



UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WEDES JUNIOR GOMES DE OLIVEIRA

MÉTODOS PARA DIVISÃO DE SEGMENTOS, CIRCUNFERÊNCIAS,
ÁREAS E ÂNGULOS EM PARTES (QUASE) IGUAIS USANDO APENAS
RÉGUA E COMPASSO

CAMPINA GRANDE

2025

WEDES JUNIOR GOMES DE OLIVEIRA

**MÉTODOS PARA DIVISÃO DE SEGMENTOS, CIRCUNFERÊNCIAS,
ÁREAS E ÂNGULOS EM PARTES (QUASE) IGUAIS USANDO APENAS
RÉGUA E COMPASSO**

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Linha de Pesquisa: Ensino Básico Matemática.

Orientador: Arlandson Matheus Silva Oliveira

CAMPINA GRANDE

2025

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

O48m Oliveira, Wedes Junior Gomes de.
Métodos para divisão de segmentos, circunferências, áreas e ângulos em partes (quase) iguais usando apenas régua e compasso [manuscrito] / Wedes Junior Gomes de Oliveira. - 2025.
127 f. : il.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.
"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA".
1. Geometria euclidiana. 2. Construções geométricas. 3. Ensino de geometria. I. Título
21. ed. CDD 327.7

WEDES JÚNIOR GOMES DE OLIVEIRA

MÉTODOS PARA DIVISÃO DE SEGMENTOS, CIRCUNFERÊNCIAS, ÁREAS E
ÂNGULOS EM PARTES (QUASE) IGUAIS USANDO APENAS RÉGUA E
COMPASSO

Dissertação apresentada à
Coordenação do Curso de Mestrado
Profissional em Matemática em
Rede Nacional da Universidade
Estadual da Paraíba, como
requisito parcial à obtenção do
título de Mestre em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Linha de Pesquisa: Ensino Básico
Matemática.

Aprovada em: 22/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Arlandson Matheus Silva Oliveira** (***.607.674-**), em **09/09/2025 00:48:25** com chave **d6be8e828d2f11f08f966e666b59623f**.
- **Ronaldo Freire de Lima** (***.757.854-**), em **09/09/2025 07:56:32** com chave **a53e816e8d6b11f08f76da6249c914e7**.
- **Luciana Roze de Freitas** (***.867.174-**), em **09/09/2025 07:57:47** com chave **d20e07b48d6b11f0b9226e666b59623f**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 09/09/2025

Código de Autenticação: 612118



Com imenso carinho e gratidão, dedico esta conquista à memória da minha mãe, à minha amada esposa e ao meu amado filho. Vocês são a base inabalável da minha vida. A cada um, agradeço profundamente pelo apoio incondicional, pelo incentivo constante e pela paciência infinita diante das minhas angústias e temores. Todo o carinho, amor e respeito que sempre me dedicaram foram essenciais para que eu alcançasse este grande feito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me guiar em minha jornada, concedendo-me força para sempre prosseguir.

À minha esposa, Etienne Lima da Silva Gomes, toda a minha gratidão pela compreensão, incentivo, apoio incondicional e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos.

Ao meu filho, Lorenzo Lima de Oliveira, a quem dedico tudo que faço, minha maior inspiração.

A todos os meus colegas de mestrado, em particular aos amigos Paulo da Silva Oliveira, Sidney da Silva Souza e Natanael Silva Ribeiro, pelos inesquecíveis momentos de estudo e descontração.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), meu reconhecimento pelo auxílio financeiro essencial durante a realização do mestrado. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, estendo meus agradecimentos aos meus professores do mestrado: Gustavo da Silva Araújo, Divanilda Maia Esteves, Luciana Roze de Freitas, Vandenberg Lopes Vieira, Aldo Trajano Lourêdo, Emanuela Régia de Sousa Coelho e Francisco Sibério Bezerra Albuquerque. Em especial, ao meu orientador, Prof. Arlandson Matheus Silva Oliveira, pelo apoio, comprometimento, paciência e disponibilidade. Todos eles são exemplos de profissionais que levarei como inspiração para o futuro da minha carreira.

Enfim, minha gratidão se estende a todos que, de alguma forma, contribuíram para a concretização desta importante conquista.

*“A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.”
(George Polya)*

RESUMO

Este estudo se dedica a detalhar o processo de construção e divisões de diversas figuras geométricas, utilizando como ferramentas principais a régua não graduada e o compasso. Serão exploradas tanto as construções exatas quanto aquelas que exigem aproximações. Antes de iniciar as construções, faremos uma abordagem das recomendações curriculares sobre o ensino de construções geométricas e a trajetória desse tema na educação brasileira, desde seu surgimento até o atual cenário. Adicionalmente, o texto oferece um embasamento teórico sobre a relevância das construções geométricas no processo de ensino-aprendizagem, para a formação do estudante. Em seguida, apresentamos as principais construções geométricas, desde as construções elementares até as construções mais complexas, detalhando os procedimentos passo a passo e ilustrando-as com figuras feitas no *GeoGebra*. Alicerçados nos princípios da geometria plana e da álgebra, todas as construções vêm acompanhadas das justificativas matemáticas, garantindo assim a validade dos resultados.

Palavras-chave: geometria euclidiana; construções geométricas; ensino de geometria.

ABSTRACT

This study is dedicated to detailing the construction process and divisions of various geometric figures, using an ungraduated ruler and a compass as the primary tools. Both exact constructions and those requiring approximations will be explored. Before starting the constructions, we will approach the curricular recommendations regarding the teaching of geometric constructions and the trajectory of this topic in Brazilian education, from its emergence to the current scenario. Additionally, the text provides a theoretical foundation on the relevance of geometric constructions in the teaching-learning process for student formation. Subsequently, we present the main geometric constructions, from elementary to more complex constructions, detailing the step-by-step procedures and illustrating them with figures made in *GeoGebra*. Grounded in the principles of plane geometry and algebra, all constructions are accompanied by mathematical justifications, thus ensuring the validity of the results.

Keywords: euclidean geometry; geometric constructions; geometry education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1 Os Elementos, de Euclides, numa edição inglesa de 1661	19
2.2 Construções Geométricas, por Euclides (Os Elementos, 1661)	20
3.1 Construção da perpendicular	32
3.2 Construção da reta perpendicular por um ponto qualquer de uma reta dada .	33
3.3 Construção de uma perpendicular pela extremidade de segmento de reta . . .	34
3.4 Perpendicular por um ponto fora da reta	35
3.5 Construção da paralela	36
3.6 Transporte do ângulo $B\hat{A}C$	37
3.7 Construção da bissetriz de um ângulo	38
3.8 Construção do ângulo de 60°	39
4.1 Divisão de um segmento em n partes iguais	42
4.2 Construção GLaD	43
4.3 Construção de Besteman	44
4.4 Prova da construção de Besteman	45
4.5 Construção do SaRD	46
4.6 Construção de Al-Nayrizi	47
4.7 Divisão de uma circunferência em 2, 4, 8 etc partes iguais	48
4.8 Divisão de uma circunferência em 3, partes iguais	49
4.9 Divisão de uma circunferência em 5 partes iguais	51
4.10 Divisão de uma circunferência em 5 partes iguais.	52
4.11 Pentágono regular inscrito correspondente.	52
4.12 Divisão de uma circunferência em 15 partes iguais.	53
4.13 Pentadecágono regular inscrito correspondente.	53
4.14 Divisão de uma circunferência em 17 partes iguais.	56
4.15 Heptadecágono regular inscrito correspondente.	56
4.16 Divisão de uma circunferência em 7 partes aproximadamente iguais pelo método de Bion-Rinaldini.	62
4.17 Heptágono inscrito correspondente.	62
4.18 Análise de erros	62
4.19 Retificação do arco \widehat{AC} usando M	67
4.20 Retificação do arco \widehat{AC} usando P	67

4.21	Divisão de uma circunferência em 7 partes aproximadamente iguais pelo método Bardin.	68
4.22	Heptágono $PQRSTUV$ inscrito correspondente.	68
4.23	Cálculo do comprimento PQ	69
4.24	Calculo do ângulo central γ	69
4.25	Gráfico de erros relativos	73
4.26	Divisão do círculo em n partes de mesma área	74
4.27	Construção da divisão do círculo em 7 partes de mesma área.	76
4.28	divisão do círculo em 7 partes de mesma área.	76
4.29	Divisão do círculo em n partes de mesma área	77
4.30	Divisão do círculo em 7 partes de mesma área	79
4.31	Divisão de um hexágono regular em 5 partes de mesma área.	81
4.32	hexágono regular dividido em 5 partes de mesma área.	81
4.33	Divisão de um hexágono não regular em 5 partes de mesma área.	81
4.34	hexágono não regular dividido em 5 partes de mesma área.	81
4.35	Divisão do ângulo em 2^n partes iguais	83
4.36	Trissecção do ângulo reto	83
4.37	Construção do triângulo equilátero BDG	84
4.38	Construção da Bissetriz do ângulo $D\widehat{B}G$	84
4.39	Trissecção de um ângulo diferente do reto	87
4.40	Ângulo trisseccionado (aproximadamente)	87
4.41	Justificativa da trissecção	88
4.42	Trissecção do ângulo por nêusis	89
4.43	Trissecção por nêusis	90
4.44	Retificação do arco \widehat{AB}	92
4.45	Divisão de um ângulo agudo em 5 partes aproximadamente iguais pelo processo geral.	93
5.1	Triângulo isósceles de base 1	102
5.2	Triângulo isósceles de base 1	102
5.3	Comprimentos $\frac{\sqrt{n}}{2}$	116

LISTA DE NOTAÇÕES E SIMBOLOGIAS

- \mathbb{Z} conjunto dos números inteiros
- \overline{AB} segmento de reta AB
- \overrightarrow{AB} semirreta AB
- \overleftrightarrow{AB} reta AB
- \widehat{ABC} ângulo ABC
- \widehat{AB} arco AB
- \forall qualquer que seja
- \Rightarrow implica
- \in pertence
- \parallel paralelo
- \perp perpendicular
- \approx símbolo de aproximação
- $\sum_{k=1}^n x_k$ a soma: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

SUMÁRIO

	Página
1	INTRODUÇÃO 13
2	RECOMENDAÇÕES CURRICULARES SOBRE O ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS 18
2.1	Construções geométricas: surgimento e difusão 18
2.2	O ensino das construções euclidianas elementares no Brasil 23
2.3	O ensino das construções geométricas na atual LDB e nos Parâmetros Curriculares Nacionais 25
2.4	O ensino das construções geométricas nas Bases Curriculares Naci- onais 27
3	CONSTRUÇÕES ELEMENTARES 31
3.1	Construção de retas perpendiculares e paralelas. 31
3.1.1	Traçar a mediatriz de um segmento de reta. 31
3.1.2	Construir uma reta perpendicular em qualquer ponto de uma reta dada 32
3.1.3	Construir uma perpendicular pela extremidade de segmento de reta 33
3.1.4	Construir uma reta perpendicular a um segmento de reta, que passe por um ponto externo a ele. 34
3.1.5	Por um ponto exterior a uma reta, traçar-lhe uma paralela 35
3.2	Construção de um ângulo igual a um ângulo dado 36
3.3	Construção da bissetriz de um ângulo \hat{A} dado 37
3.4	Construção do ângulo de 60° 38
4	CONSTRUÇÕES PRINCIPAIS 40
4.1	Divisão de segmentos em n partes iguais 40
4.1.1	A construção de Euclides 41
4.1.2	A construção de GLaD 42
4.1.3	A construção de Besteman 43
4.1.4	A construção do SaRD 45
4.1.5	A construção de Al-Nayrizi 46
4.2	Divisão da circunferência em n partes 47
4.2.1	Divisões exatas 48
4.2.2	Construções aproximadas 60

4.2.3	O método de Bion-Rinaldini	60
4.2.4	Análise de erros	62
4.2.5	O método Bardin	67
4.2.6	Análise de erros	69
4.3	Divisão de área	73
4.3.1	Divisão de um círculo em n partes de mesma área	73
4.3.2	Divisão de área de polígonos regulares e não regulares convexo em n partes de mesma área	79
4.4	Divisão de ângulos	82
4.4.1	Divisão de um ângulo α em 2, 4, 8 etc, partes iguais	82
4.4.2	Trissecção do ângulo	83
4.4.3	Trissecção de um ângulo arbitrário	86
4.4.4	A solução da trissecção por nêusis	89
4.4.5	Processo geral de divisão de ângulos	90
5	CONCLUSÃO	94
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE A - CÁLCULO DO $\sin 18^\circ$	100
	APÊNDICE B - CÁLCULO DO $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$	102
	APÊNDICE C - MÉTODO DE RINALDINI: EXATIDÃO APENAS EM DIVISÕES ESPECÍFICAS (3, 4 e 6)	111
	APÊNDICE D - MÉTODO BARDIN: EXATIDÃO RESTRITA À DIVISÃO POR 6	112
	APÊNDICE E - CONSTRUIR $\frac{\sqrt{n}}{2}$ VEZES UM SEGMENTO DE RETA	113

1 INTRODUÇÃO

As construções geométricas representam mais um dos inúmeros legados da civilização grega, que foi a responsável pelo desenvolvimento da Matemática no mundo antigo. Desde o início, entre os gregos, as construções geométricas estiveram no centro do desenvolvimento da Matemática, estimulando o desenvolvimento do raciocínio humano (Wagner, 2015).

O principal nome ligado às construções geométricas é o do matemático e geômetra grego Euclides, que se projetou como professor em Alexandria. A ele deve-se o trabalho de sistematização da Geometria. Em seu tempo, Euclides conseguiu demonstrar a importância das construções geométricas para a compreensão da Matemática Elementar, particularidade que até hoje é reconhecida (Silva, 2022).

Euclides, em sua obra ‘Os elementos’, não somente reuniu “os principais conhecimentos matemáticos do mundo antigo, até aquele momento”. Na realidade, ele organizou os conhecimentos matemáticos “de uma maneira inovadora, trazendo esta sistematização, essa organização das ideias, expressando-as com lógica, e seguindo uma ordenação que facilitava o entendimento e o aprendizado das mesmas” (Silva, 2013, p. 22).

Através da obra de Euclides, o mundo moderno tomou conhecimento sobre as construções geométricas, que são desenvolvidas com a utilização de régua e compasso. Informa Eves (2011, p. 134) que “com a régua, permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso, permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado”.

Acrescenta ainda Eves (1992, p. 29) que:

Euclides não usa a palavra compasso em seus Elementos e nunca descreve como as construções devem ser feitas. A restrição de que essas construções devem ser realizadas apenas com o uso de uma régua sem escalas e um compasso tem tradicionalmente sido atribuída a Platão (390 a.C.).

É importante ressaltar que entre os matemáticos gregos não havia a ideologia, “de que se deve apenas usar régua e compasso para construir um conceito matemático”. O que na realidade existia “era um desejo de se usar apenas esses instrumentos, pois se acreditava existir uma certa beleza implícita em um problema, uma simplicidade, quando este pudesse ser construído apenas a partir da aplicação dessa técnica” (Silva, 2013, p. 24).

Logo, para os antigos matemáticos gregos, aquele problema que poderia ser respondido apenas com régua e compasso era considerado “mais puro do ponto de vista matemático do que um que necessitasse do uso de outras ferramentas, sejam estas algébricas ou mesmo geométricas” (Silva, 2013, p. 24).

Promovendo algumas reflexões sobre as construções geométricas, Salgado (2013, p. 6) afirma que:

Deve-se atentar para o fato de que a Geometria de Euclides é estritamente baseada em construções geométricas e todas as demonstrações encontradas nos Elementos são desprovidas de valores numéricos. Nesse momento histórico, na qual a Geometria se encontrava, geometria e construções geométricas eram indissociáveis, ou seja, os métodos de solução tanto de problemas práticos como de teoremas e problemas em geral não recorriam à Álgebra para serem solucionados. As ‘armas’ disponíveis não passavam de algumas definições, postulados e axiomas.

Na forma demonstrada, no passado, a geometria era completamente associada às construções geométricas. Buscava-se na própria geometria as soluções para os problemas relacionados às construções geométricas e vice-versa. De certa forma, essa associação proporcionou significativas contribuições ao desenvolvimento da Matemática.

Apresentadas como sendo métodos dinâmicos, utilizados para o desenvolvimento da Matemática Elementar, as construções geométricas com seus problemas, “desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas” (Wagner, 2015, p. 5).

Para os geômetras gregos, em nenhum momento “as construções geométricas poderiam se divorciar da teoria”. Pois, elas “estão estreitamente ligadas à teoria da geometria plana, muito antes de Euclides” (Zuin, 2001, p. 19). No entanto, o declínio do império grego, registrado a partir do séc. III a. C., fez com que sua cultura e descobertas matemáticas fossem de certa forma relegadas, fato que fez com que o ensino e o estudo da Geometria fossem deixados de lado.

Um conjunto de fatores vem contribuindo para isto. Se ainda as construções geométricas têm a sua importância subestimada por alguns professores, outros não possuem o preparo adequado para explorá-las em sala de aula.

Nesse sentido, Putnoki chama a atenção para o fato de que uma bibliografia para a formação do professor para a disciplina de Desenho Geométrico é praticamente nula a nível nacional, afirmando que até mesmo no contexto internacional, as melhores obras para a formação do professor para o ensino da geometria são de edições antigas e esgotadas (Putnoki, 1988).

O minicurso intitulado “Métodos euclidianos para divisão da circunferência em partes (quase) iguais”, que ministrei no IV Encontro de Matemática, evento realizado no Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba (CCEA/UEPB) entre os dias 4 e 5 de novembro de 2024 e organizado pela coordenação do curso de Licenciatura em Matemática da UEPB, Campus VII, revelou uma lacuna significativa na formação

dos futuros professores de Matemática. Muitos participantes demonstraram dificuldade em realizar construções geométricas básicas, com régua e compasso, o que evidencia a necessidade de um aprofundamento nos conhecimentos geométricos durante a formação inicial.

Essa habilidade, presente desde a antiguidade, tão importante para o desenvolvimento de habilidades geométricas, motoras e criativas, parece ter sido negligenciada com a retirada das construções geométricas da grade curricular. No prefácio do livro *‘Construções Geométricas’*, Eduardo Wagner afirma que:

Estando as construções geométricas cada vez mais ausentes dos currículos escolares, esta publicação pretende ajudar a resgatar o assunto do esquecimento e mostrar a sua importância como instrumento auxiliar no aprendizado da Geometria. Os problemas de construção são motivadores, às vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados (Wagner, 1993).

Concordo plenamente com a necessidade de se resgatar as construções geométricas no ensino da Matemática. Pois, a prática da construção geométrica proporciona aos alunos uma experiência única de investigação e descoberta, estimulando a criatividade e a autonomia. A necessidade de justificar as construções, seja por meio de argumentos geométricos ou algébricos, estimula o pensamento crítico e a busca por evidências.

A busca por justificativas matemáticas das construções geométricas mais complexas ou específicas pode ser frustrante, devido à falta de materiais completos e organizados sobre o tema. A carência de materiais que justificassem algebricamente de forma clara as construções geométricas, identificada nos métodos de Bion-Rinaldini e Bardin, impulsionou a elaboração deste trabalho, que visa ajudar a preencher essa lacuna. A ideia é que a justificativa matemática para tais construções seja usada principalmente para eliminar as dúvidas, sejam elas pessoais e/ou de outros.

Segundo Kline (1973, apud De Villiers, 2002, p. 175): “uma demonstração só faz sentido quando responde às dúvidas dos alunos, quando prova aquilo que não é óbvio”.

Contudo, a demonstração possui diversas outras funções significativas na matemática, que em certas situações são mais relevantes para os matemáticos do que a simples verificação. Entre estas funções, estão:

1. Explicação (proporcionar compreensão sobre por que é que é verdade);
2. Descoberta (a descoberta ou a invenção de novos resultados);
3. Comunicação (a realização/satisfação pessoal por se ter construído uma demonstração).

Discutindo a importância do desenho geométrico, (Carvalho, 1967) afirma que:

Iludem-se aqueles que pensam ser possível fixar em alguém, uma construção geométrica menos vulgar, sem explicações e comentários, despida de motivação, desprovida de uma sucessão de princípios, conclusões e definições, capazes de revelar a razão de ser de cada trecho do desenho, de cada fase da construção, de cada linha a até mesmo de cada ponto que nasce no papel (Carvalho, 1967).

As construções geométricas podem ser reconhecidas como sendo um grande conhecimento que se encontra ligado à Geometria, contribuindo para o desenvolvimento de uma série de habilidades no indivíduo. Isto porque quanto maior for o aprofundamento dos seus conceitos, maior será a contribuição proporcionada aos discentes.

Diante das considerações acima apresentadas, através do desenvolvimento da presente pesquisa buscou-se respostas para a seguinte problemática: Como as construções geométricas podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades geométricas, motoras e criativas, quando trabalhadas em sala de aula no ensino médio?

O objetivo principal desta pesquisa foi apresentar diversas construções utilizando apenas as ferramentas euclidianas (régua não graduada e compasso) e justificar matematicamente as construções geométricas, com o intuito de fornecer subsídios para a formação de professores de matemática.

Para atingir o objetivo principal, estabeleceu-se os seguintes objetivos específicos:

1. Realizar uma revisão da literatura sobre os métodos euclidianos para divisão de elementos geométricos, com foco em estudos que relacionem esses métodos ao ensino da matemática;
2. Estudar os métodos clássicos de divisão, como a divisão de um segmento em partes iguais utilizando paralelas, a divisão de um ângulo em partes (quase) iguais, a divisão de uma circunferência em partes (quase) iguais utilizando polígonos regulares e a divisão de áreas de polígonos convexos em partes iguais;
3. Analisar a evolução histórica dos métodos de divisão, desde a antiguidade até os dias atuais, identificando as contribuições de diferentes matemáticos e suas implicações para o ensino.

A metodologia da pesquisa foi baseada em uma combinação de revisão bibliográfica e análise documental, tais como: livros, artigos científicos, materiais didáticos e outros recursos relevantes para a revisão da literatura.

No capítulo 2, promove-se uma retrospectiva histórica mostrando o surgimento das construções geométricas e sua difusão a partir da obra de Euclides, matemático grego que ganhou

projeção em Alexandria, no século IV a.C., cuja obra ‘Os Elementos’ foi utilizada como livro didático no mundo ocidental por mais de dois mil anos. Por fim, discutiu-se o ensino das construções geométricas na atual LDB e nos Parâmetros Curriculares Nacionais, focalizando logo em seguida o que é pontuado pela BNCC para o ensino fundamental, que visivelmente estimula a retomada do ensino das construções geométricas na educação básica brasileira.

No capítulo 3, apresenta-se as construções geométricas fundamentais, aquelas que, devido à sua importância e frequência de uso, são consideradas o alicerce para a construção de figuras mais complexas e que servirão de base para as construções do capítulo 4. Nesse último capítulo, é feito um estudo detalhado das construções principais tais como divisão de segmentos em n partes iguais, onde se apresenta o passo a passo das quatro construções propostas como alternativas para dividir um segmento de reta em partes iguais, além da clássica solução para esse problema de divisão, formulada pelo próprio Euclides; divisão da circunferência em n partes utilizando métodos exatos e aproximados; divisão de um círculo em n partes de mesma área; divisão de área de polígonos regulares e não irregulares convexos em n partes de mesma área e, divisão de ângulos em n partes exatas e aproximadas.

As construções geométricas são apresentadas em um passo a passo detalhado dos procedimentos a serem seguidos na execução prática, utilizando os instrumentos tradicionais de desenho geométrico, como régua não graduada e compasso. Em seguida, são apresentadas figuras feitas no GeoGebra, oferecendo uma representação visual clara e precisa de cada construção.

Nas considerações finais, reforça-se a importância deste estudo para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática nas escolas. Por fim, cabe ressaltar que a escassez de trabalhos em Desenho Geométrico, principalmente abordando o processo histórico do ensino das construções geométricas no Brasil, foi um fator limitante para a produção do presente trabalho.

2 RECOMENDAÇÕES CURRICULARES SOBRE O ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo, será apresentada uma retrospectiva histórica que detalha o surgimento das construções geométricas e sua disseminação, impulsionada pela obra de Euclides, "Os Elementos", que serviu como livro didático no mundo ocidental por mais de dois mil anos. Posteriormente, o foco se deslocará para o contexto educacional brasileiro, onde serão discutidas as recomendações curriculares relativas ao ensino de construções geométricas. A análise incluirá a evolução e a inclusão desse tema na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Por fim, o capítulo abordará as diretrizes mais recentes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino fundamental, que, de forma visível, incentiva a retomada desse ensino na educação básica brasileira.

2.1 Construções geométricas: surgimento e difusão

A Geometria como hoje se conhece começou a se estruturar no Egito antigo, quando seus primeiros arquitetos projetaram e construíram as pirâmides. Os antigos construtores egípcios "realizaram diversas descobertas sobre a 'arte de medir', isto é, sobre o que chamamos atualmente de Geometria" (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010, p. 7).

Após registrar os primeiros avanços no Egito, a Geometria passou a ser estudada e utilizada pela civilização que floresceu entre os rios Tigre e Eufrates. Nessa região, conhecida como Mesopotâmia, que muito se assemelhava ao Egito em termos culturais, "os sacerdotes continuaram a estudar a Geometria, fazendo maravilhosos progressos no campo da Astronomia. E, assim, começou o processo de desenvolvimento da Geometria" (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010, p. 7).

Embora tenha sido notável, a Matemática que se desenvolveu no Egito antigo "nunca alcançou o nível obtido pela Matemática babilônica". Isto se deu em virtude de a Babilônia ter alcançado um desenvolvimento econômico mais avançado e também por exigido obras de engenharia e mais esforços administrativos do que foi exigido no Egito antigo (Eves, 2011, p. 57).

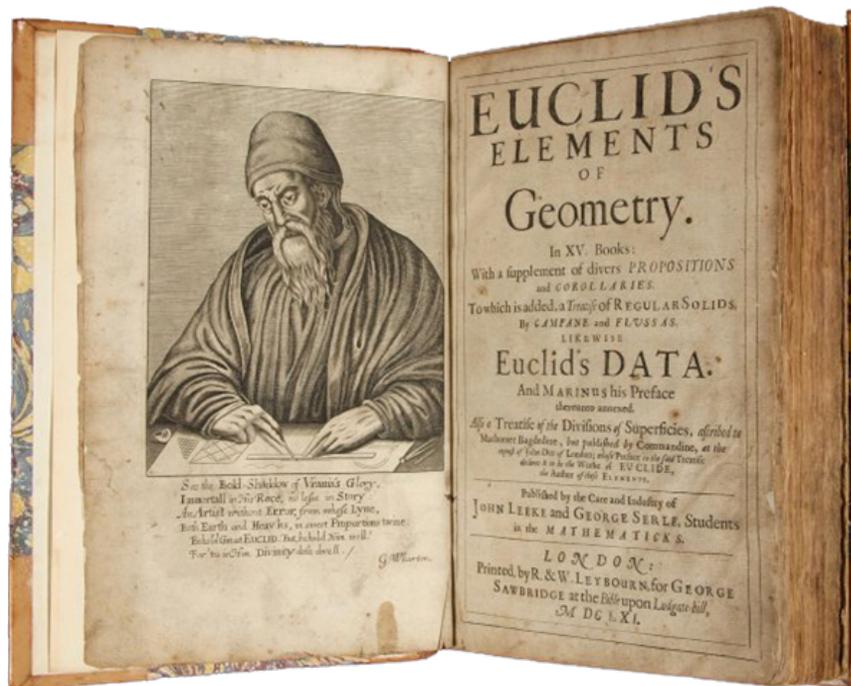
De 2000 a.C. a 1600 a.C., entre os babilônicos, a Geometria recebeu um tratamento inteiramente prático, sendo utilizada para mensuração. Os babilônicos possuíam conhecimentos gerais sobre como calcular as áreas de algumas figuras geométricas, a exemplo do retângulo, dos triângulos retângulo e isósceles e dos trapézios retângulos. Eles também sabiam como calcular o volume de prismas retos quadrangulares e se destacaram no mundo antigo como grandes estudiosos da Astronomia. No entanto, "a marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico. Os problemas mais intrincados expressos em terminologia geométrica

são essencialmente problemas de álgebra não triviais” (Eves, 2011, p. 61).

Posteriormente, os gregos se dedicaram ao estudo da Matemática e fizeram com que esta ciência registrasse grande desenvolvimento. No início do século VI, Tales de Mileto levou a Matemática do Egito para a Grécia, tornando-se o responsável por dar àquela ciência a forma que ele passou a apresentar a partir da antiguidade grega. No entanto, as maiores contribuições dada à Matemática grega vieram de três grandes estudiosos: Euclides, Arquimedes e Apolônio, que “viveram e trabalharam em um período de somente uns cem anos: Euclides em torno de 300 a.C.; Arquimedes, de mais ou menos 287 a 212 a.C. e Apolônio, em torno de 200 a.C.” (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010, p. 8).

