UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JOSÉ GENILSON DA COSTA

O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MEDIADO PELA PLATAFORMA GEOGEBRA

CAMPINA GRANDE
2025

JOSÉ GENILSON DA COSTA

O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MEDIADO PELA PLATAFORMA GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação de Professores em Ensino de C.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE
2025

C837p Costa, José Genilson da.

O processo de ensino-aprendizagem das Relações Métricas no triângulo retângulo através da resolução de problemas e mediado pela plataforma GeoGebra [manuscrito] / José Genilson da Costa. - 2025.

132 f. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, CREDENCIADO".

1. Ensino em matemática. 2. Geometria. 3. Tecnologias Digitais. 4. Relações Métricas. 5. GeoGebra. I. Título

21. ed. CDD 327.7

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

JOSÉ GENILSON DA COSTA

O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MEDIADO PELA PLATAFORMA GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de C.

Aprovada em: 10/07/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Roger Ruben Huaman Huanca** (***.567.928-**), em **26/08/2025 18:07:36** com chave **b11a0a0e82c011f0a4a32618257239a1**.
- **Helber Rangel Formiga Leite de Almeida** (***.552.404-**), em **27/08/2025 15:25:47** com chave **4078df74837311f091101a7cc27eb1f9**.
- **Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz** (***.928.434-**), em **26/08/2025 18:19:41** com chave **616e9cf282c211f0a52e06adb0a3afce**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final
Data da Emissão: 01/09/2025
Código de Autenticação: 075875

Ao Genilson do passado, esta conquista não teria sido possível sem a sua perseverança, determinação e visão de futuro, por tudo, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e pelos livramentos concedidos nas idas até Campina Grande, permitindo-me chegar até aqui com saúde e perseverança.

À minha família, em especial à minha esposa Débora Costa e à minha filha, Eliza Hipátia, que foram meu alicerce ao longo dessa jornada, compreendendo e apoiando cada etapa desse percurso. À minha mãe, que sempre lutou e acreditou no meu potencial, sendo fonte de força e inspiração, e aos meus irmãos e irmãs, pelo apoio incondicional e incentivo constantes.

Ao professor Roger, cuja dedicação à pesquisa me fez enxergar caminhos que, sozinho, talvez não fosse possível percorrer. Sua orientação, palavras de ensinamento e motivação foram fundamentais para minha trajetória acadêmica.

À banca examinadora, pelo tempo dedicado à leitura e avaliação deste trabalho, contribuindo com sugestões valiosas para o seu aprimoramento.

Ao professor Helber Rangel Formiga Leite de Almeida, que representou meu primeiro contato com o mestrado. Suas aulas sempre foram de grande importância e despertaram em mim a vontade de seguir na pesquisa. Ao professor Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz, que sempre foi uma referência, tanto como professor quanto como ser humano. Desde a graduação, ele me incentivou a buscar o mestrado e foi responsável por grande parte do conhecimento que adquiri sobre o GeoGebra.

Ao meu grande amigo ao longo de todo o curso, Elieudo Nogueira, cuja humildade e dedicação ao trabalho tornaram nossa jornada mais leve. Compartilhamos desafios, angústias e vitórias, e sou grato por essa parceria.

À Patrícia Edióne, que sempre esteve presente ao longo do mestrado, incentivando-me em todas as disciplinas que cursamos juntos. Sua determinação e empenho foram uma fonte de inspiração para mim.

À Universidade Estadual da Paraíba, pela oportunidade de cursar o mestrado e a todos os professores do programa, cujo compromisso com o ensino e a pesquisa contribuiu significativamente para minha formação.

À Escola Estadual João Ferreira de Souza, pela acolhida e pela oportunidade de realizar minha pesquisa em seu espaço, possibilitando a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo aqui a minha mais sincera gratidão.

“O professor sempre deve ter em mente que existe no mínimo um aluno que acredita nele e espera o seu melhor e o aluno sempre ter em mente que existe no mínimo um professor que acredita nele e espera o seu melhor” (Genilson Costa)

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo geral verificar as contribuições da Plataforma GeoGebra, aliada à metodologia de Resolução de Problemas, no processo de ensino-aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. A motivação para a pesquisa surgiu da necessidade de explorar uma proposta pedagógica inovadora para o ensino desse conteúdo, integrando tecnologias digitais e estratégias de ensino que promovam a compreensão significativa dos conceitos matemáticos. O referencial teórico está ancorado no campo da Resolução de Problemas, com destaque para o uso de Tecnologias Digitais, em especial a Plataforma GeoGebra, como recurso de apoio ao ensino. A pesquisa, de natureza qualitativa, foi orientada pela perspectiva metodológica de Bogdan e Biklen, entre outros, e desenvolvida com dez estudantes do nono ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual João Ferreira de Souza, localizada em Santa Cruz/RN. A metodologia adotada consistiu na implementação de um conjunto de atividades totalizando vinte horas-aula, distribuidas em encontros de quatro horas cada, nos quais foram propostas atividades que integraram a Resolução de Problemas e o uso da Plataforma GeoGebra. Considerando a análise dos dados coletados elaboramos um instrumento para categorizar as respostas dos alunos. Os resultados indicam que a utilização dessa plataforma através da metodologia de Resolução de Problemas, despertou interesse e entusiasmo nos alunos, embora o primeiro contato com a ferramenta tenha gerado dúvidas sobre seu uso e aplicabilidade. A interação entre os conhecimentos prévios dos estudantes e as funcionalidades interativas da Plataforma GeoGebra proporcionou momentos de aprendizagem envolventes, facilitando a aplicação prática e a consolidação do conteúdo das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Conclui-se que a integração dessas estratégias reforça a importância da Resolução de Problemas no processo ensino e aprendizagem, destacando o potencial das tecnologias digitais para o ensino da matemática.

Palavras-Chave: matemática; geometria; tecnologias digitais; relações métricas.

ABSTRACT

The general objective of this dissertation is to verify the contributions of the GeoGebra Platform, combined with the Problem Solving methodology, in the teaching-learning process of Metric Relations in the Right Triangle. The motivation for the research arose from the need to explore an innovative pedagogical proposal for the teaching of this content, integrating digital technologies and teaching strategies that promote the meaningful understanding of mathematical concepts. The theoretical framework is anchored in the field of Problem Solving, with emphasis on the use of Digital Technologies, especially the GeoGebra Platform, as a teaching support resource. The research, of a qualitative nature, was guided by the methodological perspective of Bogdan and Biklen, among others, and developed with ten students of the ninth grade of Elementary School at the João Ferreira de Souza State School, located in Santa Cruz/RN. The methodology adopted consisted of the implementation of a set of activities totaling twenty class hours, distributed in meetings of four hours each, in which activities were proposed that integrated Problem Solving and the use of the GeoGebra Platform. Considering the analysis of the collected data, we developed an instrument to categorize the students' responses. The results indicate that the use of this platform through the Problem Solving methodology aroused interest and enthusiasm in the students, although the first contact with the tool generated doubts about its use and applicability. The interaction between the students' previous knowledge and the interactive functionalities of the GeoGebra Platform provided engaging learning moments, facilitating the practical application and consolidation of the content of the Metric Relations in the Right Triangle. It is concluded that the integration of these strategies reinforces the importance of Problem Solving in the teaching and learning process, highlighting the potential of digital technologies for the teaching of mathematics.

Keywords: mathematics; geometry; digital technologies; metric relationships.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EDUCOM	Educomunicativa
EF	Ensino Fundamental
PISA	Programme for International Student Assessment
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
STEM	Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática
TD	Tecnologias Digitais
TI	Tecnologia da Informação

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente em diversas situações do cotidiano, sendo essencial estabelecer conexões entre a teoria e a prática para tornar seu ensino mais significativo. A sociedade busca, por meio dessa ciência, compreender e explicar fenômenos do mundo real, o que reforça a necessidade de metodologias que favoreçam essa relação. Diferentemente de outras disciplinas, a matemática, muitas vezes, se desenvolve em um ambiente abstrato, permitindo múltiplas interpretações e abordagens. Diante das constantes transformações da realidade, é fundamental adotar estratégias inovadoras no ensino, promovendo uma aprendizagem mais próxima da vivência dos estudantes (Silveira, 2023).

Nesse contexto, a geometria plana desempenha um papel fundamental no ensino da matemática, pois permite que os estudantes compreendam e interpretem o espaço ao seu redor. No dia a dia, encontramos aplicações desse ramo da matemática em construções, design, navegação e até na arte. Estabelecer conexões entre os conceitos geométricos e situações reais enriquece o processo de aprendizagem, permitindo que os alunos desenvolvam um raciocínio lógico e visual mais apurado. Assim como em outras áreas da matemática, a geometria plana se apoia em abstrações, mas sua aplicação prática pode ser explorada por meio de metodologias dinâmicas, como o uso de tecnologias e atividades interativas.

Dessa forma, esta pesquisa volta-se à abordagem do ensino e aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Inicialmente, o pesquisador-professor já havia escolhido esse tema devido ao contato com diversas abordagens para a comprovação do teorema de Pitágoras, que integra o conteúdo das relações métricas no triângulo retângulo. Fascinado por essas diferentes formas de demonstração, buscava compreender suas particularidades e, ao mesmo tempo, questionava por que esse conteúdo não era mais explorado, especialmente nas salas de aula do Ensino Fundamental. Além disso, observava a dificuldade dos alunos em entender o teorema de Pitágoras, mesmo sendo um dos mais conhecidos e aplicados no mundo, com inúmeras utilidades no cotidiano.

Nesse sentido, o pesquisador-professor reconhece que esse tema, basilar para diversos conceitos da Geometria Euclidiana, desempenha um papel crucial na resolução de problemas práticos e teóricos em áreas como engenharia, arquitetura, física e astronomia. Diante disso, torna-se imperativo desenvolver estratégias pedagógicas que promovam uma compreensão mais significativa desses conceitos pelos alunos, superando a mera memorização de fórmulas e procedimentos.

Com base nisso, a Metodologia de Resolução de Problemas tem se destacado como uma abordagem pedagógica capaz de estimular o pensamento crítico, a criatividade e a autonomia dos estudantes. Autores como Polya (1978) e Schoenfeld (1985) ressaltam a importância dessa metodologia para o desenvolvimento do raciocínio matemático e a construção de um conhecimento sólido e duradouro. Ao enfrentar desafios matemáticos de forma ativa e investigativa, os alunos não apenas compreendem os conceitos, mas também desenvolvem habilidades essenciais para a resolução de problemas em diferentes contextos.

Além disso, nesta pesquisa, ao trabalhar com as Relações Métricas no Triângulo Retângulo no contexto das tecnologias digitais, será utilizada a Plataforma GeoGebra, cada vez mais presente no ensino da matemática. Desenvolvido por Markus Hohenwarter e colaboradores, o GeoGebra é uma ferramenta computacional de geometria dinâmica que permite a visualização e a exploração interativa de conceitos matemáticos. Integrar o GeoGebra ao processo de ensino e aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo não apenas facilita a compreensão de conceitos abstratos, como também estimula o desenvolvimento do pensamento visual e espacial dos alunos, conforme destacado por Barbosa *et al.* (2019).

Dessa forma, com o intuito de enriquecer o ensino das Relações Métricas no Triângulo Retângulo e promover uma aprendizagem eficaz em Geometria, esta pesquisa apresenta uma proposta de ensino destinada aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual da cidade de Santa Cruz/RN. Essa proposta é respaldada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece como habilidade essencial para esse ano escolar a capacidade de “demonstrar relações métricas do triângulo retângulo” (EF09MA13). Serão utilizados o GeoGebra e a Metologia de Resolução de Problemas como estratégias de ensino e aprendizagem, com o objetivo de aprofundar a compreensão dos conceitos e promover o desenvolvimento de habilidades cognitivas e metacognitivas.

Para a realização da pesquisa, será adotada uma abordagem qualitativa, fundamentada nos preceitos da pesquisa qualitativa, conforme Bogdan e Bilklen (1994) e Lüdke e André (1986), com o objetivo de analisar como o uso da Plataforma GeoGebra e da Metodologia de Resolução de Problemas pode influenciar o processo de ensino e aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. O estudo não se limitará a identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos, mas também buscará propor alternativas metodológicas que promovam um ensino mais acessível e significativo. Espera-se, adicionalmente, que os resultados obtidos sirvam de suporte para outros professores e estimulem novas pesquisas sobre a aplicação do GeoGebra e da Resolução de Problemas no ensino da Matemática.

1.1 Justificativa, problemática e objetivos da pesquisa

Durante minha trajetória como aluno da Educação Básica, enfrentei dificuldades na compreensão dos conceitos de geometria plana. Essas dificuldades deviam-se, em grande parte, à ausência de professores licenciados em Matemática e ao fato de a geometria ser frequentemente deixada para o último bimestre letivo, o que resultava em pouco ou nenhum tempo para seu estudo aprofundado. Além disso, durante a licenciatura, tive uma formação precária nessa área da Matemática, que se resumiu, praticamente, a uma revisão superficial da geometria plana. Essa deficiência tornou-se evidente ao longo das duas disciplinas de geometria que cursei na graduação.

Já no período da minha prática docente no Ensino Fundamental e Médio, lecionar geometria representou um grande desafio. Eu não me sentia seguro para ensinar o conteúdo, o que exigiu muita leitura e reflexão sobre os tópicos que precisava abordar. Com o passar dos anos, a experiência como professor foi extremamente significativa e decisiva para a consolidação da minha carreira docente. Ela me permitiu refletir sobre o ensino e a aprendizagem da geometria, incentivando-me a buscar, continuamente, novos conhecimentos nessa área.

Foi nesse contexto que, em 2015, participei, como aluno especial, de uma disciplina do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), campus Campina Grande/PB. A disciplina "Tecnologias e Educação Matemática" foi crucial para a construção do meu projeto e para o início do mestrado.

Além de amadurecer a ideia de investigar as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, fui motivado pela minha experiência de oito anos como professor da Educação Básica na cidade de Santa Cruz/RN. Durante esse período, também tive a oportunidade de utilizar Tecnologias Digitais no ensino de Matemática, o que ampliou minha perspectiva sobre as possibilidades pedagógicas nessa área.

Ao longo das aulas que ministrei – e continuo ministrando –, percebo que meus alunos enfrentam dificuldades semelhantes às que eu vivenciei ao aprender geometria plana. Apesar de a maioria deles ter acesso a livros didáticos, as dificuldades para compreender os conceitos geométricos, especialmente as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, persistem. Infelizmente, essa limitação não se restringe aos estudantes; muitos professores também enfrentam desafios semelhantes, como pude constatar a partir da minha própria experiência.

> Melhor do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores usualmente fazem uma ou mais conjecturas (suposições ou predições fundamentadas) sobre o que seria necessário para responder as questões. As conjecturas estão baseadas em algumas relações entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e nas ideias sobre aquelas variáveis-chave e suas relações com o esboçado no modelo (Romberg, 2007, p. 8).

Segundo Romberg (2007), a formulação de uma pergunta ou conjectura constitui uma etapa decisiva no processo de pesquisa. No entanto, identificar o problema de pesquisa não é uma tarefa simples. Após a análise realizada e a reflexão sobre as ideias de diversos autores, foi possível delimitar a seguinte pergunta de pesquisa: **De que maneira a utilização da Plataforma GeoGebra, aliada à metodologia de Resolução de Problemas, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo?**

Dessa forma, o objetivo geral do presente estudo consiste em verificar as contribuições da Plataforma GeoGebra, em articulação com a metodologia de Resolução de Problemas, para o processo de ensino e aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

Para aprofundar a compreensão sobre esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as Relações Métricas no Triângulo Retângulo que podem ser exploradas com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, utilizando a Plataforma GeoGebra no contexto da Resolução de Problemas;
- Selecionar e propor problemas que envolvam as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, de modo à integrá-los à metodologia de Resolução de

Problemas e à utilização da Plataforma GeoGebra como ferramenta de apoio visual;

- Analisar o comportamento dos estudantes diante da proposta que articula a Resolução de Problemas e o uso da Plataforma GeoGebra;
- Avaliar o interesse dos alunos pela abordagem por meio da Resolução de Problemas contextualizada na Plataforma GeoGebra.

A estrutura da dissertação está organizada em sete capítulos. O Capítulo 1 – Introdução apresenta o contexto do tema investigado, as motivações que impulsionaram o desenvolvimento do estudo, a justificativa da pesquisa, a questão norteadora e os objetivos propostos.

O Capítulo 2 – Resolução de Problemas discute essa metodologia, ressaltando sua importância no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. São analisadas as contribuições da abordagem para o ambiente escolar, em especial no que tange ao desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia e da compreensão significativa dos conceitos matemáticos.

No Capítulo 3 – Geometria na Educação Básica, traça-se um panorama histórico e didático do ensino da Geometria, destacando os desafios presentes nesse campo. Também são abordadas as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, com ênfase no Teorema de Pitágoras, sua relevância histórica e suas aplicações práticas no cotidiano e no meio acadêmico.

O Capítulo 4 – Tecnologias Digitais na Educação Matemática analisa o papel das tecnologias no ensino da Matemática, com destaque para a Plataforma GeoGebra. São exploradas as potencialidades dessa ferramenta no apoio à visualização e compreensão de conceitos matemáticos, especialmente no que se refere às Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

No Capítulo 5 – Procedimentos Metodológicos, são descritos os métodos utilizados na condução da pesquisa, o contexto de realização do estudo, os participantes e os instrumentos da coleta de dados, proporcionando uma visão clara e sistemática da abordagem metodológica adotada.

O Capítulo 6 – Resultados e discussões apresenta a análise dos dados obtidos, relacionando-os aos objetivos da pesquisa e à literatura consultada. As implicações dos resultados são discutidas à luz do ensino das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, com destaque para os efeitos do uso da Plataforma GeoGebra no processo de aprendizagem.

Por fim, o Capítulo 7 – Considerações Finais apresenta sugestões e apontamentos críticos voltados ao aprimoramento do trabalho, além de discutir as limitações da pesquisa e indicar possibilidades para investigações futuras, com o intuito de contribuir para o avanço dos estudos na área.

Ao final da dissertação, encontram-se as referências bibliográficas utilizadas e os anexos e apêndices que complementam a pesquisa.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, será abordada a Resolução de Problemas como metodologia no processo de ensino e aprendizagem, com ênfase na Educação Matemática. A relevância dessa abordagem será discutida sob os aspectos teórico e prático, destacando-se seus impactos positivos no ambiente escolar e reforçando, assim, a importância da presente pesquisa.

Para fins de organização, o capítulo está estruturado em seções que contemplam diferentes dimensões da Resolução de Problemas. Inicialmente, realiza-se um resgate histórico, analisando a evolução dessa abordagem pedagógica ao longo do século XX. Na sequência, será discutido o ensino da Matemática por meio da Resolução de Problemas, com destaque para a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, que fundamenta este estudo.

Por fim, a discussão será ampliada a partir de uma perspectiva internacional, abordando a Formação de Professores e a inserção da Resolução de Problemas no currículo escolar, evidenciando sua permanência e relevância no cenário educacional contemporâneo.

2.1 As reformas no Ensino de Matemática e a Resolução de Problemas no século XX

O ensino da Matemática passou por transformações significativas ao longo do século XX, refletindo as mudanças sociais, tecnológicas e econômicas ocorridas nesse período. Conforme destaca Onuchic (1999), à medida que a sociedade transitou da era rural para a industrial, posteriormente para a era da informação e, mais recentemente, para a sociedade do conhecimento, tornou-se evidente a necessidade de uma educação matemática mais eficaz. A autora observa que, diante da demanda por profissionais cada vez mais especializados, tornou-se natural o crescente interesse da população em “saber mais matemática”.

Diante desse cenário, intensificaram-se os debates no campo da Educação Matemática, tanto no Brasil quanto no cenário internacional. Tais discussões surgiram da necessidade de adequar o trabalho pedagógico às novas tendências educacionais.

Onuchic (1999) destaca que, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para Matemática,

> os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil, a partir dos anos 20, não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino, bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (Brasil, 1998, p. 19).

Dessa forma, torna-se necessário uma reflexão crítica sobre as práticas de ensino da Matemática, considerando não apenas os aspectos curriculares, mas também os desafios culturais e sociais presentes na educação brasileira.

Nesse sentido, no início do século XX, o ensino da Matemática caracterizava-se como uma abordagem predominantemente mecânica, na qual a repetição desempenhava um papel central. Os alunos eram incentivados a memorizar tópicos fundamentais, como as operações básicas e a tabuada. Nessa dinâmica, o professor assumia uma posição central como transmissor do conhecimento, enquanto os estudantes adotavam uma postura passiva, limitando-se a registrar informações, memorizar e reproduzir procedimentos (Onuchic, 1999).

Ainda segundo a autora, a prática pedagógica priorizava a realização de exercícios em sala de aula e sua repetição em casa, sendo a avaliação centrada na capacidade dos alunos de reproduzirem corretamente os conteúdos ensinados. Essa abordagem refletia uma concepção de aprendizagem baseada na repetição, sem, necessariamente garantir a compreensão profunda dos conceitos matemáticos.

Diante desse contexto, emergiu posteriormente, uma nova orientação pedagógica que valorizava a aprendizagem matemática com base na compreensão. Essa abordagem se opunha ao modelo tradicional então vigente, no qual a memorização mecânica das tabuadas e a prática repetitiva eram centrais. A partir dessa perspectiva, tais métodos passaram a ser criticados, com ênfase na necessidade de que os estudantes compreendessem os conceitos matemáticos subjacentes às operações realizadas.

Foi nesse período que a resolução de problemas passou a ser defendida como uma estratégia para a aprendizagem da Matemática. Segundo Onuchic (1999, *apud* Gazire, 1989, p. 71-73):

> os estudos sobre resolução de problemas realizados até o final da década de 1950, nos Estados Unidos, em sua maioria indicavam que a criança, para desenvolver sua capacidade de resolução de problemas, deveria exercitar-se ostensivamente na solução de uma grande quantidade de problemas. Bloom e Broder, ainda na década de 1950, questionavam as pesquisas, até então desenvolvidas sobre solução de problemas, pela ênfase que vinha sendo dada aos produtos das soluções em vez de valorizar os processos implícitos da resolução criativa de problemas. Estes pesquisadores, para melhor captarem as estratégias de resolução, estudaram os processos de resolução utilizados pelos estudantes bem-sucedidos. Para que isso fosse possível, os alunos deveriam pensar em voz alta durante o processo. Com base em suas pesquisas, defenderiam que o ensino de resolução de problemas deveria centrar-se no ensino de estratégias para resolver problemas, pois acreditavam que os hábitos de resolução de problemas poderiam ser alterados ou aprimorados por uma adequada formação e prática (Ibidem, p. 74).

Já em 1948, nos Estados Unidos, Herbert F. Spitzer realizou um estudo focado no ensino da aritmética básica, no qual enfatizava a aprendizagem por meio da compreensão, utilizando problemas contextualizados como ponto de partida.

Mais tarde, em 1964, no Brasil, o Professor Luiz Alberto S. Brasil introduziu uma abordagem pedagógica que propunha iniciar o ensino da Matemática com um problema central, capaz de gerar novos conceitos e conteúdos. Já na década de 1950, havia sido estruturado um currículo baseado em uma sequência de tópicos distribuídos ao longo das séries, embora sem conexão com a aplicação prática da Matemática fora do ambiente escolar (Onuchic, 1999).

Nas décadas de 1960 e 1970, o Brasil, assim como outros países, foi impactado pelo Movimento da Matemática Moderna, que promoveu profundas transformações no ensino. Nesse contexto, a abordagem pedagógica adotada enfatizava a exposição dos conteúdos pelo professor. No entanto, em muitos casos, a falta de preparo docente não era percebida pelos estudantes, o que frequentemente resultava na ausência de significado para os conceitos ensinados. Essa lacuna gerou preocupações sobre à eficácia desse modelo de ensino.

Ainda segundo Onuchic (1999), diante desse cenário, pesquisadores passaram a refletir sobre as metodologias de ensino da Matemática. Foi nesse contexto que a Resolução de Problemas começou a ser investigada de forma sistemática como um campo de pesquisa em Educação Matemática.

As primeiras investigações sobre a Resolução de Problemas datam de 1944, com os estudos do matemático George Pólya, amplamente reconhecido por suas contribuições nessa área. Sua obra *A Arte de Resolver Problemas* tornou-se uma referência mundial, influenciando pesquisas e práticas no ensino da Matemática.

Já no final da década de 1970, a Resolução de Problemas começou a ganhar destaque internacionalmente. Nesse contexto, em 1980, foi publicado nos Estados Unidos o documento do NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics* –, intitulado *An Agenda for Action*: *Recommendations for School Mathematics of the 1980's* (em tradução livre: NCTM – Conselho Nacional de Professores de Matemática – Uma Agenda para Ação: Recomendações para a Matemática Escolar da Década de 1980). Esse documento representou um marco significativo ao defender que a Resolução de Problemas deveria ser o foco central do ensino de Matemática na década de 1980. Destacava-se, nele, a importância de desenvolver habilidades para resolver problemas como objetivo prioritário dos educadores matemáticos, afirmando que o desempenho nessa área seria um indicador essencial da competência matemática, tanto em nível individual quanto nacional (Onuchic, 1999).

Além disso, o documento ressaltava a relevância de integrar aspectos sociais, antropológicos, linguísticos e cognitivos no processo de aprendizagem da Matemática, redirecionando as discussões curriculares. Também sugeria o uso de tecnologias, como calculadoras e computadores, em todos os níveis escolares, com o intuito de potencializar o ensino.

Com a disseminação dessas ideias, despertou-se o interesse de pesquisadores da área de Educação Matemática, incentivando estudos voltados a novas abordagens da Resolução de Problemas. Nesse contexto, Schroeder e Lester, na década de 1980, propuseram três formas distintas de abordar a Resolução de Problemas, que podem nos ajudar a refletir sobre essas diferenças: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática por meio da resolução de problemas (Onuchic 1999).

A partir das transformações ocorridas ao longo do século XX no ensino da Matemática, observa-se uma evolução significativa na forma como a disciplina é abordada, passando de um modelo baseado na memorização e repetição para uma perspectiva que valoriza a compreensão e a aplicação dos conceitos matemáticos.

Desse modo, a Resolução de Problemas consolidou-se como um campo de pesquisa essencial na Educação Matemática, promovendo reflexões sobre o papel do professor e do aluno no processo de ensino-aprendizagem.

2.2 O ensino da matemática através da Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas tem sido reconhecida como uma abordagem central no ensino da Matemática, promovendo não apenas a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também o desenvolvimento de habilidades cognitivas e criativas nos alunos. Segundo Polya (1945), resolver problemas é uma atividade que envolve a aplicação de conhecimentos prévios para enfrentar situações novas e desafiadoras, o que estimula o pensamento crítico e a capacidade de raciocínio.

Nesse sentido, a Resolução de Problemas não deve ser vista apenas como um método para encontrar respostas, mas como uma abordagem pedagógica que coloca o aluno no centro do processo de aprendizagem. De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), a Resolução de Problemas deve ser o foco do ensino da Matemática, pois permite que os alunos construam novos conhecimentos, desenvolvam estratégias variadas e reflitam sobre seu próprio pensamento matemático. Essa abordagem contrasta com o ensino tradicional, frequentemente limitado à memorização de fórmulas e procedimentos.

Além disso, a Resolução de Problemas promove a autonomia dos alunos, incentivando-os a explorar diferentes caminhos para chegar a uma solução, o que contribui para o desenvolvimento da criatividade e da flexibilidade cognitiva (Vale; Pimentel, 2016).

Entretanto, o modo como o problema e a Resolução de Problemas são tradicionalmente abordados em sala de aula costuma seguir uma metodologia convencional, na qual o professor apresenta a teoria, resolve alguns exemplos e, em seguida, “passa” problemas para a turma resolver. Esse método segue uma sequência lógica: primeiro, os alunos são introduzidos aos conceitos teóricos fundamentais; em seguida, o professor demonstra como esses conceitos são aplicados na prática, por meio de exemplos resolvidos passo a passo; por fim, os alunos recebem problemas para resolver de forma independente.

Essa repetição de exercícios pode, contudo, transformar-se em uma atividade mecânica, na qual os alunos se concentram mais em seguir procedimentos específicos do que em compreender profundamente os princípios matemáticos subjacentes. Isso pode resultar em uma aprendizagem superficial em que os estudantes conseguem resolver problemas-padrão, mas apresentam dificuldades ao aplicar os conceitos em situações novas ou mais complexas.

Essas repetições mecânicas vão na contramão do que pode ser caracterizado como um problema. Kantowski (1980) considera que um problema é uma questão ou situação com a qual o indivíduo se depara e para a qual não possui um procedimento ou algoritmo que o conduza a uma solução imediata. Lester (1978, 1983) também define o problema como uma tarefa enfrentada por um indivíduo ou grupo, para a qual não há um procedimento "pronto" e conhecido que assegure a resolução.

Isso significa que, para que algo seja percebido como um problema, não basta que falte um procedimento estabelecido para solucioná-lo; é necessário que haja um desejo ou motivação por parte do indivíduo ou grupo para resolver a situação. Dessa forma, os fatores emocionais e motivacionais desempenham um papel crucial na identificação e abordagem dos problemas.

