova observando a figura a seguir.

Figura 18 – Demonstração da reta de Simson-Wallace.



Fonte: Bastidas, 2025.

Nesta figura traçamos os segmentos PA e PB . Sejam os ângulos $\widehat{AFE} = \alpha$ e $\widehat{PFG} = \beta$. Vamos mostrar que $\alpha + \beta = 90^\circ$.

De fato, os quadriláteros $APFE$ e $PFBG$ são inscritíveis. Note que, no quadrilátero $APFE$, estamos utilizando o lema 6.1 e o fato de que os ângulos $\widehat{AEP} = \widehat{AFP} = 90^\circ$. Já no quadrilátero $PFBG$ estamos levando em consideração as projeções ortogonais do ponto P , isto é, $\widehat{PFB} = \widehat{PGB} = 90^\circ$. Logo, $\widehat{PFB} + \widehat{PGB} = 180^\circ$, o que acarreta na inscritibilidade de $PFBG$. Veja que pelo lema 6.1, $\widehat{PFG} = \widehat{PBG} = \beta$.

No quadrilátero inscrito $APBC$, temos $\widehat{PAC} = \beta$. Ora, como $\widehat{PBG} = \beta$, então, $\widehat{PBC} = (180^\circ - \beta)$. Daí,

$$\widehat{PAC} + (180^\circ - \beta) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PAC} = \beta.$$

Assim, no triângulo retângulo AEP , tem-se $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$. Isso implica dizer que o ângulo $E\hat{F}G = (\alpha + \beta) + 90^\circ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Ou seja, $E\hat{F}G$ é ângulo raso e consequentemente os pontos E , F e G são colineares, como queríamos demonstrar. \square

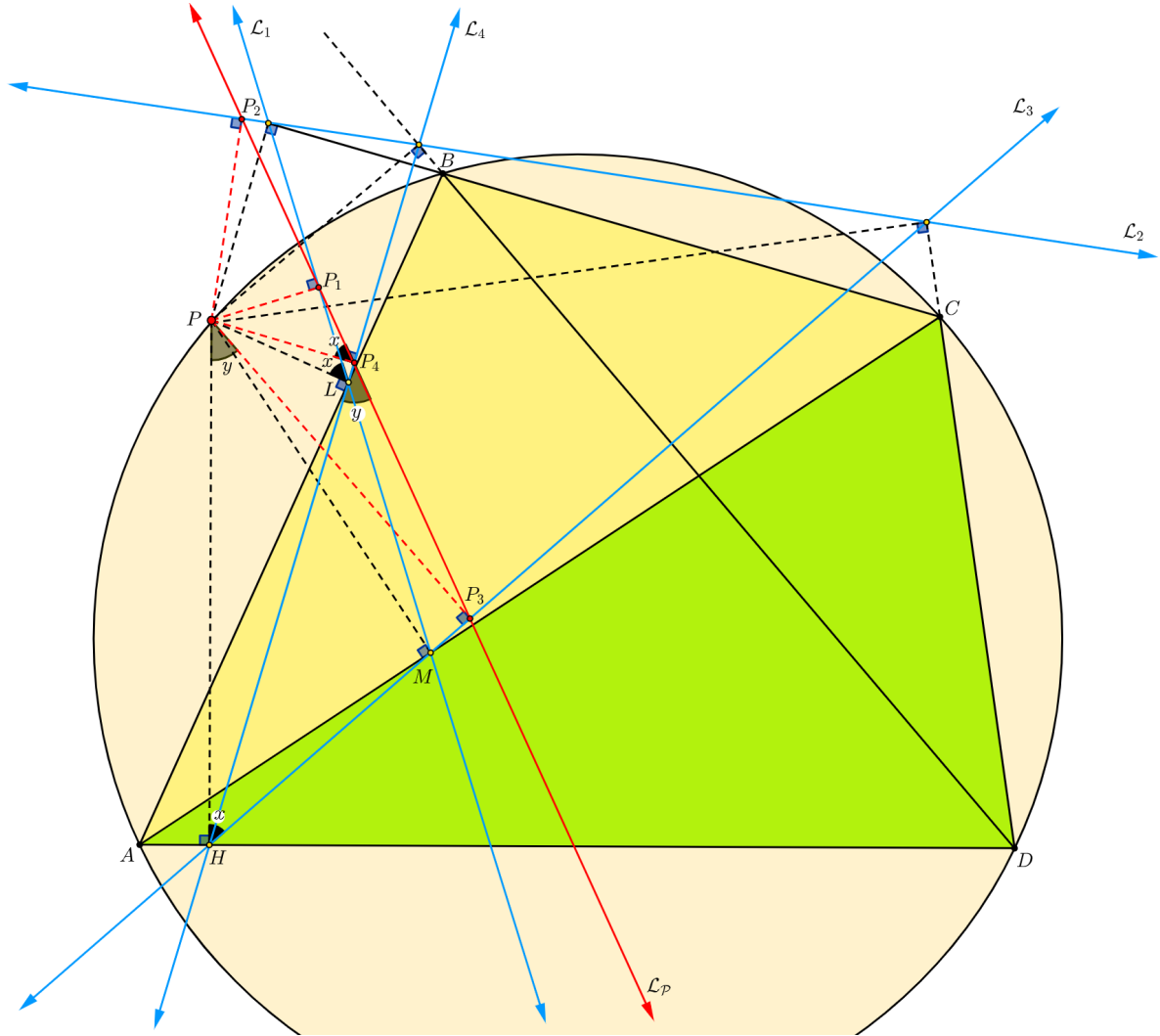
6.2.3 A reta de Simson-Wallace para quadriláteros