As construções geométricas amplamente exploradas e estudadas no contexto atual originaram-se na Grécia antiga, a partir dos estudos realizados por Euclides, que atuando como professor em Alexandria, destacou-se como um dos maiores matemáticos e geômetras de todos os tempos. A ele, deve-se a Geometria como ela é atualmente (Boyer, 2012).

Figura 2.1 – Os Elementos, de Euclides, numa edição inglesa de 1661



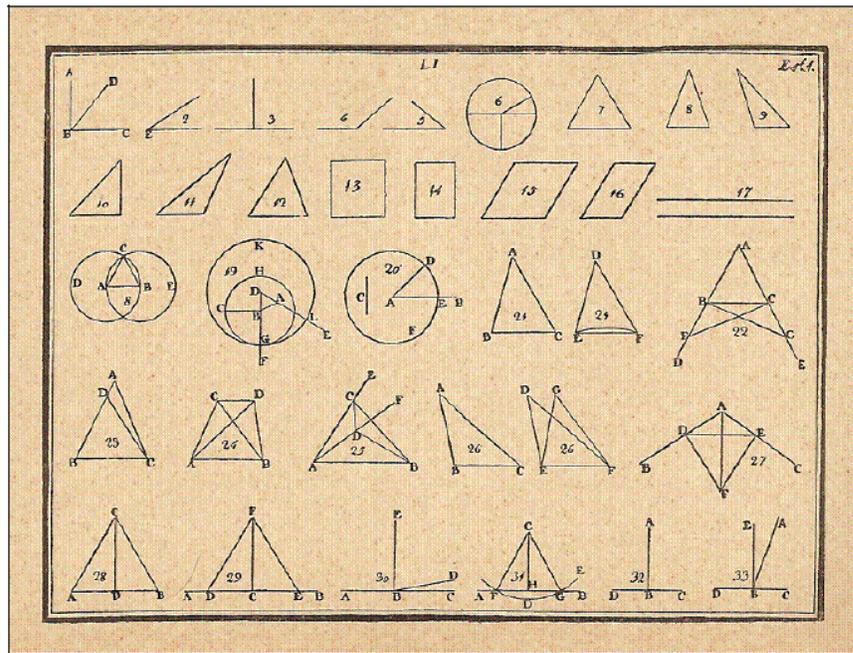
Fonte: <https://www.afceducacao.com.br/noticia/430/os-elementos-de-euclides/>

De forma organizada e lógica, Euclides reuniu todo o conhecimento sobre a Geometria que havia em seu tempo. Tamanha foi a sua dedicação e tão valiosa é a sua obra, que “até bem pouco tempo atrás, o nome de Euclides e a palavra geometria eram sinônimos. Foi Euclides, o primeiro a escrever as bases axiomáticas da Matemática. Ele o fez tão bem que

praticamente descartou todos os trabalhos feitos anteriormente” (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010, p. 11).

Deve-se ressaltar que ‘Os Elementos’, livro escrito por Euclides - além de ser considerado uma obra importante para o estudo das ciências matemáticas, é “o mais antigo texto matemático grego que nos chega completo, e a natureza deste trabalho impressionante mostra claramente porque isso aconteceu”. Nele, Euclides conseguiu incorporar, “de forma bem disposta e apresentada, praticamente todo o conhecimento matemático acumulado por seus antecessores”. O referido livro anulou a importância histórica de grande parte dos escritos dos matemáticos anteriores, fazendo com que os mesmos não fossem mais copiados e assim, não mais preservados (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010, p. 8).

Figura 2.2 – Construções Geométricas, por Euclides (Os Elementos, 1661)



Fonte: <https://www.afceducacao.com.br/noticia/430/os-elementos-de-euclides/>

Quando tratou das construções geométricas, Euclides vinculou-as à Teoria da Geometria, apresentada n‘Os Elementos’, sua obra-prima, “considerado o texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos” (Boyer, 2012, p. 87), um verdadeiro best-seller, tido ainda como o segundo livro mais editado no mundo, somente sendo superado pela ‘Bíblia’ (Cans; Moser; Moretti, 2024).

De acordo com Eves (2011, p. 167):

É desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola

de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas.

Pelo demonstrado, quase nada se sabe sobre a vida de Euclides antes de sua chegada à Alexandria. A certeza que se tem é a que possuía origem grega e que possivelmente tenha estudado na Academia de Platão ou sido instruído por um dos discípulos daquele mestre ateniense. De forma equivocada, o Euclides que se projetou como matemático na cidade de Alexandria é confundido com outro Euclides, de Megara, que era filósofo.

Informa Boyer (2011), que apenas metade da obra de Euclides foi preservada, parte composta por cinco importantes livros, dos quais se destaca ‘Os Elementos’, onde aparecem as primeiras noções de ‘construções geométricas’.

No citado livro, que constitui uma síntese da Geometria clássica grega e que por mais de dois mil anos influenciou o ensino da Matemática, Euclides documentou conceitos geométricos e axiomas formulados por vários matemáticos que lhe antecederam, além de apresentar as construções geométricas. Tais construções, por se encontrarem inseridas no citado livro, são também conhecidas como sendo as ‘Construções Euclidianas’ (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010).

Na história das ciências, ‘O Elementos’, de Euclides, são apresentados como sendo uma das obras mais belas e influentes, tendo influenciado todos os ramos da ciência, em especial, a Matemática e as Ciências Exatas. Trata-se de uma obra que, na Europa Ocidental foi usada como livro didático por mais de 1000 anos (Boyer, 2013). Dessa obra euclidiana, oito dos treze livros (I, II, III, IV, V, VI, XI e XII) passaram a ser a base para o ensino de Matemática (Zuin, 2001).

O tempo passou e ocorreu o estabelecimento da Geometria Euclidiana como um campo científico. Isto porque a importância que era dada à Geometria e revelada séculos antes de Cristo foi mantida, fazendo com que ela continue sendo estudada até os dias atuais. No início do século passado, algumas escolas da Inglaterra adotavam ‘Os Elementos’ como livro didático, com algumas modificações.

Além de fundamentarem em parte os atuais livros didáticos de Matemática, ‘Os Elementos’ de Euclides trazem a teoria da Geometria vinculada às construções geométricas. Produzido no século IV a.C., este livro facilitou o desenvolvimento da Matemática no mundo grego e contribuiu de forma significativa para o surgimento da nova álgebra geométrica. Isto, em uma época em que a palavra ‘resolver’ era sinônimo de ‘construir’ (Cans; Moser; Moretti, 2024).

Reconhecidamente, as construções clássicas da geometria euclidiana proporcionaram uma grande contribuição ao desenvolvimento da Matemática (Wagner, 2015). Atualmente, elas

constituem uma importante “parte da Matemática ligada intimamente à geometria”, que além de contribuir para o entendimento e para o enriquecimento da Teoria da Geometria, auxilia “na compreensão, na visualização e na formulação de muitas propriedades geométricas das figuras planas” (Macedo, 2011, p. 7).

Ainda de acordo com Souza; Pimenta; Arnaut (2010, p. 11):

As construções geométricas têm por finalidade representar as figuras planas e resolver, utilizando régua e compasso, os problemas de Geometria Básica. A régua é usada para traçar retas, semirretas e segmentos de reta e o compasso descreve circunferências e arcos de circunferências. Dizemos que a solução gráfica de um problema é puramente geométrica, quando nela utilizamos, como instrumentos de desenho, apenas régua e compasso.

Por construção geométrica entende-se o processo de desenhar uma figura geométrica usando dois instrumentos geométricos, um compasso e uma régua. Por sua vez, o compasso é utilizado para desenhar arcos e círculos. Com ele é possível marcar comprimentos iguais. Quanto à régua, esta é utilizada para desenhar segmentos de linha e medir seus comprimentos. No processo de construção das figuras geométricas, também é possível se explorar uma série de conceitos e propriedades apresentados na Geometria.

Na antiga Grécia, a palavra ‘construção’ em geometria, possuía um significado muito específico. E por isso, para a construção dos desenhos geométricos, como linhas e círculos, utilizava-se apenas compasso e régua. Acredita-se que “a restrição da construção a esses dois instrumentos refletia, simultaneamente, duas características da cultura helênica: a elegância com que tratavam as questões da Geometria e o apreço pelos desafios intelectuais, independente, de qualquer serventia prática” (Cans; Moser; Moretti, 2024, p. 3).

Entretanto, a extrapolação do conceito de ‘construções geométricas’ possibilitou a utilização de outros instrumentos. Atualmente, nas construções geométricas, além dos antigos instrumentos de desenho (a exemplo da régua, do compasso, do esquadro e do transferidor), utilizam-se softwares e outros recursos eletrônicos.

É importante esclarecer que “quando Euclides elaborou sua Geometria, não era sua proposta a execução dos traçados com régua e compasso, mas o estudo da possibilidade de construir a figura com aqueles instrumentos” (Putnoki, 1988, p. 14).

A clareza e a objetividade de Euclides contribuíram para também mostrar que não há como divorciar as construções geométricas da teoria. Existe uma estreita ligação entre estas e a teoria da geometria plana. Na realidade, esta ligação já existia muito antes de Euclides. No entanto, foi graças aos estudos realizados por Euclides que o mundo passou a dar mais importância à Geometria e, em especial, às construções geométricas.

Nos séculos seguintes, várias outras - que tomaram com referência ‘Os elementos’- auxiliaram a difundir as construções geométricas, principalmente, por fazerem com que o ensino do desenho alcançasse as classes populares, a partir do século XVIII. O objetivo dessa aproximação era proporcionar uma maior projeção na área artística industrial para atender às demandas geradas a partir da Primeira Revolução Industrial.

Foi a partir do século XIX, que o Desenho Geométrico ganhou mais destaque nas escolas, impulsionado pelas ideias positivistas, tornando-se altamente valorizado e alcançado o seu auge, graças às exigências da crescente mecanização, que “exigia maiores habilidades técnicas, tornando a representação gráfica o pivô do idioma industrial”, fazendo com que o Desenho passasse a ser associado à noção de progresso (Zuin, 2001).

2.2 O ensino das construções euclidianas elementares no Brasil

No Brasil o ensino das construções geométricas começou a se firmar como um conhecimento escolar a partir de 1855, quando Manoel Porto Alegre, Ministro do Império, implantou uma reforma na Academia Imperial de Belas-Artes, determinando que “o Desenho Geométrico seria dividido em duas séries, em uma delas estaria voltado para a técnica, restrito para alguns, e na outra estaria ligado à Matemática, vindo a ser básico para todos os alunos” (Zuin, 2001, p. 68).

Avaliando o processo de ensino das construções geométricas no Brasil, Zuin (2011, p. 13) também destaca que:

A partir de meados do século XIX, o Brasil passa por momentos políticos importantes, que vão refletir no campo socioeconômico. No bojo das mudanças político-educacionais, dar-se-ão as grandes reformulações e alterações curriculares. Em uma determinada época, em relação ao ensino das construções geométricas, essas mudanças vão contribuir diretamente para a sua desvalorização e descaracterização, como saber escolar, fundamental nas grades curriculares.

Nota-se que, no Brasil, o ensino das construções geométricas foi sofrendo alterações ao longo do tempo. E isto se deu em virtude dos momentos políticos pelos quais passou o país a partir do final do século XIX, quando ocorreu a mudança de regime e o Brasil deixou de ser uma monarquia, tornando-se um estado republicano.

Informa Salgado (2013, p. 13) que:

O modelo de ensino da geometria no Brasil, até o fim da década de 20, foi pautado nos moldes de Euclides e essa linha filosófica-educacional se manteve na vanguarda até o Movimento Internacional, onde Euclides Roxo influenciado por essas novas concepções incorporou no Colégio Pedro II, em 1929, algumas modificações no ensino da geometria. Dentre essas modificações a unificação da aritmética, álgebra e geometria gerando uma nova disciplina chamada de Matemática.

Assim, após as mudanças curriculares produzidas por Manoel Porto Alegre na Academia Imperial de Belas-Artes, a primeira alteração significativa ocorreu em 1929, por iniciativa de Euclides Roxo, sob influência de ideias internacionais. Nessa época, ocorreu a institucionalização da disciplina ‘Matemática’, reunindo os componentes curriculares de aritmética, álgebra e geometria. Tal iniciativa foi bastante criticada, principalmente pelos professores do Colégio Pedro II.

Até meados da década de 1950, o ensino da geometria no Brasil se manteve no molde lógico dedutivo. Em meados dessa década, esse molde começou a ser discutido pelos matemáticos brasileiros, influenciados pelo Movimento da Matemática Moderna e pelo Movimento Internacional, que apesar de não terem as mesmas propostas, “esperavam que suas intervenções transformassem a maneira com que a geometria euclidiana era ensinada” (Salgado, 2013, p. 15).

Posteriormente, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional promulgada em 1961, iniciou-se o processo de exclusão da geometria dos currículos das escolas brasileiras, fortemente influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna (Miorim, 1998).

Anos mais tarde, a Lei nº 5.692/1971 retirou a disciplina de desenho dos vestibulares para os cursos das Engenharias e de Arquitetura, reduzindo-a à condição de disciplina optativa no antigo segundo grau, atual ensino médio. Mesmo diante disto, alguns pareceres do Conselho Federal de Educação destacavam a importância das construções geométricas na formação do indivíduo, atitude que contribuiu para que algumas escolas mantivessem esta disciplina em seus currículos (Zuin, 2001).

Logo, percebe-se que o ensino das construções geométricas [que no Brasil é desenvolvido nas disciplinas de Desenho Geométrico e Geometria Euclidiana e, às vezes, como uma disciplina autônoma], embora tenha sido negligenciado por muitos, foi também, ao longo do tempo, valorizado por alguns.

Comentando ‘o abandono do ensino da geometria no Brasil’, após a promulgação da Lei nº 5.692/1971, Pavanello (1993, p. 7) ressalta que:

A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação.

Pelo demonstrado, a insegurança sentida por muitos professores em relação a trabalhar a geometria em sala de aula também contribuiu para o seu abandono no Brasil. No entanto, é importante ressaltar que esse abandono registrado no Brasil, na década de 1970, foi também em decorrência de um fenômeno mundial, em outras palavras, um conjunto de

fatores contribuiu para que as construções geométricas deixassem ser exploradas em sala de aula.

Avaliando a situação do ensino da geometria no Brasil, Zuin (2001, p. 7) acrescenta que:

Apesar de o Desenho Geométrico não integrar o currículo da maioria das escolas brasileiras, essa disciplina, na década de 80, ganha um novo impulso, sendo publicadas novas coleções. Outras propostas para se trabalharem as construções geométricas surgem, a partir da década de 90. Textos didáticos de Matemática passaram a incluir atividades ou capítulos inteiramente dedicados às construções geométricas com régua e compasso. Em 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, sugerem que as construções geométricas sejam abordadas dentro da disciplina Matemática (Zuin, 2001, p. 7).

Nota-se que, na década de 1980, o ensino de geometria no Brasil foi impulsionado. No entanto, somente no final da década seguinte, tal ensino recebeu uma maior atenção, passando a ser recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática. Em decorrência dessa mudança de concepção, a partir de 1998, o ensino das construções geométricas passou a ganhar espaços nas salas de aulas das escolas brasileiras. Isto, graças ao fato de que os PCN de Matemática enfatizam a importância das construções geométricas no ensino da geometria, consideram-nas como uma ferramenta promissora para o processo de ensino e aprendizagem de geometria, mais especialmente de demonstrações.

Entretanto, o incentivo dado pelos PCN não foi o suficiente para retirar por completo da situação de abandono em que se encontravam as construções geométricas. Ainda hoje, muitos professores brasileiros continuam deixando de lado tais construções, até mesmo as mais simples, deixando de explorá-las em sala.

2.3 O ensino das construções geométricas na atual LDB e nos Parâmetros Curriculares Nacionais

De forma pontual, a atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional assinalava o início de uma nova era na educação brasileira. Inscrita sob o nº 9.394, sua sanção presidencial ocorreu no dia 20 de dezembro de 1996, revogando a LDB aprovada pela Lei nº 5.692/1971. Em 1997, como um verdadeiro aporte à Lei nº 9.394/1996, o Ministério da Educação expediu os Parâmetros Curriculares Nacionais (Mazzante, 2005).

Nos primeiros anos da vigência da Lei nº 9.394/1996, o ensino das construções geométricas apresentava-se de forma indefinida e heterogênea. Como disciplina autônoma, o Desenho Geométrico era ministrado em pouquíssimas escolas no país. Outras, porém, trabalhavam as construções geométricas como parte integrante da disciplina de Arte e ainda havia aquelas

que incluíam “esse tema dentro do conteúdo de Geometria, desenvolvido em Matemática” (Cans; Moser; Moretti, 2024, p. 14).

No entanto, com os Parâmetros Curriculares Nacionais, publicados em 1997, 1998 e 2001, o MEC demonstrou interesse pelo retorno do ensino da Geometria Euclidiana dentro da Matemática, passando a incentivar “o resgate do ensino das construções geométricas com a utilização de instrumentos de desenho” (Cans; Moser; Moretti, 2024, p. 14).

Vários trechos dos PCN de Matemática que através das construções geométricas, abordam a importância da construção do conhecimento de geometria. O primeiro destes trechos destaca que:

O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números (Brasil, 1998, p. 83).

Nota-se que os PCN de Matemática recomendam a utilização das construções geométricas para proporcionar um melhor entendimento ao aluno sobre os números irracionais, esclarecendo que estes podem ser melhor visualizados quando representados em um segmento de reta.

Ao discutir o currículo de Matemática para o ensino fundamental, os PCN quando tratam da geometria destacam que:

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações (Brasil, 1998, p. 51).

Percebe-se que mais uma vez os PCN de Matemática trazem as construções geométricas no intuito de contribuir não somente para a aprendizagem de números e medidas, mas para fazer com que o aluno aprenda a identificar regularidades, semelhanças e diferenças naquilo que está sendo-lhe apresentado, particularidades que contribuirão para o seu ‘saber fazer’.

Complementando as discussões sobre ‘espaço e forma’, os PCN de Matemática destacam que também se deve dar importância ao ensino de “procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes” (Brasil, 1998, p. 68-69).

Essa orientação é importante porque o aprendizado dela decorrente pode servir de base para a condução de outros conteúdos, a exemplo das atividades numéricas e de métricas, relacionadas à noção de proporcionalidade, passíveis de determinação com a utilização da régua e do compasso.

De forma pontual, os PCN de Matemática privilegiam o ensino das construções geométricas nos quatro ciclos do ensino fundamental. Embora não tenha apresentado o Desenho Geométrico como disciplina obrigatória, os PCN de Matemática o instrumento que assinala “o retorno da valorização do ensino das construções geométricas, com a utilização de instrumentos de desenho” (Zuin, 2001, p. 102).

2.4 O ensino das construções geométricas nas Bases Curriculares Nacionais

Em 2017 e 2018, o Ministério da Educação lançou a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), respectivamente, para Educação Infantil e Ensino Fundamental, e o Ensino Médio, alterando o cenário educacional brasileiro, detalhando “competências, unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades, os conhecimentos considerados essenciais para o desenvolvimento das crianças e jovens em cada uma das etapas e modalidades da educação básica” (Cans; Moser; Moretti, 2024, p. 16).

A BNCC esclarece como as construções geométricas devem ser trabalhadas no Ensino Fundamental, na área de Matemática, incentivando a utilização de instrumentos de desenho e focalizando a teoria da Geometria em muitos pontos de seu texto.

De forma sintetizada, apresenta-se na Tabela 2.1, alguns pontos da BNCC para o ensino fundamental que privilegiam as construções geométricas.

Tabela 2.1 – Alguns pontos da BNCC para o ensino fundamental que privilegiam as construções geométricas.

Variáveis	Descrições
Competência 5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
Habilidades para 6° ano (EF06MA21)	Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Habilidades para 6° ano (EF06MA22)	Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
Habilidades para 7° ano (EF07MA21)	Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
Habilidades para 7° ano (EF07MA22)	Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
Habilidades para 7° ano (EF07MA24)	Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
Habilidades para 8° ano (EF08MA15)	Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.
Habilidades para 8° ano (EF08MA18)	Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
Habilidades para 9° ano (EF09MA17)	Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva

Fonte: (Brasil, 2017), adaptado.

O primeiro ponto a ser destacado na BNCC para o Ensino Fundamental, diz respeito à adequação do processo educativo à realidade e a consequente utilização das tecnologias digitais. Esta preocupação pode ser percebido na competência 5 acima transcrita, que embora não faça referência explícita às construções geométricas é um dos norteadores das habilidades

também transcritas na citada Tabela 2.1.

As habilidades acima transcritas representam uma clara manifestação da retomada do ensino das construções geométricas, mediante a utilização “de instrumentos manuais e digitais, vinculadas a teoria da Geometria plana, ratificando e reconhecendo a sua importância para a aprendizagem da Matemática”, a partir do ensino fundamental (Cans; Moser; Moretti, 2024, p. 18).

Em decorrência dos avanços tecnológicos, houve uma extrapolação do conceito de ‘construções geométricas’, conforme pontuando no início do presente capítulo, de forma que hoje se admite a utilização de outros recursos, inclusive, tecnológicos para a produção dessas construções, conforme é pontuado na BNCC para o ensino fundamental.

Discutindo a aplicação das construções geométricas em sala de aula, a partir do que é estabelecido pela BNCC, Cans; Moser e Moretti (2024, p. 4) afirmam que:

[...] as construções euclidianas elementares elencadas como sendo: paralelas, perpendiculares, mediatriz, bissetriz, círculos, transporte de um ângulo, o arco capaz, divisão de um segmento em partes iguais e o traçado das tangentes a um círculo, devam ser ensinadas primeiramente com régua não graduada e compasso. Após esse conhecimento, por praticidade e velocidade de construção, pode-se usar quaisquer outros instrumentos.

A escola existe para instruir/formar o indivíduo para a vida e não tão somente para as coisas práticas, que facilitem sua vida. Por essa razão, a escola precisa trabalhar com aquilo que também é elementar, fazendo com que o indivíduo desenvolva a sua capacidade de trabalhar, pensar e agir. Ao privilegiar a régua não graduada e o compasso ao invés de fazer uso dos recursos tecnológicos, a escola está fazendo com que o aluno desenvolva algumas de suas múltiplas habilidades, oportunizando uma melhor visão sobre o uso e a aplicabilidade da geometria.

Desta forma, após aprender as noções básicas, o aluno poder ser instruído a utilizar os recursos - inclusive, os recursos tecnológicos - na produção das construções geométricas. Assim, o educando terá mais condições de colocar em prática seus conhecimentos e fazer um melhor uso de tais construções em seu dia a dia, seja no trabalho na vida pessoal. Pois, com essa forma condução do ensino da geometria, “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (Brasil, 1998, p. 51).

É importante lembrar que na educação básica brasileira o ensino da geometria viveu um tempo de glória, mas isto entrou em declínio. No entanto, atualmente a geometria encontra-se privilegiada na aprendizagem da Matemática. Na realidade, ela possui um novo status,

fruto de uma ascensão proporcionada inicialmente pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e num contexto mais recente, pela Base Nacional Comum Curricular.

3 CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

Este capítulo detalhará procedimentos passo a passo para a realização de várias construções elementares. Primeiramente, abordará a construção de retas perpendiculares e paralelas, incluindo como traçar a mediatriz de um segmento, construir uma reta perpendicular em qualquer ponto de uma reta dada, construir uma perpendicular pela extremidade de um segmento, e traçar uma perpendicular a um segmento a partir de um ponto externo a ele, além de traçar uma paralela a uma reta por um ponto exterior. Adicionalmente, o capítulo explicará a construção de um ângulo igual a um ângulo dado, a construção da bissetriz de um ângulo e a construção do ângulo de 60° . Todas essas construções serão apresentadas com procedimentos detalhados, passo a passo, e ilustradas com figuras elaboradas no GeoGebra, utilizando apenas a régua não graduada e o compasso.

3.1 Construção de retas perpendiculares e paralelas.

As construções geométricas são realizadas exclusivamente com régua não graduada e compasso. A régua é utilizada apenas para traçar retas entre dois pontos, e o compasso, para desenhar circunferências com um centro e raio definidos por um ponto e um segmento, respectivamente, sem outras possibilidades de uso para esses instrumentos (Wagner, 2015).

Com essas limitações, a construção de retas paralelas e perpendiculares torna-se o primeiro desafio a ser enfrentado. A perpendicularidade é uma condição que se aplica a duas retas que se encontram, formando um ângulo de 90° . Já o paralelismo ocorre quando as retas possuem a mesma direção, mantendo uma relação de equidistância em toda a sua extensão (Luiz, 2024).

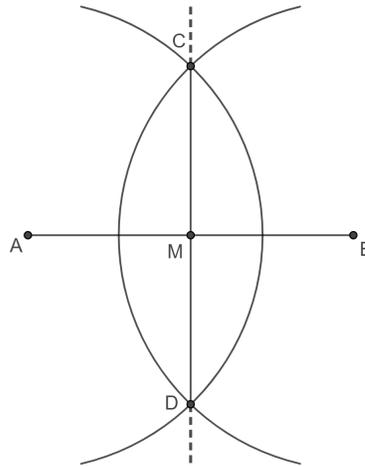
3.1.1 Traçar a mediatriz de um segmento de reta.

Seja \overline{AB} o segmento de reta em questão (figura 3.1).

Passos para construção

1. Com a ponta seca do compasso em B e uma abertura maior do que a metade de \overline{AB} , desenhe dois arcos de círculo inferior e superior;
2. Com o mesmo raio e com a ponta seca do compasso em A desenhe dois arcos de círculo inferior e superior cortando os arcos acima referidos, obtendo assim os pontos C e D ;
3. Traçar a reta que passa pelos pontos C e D , que é a reta perpendicular ao segmento \overline{AB} pelo centro (ponto M) de \overline{AB} .

Figura 3.1 – Construção da perpendicular



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Por construção $\overline{CA} = \overline{DA} = \overline{CB} = \overline{DB}$. Logo os pontos C e D são equidistantes de A e B , e assim, temos que a reta \overleftrightarrow{CD} é a mediatriz do segmento \overline{AB} . Por outro lado os triângulos ACD e BCD são congruentes (caso LLL), pois, o lado \overline{CD} é comum aos mesmos. Por este motivo $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ ou, ainda, $\widehat{ACM} = \widehat{BCM}$. Portanto os triângulos ACM e BCM são congruentes (caso LAL), já que \overline{CM} é lado comum aos mesmos. Logo concluímos que $\overline{AM} = \overline{BM}$.

3.1.2 Construir uma reta perpendicular em qualquer ponto de uma reta dada

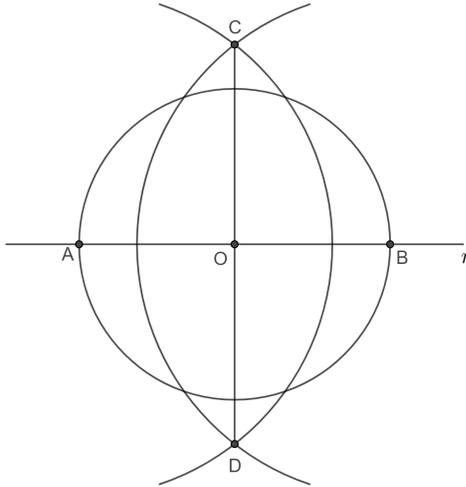
Seja a reta r horizontal da figura 3.2 com um ponto O qualquer contido nela.

Passos para construção

1. Com a ponta seca do compasso em O e uma abertura qualquer trace uma circunferência cortando a reta em dois pontos A e B ;
2. Com a ponta seca do compasso em B e com abertura maior do que \overline{BO} , desenhe dois arcos de círculo inferior e superior da reta;
3. Com o mesmo raio e com a ponta seca do compasso em A , desenhe dois arcos de círculo inferior e superior cortando os arcos acima referidos, obtendo assim os pontos C e D ;

4. Traçar a reta que passa pelos pontos C e D , que é a reta perpendicular a r pelo ponto O .

Figura 3.2 – Construção da reta perpendicular por um ponto qualquer de uma reta dada



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Por construção $\overline{OA} = \overline{OB}$, pois são raios da circunferência de centro O . Ainda por construção temos que $\overline{CA} = \overline{CB}$, logo \overline{OC} é a mediana relativa ao lado \overline{AB} do triângulo isósceles ABC , sendo assim \overline{OC} perpendicular à r .

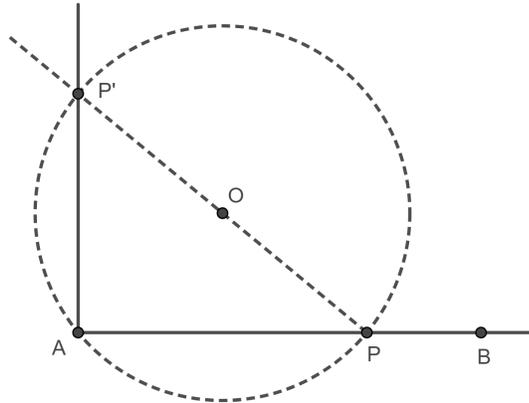
3.1.3 Construir uma perpendicular pela extremidade de segmento de reta

Seja o segmento \overline{AB} que queremos a perpendicular pelo seu extremo A da figura 3.3.