Nessa perspectiva, Lester (1983) destaca que a noção de problema está intimamente ligada à relação do indivíduo com a tarefa proposta e ao contexto em que a resolução é concebida. Uma mesma tarefa pode ser interpretada de maneiras distintas, dependendo das características do sujeito e das circunstâncias específicas no momento da resolução.

Krulik e Rudnik (1993) reforçam essa ideia ao afirmarem que, à medida que os alunos avançam em sua formação matemática, uma questão que inicialmente era considerado um problema pode se transformar em um exercício e, eventualmente, reduzir-se a uma simples questão.

Conforme Onuchic (2013),

> [...] é preciso estar atento aos problemas "fechados", porque esses pouco incentivam o desenvolvimento de habilidades, enquanto que o problema do tipo aberto procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para resolução de problemas.

Para ela, a resolução de um problema requer a formulação de uma abordagem específica. Ela defende que "a prática em sala de aula desse tipo de problema acaba por transformar a própria relação entre o professor e os alunos e entre os alunos e o conhecimento matemático" (Onuchic, 2013).

Sob essa perspectiva, ao resolver um problema, busca-se identificar os meios adequados para atingir um determinado objetivo. Durante esse processo, é comum que o indivíduo vivencie a tensão inerente à atividade de resolução, resultado dos desafios e incertezas envolvidos na busca por uma solução. Nesse percurso, ele terá a oportunidade de sentir o prazer decorrente da descoberta, especialmente se o problema – ainda que modesto – desafiar sua curiosidade e capacidade criativa.

Corroborando esse espírito de descoberta, Silva (1977) argumenta que todo problema novo e interessante contém, em si, uma ideia-chave: um elemento revelador que, quando descoberto, desencadeia uma compreensão profunda e imediata. Esse momento de clareza, que ilumina a mente do solucionador, representa o instante em que todas as peças do quebra-cabeça se encaixam, proporcionando uma visão completa e coesa da solução. Tal descoberta não apenas resolve o problema em questão, mas também reforça a criatividade e o entusiasmo intelectual do indivíduo, evidenciando a importância do engajamento com problemas desafiadores para o desenvolvimento cognitivo e emocional.

Para Polya (1980), um problema se configura sempre que buscamos descobrir os meios para atingir um objetivo específico. Durante o processo de resolução, o indivíduo experimenta uma tensão inerente ao esforço cognitivo necessário para superar o desafio. Contudo, essa tensão é acompanhada pelo prazer da descoberta, sobretudo quando o problema – mesmo que simples – instiga a curiosidade e a criatividade do solucionador. Compreende-se, assim, que esse ciclo de tensão e satisfação não apenas motiva o indivíduo, mas também promove o desenvolvimento de suas capacidades intelectuais e criativas, ressaltando a relevância dos problemas desafiadores como instrumentos de aprendizagem e crescimento pessoal.

Nessa esteira, Onuchic e Allevato (2004) destacam que, ao utilizar um livro-texto tradicional, muitas vezes são necessárias adaptações para adequá-lo a essa abordagem. Apesar das dificuldades, o esforço envolvido nesse processo se justifica por seus benefícios pedagógicos. As autoras acrescentam que a:

> - Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o "dar sentido". Ao resolver problemas os alunos necessitam refletir sobre as ideias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema;
> - Resolução de Problemas desenvolve o "poder matemático". Os estudantes, ao resolver problemas em sala de aula, se engajam em todos os cinco padrões de procedimento descritos nos Standards 2000: Resolução de Problemas; raciocínio e prova; comunicação; conexões e representação, que são os processos de fazer Matemática, além de permitir ir além na compreensão do conteúdo que está sendo construído em sala de aula;
> - Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido. Cada vez que o professor propõe uma tarefa com problemas e espera pela solução, ele diz aos estudantes: “Eu acredito que vocês podem fazer isso!”. Cada

> vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autorrealização dos estudantes são desenvolvidas;
> - Resolução de Problemas provê dados de avaliação contínua que podem ser usados para tomar decisões instrucionais, ajudar os alunos a ter sucesso e informar os pais;
> - É gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo "ensinar dizendo". A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo o esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos;
> - A formalização de toda teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um programa assumido, feita pelo professor no final da atividade, faz mais sentido para os alunos.

Diante do exposto, fazemos coro com os autores citados, uma vez que a Resolução de Problemas se consolidou como uma abordagem pedagógica essencial no ensino da Matemática. Ao longo das últimas décadas, pesquisas e práticas em sala de aula têm demonstrado que essa metodologia favorece não apenas a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também o desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia e da capacidade de argumentação dos estudantes. Assim, ao integrar a Resolução de Problemas ao processo de ensino, os professores promovem uma aprendizagem mais significativa e alinhada às demandas contemporâneas da educação matemática.

2.3 A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação da matemática através da Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas tem sido amplamente discutida como uma abordagem eficiente para o ensino da Matemática, proporcionando uma aprendizagem significativa e promovendo habilidades essenciais à formação dos estudantes. Allevato e Onuchic (2014) destacam que essa metodologia vai além da simples transmissão de conteúdos, pois envolve um processo dinâmico e interativo entre ensino, aprendizagem e avaliação. Nesta seção, será abordada como a Resolução de Problemas pode ser utilizada como metodologia pedagógica para potencializar o ensino da Matemática, discutindo suas bases teóricas e implicações práticas.

A Resolução de Problemas, enquanto metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, está fundamentada em diversas teorias educacionais. Segundo Van de Walle (2009), essa abordagem favorece a compreensão conceitual dos alunos, pois os leva a construir significado para os conceitos matemáticos por meio da investigação e da exploração ativa de problemas. Dessa forma, o estudante deixa de ser um mero receptor passivo do conhecimento e passa a assumir o papel de protagonista em seu processo de aprendizagem.

Conforme Polya (2006), a Resolução de Problemas envolve quatro etapas fundamentais: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução da estratégia e revisão dos resultados. Essa estrutura favorece o desenvolvimento do raciocínio matemático e contribui para a aquisição de maior autonomia na resolução de situações-problema.

No contexto brasileiro, Allevato e Onuchic (2014) reforçam que a Resolução de Problemas constitui uma abordagem essencial para o ensino da Matemática, pois possibilita a articulação entre teoria e prática, promovendo uma aprendizagem relevante e contextualizada. As autoras destacam que essa metodologia favorece a interação entre professor e alunos, criando oportunidades para a construção coletiva do conhecimento matemático. Tal perspectiva ressalta a importância do papel do professor como mediador do processo de ensino-aprendizagem, incentivando o pensamento crítico e a reflexão dos estudantes.

A abordagem da Resolução de Problemas não se limita apenas ao ensino e à aprendizagem, estendendo-se também ao processo avaliativo. A avaliação pautada na Resolução de Problemas permite observar não apenas o produto final, mas também o percurso cognitivo do estudante durante a busca por uma solução.

Segundo Van de Walle (2009), uma avaliação eficaz deve considerar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos, valorizando sua capacidade de argumentação, de justificativa e de estabelecimento de conexões entre conceitos matemáticos. Nesse sentido, a Resolução de Problemas contribui para uma avaliação mais qualitativa e formativa, auxiliando o professor a compreender melhor as dificuldades dos alunos e a adaptar sua prática pedagógica.

Em consonância, Allevato e Onuchic (2014) ressaltam que a Resolução de Problemas pode ser utilizada tanto em avaliações formais quanto em momentos diagnósticos, permitindo um acompanhamento mais preciso do desenvolvimento dos estudantes. Para os autores:

> A avaliação por meio da Resolução de Problemas possibilita ao professor um olhar mais aprofundado sobre o pensamento matemático dos alunos, favorecendo intervenções mais eficazes e alinhadas às necessidades da turma (Allevato; Onuchic, 2014, p. 135).

Essa abordagem avaliativa corrobora para a construção de um ensino mais reflexivo e adaptativo, promovendo um ambiente de aprendizagem mais significativo. A implementação da Resolução de Problemas no ensino da Matemática requer um planejamento cuidadoso e um papel ativo do professor como facilitador do processo. Allevato e Onuchic (2014) sugerem que a seleção de problemas relevantes e contextualizados é um fator essencial para engajar os estudantes e estimular sua capacidade de análise e resolução.

Van de Walle (2009) recomenda que os professores incentivem a discussão coletiva dos problemas, permitindo que os alunos compartilhem suas estratégias e raciocínios. Esse tipo de interação favorece a compreensão mútua e o desenvolvimento de uma comunidade de aprendizagem colaborativa.

A Resolução de Problemas configura-se como uma metodologia eficiente para o processo de ensino-aprendizagem-avaliação da Matemática, pois promove a construção ativa do conhecimento, desenvolve habilidades cognitivas e aprimora a capacidade de argumentação dos estudantes. Autores como Polya (2006), Van de Walle (2009) e Allevato e Onuchic (2014) reforçam a importância dessa abordagem para a formação matemática dos alunos.

Com o objetivo de fornecer aos estudantes os conhecimentos prévios necessários para que a aplicação da metodologia seja mais eficaz, Onuchic e Allevato (2011) propuseram um roteiro que estrutura as atividades realizadas durante o processo de Resolução de Problemas, organizado nas seguintes etapas:

Quadro 1 - Organização das Etapas para a Aplicação da Metodologia de Resolução de Problemas

Etapa	Descrição
Proposição do Problema	O professor define e apresenta uma situação-problema desafiadora, relacionada ao conteúdo a ser trabalhado.
Leitura Individual	Cada estudante recebe o problema por escrito e realiza uma leitura silenciosa para compreensão inicial.
Leitura em Conjunto	A leitura é feita coletivamente com a turma, a fim de esclarecer dúvidas sobre o enunciado.
Resolução do Problema	Em duplas ou grupos, os alunos discutem e elaboram estratégias para resolver o problema.
Observar e Incentivar	O professor acompanha os grupos, observando estratégias, incentivando o raciocínio e fazendo intervenções pontuais.
Registro das Resoluções na Lousa	Alguns grupos compartilham suas soluções na lousa para análise coletiva.
Plenária	A turma discute as diferentes soluções apresentadas, comparando estratégias e refletindo sobre os procedimentos utilizados.
Busca do Consenso	Após a discussão, busca-se uma solução consensual ou uma estratégia mais eficiente para o problema.
Formalização do Conteúdo	Os conceitos matemáticos são sistematizados com base nas soluções e discussões realizadas.
Proposição e Resolução de Novos Problemas	Novas situações-problema são propostas para aprofundar ou aplicar os conhecimentos adquiridos.

Fonte: adaptado de Onuchic e Allevato (2011), com elaboração do autor

A adoção da Resolução de Problemas exige um professor engajado e aberto à transformação de suas práticas tradicionais, comprometido com a contextualização e problematização dos conteúdos matemáticos. Essa abordagem contribui para um ensino mais significativo, dinâmico e alinhado às demandas contemporâneas da educação matemática.

2.4 Um olhar internacional da Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas, como metodologia de ensino-aprendizagem, tem ganhado destaque no cenário educacional internacional, sendo reconhecida como uma abordagem eficaz para o desenvolvimento do pensamento matemático e de habilidades cognitivas essenciais. Desde as contribuições pioneiras de George Polya até as pesquisas contemporâneas de autores como Schoenfeld, Van de Walle, Onuchic, Allevato, entre outros, a Resolução de Problemas tem sido amplamente estudada e aplicada em diferentes contextos culturais e educacionais.

Nesse sentido, Serrazina (2017) destaca que o entendimento atual sobre a Resolução de Problemas remonta ao ano de 1945, quando Polya:

> elaborou sobre o tema, estabelecendo o que ainda hoje é considerado uma forma consistente para abordar esta atividade, nomeadamente quando estabeleceu as fases de resolução de um problema. O autor considera quatro fases: (i) compreender o problema – saber quais os dados, o que se quer saber, qual a condição ou condições, etc.; (ii) elaborar um plano – encontrar conexões entre os dados e a incógnita, estabelecer ligações com problemas mais simples que auxiliam na procura da solução, etc.; (iii) executar o plano – verificar cada passo do plano e avaliar da sua correção; e (iv) refletir sobre o trabalho realizado – verificar o resultado obtido, analisar a sua compatibilidade com os dados, avaliar se existem outros métodos de resolução (Serrazina, 2017, p. 60).

As ideias de Polya ultrapassaram as fronteiras da Hungria, impactando educadores e pesquisadores em todo o mundo. Nos Estados Unidos, Schoenfeld (1985) ampliou essas ideias ao investigar os processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas.

Em seu livro *Mathematical Problem Solving*, o autor argumenta que a resolução de problemas não é apenas uma habilidade técnica, mas um processo complexo que envolve metacognição, controle emocional e estratégias de pensamento. Suas pesquisas destacam a importância de criar ambientes de aprendizagem que permitam aos alunos refletirem sobre seus próprios processos de raciocínio.

No contexto europeu, a Resolução de Problemas tem sido incorporada aos currículos de matemática de diversos países. Por exemplo, na Inglaterra, o *National Curriculum for Mathematics* (2013) enfatiza a importância de desenvolver habilidades de resolução de problemas desde os primeiros anos escolares. O documento afirma que “a matemática deve ser ensinada como uma disciplina viva, que envolve exploração, investigação e descoberta” (Department for Education, 2013, p. 12).

No Brasil, a Resolução de Problemas tem sido amplamente discutida e aplicada, especialmente a partir das contribuições de pesquisadoras como Allevato e Onuchic. Em sua obra *Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas* (2014), as autores destacam que “a resolução de problemas não é apenas uma técnica de ensino, mas uma filosofia educacional que valoriza o processo de pensar matematicamente” (p. 45). Elas enfatizam a importância de criar situações de aprendizagem que desafiem os alunos a explorar diferentes estratégias e a construir seu próprio conhecimento.

Nesse cenário, pesquisadores têm abordado a Resolução de Problemas como uma proposta interdisciplinar. Argumentam que essa abordagem não se limita à matemática, podendo ser aplicada em diversas áreas do conhecimento, promovendo a integração entre diferentes disciplinas. Essa perspectiva tem sido especialmente relevante no contexto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca a importância do desenvolvimento de habilidades transversais, como o pensamento crítico e a criatividade.

Desse modo, a implementação da Resolução de Problemas varia significativamente entre os países, refletindo as particularidades de cada contexto cultural e educacional. Nos Estados Unidos, por exemplo, os *Common Core State Standards for Mathematics* (2010) apontam a resolução de problemas como uma das práticas matemáticas essenciais. Segundo esses padrões, “os alunos devem ser capazes de aplicar conceitos e procedimentos matemáticos para resolver problemas em contextos variados, tanto dentro quanto fora da sala de aula” (National Governors Association, 2010, p. 6).

No Japão, a Resolução de Problemas constitui uma parte central do ensino de matemática, sendo frequentemente desenvolvida por meio do método *jugyō kenkyū* (estudo de aula). Como explicam Stigler e Hiebert (1999, p. 89), “os professores japoneses trabalham em colaboração para planejar aulas que desafiem os alunos a resolver problemas complexos, promovendo a discussão e a reflexão coletiva”. Essa abordagem tem sido associada ao alto desempenho dos estudantes japoneses em avaliações internacionais, como o PISA.

Na Finlândia, a Resolução de Problemas é integrada ao currículo de forma interdisciplinar, com ênfase no desenvolvimento de habilidades para a vida. Como destacam Sahlberg e Hargreaves (2011, p. 34), “o sistema educacional finlandês valoriza a autonomia dos alunos e a capacidade de aplicar conhecimentos matemáticos em situações reais”. Essa abordagem reflete a filosofia educacional do país, que prioriza a equidade e a inclusão.

Apesar dos avanços, a implementação da Resolução de Problemas ainda enfrenta desafios significativos. Um dos principais obstáculos é a formação de professores, que muitas vezes não estão preparados para adotar essa abordagem em sala de aula. Como aponta Kilpatrick (2014), a Resolução de Problemas exige uma mudança de mentalidade, tanto por parte dos professores quanto dos alunos, que devem se acostumar a lidar com a incerteza e a complexidade (p. 123).

Outro desafio é o modelo tradicional de avaliação, frequentemente baseado em testes padronizados. Como sugere Lester (2013), a avaliação deve ser um processo contínuo e integrado ao ensino, que permita aos alunos refletir sobre seu próprio aprendizado e aos professores ajustar suas práticas pedagógicas. Isso exige o desenvolvimento de instrumentos avaliativos que valorizam não apenas os resultados, mas também os processos de resolução.

No contexto brasileiro, Allevato e Onuchic (2014) destacam a necessidade de investir em políticas públicas que apoiem a implementação da Resolução de Problemas. “É fundamental que as escolas tenham acesso a recursos e materiais didáticos adequados, além de programas de formação continuada para os professores” (Allevato; Onuchic, 2014, p. 102). As autoras também enfatizam a importância de envolver a comunidade escolar no processo de mudança, promovendo um diálogo entre educadores, gestores e famílias.

A Resolução de Problemas é uma metodologia que transcende fronteiras, sendo aplicada e adaptada em diferentes contextos culturais e educacionais. Suas bases teóricas, fundamentadas nas ideias de Polya e ampliadas por autores como Schoenfeld e Van de Walle, têm inspirado educadores em todo o mundo a repensar o ensino da matemática. No Brasil, as contribuições de Allevato, Onuchic e outros pesquisadores têm sido fundamentais para a consolidação dessa abordagem.

No entanto, a efetiva implementação da Resolução de Problemas requer um compromisso coletivo de educadores, gestores e formuladores de políticas públicas. É necessário investir na formação docente, na produção de materiais didáticos adequados e na criação de políticas que incentivem a inovação pedagógica. Somente assim será possível transformar a educação matemática em uma experiência significativa e enriquecedora para todos os alunos, tanto no Brasil quanto no mundo.

2.5 A Resolução de Problemas na Formação de Professores

A formação de professores é um dos pilares fundamentais para o desenvolvimento de um sistema educacional de qualidade. No contexto brasileiro, a resolução de problemas na formação docente tem sido um desafio constante, especialmente diante das desigualdades regionais, da escassez de recursos e da necessidade de atualização contínua frente às demandas da sociedade contemporânea.

A resolução de problemas é uma competência essencial para os professores, pois permite que enfrentem os desafios cotidianos da sala de aula de forma criativa e eficiente. Segundo Polya (1978), a resolução de problemas é uma arte prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: aprende-se apenas por meio da imitação e da prática. Essa perspectiva ressalta a importância de que a formação docente inclua contemple não apenas a teoria, mas também experiências práticas, possibilitando o desenvolvimento de habilidades para lidar com situações complexas e imprevisíveis.

A formação de professores no Brasil tem sido alvo de críticas, sobretudo no que diz respeito à desconexão entre teoria e prática. Como aponta Nóvoa (2009), a formação docente não pode ser reduzida a um conjunto de conhecimentos teóricos; deve ser um processo contínuo de reflexão e ação. Essa visão é particularmente relevante no cenário brasileiro, onde muitos professores enfrentam realidades educacionais desafiadoras, como turmas superlotadas, falta de infraestrutura e alunos com diferentes níveis de aprendizagem.

Nos últimos anos, o governo brasileiro tem implementado diversos programas com o objetivo de melhorar a formação docente e, consequentemente, a qualidade da educação. Um dos mais relevantes é o Plano Nacional de Educação (PNE), instituído pela Lei nº 13.005/2014, que estabelece metas específicas para a formação e valorização dos professores. Entre elas, destaca-se a garantia que todos os docentes da Educação Básica tenham formação específica de nível superior, obtida em curso de licenciatura na área de atuação.

Outro programa relevante é o Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica (Parfor), criado em 2009, com o objetivo oferecer formação continuada a professores em exercício que ainda não possuem formação adequada. Trata-se de uma iniciativa conjunta do Ministério da Educação (MEC), das universidades públicas e das secretarias estaduais e municipais de educação. De acordo com o MEC, “o Parfor busca garantir que os professores em exercício tenham acesso a uma formação de qualidade, contribuindo para a melhoria do ensino e da aprendizagem nas escolas públicas” (BRASIL, 2014).

Além disso, o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), criado em 2007, visa incentivar a formação de professores por meio da inserção de licenciandos nas escolas públicas. O programa oferece bolsas para estudantes de licenciatura, que atuam sob a supervisão de professores experientes e caracteriza-se como uma importante ferramenta para aproximar a formação inicial dos professores da realidade das escolas, permitindo que os futuros docentes vivenciem os desafios da profissão desde o início de sua formação (Gatti, 2014).

Apesar dos avanços promovidos por programas como o PNE, o Parfor e o PIBID, a formação docente no Brasil ainda enfrenta obstáculos significativos. Um dos principais é a desvalorização da carreira, refletida em baixos salários e em condições precárias de trabalho. A desvalorização do professor é um dos principais obstáculos para a melhoria da qualidade da educação no Brasil, uma vez que afeta diretamente a motivação, bem como o desempenho dos profissionais da educação (Saviani, 2009).

Outro desafio que merece destaque é a necessidade de constante atualização dos professores frente às novas tecnologias e metodologias de ensino. Em um mundo cada vez mais digital, os professores precisam estar preparados para utilizar ferramentas tecnológicas em sala de aula e para ensinar os alunos a lidar com as demandas da sociedade do conhecimento. No entanto, a formação docente ainda segue muito aquém das necessidades impostas pelas novas tecnologias, o que gera diretamente um descompasso entre o que é ensinado nas universidades e o que é exigido nas escolas (Kenski, 2013).

Nesse contexto, a Resolução de Problemas configura-se como uma abordagem pedagógica eficaz na formação de professores, ao estimular o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de tomar decisões. De acordo com Schön (1987), os professores são profissionais reflexivos, que precisam aprender a lidar com situações complexas e incertas, e a resolução de problemas é uma das formas de desenvolver essa capacidade.

Essa abordagem pode ser aplicada por meio de estudos de caso, simulações e projetos interdisciplinares, que permitem aos futuros professores vivenciar situações reais da profissão e desenvolver estratégias para enfrentar os desafios do cotidiano escolar. Como afirma Mizukami (2002), a formação de professores deve ser baseada em situações-problema que os preparem para a realidade da sala de aula, permitindo que eles construam conhecimentos a partir da prática.

A Resolução de Problemas é, portanto, uma competência fundamental para a formação docente, especialmente no contexto brasileiro, marcado por múltiplos e complexos desafios educacionais. Programas governamentais como o PNE, o Parfor e o PIBID têm contribuído significativamente para a melhoria da formação inicial e continuada de professores. No entanto, ainda há um longo caminho a percorrer para garantir que todos os professores estejam preparados para enfrentar as demandas da educação no século XXI.

Valorizar a carreira docente, promover a constante atualização dos professores frente às transformações tecnológicas e integrar teoria e prática de forma efetiva são medidas essenciais para o fortalecimento da formação docente no Brasil. A Resolução de Problemas, como abordagem pedagógica, pode ser uma ferramenta poderosa para preparar professores mais críticos, criativos e comprometidos com uma educação de qualidade para todos.

2.6 Resolução de Problemas: um tema em continua discussão

A Resolução de Problemas é um tema central na educação matemática, sendo alvo de constantes debates e reformulações ao longo das últimas décadas. Mais do que uma habilidade cognitiva, trata-se de uma competência transversal, que perpassa diversas áreas do conhecimento e se projeta sobre a vida cotidiana, contribuindo para a formação de sujeitos críticos e autônomos. Nesta seção, discutiremos a evolução do conceito de resolução de problemas, com ênfase nas contribuições de John A. Van de Walle, autor de grande relevância na área, além de explorarmos distintas abordagens teóricas e práticas relacionadas ao ensino e à aprendizagem dessa competência.

Historicamente, a literatura educacional apresenta diferentes enfoques sobre a Resolução de Problemas. Um dos marcos mais influentes é o modelo clássico proposto por Polya (1978), estruturado em quatro etapas: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução de um plano e revisão da solução. Apesar de seu valor pedagógico e de sua ampla difusão, esse modelo tem sido criticado por sua linearidade e pela pouca ênfase nos aspectos metacognitivos que envolvem o processo de resolução.

Van de Walle (2009), em sua obra *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, amplia e atualiza esse debate ao argumentar que a Resolução de Problemas não deve ser encarada como um conjunto de etapas rígidas, mas sim como um processo dinâmico e interativo. O autor enfatiza que "a Resolução de Problemas é uma atividade natural da mente humana, que envolve não apenas a aplicação de conhecimentos prévios, mas também a criação de novas estratégias e a adaptação a situações imprevistas" (Van de Walle, 2009, p. 34). Essa perspectiva ressalta a importância de se considerar o contexto e a individualidade do aluno no processo de ensino e aprendizagem.

Ainda segundo Van de Walle (2009), a resolução de problemas deve estar centrada no desenvolvimento do pensamento matemático, sendo compreendida como um meio para a construção de conceitos, e não apenas como um fim em si mesma. Ele argumenta que "os problemas devem ser desafiadores o suficiente para estimular o pensamento, mas não tão difíceis a ponto de desencorajar os alunos" (Van de Walle, 2009, p. 45). Essa concepção é essencial para a criação de um ambiente de aprendizagem que promova a autonomia e a confiança dos estudantes.

Além disso, o autor destaca a importância da atualização problemas abertos, que possibilitam múltiplas soluções e abordagens. Ele afirma que "problemas abertos incentivam os alunos a explorar diferentes caminhos e a desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos" (Van de Walle, 2009, p. 56). Essa abordagem contrasta com a prática tradicional de se trabalhar com problemas fechados, os quais geralmente apresentam uma única resposta correta e um único procedimento de resolução.

> A resolução de problemas é mais do que uma habilidade matemática; é uma maneira de pensar que pode ser aplicada em diversas situações da vida. Quando os alunos são desafiados a resolver problemas, eles não apenas aprendem matemática, mas também desenvolvem habilidades de pensamento crítico, criatividade e perseverança. Essas habilidades são essenciais para o sucesso não apenas na escola, mas também na vida adulta (Van de Walle, 2009, p. 78).

Pode-se perceber que o autor adota uma visão holística sobre a Resolução de Problemas, ultrapassando os limites da disciplina matemática. Ele argumenta que essa abordagem deve ser integrada ao currículo de forma transversal, permitindo que os alunos apliquem seus conhecimentos em contextos reais e significativos.

Apesar das importantes contribuições de autores como Van de Walle, a Resolução de Problemas permanece como um tema em constante evolução. Pesquisas recentes têm explorado, por exemplo, o papel das tecnologias digitais no ensino da matemática, bem como a necessidade de considerar as diferenças culturais e individuais dos alunos. Nesse sentido, Schoenfeld (2016) afirma que a Resolução de Problemas no século XXI requer não apenas habilidades matemáticas, mas também a capacidade de colaborar, comunicar e pensar de forma crítica em um mundo cada vez mais complexo e interconectado.

Essa perspectiva evidencia a necessidade de repensar práticas pedagógicas tradicionais e de adotar abordagens mais flexíveis e inclusivas. Além disso, desafios contemporâneos – como a pandemia de Covid-19 – evidenciaram a importância de desenvolver habilidades de Resolução de Problemas em contextos marcados pela incerteza e por constantes transformações.

A Resolução de Problemas continua a suscitar discussões e reflexões no campo da educação matemática. As contribuições de Van de Walle têm sido fundamentais para a compreensão desse processo como uma atividade dinâmica e interativa, que vai além da simples aplicação de algoritmos e fórmulas. No entanto, os desafios atuais exigem a contínua exploração de novas estratégias e abordagens para o ensino e a aprendizagem da matemática. Como defende Van de Walle (2009), a Resolução de Problemas é uma jornada contínua que requer curiosidade, criatividade e perseverança. Trata-se de um caminho essencial não apenas para o êxito acadêmico, mas também para a formação de cidadãos capazes de enfrentar os desafios do século XXI.

Nesse contexto, nos anos iniciais da educação formal, os alunos são frequentemente desafiados por problemas que estimulam o pensamento crítico. A resolução de problemas destaca-se por sua capacidade de promover reflexão e comunicação, podendo emergir tanto de interações entre os alunos quanto de situações puramente matemáticas. Além de desenvolverem estratégias para resolver os problemas propostos, os estudantes são incentivados a questionar suas abordagens e a participar de discussões com professores e colegas, nas quais devem explicar os motivos de suas decisões e ações.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[1] enfatiza a importância do engajamento dos alunos na construção e apropriação de ideias e conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas, ao citar que:

> os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 266).

Dentro dessa perspectiva, busca-se engajar os alunos de modo a atribuir significado aos conteúdos matemáticos abordados. Além disso, destaca-se que:

> [...] espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (BRASIL, 2018, p. 263).

Nesse sentido, por meio da resolução de problemas, os alunos devem ser capazes não apenas de resolver, mas também de formular problemas, além de analisar diferentes estratégias e os resultados decorrentes de possíveis modificações nos enunciados.

Dessa forma, a resolução de problemas é reconhecida não apenas como um contexto para a aplicação de conteúdos matemáticos previamente aprendidos, mas também como uma abordagem fundamental para a aprendizagem da matemática. Essa perspectiva se consolida como uma prática contemporânea essencial nas salas de aula.