O próximo resultado é uma aplicação da reta de Simson-Wallace em um quadrilátero, isso é possível porque podemos subdividir tal quadrilátero em quatro triângulos e em cada um desses triângulos aplicamos a reta de Simson, como fizemos anteriormente. Logo após, fazemos as projeções ortogonais do ponto P sobre cada uma das retas de Simson obtidas nos triângulos, obtendo os pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 . O que vamos provar a seguir é que esses quatro pontos são colineares e a reta que os contém chama-se reta de Simson para quadriláteros.

Teorema 6.6. (*Reta de Simson-Wallace para quadriláteros.*) *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência. Sejam também as retas:*

- $\vec{\mathcal{L}}_1$: *reta de Simson de P com relação ao $\triangle ABC$;*
- $\vec{\mathcal{L}}_2$: *reta de Simson de P com relação ao $\triangle BCD$;*
- $\vec{\mathcal{L}}_3$: *reta de Simson de P com relação ao $\triangle ACD$;*
- $\vec{\mathcal{L}}_4$: *reta de Simson de P com relação ao $\triangle ABD$.*

Então P_1 , P_2 , P_3 e P_4 são colineares e a reta que os contém chama-se reta de Simson de P em relação ao quadrilátero $ABCD$.

Figura 19 – Reta de Simson no quadrilátero $ABCD$.

Fonte: Bastidas, 2025.

Demonstração. Sejam $\angle P\hat{P}_4P_1 = x$ e $\angle H\hat{P}_4P_3 = y$. Nosso objetivo é provar que $x + y = 90^\circ$.

Observe que o quadrilátero PP_4P_3H é inscritível, pois os ângulos $\angle P\hat{P}_4H = \angle PP_3H = 90^\circ$, isto é, o ângulo formado entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo formado entre o lado oposto e a outra diagonal (ver 6.1), por esta razão, concluímos que o ângulo $H\hat{P}_3$ também é igual a y .

De forma análoga, o quadrilátero PP_1P_4L também é inscritível, já que os ângulos $\angle P\hat{P}_1L = \angle PP_4L = 90^\circ$, logo, $\angle P\hat{L}P_1 = \angle P\hat{P}_4P_1 = x$.

Agora, note que o quadrilátero $PLMH$ também é inscritível, pois os pontos P, L, M, H e A são cíclicos. Logo, a soma dos ângulos opostos $\angle P\hat{H}M + \angle P\hat{L}M = 180^\circ$. Note também que $\angle P\hat{L}M = 180^\circ - x$.