Passo para construção

1. Marque um ponto O em qualquer lugar fora do segmento \overline{AB} mais próximo de A ;
2. Com a ponta seca do compasso em O e abertura \overline{OA} traça-se uma circunferência que cortará o segmento \overline{AB} no ponto P ;
3. Unindo o ponto P ao centro O , obtemos um diâmetro onde a outra extremidade P' está sobre a perpendicular ao segmento \overline{AB} , que passa por A . Este ponto unido a A é a perpendicular pedida.

Figura 3.3 – Construção de uma perpendicular pela extremidade de segmento de reta



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

No triângulo APP' o lado $\overline{PP'}$ é diâmetro da circunferência de centro O , logo ele é retângulo em A , isto é $P'\hat{A}P = 90^\circ$.

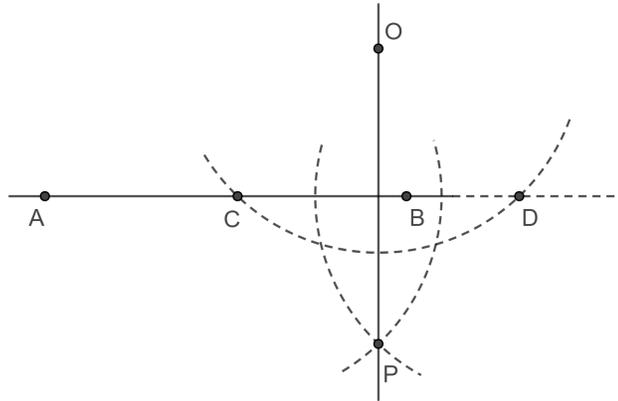
3.1.4 Construir uma reta perpendicular a um segmento de reta, que passe por um ponto externo a ele.

Seja O um ponto externo ao segmento \overline{AB} da figura 3.4, pelo qual passará a reta perpendicular.

Passos para construção

1. Com a ponta seca do compasso em O e abertura maior que a distância deste ponto a reta dada, trace um arco de circunferência cortando a reta ou seu prolongamento nos pontos C e D ;
2. Com mesmo raio e centro em C tracemos um arco de circunferência para baixo;
3. Com a mesma abertura e centro em D , tracemos outro arco de circunferência cortando o arco anterior no ponto P . A reta determinada pelos pontos O e P é a perpendicular buscada.

Figura 3.4 – Perpendicular por um ponto fora da reta



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Por construção temos que $\overline{OC} = \overline{CP} = \overline{PD} = \overline{DO}$, pois são raios de circunferência de mesmo diâmetro, logo o quadrilátero $OCPD$ é um losango. Pela propriedade das diagonais de um losango, \overline{OP} é perpendicular a reta dada que contém \overline{AB} .

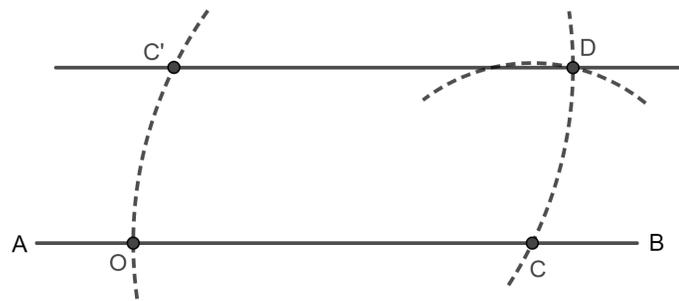
3.1.5 Por um ponto exterior a uma reta, traçar-lhe uma paralela

Seja a reta \overleftrightarrow{AB} da figura 3.5 e o ponto exterior C' .

Passos para construção

1. Com a ponta seca do compasso em C' e com uma abertura qualquer do compasso, traça-se um arco cortando \overline{AB} em C ;
2. Com a ponta seca do compasso em C e com a mesma abertura, traça-se o arco $\widehat{OC'}$;
3. Com a abertura do compasso de medida $\overline{OC'}$ transporte o arco $\widehat{OC'}$ para o outro arco, fazendo para isto centro em C e com raio $\overline{OC'}$ corta-se o arco que passa em C , determinando assim o ponto D ;
4. Unindo os pontos C' e D obtemos a paralela pedida.

Figura 3.5 – Construção da paralela



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Por construção $\overline{C'D} = \overline{C'C} = \overline{OC}$. Ainda por construção $\overline{C'O} = \overline{CD}$. Sendo os lados opostos do quadrilátero $C'DCO$ congruentes, podemos classificá-lo como um paralelogramo. Uma das propriedades dos paralelogramos é que seus lados opostos são paralelos. Portanto, a reta que passa por $\overline{C'D}$ é paralela a reta \overline{AB} .

3.2 Construção de um ângulo igual a um ângulo dado

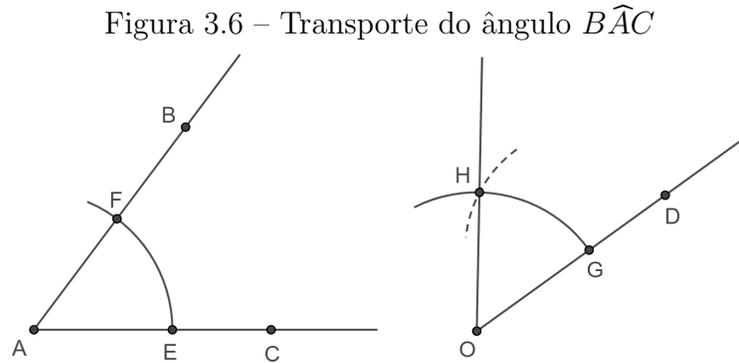
Quando dois segmentos de reta orientados se reúnem em um ponto comum, tem-se a formação de um ângulo. A esse ponto onde ocorre intersecção desses dois segmentos de reta orientados, dá-se o nome de vértice do ângulo.

Seja o ângulo $B\hat{A}C$ da figura 3.6 que queremos transportar para o ponto O , tomando a semirreta \overrightarrow{OD} como base.

Passos para construção

1. Com a ponta seca do compasso em A e abertura qualquer, traçamos um arco de circunferência cortando os lados do ângulo $B\hat{A}C$ em dois pontos que chamaremos de E e F ;
2. Com a ponta seca do compasso em O e mesma abertura traçamos um arco de circunferência interceptando \overline{OD} em G ;
3. Com abertura do compasso de E a F com a ponta seca em G trace um arco de circunferência interceptando o arco de circunferência de centro O obtendo assim o ponto H ;

4. Trace o segmento \overline{OH} . O ângulo \widehat{GOH} de vértice O é o ângulo \widehat{BAC} de vértice A transportado.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Temos que $\overline{GH} = \overline{EF}$ por construção. Ainda por construção $\overline{AF} = \overline{AE} = \overline{OG}$. Por outro lado $\overline{OH} = \overline{OG}$ pois são raios da mesma circunferência de centro O . Logo os triângulos AEF e OGH são congruentes pelo caso (LLL). E portanto concluímos que $\widehat{FAE} = \widehat{HOG}$.

3.3 Construção da bissetriz de um ângulo \widehat{A} dado

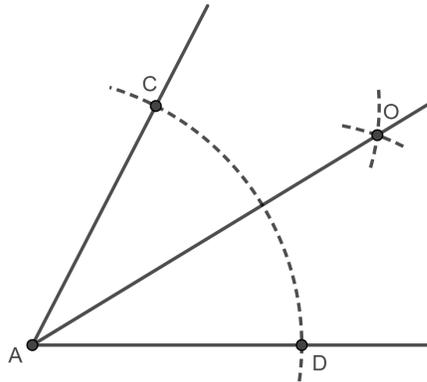
Por bissetriz entende-se a semirreta que divide um ângulo em duas partes iguais ou congruentes. Assim, ao traçar a bissetriz de um ângulo, obtém-se dois novos ângulos de mesma medida (Góes, 2020).

Seja o ângulo \widehat{A} da figura 3.7 ao qual dividiremos em dois outros ângulos iguais.

Passos para construção

1. Com a ponta seca do compasso em A e uma abertura qualquer do compasso traça-se o arco de circunferência \widehat{CD} (figura 3.7);
2. Agora com abertura do compasso maior que a metade da distância \overline{CD} , e com centro em D traça-se um arco de circunferência;
3. Com a mesma abertura e centro em C traça-se outro arco que cortará o arco anterior no ponto O . A reta que passa por O e A é a bissetriz, seccionando o ângulo em dois ângulos de mesma medida.

Figura 3.7 – Construção da bissetriz de um ângulo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Por construção temos que $\overline{AC} = AD$ e que $\overline{CO} = \overline{DO}$, logo os triângulo ADO e AOC são congruentes pelo caso (LLL), isso implica que a semi-reta \overrightarrow{AO} , com origem em A , é a bissetriz do ângulo $C\hat{A}D$, dividindo-o em dois ângulos congruentes.

Para a construção da bissetriz de um ângulo qualquer com vértice inacessível, veja (Carvalho, 1967)

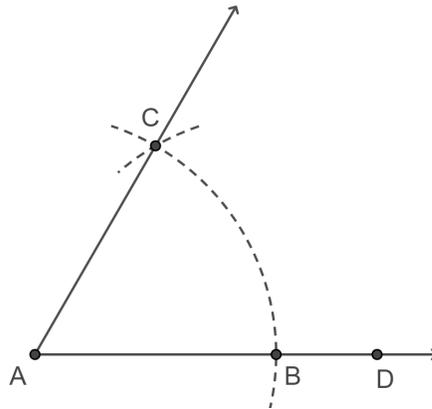
3.4 Construção do ângulo de 60°

A construção de um ângulo de 60° baseia-se no processo de divisão da circunferência em seis partes iguais. Assim, considerando que uma circunferência mede 360° , ao dividi-la em seis partes, cada uma terá 60° (Góes, 2020). Na justificativa apresentada para essa construção mostra-se que o ângulo de 60° possui uma correlação com o triângulo equilátero, conforme será demonstrado.

Seja a semi-reta \overrightarrow{AD} da figura 3.8 construir um ângulo de 60° .

Passos para construção

1. Com a ponta seca do compasso em A , traçar um arco de circunferência cortando a semi-reta num ponto B ;
2. Agora com a mesma abertura e com a ponta seca do compasso em B traçar um arco de circunferência cortando o arco anterior em um ponto C ;
3. Traçar a semi-reta \overrightarrow{AC} obtendo assim o ângulo em questão.

Figura 3.8 – Construção do ângulo de 60° 

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Por construção $\overline{BA} = \overline{AC} = \overline{BC}$. Logo, o triângulo ABC é um triângulo equilátero, e, conseqüentemente, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 60° .

4 CONSTRUÇÕES PRINCIPAIS

Este capítulo é dedicado a detalhar a divisão de segmentos de reta em n partes iguais, apresentando tanto a solução clássica de Euclides quanto outros métodos alternativos como GLaD, Besteman, SaRD e Al-Nayrizi. Além disso, aborda a divisão da circunferência em n partes, explorando tanto as divisões exatas, que permitem a construção de polígonos regulares, quanto métodos aproximados, como os de Bion-Rinaldini e Bardin, para casos onde a divisão exata não é possível. O capítulo também trata da divisão de áreas, especificamente a de círculos e polígonos (regulares e não regulares convexos) em n partes de mesma área. Por fim, discute a divisão de ângulos, incluindo divisões exatas em potências de 2 (2, 4, 8, etc.) e a trissecção de ângulos, com ênfase na prova de que a trissecção exata de um ângulo arbitrário é impossível com régua e compasso, além de apresentar processos gerais aproximados. Todas as construções serão acompanhadas de procedimentos detalhados passo a passo, ilustrações claras feitas no GeoGebra e suas respectivas justificativas matemáticas, garantindo a validade dos resultados, utilizando como ferramentas apenas a régua não graduada e o compasso.

4.1 Divisão de segmentos em n partes iguais

Nesta seção apresentaremos quatro métodos geométricos alternativos para dividir um segmento de reta em partes iguais, utilizando uma abordagem diferente da clássica solução para esse problema de divisão, formulada pelo próprio Euclides.

A construção de Euclides, utilizando um compasso e uma régua não marcada, é um método consagrado que demonstra a elegância da geometria euclidiana. Na realidade, “a utilização da régua e do compasso é central nos livros de Euclides, uma vez que são os instrumentos de desenho privilegiados em todo o trabalho”. Trata-se de uma estratégia que tinha por objetivo tornar as construções mais simples (Goulart; Ferreira, Costa, 2022, p. 202).

A maneira padrão de dividir um segmento de linha usando um compasso e uma régua não marcada é derivada da proposição 10, contida no Livro 6, de ‘Os Elementos’ de Euclides, no tópico denominado “Cortar a reta dada não cortada semelhantemente à dada cortada” (Euclides, 2009, p. 242).

O conhecimento da obra de Euclides foi ampliado graças a tradução feita por Gherard de Cremona, que traduziu os quinze livros atribuídos aquele grande geômetra grego, a partir de uma versão em árabe feita pelo matemático Al-Nayrizi (Ferreira, 2013), que também preocupou-se em encontrar uma maneira de dividir a reta em n partes iguais.

De Euclides [século III a.C] até o presente, várias contribuições foram dadas aos estudos das construções geométricas. Uma destas valiosas contribuições surgiu em junho de 1995, quando

Charles Dietrich, professor do Greens Farms Academy (Connecticut, USA), propôs aos seus alunos a resolução de um problema de geometria, solicitando a divisão de um segmento arbitrário em n partes congruentes, com n um número inteiro positivo arbitrário (Quesada, 2001). Trata-se de um problema muito explorado em livros de geometria e que representa a mesma proposição 10, formulada por Euclides e acima transcrita.

Entre os alunos do professor Dietrich encontravam-se os jovens colegiais David Goldenheim e Daniel Litchfield. Utilizando um software de geometria dinâmica, os citados alunos conseguiram resolver o problema em duas horas: dividiram um segmento em n partes congruentes. Atualmente, essa construção é conhecida como ‘construção GLaD’, em referência a Goldenheim, Litchfield e Dietrich (Abrate; Luján e Pochulu, 2007).

A construção de GLaD representa uma maneira de se dividir um segmento de reta em qualquer número de partes iguais. Trata-se de um método que se diferencia daquele método padrão desenvolvido por Euclides no final do século III a.C. A descoberta de Goldenheim, Litchfield, sob a orientação do professor Dietrich foi revelado ao mundo através de um artigo publicado em janeiro de 1997 na Revista ‘Mathematics Teacher’, recebendo considerável destaque publicitário na mídia da época (Besteamn; Ferdinands, 2005).

Outra significativa contribuição foi dada por Nathan Besteman e John Ferdinands em 2005, logo após o anúncio do desenvolvimento da construção de GLaD. O método de Besteman, diferencia de forma considerável da construção GLaD. Nele, ao invés dos retângulos propostos na construção de GLaD, utiliza-se círculos, desenhados inicialmente a partir do ponto médio de um segmento de reta \overline{AB} (Besteamn; Ferdinands, 2005).

A seguir, são descritas cinco construções diferentes: a de Euclides, GLaD, Besteman, SaRD e Al-Nayrizi respectivamente. No entanto, as construções GLaD, Besteman e SaRD propõem soluções criativas que desafiam o pensamento tradicional.

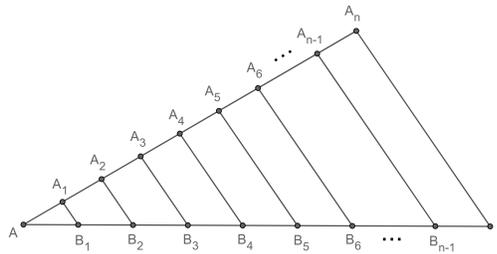
4.1.1 A construção de Euclides

Passos para construção

1. Trace um segmento de reta \overline{AB} qualquer;
2. Trace um segmento de reta não coincidente ao segmento de reta \overline{AB} de qualquer tamanho partindo do ponto A ;
3. Marque n divisões nessa nova reta de qualquer tamanho usando um compasso contanto que sejam todas iguais entre si e denote os pontos por A_1, A_2, \dots, A_n .
4. Una o ponto A_n ao ponto B obtendo assim o segmento de reta $\overline{A_nB}$;

5. Pelo ponto A_{n-1} trace uma reta paralela ao segmento $\overline{A_n B}$ cortando o segmento \overline{AB} em B_{n-1} o mesmo fazendo com os pontos A_1, A_2, \dots, A_{n-2} determinando em \overline{AB} os seus ponto correspondentes B_1, B_2, \dots, B_{n-2} respectivamente. Então, do teorema da proporcionalidade dos comprimentos dos lados correspondentes, segue-se que $\overline{AB_1} = \overline{B_1 B_2} = \dots = \overline{B_{n-1} B}$, como queríamos fazer.

Figura 4.1 – Divisão de um segmento em n partes iguais



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

4.1.2 A construção de GLaD

Passos para construção

1. Trace um segmento de reta \overline{AB} qualquer;
2. Construa qualquer retângulo $ABCD$;
3. Desenhe as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} e indique seu ponto de intersecção por E_2 ;
4. Trace uma reta perpendicular a \overline{AB} passando por E_2 denotando por P_2 o ponto de intersecção da reta com o segmento \overline{AB} . Observe que os Triângulos $E_2 P_2 A$ e $E_2 P_2 B$ são congruentes (por cateto-hipotenusa) o que implica que P_2 é o ponto médio de \overline{AB} , de modo que $\overline{AP_2} = \left(\frac{1}{2}\right)\overline{AB}$;
5. Trace uma reta passando pelos pontos D e P_2 intersectando \overline{AC} em E_3 . Trace uma reta perpendicular a \overline{AB} passando por E_3 denotando por P_3 o ponto de intersecção da reta com o segmento \overline{AB} . Veja que os triângulos $E_3 A P_2$ e $E_3 C D$ são semelhantes (por ângulo-ângulo) portanto $\overline{AP_2} : \overline{CD} = \overline{P_2 E_3} : \overline{E_3 D}$. Mas como $\overline{AP_2} = \left(\frac{1}{2}\right)\overline{AB}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$, então $\overline{AP_2} = \left(\frac{1}{2}\right)\overline{CD}$, segue-se que $\overline{P_2 E_3} = \left(\frac{1}{2}\right)\overline{E_3 D}$. Os triângulos $E_3 P_3 P_2$ e $D A P_2$ são semelhantes (por ângulo-ângulo), portanto $\overline{P_2 E_3} : \overline{E_3 D} = \overline{P_2 P_3} : \overline{P_3 A}$, segue-se que $\overline{P_2 P_3} = \left(\frac{1}{2}\right)\overline{P_3 A}$.

Mas,

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= 2\overline{AP_2} \\ &= 2(\overline{AP_3} + \overline{P_3P_2}) \\ &= 2\left(\overline{AP_3} + \frac{1}{2}\overline{P_3A}\right) \\ &= 3\overline{AP_3}\end{aligned}$$

Portanto

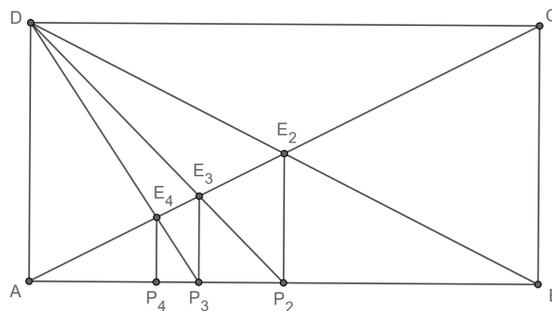
$$\overline{AP_3} = \left(\frac{1}{3}\right)\overline{AB}$$

Continuando dessa forma, obtemos uma sequência de pontos P_2, P_3, P_4, \dots de pontos sobre \overline{AB} tal que

$$\overline{AP_n} = \left(\frac{1}{n}\right)\overline{AB}$$

para cada inteiro positivo maior que 1.

Figura 4.2 – Construção GLaD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

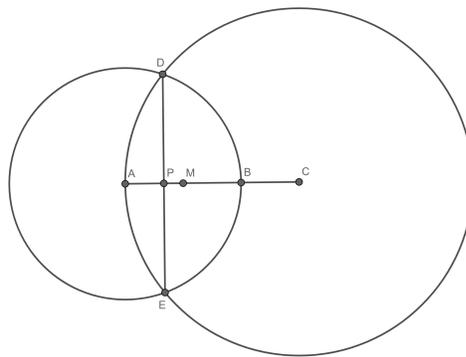
4.1.3 A construção de Besteman

Passos para construção

1. Trace um segmento de reta \overline{AB} qualquer;
2. Encontre o ponto médio de \overline{AB} ;

3. Estenda \overline{AB} até um ponto C de modo que $\overline{AC} = \left(\frac{n}{2}\right)\overline{AB}$;
4. Marque n segmentos na reta estendida que passa por A e B com um compasso de modo que cada segmento tenha comprimento $\frac{\overline{AB}}{2}$;
5. Desenhe dois círculos um com centro em A e raio \overline{AB} e outro com centro em C e raio \overline{AC} ;
6. Sejam D e E os pontos de intersecção das circunferências trace uma reta passando pelos pontos D e E intersectando \overline{AB} em P . Então P é o ponto tal que $\overline{AP} = \left(\frac{1}{n}\right)\overline{AB}$.

Figura 4.3 – Construção de Besteman



Fonte: Elaboração própria

Justificativa

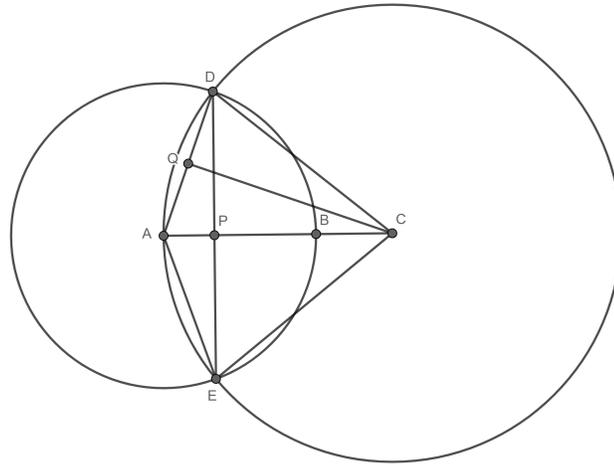
Para ver que $\overline{AP} = \left(\frac{1}{n}\right)\overline{AB}$ observe que os triângulo CAD e CAE são congruentes (caso LLL), logo $\widehat{ACD} = \widehat{ACE}$. Seja Q o ponto médio de \overline{AD} como o triângulo CAD é isósceles de base \overline{AD} então $\overline{CQ} \perp \overline{AD}$. Por outro lado os triângulos CPD e CPE são semelhantes (caso LAL). Portanto, $\overline{CP} \perp \overline{DE}$ e, portanto, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$. Os triângulos PAD e CAQ são semelhantes (caso AA), logo

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},$$

como $\overline{AQ} = \frac{\overline{AD}}{2}$ por construção e $\overline{AD} = \overline{AB}$ e $\overline{AQ} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Além disso $\overline{AC} = \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \overline{AB}$ por construção. Assim

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{n \cdot \overline{AB}} \Rightarrow \overline{AP} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \overline{AB},$$

Figura 4.4 – Prova da construção de Besteman



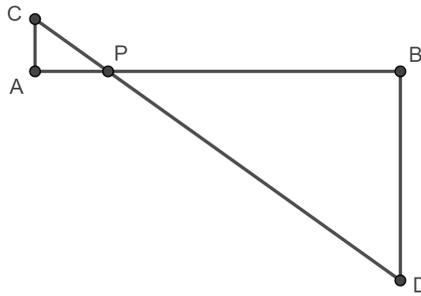
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

4.1.4 A construção do SaRD

Passos para construção

1. Trace um segmento de reta \overline{AB} qualquer;
2. Trace um segmento \overline{AC} perpendicular a \overline{AB} no ponto A ;
3. Trace um segmento de reta perpendicular a \overline{AB} no ponto B . (Obs.: \overline{AC} e o segmento de reta não tem que ser perpendiculares a \overline{AB} desde que \overline{AB} e o segmento de reta sejam paralelos);
4. Marque um ponto D no segmento de reta de modo que o comprimento do segmento \overline{BD} seja $(n - 1)$ vezes o comprimento do segmento \overline{AC} . Certifique-se de que D e C estejam em lados opostos do segmento de reta \overline{AB} ;
5. Trace o segmento \overline{CD} ;
6. Sendo P o ponto de intersecção dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , logo $\overline{AP} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \overline{AB}$.

Figura 4.5 – Construção do SaRD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

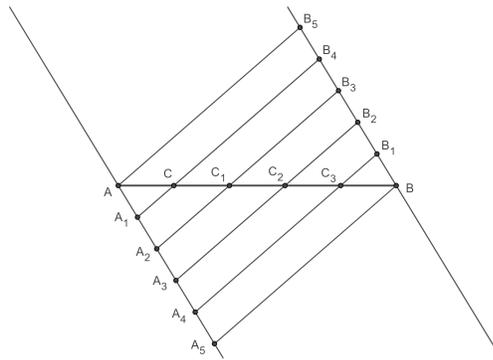
Para ver que $\overline{AP} = \left(\frac{1}{n}\right)\overline{AB}$ observe que os triângulo CAP e DBP são semelhantes (caso AA). Portanto $\frac{\overline{CA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$. Como $\frac{\overline{CA}}{\overline{BD}} = \frac{1}{n-1}$ (por construção), temos que, $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{n-1}$ ou, $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{1}{n} \Rightarrow \overline{AP} = \left(\frac{1}{n}\right)\overline{AB}$, como queríamos fazer.

4.1.5 A construção de Al-Nayrizi

Passos para construção

1. Trace um segmento de reta \overline{AB} qualquer que será dividido em n partes iguais;
2. Trace duas retas paralelas uma passando por A e outra por B ;
3. Meça n segmentos de mesmo tamanho em cada uma: $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, e assim por diante, em um, e $\overline{BB_1}$, $\overline{B_1B_2}$, e assim por diante, por outro lado, apontando em direções diferentes;
4. Trace os segmentos $\overline{AB_n}$, $\overline{A_1B_{n-1}}$, \dots , $\overline{A_nB}$. Essas linhas cortarão \overline{AB} em n segmentos iguais. Então, do teorema da proporcionalidade dos comprimentos dos lados correspondentes, segue-se que $\overline{AC} = \overline{CC_1} = \dots = \overline{C_{n-2}B}$, como queríamos fazer.

Figura 4.6 – Construção de Al-Nayrizi



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

4.2 Divisão da circunferência em n partes

Nem sempre existe um método exato ao qual se possa recorrer para dividir uma circunferência em partes (ou arcos) iguais. Para tal processo, os métodos existentes podem ser classificados como exatos, aproximativos e gerais. Na primeira categoria (métodos exatos), a “divisão da circunferência em partes iguais se confunde com o da construção de polígonos regulares” (Putnoki, 1989, p. 55). Logo, quando se pretender construir um hexágono, basta dividir a circunferência em seis partes iguais (Góes, 2020). Na segunda categoria (métodos aproximativos), embora seja possível dividir uma circunferência em 7, 9, 11, 13, 14, 19, ... partes iguais, essas divisões não são exatas, apenas aproximações (Putnoki, 1989). Na última categoria (métodos gerais), “convém observar que eles são aproximativos e que, quando se propõe uma divisão, devemos efetuar-las por um processo exato” (Putnoki, 1988, p. 62). Quando não houver um método exato, pode-se utilizar os métodos gerais, que se aplicam a qualquer número de partes.

A habilidade EF08MA15 da Base Nacional Comum Curricular requer o seguinte: “Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares” (Brasil, 2018).

Assim como a construção dos polígonos regulares, a construção de certos ângulos com régua e compasso também está relacionada à divisão de uma circunferência em partes iguais.

O triângulo, o quadrado e o hexágono são simples de construir. A construção do pentágono é um pouco mais delicada, mas conhecida. Para o octógono e o decágono, basta bisseccionar o ângulo do quadrado e do pentágono, respectivamente. Sabemos, contudo, que nem todo polígono pode ser construído dessa forma. Com efeito, o teorema de Gauss–Wantzel estabelece que a divisão de uma circunferência, com régua e compasso, em n partes iguais é possível se, e somente se, $n = 2^k p_1 \cdots p_t$, em que p_1, \dots, p_t são primos de Fermat distintos

(Freitas; Tavares, 2018).

4.2.1 Divisões exatas

As divisões exatas de uma circunferência são produzidas como a utilização dos chamados métodos exatos, que permitem a obtenção de partes exatas quando de tal divisão. Destes métodos, o mais fácil é o que possibilita a divisão da circunferência em duas partes iguais. Nesse caso, os extremos dos diâmetros serão “os pontos que dividem a circunferência em duas partes iguais. Nesse procedimento, obtemos dois ângulos de 180° ” (Góes, 2020, p. 102).