---

[1] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que estabelece os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que todos os alunos da Educação Básica no Brasil devem desenvolver ao longo de sua formação escolar. Este documento define as aprendizagens fundamentais que devem ser garantidas em todas as escolas do país, servindo como referência obrigatória para a elaboração dos currículos escolares pelos sistemas de ensino e pelas escolas, tanto públicas quanto privadas.

3 GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A geometria é uma das áreas fundamentais da matemática e exerce um papel crucial no desenvolvimento cognitivo dos estudantes. No contexto da Educação Básica, seu ensino visa não apenas à compreensão de conceitos e propriedades geométricas, mas também ao desenvolvimento de habilidades de visualização, raciocínio espacial e pensamento crítico. Este capítulo discute a relevância da geometria no currículo escolar, os objetivos de sua aprendizagem e os métodos pedagógicos empregados para torná-la mais acessível e significativa aos alunos.

3.1 Histórico e Evolução do Ensino de Geometria

A geometria, desde a antiguidade, tem sido um componente essencial da educação. Sua origem remonta a civilizações como o Egito e a Grécia. No Egito Antigo, era aplicada de forma prática para resolver problemas relacionados à medição de terras, à construção e à astronomia. Esse uso pragmático da geometria refletia a necessidade de solucionar questões do cotidiano.

Gaspar e Mauro (2003) destacam que:

> os escribas utilizavam a matemática para resolver questões relativas à medição de terras, especialmente depois das inundações do Nilo, ao cálculo de impostos e contribuições, ao cálculo da capacidade dos depósitos de provisões, à projeção de obras arquitetônicas.

Os autores continuam destacando que o conhecimento que hoje temos sobre a matemática egípcia é oriundo de cinco papiros, sendo o mais importante deles o Papiro de Rhind[2].

Na Grécia Antiga, a geometria evoluiu de uma ciência prática para uma disciplina mais teórica, sistematizada por matemáticos como Euclides. Em sua obra

[2] O Papiro de Rhind é um dos primeiros documentos históricos de caráter matemático que se tem notícia. Diversos estudos e considerações já foram feitos sobre esse documento, sob vários enfoques. Desde tradução e comentários, como, por exemplo, a de Arnold Buffum Chace (1929), Gay Robins e Charles Shute (1987); passando por descrições mais gerais sobre o conhecimento matemático dos antigos egípcios, tais como em Carl B. Boyer (1974) e Howard Eves (2008); até reflexões mais pontuais sobre conhecimentos específicos que poderiam estar presentes em problemas do papiro, tal como nos estudos de Luca Miatello (2009).

Os Elementos[3], Euclides organizou o conhecimento geométrico da época em um formato axiomático, que viria a influenciar profundamente o ensino da geometria por séculos. Essa abordagem teórica centrava-se na lógica e na demonstração, estabelecendo fundamentos que ainda hoje são estudados.

Durante a Idade Média, a geometria manteve-se como parte importante da educação, especialmente nas universidades europeias. Foi incorporada ao quadrivium[4] – um dos componentes das artes liberais, junto com a aritmética, a música e a astronomia. O ensino da geometria nesse período era fortemente influenciado pelos textos clássicos, especialmente os de Euclides, traduzidos e comentados por estudiosos islâmicos e europeus.

No século XIX, a geometria passou a integrar formalmente os currículos escolares modernos, impulsionada pelos avanços da geometria não euclidiana e pelas reformas nos sistemas educacionais. Essa nova vertente geométrica, desenvolvida por matemáticos como Gauss, Bolyai e Lobachevsky, expandiu a compreensão dos conceitos espaciais para além dos limites da geometria euclidiana, permitindo uma visão mais ampla e abstrata do espaço.

Nas últimas décadas, o ensino da geometria tem passado por transformações significativas. Tradicionalmente, era marcado pela memorização de teoremas e fórmulas, com foco na geometria euclidiana plana. Embora fundamental, essa abordagem limitava a compreensão dos alunos quanto à aplicabilidade da geometria em contextos mais amplos e dinâmicos.

A partir da segunda metade do século XX, as teorias de aprendizagem de Jean Piaget e Lev Vygotsky passaram a influenciar novas abordagens pedagógicas. Piaget, com sua teoria do desenvolvimento cognitivo, enfatizou a importância de proporcionar aos alunos oportunidades de explorar e construir seu próprio entendimento geométrico por meio da interação com o ambiente. Vygotsky, por sua vez, destacou o papel da mediação social e da linguagem no processo de aprendizagem, sugerindo

---

[3] Os Elementos (em grego: Στοιχεῖα; romaniz.: Stoicheía) é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C.. Ele engloba uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições. Os treze livros cobrem a geometria euclidiana e a versão grega antiga da teoria dos números elementar.

[4] Quadrívio (em latim: quadrivium; de quatro e via: caminho, ou seja os "quatro caminhos") era o conjunto de quatro matérias – aritmética, geometria, astronomia e música – ensinadas nas escolas helênicas na fase inicial do percurso educativo, cujo ápice eram as disciplinas teológicas

que a geometria pode ser mais eficazmente ensinada por meio de atividades colaborativas e discursivas.

Nesse sentido, alguns pesquisadores defendem que o ensino da geometria deve começar ainda nos primeiros anos escolares. Lorenzato (1995) propõe que a geometria sea introduzida já na educação infantil, por meio da geometria intuitiva, possibilitando a observação e a exploração das formas presentes no cotidiano das crianças. De acordo com o autor

> As crianças devem realizar inúmeras experiências ora com o próprio corpo, ora com objetos e ora com imagens; para favorecer o desenvolvimento do senso espacial é preciso oferecer situações em que elas visualizem, comparem e desenhem formas [...] é uma etapa que parece mero passatempo, porém é de fundamental importância (Lorenzato, 1995, p. 8).

Com o advento das tecnologias digitais, o ensino de geometria foi ainda mais transformado. Ferramentas de geometria dinâmica, como a Plataforma GeoGebra, têm permitido que os alunos visualizem e manipulem figuras geométricas de maneira interativa.

Além disso, as reformas curriculares em muitos países têm buscado integrar a geometria a outras áreas da matemática e das ciências, promovendo uma aprendizagem mais interdisciplinar e contextualizada. No Brasil, por exemplo a BNCC enfatiza a importância de desenvolver competências geométricas que vão além do simples conhecimento teórico, incentivando a aplicação prática e o pensamento crítico.

O ensino de geometria, portanto, tem evoluído de uma abordagem tradicional e teórica para uma metodologia mais prática, interativa e integrada. Essa evolução reflete uma crescente compreensão da importância de ensinar geometria de forma a preparar os alunos não apenas para exames, mas também para aplicar conceitos geométricos em uma variedade de contextos do mundo real.

3.2 Desafios e Dificuldades no Ensino e Aprendizagem de Geometria

A BNCC destaca que o ensino de geometria na Educação Básica não se limita à assimilação de conceitos estáticos, mas visa capacitar os estudantes com habilidades essenciais para compreender, aplicar e comunicar conhecimentos geométricos de maneira significativa e contextualizada. A geometria desempenha um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo dos alunos ao longo de sua trajetória escolar.

O estudo da geometria é importante desde os primeiros anos da vida escolar até o final da Educação Básica, pois, além de conferir concretude à Matemática, pode elucidar certos dilemas que, por vezes, tornam-se complexos quando abordados de forma abstrata. No entanto, realizar essa elucidação em sala de aula não é uma tarefa simples.

Nesse sentido, a Geometria é relevante para o "desenvolvimento do raciocínio geométrico, onde se incluem a capacidade de visualização, de formulação de conjeturas, de argumentação e de demonstração" (Santos; Oliveira, 2017, p. 6). Tal desenvolvimento requer a adoção de estratégias pedagógicas que favoreçam a compreensão da importância da Geometria e promovam uma interação mais significativa com o conhecimento geométrico.

Até recentemente, o conteúdo de geometria era frequentemente relegado aos últimos capítulos dos livros didáticos, o que, muitas vezes, resultava em sua abordagem em sala de aula. Essa situação reflete, em parte, a ênfase histórica conferida à álgebra no final do último século passado.

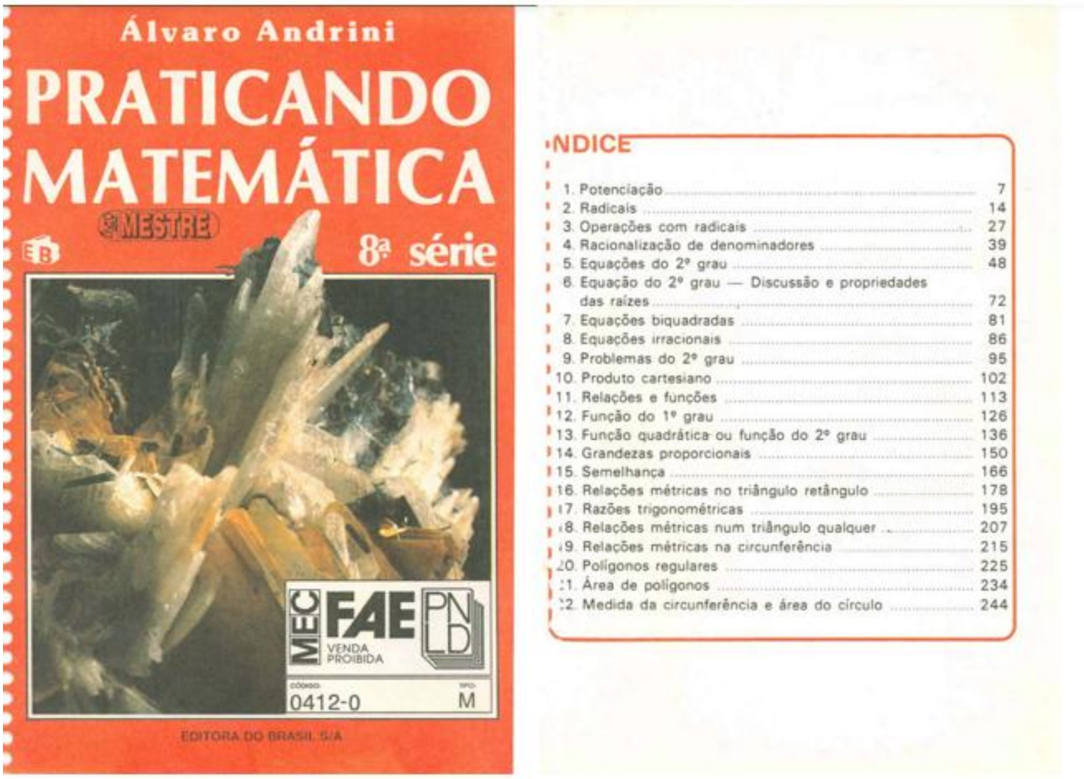
Corroborando com esse pensamento, Lorenzato (1995, p.4) destaca que:

> O movimento da Matemática Moderna [...] tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje.

Nesse contexto, é pertinente reconsiderar o direcionamento do ensino da geometria, reconhecendo seu papel crucial no desenvolvimento cognitivo dos estudantes e promovendo soluções que assegurem sua integralidade como componente fundamental da matemática.

Essa perspectiva é corroborada por Lorenzato (1995, p. 4), que salienta as consequências da evolução do ensino matemático no Brasil. Para ilustrar esses pontos, a Figura 1 apresenta a capa e o sumário de um livro adotado por escolas públicas a partir de 1989, destinado à 8ª série[5], evidenciando a disposição tardia dos conteúdos de geometria no material didático.

Figura 1 – Capa e sumário



ÍNDICE

Fonte: compilação do autor[6]

Os conteúdos de geometria eram frequentemente colocados no final dos livros didáticos, conforme observado na Figura 1, o que, muitas vezes, impedia que fossem efetivamente abordados em sala de aula.

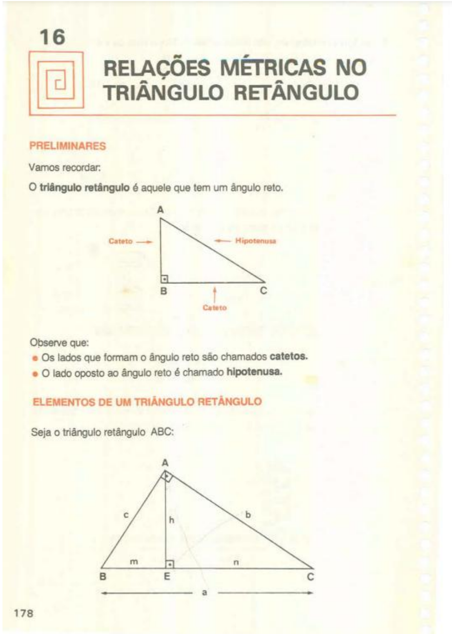
Na Figura 2, observa-se que, no livro da coleção *Praticando Matemática*, de Andrini (1989), o conteúdo sobre as relações métricas é apresentado de forma direta, sem contextualização introdutória que favoreça a compreensão conceitual pelos estudantes.

---

[5] Até 2006, o ensino fundamental ia da 1ª à 8ª série, após esse período, passou-se a adotar do 1º ano ao 9º ano.

[6] Montagem elaborada a partir de imagens coletadas em coleção própria do livro de Andrini e Álvaro, Praticando matemática: 8ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1989.

Figura 2 – Capítulo sobre as relações métricas (coleção de 1989)



16

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

PRELIMINARES

Vamos recordar:

O **triângulo retângulo** é aquele que tem um ângulo reto.

Observe que:

- Os lados que formam o ângulo reto são chamados **catetos.**
- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa.**

ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja o triângulo retângulo ABC:

178

Fonte: Andrini (1989)

Na mesma coleção *Praticando Matemática*, de Andrini (2012), verifica-se uma abordagem contextualizada do mesmo tema – relações métricas. Esse enfoque inclui, por exemplo, situações do cotidiano, aplicações práticas ou explicações que articulam os conceitos matemáticos com outras áreas do conhecimento, promovendo uma compreensão mais profunda e integrada dos conteúdos.

Figura 3 – Capítulo sobre as relações métricas (coleção de 2012)

UNIDADE 7

Relações métricas nos triângulos retângulos

1. O teorema de Pitágoras

Observe o espaço ao seu redor. Identifique ângulos retos nos objetos e construções.

Os ângulos retos têm importância fundamental, não é?

Desde muito cedo em sua história, a humanidade utiliza ângulos retos para demarcar terras, construir casas, templos etc.

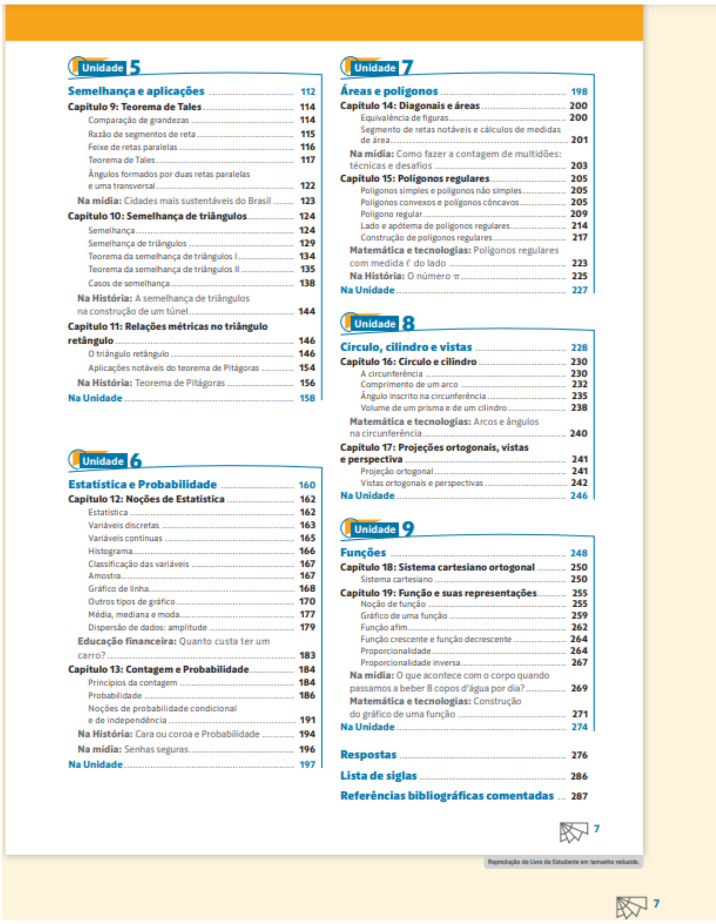
Hoje construímos ângulos retos de várias formas:

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS 181

Fonte: Andrini (2012)

Em seguida, apresenta-se o sumário de um livro do PNLD[7] de 2024, no qual é possível observar que o conteúdo de geometria está diluído ao longo da obra. Ainda que haja liberdade pedagógica para que o professor organize sua própria sequência de conteúdos, é comum que muitos docentes sigam a ordem propostas pelo sumário do livro.

Figura 4 – Capítulo sobre as relações métricas (coleção de 2024)



7
Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.
7

Fonte: Iezzi (2024)

Além disso, os livros atuais destacam a importância da adoção de ferramentas que auxiliem na compreensão dos conteúdos.

[7] O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.

Nesse sentido, Caldatto e Pavanello (2014)

> discorrem que grande parte dos professores de Matemática ainda possui grandes dificuldades em trabalhar com a Geometria Euclidiana e que muitas vezes este conhecimento acaba não sendo trabalhado pelos professores nas escolas.

A constatação de que muitos professores de Matemática enfrentam dificuldades significativas ao ensino da Geometria Euclidiana é preocupante e merece reflexão. Essa vertente da geometria, baseada nos postulados de Euclides e desenvolvida ao longo de milênios, é fundamental não apenas para a compreensão de conceitos matemáticos, mas também para o desenvolvimento das habilidades de pensamento espacial e abstrato dos estudantes.

Diversos fatores podem contribuir para essas dificuldades. Em primeiro lugar, o próprio currículo educacional nem sempre oferece suporte adequado à formação contínua dos professores nessa área específica. Além disso, o ensino de geometria exige não apenas domínio teórico dos conceitos, mas também habilidades de visualização e manipulação de figuras geométricas de forma intuitiva e precisa.

A carência de recursos educacionais adequados e de metodologias eficazes também pode limitar o ensino da geometria. Frequentemente, os professores não dispõem de materiais didáticos atualizados, de tecnologias que favoreçam a visualização ou de exemplos práticos que conectem os conceitos geométricos ao cotidiano dos alunos.

É crucial que as instituições de ensino e os programas de formação docente reconheçam esses desafios e ofereçam suporte contínuo para capacitar os educadores. Isso pode incluir *workshops*, cursos de atualização, ações colaborativas entre professores e o desenvolvimento de estratégias pedagógicas inovadoras que tornem a geometria mais acessível, significativa e envolvente para os estudantes.

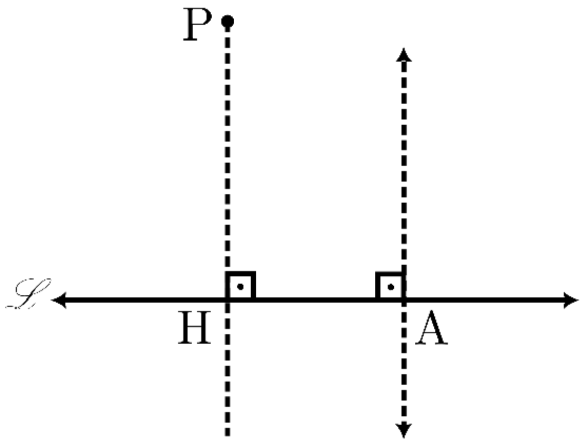
Paralelamente, é preciso ressaltar a importância da geometria não apenas como um campo da matemática, mas como uma habilidade essencial para a compreensão de outras áreas do conhecimento, especialmente as disciplinas STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática). Uma base sólida em princípios geométricos pode preparar os estudantes para enfrentar, de maneira mais eficaz, desafios acadêmicos e profissionais, contribuindo para seu desenvolvimento integral e para o sucesso em suas trajetórias futuras.

3.3 Relações Métricas em um Triângulo Retângulo

Iniciamos esta seção com o estudo da projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e de um segmento sobre uma reta, como forma de compreender as relações métricas em um triângulo retângulo.

Dado um ponto e uma reta, a projeção ortogonal do ponto sobre a reta é obtida pela intersecção entre a reta dada e uma outra reta que passa pelo ponto e é perpendicular à primeira.

Figura 5 – Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta

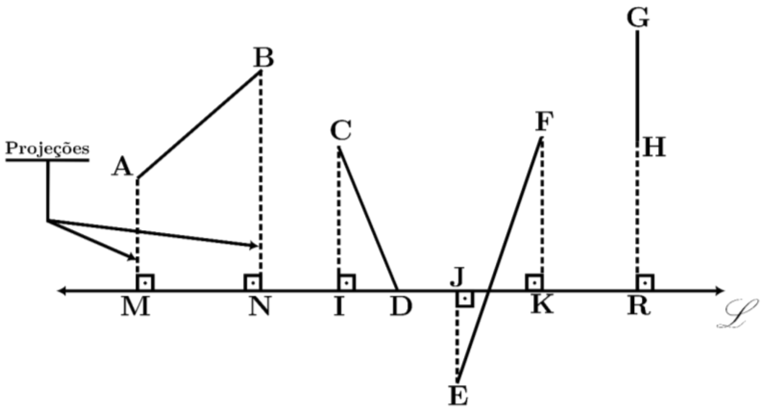


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Na Figura 5 acima, o ponto H é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta $\overleftrightarrow{l}$, A é a projeção ortogonal de A sobre a mesma reta $\overleftrightarrow{l}$. $\overline{PH}$ é a projeção de P em relação a l.

A projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta é outro segmento, cujas extremidades correspondem às projeções ortogonais das extremidades do segmento original. Quando o segmento é perpendicular à reta, sua projeção ortogonal reduz-se a um único ponto, como ilustrado na Figura 6 a seguir:

Figura 6 – Projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta



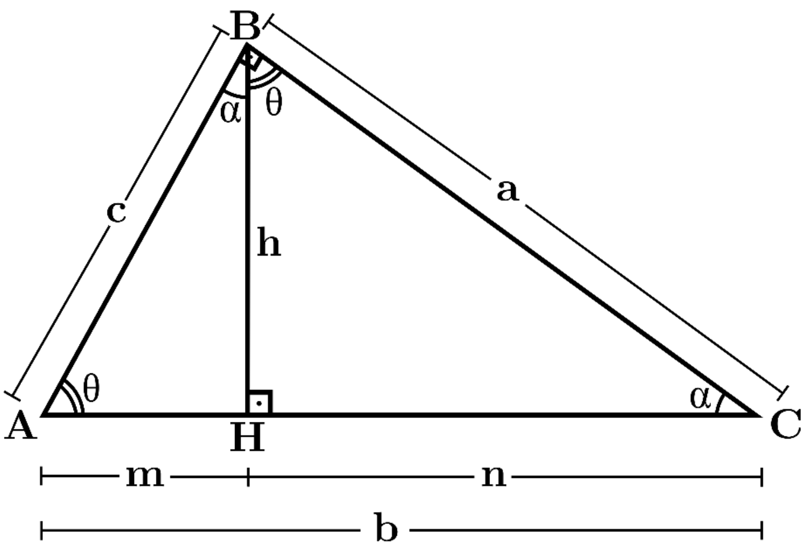
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

De acordo com a figura acima, temos:

- $\overline{MN}$ projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre l.
- $\overline{ID}$ projeção ortogonal de $\overline{CD}$ sobre l.
- $\overline{JK}$ projeção ortogonal de $\overline{EF}$ sobre l.
- R projeção ortogonal de $\overline{GQ}$ sobre l.

Agora que conhecemos as projeções ortogonais, vamos relacioná-las aos demais elementos do triângulo retângulo:

Figura 7 – Projeções ortogonais dos elementos de um triângulo



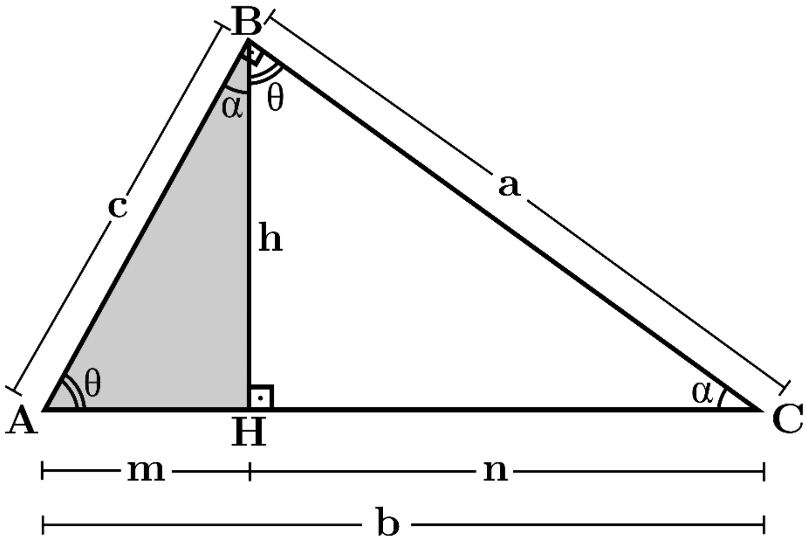
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Do gráfico:

- $\overline{AH}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.
- $\overline{HC}$ é a projeção ortogonal de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

Propriedade 1: Em todo triângulo retângulo, é verdade que o quadrado do comprimento de um cateto é igual ao produto dos comprimentos de sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa pela referida hipotenusa.

Figura 8 – Suporte a Propriedade 1



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Na Figura 8 acima, se cumpre:

$$\boxed{a^2 = nb \text{ e } c^2 = mb}$$

Justificativa:

Da referida figura, temos:

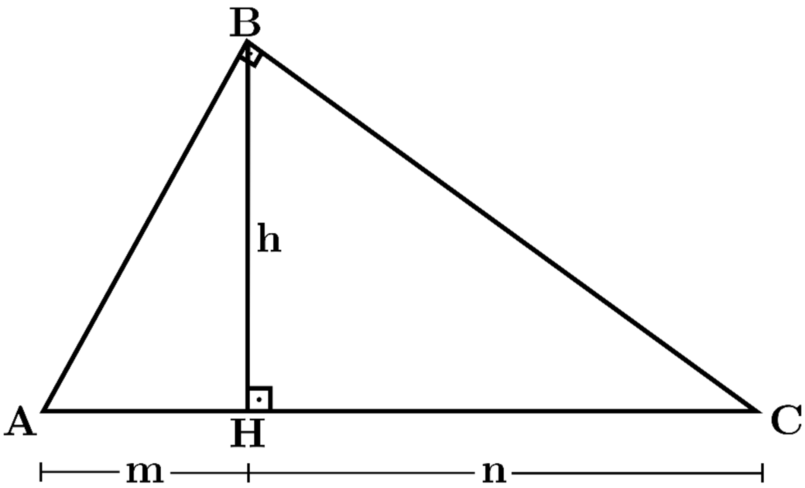
$$\Delta AHB \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{b}{c}$$

$$\therefore c^2 = bm$$

Analogamente: $a^2 = nb$

Propriedade 2: Em todo triângulo retângulo é verdade que o quadrado do comprimento da altura em relação à hipotenusa é igual ao produto dos comprimentos das projeções.

Figura 9 – Suporte a Propriedade 2



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A Figura 9 acima, se cumpre:

$$\boxed{h^2 = mn}$$

Justificativa:

Da mesma figura, temos:

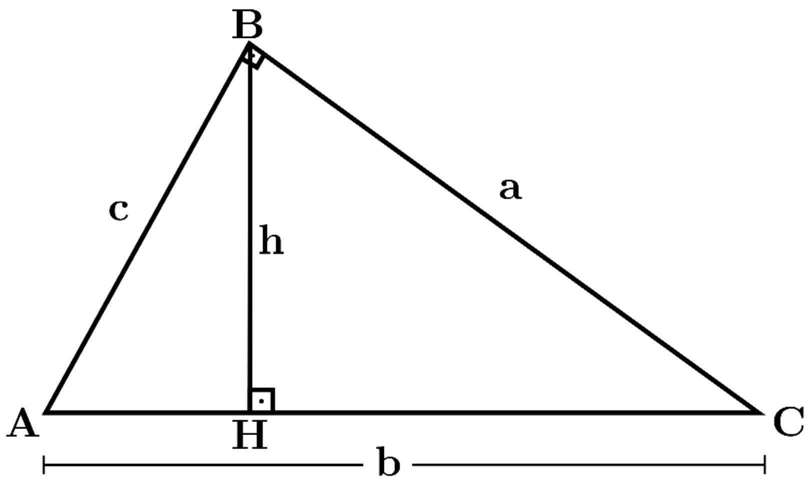
$$\triangle AHB \sim \triangle BHC$$

$$\Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

$$\therefore h^2 = mn$$

Propriedade 3: Em todo triângulo retângulo, é verdade que o produto dos comprimentos dos catetos é igual ao produto dos comprimentos da hipotenusa pela altura relativa a ela.