Daí,

$$\angle P\hat{H}M + \angle P\hat{L}M = 180^\circ \Rightarrow \angle P\hat{H}M + (180^\circ - x) = 180^\circ \Rightarrow \angle P\hat{H}M = x.$$

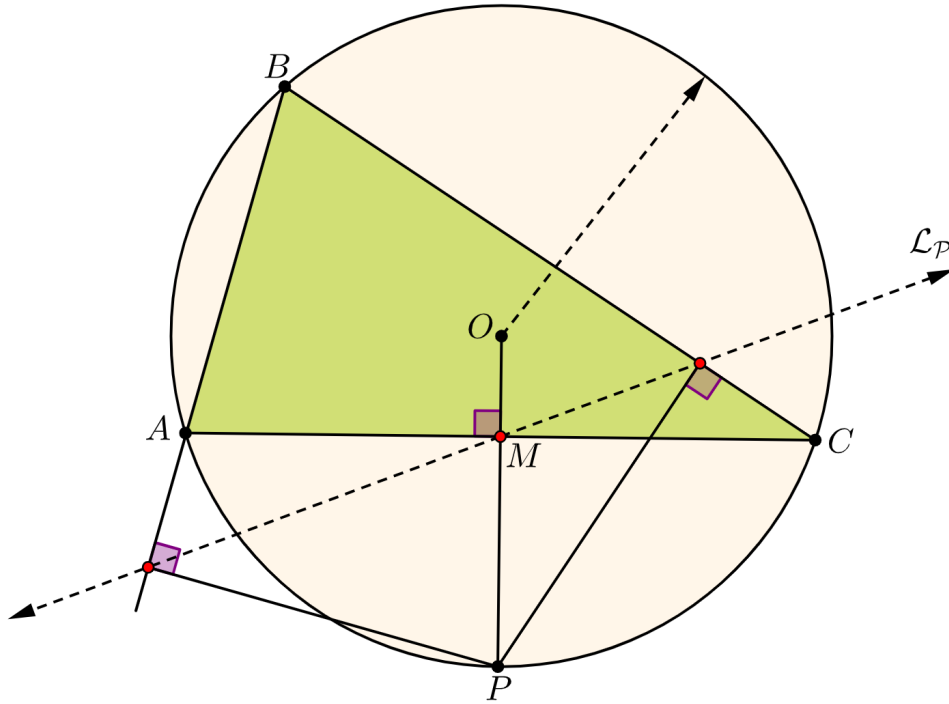
Como o triângulo PP_3H é retângulo concluímos que $x + y = 90^\circ$. Portanto, $P_1\hat{P}_4P_3$ é ângulo raso, pois $P\hat{P}_4H = 90^\circ$ e $x + y = 90^\circ$, então, os pontos P_1, P_4 e P_3 são colineares, o que mostra o teorema. \square

A seguir deixaremos alguns exercícios sobre a reta Simson-wallace.

6.3 Exercícios propostos

Exercício 6.1. *Se um dos lados do triângulo ABC é perpendicular ao raio da circunferência circunscrita a ele, então esta interseção ocorre no ponto médio deste lado e, além disso, a reta de Simson \mathcal{L}_P , também corta este lado em seu ponto médio.*

Figura 20 – Reta de Simson interceptando o ponto médio de \overline{AC} .



Fonte: Bastidas, 2025.

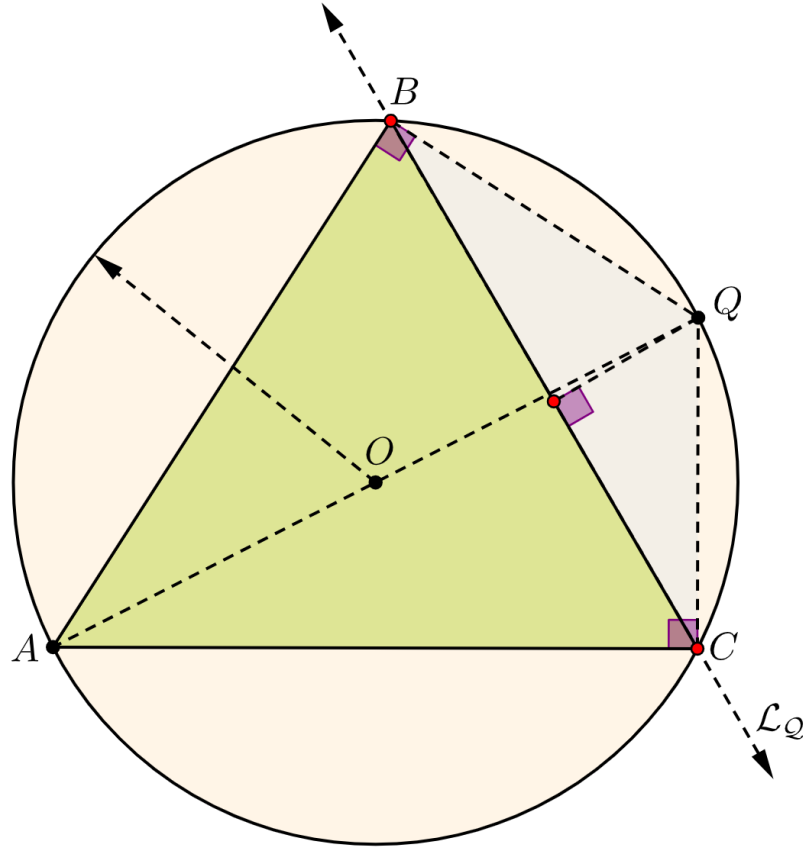
Exercício 6.2. *Num triângulo ABC , prove que as projeções de A sobre as bissetrizes internas e externas traçadas a partir dos vértices B e C são colineares.*

Exercício 6.3. *Num triângulo ABC , sejam D, E e F os pés das alturas em BC, AC e AB , respectivamente. Prove que as projeções de D sobre as retas AB, BE, CF e AC são colineares.*

Exercício 6.4. *Tome M um ponto sobre o circuncírculo do triângulo ABC qualquer. Sejam X, Y e Z as interseções dos círculos de diâmetro AM, BM e CM com o circuncírculo de ABC , respectivamente. Prove que os pontos X, Y e Z são colineares.*

Exercício 6.5. *Seja ABC um triângulo qualquer e Q um ponto da circunferência circunscrita a este triângulo. Se os ângulos $\hat{AB}Q = 90^\circ$ e $\hat{AC}Q = 90^\circ$, então a reta de Simson-Wallace \mathcal{L}_Q , coincide com o lado BC .*

Figura 21 – Reta de Simson coincidindo com o lado \overline{BC} .



Fonte: Bastidas, 2025.

Exercício 6.6. (*Hong Kong 1998*) *Seja $PQRS$ um quadrilátero inscritível com ângulo $\hat{P}SR = 90^\circ$, e sejam H e K as projeções de Q nas retas PR e PS . Prove que HK bissecta QS .*