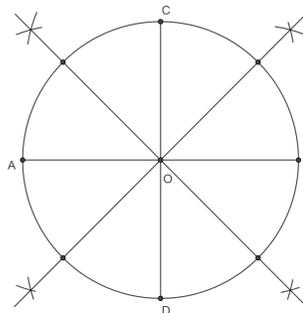
A partir desta divisão, para se obter a divisão da circunferência em quatro partes iguais, basta traçar a bissetriz destes ângulo. Assim, seguindo o mesmo procedimento, pode-se obter a divisão da circunferência em 8 partes iguais, conforme será demonstrado a seguir:

Primeiro caso: Divisão da circunferência em $n = 2, 4, 8, 16, \dots, = 2 \cdot 2^k$ partes iguais com $k \in \mathbb{Z} \geq 0$.

Passos para construção

1. Construa a circunferência de raio r e centro O ;
2. Trace o diâmetro \overline{AB} dividindo a circunferência em duas partes iguais;
3. Trace o diâmetro \overline{CD} perpendicular a \overline{AB} dividindo a circunferência em 4 partes iguais;
4. Trace, em seguida, as bissetrizes dos ângulos \widehat{AOC} e \widehat{AOD} , respectivamente, dividindo a circunferência em 8 partes iguais, seguindo assim sucessivamente;

Figura 4.7 – Divisão de uma circunferência em 2, 4, 8 etc partes iguais



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa dispensa detalhes. Veja a figura 4.7

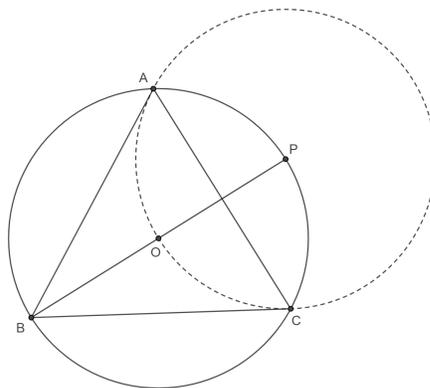
Segundo caso: Divisão da circunferência em $n = 3, 6, 12, 24, \dots, = 3 \cdot 2^k$ partes iguais com $k \in \mathbb{Z} \geq 0$.

Um dos métodos utilizados para a divisão da circunferência em três partes iguais é descrito por (Carvalho, 1967). A partir desta divisão, pode-se dividir a circunferência em seis partes iguais, conforme será demonstrado a seguir.

Passos para construção

1. Construa a circunferência de raio r e centro O ;
2. Trace o diâmetro \overline{BP} ;
3. Com abertura do compasso igual a \overline{OP} coloque a ponta seca do compasso em P e desenhe um círculo completo;
4. Denomine os pontos de encontro das duas circunferências por A e C ;
5. Trace os segmentos de reta \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} para construir o triângulo equilátero;
6. Trace, em seguida, as bissetrizes dos ângulos \widehat{AOB} e \widehat{BOC} e \widehat{AOC} , dividindo a circunferência em 6 partes iguais, seguindo assim sucessivamente.

Figura 4.8 – Divisão de uma circunferência em 3, partes iguais



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Observe que as circunferências de centro O e P são congruentes, pois elas tem o mesmo comprimento de raio, sendo assim $\overline{AP} = \overline{OP}$. Por outro lado $\overline{BP} = \overline{BO} + \overline{OP} = 2 \cdot \overline{OP}$.

Como $\overline{AP} = \overline{OP}$, temos que $\overline{BP} = 2 \cdot \overline{AP}$. No triângulo ABP o lado \overline{BP} é diâmetro da circunferência de centro O , logo ele é retângulo em A . Das razões trigonométricas temos que $\text{sen}(\widehat{ABP}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{2 \cdot \overline{AP}} = \frac{1}{2}$, sendo assim $\widehat{ABP} = 30^\circ$. Consequentemente, $\widehat{APB} = 60^\circ$.

Os triângulos ABP e CBP são congruentes pelo caso (CH), logo $\overline{AB} = \overline{CB}$, portanto o triângulo ABC é isósceles de base \overline{AC} , e como consequência $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$. Também sabemos que $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$. Mas como $\widehat{ABC} = 60^\circ$, temos que $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 120^\circ$. Como $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$, concluímos que $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$, tornando o triângulo ABC equilátero.

Terceiro caso: Divisão da circunferência em $n = 5, 10, 20, 40, \dots, = 5 \cdot 2^k$ partes iguais com $k \in \mathbb{Z} \geq 0$.

Na divisão de uma circunferência em 5 partes iguais, geralmente se utiliza “o método descoberto pelo matemático japonês Yoshifusa Hirano” (Fukagawa, 1997). Após se promover esta divisão, facilmente se procede a divisão da circunferência em 10 e 20 partes iguais, respectivamente, conforme será demonstrado a seguir.

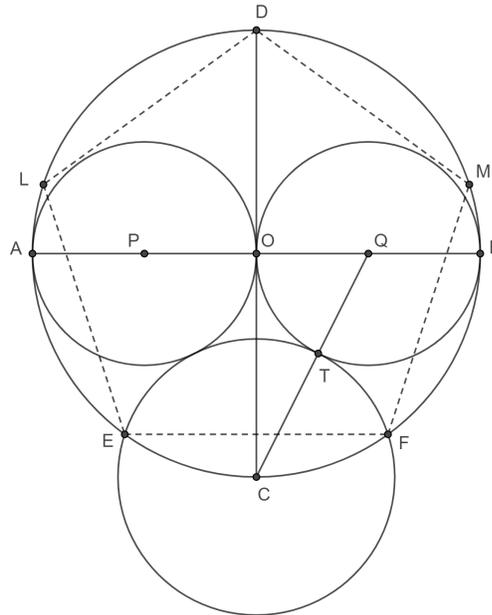
Construção do Pentágono regular por Y. Hirano

Passos para construção

1. Construa a circunferência de raio r e centro O ;
2. Trace os diâmetros \overline{AB} e \overline{CD} perpendiculares;
3. Trace os pontos médios de \overline{AO} e \overline{BO} , obtendo os pontos P e Q , respectivamente;
4. Com a ponta seca do compasso em P e comprimento \overline{PO} , trace a circunferência de diâmetro \overline{AO} ;
5. Com a ponta seca do compasso em Q com abertura \overline{PO} , trace a circunferência de diâmetro \overline{BO} ;
6. Trace o segmento \overline{CQ} interceptando a circunferência em T ;
7. Com a ponta seca do compasso em C com abertura \overline{CT} , trace uma circunferência, interceptando a circunferência em E e F , que são vértices consecutivos de um pentágono regular inscrito na circunferência;
8. Com abertura do compasso de E a F construção os vértices M, D e L . Unindo todos os vértices, encontramos o pentágono regular;

9. Bisseccinando os ângulos obtemos um decágono, e assim sucessivamente.

Figura 4.9 – Divisão de uma circunferência em 5 partes iguais



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

O triângulo COQ é retângulo em O sendo assim:

$$\overline{CQ} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Por construção,

$$\overline{CE} = \overline{CF} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Por outro lado, seja o ângulo $C\hat{D}F = \gamma$, então temos que:

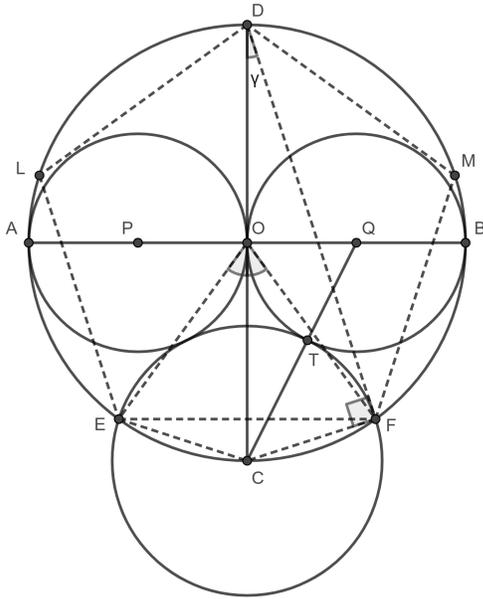
$$\text{sen } \gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Sabemos que $\gamma = 18^\circ$. Pelo teorema do ângulo inscrito temos que o ângulo $C\hat{O}F =$

$2 \cdot \widehat{CDF} = 36^\circ$ e o ângulo $\widehat{EOF} = 72^\circ$, como queríamos mostrar.

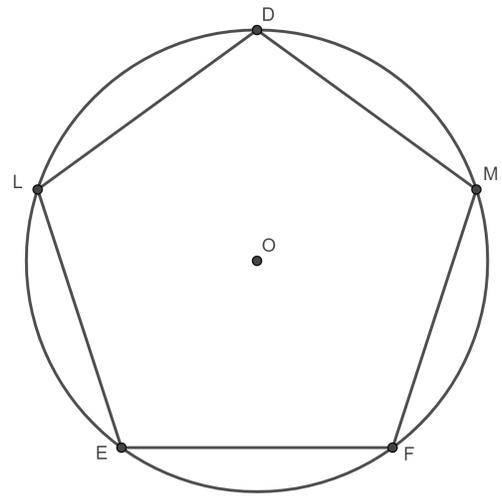
A prova detalhada de que $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ encontra-se no apêndice ??, à qual o leitor é convidado a consultar.

Figura 4.10 – Divisão de uma circunferência em 5 partes iguais.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.11 – Pentágono regular inscrito correspondente.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Quarto caso: Divisão da circunferência em $n = 15, 30, 60, 120, \dots, = 15 \cdot 2^k$ partes iguais com $k \in \mathbb{Z} \geq 0$.

Um pentadecágono possui um ângulo central de 24° , o qual pode ser obtido pela diferença entre um ângulo de 60° e um ângulo de 36° . Reproduziremos, a seguir em forma algorítmica a construção para o pentadecágono assim como sua justificativa.

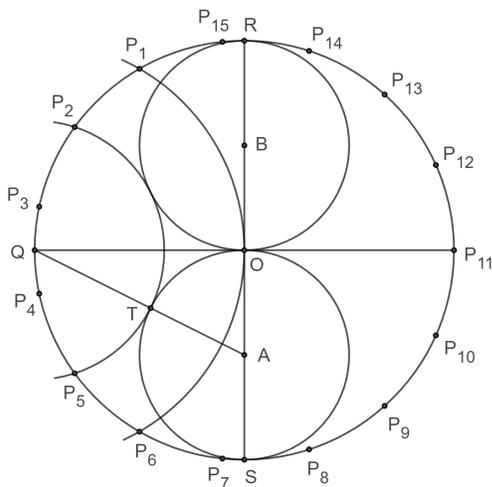
Construção do Pentadecágono regular

Passos para construção

1. Construa a circunferência de raio r e centro O ;
2. Trace os diâmetros $\overline{QP_{11}}$ e \overline{SR} perpendiculares;

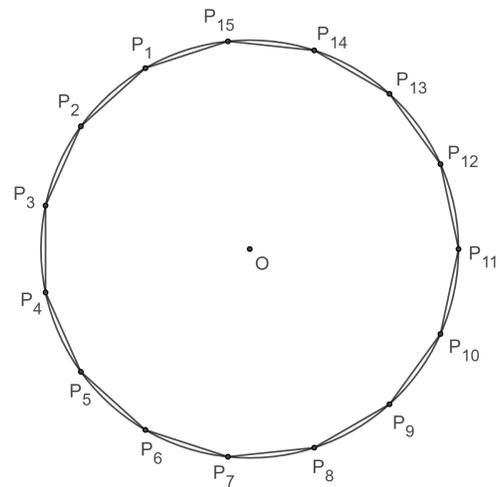
3. Com a ponta seca do compasso em Q e abertura \overline{QO} trace um arco de circunferência cortando a circunferência de raio r em P_1 e P_6 respectivamente;
4. Trace os pontos médios de \overline{SO} e \overline{RO} , obtendo os pontos A e B respectivamente;
5. Com a ponta seca do compasso em A e comprimento \overline{AO} , trace a circunferência de diâmetro \overline{SO} ;
6. Com a ponta seca do compasso em B e comprimento \overline{BO} , trace a circunferência de diâmetro \overline{RO} ;
7. Trace o segmento \overline{AQ} interceptando a circunferência em T ;
8. Com a ponta seca do compasso em Q e abertura \overline{QT} , trace uma circunferência, interceptando a circunferência de raio r em P_2 e P_5 . Logo P_1 e P_2 são vértices consecutivos de um pentadecágono regular inscrito na circunferência;
9. Com abertura do compasso de P_1 e P_2 construa os vértices $P_3, P_4, \dots, P_{14}, P_{15}$. Unindo todos os vértices, encontramos o pentadecágono regular;
10. Bissectando os ângulos, obtemos um polígono de 30 lados e assim sucessivamente.

Figura 4.12 – Divisão de uma circunferência em 15 partes iguais.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.13 – Pentadecágono regular inscrito correspondente.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

O segmento $\overline{P_1P_6}$ é o lado do triângulo equilátero $P_1P_6P_{11}$, veja a justificativa em 4.2.1 segundo caso, logo o ângulo $P_1\widehat{O}P_6 = 120^\circ$. Bissectando $P_1\widehat{O}P_6$ temos $P_1\widehat{O}Q = 60^\circ$. Por outro lado P_2 e P_5 são vértices consecutivos de um pentágono regular inscrito na circunferência, veja a justificativa em 4.2.1 terceiro caso, logo o ângulo $P_2\widehat{O}P_5 = 72^\circ$. Bissectando $P_2\widehat{O}P_5$ temos $P_2\widehat{O}Q = 36^\circ$. Portanto $P_1\widehat{O}P_2 = P_1\widehat{O}Q - P_2\widehat{O}Q = 24^\circ$, como queríamos mostrar.

Quinto caso: Divisão da circunferência em $n = 17, 34, 68, 136, \dots, = 17 \cdot 2^k$ partes iguais com $k \in \mathbb{Z} \geq 0$.

Por muito tempo a divisão de uma circunferência de 17 partes iguais constituiu-se em um grande desafio no mundo da Matemática. No entanto, este desafio foi vencido graças ao empenho de Carl Friedrich Gauss, que em 1798 demonstrou ser possível dividir a circunferência em 17 partes iguais (Freitas; Tavares, 2018).

As conclusões iniciais de Gauss sobre a divisão da circunferência em n partes iguais foram reunidas no livro ‘Disquisitiones Arithmeticae’, escrito em latim no ano de 1798 e publicado três anos mais tarde. Em seu livro, Gauss desenvolve um processo que com o qual, torna-se possível a construção de um heptadecágono regular, polígono construtível com régua e compasso, quando da divisão de uma circunferência em 17 partes iguais (Gauss; Waterhouse, 1966).

Posteriormente, aprofundando os estudos iniciados por Gauss sobre a construção do heptadecágono, Wantzel elaborou um teorema, afirmando que um polígono regular com n lados pode ser construído com uma régua e um compasso, se e somente se, n for o produto de uma potência de 2, por números primos de Fermat distintos (Ben-Ari, 2022).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) provou que é possível construir um polígono regular de dezessete lados, ou seja, ele pode ser desenhado com precisão usando apenas uma régua não graduada e um compasso. A Disquisitiones Arithmeticae, obra de referência em teoria dos números, contém a prova em apreço, nele Gauss mostrou que:

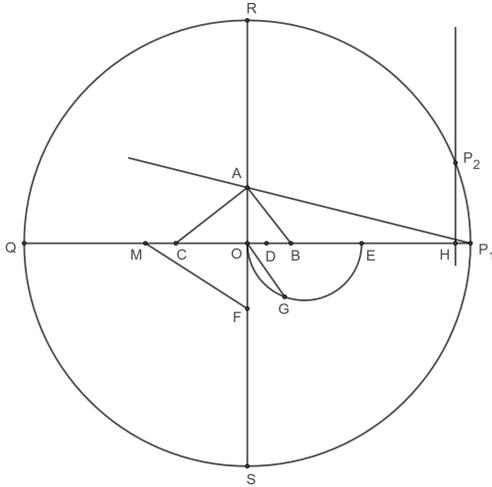
$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

Apesar de ter demonstrado a construtibilidade do heptadecágono regular por meio de régua não graduada e compasso, Gauss não apresentou uma construção geométrica explícita para tal polígono. Reproduzimos a seguir um algoritmo para a construção de um heptadecágono regular (Ben-Ari, 2022)

Passos para construção

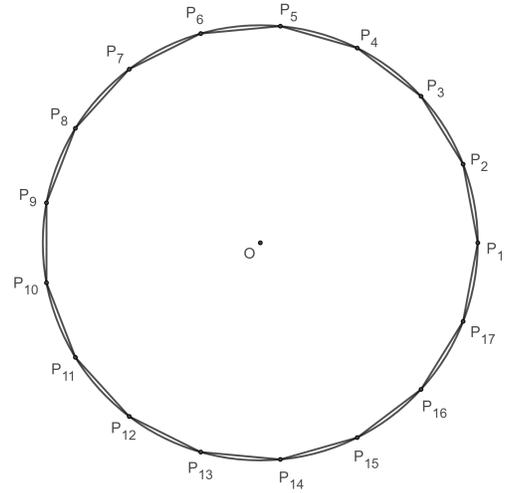
1. Construa a circunferência de raio unitário e centro O ;
2. Trace os diâmetros $\overline{QP_1}$ e \overline{SR} perpendiculares;
3. A um quarto da distância \overline{OR} , marque A e una A ao ponto P_1 ;
4. Trace a bissetriz interna do ângulo $O\hat{A}P_1$ interceptando o segmento de reta $\overline{OP_1}$ em B ;
5. Trace a bissetriz externa do ângulo $O\hat{A}P_1$ interceptando o segmento de reta \overline{QO} em C ;
6. Com a ponta seca do compasso em C e abertura \overline{CA} trace um arco de circunferência interceptando o segmento $\overline{OP_1}$ em D ;
7. Com a ponta seca do compasso em B e abertura \overline{BA} trace um arco de circunferência interceptando o segmento $\overline{OP_1}$ em E ;
8. Encontre o ponto médio de \overline{QD} e chame-o de M ;
9. Com a ponta seca do compasso em M e abertura \overline{MQ} trace um arco de circunferência interceptando \overline{OS} em F ;
10. Construa um semicírculo de diâmetro \overline{OE} ;
11. Com a ponta seca do compasso em O e abertura \overline{OF} trace um arco de circunferência interceptando o semicírculo de diâmetro \overline{OE} em G ;
12. Com a ponta seca do compasso em E e abertura \overline{EG} trace um arco de circunferência interceptando $\overline{OP_1}$ em H ;
13. Trace um perpendicular a $\overline{OP_1}$ passando pelo ponto H interceptando a circunferência em P_2 . Logo P_1 e P_2 são vértices consecutivos de um heptadecágono regular inscrito na circunferência;
14. Com abertura do compasso de P_1 a P_2 construção os vértices $P_3, P_4, \dots, P_{16}, P_{17}$. Unindo todos os vértices, encontramos o heptadecágono regular;
15. Bissectando os ângulos, obtemos um polígono de 34 lados, e assim sucessivamente.

Figura 4.14 – Divisão de uma circunferência em 17 partes iguais.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.15 – Heptadecágono regular inscrito correspondente.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

O algoritmo recém apresentado justifica-se como segue (Ben-Ari, 2022)

Do triângulo OAP_1 , temos que:

$$\overline{AP_1}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OP_1}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 \Rightarrow \overline{AP_1} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

Pelo teorema da bissetriz interna, temos que:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{BP_1}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AP_1}} \Rightarrow \frac{\overline{OB}}{1 - \overline{OB}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{17}}{4}} \Rightarrow \overline{OB} = \frac{1}{\sqrt{17} + 1} = \frac{1}{\sqrt{17} + 1} \cdot \frac{\sqrt{17} - 1}{\sqrt{17} - 1} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{16}$$

Pelo teorema da bissetriz externa, temos que:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{CP_1}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AP_1}} \Rightarrow \frac{\overline{OC}}{1 + \overline{OC}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{17}}{4}} \Rightarrow \overline{OC} = \frac{1}{\sqrt{17} - 1} = \frac{\sqrt{17} + 1}{\sqrt{17} - 1} \cdot \frac{\sqrt{17} + 1}{\sqrt{17} + 1} = \frac{1 + \sqrt{17}}{16}$$

Por construção $\overline{CD} = \overline{CA}$, logo:

$$\begin{aligned}\overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{18 + 2\sqrt{17}}{256}} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\end{aligned}$$

Por construção $\overline{BE} = \overline{BA}$, portanto:

$$\begin{aligned}\overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{18 - 2\sqrt{17}}{256}} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\end{aligned}$$

Por construção $\overline{MF} = \overline{MQ}$, assim:

$$\begin{aligned}\overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2}\overline{QD} = \frac{1}{2}(\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2}((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right) + \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{16 - 1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16}\right] \\ &= \frac{1}{32}\left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right)\end{aligned}$$

Como $\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$ e por construção $\overline{OG} = \overline{OF}$, temos que:

$$\begin{aligned}\overline{OG} = \overline{OF} &= \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{\overline{MF}^2 - (1 - \overline{MF})^2} = \sqrt{2\overline{MF} - 1} \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{32} \left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) - 1} \\ &= \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\end{aligned}$$

Por outro lado o triângulo OGE é retângulo em G por ter um de seus lados como diâmetro de uma circunferência e por construção $\overline{EH} = \overline{EG}$, logo:

$$\begin{aligned}\overline{EH} = \overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{(\overline{OB} + \overline{BE})^2 - \overline{OG}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{16} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{256} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}\end{aligned}$$

Agora calculemos o comprimento do segmento \overline{OE} :

$$\begin{aligned}\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE} &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{16} \\ &= \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right)\end{aligned}$$

Por fim, calculemos o comprimento \overline{OH} onde $\overline{OH} = \overline{OE} + \overline{EH}$

$$\overline{OH} = \frac{-1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{16} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}$$

Simplificando $2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17} \cdot \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&= 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17} \cdot \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&= 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}
\end{aligned}$$

Lembrando que:

$$\begin{aligned}
2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right]^2} \\
&= 2\sqrt{(18 + 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17})} \\
&= 2\sqrt{544 + 32\sqrt{17}} \\
&= 8\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}
\end{aligned}$$

Logo:

$$2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} = 8\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

Fazendo a substituição obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{OH} &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&\quad + \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 8\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

Que é a fórmula de Gauss para $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$.

A demonstração de que o cosseno de $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ é construível geometricamente com régua não graduada e compasso encontra-se detalhada no apêndice ??, ao qual o leitor é direcionado para aprofundamento.

4.2.2 Construções aproximadas

“Existem vários métodos, chamados gerais, para dividir a circunferência em partes iguais, propostos e muitas vezes dados como exatos” (Gherzi, 1913, p. 410). É interessante notar, do ponto de vista histórico, que enquanto alguns viam as fórmulas como meras aproximações, outros acreditavam na exatidão das construções (Dantzig, 1928). “O aspecto marcante dessas construções é o fato de que um único e mesmo método é aplicável a todos os casos e produz um resultado bastante preciso” (Johnson, 1928, p. 429). No livro (Gherzi, 1913), são apresentadas as descrições de dois métodos gerais, o de Rinaldini e o de Bardin, junto com suas análises matemáticas e tabelas de erro. Curiosamente, o método de Bardin não é tão conhecido quanto o método de Rinaldini, apesar de sua relevância.

As construções são simples e impressionam por sua simplicidade e beleza, mas a razão pela qual elas fornecem uma aproximação da n -ésima parte do círculo não está totalmente clara. A seguir, apresentamos os métodos mencionados acima que permite dividir, de forma aproximada, uma circunferência em n partes (quase) iguais. Além de apresentar e ilustrar esses métodos, faremos uma análise quantitativa do erro cometido com relação ao polígono regular correspondente.

4.2.3 O método de Bion-Rinaldini

Carlo Renaldini (às vezes chamado de Rinaldini, 1615-1698) foi um matemático italiano (Poggrndorff, 1863). No entanto, ele descobriu um método para dividir a circunferência em n partes (quase) iguais, que “é reproduzido nas *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Vol. XII (1853) pág. 77 em um artigo de Housel sem indicação do autor” (Gherzi, 1913, p. 410).

Apresentamos a seguir, em forma algorítmica, o prometido método:

Passos para construção

1. Trace um diâmetro \overline{AB} da circunferência a ser dividida;
2. Com a ponta seca do compasso em A e abertura \overline{AB} , trace um arco de circunferência;
3. Com a ponta seca do compasso em B e \overline{AB} , trace outro arco de circunferência, intersectando o anterior em dois pontos;
4. A interseção dos arcos determinará os pontos que vamos chamar de C e D ;
5. Divida o diâmetro \overline{AB} em n partes iguais e enumere os pontos de divisão, começando, digamos, do ponto A ao qual corresponderá o número 0;

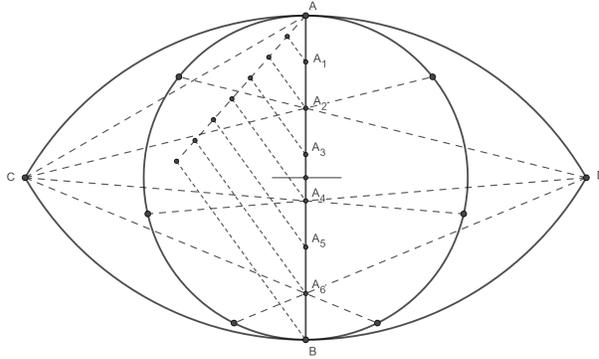
6. Escolha os números pares ou os ímpares;
7. Trace semirretas que partam de C e D e passem pelos pontos escolhidos;
8. As intersecções entre as semirretas e o lado oposto da circunferência determinam a divisão em n partes aproximadamente iguais.

Seguindo os passos citados anteriormente ilustraremos o método, utilizando apenas uma régua não marcada e um compasso, dividindo assim uma circunferência em 7 partes, quase iguais:

Passos para construção

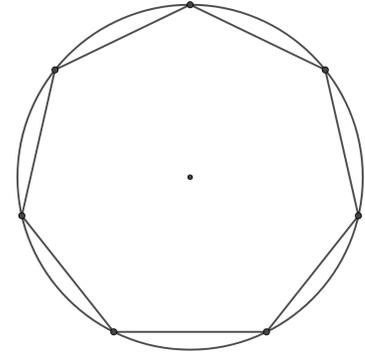
1. Trace um diâmetro \overline{AB} da circunferência a ser dividida;
2. Com a ponta seca do compasso em A e abertura \overline{AB} , trace um arco de circunferência;
3. Com a ponta seca do compasso em B e abertura \overline{AB} , trace outro arco de circunferência, intersectando o anterior em dois pontos;
4. A interseção dos arcos determinará os pontos que vamos chamar de C e D ;
5. Divida o diâmetro \overline{AB} em 7 partes iguais e enumere os pontos de divisão, começando, digamos, do ponto A ao qual corresponderá o número 0, o A_1 corresponderá o número 1 e assim sucessivamente;
6. Escolha os números pares ou os ímpares, para esta construção escolhemos os pares;
7. Trace semirretas que partam de C e D e passem pelos pontos escolhidos A_0, A_2, A_4, A_6 ;
8. As intersecções entre as semirretas e o lado oposto da circunferência determinam a divisão em 7 partes aproximadamente iguais.

Figura 4.16 – Divisão de uma circunferência em 7 partes aproximadamente iguais pelo método de Bion-Rinaldini.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.17 – Heptágono inscrito correspondente.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

4.2.4 Análise de erros

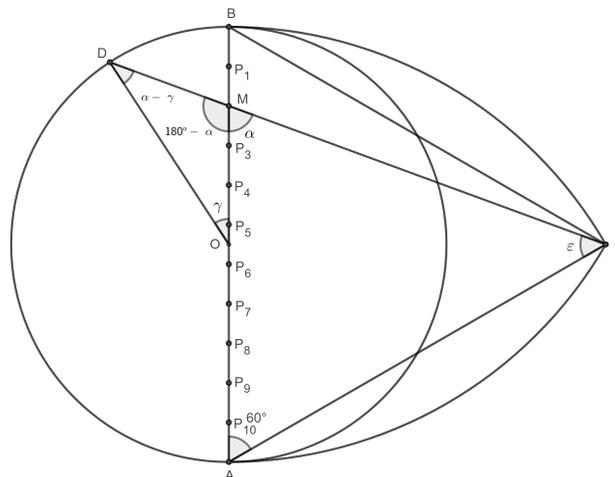
Agora, devemos nos ocupar da seguinte pergunta: Qual o erro envolvido no processo? Primeiramente, precisamos estabelecer um referencial com relação ao qual vamos medir o erro cometido. Aqui, adotaremos o ângulo do polígono regular inscrito na circunferência com o mesmo número de lados quantas são as partes nas quais dividimos essa circunferência.

Sejam:

$$\widehat{AMC} = \alpha \quad \widehat{ACM} = \epsilon \quad \widehat{DOB} = \gamma \quad \text{raio} = r$$

Obs.: M é o segundo ponto de divisão do diâmetro \overline{AB} partindo de B ou seja $M = P_2$.