Figura 10 – Suporte a Propriedade 3



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Na Figura 10, se cumpre:

$$\boxed{ac = bh}$$

Justificativa:

Dessa figura, temos:

$$\Delta AHB \sim \Delta ABC$$

$$\frac{h}{c} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow bh = ac$$

Outra forma de demostrar é que do primeiro resultado podemos obter:

$$a^2 = nb$$

$$c^2 = mb$$

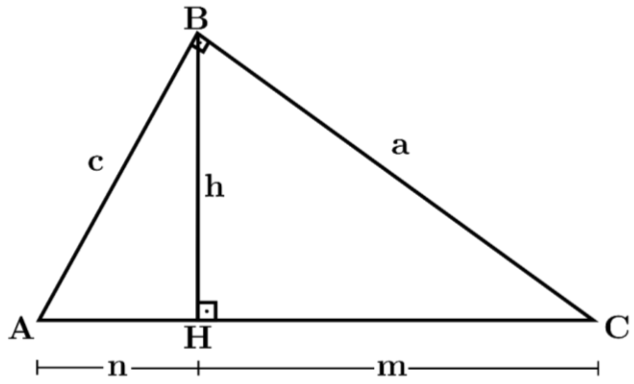
$$\Rightarrow a^2c^2 = mnb^2$$

$$mn = h^2$$

$$\therefore ac = hb$$

Propriedade 4:

Figura 11 – Suporte a Propriedade 4



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A Figura 11, cumpre:

$$\boxed{\frac{a^2}{c^2} = \frac{m}{n}}$$

Justificativa:

Do primeiro resultado, em $\triangle ABC$:

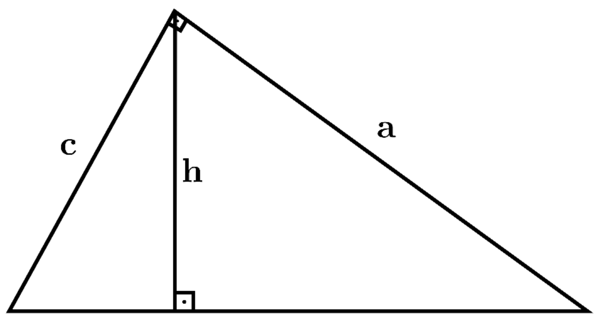
$$a^2 = m(AC)$$

$$b^2 = n(AC)$$

$$\therefore \frac{a^2}{b^2} = \frac{m}{n}$$

Propriedade 5:

Figura 12 – Suporte a Propriedade 5



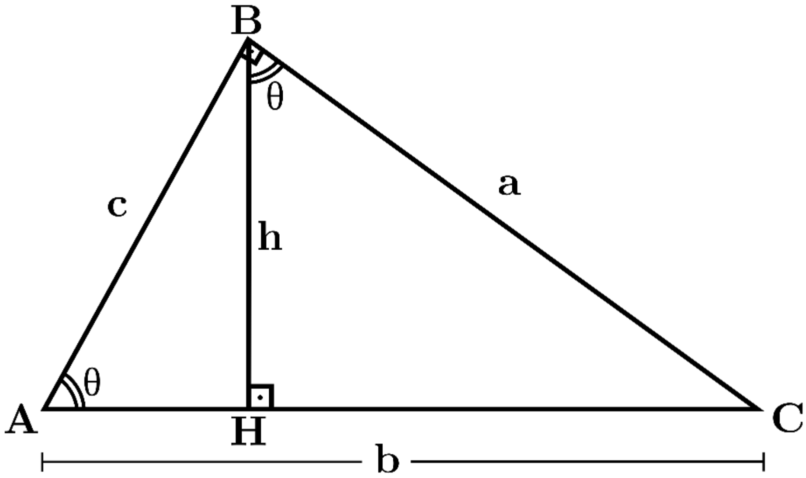
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Na Figura 12 acima, se cumpre:

$$\boxed{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}}$$

Justificativa:

Figura 13 – Suporte a justificativa da Propriedade 5



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Vamos usar:

$$* \ a^2 + c^2 = b^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$* \ ac = hb \Rightarrow a^2c^2 = h^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Dividindo (I) e (II):

$$\frac{a^2 + c^2}{a^2c^2} = \frac{b^2}{h^2b^2}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Outra forma de justificar é usando a seguinte identidade:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$\Delta AHB: sen\theta = \frac{h}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

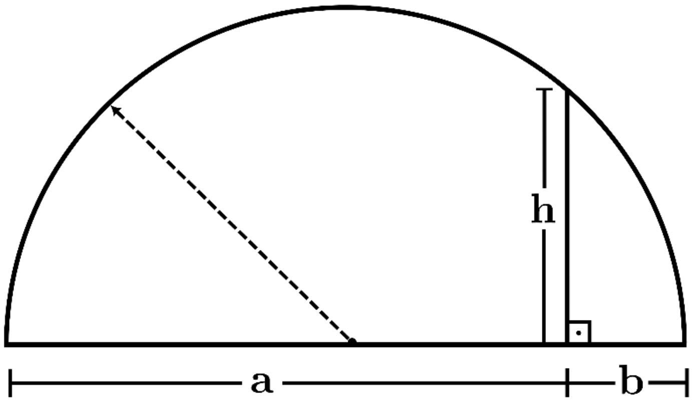
$$\Delta BHC: cos\theta = \frac{h}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Elevando ao quadrado (I) e (II) e somando membro a membro:

$$\Rightarrow \frac{h^2}{c^2} + \frac{h^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2}$$

Propriedade 6:

Figura 14 – Suporte a Propriedade 6



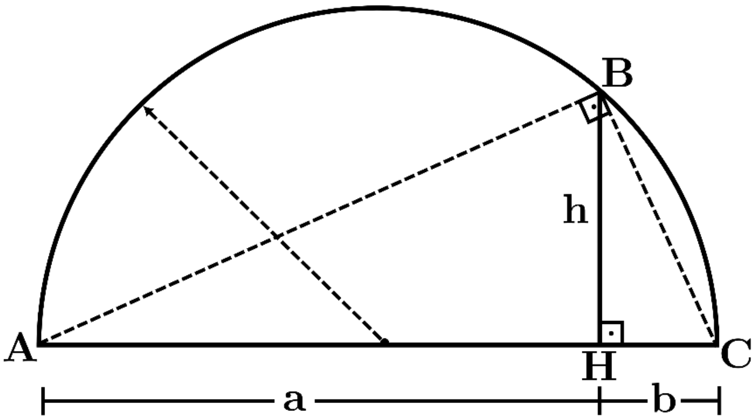
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A Figura 14 acima, cumpre:

$$\boxed{h^2 = ab}$$

Justificativa:

Figura 15 – Suporte a justificativa da Propriedade 6



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Sabemos pela Propriedade da circunferência que:

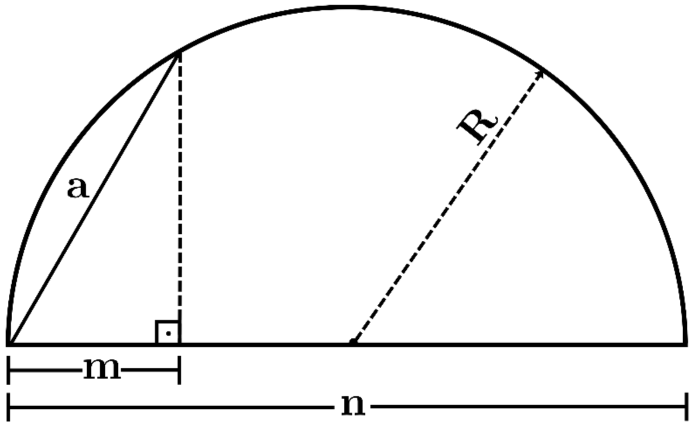
$$m\sphericalangle ABC = 90º$$

Em, $\triangle ABC$, pela propriedade:

$$\therefore h^2 = ab$$

Propriedade 7:

Figura 16 – Suporte a Propriedade 7



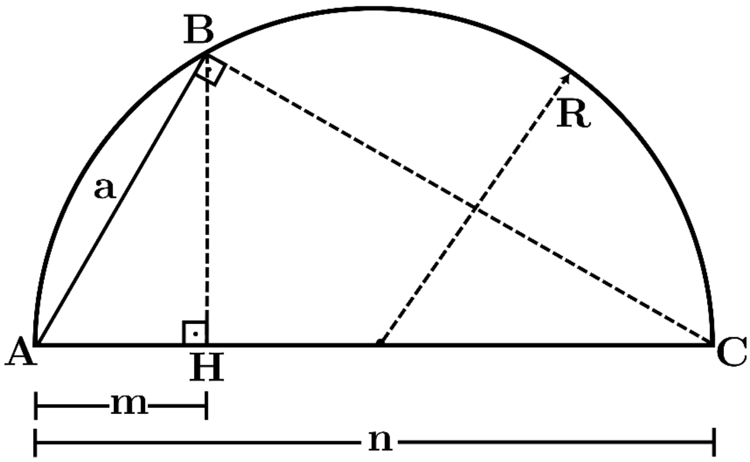
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Na Figura 16 acima, se cumpre:

$$\boxed{a^2 = mn}$$

Justificativa:

Figura 17 – Suporte a justificativa da Propriedade 7



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Pelo ângulo inscrito, temos:

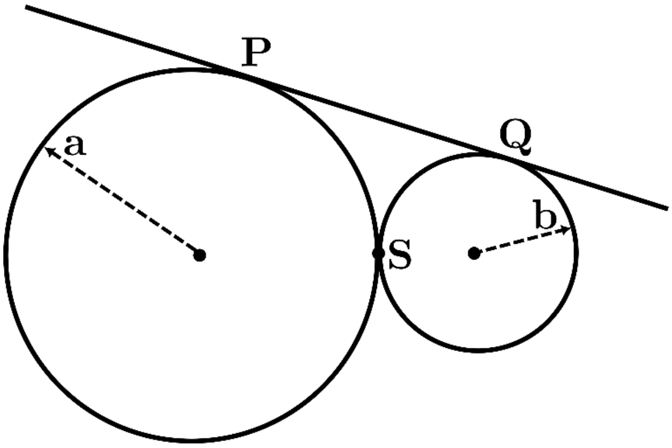
$$m\measuredangle ABC = 90º$$

Em $\triangle ABC$, pelo Propriedade[8]:

$$a^2 = mn$$

Propriedade 8: Na imagem $P, Q\ e\ S$ são pontos de tangencia e se cumpre $\boxed{PQ = 2\sqrt{ab}}$

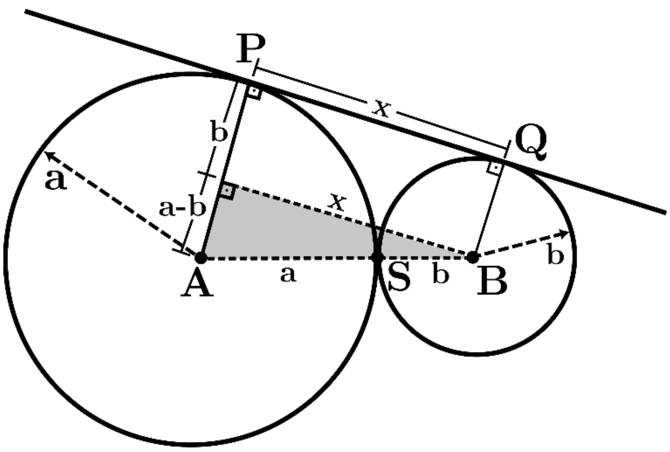
Figura 18 – Suporte a Propriedade 8



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Justificativa:

Figura 19 – Suporte a justificativa da Propriedade 8



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

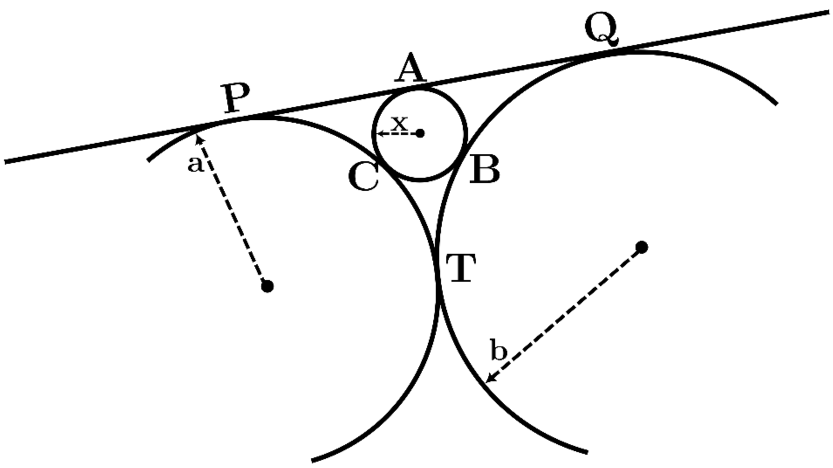
Sem perda de generalidade, seja $a \geq b$, pela Propriedade, $A, S\ e\ B$ são colineares. Se traçar $\overline{BL} \perp \overline{AP}(L\ em\ \overline{AP})$. Temos que:

[8] O teorema também pode ser inscrito assim: $a^2 = m(2R)$

$$\text{Em } \triangle ALB: x^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2$$
$$\Rightarrow x^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 4ab$$
$$\therefore x = 2\sqrt{ab}$$

Propriedade 9: Na imagem, $P, Q, T, A, B \; e \; C$ são pontos de tangência e cumpre-se: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}}$

Figura 20 – Suporte a Propriedade 9



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Justificativa: pela Propriedade anterior temos que,

$$AP = 2\sqrt{ax}$$

$$AQ = 2\sqrt{bx}$$

$$PQ = 2\sqrt{ab}$$

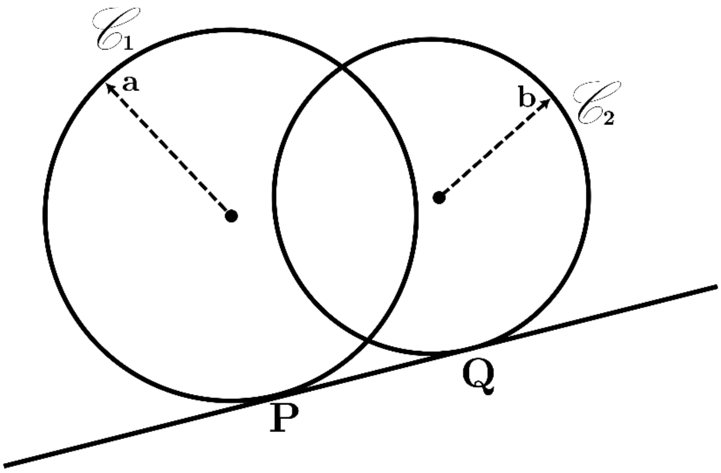
Como:

$$PQ = AP + AQ \Rightarrow 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ax} + 2\sqrt{bx} \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{x}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

Propriedade 10: na imagem, c_1 e c_2 são circunferências ortogonais e $P\ e\ Q$ são pontos de tangencia, assim: $\boxed{PQ = \sqrt{2ab}}$

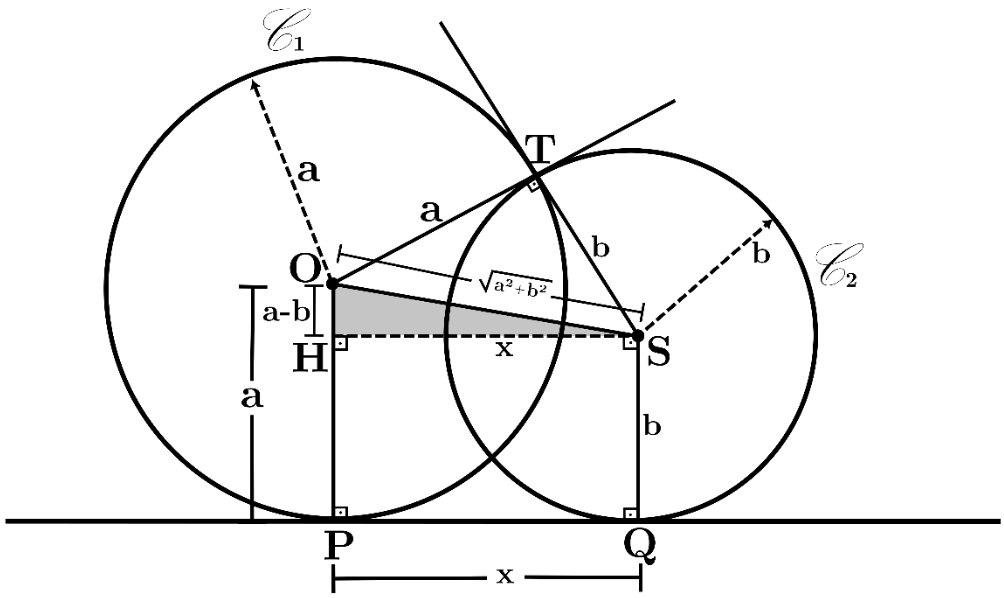
Figura 21 – Suporte a Propriedade 10



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Justificativa:

Figura 22 – Suporte a justificativa da Propriedade 10



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Seja $a \geq b$, como c_1 e c_2 são ortogonais, então:

$$m\sphericalangle OTS = 90^{\circ} \Rightarrow OS = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No trapézio $OPQS,$ traçamos

$$\overline{SH} \perp \overline{OP} \Rightarrow OH = a - b$$

Em $\triangle OHS$: $x^2 + (a-b)^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2$

$$\therefore x = \sqrt{2ab}$$

3.4 O legado do Teorema de Pitágoras

O filósofo grego Pitágoras, que viveu no século VI a.C., é também considerado o matemático mais famoso da Antiguidade. Independentemente ter ou não realizado todos os feitos em matemática, ciências, astronomia, música e medicina que lhe são atribuídos, não há dúvida de que fundou uma comunidade exclusiva dedicada à investigação da matemática e da filosofia, cuja visão compreendia os números como fundamentos sagrados do Universo.

Os pitagóricos eram mestres em geometria e já sabiam que a soma dos três ângulos internos de um triângulo (180º) é igual a soma de dois ângulos retos (90º + 90º), um fato que, dois séculos depois, Euclides descreveria como o postulado do triângulo[9]. Os seguidores de Pitágoras também conheciam alguns dos poliedros regulares – formas tridimensionais de simetria perfeita (como o cubo) – que mais tarde seriam chamados de "sólidos platônicos".

O próprio Pitágoras é, antes de tudo, associado à fórmula que descreve a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Conhecida como o teorema de Pitágoras, ela estabelece que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Em que $\boldsymbol{c}$ é o lado mais longo do triângulo (a hipotenusa), e $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ representam os outros dois lados, menores e adjacentes ao ângulo reto. Por exemplo, um triângulo retângulo com lados menores medindo $3\ cm$ e $4\ cm$ terá uma hipotenusa de $5\ cm$. O

[9] Se uma linha transversal corta duas linhas retas de tal forma que a soma dos ângulos internos de um lado da transversal for menor que dois ângulos retos (180°), então as duas linhas se encontrarão do lado onde os ângulos internos somam menos que 180°.

comprimento dessa hipotenusa é obtido por meio do cálculo: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Esses conjuntos de soluções com números inteiros para a equação $a^2 + b^2 = c^2$ são conhecidos como triplas pitagóricas.

Há boas evidências de que babilônicos e chineses já conhecessem a relação matemática entre os lados de um triângulo retângulo séculos antes do nascimento de Pitágoras. Acredita-se, contudo, que foi Pitágoras o primeiro a demonstrar formalmente a validade da fórmula para todos os triângulos retângulos. Por esse motivo, o teorema leva o seu nome.

3.5 A comunidade pitagórica

Pitágoras começou a viajar aos vinte anos e passou muitos anos fora de sua terra natal; as ideias que absorveu em outras culturas, sem dúvida, alimentaram sua inspiração matemática. Natural de Samos, na Anatólia ocidental[10], acredita-se que tenha sido aluno do filósofo Anaximandro, na escola de Tales de Mileto. Há indícios de que Pitágoras visitou a Fenícia, a Pérsia, a Babilônia e o Egito – e possivelmente também à Índia. Os egípcios já sabiam que um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 unidades formava um ângulo reto. Por isso, seus agrimensores utilizavam cordas com essas medidas para traçar ângulos retos perfeitos em projetos de construção.

Após cerca de vinte anos de viagens, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona, no sul da Itália, uma cidade com significativa população grega. Lá, fundou a irmandade pitagórica – uma comunidade dedicada ao ensino de suas crenças filosóficas e matemáticas. Sob sua liderança, a irmandade conquistou considerável influência política, visto que

> para entrar na Escola Pitagórica, o candidato (somente homens eram aceitos) se submetia a duas provas, físicas e psicológicas, com o propósito de mostrar pendor para os estudos matemáticos e religiosos. Se as ultrapassasse, ele seria aceito como acusmático, que significa que deveria fazer um voto de silêncio por cindo anos. Os ensinamentos não eram escritos, mas transmitidos de “boca a ouvido” para os que estavam prontos a assimilá-los (Souza, 2018, p.14).

A demonstração do teorema associado à Escola Pitagórica inspirou matemáticos e educadores ao longo da história. Um exemplo notável é o professor de

---

[10] Atual Turquia.

Ohio Elisha S. Loomis, que publicou, em 1927, o livro *The Pythagorean Proposition*, contendo 230 demonstrações do teorema. Em 1940, foi lançada uma segunda edição ampliada da obra, reunindo 370 demonstrações.

No livro *As Grandes Equações: A História das Fórmulas Matemáticas Mais Importantes e os Cientistas que as criaram*, o autor Robert P. Crease explora o fascínio duradouro exercido pelo teorema de Pitágoras, questionando os motivos que levaram tanto amadores quanto profissionais a se interessarem por ele ao longo de milênios.

O autor responde à pergunta destacando que:

> O Teorema de Pitágoras nos parece mágico pois se desdobra em três: a facilidade com que percebemos sua utilidade, a acessibilidade de sua prova e a forma como o ato de prová-lo parece nos levar a verdades maiores, dando-nos uma amostra do que é o prazer do conhecimento (Crease, 2011, p. 26).

Além de destacar o fascínio exercido pelo Teorema de Pitágoras, Crease (2011) aprofunda sua análise ao discutir o impacto dessa fórmula na história da matemática e na formação do pensamento científico. O autor argumenta que sua aplicação prática, aliada à clareza conceitual e à profundidade intelectual, evidencia a beleza intrínseca da matemática como um caminho para o prazer do conhecimento.

3.6 Aplicações do Teorema de Pitágoras

As aplicações do Teorema de Pitágoras ultrapassam os limites da geometria pura, sendo fundamentais em diversas áreas do conhecimento e da prática cotidiana. Desde a medição de distâncias inacessíveis na topografia e na navegação até seu papel central na física, na engenharia e na computação gráfica, essa relação matemática universal destaca-se como uma ferramenta poderosa de resolver problemas envolvendo medidas, ângulos e proporções.

Crease (2001), enfatiza essa aplicabilidade do teorema, destacando que ele é utilizado não apenas na carpintaria e na arquitetura, mas em praticamente qualquer aplicação e profissão. O autor menciona exemplos como a regra pitagórica para calcular distâncias em espaços tridimensionais – como a diagonal de uma caixa de sapatos – e mesmo em espaços euclidianos quadrimensionais, ilustrando a abrangência do conceito.

No contexto da Educação Básica, autores brasileiros como Dante (2017) e Lopes (2014) ressaltam a importância de apresentar o Teorema de Pitágoras de forma contextualizada e significativa, aproximando o conteúdo da realidade dos estudantes. Dante (2017), por exemplo, propõe atividades práticas em que os alunos utilizam o teorema para calcular distâncias reais, como o comprimento de rampas de acessibilidade ou a altura de uma escada apoiada na parede.

Segundo Lopes (2014), "é fundamental que os alunos compreendam que a matemática não é um conjunto isolado de fórmulas, mas uma linguagem que descreve e interpreta o mundo ao nosso redor" (p. 89). Nesse sentido, o Teorema de Pitágoras torna-se uma ponte entre o conteúdo teórico e sua aplicação prática, estimulando o raciocínio lógico e a resolução de problemas.

Além disso, o uso de tecnologias digitais tem ampliado as possibilidades de ensino e aprendizagem do teorema. De acordo com Borba e Villarreal (2005), a visualização de figuras geométricas por meio de softwares dinâmicos, como o GeoGebra, potencializa a compreensão das propriedades geométricas envolvidas. Essa abordagem favorece a construção de significados pelos alunos, ao permitir a manipulação interativa dos elementos da figura.

Outro aspecto relevante é a interdisciplinaridade. O Teorema de Pitágoras pode ser explorado em projetos que envolvam matemática e ciências, como no estudo do movimento de projéteis ou no cálculo da resultante de forças – temas recorrentes no Ensino Médio. Em atividades desse tipo, os estudantes percebem a utilidade da matemática em contextos mais amplos, desenvolvendo também competências investigativas e argumentativas.

Silva e Carvalho (2012) apontam que, quando os estudantes são desafiados a aplicar o Teorema em situações-problema, eles não apenas memorizam a fórmula, mas desenvolvem estratégias para analisá-las criticamente, promovendo uma aprendizagem significativa. A resolução de problemas contextualizados, segundo os autores, deve ser um eixo estruturante no ensino de conteúdos geométricos.

Em consonância com essa perspectiva, Smole e Diniz (2001) afirmam que a aprendizagem da geometria – e, em particular, do Teorema de Pitágoras – deve partir de experiências concretas que despertem o interesse e a curiosidade dos estudantes. "A relação entre o lado maior de um triângulo retângulo e seus catetos deve ser descoberta pelos alunos, e não apenas informada pelo professor" (Smole; Diniz, 2001, p. 57).

Por fim, cabe destacar a importância do trabalho com diferentes formas de representação – algébrica, geométrica e gráfica – como defendem Pavanello e Rezende (2010). Esses autores assinalam que a compreensão profunda do Teorema de Pitágoras passa pela capacidade de transitar entre diferentes registros de representação, conforme proposto por Duval (2003), promovendo uma aprendizagem mais ampla e duradoura.

4 TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Com o progresso das tecnologias digitais, surgiram inúmeras oportunidades que transformaram e ampliaram a maneira de ensinar e aprender. Embora as tecnologias tenham avançado significativamente, Moran, Masetto e Behrens (2013) ressaltam que seu uso, por si só, não assegura resultados melhores. Para os autores, a eficácia depende não apenas dos recursos tecnológicos, mas, sobretudo, das pessoas, da gestão e do projeto pedagógico envolvidos. A tecnologia permeia todos os setores da sociedade e, a cada dia, sua importância se torna mais evidente, criando novas forma de comunicação, gestão de negócios e produção de informações.

No campo educacional, essa transformação também se mostra essencial, pois, como observam Moran, Masetto e Behrens (2013, p. 12), “enquanto a sociedade muda e experimenta desafios mais complexos, a educação formal continua, de maneira geral, organizada de modo previsível, repetitivo, burocrático e pouco atraente”.

Segundo D’Ambrosio (2012, p. 74), vivemos na chamada “sociedade do conhecimento”, contexto no qual a escola já não tem justificativa para continuar oferecendo conteúdos “obsoletos e ultrapassados e muitas vezes mortos”. Particularmente no que se refere à ciência e à tecnologia, D’Ambrosio argumenta que a escola precisa alinhar-se aos valores e às expectativas da sociedade contemporânea, mostrando-se capaz de criar, organizar e disseminar um “conhecimento vivo”. Para ele, isso exige o uso efetivo das tecnologias educacionais, uma vez que a educação do futuro estará diretamente vinculada ao avanço da informática e das comunicações.

Ferreira, Camponez e Scortegagna (2015) apontam que as primeiras iniciativas de integração das tecnologias no ensino da matemática surgiram no final dos anos 1990, impulsionadas pelo avanço e pela maior acessibilidade da computação e da internet. Desde então, diversas discussões têm sido promovidas sobre como essas ferramentas podem enriquecer o ensino de matemática, resultando na proposição de estratégia para a inserção das tecnologias na sala de aula.

Inicialmente, destacam-se os softwares educativos específicos para matemática e as planilhas eletrônicas, que possibilitam o desenvolvimento de habilidades de cálculo e análise. Mais recentemente, com o surgimento de novas tecnologias, tornou-se viável o uso de recursos como realidade virtual e aumentada, blogs educacionais e simuladores, ampliando ainda mais o leque de possibilidades para um ensino de matemática dinâmico e contextualizado.

4.1 Fase das Tecnologias Digitais em Educação Matemática

Na obra *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática*, Borba, Silva e Gadanidis (2023) propõem uma organização cronológica das transformações e evoluções das tecnologias digitais no contexto da educação matemática, estruturando essa trajetória em quatro fases. Essa classificação visa organizar e sistematizar as principais pesquisas realizadas no Brasil, oferecendo uma visão abrangente sobre o desenvolvimento do uso de tecnologias ao longo do tempo.

Ao delinear essas fases, os autores facilitam a compreensão das mudanças nos métodos de ensino e na integração de ferramentas digitais, desde as primeiras experiências com recursos computacionais até a incorporação de tecnologias mais avançadas. Essa sistematização contribui para o entendimento das práticas pedagógicas adotadas em diferentes períodos, refletindo as influências das inovações tecnológicas na construção do conhecimento matemático ao longo das últimas décadas.