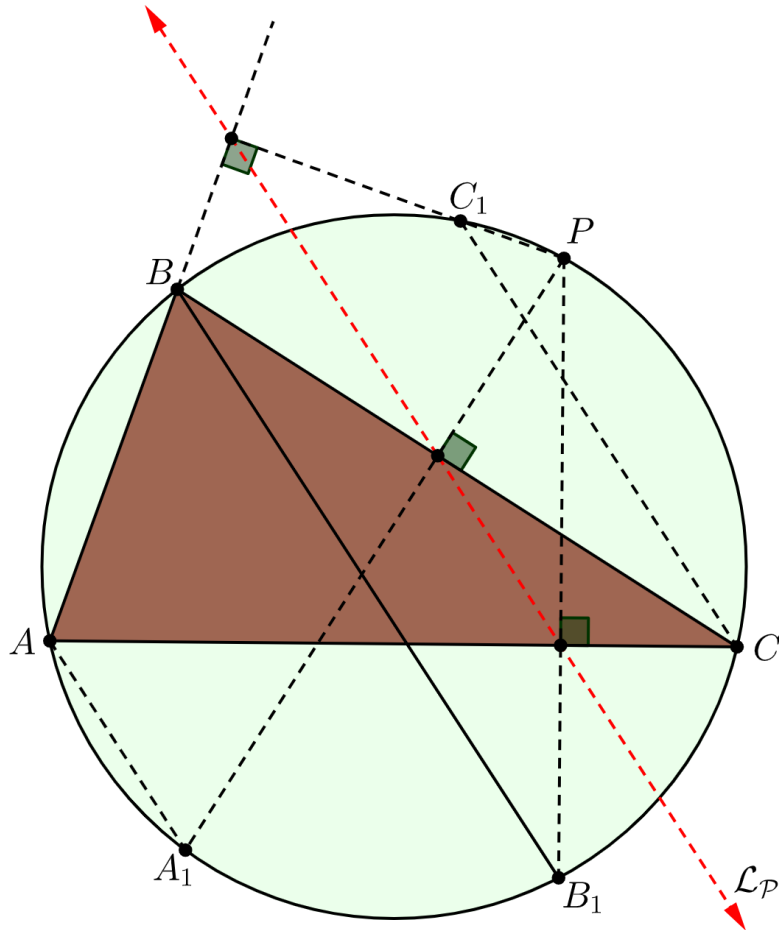
Exercício 6.7. *No triângulo ABC , AD e AM são bissetriz interna e mediana, respectivamente. Sejam X e Y as projeções de D sobre os lados AB e AC , respectivamente. Uma perpendicular ao lado BC através do ponto D corta o segmento XY no ponto P . Prove que A , P e M são colineares.*

Exercício 6.8. *Os pontos A , B e C estão sobre uma reta, e P é um ponto qualquer fora dessa reta. Prove que o ponto P e os circuncentros dos triângulos PAB , PAC e PBC formam um quadrilátero inscritível.*

Exercício 6.9. *Seja ABC um triângulo qualquer e P um ponto da circunferência circunscrita a ABC . Se $\vec{\mathcal{L}}_P$ é a reta de Simson-Wallace associada ao ponto P , então:*

$$\vec{\mathcal{L}}_P \parallel \overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1}.$$

Figura 22 – $\vec{\mathcal{L}}_P \parallel \overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1}$.



Fonte: Bastidas, 2025.

Exercício 6.10. (USA TST 2014) Seja ABC um triângulo acutângulo, e seja X um ponto variável no interior do arco menor BC do circuncírculo de ABC . Sejam P e Q os pés das perpendiculares de X às retas CA e CB , respectivamente, e seja R a interseção da reta PQ e da perpendicular de B ao lado AC . Seja r a reta através de P paralela a XR . Prove que, variando-se X , a reta r sempre passa por um ponto fixo.

7 CONCLUSÃO

De acordo com as necessidades do homem desde a Antiguidade em busca de novas descobertas, invenções e inovações, a Matemática sempre se fez presente nessas explorações, em especial a Geometria Plana. Nesse sentido, realizamos uma consulta bibliográfica sobre alguns tópicos que consideramos de suma importância, como é o caso do Teorema de Tales e suas inúmeras aplicações, teorema este, de origem milenar e que ao mesmo tempo é tão contemporâneo.

O ensino da Geometria, por diversos fatores, tem se tornado, muitas vezes, de difícil transmissão e assimilação, quando nos referimos à visualização de figuras planas e espaciais, interpretação de gráficos, entre outros. Entretanto, podemos inferir ações estratégicas para resolver problemas e melhorar o processo de ensino-aprendizagem da Geometria na Educação Básica.

O uso do *software* GeoGebra nas aulas de Geometria as torna mais atrativas, interativas e eficazes, convencer os estudantes da importância dos resultados geométricos torna-se uma tarefa menos árdua, pois temos em mãos um instrumento de trabalho muito eficiente, compreender o Teorema de Tales, por exemplo, foi uma inferência satisfatória. Mais ainda, quando aplicamos o GeoGebra como uma ferramenta complementar no passo a passo das construções realizadas, tivemos a oportunidade de mostrar aos estudantes como o *software* pode enriquecer e fortalecer nossos conhecimentos.

A aplicação do GeoGebra como instrumento facilitador do ensino de Geometria, em especial, nas construções que realizamos durante as etapas da sequência didática que foi desenvolvida nessa dissertação, mostrou-se extremamente importante para a compreensão dos estudantes envolvidos. Além disso, o seu auxílio em quase todas as demonstrações que estão em tela e na interpretação de enunciados de problemas que aqui foram expostos também foi de suma importância. Vale ressaltar que, os procedimentos de construção do passo a passo que adotamos para mostrar os casos de semelhança de triângulos são apenas uma forma ou um caminho que percorremos.

Dessa forma, entendemos ser plenamente possível e bem-vinda a utilização dos recursos tecnológicos nas aulas de Geometria. Tal iniciativa requer comprometimento e profissionalismo por parte dos professores, contudo, os resultados obtidos podem ser significantes e transformadores, pois despertam no educando um novo olhar para os entes matemáticos. Portanto, do ponto de vista metodológico e experimental, podemos concluir que o uso desse recurso tecnológico, sem dúvidas deixa o seu legado no processo de ensino aprendizagem.

Ainda enfatizamos uma possível melhoria e ampliação deste trabalho por parte de terceiros que venham fazer uso deste tipo de material para a melhoria do ensino nas escolas da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

- ANDREESCU, Titu; KORSKY, Sam; POHOATA, Cosmin. **Lemmas in Olympiad Geometry**. XYZ Press, 2016.
- ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Revista do Professor de Matemática. **Se eu fosse professor de Matemática**. 54 e 55, Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/54/1.htm>. Acesso em: 29/08/2024.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2012.
- BASTIDAS, Julio Orihuela. **Circunferencia: teoría-demonstraciones trazos auxiliares**. Cuzcano.
- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. 3.ed. [Tradução de Helena Castro]. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- CHEN, Evan. **Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads**. Printed in the United States of America. MAA Press, 2016.
- DANTE, Luís Roberto. **Teláris Matemática 9º ano: Ensino Fundamental, Anos Finais**. 3.ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.
- Geometría Una Visión de La Planimetría, Lumbreras Editoras, 2014.
- HANG, Kim Hoo; WANG, Haibin. **Solving Problems in Geometry: (Insights and Strategies for Mathematical Olympiad and Competitions)**, Vol.10 Mathematical Olympiad Series, Word Scientific, 2017.
- IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. Vol.09. São Paulo: Editora Atual, 2013.
- MADEIRA, Renato. **Blog do Madeiro**. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1riiJSoy5QVozwcPPNS5Ckg7fTHgEFPy3/view>. Acesso em: 18/12/2024.
- CAMINHA, Antônio. **Geometria**. 2.ed. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2022.
- CAMINHA, Antônio. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana**. Vol.02. 3.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2024.

CRAVEIRO, Jorge. **A Reta de Simson-Wallace e O Ponto de Miquel**. Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: www.obm.org.br. Acesso em: 11/05/2025.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de. **Embasamento em Geometria PLana**. 1.ed. Fortaleza-CE: Gráfica Futura, 2022.

PERETTI, Lisiane.; COSTA, Gisele Maria Tonin da. **Sequência didática na matemática**. Revista de Educação do IDEAU, v. 8, n. 17, 2013.

RIBEIRO, Natanael Silva. **Número**: Um recorte de sua viagem através dos tempos. Orientador: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva. 2017. 55f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Curso de Matemática, Centro de Ciências e tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

ROQUE, Tatiana Marins; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. 1.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2012.

SOUZA, Antônia Fabrícia de. **Os Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, Demonstrações e Aplicações**. Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes. 2024. Dissertação (Mestrado-PROFMAT) - Programa de Pós-Graduação em Matemática. Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2024. Disponível em: <https://mat.ufcg.edu.br/profmat/egressos-tccs/>. Acesso em: 19/08/2024.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.