Figura 4.18 – Análise de erros



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Do triângulo MCA , temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AM}}{\sin \epsilon} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \epsilon} = \frac{2r}{2r - \overline{BM}} = \frac{2r}{2r - \frac{2AB}{n}} = \frac{2r}{2r - \frac{4r}{n}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{n}}; \quad (4.1)$$

e, do triângulo DMO ,

$$\frac{\overline{OD}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{OM}}{\sin(\alpha - \gamma)} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{r}{r - \overline{BM}} = \frac{r}{r - \frac{2AB}{n}} = \frac{r}{r - \frac{4r}{n}} = \frac{1}{1 - \frac{4}{n}} \quad (4.2)$$

Portanto,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{1}{1 - \frac{2}{n}}. \quad (4.3)$$

Dividindo o numerador e o denominador do lado esquerdo da equação (4.3) por $\sin \alpha$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin 120^\circ \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha \cdot \cos 120^\circ}{\sin \alpha}} &= \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} \Rightarrow \\ \frac{1}{\sin 120^\circ \cdot \cotg \alpha - \cos 120^\circ} &= \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} \Rightarrow \\ \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cotg \alpha + \frac{1}{2}} &= \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} \Rightarrow \cotg \alpha = \frac{n-4}{n\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dividindo o numerador e o denominador do lado esquerdo da equação (4.2) por $\sin \alpha$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha} - \frac{\sin \gamma \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}} &= \frac{1}{1 - \frac{4}{n}} \Rightarrow \\ \frac{1}{\cos \gamma - \sin \gamma \cdot \cotg \alpha} &= \frac{1}{1 - \frac{4}{n}}, \end{aligned}$$

donde

$$\cos \gamma - \operatorname{sen} \gamma \cdot \left(\frac{n-4}{n\sqrt{3}} \right) = \frac{n-4}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{-(n-4) \cdot \operatorname{sen} \gamma}{n\sqrt{3}} = \left(\frac{n-4}{n} \right) - \cos \gamma$$

Elevando ambos os membros da última equação ao quadrado:

$$\frac{(n-4)^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \gamma}{3n^2} = \frac{(n-4)^2}{n^2} - \frac{2 \cos \gamma \cdot (n-4)}{n} + \cos^2 \gamma$$

Denotando $\cos \gamma = x$ e sabendo que $\operatorname{sen}^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma$, encontramos:

$$\frac{(n-4)^2 - (n-4)^2 \cdot x^2}{3n^2} - \frac{(n-4)^2}{n^2} + \frac{2x \cdot (n-4)}{n} - x^2 = 0$$

Multiplicando toda a equação por $3n^2$, obtemos:

$$(n-4)^2 - (n-4)^2 \cdot x^2 - 3 \cdot (n-4)^2 + 6nx \cdot (n-4) - 3n^2 x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$[3n^2 + (n-4)^2] \cdot x^2 - 6n \cdot (n-4) \cdot x + 2 \cdot (n-4)^2 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos:

$$\Delta = 4(n-4)^2 \cdot [n^2 + 16 \cdot (n-2)]$$

$$x = \frac{6n \cdot (n-4) \pm \sqrt{4 \cdot (n-4)^2 \cdot [n^2 + 16 \cdot (n-2)]}}{2 \cdot [3n^2 + (n-4)^2]}$$

$$x' = (n-4) \cdot \frac{3n + \sqrt{n^2 + 16 \cdot (n-2)}}{3n^2 + (n-4)^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \geq 4$$

$$x'' = \frac{3n \cdot (n-4) - |n-4| \cdot \sqrt{n^2 + 16 \cdot (n-2)}}{3n^2 + (n-4)^2}$$

O sinal negativo, que daria cossenos negativos, é rejeitado.

Logo, o ângulo central γ com subscrito R onde R indica o método de Rinaldini é o $\arccos x'$, ou seja:

$$\gamma_R = \arccos \left[(n-4) \cdot \frac{3n + \sqrt{n^2 + 16 \cdot (n-2)}}{3n^2 + (n-4)^2} \right]$$

A tabela a seguir mostra os valores exatos e aproximados do ângulo γ , para valores de n maiores ou igual a 3.

O método de Bion-Rinaldini só apresenta resultados exatos quando a divisão é feita em 3, 4 ou 6 partes, ver apêndice ??, mas ele ainda funciona bem para outros valores de n (Wagner, 1975).

Agora vejamos, quantitativamente, o quanto preciso ele é.

Tabela 4.1 – Diferenças angulares no método Bion-Rinaldini

n	Valores exatos de γ	Valores aproximados de γ	Diferenças angulares
3	120°	120°	0
4	90°	90°	0
5	72°	71°57'12"	-2'48"
6	60°	60°	0
7	51°25'43"	51°31'5"	5'22"
8	45°	45°11'14"	11'14"
9	40°	40°16'40"	16'40"
10	36°	36°21'24"	21'24"
11	32°43'38"	33°8'52"	25'14"
12	30°	30°29'45"	29'45"
13	27°42'32"	28°12'30"	29'58"
14	25°42'52"	26°15'48"	32'56"
15	24°	24°34'30"	34'30"
16	22°30'	23°5'54"	35'54"
17	21°10'35"	21°47'12"	36'37"
⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Neste caso, a função erro absoluto é dada por $n \mapsto \left| \frac{2\pi}{n} - \gamma_R \right|$, válida para $n \geq 4$, e o percentual de erro com relação a $2\pi/n$ é dado da seguinte forma:

$$n \mapsto \frac{\left| \frac{2\pi}{n} - \gamma_R \right|}{\frac{2\pi}{n}} = \left| 1 - \frac{n\gamma_R}{2\pi} \right|, \quad n \geq 4.$$

Utilizando o Wolfram ¹, verificou-se que a função possui zeros em $n = 4$ e 6 , um máximo local em $n = 5$, e é estritamente decrescente para todo $n \geq 6$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \approx -0.102658$. Observando a figura 4.25, que exhibe o comportamento do gráfico para valores de

¹Wolfram Alpha: É um aplicativo e site que oferece soluções para uma vasta gama de problemas matemáticos e científicos. Além de resolver equações, o aplicativo também permite a visualização de gráficos e a análise de dados.

n de 4 a 24, constata-se que o método de Rinaldini, embora forneça resultados exatos em duas situações particulares, pode gerar erros com uma amplitude considerável, variando de 0,1% a 10,27%.

Retificação do quadrante

Seja o arco \widehat{AC} um quarto da circunferência figura 4.19 que se deseja retificar. Prolonga-se o diâmetro em $\frac{3r}{4}$ em \vec{AB} , obtendo o ponto M .

Traça-se uma perpendicular a \overline{AB} por A e une-se M a C prolongando-a até encontrar esta perpendicular em C' . O segmento $\overline{C'A}$ é o arco retificado (aproximadamente).

Por proposições simples, temos $\frac{\overline{C'A}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{MO}}$ o que implica em:

$$\overline{C'A} = \frac{\left(2 + \frac{3}{4}\right) \cdot 1}{\left(1 + \frac{3}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{11}{4}\right)}{\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{11}{7} = \frac{\left(\frac{22}{7}\right)}{2}.$$

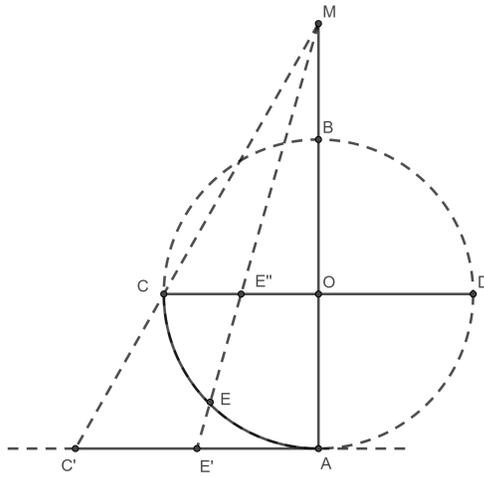
Ou seja, a posição de M dá uma retificação do quadrante equivalente à famosa aproximação de Arquimedes para o número π como $\frac{22}{7} \approx 3,142857$. Vemos que a posição de M é muito boa mas não faz com que a retificação do quadrante completo seja exata.

Agora se usarmos o ponto P como altura do triângulo equilátero CDP de raio 1 para a retificação do quadrante como na figura 4.20 temos que: $\overline{C'A} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = \frac{2 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}}{2}$. Ou seja, a posição de P dá uma retificação do quadrante para o número π como $2 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 3,154701$. Vemos também que a posição de P é muito boa mas não faz com que a retificação do quadrante completo seja exata.

Com base no que vimos para a retificação do quadrante os pontos M e P são muito bons para retificar arcos, sendo o ponto P o mais fácil de marcar.

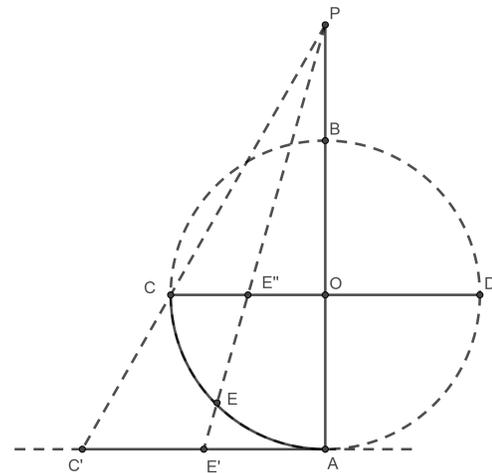
Assim, quando procuramos o valor do ângulo no método Rinaldini podemos observar o comprimento do segmento correspondente (aproximadamente) retificado na reta tangente. Perceba que se dividirmos o diâmetro \overline{CD} em partes iguais, isso corresponderá a uma divisão do semicírculo retificado completo em partes iguais. Sendo o raio da circunferência igual a 1, se quiséssemos $\widehat{CE} = \frac{2\pi}{n}$ devemos considerar $\overline{C'E'}$ igual a duas vezes a semicircunferência retificada dividida por n e conseqüentemente, $\overline{C'E''} = 2 \cdot \frac{\overline{CD}}{n}$. E essa é a razão pela qual precisamos considerar dois segmentos no diâmetro para determinar o ângulo $\frac{2\pi}{n}$.

Figura 4.19 – Retificação do arco \widehat{AC} usando M



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.20 – Retificação do arco \widehat{AC} usando P



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

4.2.5 O método Bardin

Libre-Irmond Bardin (também conhecido como Bardin de la Moselle, 1794-1867) foi um notável acadêmico francês. Sua trajetória inclui a formação na prestigiada École Polytechnique em Paris, onde posteriormente atuou como Professor de Desenho e Fortificações. (Palladino; Palladino, 2009). “Seu conhecimento na Itália se deve a Italo Ghersi” (Calzolari, 2021).

Apresentamos a seguir, em forma algorítmica, o prometido método:

Passos para construção

1. Trace um diâmetro \overline{AB} da circunferência a ser dividida;
2. Divida o diâmetro \overline{AB} em tantas partes iguais (n) quanto o número em que a circunferência será dividida;
3. Trace um diâmetro \overline{CD} perpendicularmente a \overline{AB} .
4. Com medida de comprimento de uma das partes do diâmetro \overline{AB} , prolongue os diâmetros \vec{BA} e \vec{DC} , obtendo assim os pontos M e N respectivamente;
5. Trace o segmento de reta \overline{MN} , cortando a circunferência em dois pontos; chame de P o ponto mais próximo de A ;

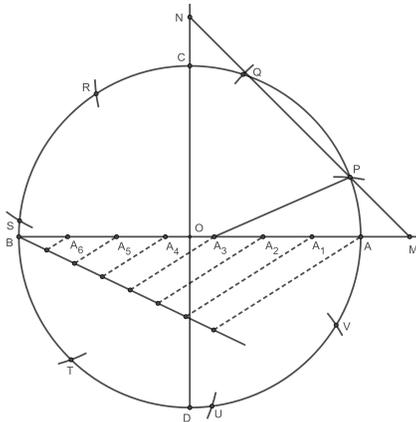
6. Una o ponto P com o terceiro ponto de divisão do diâmetro a partir de A , assim teremos o lado do polígono regular inscrito com n lados, exato ou aproximado dependendo do valor de n .

Seguindo os passos citados anteriormente ilustraremos o método, utilizando apenas uma régua não marcada e um compasso, dividindo assim uma circunferência em 7 partes aproximadamente iguais:

Passos para construção

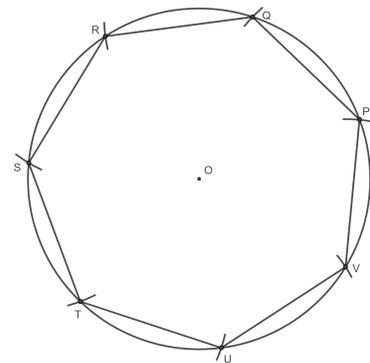
1. Trace um diâmetro \overline{AB} da circunferência a ser dividida;
2. Divida o diâmetro em 7 partes iguais;
3. Trace um diâmetro \overline{CD} perpendicularmente a \overline{AB} .
4. Com medida de comprimento de uma das partes do diâmetro \overline{AB} , prolongue os diâmetros \vec{BA} e \vec{DC} , obtendo assim os pontos M e N respectivamente;
5. Trace o segmento de reta \overline{MN} cortando a circunferência em P , sendo P o ponto de intersecção com a circunferência mais próxima de A ;
6. Una o ponto P com o terceiro ponto de divisão do diâmetro a partir de A , assim teremos o lado do polígono regular inscrito com 7 lados, aproximadamente iguais.

Figura 4.21 – Divisão de uma circunferência em 7 partes aproximadamente iguais pelo método Bardin.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.22 – Heptágono $PQRSTUV$ inscrito correspondente.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

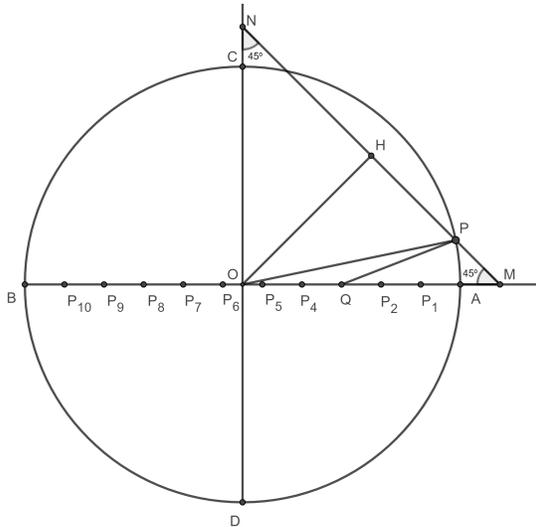
4.2.6 Análise de erros

Primeiramente, vamos encontrar a formula geral que representará a medida do segmento \overline{PQ} ou seja o comprimento do lado exato ou aproximado do polígono regular inscrito com n lados.

Seja:

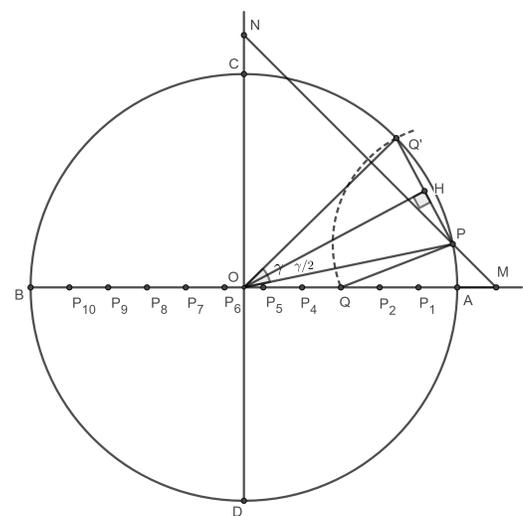
$$r = 1, \overline{AM} = \frac{2}{n}, \overline{OM} = 1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n}, \overline{QA} = \frac{3AB}{n} = \frac{6}{n} \text{ e } \overline{QM} = \frac{3AB}{n} + \frac{2}{n} = \frac{8}{n}$$

Figura 4.23 – Cálculo do comprimento PQ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.24 – Cálculo do ângulo central γ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Do triângulo QMP temos:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PM}^2 + \overline{QM}^2 - \overline{PM} \cdot \overline{QM} \cdot \sqrt{2} \\ &= \overline{PM}^2 + \left(\frac{8}{n}\right)^2 - \overline{PM} \cdot \frac{8}{n} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{\overline{PM}^2 \cdot n^2 + 64 - \overline{PM} \cdot 8\sqrt{2} \cdot n}{n^2} \\ \overline{PQ} &= \frac{1}{n} \sqrt{\overline{PM}^2 \cdot n^2 + 64 - \overline{PM} \cdot 8\sqrt{2} \cdot n} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sendo H o ponto médio do lado \overline{MN} do triângulo isósceles MON , logo o triângulo OHM é isósceles de base \overline{OM} e retângulo em H sendo assim $\overline{MH} = \overline{OH}$. Aplicando Pitágoras

obtemos:

$$\overline{OM} = \overline{OH} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \overline{OH} = \frac{n+2}{n\sqrt{2}} = \frac{(n+2)\sqrt{2}}{2n}$$

Por outro lado no triângulo retângulo OHP retângulo em H temos que:

$$\begin{aligned} \overline{PH}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OH}^2 \\ &= 1 - \left[\frac{(n+2)\sqrt{2}}{2n} \right]^2 \\ &= \frac{n^2 - 4n - 4}{2n^2} \\ \overline{PH} &= \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 4n - 4}{2}} \end{aligned}$$

Veja que:

$$\begin{aligned} \overline{PM} &= \overline{MH} - \overline{PH} \\ &= \frac{(n+2)\sqrt{2}}{2n} - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 4n - 4}{2}} \\ &= \frac{(n+2)\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{n^2 - 4n - 4}{2}}}{2n} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\overline{PM}^2 = \frac{n^2 - (n+2)\sqrt{n^2 - 4n - 4}}{n^2} \tag{4.6}$$

Substituindo (4.5) e (4.6) em (4.4) obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{PQ} &= \frac{1}{n} \sqrt{\left[\frac{n^2 - (n+2)\sqrt{n^2 - 4n - 4}}{n^2} \right] n^2 + 64 - \left[\frac{(n+2)\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{n^2 - 4n - 4}{2}}}{2n} \right] \cdot 8\sqrt{2} \cdot n} \\
&= \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - (n+2)\sqrt{n^2 - 4n - 4} + 64 - \left[(n+2)\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{n^2 - 4n - 4}{2}} \right] \cdot 4\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - (n+2)\sqrt{n^2 - 4n - 4} + 64 - (n+2) \cdot 8 + 8\sqrt{n^2 - 4n - 4}} \\
&= \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 8n + 48 - (n-6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}}
\end{aligned}$$

O ângulo central γ com subscrito B onde B indica o método de Bardin (só para manter as mesmas medidas) será o dobro do arco-seno da metade de \overline{PQ} . Para verificar essa afirmação, note que o triângulo POQ' da figura 4.24 é isósceles, onde a base é o segmento $\overline{PQ}' = \overline{PQ}$. Ao construirmos a mediatriz relativa à base \overline{PQ}' encontramos o ponto H , que corresponde ao ponto médio do lado \overline{PQ}' . Dado que \overline{PH} é perpendicular a \overline{PQ}' , o triângulo POH é um triângulo retângulo com ângulo reto em H . Logo:

$$\text{sen } P\widehat{O}H = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}$$

Denotando $P\widehat{O}Q' = \gamma$ e sabendo que $\overline{PH} = \frac{PQ}{2}$ e que $\overline{OP} = r = 1$, temos que:

$$\text{sen } \frac{\gamma_B}{2} = \frac{\overline{PQ}}{2}$$

o que dá

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_B}{2} &= \text{arcsen } \frac{\overline{PQ}}{2} \\
\gamma_B &= 2 \cdot \text{arcsen } \frac{\overline{PQ}}{2} \\
&= 2 \cdot \text{arcsen } \left[\frac{1}{2n} \sqrt{n^2 - 8n + 48 - (n-6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}} \right]
\end{aligned}$$

A tabela a seguir mostra os valores exatos e aproximados dos lados dos polígonos obtido com este método para valores de $n \in \mathbb{Z} \geq 5$, pois para $n = 3$ e $n = 4$ o radical $\sqrt{n^2 - 4n - 4}$ torna-se imaginário.

O método de Bardin apresenta resultado exato apenas quando a divisão é feita em 6

partes, ver apêndice ??, mas funciona muito bem para qualquer outro valor de n .

Agora vejamos, quantitativamente, o quanto preciso ele é.

Tabela 4.2 – Diferenças angulares no método Bardin

n	Comprimentos. Lado exato ou calculado ($r = 1$)	Comprimentos. Lado aproximado	Diferença	Diferença entre o arco de $\frac{360^\circ}{n}$ e o arco que subtende a corda aproximada.
5	1,1755705	1,1661904	-0,0093801	39'46'',58
6	1,0000000	1,0000000	0	0
7	0,8677673	0,8675193	-0,0002480	56'',86
8	0,7653669	0,7646179	-0,0007490	2'47'',22
9	0,6840400	0,6831215	-0,0009185	3'21'',66
10	0,6180340	0,6169825	-0,0010515	3'48'',02
11	0,5634651	0,5624619	-0,0010032	3'35'',68
12	0,5176380	0,5167340	-0,0009040	3'13'',06
13	0,4786312	0,4778463	-0,0007848	2'46'',78
14	0,4450417	0,4443797	-0,0006620	2'17'',90
15	0,4158233	0,4152793	0,0005441	1'54'',76
16	0,3901806	0,3897460	-0,0004346	1'29'',40
17	0,3674989	0,3671638	-0,0003351	1'10'',32
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

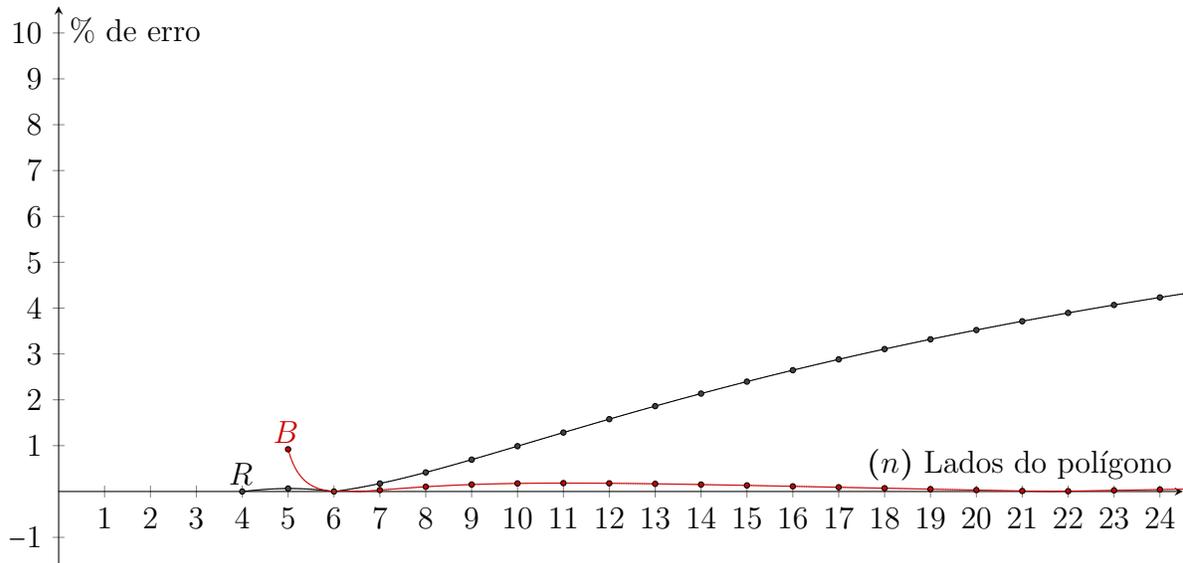
Neste caso, a função erro absoluto é dada por $n \mapsto \left| \frac{2\pi}{n} - \gamma_B \right|$, válida para $n \geq 5$, e o percentual de erro com relação a $2\pi/n$ é dado da seguinte forma:

$$n \mapsto \frac{\left| \frac{2\pi}{n} - \gamma_B \right|}{\frac{2\pi}{n}} = \left| 1 - \frac{n\gamma_B}{2\pi} \right|, \quad n \geq 5.$$

Utilizando mais uma vez o Wolfram, verificou-se que a função possui zero em $n = 6$, tem máximo em $n = 5$, convergindo para $1 - \frac{\sqrt{10}}{\pi} \approx -0,006584$ quando $n \rightarrow \infty$. Observando a figura 4.25, que exibe o comportamento do gráfico para valores de n de 4 a 24, constata-se que o método de Bardin, embora apresente um resultado exato em uma situação particular, em qualquer outro caso, o erro cometido não ultrapassa o limite de 1%.

Ao comparar os métodos de Rinaldini (R) e Bardin (B) usados para dividir a circunferência em n partes (quase) iguais, a análise gráfica (ver 4.25) dos erros relativos mostra que o método de Bardin é mais preciso que o de Rinaldini.

Figura 4.25 – Gráfico de erros relativos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

De forma geral, o método de Bardin produz resultados mais próximos do valor real, indicando um menor índice de erros, como evidenciado pela curva do método de Bardin em relação à curva de Rinaldini em todo o domínio do gráfico.

4.3 Divisão de área

Nesta seção apresentaremos dois métodos para dividir uma circunferência em n partes de áreas iguais e um método para dividir polígonos regulares e não regulares convexos em n partes de áreas iguais, utilizando apenas régua não marcada e um compasso. A habilidade EF07MA22 da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) requer o seguinte: Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

4.3.1 Divisão de um círculo em n partes de mesma área

Na seção 4.2 vimos que não é possível construir todos os polígonos regulares apenas com uma régua e um compasso, por exemplo o heptágono.

Se quiséssemos dividir uma circunferência em 2, 3, 4, 5 ou 6 partes de mesma área por exemplo, poderíamos proceder da seguinte maneira: Se n fosse igual a dois, bastaria dividir o círculo ao meio. Para $n = 3, 4, 5$ e 6, bastaria construir o polígono regular correspondente usando uma régua e um compasso e depois unir os vértices com o centro do círculo.

Mas e quanto ao heptágono? Infelizmente, não podemos construí-lo com régua e com-

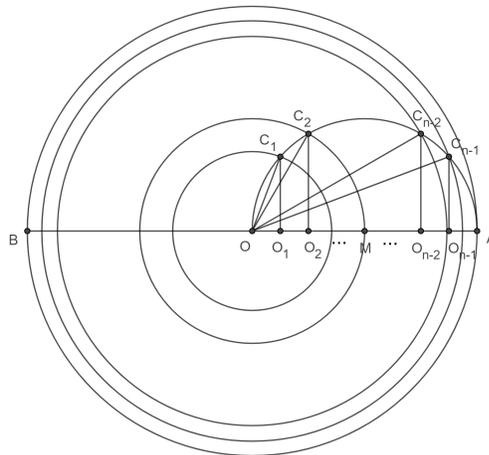
passo. Então, como podemos resolver esse problema?

Para resolver tal problema apresentaremos agora um algoritmo que descreve os passos necessários (Barros; Lucchiari, 2003):

Passos para construção

1. Trace um diâmetro \overline{AB} da circunferência a ser dividida em n partes de mesma área;
2. Divida o raio \overline{OA} em n partes de mesmo comprimento e chame os pontos de divisão de $O = O_0, O_1, O_2, \dots, O_{n-2}, O_{n-1}, O_n = A$;
3. Determine o ponto médio, M , de \overline{OA} ;
4. Com centro no ponto M e raio \overline{MA} trace uma semicircunferência;
5. Trace perpendiculares ao diâmetro \overline{AB} passando pelos pontos $O_1, O_2, \dots, O_{n-2}, O_{n-1}$ determinando os pontos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-2}, C_{n-1}$;
6. As partes desejadas são as seguintes: o círculo de centro O e raio $\overline{OC_1}$, os anéis entre os círculos centrados em O e de raios $\overline{OC_j}$ e $\overline{OC_{j+1}}$, para $J = 2, \dots, n - 2$ e o anel entre os círculos centrados em O e de raios $\overline{OC_{n-1}}$ e \overline{OA} , todos contidos no círculo original.

Figura 4.26 – Divisão do círculo em n partes de mesma área



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Justificativa

Utilizando as relações métricas nos triângulos retângulos, $OC_1O_1, OC_2O_2, \dots, OC_{n-2}O_{n-2}, OC_{n-1}O_{n-1}$, segue que:

$$\overline{OC}_1^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OO}_1 = \overline{OA}^2 \cdot \frac{\overline{OO}_1}{\overline{OA}} = \frac{1}{n} \cdot \overline{OA}^2$$

$$\overline{OC}_2^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OO}_2 = \overline{OA}^2 \cdot \frac{\overline{OO}_2}{\overline{OA}} = \frac{2}{n} \cdot \overline{OA}^2$$

⋮

$$\overline{OC}_{n-2}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OO}_{n-2} = \overline{OA}^2 \cdot \frac{\overline{OO}_{n-2}}{\overline{OA}} = \frac{n-2}{n} \cdot \overline{OA}^2$$

$$\overline{OC}_{n-1}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OO}_{n-1} = \overline{OA}^2 \cdot \frac{\overline{OO}_{n-1}}{\overline{OA}} = \frac{n-1}{n} \cdot \overline{OA}^2$$

Ou seja

$$\pi \overline{OC}_1^2 = \pi \overline{OC}_2^2 - \pi \overline{OC}_1^2 = \pi \overline{OC}_3^2 - \pi \overline{OC}_2^2 = \dots = \pi \overline{OC}_{n-1}^2 - \pi \overline{OC}_{n-2}^2 = \pi \overline{OA}^2 - \pi \overline{OC}_{n-1}^2 = \frac{1}{n} \cdot \pi \overline{OA}^2$$

Como queríamos mostrar.