Na primeira fase do uso das tecnologias digitais na educação matemática, conforme descrito por Borba, Silva e Gadanidis (2023), nos anos 1980, o foco estava na exploração do uso de calculadoras e computadores como ferramentas de apoio ao ensino. O destaque desse período foi o software LOGO, um programa pioneiro baseado na teoria construcionista de Seymour Papert, que valorizava a construção ativa do conhecimento pelo aluno. A abordagem construcionista sugeria que, ao interagir com o LOGO, os estudantes poderiam desenvolver um pensamento matemático mais profundo, por meio da resolução de problemas e da criação de construções próprias, promovendo um aprendizado fundamentado na experimentação e na descoberta.

Essa fase inicial foi crucial para inaugurar discussões pedagógicas sobre o papel das tecnologias no ensino de matemática, evidenciando o potencial dos recursos digitais para transformar a relação dos estudantes com o conhecimento matemático, tornando-os mais ativos em seu processo de aprendizagem.

No final da década de 1980 e início da de 1990, o governo brasileiro, por meio do Ministério da Educação, implementou o projeto EDUCOM, cujo propósito era incentivar pesquisas voltadas à exploração de metodologias inovadoras para a integração do computador na educação. O projeto contou com a participação de cinco universidades públicas, que se dedicaram a investigar o impacto e as possibilidades do uso pedagógico do computador no processo de aprendizagem. As pesquisas desenvolvidas nesse contexto buscavam compreender como essa nova tecnologia poderia enriquecer o ensino, contribuindo para a construção de um cenário educacional mais alinhado às transformações tecnológicas da época (Borba; Silva; Gadanidis, 2023).

A segunda fase das tecnologias digitais na educação matemática, segundo Borba, Silva e Gadanidis (2023), ocorre na primeira metade dos anos 1990 e é marcada pela popularização dos computadores pessoais. Nesse período, o uso de computadores na educação gerava diferentes perspectivas. Enquanto alguns ainda desconheciam essas tecnologias ou careciam de experiência com elas, outros demonstravam pouco interesse em incorporá-las ao ensino.

No entanto, havia também um grupo que enxergava nas Tecnologias da Informação (TI) um potencial inovador para a construção do conhecimento, contrapondo-se à resistência daqueles totalmente contrários à sua adoção no ambiente educacional. Essa fase constituiu, portanto, um momento de transição e de debates, em que os defensores das TI buscavam explorar o impacto positivo dessas ferramentas na educação, frente às incertezas e aos receios dos mais céticos.

Além do crescimento no uso dos computadores pessoais, houve, nessa fase, uma expansão significativa na criação de softwares educacionais por empresas, governos e outras entidades interessadas em apoiar o ensino com tecnologias digitais. Esses softwares foram desenvolvidos para auxiliar no aprimoramento de habilidades específicas e facilitar a aprendizagem de conteúdos diversos. No entanto, como destacam Borba, Silva e Gadanidis (2023), a rápida introdução dessas ferramentas nas escolas exigiu que os professores saíssem de sua zona de conforto, enfrentando desafios para integrá-las de forma eficaz ao processo de ensino.

Entre os softwares mencionados pelos autores, destacam-se programas de cálculo e planilhas eletrônicas, além de sistemas voltados para a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento lógico, como o *Cabri Géomètre* e o *Geometrichs*, voltados para o ensino de geometria, e o *Winplot* e o *Graphmathica*, voltados para o ensino de funções. Essas ferramentas representavam um avanço significativo à época, mas demandavam um preparo técnico e pedagógico que a maioria dos professores ainda não possuía. Esse contexto evidenciou a necessidade de formação docente, de modo que os professores pudessem não apenas operar essas tecnologias, mas também integrá-las de forma coerente às metodologias de ensino, ampliando as possibilidades de aprendizado para os alunos.

A terceira fase das tecnologias digitais no ensino de matemática, conforme Borba, Silva e Gadanidis (2023), é marcada pelo impacto crescente da internet a partir do final dos anos 1990. Os autores destacam que a criação de cursos online voltados à educação matemática trouxe à tona diversas questões e desafios, especialmente no que se refere à natureza das interações possibilitadas pelos ambientes digitais. Segundo apontam, as interfaces tecnológicas moldam a qualidade e a forma da comunicação entre estudantes, professores e pesquisadores, transformando, por extensão, a própria essência das ideias matemáticas em contextos online (Borba; Silva; Gadanidis, 2023). Isso implica que as trocas de conhecimento e os processos de ensino e aprendizagem de matemática mediados pela tecnologia não são neutros, mas reconfigurados pelas plataformas digitais, que introduzem novos modos de apreensão e expressão do pensamento matemático.

Nessa perspectiva, a terceira fase das tecnologias digitais representa um marco de transição que evidencia a interdependência entre tecnologia e pedagogia. Ela sinaliza o potencial das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) para alterar práticas tradicionais de ensino e ampliar as possibilidades de construção coletiva do conhecimento matemático, ao mesmo tempo que desafia os educadores e repensarem metodologias e abordagens pedagógicas diante das novas possibilidades e limitações dos ambientes virtuais de aprendizagem.

A quarta fase das tecnologias digitais, segundo Borba, Silva e Gadanidis (2015), tem início em 2004 e é marcada pelo avanço da conectividade e pela melhoria significativa da velocidade de acesso à internet. Esse progresso abre novas possibilidades para o uso das tecnologias no ensino de matemática, consolidando o termo Tecnologias Digitais (TD) como representação da amplitude e da diversidade dos recursos que passaram a integrar o ambiente educacional.

No Quadro 2, apresenta-se um panorama das principais possibilidades oferecidas por essa fase, com destaque para características como maior interatividade, recursos multimodais e a capacidade de personalização e adaptação de conteúdos e métodos de ensino conforme as necessidades dos alunos.

Quadro 2 – Principais aspectos da Quarta Fase

Plataforma GeoGebra	Cenários inovadores de investigação matemática
Multimodalidade	Uso de vídeos na internet; fácil acesso a vídeos em plataformas ou repositórios.
Novos designs e interatividade	Comunidades on-line e ambientes virtuais.
Tecnologias móveis ou portáteis	Celulares inteligentes, câmeras digitais, interação através do toque em tela e acesso a internet.
Performance	Internet em sala de aula, redes sociais (facebook) a matemática dos estudantes passa a ir além da sala de aula.
Performance matemática digital	Estudantes e professores como artistas, ambientes multimodais de aprendizagem entre outros.

Fonte: adaptado de Borba, Silva e Gadanidis (2023)

Para Borba, Silva e Gadanidis (2023), a quarta fase representa um ambiente em constante expansão e repleto de potencial, que ainda demanda investigação e aprofundamento. Essa etapa caracteriza-se por um cenário marcado por "inquietações, questionamentos e perguntas" que precisam ser articulados e explorados com maior profundidade. Trata-se de um momento fértil para novas descobertas, no qual emergem inúmeras possibilidades de pesquisa sobre o uso das tecnologias digitais no ensino de matemática, impulsionando reflexões acerca de como essas ferramentas podem transformar práticas e concepções pedagógicas.

Nesse contexto, a evolução das Tecnologias Digitais na Educação Matemática tem sido amplamente discutida por diversos pesquisadores. De acordo com Silva (2024), ao resenhar o livro *Vídeos na Educação Matemática: Paulo Freire e a Quinta Fase das Tecnologias Digitais*, de Marcelo de Carvalho Borba, Daise Lago Pereira Souto e Neil da Rocha Canedo Junior, evidencia-se uma nova perspectiva sobre esse processo evolutivo.

Silva (2024) destaca que, ao analisar a obra de Borba, Souto e Canedo Junior, os autores relatam que, durante palestras e seminários ministrados por eles nos últimos anos, surgiram questionamentos sobre a existência de uma quinta fase das Tecnologias Digitais na Educação Matemática.

Segundo a autora, um dos principais debates abordados na obra refere-se à possibilidade de os vídeos digitais – emergentes na quarta fase – serem considerados o símbolo dessa nova etapa. Além disso, ela ressalta que, conforme apresentado pelos autores, a quinta fase das Tecnologias Digitais associa-se cronologicamente ao período da pandemia da Covid-19, que impôs uma necessidade urgente de adaptação ao ensino remoto.

A pandemia, nesse contexto, tornou-se o marco dessa quinta fase, pois impulsionou o uso das Tecnologias Digitais de maneira superlativa, intensificando sua presença na prática educacional. No entanto, os autores também alertam para a desigualdade no acesso e na apropriação dessas tecnologias, especialmente em países como o Brasil. A ampliação do uso das Tecnologias Digitais não ocorre de forma homogênea, o que gera desafios para professores e estudantes em diferentes contextos.

Esse novo cenário reforça a necessidade de investigações sobre o impacto das Tecnologias Digitais na Educação Matemática, considerando não apenas seu potencial pedagógico, mas também as condições de acesso e a equidade no processo de ensino-aprendizagem.

4.2 Uma revisão da literatura

Nesta subseção, apresentamos o processo de busca realizado na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) com o objetivo de identificar pesquisas relacionadas ao ensino de geometria plana pelo uso do GeoGebra.

O recorte temporal estabelecido, compreendendo os anos de 2020 a 2025, justifica-se pela intenção de contemplar estudos recentes que dialoguem com as demandas atuais do ensino de Matemática, especialmente no que diz respeito à incorporação de tecnologias digitais. Esse período abrange o contexto pós-pandemia da Covid-19, marcado pela intensificação do uso de ferramentas digitais no ambiente educacional, o que potencializou o desenvolvimento de metodologias inovadoras e o uso de recursos como o GeoGebra, no ensino da geometria. Além disso, esse intervalo permite identificar tendências contemporâneas e contribuições atuais da literatura para o ensino-aprendizagem da geometria plana, especialmente no que se refere à abordagem da Resolução de Problemas.

A primeira busca foi realizada com os termos “Geometria Plana e GeoGebra”, aplicando-se um filtro de período de publicação entre 2020 e 2025, com a exigência de que os termos estivessem presentes no título dos trabalhos. Esse procedimento resultou na identificação de cinco (5) estudos relacionados ao tema. No entanto, optou-se por restringir à análise àqueles que abordam as tecnologias digitais como elemento central.

Com o objetivo de refinar a busca, foi realizada uma nova pesquisa, dessa vez direcionada especificamente a trabalhos que articulam a Resolução de Problemas com o uso do GeoGebra. Nessa etapa, foram encontrado dois (2) estudos.

É importante destacar que os trabalhos selecionados compartilham a preocupação com os processos de ensino e aprendizagem da geometria plana. A análise dessas pesquisas revelou uma diversidade de enfoques teórico-metodológicos, tanto no que se refere à Resolução de Problemas quanto ao uso do GeoGebra, contribuindo para uma compreensão mais ampla e aprofundada do nosso objeto de estudo, conforme sintetizado no Quadro 3.

Quadro 3 – Síntese de artigos e teses analisadas

Autor	Título	Foco dos dados	Resultados encontrados
Braz (2020)	GeoGebra e a resolução de problemas na aprendizagem da função polinomial	Estudantes da Licenciatura em Matemática	Uma abordagem dada ao ensino da função polinomial utilizando as ferramentas, os comandos e aplicativos da Plataforma GeoGebra favorecem ao desenvolvimento e a aprendizagem deste conteúdo.
Silva (2020)	As potencialidades da resolução de problemas e do GeoGebra em	Alunos da Pós-Graduação em Ensino de Ciências e	Conclui que as potencialidades da Resolução de Problemas somadas às do

	problemas de otimização do cálculo diferencial	Educação Matemática.	GeoGebra permitem intensificar o ensino e a aprendizagem do Cálculo, ampliando a compreensão de alguns conceitos.

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A seguir, apresentaremos um resumo detalhado de cada pesquisa analisada, organizadas cronologicamente, com ênfase nos principais pontos e nas contribuições de cada estudo.

A pesquisa desenvolvida por Braz (2020) teve como objetivo investigar o ensino da função polinomial por meio da Plataforma GeoGebra, associando-a à metodologia de Resolução de Problemas sob a perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. Os resultados apontaram que a aplicação de atividades em grupo, mediadas por essa plataforma, favoreceu uma aprendizagem colaborativa e significativa para os estudantes.

A operacionalização da proposta envolveu a apresentação de problemas geradores aos alunos, com orientações baseadas nas etapas da Resolução de Problemas, promovendo interação, colaboração e socialização entre os participantes. A pesquisa evidenciou um impacto positivo no modo como os estudantes passaram a representar a função polinomial, especialmente a partir das quatro representações sugeridas por Stewart (2016). Além disso, foi observada uma evolução na aprendizagem dos alunos, particularmente em relação à representação visual dos gráficos da função polinomial.

Outro ponto relevante foi a ênfase na importância da criação de aplicativos e construções dinâmicas no GeoGebra, com a participação ativa dos estudantes no desenvolvimento dessas ferramentas. O estudo conclui que a associação entre a Resolução de Problemas e o uso de Tecnologias Educacionais pode transformar a prática do ensino de Matemática, tornando o ambiente de aprendizagem mais interativo e motivador. No entanto, destaca-se também o desafio enfrentado por muitos docentes no domínio das tecnologias e dos conteúdos necessários para a elaboração eficaz de problemas geradores.

A dissertação de Silva (2020) teve como objetivo investigar as potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas e do uso do GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir da resolução de problemas de Otimização.

A pesquisa foi realizada com quatro alunos da Pós-Graduação do PPGECM da UEPB, campus de Campina Grande, ao longo de dois encontros de quatro horas cada. Durante as atividades, os participantes foram inseridos no ambiente do GeoGebra e orientados a construir representações visuais que auxiliassem na compreensão das aplicações da Derivadas em contextos de Otimização.

Os resultados demonstraram que a combinação entre a metodologia e o uso do software ampliou a compreensão dos conceitos de Cálculo. A interface amigável do GeoGebra e seus recursos dinâmicos facilitaram a construção de gráficos e a visualização das soluções, promovendo uma compreensão mais clara e significativa dos conteúdos. A pesquisa conclui que a articulação entre Resolução de Problemas e GeoGebra intensifica os processos de ensino e aprendizagem em Cálculo, incentivando o desenvolvimento do raciocínio visual. O autor propõe que a exploração dessas estratégias pode ampliar as formas de abordagem de problemas matemáticos e fomentar novas investigações no campo da Educação Matemática.

A análise das dissertações e teses anteriormente mencionadas revela que a Resolução de Problemas emerge como uma metodologia central para a aprendizagem matemática, sobretudo por seu potencial de estimular a autonomia discente e promover reflexões críticas sobre os conceitos explorados. Tais estudos reforçam a importância de envolver os estudantes em atividades desafiadora que os posicionem como protagonistas no processo de aprendizagem, em situações que exijam colaboração e tomada de decisões fundamentadas.

Nosso estudo compartilha dessa mesma orientação metodológica, direcionando-se especificamente ao ensino das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. A partir da Resolução de Problemas, buscamos proporcionar aos alunos uma experiência prática e significativa, que favoreça a compreensão aprofundada dessas relações. Utilizamos, para isso, o GeoGebra como ferramenta de apoio à criação de representações dinâmicas, que auxiliam na visualização e na exploração dos conceitos matemáticos envolvidos.

O uso da Plataforma GeoGebra, nesse contexto, está em consonância com as propostas das dissertações e teses analisadas, as quais defendem a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino de Matemática. Entretanto, vale destacar que esta pesquisa aborda uma área ainda pouco explorada na literatura acadêmica: a articulação entre a Metodologia de Resolução de Problemas, o uso do GeoGebra e o estudo das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Embora existam diversos estudos que enfocam Tecnologias Digitais e metodologias ativas, são escassas as investigações que integram esses elementos em torno dessa temática específica.

Ao propor essa abordagem, buscamos não apenas preencher essa lacuna na literatura, mas também contribuir significativamente para o campo da Educação Matemática, ao integrar práticas pedagógicas eficazes com recursos tecnológicos capazes de potencializar o processo de ensino e aprendizagem.

4.3 A utilização das Tecnologias na Educação Matemática

Nesta subseção, abordaremos a utilização das tecnologias no contexto da Educação Matemática, com ênfase nas ferramentas digitais que têm potencial para transformar as práticas de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, discutiremos como plataformas como o GeoGebra, entre outras ferramentas digitais, têm sido integradas ao processo educacional, especialmente no apoio à resolução de problemas e à visualização de conceitos abstratos.

Scortegagna (2015) identifica que, no Ensino de Matemática, diversas tecnologias têm sido amplamente empregadas, como softwares educacionais – incluindo o GeoGebra – além de planilhas eletrônicas, vídeos, jogos online e simuladores. A autora traça um panorama das tendências para o uso dessas tecnologias na educação, considerando perspectivas de curto, médio e longo prazo. Inicialmente, destaca a consolidação da educação híbrida, que combina métodos presenciais e online; posteriormente, enfatiza o potencial crescente dos games, simuladores e da realidade aumentada; e, em um horizonte mais distante, aponta para o uso de impressoras 3D e tecnologias vestíveis. Tais inovações segundo a autora, visam enriquecer as práticas pedagógicas e promover uma aprendizagem mais significativa.

Entre as ferramentas destacadas, o GeoGebra sobressai-se como um recurso que amplia as possibilidades de abordagem de conteúdos tradicionalmente restritos ao ambiente da sala de aula. Scortegagna (2015) ressalta que esse tipo de software oferece recursos visuais relevantes, sobretudo nas representações gráficas, que favorecem a construção e a compreensão de conceitos matemáticos, além de promover uma aprendizagem mais dinâmica e interativa.

As representações geométricas, aliadas a métodos de exploração e visualização de conteúdos, particularmente no campo da Matemática, contribuem para a criação de ambientes tecnológicos que diversificam e potencializam as abordagens pedagógicas. Esses recursos não apenas qualificam o processo educativo, como também desempenham um papel importante na promoção da cidadania. Conforme apontam Borba e Penteado (2012), o desenvolvimento da “alfabetização digital” deve ser considerado tão relevantes quanto a alfabetização convencional, que abrange o domínio da língua materna e do conhecimento matemático.

Nesse sentido, Barros (2017) destaca que a alfabetização tecnológica constitui um componente essencial na formação dos indivíduos que vivem na era da cibercultura, assim como a alfabetização e o letramento matemático. Tal afirmação nos leva a refletir sobre a importância da integração das tecnologias digitais ao processo de aprendizagem, especialmente no âmbito da Educação Matemática.

A alfabetização tecnológica não se restringe ao simples uso de ferramentas digitais, mas envolve o desenvolvimento de habilidades que possibilitam ao aluno compreender, avaliar e utilizar essas tecnologias de forma crítica, autônoma e eficiente. No contexto da Matemática, essa dimensão torna-se ainda mais relevante, pois permite que os estudantes explorem conceitos abstratos de maneira visual, interativa e contextualizada. Um exemplo disso é o uso do GeoGebra, que proporciona experiências de aprendizagem mais ricas, dinâmicas e significativas.

Assim, ao se considerar a alfabetização matemática e a alfabetização tecnológica de modo integrado, evidencia-se que a formação dos estudantes deve contemplar, simultaneamente, o domínio dos conceitos matemáticos e a habilidade de utilizar tecnologias digitais como instrumentos para a construção, a análise e a comunicação do conhecimento.

4.3.1 A resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais

O uso de Tecnologias Digitais na Educação Matemática tem sido um campo de intenso estudo e inovação, com diversas pesquisas explorando o impacto dessas ferramentas no ensino e na aprendizagem. Um dos aspectos mais relevantes dessa abordagem é a integração da Resolução de Problemas, uma metodologia ativa que visa promover a autonomia dos alunos, estimulando-o a investigar, explorar e construir o conhecimento de forma contextualizada.

Nesse cenário, a introdução das tecnologias digitais na Educação Matemática tem sido impulsionada pela necessidade de modernizar as práticas pedagógicas, promovendo abordagens mais dinâmicas e engajadoras. Conforme argumentam Allevato e Onuchic (2003), o uso de softwares educativos permite aos estudantes explorar conceitos com maior profundidade, por meio de representações visuais que facilitam a compreensão de ideias matemáticas complexas. O uso do computador, por exemplo, possibilita a visualização de gráficos, simulações e representações múltiplas que, quando bem exploradas, potencializam a aprendizagem.

Além disso, o computador permite a coordenação entre representações algébricas, gráficas e numéricas, aspectos fundamentais para o ensino da Matemática. Borba (1994) e Villarreal (1999) enfatizam que a articulação entre essas representações auxilia o estudante a estabelecer conexões entre conceitos e a integrar diferentes áreas do conhecimento matemático. No caso da Geometria, por exemplo, a visualização de curvas e superfícies no plano cartesiano ou em 3D torna-se essencial para a compreensão de fenômenos matemáticos.

A utilização de Plataformas como o GeoGebra e o Desmos, que permitem a criação de representações gráficas e simulações dinâmicas, favorece a resolução de problemas e torna os conceitos mais acessíveis. Com essas ferramentas, os alunos podem testar diferentes estratégias de resolução e observar, em tempo real, os efeitos das mudanças realizadas, tornando o processo de aprendizagem mais ativo e significativo. Conforme Borba (1994), tais recursos ampliam as possibilidades de exploração e experimentação, elementos fundamentais para a construção ou reconstrução do conhecimento.

Nesse contexto, a integração entre as tecnologias digitais e a Resolução de Problemas no ensino de Matemática permite aos alunos desenvolverem uma compreensão mais rica e integrada dos conceitos. As ferramentas tecnológicas oferecem oportunidades para realizar experimentos e simulações, testar hipóteses e observar os resultados de suas decisões. Essa abordagem empírico-experimental facilita a internalização dos conceitos e contribui para uma formalização mais fluida e natural.

De acordo com Allevato e Onuchic (2002), ao utilizar o computador na resolução de problemas que envolvem conceitos como a taxa média de variação, o processo de descoberta e compreensão é facilitado pela possibilidade de simulações e experimentações rápidas. O aluno pode realizar inúmeras tentativas e observar os resultados, o que contribui para uma compreensão mais profunda e intuitiva dos conceitos antes da formalização matemática.

O uso de recursos como o GeoGebra e o Desmos também facilita a visualização de representações geométricas e gráficas, promovendo uma melhor compreensão visual. Essas plataformas possibilitam a criação de modelos e a simulação de diferentes cenários, o que se mostra especialmente útil na resolução de problemas envolvendo variáveis, funções e gráficos.

A possibilidade de simular estratégias diversas de resolução proporciona um ambiente de aprendizagem mais flexível e adaptável, permitindo que os alunos explorem diferentes caminhos até encontrar soluções. Esse processo torna-se ainda mais rico quando desenvolvido em ambientes colaborativos, nos quais os estudantes compartilham soluções, discutem estratégias e testam hipóteses em conjunto. Tais interações favorecem a aprendizagem cooperativa e a construção coletiva de conhecimento.

Embora as Tecnologias Digitais ofereçam inúmeras vantagens no processo de ensino e aprendizagem, sua implementação na educação matemática não está isenta de desafios. A primeira limitação refere-se ao acesso e ao uso dessas tecnologias. Como destacam Borba (1994) e Villarreal (1999), nem todos os alunos dispõem do mesmo nível de acesso a recursos tecnológicos, o que pode gerar desigualdades no processo de aprendizagem. Além disso, o uso eficaz dessas ferramentas exige que os professores estejam devidamente preparados para integrá-las às suas práticas pedagógicas, o que nem sempre ocorre devido à falta de formação específica.

Outro desafio relevante é o risco de uma dependência excessiva das ferramentas tecnológicas. A utilização de softwares e simulações deve ser encarada como um apoio ao processo de aprendizagem, e não como substituto do raciocínio lógico e da reflexão crítica do aluno. A tecnologia precisa ser integrada de forma equilibrada, de modo a permitir que o aluno desenvolva habilidades tanto no uso das ferramentas quanto na resolução de problemas sem o auxílio delas, o que representa um desafio adicional para os educadores.

Logo, é indispensável que a utilização das tecnologias seja acompanhada de uma reflexão pedagógica contínua. Os professores devem compreender as potencialidades e as limitações das ferramentas digitais, empregando-as de maneira que favoreça a construção do conhecimento, sem perder de vista os objetivos pedagógicos. Como apontam Allevato e Onuchic (2003), as tecnologias não devem ser vistas como um fim em si mesmas, mas como instrumentos capazes de enriquecer o processo de ensino e aprendizagem quando utilizadas de forma adequada e intencional.

Por fim, a Resolução de Problemas, quando aliada às Tecnologias Digitais, configura-se como uma abordagem pedagógica poderosa para o ensino de Matemática. O uso de ferramentas como o GeoGebra e o Desmos pode proporcionar uma experiência interativa e dinâmica, facilitando a visualização de conceitos matemáticos complexos e favorecendo a aprendizagem ativa.

No entanto, é imprescindível que essas tecnologias sejam utilizadas de maneira consciente e equilibrada, com o intuito de apoiar a aprendizagem sem substituir o desenvolvimento do raciocínio crítico e da capacidade reflexiva dos alunos. Assim, a articulação entre a Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais pode representar um avanço significativo para a educação matemática, ampliando as possibilidades de ensino e promovendo um aprendizado mais profundo e significativo.

4.4 A Plataforma GeoGebra

A Plataforma GeoGebra foi desenvolvida por Markus Hohenwarter, pesquisador austríaco, como parte de sua tese de doutorado, com o objetivo de ser utilizada no ambiente escolar. O projeto teve início em 2001, na Universidade de Salzburg, na Áustria, e posteriormente continuou a ser aprimorado na Universidade Atlântica da Flórida. Ao longo dos anos, a ferramenta recebeu diversas premiações, tanto na Europa quanto nos Estados Unidos, consolidando seu reconhecimento como um recurso educacional inovador. Desde então, sua popularidade tem crescido significativamente, expandindo-se para diversos países.

De acordo com o Instituto GeoGebra de São Paulo, o GeoGebra é atualmente utilizado em 190 países e traduzido para 55 idiomas. A ferramenta registra mais de 300 mil downloads mensais e conta com 62 Institutos GeoGebra distribuídos em 44 países, com o propósito de oferecer suporte e fomentar seu uso no ambiente educacional.

O GeoGebra surgiu da integração entre duas áreas fundamentais da Matemática: Geometria e Álgebra (Lamas; Mendes, 2017). Trata-se de um sistema dinâmico e gratuito voltado para o ensino da Matemática, funcionando como uma plataforma que abrange todos os níveis educacionais. A plataforma combina diferentes recursos – incluindo Geometria, Álgebra, Estatística, Cálculo, tabelas e gráficos – em uma única aplicação.

Com ele, é possível criar construções geométricas utilizando elementos como pontos, retas, segmentos de reta e polígonos. Além disso, o GeoGebra reúne ferramentas tradicionais da Geometria com funcionalidades específicas para Álgebra e Cálculo. A partir da versão 5.0, o programa passou a oferecer suporte à exploração de conceitos geométricos em três dimensões, conforme destacado pelo Instituto GeoGebra de São Paulo (GEOGEBRA, [s.d.]).

Nesse contexto, os Institutos Internacionais de GeoGebra (IGI) são instituições sem fins lucrativos que têm como missão ampliar a disseminação do GeoGebra em âmbito global. Estão presentes em diversos países, promovendo e fortalecendo o ensino e a aprendizagem da Matemática. Além de incentivar a interação entre educadores e pesquisadores, esses institutos disponibilizam uma ampla variedade de materiais didáticos elaborados por estudantes e docentes.

Segundo Holanda Filho e Cruz (2019), os Institutos GeoGebra têm como objetivo principal estabelecer parcerias e criar uma comunidade de usuários do software. Para isso, realizam diversas atividades, como o desenvolvimento de materiais gratuitos para oficinas, a oferta de capacitações para professores e formadores, a criação de um sistema de suporte online, bem como a avaliação e o aprimoramento contínuo das atividades e recursos didáticos. Além disso, também promovem apresentações em conferências de âmbito nacional e internacional.

Desde sua criação, a Plataforma GeoGebra tem passado por constantes aprimoramentos e atualizações, resultando no lançamento de novas versões, inclusive adaptadas para aplicativos em smartphones. Nesse contexto, a versão 3D do GeoGebra se destaca como uma ferramenta valiosa para a construção de objetos tridimensionais no estudo da Geometria Espacial. Com essa versão, é possível modelar sólidos, superfícies e curvas tridimensionais de maneira intuitiva, além de calcular comprimentos, áreas, volumes e interseções com facilidade (Andrade, 2015, p. 36).

O GeoGebra também disponibiliza a Calculadora GeoGebra 3D, que permite explorar a Realidade Aumentada (RA). De acordo com Duarte (2021, p. 14), essa tecnologia possibilita a visualização imersiva de gráficos e sólidos geométricos, o que pode contribuir significativamente para o ensino e a aprendizagem, especialmente em representações bidimensionais e tridimensionais. Ademais, o software oferece aplicativos gratuitos compatíveis com as versões iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux, os quais ser acessados diretamente pelo site oficial: www.geogebra.org.

Diante disso, diversas pesquisas destacam o GeoGebra como um software gratuito que contribui significativa para o ensino e a aprendizagem da Matemática, sendo também útil em outras disciplinas. Em sua tese de doutorado, Braz (2020, p. 56) defende que:

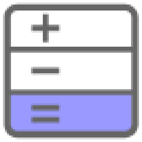
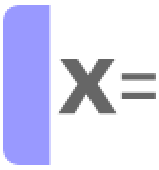
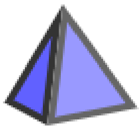
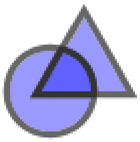
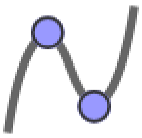
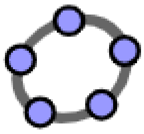
> atualmente devemos considerar como uma Plataforma de Gestão de Aprendizagem. Isso porque entendemos que assume as características para tal categoria como, por exemplo, de um Sistema de Gestão de Aprendizagem que disponibiliza de uma série de recursos, síncronos e assíncronos que dão suporte ao processo de aprendizagem, permitindo seu planejamento e avaliação (Braz, 2020, p. 56).

O autor ainda ressalta que a Plataforma GeoGebra não é apenas um software ou aplicativo, mas sim um verdadeiro Sistema de Gestão de Aprendizagem e Ensino, uma vez que suas potencialidades atuais a caracterizam e a classificam como tal (Braz, 2020, p. 56).

Concordamos com a afirmação do autor a respeito das inúmeras potencialidades do GeoGebra como plataforma de ensino, especialmente por sua capacidade de tornar o processo de aprendizagem mais interativo e visual. A flexibilidade da ferramenta permite a exploração dinâmica de conceitos matemáticos, tornando-os mais acessíveis e compreensíveis aos alunos. Diante disso, optamos por utilizar o GeoGebra para o trabalho com as relações métricas, por acreditarmos que sua interface intuitiva e seus recursos interativos oferecem um ambiente propício para que os estudantes compreendam e visualizem essas relações de maneira mais eficaz e envolvente.

Nesse contexto, o Quadro 4 apresenta os diversos aplicativos que integram a família GeoGebra, cada um desenvolvido para atender a diferentes demandas no ensino e na aprendizagem da Matemática.

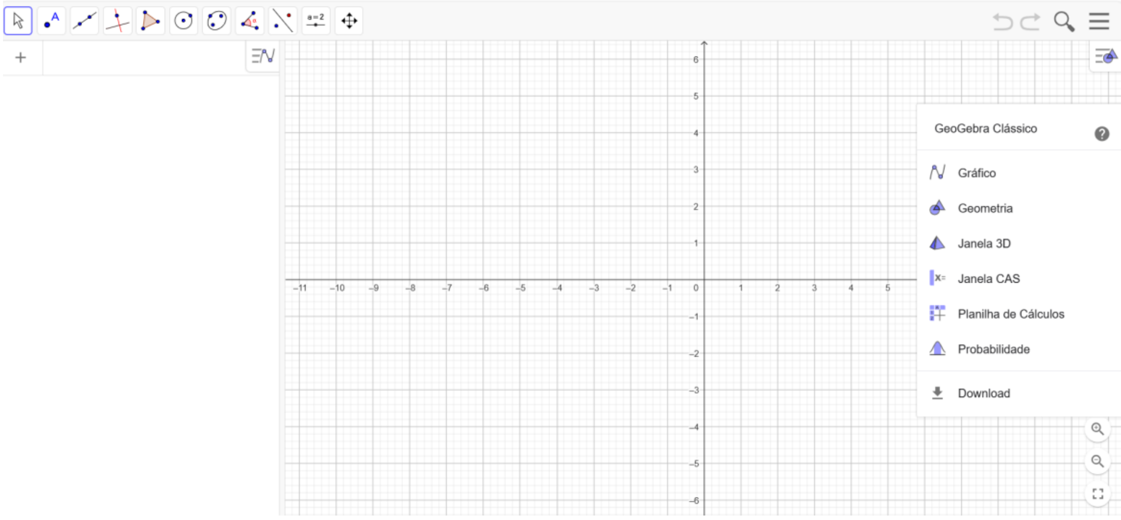
Quadro 4 – Aplicativos que compõem o GeoGebra

Símbolo	**Nome**	**Descrição**
	Calculadora Científica	Realiza cálculos com frações, estatísticas, funções exponenciais, entre outros
	Calculadora CAS	Resolve equações, manipula expressões, calcula derivadas e integrais
	Calculadora 3D	Representa funções 3D, superfícies e outros objetos em 3D
	Geometria	Constrói círculos, ângulos, transformações e muito mais
	Calculadora Gráfica	Cria desenhos gráficos e resolve equações
	Calculadora	Calcula álgebra, geometria, 3D, entre outros

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A Figura 23 apresenta a tela inicial do GeoGebra, exibida após o acesso do usuário à plataforma por meio do site oficial, marcando o início da interação com seus comandos, ferramentas e janelas.

Figura 23 – Apresentação da tela inicial do GeoGebra Online



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

O GeoGebra disponibiliza, em seu site oficial, uma ampla variedade de materiais didáticos que abrangem diversos tópicos da Matemática. Esses recursos incluem atividades interativas, simulações e materiais prontos para uso em sala de aula, contribuindo para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos de maneira dinâmica e visual.

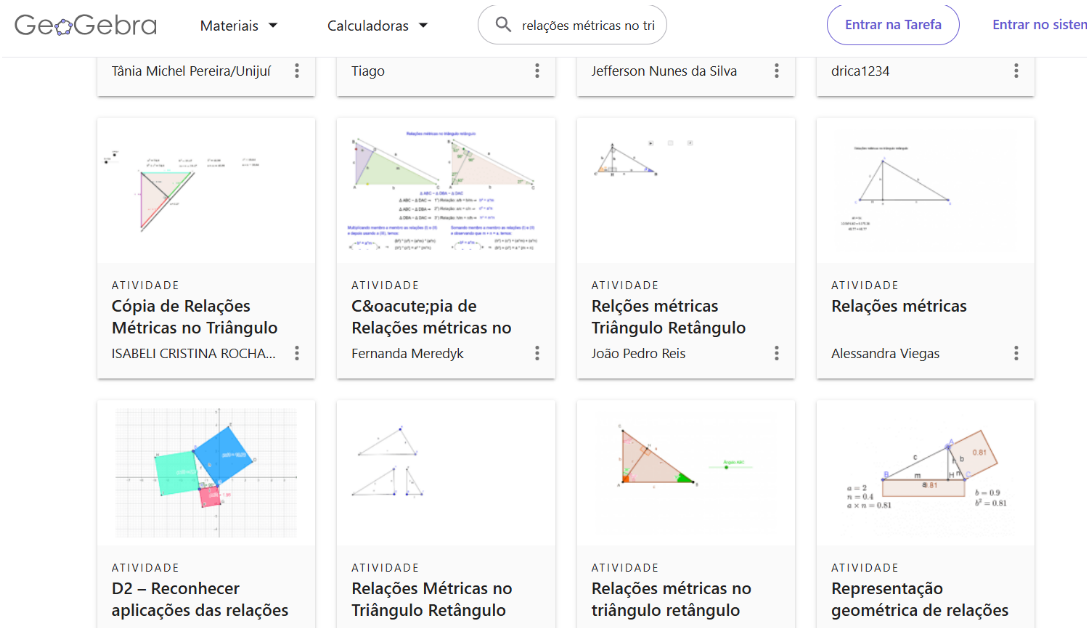
Figura 24 – Materiais do GeoGebra

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A Figura 24 exemplifica a interface do site e a forma como os materiais são apresentados, evidenciando a facilidade de navegação e o acesso aos conteúdos educacionais.

Ao realizar uma busca no site do GeoGebra utilizando o termo "Relações Métricas no Triângulo Retângulo", é possível encontrar uma ampla variedade de materiais interativos relacionados ao tema. Esses recursos incluem atividades dinâmicas, simulações e construções geométricas que favorecem a compreensão das relações entre os lados e os ângulos do triângulo retângulo.

Figura 25 – Pesquisa com o termo Relações Métricas no Triângulo Retângulo



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Nesse sentido, a escolha da Plataforma GeoGebra para esta pesquisa justifica-se por sua capacidade de integrar diferentes representações matemáticas – geométrica, algébrica e gráfica – em um ambiente dinâmico e interativo. Por ser um software gratuito e acessível, permite que professores e alunos explorem conceitos matemáticos de forma visual e experimental, favorecendo a compreensão dos conteúdos.

Além disso, o GeoGebra disponibiliza uma ampla variedade de ferramentas que possibilitam a construção precisa de figuras e gráficos, aspecto especialmente relevante para o estudo das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. A manipulação interativa dessas construções contribui para a visualização das propriedades matemáticas envolvidas, facilitando tanto a resolução de problemas quanto a investigação dos conceitos de maneira mais intuitiva.

Outro fator determinante para a escolha dessa plataforma é sua presença consolidada no meio educacional, com um vasto acervo de materiais disponíveis e suporte oferecidos pelos Institutos GeoGebra. Dessa forma, o software configura-se como um recurso valioso tanto para professores que desejam inovar suas práticas pedagógicas quanto para estudantes que buscam uma aprendizagem mais exploratória e visual da Matemática.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados na construção desta investigação, os quais serviram como referência para cada etapa do desenvolvimento da pesquisa e para a obtenção dos resultados. Inicialmente, será apresentada a abordagem metodológica e seu enquadramento. Em seguida, na delimitação da pesquisa, serão descritos o contexto escolar e os alunos participantes do estudo. Também serão detalhados os instrumentos utilizados na coleta de dados, o processo de organização e distribuição das atividades realizadas, bem como a forma como conduzida a análise dos dados coletados.

5.1 Metodologia da pesquisa

A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa devido à ênfase na interpretação e análise dos resultados, o que permite uma compreensão aprofundada do fenômeno estudado. Essa abordagem possibilita ao pesquisador uma maior imersão no contexto investigado, estabelecendo um contato direto com o objeto de estudo (Trigueiro, 2014, p. 18). Além disso, conforme destaca Demo (2011), na pesquisa qualitativa, o aspecto central é a construção do conhecimento a partir da discussão e análise das informações obtidas por meio dos dados coletados.

Bogdan e Biklen (1994) ressaltam que a coleta de dados em seu ambiente natural é um elemento fundamental da pesquisa qualitativa, garantindo que os eventos ocorram sem interferências intencionais que possam alterá-los. Segundo os autores, a investigação qualitativa é guiada por cinco características principais: (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural; (ii) o pesquisador é o instrumento-chave; (iii) o processo é mais importante que o produto; (iv) a análise de dados é predominantemente indutiva; e (v) o significado é de importância crucial.

Para uma análise qualitativa abrangente, é fundamental considerar todos os dados relacionados ao fenômeno, apresentando-os de forma descritiva. Conforme apontam Bogdan e Biklen (1994), o foco do pesquisador deve ser o desenvolvimento do processo investigativo, priorizando as percepções dos participantes em relação aos elementos abordados na pesquisa, em vez de concentrar-se exclusivamente nos resultados. Essa ênfase na perspectiva dos sujeitos reforça a importância da escuta ativa e da observação sensível, permitindo a compreensão da lógica interna dos discursos e das ações dos participantes.

Ainda segundo Bogdan e Biklen (1994), a descrição na pesquisa qualitativa deve resultar de um processo de coleta de dados que inicia com uma visão ampla do fenômeno e, gradualmente, se direciona para uma abordagem mais específica e detalhada. Essa característica é essencial para a condução desse tipo de pesquisa. A construção do conhecimento ocorre, assim, de forma processual, envolvendo ciclos contínuos de observação, interpretação e validação dos dados. Para garantir a relevância dos resultados, é fundamental que os dados sejam registrados de maneira criteriosa, possibilitando uma análise rigorosa e uma seleção adequada conforme a necessidade do estudo.

Bogdan e Biklen (1994) argumentam que a análise qualitativa demanda uma postura investigativa reflexiva, na qual o pesquisador busca significados em padrões recorrentes, utilizando categorias emergentes em vez de hipóteses pré-estabelecidas. Isso reforça o caráter exploratório e flexível da abordagem, permitindo adaptações metodológicas durante o percurso investigativo.

Nesse contexto, esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa devido ao seu objetivo de compreender um fenômeno específico, analisado a partir da interação de um grupo determinado de participantes. O estudo valoriza todo o processo de construção do conhecimento, considerando as atividades desenvolvidas com a utilização da Plataforma GeoGebra no contexto da Resolução de Problemas.

5.2 Descrição do desenvolvimento da pesquisa de campo

Inicialmente, a pesquisa previa a participação de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. Contudo, devido à disponibilidade limitada de computadores e à necessidade de liberação dos alunos para a realização das atividades fora da sala de aula, apenas 10 estudantes puderam integrar o estudo. Todos os participantes eram alunos da Escola Estadual João Ferreira de Souza.

A Escola Estadual João Ferreira de Souza, pertencente à rede estadual de ensino, está localizada no município de Santa Cruz/RN e atende aproximadamente 800 alunos distribuídos em três turnos (matutino, vespertino e noturno), com uma média de 35 alunos por turma, abrangendo o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio.

A escolha dessa instituição para a realização da pesquisa justifica-se pelo fato de o pesquisador atuar como professor na escola, o que possibilitou um acompanhamento mais próximo do processo investigativo e uma melhor compreensão da dinâmica escolar.

O laboratório de informática da escola possui poucos computadores em funcionamento e, além disso, não pôde ser utilizado para a pesquisa, pois foi convertido em um depósito para armazenamento de livros. Essa limitação representou a primeira dificuldade enfrentada no desenvolvimento do estudo. Diante desse desafio, a professora do Ensino Médio Técnico disponibilizou 10 Chromebooks, viabilizando a realização das atividades planejadas.

Quadro 5 – Planejamento dos encontros a serem realizados

Encontro	Principais atividades a serem desenvolvidas	Carga horária
Encontro 01	**1º Momento (2 h/a):** Apresentação da pesquisa aos alunos e aplicação de um questionário inicial para identificação do perfil dos participantes (Apêndice B). **2º Momento (2 h/a):** Introdução à Plataforma GeoGebra, explorando suas principais ferramentas para ambientação e familiarização dos alunos com a plataforma.	4h
Encontro 02	**1º Momento (2 h/a):** Aplicação do Problema 1 (Apêndice C), selecionado na internet pelos autores da pesquisa **2º Momento (2 h/a):** Discussão sobre o Problema 1, com análise das estratégias utilizadas pelos alunos e exploração das soluções por meio do GeoGebra.	4h
Encontro 03	**1º Momento (2 h/a):** Aplicação do Problema 2 (Apêndice C), retirado do livro Relaciones Métricas (Editora Cuzcano, 2023) visando aprofundar os conceitos trabalhados anteriormente. **2º Momento (2 h/a):** Discussão sobre o Problema 2, enfatizando os diferentes caminhos percorridos pelos alunos e a utilização do GeoGebra na resolução.	4h

Encontro 04	**1º Momento (2 h/a):** Aplicação do Problema 3 (Apêndice D), extraído do livro SuperAção (Editora Moderna, PNLD/2024). **2º Momento (2 h/a):** Discussão sobre o Problema 3, analisando as abordagens adotadas e as soluções desenvolvidas pelos alunos.	4h
Encontro 05	**1º Momento (2 h/a):** Aplicação do questionário final (Apêndice E), visando avaliar a experiência dos alunos com a metodologia utilizada e os impactos do uso do GeoGebra na aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo. **2º Momento (2 h/a):** Reflexão sobre os momentos anteriores, promovendo uma discussão sobre a experiência dos alunos ao longo da pesquisa. Agradecimento pela participação de cada aluno, reconhecendo sua contribuição para o estudo.	4h

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Os encontros da pesquisa ocorreram durante o horário regular das aulas, viabilizados pela parceria e autorização do professor titular da disciplina, que incentivou a participação dos alunos nas atividades propostas. Essa colaboração foi fundamental para a implementação do estudo, garantindo que os estudantes dispusessem do tempo necessário para interagir com as ferramentas tecnológicas e realizar as atividades planejadas.

5.3 Instrumentos para o levantamento dos dados

A pesquisa envolveu alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual, cuja participação foi acompanhada de forma sistemática por meio de diversos instrumentos de coleta de dados. Com o objetivo de garantir uma análise detalhada e precisa dos processos de ensino e aprendizagem, foram utilizados áudios, fotografias e depoimentos por escrito. As gravações de áudio mostraram-se especialmente úteis para registrar as interações durante as atividades, possibilitando uma análise posterior das discussões e dos raciocínios desenvolvidos alunos. As imagens capturadas ao longo dos encontros contribuíram para documentar o envolvimento dos estudantes nas atividades, além de registrar momentos-chave da pesquisa.

Para cada problema aplicado, foi utilizado um questionário que permitiu aos alunos expressar suas percepções sobre o conteúdo abordado. Esses questionários, juntamente com os demais instrumentos de coleta, proporcionaram uma visão multifacetada da experiência, garantindo a profundidade necessária para a análise dos resultados.

Em consonância com as diretrizes éticas da pesquisa, todos os participantes foram devidamente informados sobre os procedimentos metodológicos e as ferramentas empregadas, com ênfase na transparência do processo de gravação e coleta. Os alunos foram esclarecidos de que suas identidades seriam preservadas e que todos os dados coletados seriam transcritos de forma a garantir sua privacidade. A observância aos princípios éticos constituiu um dos pilares centrais na condução da pesquisa, assegurando que as informações fossem tratadas com o máximo de confidencialidade e respeito.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES DOS DADOS DA PESQUISA

Este capítulo destina-se à apresentação e análise dos dados coletados ao longo da pesquisa, com o objetivo de compreender os impactos da metodologia aplicada na aprendizagem dos participantes. A partir das informações obtidas, discutem-se os principais achados, relacionando-os com a literatura existente e com os objetivos propostos no estudo. Inicialmente, será feita uma descrição dos encontros realizados, com destaque para os aspectos relevantes observados durante as atividades e suas implicações para o processo de ensino e aprendizagem.

6.1 Descrição dos encontros: algumas considerações

Os encontros realizados ao longo da pesquisa foram organizados de forma a proporcionar uma abordagem gradual dos conceitos matemáticos e das atividades propostas. A seguir, apresenta-se um resumo de cada encontro, com suas respectivas atividades e objetivos, destacando os momentos mais significativos e as contribuições para a aprendizagem dos alunos.

No primeiro encontro, realizou-se a apresentação da pesquisa e a ambientação dos alunos na Plataforma GeoGebra. Na primeira parte, aplicou-se o questionário inicial (Cf. Apêndice B), com o intuito de levantar dados sobre o conhecimento prévio dos alunos em relação ao conteúdo e suas experiências anteriores com tecnologias educacionais. Em seguida, os alunos foram introduzidos ao ambiente do GeoGebra por meio de uma demonstração das ferramentas básicas da plataforma, com o objetivo de familiarizá-los com seus recursos e prepará-los para as atividades que seriam desenvolvidas nos encontros subsequentes.

No segundo encontro, foi aplicado o primeiro problema (Cf. Apêndice C), selecionado a partir de fontes online, com foco no trabalho das relações métricas no triângulo retângulo. Utilizando o GeoGebra, os alunos exploraram os conceitos de catetos, hipotenusa e ângulos. Após a resolução do problema, realizou-se uma discussão coletiva sobre as diferentes abordagens adotadas pelos estudantes, promovendo o pensamento crítico e a compreensão aprofundada dos conceitos. A interação entre os alunos mostrou-se fundamental para a troca de ideias e o esclarecimento de dúvidas.

O terceiro encontro foi dedicado à aplicação e discussão do problema 2, retirado do livro *Relaciones Métricas*. A atividade manteve o foco nas relações métricas no triângulo retângulo, com o apoio do GeoGebra como ferramenta de visualização e manipulação das construções geométricas. Após a resolução, ocorreu uma discussão detalhada em que os alunos compartilharam suas estratégias de resolução, refletiram sobre os diferentes caminhos adotados e compararam suas respostas com as dos colegas.

No quarto encontro, foi trabalhado o problema 3, extraído do livro *SuperAção* (Editora Moderna, PNLD/2024). Os alunos novamente utilizaram o GeoGebra para aprofundar o estudo das relações métricas no triângulo retângulo, explorando novas possibilidades de visualização dos conceitos abordados. A discussão em grupo, realizada ao final da atividade, permitiu aos alunos refletirem sobre suas estratégias, estabeleceram conexões com conhecimentos prévios e reforçarem a compreensão dos conteúdos de geometria. A utilização dos recursos digitais foi destacada pelos próprios participantes como facilitadora na compreensão dos conceitos.

O quinto e último encontro foi destinado à aplicação do questionário final, cujo objetivo foi avaliar a aprendizagem dos alunos ao longo do processo. Esse instrumento buscou compreender o impacto das atividades propostas na assimilação das relações métricas no triângulo retângulo, bem como coletar impressões dos alunos sobre a experiência com o uso da Plataforma GeoGebra. As respostas obtidas forneceram subsídios importantes para a análise dos resultados da pesquisa.

Os encontros representaram um processo contínuo e significativo de aprendizagem, marcado por momentos de exploração, reflexão e aplicação prática dos conceitos matemáticos. A interação entre os alunos e a mediação pedagógica por meio de tecnologias digitais contribuíram para uma abordagem mais contextualizada e envolvente do conteúdo, centrada na resolução de problemas.

A seguir, serão detalhadas as atividades desenvolvidas em cada encontro, com base nas orientações e procedimentos da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação da matemática por meio da Resolução de Problemas, em articulação com a utilização da Plataforma GeoGebra.

6.1.1 1º Encontro – Apresentação da pesquisa e ambientação no GeoGebra

O primeiro encontro ocorreu no dia 20 de setembro de 2024 e teve como objetivos principais apresentar a pesquisa aos alunos participantes, estabelecer os parâmetros para sua realização e introduzi-los à Plataforma GeoGebra. Todos os encontros foram realizados na sala dos professores, espaço escolhido para a pesquisa por se tratar de um ambiente familiar e adequado à coleta de dados. A sala conta com computadores disponíveis para os participantes – alunos do 9º ano selecionados para o estudo.

Na sala de pesquisa, o encontro teve início com a apresentação do pesquisador, que compartilhou sua trajetória acadêmica e profissional, destacando sua experiência como aluno e professor da Educação Básica. Essa abordagem permitiu que os participantes compreendessem seu interesse pelo mestrado e sua atuação como pesquisador naquele momento. Em seguida, realizou-se uma explanação sobre as expectativas em relação aos encontros e a importância da participação ativa dos estudantes na investigação.

Na sequência, foi apresentado o Termo de Compromisso (Cf. Apêndice A), documento que formalizou a participação dos estudantes na pesquisa. O termo foi lido em sala, esclarecendo a organização da pesquisa, seus objetivos e os procedimentos que seriam adotados ao longo do processo investigativo. Na Figura 26 a seguir, observa-se os alunos e o pesquisador com o Termo de Compromisso.

Figura 26 – participantes com o termo de compromisso

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Em seguida, o pesquisador detalhou o cronograma dos encontros, explicando as atividades que seriam desenvolvidas e como cada uma contribuiria para a construção do conhecimento sobre **Relações Métricas no Triângulo Retângulo**, por meio da resolução de problemas e do uso da Plataforma GeoGebra.

Após essas orientações, iniciaram-se as atividades conforme o planejado. Dando continuidade, os alunos foram introduzidos à Plataforma GeoGebra, com uma exposição de suas principais funcionalidades e aplicações na construção de conceitos matemáticos. Em seguida, foram orientados a criar contas na plataforma, o que permitiria registrar suas construções e possibilitaria uma análise mais detalhada dos dados ao longo da pesquisa. No entanto, essa etapa apresentou um imprevisto: alguns estudantes não possuíam e-mails ativos para validar suas contas, o que acabou consumindo um tempo significativo da atividade.

Diante disso, um dos participantes da pesquisa (aluno A4) sugeriu que todos os computadores fossem conectados a uma única conta, de modo a facilitar a organização dos registros. Assim, foi utilizada a conta do pesquisador, o que permitiu que todas as construções dos alunos fossem salvas e acessadas de maneira centralizada.

Ao iniciar acesso à Plataforma GeoGebra, o pesquisador conduziu uma conversa introdutória sobre a matemática. Para compreender melhor a relação dos alunos com a disciplina, foi aplicado um questionário inicial (Cf. Apêndice B), no qual os participantes responderam a questões sobre seus interesses e conhecimentos matemáticos.

Nesse contexto, o pesquisador perguntou sobre a afinidade dos alunos com a matemática. Para sua surpresa, apenas o aluno A2 afirmou não gostar da disciplina, enquanto os demais demonstraram um interesse positivo pelo estudo matemático.

Quando questionados sobre quais tópicos da matemática mais apreciavam, os alunos A2, A4, A6, A8 e A9 mencionaram operações básicas como adição, subtração e raiz quadrada. No entanto, nenhum participante da pesquisa citou temas relacionados à geometria, o que indicou um possível distanciamento ou menor familiaridade com esse ramo da matemática.

Outro dado relevante foi a resposta sobre o conhecimento prévio em triângulos retângulos. Todos os participantes afirmaram já ter estudado o tema em algum momento, embora A2 e A7 tenham mencionado que não se lembravam do conteúdo. Esses resultados forneceram informações importantes para nortear a abordagem dos encontros seguintes, permitindo ao pesquisador ajustar a condução das atividades de acordo com o perfil e as experiências prévias dos participantes.

Após a aplicação do questionário, o pesquisador passou a direcionar os questionamentos para o uso de tecnologias no estudo da matemática. Os estudantes foram indagados sobre suas experiências anteriores com o uso de computadores ou celulares para aprender a disciplina.

As respostas foram unânimes: todos os participantes afirmaram já ter utilizado tecnologia no estudo da matemática e relataram que a experiência foi positiva. Alguns depoimentos reforçaram essa percepção, como a resposta de A1, que afirmou: "*foi boa, gostei muito da experiência*", enquanto A3 destacou: "*foi legal, ajudou*".

Em seguida, os participantes foram questionados sobre sua participação em aulas de Matemática no laboratório de informática. Novamente, as respostas foram unânimes: todos responderam "*não*". Diante disso, buscou-se compreender se já haviam utilizado algum aplicativo para estudar Matemática. Os alunos A2, A3, A5 e A6 mencionaram o uso do YouTube como ferramenta de apoio; A8 citou o "*GeoGebra*"; A4 mencionou o "*Photomath*"; enquanto os demais não responderam.

Para complementar a discussão sobre o uso de softwares educativos, perguntou-se se esses aplicativos auxiliavam na compreensão da Matemática. As respostas revelaram diferentes perspectivas, tais como:

A6: "*Pra solucionar melhor as questões*."

A5: "*Ajudam, sim, porque facilita na hora de resolver cálculos*."

A4: "*Sim, pois eles explicam mais direito as questões."*

A3: "*Sim, explicação, e qualquer coisa é só ver de novo*."

A1: "*Eu nunca tive contato com esses aplicativos*."

Dando continuidade, os participantes foram questionados sobre sua opinião em relação ao uso das Tecnologias na Educação Matemática. As respostas demonstraram uma visão bastante positiva, conforme os excertos a seguir:

A6: "*Muito bom, dá uma ajuda legal*."

A5: "*Acho ótimo, pois nos ajuda a entender melhor*."

A4: "*Muito interessante, porque liga os alunos no mundo tecnológico*."

A2: "*É uma coisa mais fácil de aprender*."

Além disso, ao serem questionados se aprender Matemática com o auxílio da tecnologia poderia tornar o processo mais interessante, todos os estudantes responderam afirmativamente "*sim*".

Para concluir o questionário, foram feitas duas perguntas sobre as expectativas dos alunos em relação ao uso do GeoGebra durante os encontros. A primeira questão foi: "*O que você espera aprender ou melhorar com o uso do GeoGebra?*". Entre as respostas recebidas, destacam-se as seguintes:

A1: "*Espero melhorar nas pesquisas do GeoGebra*."

A2: "*Entender a Matemática*."

A9: "*Melhorar a resolução de questões*."

A4: "*Eu aprendi relações métricas, acho que não preciso melhorar.*"

A segunda pergunta investigava se os participantes acreditavam que o uso do GeoGebra poderia ajudar a resolver problemas matemáticos de maneira mais fácil e, em caso afirmativo, por quê. Todos responderam que "sim", e quatro participantes complementaram suas respostas com justificativas, como as que seguem:

A4: "*Pois ajuda a montar os cálculos mais precisos*."

A3: "*É de forma simples estudar nele*."

A2: "*Porque é uma coisa fácil e prática*."

A8: "*Pois ele facilita os problemas de Matemática*."

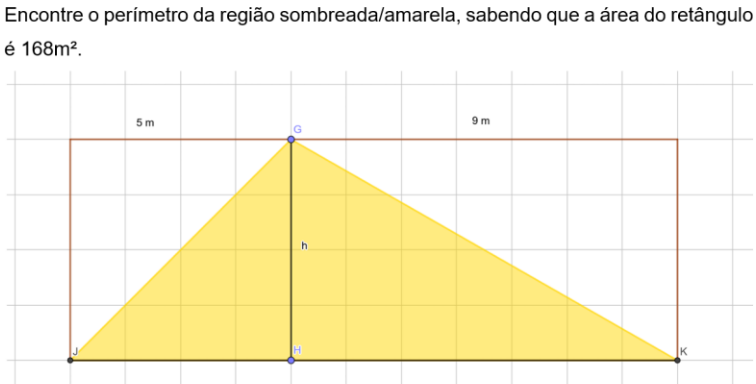
Encerrando o primeiro encontro, o pesquisador reservou um tempo para que os participantes explorassem livremente a Plataforma GeoGebra. Foi sugerido que realizassem construções de figuras planas e explorassem as funcionalidades básicas da ferramenta. Os participantes demonstraram confiança e entusiasmo na manipulação do GeoGebra. Como o tempo se esgotou antes que novas atividades pudessem ser iniciadas, os alunos retornaram à sala de aula, e o pesquisador organizou os computadores para o próximo encontro.