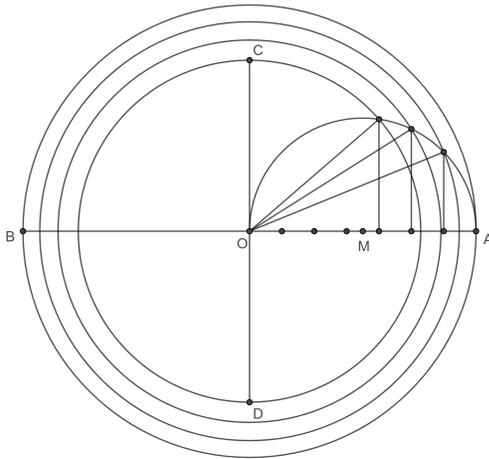
Para ilustrar o método, dividiremos uma circunferência de centro O e raio igual a 7 cm em 7 partes de mesma área:

Passos para construção

1. Trace um diâmetro \overline{AB} da circunferência a ser dividida em 7 partes de mesma área;
2. Divida o raio \overline{OA} em 7 partes de mesmo comprimento;
3. Determine o ponto médio, M , de \overline{OA} ;
4. Com centro no ponto M e raio \overline{MA} trace uma semicircunferência;
5. Trace três perpendiculares ao diâmetro \overline{AB} passando pelos três primeiros pontos de divisão do raio \overline{OA} a partir de A , intersectando a semicircunferência em três pontos;
6. Ligue o ponto O a cada um desses pontos que estão sobre a semicircunferência, obtendo assim três segmentos de reta, que são raios de três outras circunferências;

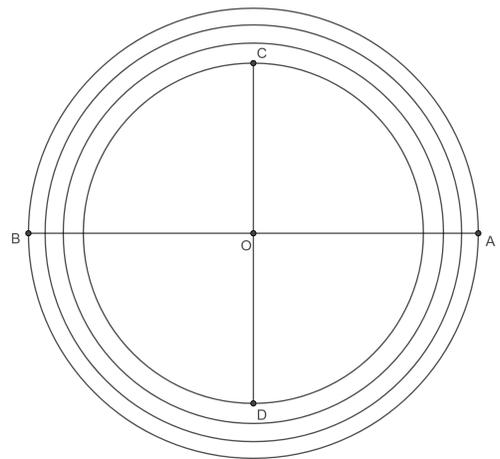
7. Com a ponta seca do compasso em O e abertura igual aos comprimentos de cada segmento, trace três circunferências;
8. Por fim trace um diâmetro perpendicular ao diâmetro da menor circunferência passando por O , obtendo assim o que queríamos.

Figura 4.27 – Construção da divisão do círculo em 7 partes de mesma área.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.28 – divisão do círculo em 7 partes de mesma área.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

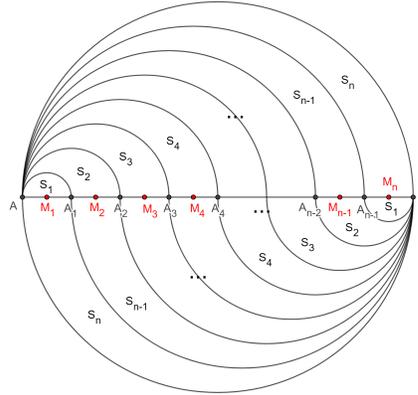
Agora como prometido, apresentaremos em forma algorítmica, o segundo método para dividir uma circunferência em n partes de mesma área:

Passos para construção

1. Trace um diâmetro \overline{AB} da circunferência a ser dividida em n partes de mesma área;
2. Divida o diâmetro \overline{AB} em n partes iguais $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}B}$;
3. Divida cada intervalo $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}B}$, ao meio, ou seja, encontre os seus pontos médios, M_1 , M_2 , M_3 , ..., M_n , respectivamente;
4. Com a ponta seca do compasso em M_1 e raio $\overline{M_1A}$, desenhe o semicírculo de diâmetro $\overline{AA_1}$;
5. Em seguida, trace o círculo com centro em A_1 e raio $\overline{A_1A}$;
6. Continuando assim até desenhar o círculo inicial, quando ele está centralizado no centro do círculo;

7. Repetindo a operação que acabamos de fazer, partindo de B e indo em direção a A , o círculo estará dividido em n partes de mesma área.

Figura 4.29 – Divisão do círculo em n partes de mesma área



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

A construção recém-apresentada conforme detalhado em (Barbeau; Klamkin; Moser, 1995) justifica-se como segue:

Seja $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{n-2}A_{n-1}} = \overline{A_{n-1}B} = 2r$, note que os raios dos semicírculos de área $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n$, têm valores $r, 2r, 3r, \dots, (n-1)r, nr$, respectivamente por construção. Logo temos que:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{\pi r^2}{2}; \\
 S_2 &= \frac{\pi(2r)^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{3\pi r^2}{2} \\
 S_3 &= \frac{\pi(3r)^2}{2} - \frac{\pi(2r)^2}{2} = \frac{5\pi r^2}{2} \\
 &\vdots \\
 S_{n-1} &= \frac{\pi[(n-1)r]^2}{2} - \frac{\pi[(n-2)r]^2}{2} = \frac{(2n-3)\pi r^2}{2} \\
 S_n &= \frac{\pi(nr)^2}{2} - \frac{\pi[(n-1)r]^2}{2} = \frac{(2n-1)\pi r^2}{2}
 \end{aligned}$$

Para completar a construção, basta realizar a mesma sequência de passos, porém iniciando em B e finalizando em A .

Note que:

$$\begin{aligned}
S_1 + S_n &= \frac{\pi r^2}{2} + \frac{(2n-1)\pi r^2}{2} = n\pi r^2; \\
S_2 + S_{n-1} &= \frac{3\pi r^2}{2} + \frac{(2n-3)\pi r^2}{2} = n\pi r^2; \\
&\vdots \\
S_n + S_1 &= \frac{(2n-1)\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} = n\pi r^2
\end{aligned}$$

Assim dividimos o círculo em n partes de mesma área igual a:

$$\text{Área} = n\pi r^2$$

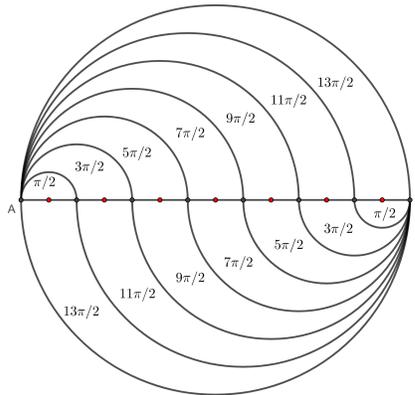
Ao multiplicarmos essa área por n , encontramos exatamente a área total da circunferência, que é $n^2\pi r^2$.

Para ilustrar o método, dividiremos uma circunferência de raio igual a 7 cm em 7 partes de mesma área:

Passos para construção

1. Trace um diâmetro \overline{AB} da circunferência a ser dividida em 7 partes de mesma área;
2. Divida o diâmetro \overline{AB} em 7 partes iguais $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_6B}$;
3. Divida cada intervalo $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_6B}$, ao meio, ou seja, encontre os seus pontos médios, M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 , M_7 respectivamente;
4. Com a ponta seca do compasso em M_1 e raio $\overline{M_1A}$, desenhe o semicírculo de diâmetro $\overline{AA_1}$;
5. Em seguida, trace o semicírculo com centro em A_1 e raio $\overline{A_1A}$;
6. Continuando assim até desenhar o semicírculo inicial, quando ele está centralizado no centro do círculo;
7. Repetindo a operação que acabamos de fazer, partindo de B e indo em direção a A , o círculo estará dividido em 7 partes de mesma área.

Figura 4.30 – Divisão do círculo em 7 partes de mesma área



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

4.3.2 Divisão de área de polígonos regulares e não regulares convexo em n partes de mesma área

Utilizando apenas régua não graduada e compasso, podemos transformar qualquer polígono regular ou não regular convexo em um triângulo de área equivalente. “Para dividir um polígono em áreas iguais, precisará converter no triângulo, dividir em áreas iguais (dividindo a base ou a altura) e converter de volta para polígono” (Massago, 2011, p. 2).

Apresentamos a seguir, em forma algorítmica, o prometido método para polígonos regulares e não regulares convexo (Massago, 2011):

Seja um polígono $A_1A_2 \dots A_n$ convexo qualquer.

Passos para construção

1. Converta o polígono $A_1A_2 \dots A_n$ em um triângulo $A_{n-1}MN$ equivalente de mesma área;
2. Divida a base \overline{MN} do triângulo $A_{n-1}MN$ em tantas partes iguais (n) quanto o número de áreas em que o polígono será dividido, usando um dos cinco métodos apresentados na secção 4.1, determinando em \overline{MN} os pontos N_1, N_2, \dots, N_{n-1} ;
3. Divida o triângulo $A_{n-1}MN$ em (n) partes de mesma área, ligando o vértice A_{n-1} aos pontos N_1, N_2, \dots, N_{n-1} ;
4. Transfira cada ponto de divisão da base para o polígono, usando a mesma técnica de converter polígono no triângulo. Assim temos o que desejamos.

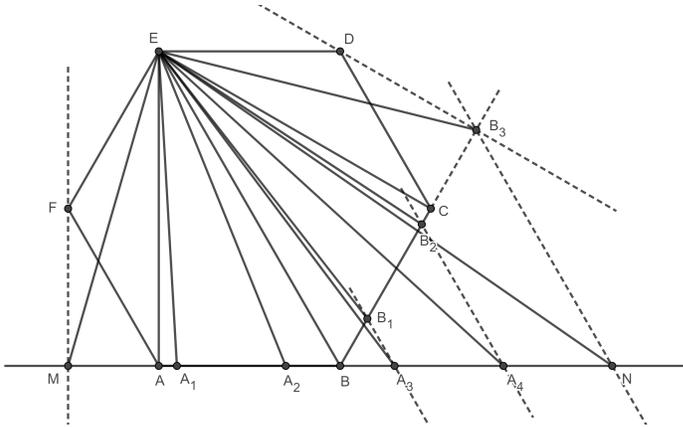
Para ilustrar o método, dividimos um hexágono regular e não regular em 5 partes de mesma área:

Sejam os polígonos $ABCDEF$ das figuras 4.31 e 4.33.

Passos para construção

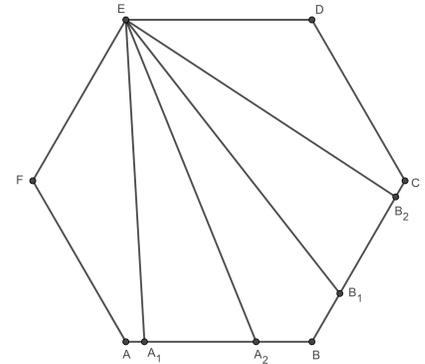
1. Prolongue a sua base \overline{AB} nos dois sentidos;
2. Trace suas diagonais pelo vértice E ;
3. Trace paralelas a estas diagonais, pelos vértices F , D e B_3 , sendo B_3 a intersecção da paralela que passa D com o prolongamento do lado \overline{BC} . Onde a paralela que passa por F e a que passa por B_3 , cortam o prolongamento da base nos pontos M e N respectivamente;
4. Unindo os pontos E , M e N , temos o triângulo equivalente ao polígono $ABCDEF$;
5. Divida a base \overline{MN} do triângulo EMN em 5 partes iguais, pelos pontos A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ;
6. Ligue o vértice E aos pontos A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ;
7. Trace paralelas a diagonal \overline{EB} pelos pontos A_3 e A_4 , cortando o lado \overline{BC} do polígono em B_1 e B_2 respectivamente;
8. Por fim ligue o vértice E aos pontos A_1 , A_2 , B_1 e B_2 . Logo temos o hexágono dividido em cinco áreas iguais (Figuras 4.31 e 4.33)

Figura 4.31 – Divisão de um hexágono regular em 5 partes de mesma área.



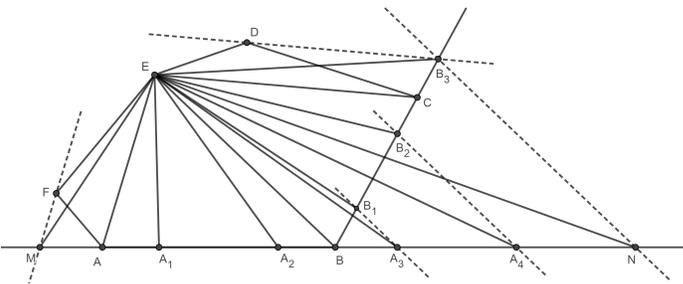
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.32 – hexágono regular dividido em 5 partes de mesma área.



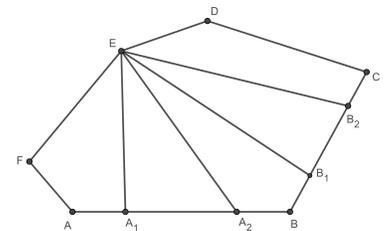
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.33 – Divisão de um hexágono não regular em 5 partes de mesma área.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.34 – hexágono não regular dividido em 5 partes de mesma área.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Agora vamos provar que realmente os polígonos $EFAA_1$, EA_1A_2 , EA_2BB_1 , EB_1B_2 e EB_2CD possuem mesma área.

Primeiro vamos mostrar que o triângulo EMN e o hexágono possuem mesma área.

Observe que os triângulos EAF e EAM , tem mesma base e mesma altura, logo eles tem mesma área. A área do triângulo EAB é comum ao triângulo EMN e ao hexágono.

Os triângulos EBN e EBB_3 possuem mesma área, pois, eles tem mesma base e mesma altura, mas como os triângulos ECD e ECB_3 possuem mesma área, logo podemos concluir que o triângulo EMN e o hexágono $ABCDEF$ possuem áreas equivalentes.

Agora vamos mostrar que as áreas dos polígonos $EFAA_1$, EA_1A_2 , EA_2BB_1 , EB_1B_2 e EB_2CD possuem mesma área.

A região (triângulo EA_1A_2) já esta encaixada no hexágono $ABCDEF$.

A região (triângulo EAM) é equivalente a EAF , logo a região EA_1AF tem a mesma área da região (triângulo EA_1M).

A região EBA_3 é equivalente a EBB_1 , logo a região EA_2BB_1 tem a mesma área da região (triângulo EA_2A_3).

A região EBA_4 é equivalente a EBB_2 , e a região (triângulo EA_3A_4) é equivalente a EB_1B_2 .

A região ECB_3 é equivalente a ECD sendo assim a região EB_2CD tem a mesma área da região (triângulo EB_2B_3). Portando temos o hexágono dividido em 5 partes de mesma área, como queríamos fazer.

4.4 Divisão de ângulos

Dividir ângulos é muito importante no desenho geométrico. A bissetriz, linha que divide um ângulo em duas porções congruentes, é o ponto de partida para realizar essa divisão. Através de sucessivas bissetrizes, pode-se obter uma partição em 2, 4, 8 ou mais partes iguais, seguindo uma sequência de potências de 2.

A trissecção de ângulos é um dos problemas clássicos da geometria, que remonta à Grécia Antiga. O desafio consiste em dividir um ângulo qualquer em três partes iguais utilizando apenas régua não graduada e compasso. Este problema intrigou matemáticos por séculos, até que, em 1837, o matemático francês Pierre Laurent Wantzel provou que a trissecção exata de um ângulo arbitrário é impossível de ser realizada com os instrumentos mencionados. Este problema geométrico admite uma interessante tradução algébrica cuja solução envolve o fato de que “se uma equação cúbica de coeficientes racionais não tem raiz racional, então nenhuma de suas raízes é construtível” (Precioso; Pedroso, 2011, p. 167).

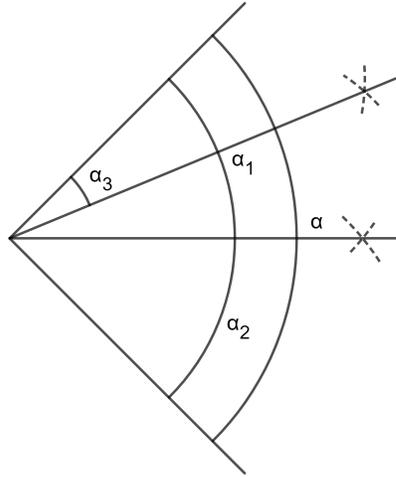
4.4.1 Divisão de um ângulo α em 2, 4, 8 etc, partes iguais

Seja o ângulo α da figura 4.35 o qual desejamos dividir em 2, 4, 8 etc. partes iguais.

Passos para construção

1. Trace a bissetriz do ângulo α dividindo-o em α_1 e α_2 ;
2. Trace a bissetriz dos ângulos α_1 e α_2 . Assim α estará dividido em 4 partes iguais;
3. Trace agora a bissetriz de cada um desses ângulos, ficando assim α dividido em oito partes e assim por diante.

Figura 4.35 – Divisão do ângulo em 2^n partes iguais



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

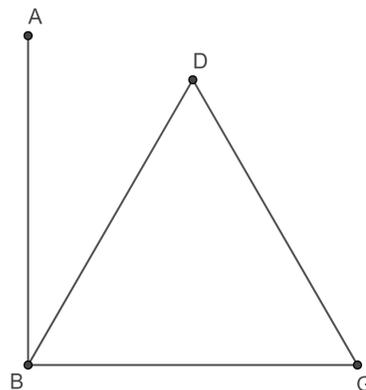
Justificativa dispensa detalhes. Veja a figura 4.35

4.4.2 Trisseção do ângulo

Pappus mostra no Livro IV da sua Coleção Matemática como trissectar um ângulo reto:

Mas se o ângulo dado for reto, tomaremos uma reta \overleftrightarrow{BG} na qual descreveremos o triângulo equilátero BDG e, dividindo o ângulo compreendido pelas retas \overleftrightarrow{DB} e \overleftrightarrow{BG} em duas partes iguais, teremos o ângulo compreendido pelas retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{BG} dividido em três partes iguais (D'Alexandrie, 1933).

Figura 4.36 – Trisseção do ângulo reto



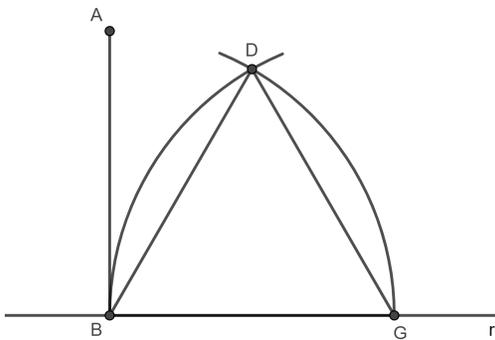
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Os passos para construção são os seguintes:

Seja \widehat{ABG} um ângulo reto, conforme a figura 4.37, o qual desejamos trissectar.

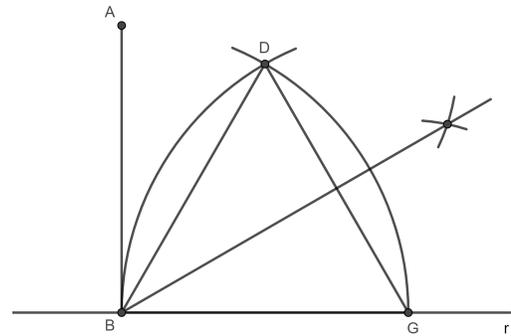
1. Com a ponta seca do compasso em B , trace um arco de circunferência de raio \overline{BG} ;
2. Agora com a ponta seca em G , trace outro arco de circunferência de mesmo raio;
3. Os arcos se interceptam num ponto D , a partir do qual traçamos os segmentos \overline{DB} e \overline{DG} ;
4. Os ângulos \widehat{DBG} e \widehat{DGB} medem 60° .
5. Traçando a bissetriz do ângulo \widehat{DBG} obtemos dois ângulos de 30° . É claro que também $\widehat{ABD} = 30^\circ$.

Figura 4.37 – Construção do triângulo equilátero BDG



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.38 – Construção da Bissetriz do ângulo \widehat{DBG}



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

A justificativa dispensa detalhes.

Apoiados em (Precioso; Pedroso, 2011) e tendo em vista a familiaridade com ângulos de 60° no ambiente escolar, vamos mostrar que não tem como cortar tal ângulo em três partes iguais usando só régua não graduada e compasso.

Seja $\alpha = 3\theta$. Então:

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos(\theta) \cdot \cos(2\theta) - \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(2\theta). \quad (4.7)$$

Como

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) = \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)\end{aligned}\quad (4.8)$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\theta) &= \operatorname{sen}(\theta + \theta) = \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= 2 \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta),\end{aligned}\quad (4.9)$$

substituindo as equações (4.8) e (4.9) na equação (4.7), obtemos:

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(\theta) \cdot [\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)] - \operatorname{sen}(\theta) \cdot 2 \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= \cos(\theta) \cdot [\cos^2(\theta) - 1 + \cos^2 \theta] - 2 \operatorname{sen}^2(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta).\end{aligned}$$

Se $\alpha = 60^\circ$, então $\theta = \frac{60^\circ}{3} = 20^\circ$. Temos:

$$\cos(60^\circ) = \cos(3 \cdot 20^\circ) = 4 \cos^3(20^\circ) - 3 \cos(20^\circ) = \frac{1}{2}.$$

Fazendo $x = \cos 20^\circ$, chegamos à seguinte equação cúbica

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \quad (4.10)$$

Para verificar se a equação acima tem soluções racionais, aplicaremos o teorema Teorema das raízes racionais (Iezzi, 2013).

Teorema 4.1. *Se uma equação polinomial*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+^$ e p e q são primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .*

Pelo teorema as possíveis raízes racionais da equação (4.10) têm a forma $\frac{p}{q}$, em que p é divisor de -1 e q é divisor de 8 , isto é, $p \in \{\pm 1\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Assim, se a equação (4.10) tiver raízes racionais, essas raízes estarão no conjunto:

$$\left\{ +1, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{8}, -\frac{1}{8} \right\}.$$

Daí, é fácil verificar que a equação (4.10) não tem nenhuma raiz racional. Assim, comprova-se a impossibilidade de dividir um ângulo de 60° em três partes iguais.

A discussão anterior abordou a trissecção de ângulos, um dos problemas mais famosos da antiguidade. Os outros dois grandes problemas são os seguintes:

- Duplicação do cubo. Dado um cubo, construa um novo cubo cujo volume seja o dobro do primeiro cubo;
- Quadratura do círculo. Dado um círculo, construa um quadrado com a mesma área.

Para duplicar o cubo, partimos de um cubo com lado 1 e volume 1. Para que seu volume seja dobrado, a aresta do novo cubo (x) deve ser tal que $x^3 = 2$. Isso significa que x é a raiz da equação $x^3 - 2 = 0$. Como essa equação não possui raízes racionais (já que os possíveis valores, ± 1 e ± 2 , não a satisfazem), e de acordo com a referência (Precioso; Pedroso, 2011), nenhuma de suas raízes é um número construtível, a duplicação do cubo é impossível.

Já a quadratura do círculo envolve a construção de um quadrado com a mesma área de um círculo de raio 1. A área do círculo é π . Para construir o quadrado, precisaríamos de uma aresta de comprimento $\sqrt{\pi}$. Ocorre que π é um número transcendente, o que significa que ele não pode ser construído com régua e compasso. Consequentemente, construir $\sqrt{\pi}$ também é impossível, provando a impossibilidade da quadratura do círculo.

4.4.3 Trissecção de um ângulo arbitrário

Neste cenário, a construção não pode ser realizada utilizando uma régua não graduada e compasso. Reproduzimos a seguir um algoritmo para a construção (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010).

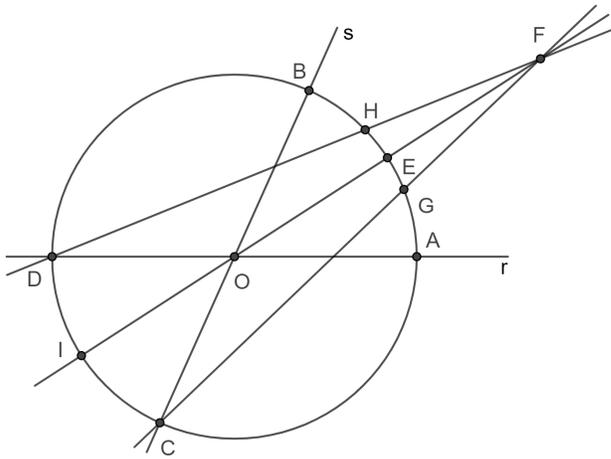
Traçado com régua não marcada e compasso:

Vamos considerar um ângulo cujos lados estão sobre as retas r e s , que se encontram no ponto O .

1. Trace uma circunferência auxiliar;
2. Prolongue o segmento \overline{BO} e determine o ponto C na circunferência;
3. Prolongue o segmento \overline{AO} e determine o ponto D na circunferência;

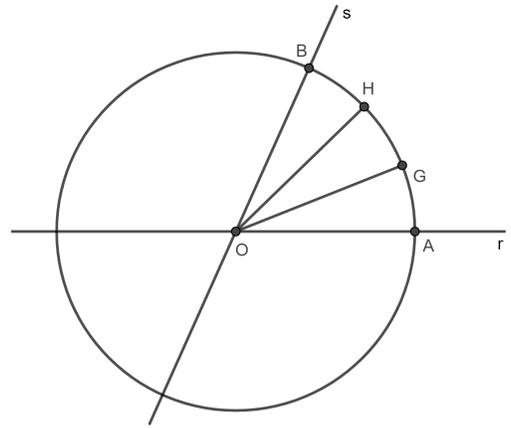
4. Trace a bissetriz do ângulo \widehat{AOB} , intersectando a circunferência em E ;
5. Com a abertura do compasso de medida \overline{OE} , marque o ponto F na reta bissetriz sendo assim a medida do segmento \overline{OE} é a mesma do segmento \overline{EF} ;
6. Ligue os pontos C e D no ponto F , cortando a circunferência nos pontos G e H respectivamente, dividindo assim a circunferência em 3 partes iguais (aproximadamente).

Figura 4.39 – Trisseccção de um ângulo diferente do reto



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 4.40 – Ângulo trisseccionado (aproximadamente)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

O algoritmo recém apresentado justifica-se como segue (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010).

Sejam:

$$\widehat{AOB} = 2a \quad \widehat{HOG} = 2x \quad \text{raio} = r \quad OC = r \quad OF = 2r$$

Pelo teorema do ângulo inscrito temos que o ângulo $\widehat{OCF} = \frac{\widehat{BOG}}{2} = \frac{a+x}{2}$. Por outro lado o ângulo $\widehat{EOB} = \widehat{COI} = a$, pois são ângulos opostos pelos vértices. Pelo teorema do ângulo externo temos que $a = \widehat{OCF} + \widehat{CFO}$, ou seja, $\widehat{CFO} = a - \frac{a+x}{2} = \frac{a-x}{2}$.

No triângulo CFO , temos:

$$\frac{2r}{\text{sen}\left(\frac{a+x}{2}\right)} = \frac{r}{\text{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a+x}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

mas como:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{a+x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2}\right)$$

temos:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{1}{2} \quad (4.11)$$

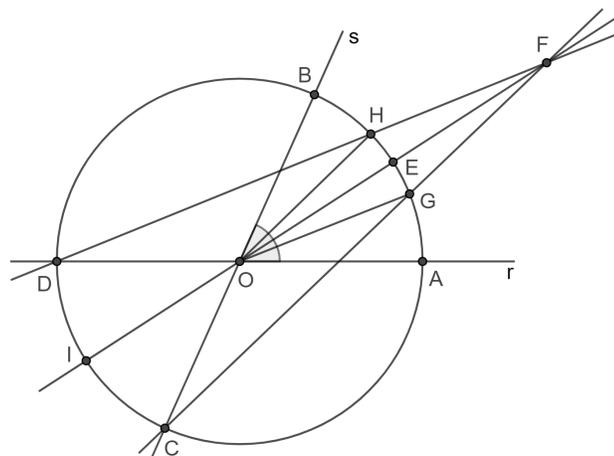
Dividindo o numerador e o denominador do primeiro membro da equação (4.11) por $\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ obtemos:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

Um cálculo simples nos permite concluir que $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)$. Logo temos como aproximação x igual a $\frac{a}{3}$.

Obs.: Para $2a = 60^\circ$ a equação nos fornece $2x = 20^\circ 24' 36''$ o que deveria ser 20° .