6.1.2 2º Encontro – Aplicação e discussão do problema 1

O segundo encontro, inicialmente previsto para a semana seguinte, foi adiado devido à constante falta de água na escola, sendo remarcado para o dia 6 de outubro, duas semanas após a data original. Com todos os computadores já ligados na sala de pesquisa, o pesquisador deu início ao encontro retomando as orientações e explicando a dinâmica do dia.

Em seguida, foi apresentado o primeiro problema da pesquisa (Cf. Apêndice C), selecionado por sua simplicidade e por abordar conceitos fundamentais. Essa escolha permitiu que os participantes se familiarizassem com o GeoGebra enquanto trabalhavam com os temas de área e relações métricas.

Figura 27 – Problema 01

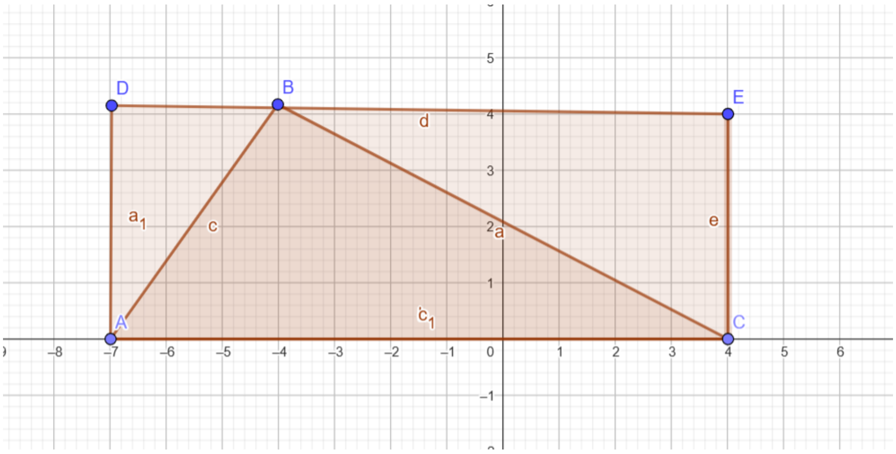


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Ao serem solicitados a acessar a plataforma e iniciar a resolução do problema, os participantes apresentaram dúvidas sobre as funcionalidades de alguns menus do GeoGebra. Essa situação era esperada, uma vez que, embora já tivessem explorado a plataforma de forma geral no primeiro encontro, o uso das ferramentas para a construção matemática requer certo tempo de adaptação. Durante a atividade, os alunos buscaram auxílio para entender como utilizar as ferramentas da plataforma, ajustar elementos geométricos e interpretar corretamente os comandos do GeoGebra. A mediação do pesquisador permitiu que as dúvidas fossem sanadas de forma prática e interativa.

A Figura 28, a seguir, apresenta a construção realizada pelo participante A8 durante a resolução do Problema 01. No decorrer da atividade, A8 demonstrou dificuldades iniciais na construção da Figura 28 a seguir, especialmente quanto à utilização das ferramentas do GeoGebra para traçar os elementos necessários. No entanto, após receber orientações do pesquisador, conseguiu estruturar corretamente a construção e identificar as relações métricas envolvidas no problema.

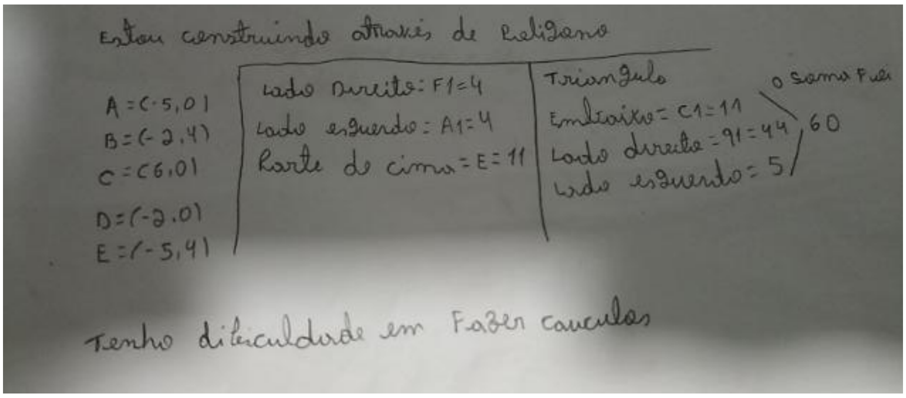
Figura 28 – construção do participante A8 referente ao Problema 01



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Além disso, os comentários da dupla A6 e A8, registrados na folha de observações, refletem sua trajetória durante a atividade. Inicialmente, ambos expressaram dificuldades tanto na manipulação da plataforma quanto na interpretação do problema. Entretanto, com o avanço na construção e o suporte oferecido, conseguiram estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos e sua aplicação na ferramenta, demonstrando evolução no entendimento da proposta.

Figura 29 – Comentários de participante A6 referente a resolução do Problema 01



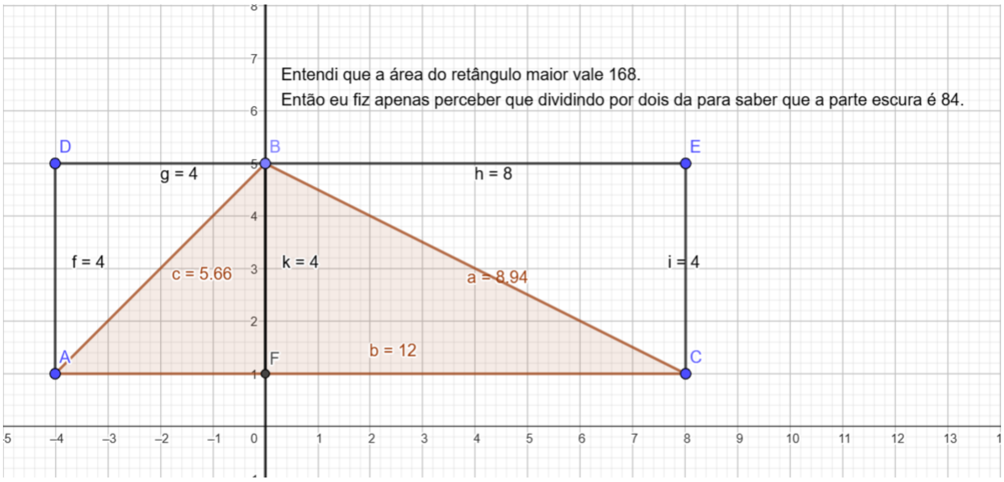
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Ao longo do encontro, algumas observações feitas pelos participantes chamaram a atenção do pesquisador, evidenciando o uso de estratégias próprias para a resolução do problema. O participante A8 destacou: “*Estou dividindo o problema em triângulos e utilizando a função de cálculo de segmento do GeoGebra*”. Essa fala revelou um aspecto interessante, pois, até aquele momento, o pesquisador ainda não havia apresentado essa ferramenta da plataforma, o que indica que o participante explorou de forma autônoma os recursos disponíveis para encontrar uma solução.

O participante A9 comentou: "*Dividi o problema em dois, agora estou calculando a hipotenusa de cada triângulo*". Esse relato reforça que, apesar das dificuldades iniciais em compreender a aplicação das relações métricas, os participantes conseguiram reorganizar o problema e desenvolver estratégias próprias para resolvê-lo. Esse processo demonstrou um avanço significativo na autonomia dos estudantes ao lidar com ferramentas tecnológicas para a aprendizagem da matemática.

Na Figura 30, observa-se a resolução do participante A7, que analisou a questão por meio de retângulos e conseguiu dividi-la em duas regiões iguais.

Figura 30 – Resolução do participante A7



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Diante da proximidade do encerramento do encontro e da limitação de tempo, o pesquisador comentou a resolução do problema, destacando os conceitos-chave abordados na atividade. Em seguida, o encontro foi finalizado com a expectativa de que os alunos aprofundassem ainda mais seus conhecimentos nas atividades seguintes.

6.1.3 3º Encontro – Aplicação e discussão do problema 2

O encontro em questão teve como foco a resolução de um problema extraído do livro peruano *Relaciones Métricas*, que aborda diversos tipos de relações métricas presentes na Educação Básica. O problema selecionado exigia que os alunos identificassem a relação entre os segmentos *a*, *b* e *c*, presentes em uma figura geométrica. Para melhor compreensão, o problema está registrado no Anexo F.

O encontro foi marcado por desafios logísticos, como a falta de água na escola, o que ocasionou um pequeno atraso no início das atividades. No entanto, a empolgação dos participantes e da professora compensou essa adversidade, tornando o momento produtivo e enriquecedor. A professora mencionou que os participantes demonstraram interesse grande interesse em participar da pesquisa, o que reforça a relevância do uso de tecnologias educacionais no ensino da matemática.

Com todos os participantes reunidos e os computadores preparados, o pesquisador apresentou o problema e instruiu os estudantes a utilizarem o GeoGebra para analisá-lo e tentar resolvê-lo. O objetivo principal era incentivar a exploração das relações métricas por meio da manipulação da figura no software, promovendo uma compreensão mais intuitiva dos conceitos matemáticos envolvidos.

Durante a execução da atividade, alguns participantes expressaram dificuldades iniciais, principalmente ao tentar relembrar o Teorema de Pitágoras. Esse momento foi aproveitado pelo pesquisador para interromper brevemente a atividade e fornecer uma explicação sobre a história do teorema e sua importância para a matemática. Essa abordagem se mostrou eficaz, pois A10 comentou que, embora não tivesse dificuldades com o Teorema de Pitágoras, inicialmente não havia reconhecido sua aplicação direta no problema proposto.

O participante A7 mencionou que, ao aplicar as relações métricas na figura, percebeu que estava lidando com uma aplicação do Teorema de Pitágoras. Esse momento evidenciou um aspecto fundamental do ensino da matemática: muitas vezes, os alunos dominam fórmulas e regras, mas encontram dificuldades em reconhecê-las em diferentes contextos. Dessa forma, o uso de ferramentas dinâmicas como o GeoGebra se mostrou essencial para estimular a compreensão conceitual e a transferência de conhecimento para novas situações.

Em seguida, os participantes foram incentivados a compartilhar suas percepções sobre a atividade. Alguns dos comentários incluem:

A3: "*Estou dividindo o problema em triângulos e utilizando a função de cálculo de segmento do GeoGebra*". Esse relato evidencia a capacidade do participante de buscar soluções alternativas dentro da plataforma, explorando funcionalidades que ainda não haviam sido explicitamente ensinadas.

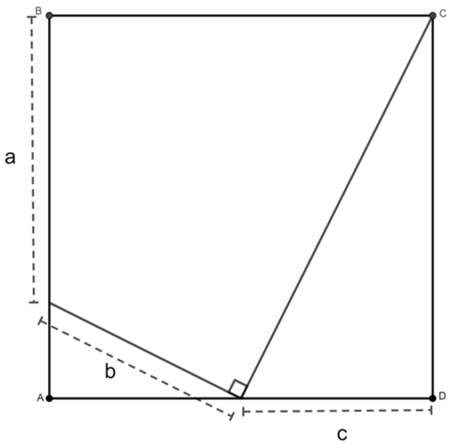
A6: "*Dividi o problema em dois, agora estou calculando a hipotenusa de cada triângulo*". Esse comentário demonstra uma estratégia eficaz para lidar com a questão, fragmentando-a em partes menores e facilitando sua resolução.

A9: "*Quando fiz as relações, percebi que era o Teorema de Pitágoras*". Esse ponto ressalta a importância da manipulação interativa para a compreensão de conceitos matemáticos.

A seguir, apresentamos a Figura 31 do problema abordado neste encontro.

Figura 31 – Problema 02

Na figura, ABCD é um quadrado. Indique a relação entre a, b e c.



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Apesar das dificuldades iniciais, como o atraso no início da aula e o grande fluxo de alunos circulando pelo ambiente, o encontro foi produtivo e permitiu avanços significativos na compreensão dos conceitos abordados. Os participantes demonstraram autonomia ao explorar a plataforma, formular hipóteses e testar soluções.

O terceiro encontro foi marcado pelo envolvimento ativo dos participantes, evidenciado pelo entusiasmo demonstrado ao longo das atividades. A utilização do GeoGebra mostrou-se, mais uma vez, uma ferramenta essencial para a exploração das relações métricas no triângulo retângulo, permitindo uma visualização mais clara dos conceitos trabalhados.

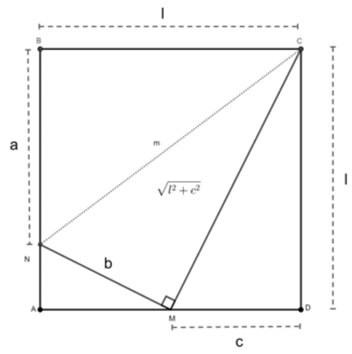
Durante o desenvolvimento da atividade, observou-se um aumento na confiança dos participantes ao lidar com as propriedades métricas e aplicar, de forma prática, os conceitos matemáticos. Essa receptividade sugere que a abordagem adotada favorece tanto a compreensão quanto o interesse pela temática.

Seguindo as etapas propostas por Onuchic (2015) no roteiro do GTERP, o pesquisador conduziu a resolução do Problema 02 de forma colaborativa, incentivando a leitura individual e em grupo, promovendo a discussão coletiva e o registro das resoluções na lousa. Após a plenária e a busca por consenso, foi possível chegar a uma solução validada coletivamente. Com isso, a resolução final foi apresentada à turma, conforme ilustrado na Figura 32, formalizando o conteúdo aprendido e possibilitando a continuidade do processo investigativo.

Figura 32 – Resolução do problema 02

Resolução

Para encontrarmos a relação entre a, b e c, utilizaremos o Teorema de Pitágoras.



A partir da figura, podemos concluir que:

- Em $\triangle\, MDC$: $(MC)^2 = c^2 + l^2 \implies MC = \sqrt{l^2 + c^2}$
- Em $\triangle\, NMC$: $m^2 = b^2 + (l^2 + c^2)^2 \ldots \text{(I)}$
- Em $\triangle\, NBC$: $m^2 = a^2 + l^2 \ldots \text{(II)}$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$a^2 + l^2 = b^2 + l^2 + c^2 \implies a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

À medida que o encontro se aproximava do encerramento, o pesquisador propôs aos participantes que refletissem sobre o Problema 3 em casa, com o objetivo de retomar a discussão no próximo encontro. O encerramento ocorreu de forma natural, respeitando o tempo necessário para a assimilação dos conteúdos e mantendo o engajamento dos estudantes em relação à continuidade do estudo.

6.1.4 4º Encontro – Aplicação e discussão do problema 3

O quarto encontro foi realizado no dia 7 de novembro. O intervalo entre o terceiro e o quarto encontros se deu em razão da falta d'água na cidade, o que comprometeu o funcionamento da escola.

Na ocasião, apenas nove participantes compareceram à sala dos professores. Ao chegar ao local, o pesquisador precisou buscar a chave do espaço onde estavam os computadores, enfrentando dificuldades para localizá-la. Houve um pequeno atraso no início das atividades, pois a chave encontrava-se com o diretor, que chegou à escola por volta das 08 horas.

Com acesso ao laboratório liberado, os participantes iniciaram o processo de login na Plataforma GeoGebra. Como não houve tempo hábil para que o pesquisador realizasse esse procedimento previamente, os próprios estudantes inseriram suas credenciais. Após essa etapa, foi solicitado que acessassem o GeoGebra online.

Neste encontro, os alunos já haviam tido contato prévio com o Problema 3, extraído do livro *Superação*, conforme apresentado na Figura 33 a seguir.

Figura 33 – Problema 03

Utilizando um programa de computador, Aroldo desenhou a seguinte figura, cuja soma das medidas das áreas dos três quadrados é $24\ cm^2$.

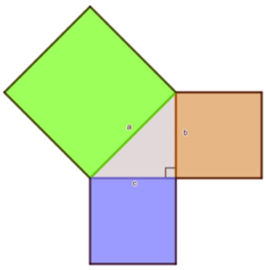


Figura 1: Moderna (2022)

Qual a área do quadrado maior?

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Ao iniciar os comentários sobre o Problema 3, o pesquisador percebeu que os participantes rapidamente mencionaram o enunciado e identificaram que se tratava de uma aplicação do Teorema de Pitágoras. Essa observação foi confirmada pelo pesquisador, que aproveitou o momento para retomar o teorema e discuti algumas de suas demonstrações.

Na sequência, o pesquisador ressaltou que os participantes poderiam localizar o Teorema de Pitágoras no banco de materiais da Plataforma GeoGebra, bem como utilizá-lo para realizar estudos relacionados a diversos temas matemáticos.

Em seguida, os participantes foram orientados a construir a figura apresentada no Problema 3. Para isso, foi estipulado um tempo de 10 minutos. Durante essa etapa, A7 relatou: "*Não tive nenhum problema, o único foi que eu usei segmento, esse foi o único problema*", referindo-se ao uso da ferramenta de segmentos na construção dos quadrados.

Já A5 comentou: "*Tive dificuldade na construção do quadrado, entretanto, consegui calcular a área do quadrado maior após encontrar o lado do quadrado*", demonstrando superação das dificuldades iniciais por meio da exploração dos elementos da figura.

O participante A8 chamou o pesquisador para apresentar sua estratégias de resolução: estava calculando a área de cada quadrado construído sobre os lados do triângulo, bem como os respectivos lados. Durante toda a atividade, foi possível observar a colaboração entre os participantes, que trocaram ideias e buscaram soluções de forma conjunta.

O pesquisador também observou que o participante A3, embora inicialmente estivesse no caminho correto ao tentar resolver o problema de maneira autônoma, acabou desviando-se de sua linha de raciocínio ao escutar as sugestões dos colegas. Posteriormente, retomou a resolução em colaboração com o grupo, conseguindo avançar na atividade.

À medida que o encontro avançava, os participantes refletiram sobre os desafios enfrentados. A4, por exemplo, destacou: "*A principal dificuldade inicial foi reconhecer a aplicabilidade do Teorema de Pitágoras na solução do problema*."

Em seguida, o pesquisador expôs a resolução do problema à turma e orientou os participantes a dialogarem em duplas sobre os procedimentos adotados em suas estratégias de resolução. A Figura 34 ilustra a solução apresentada nesse momento.

Figura 34 – Resolução do problema 03

Resolução

De acordo com a figura desenhada por Aroldo, temos:

$a^2 + b^2 + c^2 = 24.$

Assim: $b^2 + c^2 = 24 - a^2$ (I)
além disso, podemos escrever: $a^2 = b^2 + c^2$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:
$a^2 = 24 - a^2$
$2a^2 = 24$
$a^2 = 12$

Como o lado do quadrado maior mede a, a sua área mede 12 cm^2 (medida de a^2).

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Próximo ao encerramento do encontro, o pesquisador alertou os participantes sobre o adiantado da hora, uma vez que o início das atividades havia sido atrasado devido à demora da obtenção da chave do espaço dos computadores. A atividade prosseguiu com a orientação do pesquisador, que auxiliou os participantes na verificação das construções realizadas no GeoGebra e na compreensão das propriedades matemáticas envolvidas.

À medida que o tempo previsto para o término se aproximava, o pesquisador solicitou que os participantes salvassem suas construções e desligassem os computadores. Em seguida, realizou o encerramento do encontro, reforçando o convite para que todos estivessem presentes na última etapa do trabalho.

Ao final, três participantes permaneceram voluntariamente para auxiliar o pesquisador na organização do espaço e no recolhimento dos computadores.

6.1.5 5º Encontro – Aplicação do questionário final

O quinto encontro ocorreu no dia 16 de dezembro de 2024 e contou com a presença de seis alunos. A baixa adesão deveu-se à proximidade do final do ano letivo, período em que alguns professores já estavam aplicando provas finais, além das dificuldades de deslocamento enfrentadas por alunos da zona rural.

O pesquisador chegou à escola às 7h e dirigiu-se à sala dos professores com o intuito de organizá-la para receber os participantes. No entanto, o espaço estava sendo utilizado pelos docentes para correção de provas e atendimento a alunos.

Diante dessa situação, o coordenador da escola sugeriu a realização do encontro na biblioteca. O pesquisador, então, conversou com a bibliotecária e organizou o ambiente para acomodar os participantes.

Os alunos chegaram às 7h30min, e o pesquisador deu início ao encontro agradecendo pela presença no quinto e último encontro, bem como pela participação na pesquisa. Nesse momento, a bibliotecária pediu a palavra e ressaltou: “*Vocês estão de parabéns pela participação em um estudo de mestrado. É muito importante para todos os licenciandos e mestrandos quando vêm à escola e são bem recebidos pelos alunos*.” O pesquisador agradeceu o comentário e destacou a relevância da parceria entre a escola e a universidade.

Figura 35 – Alunos reunidos durante o quinto encontro

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Esse encontro ocorreu de forma diferente, com um momento dedicado à resposta do questionário final. Após essa etapa, o pesquisador abriu espaço para que os participantes compartilhassem suas experiências sobre a participação em um estudo científico. Durante essa conversa, os alunos relataram suas percepções sobre os desafios enfrentados ao longo da pesquisa, das aprendizagens adquiridas e da importância do uso de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, para o estudo de conceitos matemáticos. O diálogo proporcionou uma reflexão sobre a aplicação dos conteúdos no cotidiano e o impacto da metodologia utilizada.

Ao final do encontro, o pesquisador presenteou os participantes com um brinde e agradeceu novamente a participação dos alunos, reforçando a importância de iniciativas que aproximam a pesquisa acadêmica do ambiente escolar. Em seguida, os participantes foram dispensados, encerrando assim as atividades do estudo.

6.2 Análise dos encontros da pesquisa

Na seção anterior, foram apresentados os encontros desenvolvidos durante a etapa de campo da pesquisa, os quais constituíram momentos fundamentais para a produção e organização dos dados. Com base nas interações e registros gerados nesses encontros, foi possível delinear caminhos que conduzem à resposta da questão norteadora deste estudo. Para tanto, este capítulo propõe uma análise qualitativa orientada pelos princípios de Bogdan e Biklen (1994), que afirmam "a análise qualitativa é um processo de busca e organização sistemática de observações feitas por um pesquisador para que ele possa apresentar as interpretações dele aos outros" (p. 16). Dessa forma, busca-se compreender como a metodologia adotada contribuiu para o ensino e aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo, respondendo à questão central da pesquisa.

Parte-se, assim, da compreensão de que a análise é, simultaneamente, construção e interpretação, sendo atravessada pelas escolhas teóricas e metodológicas que sustentam esta investigação. Ao final do quinto encontro, foi aplicado um questionário aos participantes com o intuito de captar suas percepções sobre o processo de aprendizagem vivenciado.

A análise é conduzida sob a perspectiva da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic e Allevato (2011), com mediação da Plataforma GeoGebra. Ao longo dos encontros, buscou-se integrar teoria e prática por meio de situações-problema que desafiaram os estudantes a aplicar conceitos das relações métricas no triângulo retângulo em contextos reais. Essa abordagem favoreceu a reflexão, a construção ativa do conhecimento e o desenvolvimento de uma compreensão mais significativa dos conteúdos, potencializada pelas ferramentas dinâmicas oferecidas pelo GeoGebra.

Durante os encontros, procurou-se promover uma articulação constante entre teoria e prática, utilizando problemas contextualizados que instigaram os estudantes a explorar e aplicar conceitos matemáticos com o apoio da Plataforma GeoGebra. Para Allevato e Onuchic (2009), a Resolução de Problemas pode engajar ativamente os alunos na construção do conhecimento, estimulando a análise crítica das situações propostas e atribuindo significado ao conteúdo trabalhado. Essa abordagem vai além da simples aplicação de técnicas, promovendo a reflexão sobre os procedimentos adotados e contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Onuchic, 1999).

Ao longo das atividades, o pesquisador atuou como mediador, realizando intervenções pontuais que estimulavam a reflexão dos estudantes. Em momentos estratégicos, por exemplo, lançava perguntas como:

> **“O que muda se deslocarmos o vértice do triângulo mantendo o ângulo reto?”** ou **“Como o valor da altura relativa ao lado influência nas áreas destacadas?”**

Essas perguntas conduziram os alunos à observação de padrões e à formulação de hipóteses no ambiente digital. Esses comentários auxiliaram no direcionamento do raciocínio dos participantes, sem oferecer respostas prontas, em consonância com os princípios da Resolução de Problemas e promovendo uma postura investigativa por parte dos estudantes.

O estudante A4 destacou que a metodologia adotada contribuiu significativamente para a compreensão das relações métricas no triângulo retângulo, especialmente ao visualizar, por meio do GeoGebra, como os elementos do triângulo se relacionam. De forma semelhante, a estudante A3 ressaltou que a possibilidade de manipular os vértices e observar as variações nas medidas permitiu uma compreensão mais concreta e menos abstrata dos teoremas estudados. Essa interação direta com o conteúdo, potencializada pela mediação do pesquisador, favoreceu a construção de significados pelos alunos, permitindo-lhes compreender as relações métricas de forma contextualizada e visual.

A utilização da Plataforma GeoGebra mostrou-se fundamental para a compreensão dos conceitos matemáticos, conforme destacado nas respostas dos participantes. As interações com o ambiente digital, aliadas à Resolução de Problemas, contribuíram para aproximar o conhecimento teórico da prática. Essa perspectiva está em consonância com Van de Walle (2001), que enfatiza a importância da conexão entre o conhecimento abstrato e suas aplicações concretas. Esse aspecto também é corroborado por Onuchic e Allevato (2004), que defendem o uso de diferentes abordagens, como a visualização, para facilitar a exploração de conceitos matemáticos.

A possibilidade de manipular representações gráficas no GeoGebra permitiu aos participantes não apenas visualizar, mas também experimentar diretamente com os conceitos, tornando-os mais concretos.

Dando continuidade à análise dos encontros, a resolução de cada problema foi acompanhada por discussões coletivas mediadas pelo pesquisador, organizadas conforme os princípios metodológicos da Resolução de Problemas propostos por Onuchic.

Após a conclusão de cada atividade, promoveram-se momentos de socialização das estratégias utilizadas pelos alunos, análise dos diferentes caminhos percorridos e comparação entre as soluções encontradas, de modo a fomentar a construção coletiva do conhecimento matemático. Essa etapa de discussão, prevista na metodologia, mostrou-se fundamental para estimular a argumentação, a escuta ativa e a revisão das próprias ideias a partir do contato com a perspectiva dos colegas.

No primeiro problema trabalhado, uma das questões propostas foi:

“Ao resolver o problema proposto, foi mais fácil trabalhar com ou sem o GeoGebra?”

As respostas revelaram um grupo dividido: 50% dos participantes afirmaram que o uso do GeoGebra facilitou a resolução, enquanto os demais demonstraram preferência pelo uso do papel e lápis ou relataram insegurança no manuseio da plataforma. Essa divergência está em consonância com o que Onuchic (1999) destaca ao abordar a importância do confronto entre diferentes pontos de vista na construção do conhecimento. A metodologia valoriza justamente esse espaço de troca, em que o erro e a dificuldade não são vistos como obstáculos, mas como partes essenciais do processo de aprendizagem.

Outra pergunta foi:

“Qual a dificuldade para construir o desenho do problema proposto?”.

Novamente, 50% dos participantes relataram dificuldades, especialmente relacionadas à execução de cálculos e medições no ambiente do GeoGebra. Alguns apontaram que não conseguiam posicionar corretamente os pontos ou configurar os elementos da construção de forma que refletissem com exatidão os dados do problema. Uma das falas que representa essa dificuldade, por exemplo, foi do participante A4: "*Fiquei confuso com as ferramentas para medir os lados e ângulos*". Esse tipo de relato está em sintonia com o que Onuchic e Allevato (2011) consideram um momento produtivo para a mediação docente: quando o aluno encontra um impasse, mas permanece engajado na busca por soluções. Dificuldades como essas não representam retrocessos, mas sim oportunidades ricas de aprendizagem, nas quais o erro se transforma em motor para a investigação e o amadurecimento do raciocínio matemático.

Tais situações reforçam a relevância do papel do professor como mediador e da criação de um ambiente colaborativo, no qual os alunos se sintam seguros para explorar, errar, discutir e reformular ideias. Mesmo diante das dificuldades iniciais com o uso da tecnologia, os estudantes demonstraram disposição para experimentar e evoluir ao longo do processo, o que é um indicativo da efetividade da proposta pedagógica adotada.

Compreende-se que os momentos vivenciados ao longo dos encontros foram permeados por uma abordagem que valoriza a problematização, o trabalho coletivo e a construção ativa do conhecimento, conforme propõe a perspectiva da Resolução de Problemas. Para Onuchic (1999), esse enfoque favorece o envolvimento dos alunos com o conteúdo de forma significativa, ao estimular a reflexão, a argumentação e o contato com diferentes estratégias de resolução.