Figura 4.41 – Justificativa da trisseção

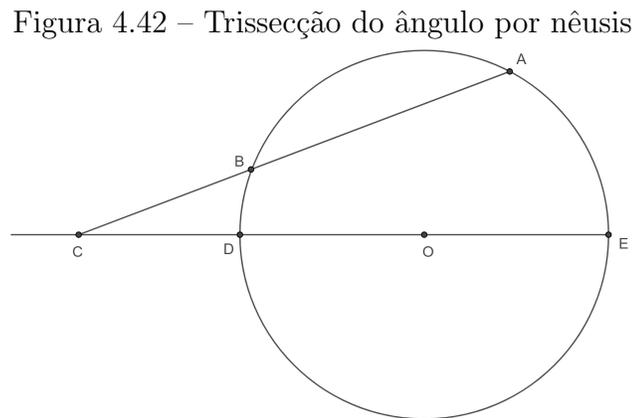


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

4.4.4 A solução da trissecção por nêusis

Uma solução geométrica para o problema da trissecção de um ângulo arbitrário é o Método de *neusis* de Arquimedes. Através da Proposição 8 do Livro dos Lemas, é possível inferir uma construção que resolve o problema da trissecção do ângulo, reduzindo-o a um problema de nêusis:

Proposição 8: Se \overline{AB} é uma corda qualquer do círculo cujo centro é O , e se \overline{AB} for prolongada até C tal que \overline{BC} seja congruente ao raio; se, além disso, \overline{CO} encontrar o círculo em D e se prolongado encontrar o círculo pela segunda vez em E , o arco \widehat{AE} será congruente a três vezes o arco \widehat{BD} . (Archimedes, 1897)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

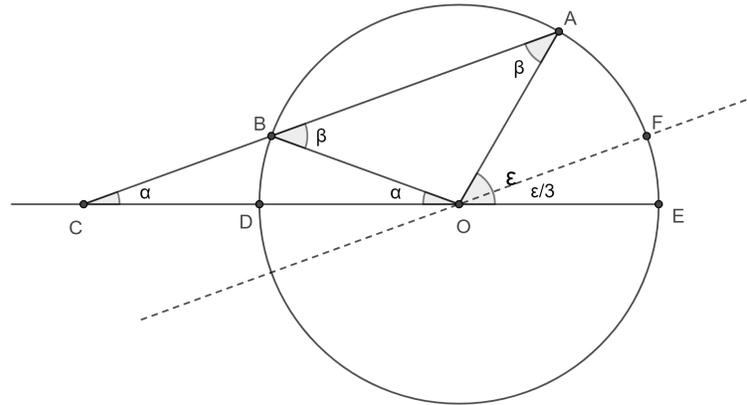
A construção pode ser feita com régua e compasso, a régua necessitando de duas marcações com o comprimento de \overline{CB} , ou seja, a construção por nêusis opera de forma diversa das construções euclidianas apenas com régua não graduada e compasso.

Seja dada uma circunferência como na Figura 4.43 de raio r e um ângulo $\widehat{AOE} = \epsilon$ o qual desejamos trissectar. Em seguida determinemos o seguimento \overline{BC} de comprimento igual a r , com B sobre a circunferência e C sobre o prolongamento de \overline{OE} de tal modo que o ponto A esteja no seu prolongamento. Tracemos uma reta paralela a \overline{AC} que passa no ponto O cortando a circunferência em F .

Veja que $\overline{OF} \parallel \overline{CA}$, logo $\widehat{FOE} = \widehat{BCO} = \alpha$, pois são ângulos correspondentes. Por outro lado, os ângulos $\widehat{OAC} = \widehat{OAF} = \beta$, pois são ângulos alternos internos. Observe que os triângulos OAB e COB são isósceles de bases \overline{AB} e \overline{CO} respectivamente, pois $\overline{CB} = \overline{BO} = \overline{AO} = r$. Assim $\widehat{BCO} = \widehat{DOB} = \alpha$ e $\widehat{OAB} = \widehat{ABO} = \beta$. Pelo teorema do ângulo externo temos

que $\widehat{ABO} = \beta = 2\alpha$, mas como $\widehat{ABO} = \widehat{OAB} = \beta = 2\alpha$ e $\widehat{AOF} = \beta = 2\alpha$, podemos concluir que $\widehat{AOF} = 2\widehat{FOE} = 2\alpha$, traçando a bissetriz no ângulo \widehat{AOF} teremos trisseccionado o ângulo \widehat{AOE} sendo assim $\epsilon = 3\alpha$, ou seja $\widehat{FOE} = \frac{\epsilon}{3}$, como queríamos fazer.

Figura 4.43 – Trisseccção por nêusis



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

4.4.5 Processo geral de divisão de ângulos

A seguir apresentamos um processo geral para dividirmos um ângulo agudo ou obtuso em n partes aproximadas, sendo recomendado sua utilização para as divisões em 5, 6, 7, 9, 10, etc.

Passos para construção

1. Seja um ângulo $\widehat{AOB} = \alpha$ agudo ou obtuso que se queira dividir em n partes (quase) iguais. Centre o compasso no ponto O e com abertura $\overline{OA} = \overline{OB}$ trace uma circunferência auxiliar;
2. Prolongue o segmento \overline{OA} até cortar a circunferência no ponto C ;
3. Construa uma perpendicular ao diâmetro \overline{AC} passando pelo ponto O , cortando a circunferência nos pontos D e E ;
4. Trace dois arcos de circunferência, de raio \overline{AC} , com centros em D e E , onde esses arcos se intersectam no ponto F ;
5. Construa uma reta perpendicular ao segmento \overline{AC} passando pelo ponto A ;
6. Trace uma semirreta partindo do ponto F passando pelo ponto B , cortando a reta perpendicular que passa pelo ponto A no ponto G , obtendo assim o segmento \overline{AG} que é o arco \widehat{AB} retificado;

7. Divida o segmento \overline{AG} em n partes iguais;
8. Trace semirretas partindo do ponto F passando pelos n pontos que dividem o segmento \overline{AG} , cortando a circunferência auxiliar em n pontos;
9. Agora trace semirretas partindo do ponto O aos n pontos que dividem o arco \widehat{AB} .
Dividindo assim o ângulo \widehat{AOB} em n partes aproximadamente iguais.

O algoritmo recém-apresentado justifica-se como segue (Souza; Pimenta; Arnaut, 2010).

Sejam na figura 4.44

$$\widehat{OBF} = \gamma \quad \widehat{OFB} = \beta \quad \widehat{AOB} = \alpha \quad \text{raio} = r$$

De acordo com a figura 4.44 temos que:

Do triângulo AFG , tem-se:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AG}}{r + \sqrt{3}} \Rightarrow \overline{AG} = \operatorname{tg} \beta \cdot (r + \sqrt{3}) \quad (4.12)$$

e do triângulo OBF

$$\frac{\overline{OF}}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{\overline{OB}}{\operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\sqrt{3}}{r}$$

Pelo teorema do ângulo externo, temos que: $\alpha = \beta + \gamma$ ou seja $\gamma = \alpha - \beta$. Logo,

$$\frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$$

Dividindo o numerador e denominador do lado direito por $\cos \beta$, obtemos:

$$\frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} - \cos \alpha$$

Sendo assim:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{3} + r \cos \alpha} \quad (4.13)$$

Substituindo a equação (4.13) na equação (4.12), obtemos:

$$\overline{AG} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha (r + \sqrt{3})}{\sqrt{3} + r \cos \alpha}$$

Como já visto anteriormente, quando retificamos o quadrante, verifica-se que o comprimento do arco \widehat{AB} retificado na reta tangente que passa pelo ponto A é aproximadamente igual ao comprimento do segmento \widehat{AG} .

A fórmula para o cálculo do comprimento de um arco de circunferência, quando o ângulo central é dado em radianos, é a seguinte:

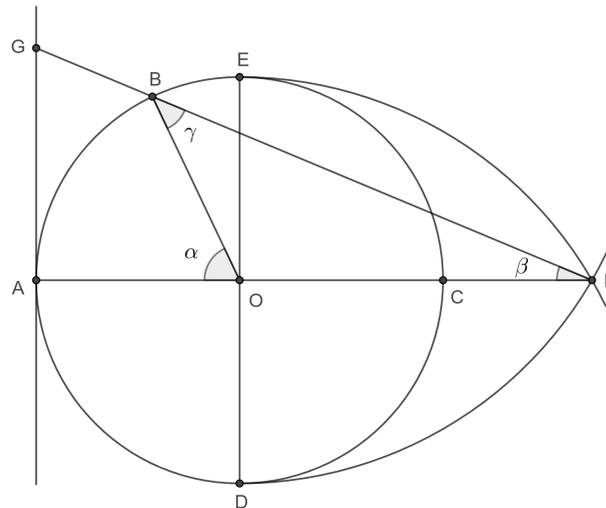
$$\widehat{AB} = \alpha \cdot r$$

Ou seja

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \approx \frac{\widehat{AG}}{r}$$

Portanto, $\frac{\widehat{AG}}{r} \approx \alpha$. Sendo α a medida em radianos do arco \widehat{AB} da figura 4.44.

Figura 4.44 – Retificação do arco \widehat{AB} .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

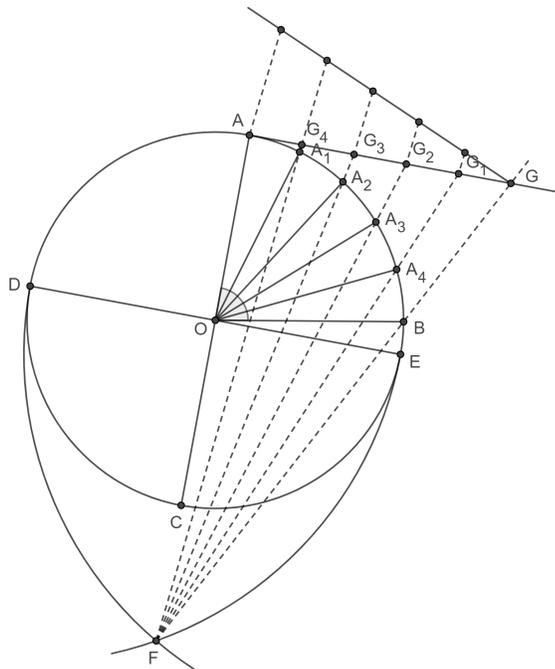
Como exemplo dividiremos um ângulo agudo \widehat{AOB} , ver figura 4.45 em 5 partes aproximadamente iguais.

Passos para construção

1. Centre o compasso no ponto O e com abertura $\overline{OA} = \overline{OB}$ trace uma circunferência auxiliar;
2. Prolongue o segmento \overline{OA} até cortar a circunferência no ponto C ;

3. Construa uma perpendicular ao diâmetro \overline{AC} passando pelo ponto O , cortando a circunferência nos pontos D e E ;
4. Trace dois arcos de circunferência de raio \overline{AC} , com centros em D e E , onde esses arcos se intersectam no ponto F ;
5. Construa uma reta perpendicular ao segmento \overline{AC} passando pelo ponto A ;
6. Trace uma semirreta partindo do ponto F passando pelo ponto B , cortando a reta perpendicular que passa pelo ponto A no ponto G , obtendo assim o segmento \overline{AG} que é o arco \widehat{AB} retificado;
7. Divida o segmento \overline{AG} em 5 partes iguais, nomeando os pontos de divisão de G_1, G_2, G_3 e G_4 , partindo do ponto G ;
8. Trace semirretas partindo do ponto F aos pontos G_1, G_2, G_3 e G_4 , cortando a circunferência auxiliar nos pontos A_1, A_2, A_3 e A_4 , partindo do ponto A ;
9. Agora trace os segmentos $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}$ e $\overline{OA_4}$. Dividindo assim o ângulo \widehat{ABC} em 5 partes aproximadamente iguais.

Figura 4.45 – Divisão de um ângulo agudo em 5 partes aproximadamente iguais pelo processo geral.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho visa contribuir para a formação de professores de matemática do ensino básico, proporcionando um aprofundamento nos métodos euclidianos para divisão de elementos geométricos e oferecendo subsídios para a elaboração de atividades e sequências didáticas mais eficazes. Nos dias atuais percebe-se que as construções geométricas têm sido negligenciada quando não omitidas. Uma das causas apontadas para isso é o despreparo do professor. Muitos professores não detêm conhecimentos suficientes, para desenvolverem um bom trabalho com seus alunos bem como não buscam ou desconhecem recursos que possam melhorar suas práticas.

Considerando, ainda, acerca da formação de professores, para que haja mudança é preciso que o professor queira mudar e fazer uma reflexão sobre tais conhecimentos e sobre a sua própria prática pedagógica, estimulando mudanças em sua concepção sobre as construções geométricas com possíveis implicações em sua prática pedagógica.

Ao longo deste trabalho, exploramos uma ampla variedade de construções geométricas, sempre com o objetivo de manter a fidelidade aos princípios da geometria grega. Abordamos a questão clássica da geometria: quais polígonos regulares podem ser construídos utilizando apenas régua não graduada e compasso?.

Exploramos um dos famosos problemas da antiguidade que, por séculos, resistiu às tentativas de solução com régua e compasso, a trisseção do ângulo, onde apoiado em (Precioso; Pedroso, 2011) mostramos que não tem como dividir um ângulo qualquer em três partes iguais usando só régua não graduada e compasso.

Acreditamos que este estudo evidencie a relevância das construções geométricas para o desenvolvimento educacional. Este conjunto de construções é um recurso flexível que pode ser adaptado a diversas necessidades, desde a introdução de conceitos básicos até a exploração de tópicos mais avançados. Alicerçados nos princípios da geometria plana e da álgebra, procedemos à justificativa matemática de todas as construções, garantindo a validade dos resultados.

É imprescindível que a educação acompanhe os avanços tecnológicos, utilizando ferramentas como o *GeoGebra* para tornar as aulas mais atrativas e eficientes. É importante que os alunos estabeleçam uma relação entre as construções geométricas realizadas com régua não graduada e compasso e as mesmas construções realizadas no ambiente digital, utilizando o *GeoGebra*, mantendo a coerência com as etapas apresentadas nas construções ao longo desse trabalho.

Ao explorar essa área, buscamos despertar o interesse por uma disciplina que contribui

significativamente para a formação integral do estudante, e cuja ausência na grade curricular é uma lacuna a ser preenchida.

Ao estudar esses métodos, os futuros professores poderão desenvolver habilidades essenciais para o ensino da matemática e contribuir para a formação de alunos mais críticos e criativos.

REFERÊNCIAS

- ABRATE, R. S.; LUJÁN, M. A.; POCHULU, M. D. La investigación educativa en Matemática con nuevos recursos. In: ABRATE, R. S.; POCHULU, M. D. (Orgs.). **Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática**. Córdoba (Argentina): Universidad Nacional de Villa María, 2007.
- AKILLITAHTAILEMATEMATIK. **Bir Doğru Parçasının $\frac{\sqrt{n}}{2}$ Katını Çizmek**. 2013. Disponível em: <https://akillitahtailematematik.blogspot.com/?view=classic>. Acesso em: 2 ago. 2025.
- ALVES, Fabrício Rodrigues; AMARAL-SCHIO, Rúbia Barcelos; PEROVANO, Ana Paula. **Construções geométricas nos livros didáticos de Matemática e a BNCC**. VIII SIPEM, Uberlândia-MG, 22 a 27 de novembro de 2021. Anais...
- ARCHIMEDES, S. T. L. H. **The works of Archimedes**. [S.l.]: CUP Archive, 1897.
- BARBEAU, Edward J.; KLAMKIN, Murray S.; MOSER, William O. J. **Five Hundred Mathematical Challenges**, American Mathematical Soc., 1995
- BARROS, Tomas Edson; LUCCHIARI, Ademir Cristovão. **Uma Divisão do Disco com Régua e Compasso**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2º quadrimestre de 2003.
- BEN-ARI, M **Mathematical Surprises**. Rehovot, Israel: Department of Science Teaching/Weizmann Institute of Science, 2022.
- BESTEMAN, N; FERDINANDS, J. Another way to divide a line segment into n equal parts. **The Mathematics Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics v. 98, n. 6, p. 428-433, 2005.
- BOYER, C. B. **História da Matemática** 3 ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** Brasília: MEC / SEF 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular para o ensino médio**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CALZOLANI, Firenze Sergio. **Ennagono**, 07 Outubro 2021. Disponível em <http://www.geometriapratica.it/allegatipdf/ennagono.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2021.

CANS, A.; MOSER, A.; MORETTI, M. T. Construções Geométricas: referências históricas de um saber fundamental à aprendizagem da Geometria.. **Revista Educação Matemática em Foco**. v. 2, n. 2, p. 1-24, 2024.

CARVALHO, Benjamin de A. **Desenho geométrico**. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao livro Técnico, 1967.

D'ALEXANDRIE. P. **La collection mathématique**, trad. Paul Ver Eecke. v. 2. 1933

DANTZIG, Tobias. Discussions: On the Approximate Division of a Circumference. **The American Mathematical Monthly**, v. 35, n. 4, p. 185-187, 1928.

DE VILLIERS, Michael. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica**. Trad.: Rita Bastos. Prof Mat 2002. Do original em inglês: Dynamic Math Learning.

EUCLIDES. **Os elementos** Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Editora da Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: geometria**. São Paulo: Atual Editora, 1992.

EVES, H. **Introdução à história da matemática** Trad. Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, M. E. B. **Teoria(s) de proporções em Portugal na primeira metade do século XVIII**. Dissertação (Mestrado). Mestrado em Ciências/Formação Contínua de Professores. Minho (Portugal): Universidade do Minho/Escola de Ciências, 2013.

FREITAS, Pedro J., TAVARES, Hugo. Dividing the circle. **The College Mathematics Journal**, v. 49, n. 3, p. 187-194, 2018.

FUKAGAWA, H. Symmetry in traditional japanese mathematitics. **Symmetry: Culture and Science**. v. 8, n. 1, p. 24-54, 1997.

GAUSS, C. F.; WATERHOUSE, W. C. **Disquisitiones arithmeticae**. New York Berlin Heidelberg Tokyo: Springer-Verlag, 1966

GHERSI, Italo. **Matematica dilettevole e curiosa**: Problemi bizzarri; Paradossi algebrici, geometrici e meccanici ..., Itália, Hlrico Hoepli, 1913.

GÓES, A. R. T. **Introdução à expressão gráfica**: tópicos de desenho geométrico e de geometria descritiva. São Paulo: Intersaberes, 2020.

GOULART, T. B.; FERREIRA, A. C.; COSTA, J. L. Elementos, de Euclides, e o altar do falcão como fontes de inspiração para o ensino de geometria no ensino fundamental. **Vidya**, v. 42, n. 2, p. 199-216, jul.-dez., 2022.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

JOHNSON, Roger A. Discussions: On the Approximate Division of the Circle. **The American Mathematical Monthly**, v. 34, n. 8, p. 429-431, 1927.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais** (Coleção PROFMAT). 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2023.

LUIZ, N. E. **Desenho técnico e geometria descritiva** São Paulo: SENAC, 2024.

MACEDO, M. A. de. **Construções geométricas e geometria dinâmica** Fortaleza: UAB/ IFCE, 2011.

MASSAGO, Sadao. **Baricentro** 2014. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/sadao/download/?file=student/baricentro.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2025.

MAZZANTE, F. P. O currículo escolar nas leis 5692/71 e 9394/96: questões teóricas e de história. **Revista História da Educação-RHE**. v. 18, p. 71-81, 2005.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática** São Paulo: Atual, 1998.

NISHIYAMA, Yutaka. Gauss' Method of Constructing a Regular Heptadecagon. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 82, n. 5, p. 695-707, 2013. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v82i5.3>.

PALLADINO, Nicola; PALLADINO, Franco. **I modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate**, *Ratio Mathematica*, v. 19, n. 1, p. 31-87, 2009.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências**. *Zetetiké*, ano 1, n. 1, p. 7-17, mar., 1993.

POGGENDORFF, Johann Christian. **Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften, 2: enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen Usw. Aller Völker und Zeiten**. Johann Ambrosius Barth, 1863.

PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. **Construções euclidianas e o desfecho de problemas famosos da geometria**, *RECEN-Revista Ciências Exatas e Naturais*, v. 13, n. 2, p. 167, 2011.

PUTNOKI, J. C. **Elementos de Geometria e desenho geométrico**. Editora Scipione Ltda., São Paulo, v. 2, p. 55-64, 1989.

PUTNOKI, J. C. **Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso**. *Revista do Professor de Matemática, SBM - RJ*, n 13, p. 13-17, 2º sem/1988.

QUESADA, A. R. New mathematical findings by secondary students. **Universitas Scientiarum**, v. 6, n. 2, p. 1-6, jul.-dic., 2001.

SALGADO, Jacymar de Almeida. **Reflexões quanto à importância das construções geométricas no ensino da geometria plana**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática. Seropédica-RJ: UFRRJ, 2013.

SILVA, Alex Gomes da. **Construções geométricas com régua e compasso**. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática. Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2013.

SILVA, Jairo José da. **O que é e para que serve a matemática**. São Paulo: Editora Unesp Digital, 2022.

SOUZA, C. S.; PIMENTA, M. M. D.; ARNAUT, R. G. T. **Construções geométricas**. Vol. 1. 2 ed. Rio de Janeiro: CECIERJ, 2010.

WAGNER, Eduardo. **Divisão de um círculo em partes iguais**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, Nobel, 1975. Disponível em <https://rpm.org.br/cdrpm/17/4.htm>. Acesso em: 06 jul. 2024.

WAGNER, E. **Construções geométricas**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

WAGNER, E. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte: UFMG, 2001.

APÊNDICE A - CÁLCULO DO $\text{sen } 18^\circ$

Para mostrarmos que $\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ observe os dois triângulos isósceles abaixo de base 1 figura 5.1 e figura 5.2.

Do triângulo BCD , temos

$$\frac{n}{\text{sen } 36^\circ} = \frac{1}{\text{sen } 72^\circ} \quad (5.1)$$

Mas,

$$\text{sen}(2x) = 2 \cdot \text{sen } x \cos x \Rightarrow \text{sen } 72^\circ = \text{sen}(2 \cdot 36^\circ) = 2 \cdot \text{sen } 36^\circ \cos 36^\circ \quad (5.2)$$

Substituindo a equação (5.2) na equação (5.1) temos:

$$\frac{n}{\text{sen } 36^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen } 36^\circ \cos 36^\circ} \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{1}{2n} \quad (5.3)$$

Por semelhança

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow n^2 + n - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º obtemos:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2n = -1 + \sqrt{5} \quad (5.4)$$

Substituindo a equação (5.4) na equação (5.3) temos:

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

Por outro lado:

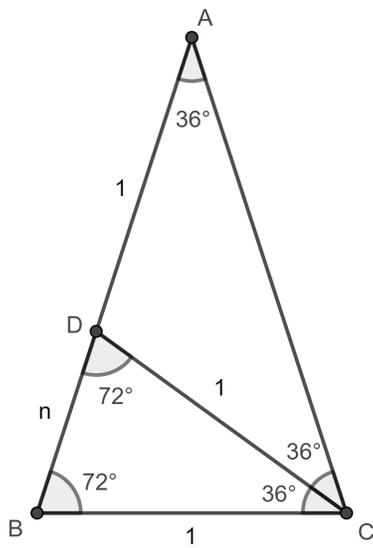
$$\cos 72^\circ = \cos(2 \cdot 36^\circ) = 2 \cdot \cos^2 36^\circ - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Pela propriedade que envolve senos e cossenos temos que:

$$\text{sen } 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

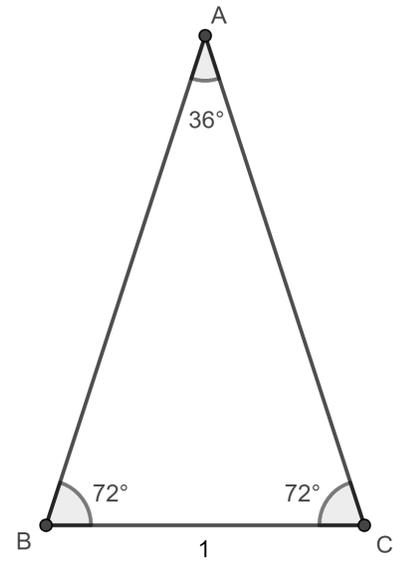
Como queríamos mostrar.

Figura 5.1 – Triângulo isósceles de base 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

Figura 5.2 – Triângulo isósceles de base 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

APÊNDICE B - CÁLCULO DO $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$

Definição 5.1. Um número real r é construtível se dado um segmento de reta de comprimento unitário, um segmento de reta de comprimento $|r|$ pode ser construído com compasso e régua sem escalas em um número finito de etapas. Equivalentemente r é construtível se houver uma expressão de forma fechada para r usando apenas inteiros e as operações para adição, subtração, multiplicação, divisão e raízes quadradas.

Veja no apêndice ?? as construções de segmentos de comprimentos $\frac{\sqrt{n}}{2}$, para $n = 1, \dots, 25$ ($n \in \mathbb{N}$).

Teorema 5.1. *O heptadecágono regular é construtível.*

Demonstração. Para provarmos que o heptadecágono regular é construtível teremos que mostrar que $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ é construtível. Seguiremos os passos da demonstração de Gauss, registrada em seu diário dada em (Nishiyama, 2013), sobre a construtibilidade do heptadecágono regular.

Seja $\theta = \frac{2\pi}{17}$ e fazendo as seguintes definições:

$$a = \cos(\theta) + \cos(4\theta)$$

$$b = \cos(2\theta) + \cos(8\theta)$$

$$c = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$$

$$d = \cos(6\theta) + \cos(7\theta)$$

$$e = a + b$$

$$f = c + d$$

Denotando por S_n a soma de a, b, c e d , temos que:

$$S_n = a + b + c + d = \sum_{k=1}^8 \cos(k \cdot \theta)$$

sendo assim:

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) S_n = \sum_{k=1}^8 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(k \cdot \theta)$$

Por outro lado:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha) \quad (5.5)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha) \quad (5.6)$$

Fazendo (5.5)+(5.6) obtemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \right]$$

Então:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) S_n &= \sum_{k=1}^8 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + k\theta\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} - k\theta\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^8 \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \theta\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1-2k}{2} \cdot \theta\right) \right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \dots + \operatorname{sen}\left(\frac{15\theta}{2}\right) - \\ &\quad \operatorname{sen}\left(\frac{13\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{17\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{15\theta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{17\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Como $17\theta = 2\pi$, temos que:

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) S_n = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \Rightarrow S_n = -\frac{1}{2}.$$

Sendo assim:

$$S_n = a + b + c + d = e + f = -\frac{1}{2}$$

Note que:

$$\cos(n\theta) = \cos((17-n)\theta)$$

E que:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

Fazendo os produtos $2ab$, $2ac$, $2ad$, $2bc$, $2bd$, e $2cd$ obtemos:

$$\begin{aligned}
2ab &= 2 \cdot (\cos(\theta) + \cos(4\theta)) \cdot (\cos(2\theta) + \cos(8\theta)) \\
&= 2 \cos(\theta) \cos(2\theta) + 2 \cos(\theta) \cos(8\theta) + 2 \cos(4\theta) \cos(2\theta) + 2 \cos(4\theta) \cos(8\theta) \\
&= \cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(2\theta) + \cos(6\theta) + \cos(4\theta) + \cos(12\theta)
\end{aligned}$$

Como $\cos(9\theta) = \cos((17 - 9)\theta) = \cos(8\theta)$ e $\cos(12\theta) = \cos((17 - 12)\theta) = \cos(5\theta)$, fazendo a substituição temos que:

$$\begin{aligned}
2ab &= (\cos(\theta) + \cos(4\theta)) + (\cos(2\theta) + \cos(8\theta)) + (\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) + (\cos(6\theta) + \cos(7\theta)) \\
&= a + b + c + d \\
&= e + f \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2ac &= 2 \cdot (\cos(\theta) + \cos(4\theta)) \cdot (\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) \\
&= 2 \cos(\theta) \cos(3\theta) + 2 \cos(\theta) \cos(5\theta) + 2 \cos(4\theta) \cos(3\theta) + 2 \cos(4\theta) \cos(5\theta) \\
&= \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + \cos(\theta) + \cos(7\theta) + \cos(\theta) + \cos(9\theta)
\end{aligned}$$

Como $\cos(9\theta) = \cos((17 - 9)\theta) = \cos(8\theta)$, fazendo a substituição temos que:

$$\begin{aligned}
2ac &= 2(\cos(\theta) + \cos(4\theta)) + (\cos(2\theta) + \cos(8\theta)) + (\cos(6\theta) + \cos(7\theta)) \\
&= 2a + b + d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2ad &= 2 \cdot (\cos(\theta) + \cos(4\theta)) \cdot (\cos(6\theta) + \cos(7\theta)) \\
&= 2 \cos(\theta) \cos(6\theta) + 2 \cos(\theta) \cos(7\theta) + 2 \cos(4\theta) \cos(6\theta) + 2 \cos(4\theta) \cos(7\theta) \\
&= \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(6\theta) + \cos(8\theta) + \cos(2\theta) + \cos(10\theta) + \cos(3\theta) + \cos(11\theta)
\end{aligned}$$

Como $\cos(10\theta) = \cos((17 - 10)\theta) = \cos(7\theta)$ e $\cos(11\theta) = \cos((17 - 11)\theta) = \cos(6\theta)$, fazendo a substituição temos que:

$$\begin{aligned} 2ad &= (\cos(2\theta) + \cos(8\theta)) + (\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) + 2(\cos(6\theta) + \cos(7\theta)) \\ &= b + c + 2d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2bc &= 2 \cdot (\cos(2\theta) + \cos(8\theta)) \cdot (\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) \\ &= 2 \cos(2\theta) \cos(3\theta) + 2 \cos(2\theta) \cos(5\theta) + 2 \cos(8\theta) \cos(3\theta) + 2 \cos(8\theta) \cos(5\theta) \\ &= \cos(\theta) + \cos(5\theta) + \cos(3\theta) + \cos(7\theta) + \cos(5\theta) + \cos(11\theta) + \cos(3\theta) + \cos(13\theta) \end{aligned}$$

Como $\cos(11\theta) = \cos((17 - 11)\theta) = \cos(6\theta)$ e $\cos(13\theta) = \cos((17 - 13)\theta) = \cos(4\theta)$, fazendo a substituição temos que:

$$\begin{aligned} 2bc &= (\cos(\theta) + \cos(4\theta)) + 2(\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) + (\cos(6\theta) + \cos(7\theta)) \\ &= b + 2c + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2bd &= 2 \cdot (\cos(2\theta) + \cos(8\theta)) \cdot (\cos(6\theta) + \cos(7\theta)) \\ &= 2 \cos(2\theta) \cos(6\theta) + 2 \cos(2\theta) \cos(7\theta) + 2 \cos(8\theta) \cos(6\theta) + 2 \cos(8\theta) \cos(7\theta) \\ &= \cos(4\theta) + \cos(8\theta) + \cos(5\theta) + \cos(9\theta) + \cos(2\theta) + \cos(14\theta) + \cos(\theta) + \cos(15\theta) \end{aligned}$$

Como $\cos(9\theta) = \cos((17 - 9)\theta) = \cos(8\theta)$, $\cos(14\theta) = \cos((17 - 14)\theta) = \cos(3\theta)$ e $\cos(15\theta) = \cos((17 - 15)\theta) = \cos(2\theta)$, fazendo a substituição temos que:

$$\begin{aligned} 2bd &= (\cos(\theta) + \cos(4\theta)) + 2(\cos(2\theta) + \cos(8\theta)) + (\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) \\ &= a + 2b + c \end{aligned}$$

Por fim:

$$\begin{aligned} 2cd &= 2 \cdot (\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) \cdot (\cos(6\theta) + \cos(7\theta)) \\ &= 2 \cos(3\theta) \cos(6\theta) + 2 \cos(3\theta) \cos(7\theta) + 2 \cos(5\theta) \cos(6\theta) + 2 \cos(5\theta) \cos(7\theta) \\ &= \cos(3\theta) + \cos(9\theta) + \cos(4\theta) + \cos(10\theta) + \cos(\theta) + \cos(11\theta) + \cos(2\theta) + \cos(12\theta) \end{aligned}$$

Como $\cos(9\theta) = \cos((17 - 9)\theta) = \cos(8\theta)$, $\cos(10\theta) = \cos((17 - 10)\theta) = \cos(7\theta)$, $\cos(11\theta) = \cos((17 - 11)\theta) = \cos(6\theta)$ e $\cos(12\theta) = \cos((17 - 12)\theta) = \cos(5\theta)$, fazendo a substituição temos que:

$$\begin{aligned} 2cd &= \cos(3\theta) + \cos(8\theta) + \cos(4\theta) + \cos(7\theta) + \cos(\theta) + \cos(6\theta) + \cos(2\theta) + \cos(5\theta) \\ &= e + f \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A partir disso, vemos que:

$$\begin{aligned} 2ac + 2ad + 2bc + 2bd &= (2a + b + d) + (b + c + 2d) + (a + 2c + d) + (a + 2b + c) \\ &= 4a + 4b + 4c + 4d \\ &= 4(a + b + c + d) \\ &= 4(e + f) \\ &= 4\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 2ac + 2ad + 2bc + 2bd &= 2(ac + ad + bc + bd) \\ &= 2(a + b)(c + d) \\ &= 2ef \end{aligned}$$

Logo:

$$2ef = -2 \Rightarrow ef = -1$$

Sejam α e β raízes da seguinte equação, $x^2 - sx + p = 0$, onde $s = \alpha + \beta$ e $p = \alpha \cdot \beta$, então:

$$\alpha = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \text{ e } \beta = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

ver (Lima, 2023).

Seendo $e + f = -\frac{1}{2}$ e $ef = -1$, portanto, e e f são raízes da seguinte equação:

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

Logo:

$$\begin{aligned} e &= \frac{-\frac{1}{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right)^2 - (-1)} & f &= \frac{-\frac{1}{2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right)^2 - (-1)} \\ &= -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 1} & &= -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} + 1} \\ &= -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}} & &= -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}} \end{aligned}$$

Por outro lado $a + b = e$ e $ab = -\frac{1}{4}$, portanto, a e b são raízes da seguinte equação:

$$x^2 - ex - \frac{1}{4} = 0$$

Logo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{e}{2} + \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e^2 + 1}{4}} \\ &= \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{e^2 + 1}}{2} \end{aligned}$$

Sabemos que $e = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}}$, portanto:

$$\begin{aligned}
 e^2 + 1 &= \left(-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}} \right)^2 + 1 \\
 &= \frac{1}{16} - \frac{2}{4} \sqrt{\frac{17}{16}} + \frac{17}{16} + \frac{16}{16} \\
 &= \frac{34}{16} - \frac{2\sqrt{17}}{16}
 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}} \right) + \frac{\sqrt{\frac{34}{16} - \frac{2\sqrt{17}}{16}}}{2} & b &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}
 \end{aligned}$$

Temos também $c + d = f = -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}$ e $cd = -\frac{1}{4}$, portanto c e d são raízes da equação:

$$x^2 + \left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}} \right) x - \frac{1}{4} = 0$$

Daí:

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{-\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}}{2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \\
 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} + \sqrt{\frac{\frac{1}{16} + \frac{2}{4}\sqrt{\frac{17}{16}} + \frac{17}{16}}{4} + \frac{1}{4}} \\
 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} + \sqrt{\frac{\frac{18}{16} + \frac{2\sqrt{17}}{16} + \frac{16}{16}}{4} + \frac{16}{4}} \\
 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} + \sqrt{\frac{34 + 2\sqrt{17}}{64}} \\
 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}
 \end{aligned}$$

e

$$d = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

Por definição $\cos(\theta) + \cos(4\theta) = a$, por outro lado $\cos(\theta)\cos(4\theta) = \frac{1}{2}(\cos(3\theta) + \cos(5\theta)) = \frac{1}{2}c$. Portanto $\cos(\theta)$ e $\cos(4\theta)$ são raízes da seguinte equação:

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}c = 0$$

Então:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}c} \\ &= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}c} \\ &= \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2c}\end{aligned}$$

Como $a = \cos(\theta) + \cos(4\theta)$, então:

$$\begin{aligned}a^2 &= (\cos(\theta) + \cos(4\theta))^2 \\ &= \cos^2(\theta) + \cos^2(4\theta) + 2\cos(\theta)\cos(4\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(0) + \cos 2\theta) + \frac{1}{2}(\cos(0) + \cos 8\theta) + 2 \cdot \frac{1}{2}c \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8\theta) + c \\ &= 1 + \frac{\cos(2\theta) + \cos(8\theta)}{2} + c \\ &= 1 + \frac{b}{2} + c\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{b}{2} + c - 2c} \\
&= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+b-2c}{2}} \\
&= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+2b-4c}{4}} \\
&= \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\sqrt{4+2b-4c}
\end{aligned}$$

Como $\theta = \frac{2\pi}{17}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) + \\
&\quad \frac{1}{4}\sqrt{4+2\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) - 4\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)} \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\sqrt{17} - \frac{2}{4}\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{17}{4} + \frac{3\sqrt{17}}{4} - \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4} - \frac{2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}} \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que o $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ é construtível, como queríamos mostrar.

□

APÊNDICE C - MÉTODO DE RINALDINI: EXATIDÃO APENAS EM DIVISÕES ESPECÍFICAS (3, 4 e 6)

Suponha que

$$\cos \frac{2\pi}{n} = (n-4) \frac{3n + \sqrt{n^2 + 16(n-2)}}{3n^2 + (n-4)^2}. \quad (5.7)$$

Note que $\frac{2\pi}{n}$ é um ângulo racional. Se $\cos \frac{2\pi}{n}$ é racional, então

$$\cos \frac{2\pi}{n} \in \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\}.$$

Aqui são captados os casos em que $n = 3, 4, 6$.

Se $\cos \frac{2\pi}{n}$ é irracional, então, por (5.7), é um irracional quadrático. Sabe-se que, dentre os irracionais desse tipo, somente $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$ pode ser valores do cosseno de um ângulo racional. Verificando os valores de $\alpha \in [0, 2\pi]$ tais que $\cos \alpha$ é igual a um desses irracionais, obtemos o seguinte:

α	$\cos \alpha$	$\alpha = \frac{2\pi}{n}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$n = 8$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$n = 12$
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$n \notin \mathbb{N}$
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$n \notin \mathbb{N}$
36°	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$	$n = 10$
72°	$-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$	$n = 5$
108°	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$	$n \notin \mathbb{N}$
144°	$-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$	$n \notin \mathbb{N}$

Em cada um dos casos acima em que captamos números naturais, calculamos o $p(n)$ correspondente, em que $p(n)$ é dado pelo lado direito de (5.7). Em nenhum caso, contudo, verifica-se a igualdade $\cos \frac{2\pi}{n} = p(n)$, que é nossa hipótese.

APÊNDICE D - MÉTODO BARDIN: EXATIDÃO RESTRITA À DIVISÃO POR 6

Justificativa de que 6 é solução única.

Dada a equação

$$PQ = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 8n + 48 - (n - 6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}} \quad (5.8)$$

onde PQ é o lado exato ou aproximado do polígono regular inscrito dependendo do valor de n .

Como a circunferência tem raio 1 temos que:

$$PQ = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 8n + 48 - (n - 6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}}$$

Sendo assim

$$2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} = \frac{n^2 - 8n + 48 - (n - 6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}}{n^2}$$

ou seja

$$\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{(8 + \sqrt{n^2 - 4n - 4})n - (8 + \sqrt{n^2 - 4n - 4})6 + n^2}{2n^2}$$

Para $n = 3$ e $n = 4$ o radical $\sqrt{n^2 - 4n - 4}$ torna-se imaginário.

APÊNDICE E - CONSTRUIR $\frac{\sqrt{n}}{2}$ VEZES UM SEGMENTO DE RETA

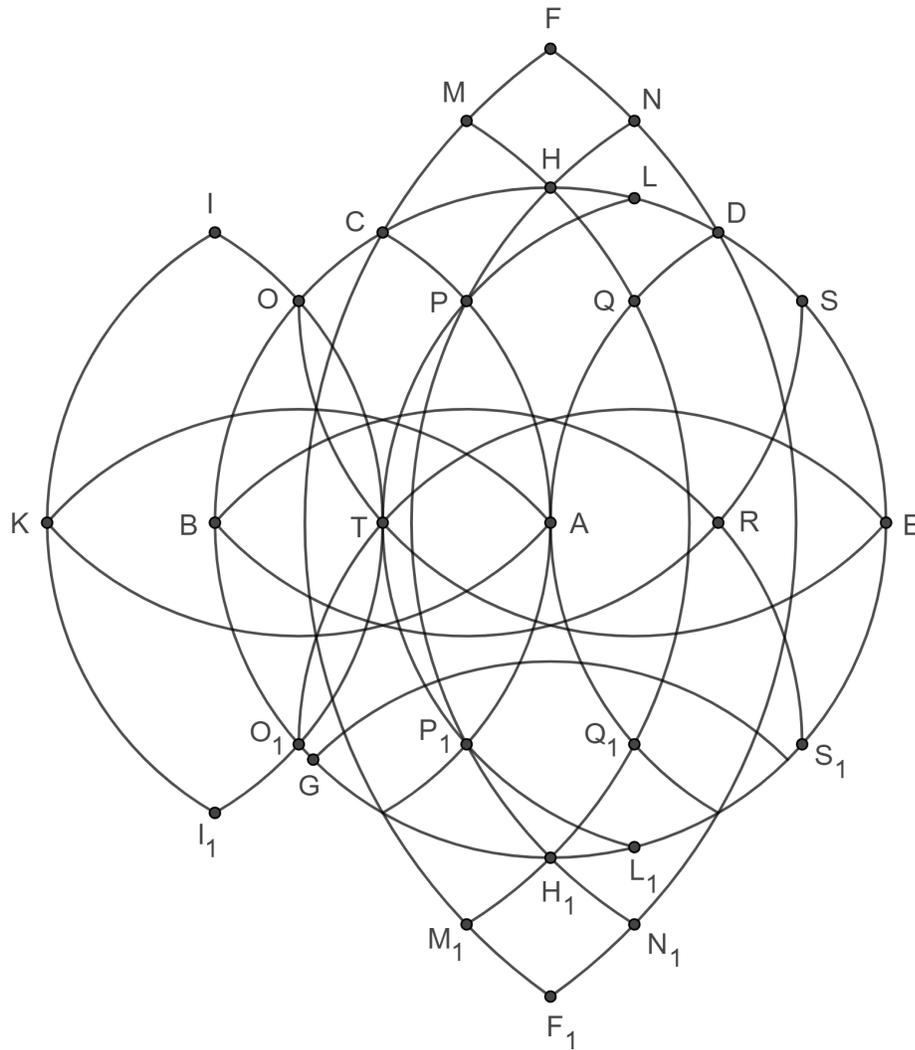
Considerando $n = 1, \dots, 25$ ($n \in \mathbb{N}$), vamos traçar um segmento de reta \overline{AB} de $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{n}$.

Seja o segmento de reta \overline{AB} de comprimento unitário.

Passos para a construção

1. construa uma circunferência de centro A e raio \overline{AB} ;
2. Com a ponta seca do compasso em B e abertura \overline{AB} , trace um arco de circunferência cortando a circunferência de raio \overline{AB} em C ;
3. Com mesma abertura e ponta seca compasso em C , trace um arco de circunferência cortando a circunferência de raio \overline{AB} em D ;
4. Mantendo a mesma abertura, agora com a ponta seca compasso em D , trace um arco de circunferência cortando a circunferência de raio \overline{AB} em E ;
5. Com a ponta seca do compasso B e abertura \overline{BD} , trace um arco de circunferência;
6. Com a ponta seca do compasso E e abertura \overline{EC} , trace outro arco de circunferência intersectando a circunferência de centro B e raio \overline{BD} em dois pontos F e F_1 ;
7. Com a ponta seca do compasso em B e abertura \overline{AF} , trace um arco de circunferência, cortando a circunferência de raio \overline{AB} nos pontos H e H_1 e a circunferência de raio \overline{EC} nos pontos M e M_1 ;
8. Com a ponta seca do compasso em E e abertura \overline{AF} , trace um arco de circunferência, cortando a circunferência de raio \overline{AB} nos pontos H e H_1 e a circunferência de raio \overline{BD} nos pontos N e N_1 ;
9. Com a ponta seca do compasso em E e abertura \overline{EA} , trace um arco de circunferência, cortando a circunferência de centro B e raio \overline{AF} nos pontos Q e Q_1 ;
10. Com a ponta seca do compasso em B e abertura \overline{BA} , trace um arco de circunferência, cortando a circunferência de centro E e raio \overline{AF} nos pontos P e P_1 ;
11. Com a ponta seca do compasso em P e raio \overline{PB} , trace um arco de circunferência cortando a circunferência de centro A e raio \overline{AB} em S ;

12. Com a ponta seca do compasso em P_1 e raio $\overline{P_1B}$, trace um arco de circunferência cortando a circunferência de centro P e raio \overline{PB} em R e cortando a circunferência de centro A e raio \overline{AB} em S_1 ;
13. Com a ponta seca do compasso em Q e raio \overline{QE} , trace um arco de circunferência cortando a circunferência de centro A e raio \overline{AB} em O ;
14. Com a ponta seca do compasso em Q_1 e raio $\overline{Q_1E}$, trace um arco de circunferência cortando a circunferência de centro Q e raio \overline{QE} em T e cortando a circunferência de centro A e raio \overline{AB} em O_1 ;
15. Com a ponta seca do compasso em R e raio \overline{AB} , trace um arco de circunferência cortando a circunferência de centro A e raio \overline{AB} em L e L_1 ;
16. Com a ponta seca do compasso em F_1 e raio \overline{AB} , trace um arco de circunferência cortando a circunferência de centro A e raio \overline{AB} em G ;
17. Trace dois arcos de circunferência um com centro O e raio \overline{OA} e outro com centro em O_1 e raio $\overline{O_1A}$ que se intersectam no ponto K ;
18. Por fim, trace dois arcos de circunferência um com centro K e raio \overline{AB} e outro com centro em T e raio \overline{AB} que se intersectam nos pontos I e I_1 ;

Figura 5.3 – Comprimentos $\frac{\sqrt{n}}{2}$ 

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025

$$\overline{AT} = \frac{1}{2}\sqrt{1},$$

$$\overline{PT} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\overline{DR} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{4},$$

$$\overline{HT} = \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\sqrt{6},$$

$$\overline{QQ_1} = \frac{1}{2}\sqrt{7},$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\sqrt{8},$$

$$\overline{BR} = \frac{1}{2}\sqrt{9},$$

$$\overline{BL} = \frac{1}{2}\sqrt{10},$$

$$\overline{PS_1} = \frac{1}{2}\sqrt{11},$$

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}\sqrt{12},$$

$$\overline{HK} = \frac{1}{2}\sqrt{13},$$

$$\overline{BS} = \frac{1}{2}\sqrt{14},$$

$$\overline{LL_1} = \frac{1}{2}\sqrt{15},$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}\sqrt{16},$$

$$\overline{FK} = \frac{1}{2}\sqrt{17},$$

$$\overline{KN} = \frac{1}{2}\sqrt{18},$$

$$\overline{KD} = \frac{1}{2}\sqrt{19},$$

$$\overline{FG} = \frac{1}{2}\sqrt{20},$$

$$\overline{I_1D} = \frac{1}{2}\sqrt{21},$$

$$\overline{KS} = \frac{1}{2}\sqrt{22},$$

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{2}\sqrt{23},$$

$$\overline{MN_1} = \frac{1}{2}\sqrt{24},$$

$$\overline{KE} = \frac{1}{2}\sqrt{25} = \frac{1}{2}\sqrt{25} \cdot \overline{AB}$$

A construção recém-apresentada conforme detalhado no blog (akillitahtalematematik, 2013) justifica-se como segue:

De início temos:

$$\overline{AB} = 1 = \frac{1}{2}\sqrt{4} \quad \text{e} \quad \overline{BE} = 2 = \frac{1}{2}\sqrt{16}$$

No triângulo BCD ângulo $\widehat{BCD} = 120^\circ$, utilizando a lei dos cossenos encontramos o comprimento BD .

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 3 \\ BD &= \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{12} \end{aligned}$$

Para encontrarmos o comprimento de AF , perceba que $BF = EF = BD = EC = \sqrt{3}$ e que o triângulo ABF é retângulo em A , logo por Pitágoras temos que:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AF^2 \\ \sqrt{3}^2 &= 1 + AF^2 \\ AF^2 &= 2 \\ AF &= \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{8} \end{aligned}$$

O segmento MN e M_1N_1 são paralelos e possuem mesmo comprimento, assim como os segmentos MM_1 e NN_1 por construção.

Utilizando a lei dos cossenos no triângulo BEM encontramos o cosseno do ângulo $E\widehat{B}M$, veja:

$$\begin{aligned} EM^2 = EC^2 &= BE^2 + BM^2 - 2 \cdot BE \cdot BM \cdot \cos E\widehat{B}M \\ \sqrt{3}^2 &= 2^2 + \sqrt{2}^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos E\widehat{B}M \\ 3 &= 6 - 4\sqrt{2} \cdot \cos E\widehat{B}M \\ 4\sqrt{2} \cdot \cos E\widehat{B}M &= 3 \\ \cos E\widehat{B}M &= \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

Pela relação fundamental da trigonometria temos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 E\widehat{B}M + \operatorname{cos}^2 E\widehat{B}M &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 E\widehat{B}M &= 1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{18}{64} \\ &= \frac{23}{32} \\ \operatorname{sen} E\widehat{B}M &= \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Seja M_2 o ponto de intersecção dos segmentos BE com M_1M_2 , logo o ponto M_2 é ponto médio do segmento MM_1 pois o triângulo MBM_1 é isósceles de base MM_1 e BM_2 é mediatriz do segmento MM_1 , sendo assim o triângulo MBM_2 é retângulo em M_2 .

Portanto

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} M\widehat{B}M_2 &= \frac{MM_2}{BM} \\ MM_2 &= \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{23}}{4}\end{aligned}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned}MM_1 &= 2 \cdot MM_2 \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{23}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{23}\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\operatorname{cos} M\widehat{B}M_2 &= \frac{BM_2}{BM} \\ BM_2 &= \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Como $AB = 1$, $AM_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. O quadrilátero MM_1N_1N é um retângulo, pelas propriedades do retângulo, o ponto de encontro das diagonais é o ponto médio de cada uma, sendo assim $MN_1 = 2MA$.

Aplicando Pitágoras no triângulo AMM_2 encontramos a medida MA , veja:

$$\begin{aligned} MA^2 &= MM_2^2 + AM_2^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{23}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{24}{16} \\ MA &= \frac{\sqrt{24}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{aligned}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} MN_1 &= 2 \cdot MA \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{24}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{24} \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo que M_2 é ponto médio do segmento MM_1 , N_2 é ponto médio do segmento NN_1 , logo $BM_2 = EN_2$, pois os triângulos BMM_2 e ENN_2 são congruentes caso (LLL), por Pitágoras temos que:

$$\begin{aligned} EQ^2 &= EN_2^2 + QN_2^2 \\ 1 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + QN_2^2 \\ QN_2^2 &= 1 - \frac{9}{16} \\ &= \frac{7}{16} \\ QN_2 &= \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

Como N_2 é ponto médio do segmento QQ_1 , logo:

$$\begin{aligned}
 QQ_1 &= 2 \cdot QN_2 \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

O quadrilátero $BPRP_1$ é um losango, pelas propriedades dos losango suas diagonais se cruzam nos seus pontos médios perpendicularmente, logo:

$$\begin{aligned}
 BR &= 2 \cdot BM_2 \\
 &= 2 \cdot \frac{3}{4} \\
 &= \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9}
 \end{aligned}$$

O triângulo ADE é equilátero de lado 1, como R é ponto médio é ponto médio de AE , logo DR é sua altura, ou seja $AE \perp DR$, portanto:

$$\begin{aligned}
 \text{sen } D\hat{E}R &= \frac{DR}{DE} \\
 \text{sen } 60^\circ &= \frac{DR}{1} \\
 DR &= \frac{1}{2}\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

De modo análogo ao que fizemos para encontrar o comprimento do segmento BR , temos que:

$$\begin{aligned}
 ET &= 2 \cdot EN_2 \\
 &= 2 \cdot \frac{3}{4} \\
 &= \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9}
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 AT &= AB - ET \\
 &= 2 - \frac{3}{2} \\
 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}
 \end{aligned}$$

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo HAT temos que:

$$\begin{aligned}
 HT^2 &= AH^2 + AT^2 \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= 1 + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{5}{4} \\
 HT &= \frac{1}{2}\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo BPM_2 . temos que:

$$\begin{aligned}
 BP^2 &= BM_2^2 + PM_2^2 \\
 1 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + PM_2^2 \\
 PM_2^2 &= 1 - \frac{9}{16} \\
 &= \frac{7}{16} \\
 PM_2 &= \frac{\sqrt{7}}{4}
 \end{aligned}$$

Agora no triângulo retângulo PTM_2 , temos que $TM_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, então:

$$\begin{aligned}
PT^2 &= TM_2^2 + PM_2^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{7}{16} \\
&= 1 - \frac{9}{16} \\
&= \frac{1}{16} + \frac{7}{16} \\
&= \frac{1}{2} \\
PT &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

No triângulo retângulo ALN_2 , temos que $AN_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, então:

$$\begin{aligned}
AL^2 &= AN_2^2 + LN_2^2 \\
1 &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + LN_2^2 \\
LN_2^2 &= 1 - \frac{1}{16} \\
&= \frac{15}{16} \\
LN_2 &= \frac{\sqrt{15}}{4}
\end{aligned}$$

Agora no triângulo retângulo BLN_2 , temos que:

$$\begin{aligned}
BL^2 &= BN_2^2 + LN_2^2 \\
&= \left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{15}{16}\right) \\
&= \frac{25}{16} + \frac{15}{16} \\
&= \frac{40}{16} = \frac{10}{4} \\
BL &= \frac{1}{2}\sqrt{10}
\end{aligned}$$

Sendo N_2 ponto médio do segmento LL_1 , logo:

$$\begin{aligned}
 LL_1 &= 2 \cdot LN_2 \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{15}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo AFK , temos que:

$$\begin{aligned}
 FK^2 &= AF^2 + AK^2 \\
 &= (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\
 &= 2 + \frac{9}{4} \\
 &= \frac{17}{4} \\
 FK &= \frac{1}{2}\sqrt{17}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo KNN_2 , temos que:

$$\begin{aligned}
 KN^2 &= KN_2^2 + NN_2^2 \\
 &= \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2 \\
 &= \frac{49}{16} + \frac{23}{16} \\
 &= \frac{72}{16} = \frac{18}{4} \\
 KN &= \frac{1}{2}\sqrt{18}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo KDR , temos que:

$$\begin{aligned}
 KD^2 &= KR^2 + DR^2 \\
 &= 2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
 &= 4 + \frac{3}{4} \\
 &= \frac{19}{4} \\
 KD &= \frac{1}{2}\sqrt{19}
 \end{aligned}$$

Perceba que O_2 é ponto médio do segmento BT , e que os quadriláteros $BOTO_1$ e $ESRS_1$ são losangos congruentes, logo S_2 é ponto médio do segmento SS_1 .

No triângulo retângulo ASS_2 , temos que:

$$\begin{aligned}
 AS^2 &= AS_2^2 + SS_2^2 \\
 1 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + SS_2^2 \\
 SS_2^2 &= 1 - \frac{9}{16} \\
 &= \frac{7}{16} \\
 SS_2 &= \frac{\sqrt{7}}{4}
 \end{aligned}$$

Agora no triângulo retângulo ESS_2 , temos que:

$$\begin{aligned}
 SE^2 &= SS_2^2 + ES_2^2 \\
 &= \left(\frac{7}{16}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
 &= \frac{7}{16} + \frac{1}{16} \\
 &= \frac{1}{2} \\
 SE &= \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo BSE , temos que:

$$\begin{aligned}
 BE^2 &= BS^2 + SE^2 \\
 2^2 &= BS^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
 BS^2 &= 4 - \frac{2}{4} \\
 &= \frac{14}{4} \\
 BS &= \frac{1}{2}\sqrt{14}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo PSS_1 , temos que:

$$\begin{aligned}
 PS_1^2 &= PS^2 + SS_1^2 \\
 &= 1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \\
 &= 1 + \frac{7}{4} \\
 &= \frac{11}{4} \\
 PS_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{11}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo AHK , temos que:

$$\begin{aligned}
 HK^2 &= AH^2 + AK^2 \\
 &= 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
 &= 1 + \frac{9}{4} \\
 &= \frac{13}{4} \\
 HK &= \frac{1}{2}\sqrt{13}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo KSS_2 , temos que:

$$\begin{aligned}
 KS^2 &= KS_2^2 + SS_2^2 \\
 &= \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{16}\right) \\
 &= \frac{81}{16} + \frac{7}{16} \\
 &= \frac{88}{16} = \frac{22}{4} \\
 KS &= \frac{1}{2}\sqrt{22}
 \end{aligned}$$

O triângulo IKT é equilátero de lado 1 e B é ponto médio do lado KT , logo $IB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por outro lado o quadrilátero IKI_1T é um losango, logo:

$$\begin{aligned}
 II_1 &= 2 \cdot IB \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

No triângulo retângulo DII_1 , temos que:

$$\begin{aligned}
 I_1D^2 &= ID^2 + II_1^2 \\
 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \sqrt{3}^2 \\
 &= \frac{9}{4} + 3 \\
 &= \frac{21}{4} \\
 I_1D &= \frac{1}{2}\sqrt{21}
 \end{aligned}$$

O quadrilátero AGF_1G_1 é um quadrado de lado 1, sendo assim G_2 ponto médio dos segmentos GG_1 e AF_1 , como $GG_1 = AF_1 = \sqrt{2}$, temos que $GG_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo FGG_2 , temos que:

$$\begin{aligned}FG^2 &= GG_2^2 + FG_2^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2}{4} + \frac{18}{4} \\ &= \frac{20}{4} \\ FG &= \frac{1}{2}\sqrt{20}\end{aligned}$$

Por fim calculemos a medida do segmento KE :

$$\begin{aligned}KE &= BE + BK \\ &= 2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{25} = \frac{1}{2}\sqrt{25}AB\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.