Nessa direção, o questionário aplicado ao final da etapa de campo assume papel relevante no processo investigativo, funcionando como uma ferramenta de escuta que possibilitou captar as percepções dos estudantes sobre a metodologia adotada. Assim, as respostas obtidas contribuem para ampliar a compreensão sobre os efeitos da proposta pedagógica mediada pelo GeoGebra, revelando aspectos positivos, desafios enfrentados e possibilidades de aprimoramento a partir da experiência concreta dos participantes. A seguir, apresentamos a análise das respostas dos estudantes às nove questões do questionário.

O questionário aplicado no último encontro teve como objetivo coletar o feedback dos alunos sobre a experiência com a metodologia da Resolução de Problemas e o uso da Plataforma GeoGebra no aprendizado das relações métricas no triângulo retângulo. Foi composto por nove perguntas, formuladas de modo a permitir tanto respostas fechadas quanto abertas, proporcionando aos alunos a oportunidade de expressar livremente suas opiniões.

A primeira pergunta foi:

"O uso de tecnologia, como o GeoGebra, ajuda ou atrapalha no aprendizado das relações métricas no triângulo retângulo?"

Os dados revelam que 66,6% dos participantes consideram que a utilização da tecnologia contribui positivamente para o aprendizado.

Entre os que avaliaram o uso do GeoGebra como benéfico, destaca-se a fala do participante A4, que afirmou: "*dá para visualizar melhor os problemas*". Essa observação aponta um dos principais benefícios percebidos: a possibilidade de tornar os conceitos matemáticos mais acessíveis e concretos por meio da visualização dinâmica e da manipulação dos elementos geométricos.

Em contrapartida, uma minoria manifestou uma percepção distinta. O participante A1, por exemplo, mencionou: "*atrapalha pois eu me atrapalharia com alguns assuntos*". Essa fala indica que, para alguns estudantes, a familiaridade com a tecnologia e a própria usabilidade da plataforma podem representar desafios iniciais. Ainda assim, a utilização do GeoGebra foi, em geral, percebida de forma positiva pelos participantes da pesquisa.

A segunda pergunta foi:

"O GeoGebra é uma ferramenta importante para o aprendizado das relações métricas no triângulo retângulo?"

Nesta questão, todos os participantes, ou seja, 100% reconheceram a relevância da ferramenta no processo de aprendizagem.

O participante A6 destacou a importância do GeoGebra ao afirmar: "*sim, pois já mostra os números dos lados dos quadrados e retângulos, ou de qualquer figur*". Essa resposta evidencia como a plataforma facilita a visualização dos elementos geométricos. Já o participante A2, embora tenha reconhecido a importância da tecnologia, expressou certa dúvida ao responder: "*não sei, acho que sim*". Esse comentário conecta-se à resposta anterior, na qual o mesmo participante mencionou que o GeoGebra pode "*confundir um pouco*", apontando para a necessidade de uma mediação mais eficaz durante o uso da plataforma.

A terceira pergunta abordou diretamente o uso da plataforma:

“Foi difícil aprender a usar o GeoGebra?”

Observou-se uma divisão entre os participantes, com 50% relatando dificuldades no manuseio da ferramenta.

Os participantes A4, A3 e A5 destacaram que encontraram desafios especialmente no uso das ferramentas básicas, o que pode indicar a necessidade de um suporte inicial mais afetivo para garantir o domínio das funcionalidades essenciais. Em contrapartida, os participantes A1 e A2 afirmaram não ter encontrado dificuldades no aprendizado da ferramenta, ressaltando que, para alguns alunos, a familiaridade ou facilidade com tecnologias contribui para uma adaptação mais rápida.

A quarta pergunta investigou a percepção dos alunos quanto ao impacto do GeoGebra no interesse pelas aulas de Geometria, especialmente no contexto das relações métricas no triângulo retângulo:

“O GeoGebra torna as aulas de Geometria mais interessantes? Se sim, por quê?”

As respostas revelaram que 83% dos participantes acreditam que a plataforma torna as aulas mais interessantes. Os estudantes destacaram que a visualização dinâmica proporcionada pelo GeoGebra contribui para tornar os conteúdos mais atrativos e facilitar a compreensão dos conceitos trabalhados.

Entre os pontos mais mencionados está a possibilidade de manipular os lados dos triângulos, o que, segundo os participantes, torna o aprendizado mais interativo e menos abstrato. A interação com os objetos geométricos em tempo real ajuda a tornar os conteúdos mais acessíveis e significativos.

A quinta pergunta buscou compreender de forma mais direta o impacto do uso do GeoGebra na compreensão dos conceitos abordados:

“Usar o GeoGebra te ajudou a entender melhor os conceitos das Relações Métricas no Triângulo Retângulo? Diga como isso aconteceu”

A maioria dos participantes, cerca de 83% relatou que o uso do GeoGebra contribuiu significativamente para o entendimento dos conceitos, destacando como principal fator a possibilidade de manipular os dados e elementos das construções geométricas, o que facilitou a observação das relações entre os lados e os ângulos do triângulo retângulo. Essa possibilidade de interação direta foi apontada como um diferencial, pois permitiu visualizar de maneira mais clara como as alterações em um elemento impactavam os demais. No entanto, um dos participantes mencionou: "*fiquei confuso e não consegui muita coisa*", sinalizando que, apesar do potencial da ferramenta, é necessário considerar o ritmo e as necessidades individuais.

As perguntas seis e sete visaram identificar os pontos positivos e negativos percebidos em relação ao uso do GeoGebra. A pergunta seis foi:

"O que você mais gostou no GeoGebra?", enquanto a pergunta sete questionava: **"Teve algo que você não gostou ou achou difícil no GeoGebra?"**

Entre os aspectos positivos, os participantes destacaram que a plataforma proporciona uma experiência de aprendizagem mais dinâmica e envolvente. Um dos pontos mais mencionados foi a forma como o GeoGebra facilita a resolução de cálculos, tornando-os mais acessíveis e compreensíveis em um ambiente gráfico.

Outro aspecto valorizado foi a possibilidade de montar visualmente as relações métricas do triângulo retângulo, o que contribuiu para a compreensão dos conceitos. Além disso, o uso das ferramentas interativas foi apontado como um diferencial, permitindo maior liberdade e clareza de significados por meio da manipulação direta dos elementos da figura.

Por outro lado, os pontos negativos referem-se, principalmente, às dificuldades no manuseio da plataforma. Alguns participantes relataram insegurança ao utilizar ferramentas básicas, como posicionar pontos, construir segmentos ou interpretar os comandos disponíveis.

As perguntas oito e nove buscaram aprofundar a percepção dos alunos quanto à usabilidade da plataforma e sua aplicabilidade em outros conteúdos matemáticos. A oitava pergunta foi:

"O que poderia ser feito para deixar o GeoGebra mais fácil ou mais legal de usar?", e a nona questionava: **"O GeoGebra poderia ser usado para aprender outros conteúdos de matemática?"**

Em relação à oitava pergunta, a maioria afirmou que o GeoGebra já se apresenta como uma plataforma bastante robusta e funcional, não havendo, em sua opinião, necessidade de mudanças significativas. Essa percepção revela uma aceitação positiva da ferramenta em sua forma atual, demonstrando que suas funcionalidades atendem adequadamente às demandas das atividades propostas.

Quanto à nona pergunta, houve unanimidade: 100% dos participantes concordaram que o GeoGebra pode ser utilizado no ensino de outros conteúdos matemáticos. Alguns alunos, inclusive, manifestaram interesse em utilizá-lo para aprender tópicos como equações do 1º e do 2º grau, reconhecendo o potencial do software para facilitar a visualização e compreensão de conceitos algébricos. Essas respostas reforçam a versatilidade do GeoGebra e sua relevância como recurso didático em diferentes áreas da Matemática, indo além da Geometria e ampliando as possibilidades de sua aplicação em sala de aula.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vivemos em uma sociedade em constante transformação, na qual a educação matemática precisa ser ressignificada para atender às demandas de um mundo cada vez mais dinâmico, tecnológico e interativo. Nesse contexto, a presente pesquisa teve objetivo investigar de que forma a metodologia de Resolução de Problemas, aliada ao uso da Plataforma GeoGebra, pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

A proposta deste trabalho fundamenta-se na crença de que o ensino da matemática deve ir além da memorização de fórmulas e da repetição de procedimentos. É necessário oportunizar aos estudantes experiências de aprendizagem que favoreçam a construção de significados, o pensamento crítico, a reflexão e a criatividade. A metodologia de Resolução de Problemas, nesse sentido, mostrou-se uma abordagem promissora ao posicionar o aluno como protagonista de sua aprendizagem, permitindo-lhe explorar conceitos matemáticos em situações desafiadoras e contextualizadas.

Durante a realização da pesquisa de campo, os estudantes foram instigados a utilizar a Plataforma GeoGebra como ferramenta de exploração, visualização e manipulação de objetos matemáticos. A análise dos encontros indicou que o uso da tecnologia potencializou a aprendizagem, sobretudo ao possibilitar a construção visual dos conceitos e a experimentação ativa por parte dos alunos. A visualização das figuras geométricas, a manipulação dos vértices dos triângulos e a observação dinâmica das relações entre os elementos propiciaram uma compreensão mais concreta e significativa das relações métricas abordadas.

As falas dos alunos evidenciaram uma percepção positiva quanto ao uso da Plataforma GeoGebra, mesmo diante das dificuldades iniciais com seu manuseio. Os depoimentos coletados indicaram que os momentos de dúvida e erro foram ressignificados como oportunidades de aprendizagem, especialmente quando mediados de forma sensível e reflexiva pelo pesquisador. Essa constatação corrobora a perspectiva de Onuchic e Allevato (2011), que ressaltam a importância do papel do professor como mediador e da criação de um ambiente de aprendizagem colaborativo, no qual o erro seja valorizado como parte do processo.

Embora a amostra da pesquisa tenha sido reduzida, os dados obtidos apontam para o potencial transformador da proposta metodológica adotada. Os alunos demonstraram engajamento, interesse e avanços na compreensão dos conteúdos, além de reconhecerem a relevância do uso de tecnologias digitais no processo educativo. Isso nos leva a concluir que a combinação entre a Resolução de Problemas e o GeoGebra contribui não apenas para a aprendizagem dos conceitos matemáticos, mas também para o desenvolvimento de competências essenciais à formação cidadã e crítica dos estudantes.

Por fim, esta pesquisa não se encerra em si mesma. As reflexões e os resultados aqui apresentados devem ser compreendidos como um ponto de partida para novas investigações que explorem outras possibilidades de integração entre metodologias ativas e recursos tecnológicos no ensino da matemática. Espera-se que este trabalho inspire professores, pesquisadores e gestores educacionais a repensarem suas práticas, valorizando propostas que colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem, respeitando seus ritmos, promovendo a autonomia e fortalecendo o papel da escola como espaço de construção coletiva do saber.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. A resolução de um problema de divisibilidade através da linguagem JAVA promovendo reflexões sobre a utilização dos computadores no ensino de matemática. **Revista Interciência**, Catanduva, v. 4, n. 2, p. 15-20, 2004.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas. *In*: ONUCHIC, L. R. et al. (org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, n. 35, 2014.

ALLEVATO, N. S.; ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas e o uso do computador na construção do conceito de Taxa Média de Variação. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, n.8, p. 37-42, 2002.

ALLEVATO, N. S.; ONUCHIC, L. R. **A resolução de problemas na formação de professores que ensinam matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

BARBOSA, L. de S.; MENEGHETTI, C. M. S.; POFFAL, C. A. O uso da geometria dinâmica e da investigação matemática na validação de propriedades geométricas. **Revista Ciência e Natura**, UFSM, Santa Maria, v. 41, e12, 2019.

BARROS, G. C. **Tecnologias e educação matemática**: projetos para a prática profissional. Curitiba: InterSaberes, 2017.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma

BORBA, M. C. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. *In*: REUNIÃO ANUAL da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 27, 2004. Caxambu. **Anais**. Caxambu: ANPED, 2004.

BORBA, M. C. Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Ideias Matemáticas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, p. 83-101, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. C. **Álgebra e tecnologia**: novas perspectivas para o ensino. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL, Ministério de Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais - matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília, DF: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: http://www.mec.gov.br. Acesso em: 20 mar. 2024.

BRAZ, R. A. F. da S. **GeoGebra e a resolução de problemas na aprendizagem da função polinomial**. 2020. 136f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e

Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 28, p. 42-63, 2014.

COUTINHO, R. P. **Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau**. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

CREASE, R. P. **A história do Teorema de Pitágoras**. São Paulo: Ed. Aleph, 2001.

CREASE, R. P. **As grandes equações**: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram. Trad. Alexandre Cherman. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus Editora, 2012.

DANTE, L. R. **Didática da Matemática**: reflexões e práticas. São Paulo: Ática, 2017.

DEMO, P. **Praticar ciência**: metodologias do conhecimento científico. São Paulo: Saraiva, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 5, n. 7, p. 9-38, 2003.

FERREIRA, E. F. P.; CAMPONEZ, L. G. B.; SCORTEGAGNA, L. Integração das Tecnologias com o Ensino da Matemática: transformações e perspectivas no processo de ensino e aprendizagem. *In*: Encontro Mineiro de Educação Matemática: práticas educativas e de pesquisa em Educação Matemática, v. 7, 2015, São João Del Rei. **Anais**. São João Del Rei: UFSJ, 2015.

GASPAR, M. T.; MAURO, S. **Explorando a geometria através da história da matemática e da etnomatemática**. Rio Claro, SP: [s.n.], 2003. (Coleção História da Matemática para Professores).

GERONIMO, R. R.; SAITO, F. O papiro de Rhind: uma estudo preliminar. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v.1, n.1, p.123-132, 2012.

HOHENWARTER, M.; PREINER, J. Dynamic Mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, v. 7, 2007.

introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

KANTOWSKI, M. G. Some thoughts on teaching for problem solving. *In*: REYS, R. E. Reys (Ed.). **Problem solving in school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 1980.

KRULIK, S.; RUDNIK, J. A. **Reasoning and problem solving: a handbook for elementary school teachers**. Boston: Allyn and Bacon, 1993.

LESTER, F. K. Mathematical problem solving in the elementary school: Some education and psychological considerations. *In*: HATFIELD, L. L.; BRADBARD, D. A. (Eds.). **Mathematical problem solving**: Papers from a research workshop (ERIC/SMET). Columbus, Ohio: Columbus. 1978.

LESTER, F. K. Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. **The Mathematics Enthusiast**, v. 10, n. 1 e 2, p. 245-278, 2013.

LESTER, F. K. Trends and issues in mathemattical problem-solving research. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

LOPES, C. E. **Práticas significativas no ensino de Matemática**. Campinas: Papirus, 2014.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? *In*: **Educação Matemática em Revista**, *[S. l.]*, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 21. ed. Campinas: Papirus Editora, 2013.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos?. **Revista Espaço Pedagógico**, *[S. l.]*, v. 20, n. 1, 2013.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo. Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

PAVANELLO, R. M.; REZENDE, W. M. **Geometria no Ensino Fundamental**: caminhos para a aprendizagem. São Paulo: Moderna, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 1. ed. Editora Interciência Ltda, Rio de Janeiro, 1978.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POLYA, G. On solving mathematical problems in high school. *In*: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Eds.). **Problem solving in school mathematics**. Reston VA: NCTM, 1980.

POLYA, G. **How to solve it**: a new aspect of mathematical method. Princeton University Press, 1945.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o conhecimento e métodos de pesquisa. Trad. ONUCHIC, L. R.; BOERO, M. L. *In*: **BOLEMA – Boletim de educação matemática**, Rio Claro, v. 20, n. 27, 2007.

SANTOS, L.; OLIVEIRA, H. O ensino e a aprendizagem da geometria: Perspectivas Curriculares. *In*: Encontro de Investigação em Educação Matemática, 2017, Lisboa. **Atas [...]**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017, p. 3-8.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. Orlando: Academic Press, 1985.

SCORTEGAGNA. L. **Informática na Educação**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

SERRAZINA, L. Resolução de problemas e formação de professores: um olhar sobre a situação em Portugal. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL, C. P.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para a resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 55-84.

SILVA, C. M.; CARVALHO, M. R. Resolução de Problemas: estratégias para o ensino de Geometria. **Revista Educação Matemática em Foco**, Rio de Janeiro, v. 5, n. 2, p. 45-60, 2012.

SILVA, J. S. **Guia para a utilização do compêndio de Matemática**. Lisboa: Ministério da Educação e Investigação Científica, 1977.

SILVEIRA, J. L. da. **Educação e Transformação**: metodologias inovadoras. Formiga (MG): Editora Ducere, 2023.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Geometria na sala de aula**: reflexões e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOUZA, M. H. **21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo**. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.

STANIC, G. M.; KILPATRICK, J. Historial perspectives on problem solving in the Mathematics Curriculum. *In*: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston, VA: NCTM, 1989.

STEWART, I. **O fantástico mundo dos números**: a matemática do zero ao infinito. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2016.

TRIGUEIRO, R. de M. **Metodologia Científica**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional, S.A., 2014.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Resolver problemas - criando soluções, vendo. **Revista Educação e Matemática**, Belém, v. 11, n. 21, 2016.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. 4. ed. New York: Longman, 2001.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VILLARREAL, M. E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

APÊNDICE A – TERMO DE COMPROMISSO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Este Termo de Compromisso tem por objetivos estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e o pesquisador. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental na Escola Estadual João Ferreira de Souza, localizada na cidade de Santa Cruz, Rio Grande do Norte.

Será desenvolvido o conteúdo **Relações Métricas no Triângulo Retângulo** pertinente à 9º ano do Ensino Fundamental, proposto pela instituição onde o trabalho será aplicado, pele pesquisador JOSÉ GENILSON DA COSTA, utilizando o GeoGebra e a “Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas”.

Normas:

- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa. Os estudantes trabalharão em duplas/pequenos grupos com o objetivo de resolver problemas;
- Todos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso da dupla/grupo.

No decorrer da pesquisa, cada aluno será avaliado individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V-a, da L.D.B. da Educação Nacional, lei Nº 9394 de 20/12/1996, nos seguintes itens:

- FREQÜÊNCIA – Peso 1 – “Todos deverão estar presentes no local e horário estipulados.”
- TAREFA – Peso 1 – “As tarefas serão recolhidas no início de cada aula.”
- TRABALHO DE GRUPO – Peso 1 – “Os trabalhos de grupos serão observados e avaliados durante a atividade.”
- PARTICIPAÇÃO – Peso 1 – “Participação nas discussões e desenvolvimento de atividades propostas.”
- DISCIPLINA – Peso 1 – “Será observada a disciplina em sala de aula em todos os momentos da aula de Matemática.”
- PROVA – Peso 5 – “A avaliação escrita terá validade de 5 pontos.”

Outras resoluções:

Questões e problemas surgidos durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos por todos, alunos e pesquisador, a fim de chegarmos a um comum acordo, ficando estabelecido que as normas deverão ser cumpridas pelos alunos e pelo pesquisador.

Ciente dessas normas, de pleno acordo com todas as condições estabelecidas, assinam abaixo.

Campina Grande/PB, ______ de ______________ de 2024.

________________________________ José Genilson da Costa

____________________ Aluno (a)

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO INICIAL DE DIAGNÓSTICO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Roteiro do questionário inicial com os alunos

1. Informações Gerais
a) Nome (opcional): ____
b) Idade: _______ anos
c) Escola onde estuda:
____

2. Sobre sua experiência com Matemática
a) Você gosta de estudar Matemática? ( ) Sim ( ) Não
b) Quais são os tópicos de Matemática que você mais gosta de aprender?
____

c) Você já estudou sobre triângulos retângulos? O que lembra sobre eles?
____

3. Uso de Tecnologias no Estudo da Matemática
a) Você já usou computadores ou celulares para estudar Matemática? ( ) Sim ( ) Não
b) Se sim, como foi essa experiência?
____
c) Você já ouviu falar do GeoGebra? ( ) Sim ( ) Não
d) Se já usou o GeoGebra, como foi a experiência?
____

4. Aulas no Laboratório de Informática
a) Você já participou de alguma aula de Matemática no laboratório de informática da sua escola?
( ) Sim ( ) Não
b) Se sim, o que foi feito nessas aulas?
____
c) Com que frequência as aulas no laboratório acontecem?
____

5. Softwares Educativos
a) Você já usou algum programa de computador ou aplicativo para aprender Matemática?

( ) Sim ( ) Não
b) Se sim, quais você usou?

____

c) Na sua opinião, esses programas ajudam a entender melhor a Matemática? Por quê?

____

6. Opinião sobre Tecnologias na Educação Matemática
a) O que você acha sobre o uso de computadores e softwares, como o GeoGebra, para aprender Matemática?

____

b) Você acha que aprender Matemática com ajuda de tecnologia pode ser mais interessante?
( ) Sim ( ) Não. Explique:

____

c) Quais são as principais dificuldades que você percebe ao usar tecnologia na sala de aula?

____

7. Expectativas sobre as Aulas com GeoGebra
a) O que você espera aprender ou melhorar com o uso do GeoGebra?

____

b) Você acha que o uso do GeoGebra pode ajudar a resolver problemas de Matemática de forma mais fácil? Por quê?

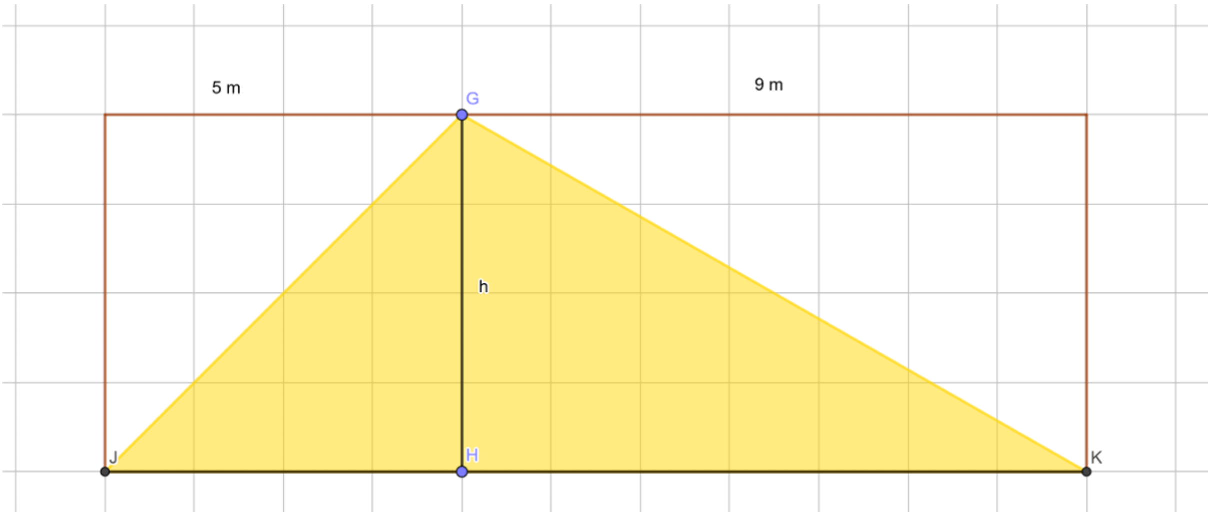
____

APÊNDICE C – PROBLEMA 01

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Problema 01 – selecionado na internet pelo autor

Determine o perímetro da região sombreada/amarela, sabendo que a área do retângulo é 168m².



APÊNDICE D – DISCUSSÃO SOBRE O PROBLEMA 1

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Discussão sobre o problema 1

1. Ao resolver o problema proposto, você percebeu dificuldades com ou sem o GeoGebra?
   ( ) Com o GeoGebra
   ( ) Sem o GeoGebra

2. Qual a maior dificuldade para construir o desenho do problema proposto?
   ( ) Dificuldade em entender como usar as ferramentas do GeoGebra
   ( ) Dificuldade em realizar os cálculos ou medições no GeoGebra
   ( ) Dificuldade em visualizar a solução no GeoGebra

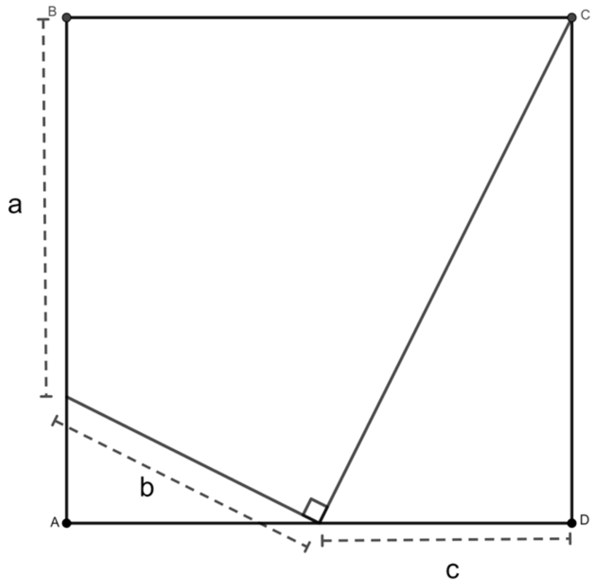
3. Conseguiu calcular a altura do triângulo?
   ( ) Sim
   ( ) Não

APÊNDICE E – PROBLEMA 02: RETIRADO DO LIVRO PERUANO RELACIONES MÉTRICAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Problema 02 – Retirado do Livro Peruano Relaciones Métricas

Na figura, ABCD é um quadrado. Indique a relação entre a, b e c.



APÊNDICE F – DISCUSSÃO SOBRE O PROBLEMA 2

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Discussão sobre o problema 2

1. Ao resolver o problema proposto, você achou mais fácil trabalhar com ou sem o GeoGebra?
   ( ) Com o GeoGebra
   ( ) Sem o GeoGebra
2. Qual a maior dificuldade para construir o desenho do problema proposto?
   ( ) Dificuldade em encontrar as ferramentas corretas
   ( ) Dificuldade em ajustar a posição dos pontos e linhas
   ( ) Dificuldade em visualizar o desenho de forma clara
3. Você conseguiu identificar e aplicar a relação entre a, b e c?
   ( ) Sim
   ( ) Não

Se não, o que dificultou a aplicação da relação entre os valores?

APÊNDICE G – PROBLEMA 03: EXTRAÍDO DO LIVRO SUPERAÇÃO- ED. MODERNA- PNLD/2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Problema 03 – Extraído do Livro Superação- Ed. Moderna- PNLD/2024

Utilizando um programa de computador, Aroldo desenhou a seguinte figura, cuja soma das medidas das áreas dos três quadrados é $24\ cm^2$.

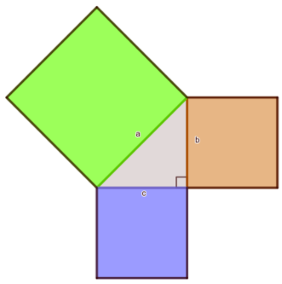


Figura 1: Moderna (2022)

Qual a área do quadrado maior?

APÊNDICE H – DISCUSSÃO SOBRE O PROBLEMA 3

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Discussão sobre o problema 3

1. Ao resolver o problema proposto, você achou mais fácil trabalhar com ou sem o GeoGebra?

   ( ) Com o GeoGebra

   ( ) Sem o GeoGebra

Justifique sua resposta:

2. Qual foi a maior dificuldade que você encontrou ao calcular as áreas dos quadrados?

   ( ) Dificuldade em identificar as dimensões de cada quadrado

   ( ) Dificuldade em entender a relação entre as áreas dos quadrados e as figuras envolvidas

   ( ) Dificuldade em realizar os cálculos manualmente

   ( ) Dificuldade em visualizar a solução com o GeoGebra

3. Conseguiu identificar qual quadrado possui a maior área?

   ( ) Sim

   ( ) Não

Se não, o que dificultou a identificação da área do quadrado maior?

APÊNDICE I – QUESTIONÁRIO PÓS EXPERIÊNCIA COM A PLATAFORMA GEOGEBRA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PPGECEM
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Questionário pós experiência com a Plataforma GeoGebra

Parte 1: Sua Opinião sobre o Uso de Tecnologia nas Aulas

1. O uso de tecnologia, como o GeoGebra, ajuda ou atrapalha no aprendizado das relações métricas no triângulo retângulo?

   ( ) Ajuda

   ( ) Atrapalha

   Por quê?

____

2. O GeoGebra é uma ferramenta importante para o aprendizado das relações métricas no triângulo retângulo?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Explique sua resposta:

____

Parte 2: Sobre o Uso do GeoGebra nas Atividades

3. Foi difícil aprender a usar o GeoGebra?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Comente se teve alguma dificuldade:

____

4. O GeoGebra torna as aulas de Geometria mais interessantes?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Por quê?

---

5. Usar o GeoGebra te ajudou a entender melhor os conceitos das relações métricas no triângulo retângulo?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Diga como isso aconteceu:

Parte 3: Pontos Positivos e Negativos do GeoGebra

6. O que você mais gostou no GeoGebra?

---

7. Teve algo que você não gostou ou achou difícil no GeoGebra?

Parte 4: Melhorias e Sugestões

8. O que poderia ser feito para deixar o GeoGebra mais fácil ou mais legal de usar?

---

9. O GeoGebra poderia ser usado para aprender outros conteúdos de matemática?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Diga quais: