Explorando as Relações Métricas no Triângulo Retângulo com o GEOGEBRA

Passo a Passo Para Construir e Visualizar as Propriedades do Triângulo Retângulo

José Genilson da Costa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

Explorando as Relações Métricas no Triângulo Retângulo com o GEOGEBRA: Passo a Passo Para Construir e Visualizar as Propriedades do Triângulo Retângulo

Orientando: José Genilson da Costa
Orientador: Roger Ruben Huaman Huanca

Campina Grande/2025

JOSÉ GENILSON DA COSTA

EXPLORANDO AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM O GEOGEBRA: PASSO A PASSO PARA CONSTRUIR E VISUALIZAR AS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Produto educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento a exigência para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação de Professores em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovada em: 10/ 07 / 2025

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____

Prof. Dr. Helber Rangel Formiga Leite de Almeida
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Documento assinado digitalmente
RICARDO ANTONIO FAUSTINO DA SILVA BRAZ
Data: 01/07/2025 14:25:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

C837p Costa, José Genilson da.

Explorando as Relações Métricas no Triângulo Retângulo com o GEOGEBRA [manuscrito] : Passo a Passo Para Construir e Visualizar as Propriedades do Triângulo Retângulo / José Genilson da Costa. - 2025.

32 f. : il. color.

Digitado.

Produto Educacional apresentado ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática/UEPB

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, CREDENCIADO".

1. Ensino em matemática. 2. Geometria. 3. Tecnologias Digitais. 4. Relações Métricas. 5. GeoGebra. I. Título

21. ed. CDD 327.7

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é derivado da dissertação de mestrado intitulada: "O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MEDIADO PELA PLATAFORMA GEOGEBRA."

Construído com base em uma proposta de ensino investigativa e ativa, o material convida professores e estudantes a explorarem as propriedades geométricas fundamentais do triângulo retângulo por meio de construções na Plataforma GeoGebra, aliando tecnologia, visualização e raciocínio matemático.

Este produto educacional sugere ser trabalhado a partir da perspectiva da Resolução de Problemas, conforme defendida por Lourdes Onuchic, recomendando que a aprendizagem se dê por meio da exploração de situações desafiadoras, instigantes e cheias de significado. Assim, o aluno pode assumir o papel de protagonista do processo de aprendizagem, construindo conceitos a partir da ação, da dúvida e da argumentação.

São apresentadas propriedades geométricas relacionadas ao triângulo retângulo — desde as projeções ortogonais até relações com tangências e circunferências.

Cada propriedade está estruturada com:

- 🎯 Objetivo, que direciona a exploração;
- 🛠️ As ferramentas do GeoGebra necessárias para a construção;
- 🔎 Um passo a passo, que orienta a descoberta;
- 📝 Uma justificativa geométrica, para a consolidação do conhecimento;
- 📐 Uma propriedade destacada, que sintetiza a relação construída.

Este material é indicado para ser utilizado em sala de aula, oficinas, grupos de estudos e demais contextos que valorizem o uso da tecnologia como mediadora do pensamento matemático.

Esperamos que, ao explorar estas páginas, o leitor sinta-se instigado a construir, observar, questionar e validar ideias matemáticas, desenvolvendo uma postura investigativa e significativa diante da geometria.

SUMÁRIO

🟦 PROPRIEDADE 01: PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM PONTO SOBRE UMA RETA

🎯 **Objetivo:** Construir a projeção ortogonal de um ponto $\boldsymbol{P}$ sobre uma reta $\boldsymbol{r}$.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
  - Ponto
  - Reta
  - Perpendicular (reta perpendicular por ponto)
  - Interseção de objetos
  - Ângulo
  - Segmento
  - Ocultar/mostrar objetos

🔎 **Passo a passo da construção**

1. Crie dois pontos **A** e **B**.
2. Construa uma **reta r** passando por A e B.
3. Crie um **ponto P fora da reta r**.
4. Oculte o ponto $\boldsymbol{B}$ para facilitar a visualização.
5. Crie uma reta $\boldsymbol{s}$ perpendicular a $\boldsymbol{r}$ passando por $\boldsymbol{P}$.
6. Marque o ponto de interseção $\boldsymbol{Q}$ entre a reta $\boldsymbol{s}$ e a reta $\boldsymbol{r}$.
7. Crie um ângulo de **90°** entre as retas $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{r}$ para confirmar a perpendicularidade.
8. Crie uma reta $\boldsymbol{t}$ perpendicular a $\boldsymbol{r}$ passando por $\boldsymbol{A}$.
9. Crie um ângulo de **90**° entre as retas $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{r}$ para verificar a perpendicularidade.
10. Oculte a reta perpendicular $\boldsymbol{s}$.
11. Crie um segmento que liga o ponto $\boldsymbol{P}$ ao ponto de interseção $\boldsymbol{Q}$. Esse é o segmento de projeção ortogonal de $\boldsymbol{P}$ sobre $\boldsymbol{r}$.

📐 **Justificativa geométrica:**

- A reta perpendicular $\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{r}$ passando por $\boldsymbol{P}$ define a projeção ortogonal de $\boldsymbol{P}$ sobre $\boldsymbol{r}$. O ponto de interseção $\boldsymbol{Q}$ é o pé da perpendicular, sendo a menor distância de $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{r}$.

🔷 **Propriedade destacada**

A projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta é o ponto da reta mais próximo do ponto dado, formando sempre um ângulo de 90° *com a reta no ponto de projeção.*

🟦 PROPRIEDADE 02 – RELAÇÃO ENTRE CATETO E SUA PROJEÇÃO ORTOGONAL NA HIPOTENUSA

🎯 **Objetivo:** Construir um triângulo retângulo e verificar geometricamente que o quadrado do comprimento de um cateto é igual ao produto da projeção desse cateto sobre a hipotenusa pelo comprimento da hipotenusa. Essa é uma das relações métricas fundamentais em triângulos retângulos.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
    - Ponto
    - Segmento entre dois pontos
    - Perpendicular
    - Interseção
    - Polígono
    - Distância ou comprimento
    - Texto (opcional, para nomear medidas)

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. **Construa os pontos A e B** em qualquer lugar da tela.
2. **Construa o segmento** AB.
3. **Construa o ponto B** de modo que o ângulo

4. **Crie** uma **reta perpendicular** ao segmento AB passando pelo ponto A:
    - **Selecione** a ferramenta Reta Perpendicular (menu ou tecla Alt + P).
    - **Clique** no segmento AB e depois no ponto A.
5. **Marque** um ponto C qualquer sobre a reta perpendicular (fora de A).
6. **Oculte** a reta perpendicular.
7. **Construa** os segmentos AC e BC para formar o triângulo.
8. Verifique o ângulo reto:
    - **Use** a ferramenta Ângulo e clique nos pontos B, A, C.
    - Deve aparecer 90º no vértice A.
9. A hipotenusa é o segmento **BC**, e o cateto considerado será o **AC**.
10. **Trace a altura AH** do ponto A à hipotenusa BC, usando a ferramenta **Perpendicular**. Marque o ponto de interseção como **H** (projeção ortogonal do ponto A na hipotenusa).
11. **Oculte** a reta perpendicular.
12. **Trace** o segmento AH.
13. Agora, **meça os comprimentos** dos seguintes segmentos:
    - ✓ AC (cateto)
    - ✓ BC (hipotenusa)
    - ✓ BH (projeção de AB sobre a hipotenusa)
14. Compare os valores e observe a igualdade.

Justificativa geométrica:

- A altura traçada do vértice do ângulo reto à hipotenusa forma dois triângulos semelhantes ao triângulo original. A semelhança dos triângulos implica que:

$$(cateto)^2 = projeção \cdot hipotenusa$$

No caso do cateto AB, temos:

$$AB^2 = AH \cdot AC$$

A altura traçada do vértice do ângulo reto à hipotenusa forma dois triângulos

$$\Delta AHB \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{b}{c}$$

$$\therefore c^2 = bm$$

Analogamente: $a^2 = nb$

📐 **Propriedade destacada:**
Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela projeção ortogonal desse cateto sobre a hipotenusa.

🟦 PROPRIEDADE 03 – QUADRADO DA ALTURA É IGUAL AO PRODUTO DAS PROJEÇÕES DOS CATETOS

🎯 **Objetivo:** Construir um triângulo retângulo no GeoGebra e verificar geometricamente que o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
  - Ponto
  - Segmento entre dois pontos
  - Perpendicular
  - Interseção
  - Distância ou comprimento
  - Ocultar/mostrar objetos
  - Texto (opcional, para nomear medidas)

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. Construa dois pontos **A** e **B** em qualquer lugar da tela.
2. Construa o segmento **AB**.
3. Crie uma reta perpendicular ao segmento **AB** passando pelo ponto **A**:
   - Selecione a ferramenta Reta **Perpendicular**.
   - Clique no segmento **AB** e depois no ponto **A**.
4. Marque um ponto **C** sobre essa reta perpendicular (acima de A para melhor visualização).
5. Oculte a reta perpendicular para deixar o desenho limpo.
6. Construa os segmentos **AC** e **BC** formando o triângulo **ABC**, onde o ângulo em **A** é reto.
7. Verifique com a ferramenta **Ângulo** que o ângulo em **A** mede **90°**.
8. Trace a altura **AH** do ponto **A** à hipotenusa **BC**:
   - Use a ferramenta **Perpendicular** selecionando o segmento **BC** e o ponto **A**.
   - Marque o ponto de interseção como **H**.
9. Meça os comprimentos dos segmentos:
   - **AH** (altura)
   - **BH** (projeção do cateto AB sobre a hipotenusa)
   - **HC** (projeção do cateto AC sobre a hipotenusa)
10. Eleve ao quadrado o valor da altura (**AH²**) e calcule o produto das projeções (**BH × HC**).
11. Compare os resultados para verificar a igualdade.

📝 **Justificativa geométrica:**

- A altura traçada do vértice do ângulo reto à hipotenusa divide o triângulo retângulo original em dois triângulos menores que são semelhantes entre si e ao triângulo original.
- Pela semelhança, temos:

$$\frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH}$$

Multiplicando cruzado:

$$AH^2 = BH \times HC$$

- Assim, o quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

📐 **Propriedade destacada:**

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

📘 PROPRIEDADE 04 – PRODUTO DOS CATETOS É IGUAL AO PRODUTO DA HIPOTENUSA PELA ALTURA

🎯 **Objetivo:** Construir um triângulo retângulo no GeoGebra e verificar geometricamente que o produto dos comprimentos dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
    - Ponto
    - Segmento entre dois pontos
    - Reta perpendicular / Perpendicular
    - Interseção
    - Ângulo
    - Distância ou comprimento
    - Ocultar/mostrar objetos
    - Texto (opcional)

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. **Criar os pontos A e B** em qualquer lugar da tela.
2. **Construir o segmento AB** usando a ferramenta **Segmento entre dois pontos**.

3. **Criar a reta perpendicular a AB passando por A**:
    - Ferramenta Reta Perpendicular → clique no segmento AB e depois no ponto A.
4. **Marcar o ponto C** sobre a reta perpendicular (acima ou abaixo de A).
5. **Ocultar a reta perpendicular** para deixar o desenho limpo.
6. **Formar o triângulo ABC** unindo A–C e B–C.
7. **Verificar ângulo reto** no vértice A com a ferramenta **Ângulo** ($\angle A = 90°$).
8. **Traçar a altura AH** do ponto A até a hipotenusa BC:
    - Ferramenta **Perpendicular** → selecione BC e o ponto A.
    - Marque o ponto de interseção como H.
9. **Medir os comprimentos**:
    - Cateto AB
    - Cateto AC
    - Hipotenusa BC
    - Altura AH
10. **Calcular**:
    - Produto dos catetos: $AB \times AC$
    - Produto da hipotenusa pela altura: $BC \times AH$
11. **Comparar resultados** e confirmar a igualdade.

📝 **Justificativa geométrica:**

- A altura relativa à hipotenusa divide o triângulo original em dois triângulos menores semelhantes ao triângulo inicial.
- Pela semelhança dos triângulos **⊿ABC**, **⊿AHB** e **⊿AHC**, temos:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{AB}$$

que leva a:

$$AB \times AC = BC \times AH$$

- Portanto, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura.

📐 **Propriedade destacada:**
Em qualquer triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela:

$$AB \times AC = BC \times AH$$

🟦 PROPRIEDADE 05 – RELAÇÃO ENTRE OS CATETOS E A SOMA DAS PROJEÇÕES

🎯 **Objetivo:** Construir um triângulo retângulo no GeoGebra e verificar geometricamente que a soma dos quadrados dos catetos é igual à soma dos produtos da hipotenusa com cada uma de suas projeções ortogonais sobre ela.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
  - Ponto
  - Segmento entre dois pontos
  - Reta perpendicular / Perpendicular
  - Interseção
  - Ângulo
  - Distância ou comprimento
  - Texto (opcional)
  - Ocultar/mostrar objetos

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. **Criar os pontos A e B** em qualquer posição da tela.

2. **Construir o segmento AB** usando **Segmento entre dois pontos**.
3. **Criar a reta perpendicular a AB passando por A**:
    - Ferramenta **Reta Perpendicular** → clique no segmento AB e depois no ponto A.
4. **Marcar o ponto C** sobre a reta perpendicular (acima de A).
5. **Ocultar a reta perpendicular** para limpar a construção.
6. **Formar o triângulo ABC** ligando A–C e B–C.
7. **Verificar ângulo reto** em A com a ferramenta **Ângulo** (deve mostrar 90°).
8. **Traçar a altura AH**:
    - Ferramenta **Perpendicular** → selecione BC e depois A.
    - Marcar o ponto de interseção com BC como H.
9. **Medir as projeções dos catetos sobre a hipotenusa**:
    - BH: projeção do cateto AB sobre BC.
    - HC: projeção do cateto AC sobre BC.
10. **Medir os catetos e a hipotenusa**:
    - AB, AC e BC.
11. **Verificar a relação**:
    - Calcule $AB^2 + AC^2$
    - Calcule $BC \times (BH + HC)$
12. **Comparar valores** para confirmar a igualdade.

📝 **Justificativa geométrica:**

- Pelo Teorema de Pitágoras, temos:
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$
- Das relações métricas, cada cateto ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa por sua respectiva projeção:
$$AB^2 = BC \times BH$$
$$AC^2 = BC \times HC$$

- Somando as duas relações:
$$AB^2 + AC^2 = BC \times (BH + HC)$$
- Como $BH + HC = BC$, a igualdade se confirma.

📐 **Propriedade destacada:**
Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela soma das projeções dos catetos sobre ela:

$$AB^2 + AC^2 = BC \times (BH + HC)$$

📘 PROPRIEDADE 06 – IDENTIDADE MÉTRICA EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS (SOMA DOS QUADRADOS E PROJEÇÕES)

🎯 **Objetivo:** Deduzir, a partir das relações métricas no triângulo retângulo, que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, utilizando as projeções ortogonais.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**
- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
  - Ponto
  - Segmento entre dois pontos
  - Reta perpendicular / Perpendicular
  - Interseção
  - Ângulo
  - Distância ou comprimento
  - Texto (opcional)
  - Ocultar/mostrar objetos

🔎 Passo a passo da construção:

1. **Criar pontos A e B** e o segmento AB.
2. **Construir a reta perpendicular a AB por A** e marcar um ponto C nessa reta.
3. **Formar o triângulo ABC** (ângulo reto em A).
4. **Traçar a altura AH** do ponto A à hipotenusa BC.
5. **Marcar as projeções BH e HC** na hipotenusa.
6. **Medir os comprimentos**: AB, AC, BC, BH, HC.
7. **Verificar individualmente as duas relações métricas**:

    - $AB^2 = BC \times BH$
    - $AC^2 = BC \times HC$
8. **Somar as duas igualdades** para obter:
    - $AB^2 + AC^2 = BC \times (BH + HC)$
9. **Usar que** $BH + HC = BC$ para concluir:
    - $AB^2 + AC^2 = BC^2$

📝 Justificativa geométrica:

- Das relações métricas básicas, cada cateto ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção sobre ela.
- Ao somar essas duas relações, obtemos a identidade métrica:

$$AB^2 + AC^2 = BC \times (BH + HC)$$

- Como a soma das projeções é igual à própria hipotenusa ($BH + HC = BC$), a igualdade se transforma no Teorema de Pitágoras:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

📐 **Propriedade destacada:**
*A **identidade métrica** em triângulos retângulos mostra que o Teorema de Pitágoras é consequência direta das relações métricas das projeções ortogonais:*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

📘 PROPRIEDADE 07 – PROPRIEDADE DO DIÂMETRO COMO BASE DE ÂNGULO RETO

🎯 **Objetivo:** Construir, no GeoGebra, um círculo e mostrar que todo triângulo inscrito em uma circunferência, cujo lado seja o diâmetro, é um triângulo retângulo, com o ângulo reto oposto ao diâmetro.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
  - Ponto
  - Segmento entre dois pontos
  - Circunferência (centro e raio)
  - Interseção
  - Ângulo
  - Distância ou comprimento
  - Ocultar/mostrar objetos
  - Texto (opcional)

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. **Criar dois pontos A e B** em qualquer lugar da tela.
2. **Construir o segmento AB** — ele será o diâmetro da circunferência.
3. **Encontrar o ponto médio O de AB**:
   - Ferramenta **Ponto Médio ou Centro**.

4. **Construir a circunferência com centro em O e raio OA**:
    - Ferramenta **Circunferência (Centro e Raio).**
5. **Marcar um ponto C** qualquer sobre a circunferência, que não coincida com A ou B.
6. **Construir o triângulo ABC** unindo A–C e B–C.
7. **Medir o ângulo em C** usando a ferramenta **Ângulo**.
8. **Observar que ∠ACB = 90°**, independentemente da posição de C na circunferência.
9. **Mover o ponto C** ao longo da circunferência e confirmar que o ângulo oposto ao diâmetro permanece reto.

📝 **Justificativa geométrica:**

- Pela Propriedade de Tales, qualquer ponto C de uma semicircunferência, com base no diâmetro AB, forma com A e B um triângulo retângulo no qual o ângulo oposto ao diâmetro é reto.
- Isso ocorre porque o arco AB mede 180°, logo o ângulo inscrito correspondente (ACB) mede metade do arco, ou seja, 90°.

📐 **Propriedade destacada:**

Em qualquer circunferência, um triângulo inscrito cujo lado seja o diâmetro é sempre retângulo, com ângulo oposto ao diâmetro igual a 90°:

$$\angle ACB = 90^{\circ}$$

🟦 PROPRIEDADE 08 – RELAÇÃO MÉTRICA DOS ÂNGULOS INSCRITOS E SEGMENTOS

🎯 **Objetivo:** Construir uma circunferência no GeoGebra e verificar geometricamente que ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco são iguais e que existe uma relação métrica entre as medidas dos segmentos determinados pelos pontos na circunferência.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
    - Ponto
    - Segmento entre dois pontos
    - Circunferência (centro e raio)
    - Interseção
    - Ângulo
    - Distância ou comprimento
    - Texto (opcional)
    - Ocultar/mostrar objetos

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. **Criar um ponto O** que será o centro da circunferência.
2. **Criar um ponto A** sobre a área de trabalho, que será usado para definir o raio.
3. **Construir a circunferência com centro O e raio OA**.
4. **Marcar outros dois pontos B e C** sobre a circunferência.
5. **Formar o arco BC** da circunferência.
6. **Marcar um ponto P** qualquer sobre o arco BC (que não coincida com B ou C).
7. **Construir o triângulo BPC** unindo B–P–C.
8. **Medir o ângulo ∠BPC** usando a ferramenta **Ângulo**.
9. **Mover o ponto P** ao longo do arco BC e observar que o valor de ∠BPC permanece constante.
10. **Marcar outro ponto Q** no mesmo arco e repetir a medição para confirmar que ∠BQC = ∠BPC.
11. **Explorar relação métrica**: medir os comprimentos dos segmentos BP, PC, BQ e QC para analisar simetrias ou proporções se P e Q estiverem em posições específicas (por exemplo, em arcos iguais).

📝 **Justificativa geométrica:**

- A Pela propriedade do ângulo inscrito, todos os ângulos que subtendem o mesmo arco na circunferência são iguais.
- Assim, se P e Q pertencem ao mesmo arco BC, então:
$$\angle BPC = \angle BQC$$
- Essa igualdade independe da posição exata de P ou Q no arco.
- Em casos especiais (por exemplo, P e Q simétricos em relação à mediatriz de BC), surgem relações métricas adicionais entre BP, PC, BQ e QC.

📐 **Propriedade destacada:**

Em uma circunferência, ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco são sempre iguais:
$$\angle BPC = \angle BQC$$

🟦 PROPRIEDADE 09 – RELAÇÃO ENTRE PONTOS DE TANGÊNCIA EM TRIÂNGULO COM CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA

🎯 **Objetivo:** Construir a circunferência inscrita de um triângulo ABC, localizar seus pontos de tangência com os lados e verificar as igualdades dos comprimentos das tangentes a partir de cada vértice (propriedade das tangentes iguais) e sua expressão em termos do semi-perímetro.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
    - Ponto
    - Segmento entre dois pontos
    - Polígono (opcional: para constrtuir o triângulo)
    - Bissetriz de ângulo

- Interseção
- Reta perpendicular
- Circunferência com centro e raio
- Distância ou comprimento
- Texto (para rótulos dinâmicos)
- Ocultar/mostrar objetos (opcional, para limpar visual)

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. **Crie os pontos vértice do triângulo**
    - Ferramenta **Ponto**: marque três pontos A, B e C (em qualquer posição não colinear).
2. **Construa os lados do triângulo**
    - Ferramenta **Segmento entre dois pontos**: ligue $A - B, B - C\ e\ C - A$. (ou use **Polígono** A, B, C).
3. **Construa as bissetrizes interiores dos ângulos**
    - Ferramenta **Bissetriz de ângulo**: selecione os vértices para traçar a bissetriz de ∠A, em seguida de ∠B (não precisa fazer a de C se usar interseção de duas).
      -> você terá duas retas bissetoras.
4. **Encontre o incentro I**
    - Ferramenta **Interseção**: clique nas duas bissetrizes para criar o ponto I (centro da incírcunferência).
5. **Traçar a perpendicular de III a cada lado para localizar pontos de tangência**
    - Ferramenta **Perpendicular** (linha perpendicular por ponto):
      • Selecione a reta BC e, em seguida, o ponto I → intersecte essa perpendicular com BC e marque esse ponto como D.

• faça o mesmo com a reta CA → interseção será E.
• Faça o mesmo com a reta AB → interseção será F.

- Observação: $D \in BC,\ E \in CA, F \in AB$. Esses são os pontos de tangência.

6. **Construa a incircunferência**
    - Ferramenta **Circunferência (centro e raio)**: centro I, raio ID (ou selecione Círculo[I, D] na entrada). A circunferência tocará BC em D, CA em E, A em F.
7. **Meça os segmentos de tangência**
8. Ferramenta **Distância** (ou usar a barra de entrada): calcule

$$AF = Distance[A, F]$$
$$AE = Distance[A, E]$$
$$BF = Distance[B, F]$$
$$BD = Distance[B, D]$$
$$CD = Distance[C, D]$$
$$CE = Distance[C, E]$$

9. **Defina os comprimentos dos lados e semiperímetro (entrada):**
    - Na barra de entrada, crie:
      a := Distance[B, C] // lado a = BC
      b := Distance[C, A] // lado b = CA
      c := Distance[A, B] // lado c = AB
      s := (a + b + c) / 2 // semiperímetro
10. **Verifique as igualdades das tangentes (entrada):**
    - AF e AE (tangentes a partir de A): provar AF = AE.
    - BF e BD (tangentes a partir de B): provar BF = BD.
    - CD e CE (tangentes a partir de C): provar CD = CE.
    - Na barra de entrada pode criar expressões que valiem diferenças:
      diffA := AF - AE

diffB := BF - BD
diffC := CD - CE
e inserir Round(diffA,5)

11. **Verificar relação com o semiperímetro (opcional, entrada):**
    - AF deve igualar s - a? — atenção à notação: aqui usamos a=BC. Então:
      testAF := AF - (s - a)
      testBF := BF - (s - b)
      testCD := CD - (s - c)
    - Se desejar, use Round(testAF,5) para ver aproximação numérica próxima de zero.
12. **Limpeza visual**
    - Oculte as retas auxiliares (bissetrizes/perpendiculares) se quiser, mantendo somente o triângulo, o incentro, a incircunferência e os pontos D,E,F. Acrescente textos dinâmicos para mostrar AF = AE, BF = BD, CD = CE e AF = s - a, etc.

📝 **Justificativa geométrica:**

- **Igualdade de tangentes a partir de um mesmo ponto:** Seja a incircunferência com centro I. As retas IF, IE, ID são perpendiculares aos lados onde tangenciam. Do ponto AAA saem duas tangentes à mesma circunferência: AF e AE. Pelo **teorema das tangentes** (ou propriedade da potência do ponto externo), as duas tangentes de um ponto externo a uma circunferência têm comprimentos iguais. Logo AF=AE. O mesmo argumento aplicado ao vértice B dá BF=BD e a C dá CE=CD.

- **Expressão em função do semiperímetro:** Escrevendo as somas dos segmentos ao longo de cada lado e agrupando, por exemplo no lado AB: AB=AF+FB. Substituindo os equalizadores de tangente (AF = AE, BF = BD, etc.) e somando as três igualdades apropriadas, obtém-se que cada uma das quantidades tangentes a partir de um vértice vale s−a, s−b ou s−c (com a=BC, b=CA, c=AB). Formalmente:

$$AF = AE = s - a, BF = BD = s - b, CE = CD = s$$

📐 **Propriedade destacada:**
Em um triângulo ABC com incírculo tangente em D∈BC, E∈CA, F∈ AB, valem as igualdades de tangentes e as fórmulas em função do semiperímetro s:

$$AF = AE = s - a, BF = BD = s - b, CE = CD = s$$

Onde $a = BC, b = CA, c = AB$ *e* $s = \frac{a+b+c}{2}$

▧ PROPRIEDADE 10 – SOMA DAS DISTÂNCIAS DOS PONTOS DE TANGÊNCIA INTERNOS EM RELAÇÃO AOS LADOS

🎯 **Objetivo:** Construir um triângulo ABC no GeoGebra com sua circunferência inscrita (incírculo), identificar os pontos de tangência D, E e F e verificar que a soma das distâncias dos pontos de tangência a dois vértices adjacentes é igual à medida do lado oposto.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
  - Ponto
  - Segmento entre dois pontos

- Polígono
- Bissetriz de ângulo
- Interseção
- Reta perpendicular
- Circunferência (centro e raio)
- Distância ou comprimento
- Texto (opcional)
- Ocultar/mostrar objetos

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. **Criar os vértices do triângulo**
   - Ferramenta **Ponto**: marque A, B e C não colineares.
2. **Construir os lados**
   - Ferramenta **Segmento entre dois pontos**: ligue A–B, B–C e C–A.
3. **Construir duas bissetrizes internas**
   - Ferramenta **Bissetriz de ângulo**:
     • clique nos pontos B, A, C para bissetriz do ângulo ∠BAC.
     • clique nos pontos A, B, C para bissetriz do ângulo ∠ABC.
4. **Determinar o incentro I**
   - Ferramenta **Interseção**: clique nas duas bissetrizes.
5. **Localizar pontos de tangência**
   - Para D (no lado BC):
     • Ferramenta **Perpendicular**: clique no lado BC e depois no ponto I.
     • Ferramenta **Interseção**: clique nessa perpendicular e no lado BC → ponto D.

- Para E (no lado CA):
  • Perpendicular a CA passando por I → interseção = E.
- Para F (no lado AB):
  • Perpendicular a AB passando por I → interseção = F.

6. **Construir a incircunferência**
   - Ferramenta **Circunferência (Centro e Raio)**: centro I, raio ID (ou Circle[I,D] na barra de entrada).
7. **Medir distâncias relevantes**
   - Use **Distância** para medir:
   $$BD, DC, CE, EA, AF, FB$$
8. **Verificar a propriedade da soma das distâncias**
   - Lado BC: $BD + DC = BC$
   - Lado CA: $CE + EA = CA$
   - Lado AB: $AF + FB = AB$
9. **Limpeza visual**

- Oculte retas auxiliares e mantenha apenas o triângulo, incírculo e pontos D,E,F com rótulos e medidas.

📝 **Justificativa geométrica:**

- Pela **propriedade das tangentes a partir de um mesmo ponto**, $BD = BF, DC = \ CE, EA = \ AF$.
- Em cada lado do triângulo, o ponto de tangência divide o lado em dois segmentos cuja soma é igual ao lado todo:
$$BD + DC = BC, CE + EA = CA, AF + FB = AB$$
- Isso é consequência direta de que cada lado é formado por duas tangentes provenientes de vértices diferentes, e que

cada tangente a partir de um vértice tem comprimento constante.

📐 **Propriedade destacada:**
Em qualquer triângulo, a soma das distâncias dos pontos de tangência internos em relação a dois vértices adjacentes é igual à medida do lado oposto:

$$BD + DC = BC, CE + EA = CA, AF + FB = AB$$

🟦 PROPRIEDADE 11 – CIRCUNFERÊNCIAS ORTOGONAIS: PROPRIEDADES NO ENCONTRO DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS PERPENDICULARES

🎯 **Objetivo:** Construir duas circunferências ortogonais no GeoGebra, identificar seus pontos de interseção e verificar que, no ponto de interseção, os raios de cada circunferência são perpendiculares entre si.

🛠️ **Ferramentas necessárias:**

- GeoGebra (modo Geometria)
- Ferramentas:
    - Ponto
    - Segmento entre dois pontos
    - Circunferência (centro e raio)
    - Interseção
    - Ângulo
    - Distância ou comprimento
    - Texto (opcional)
    - Ocultar/mostrar objetos

🔎 **Passo a passo da construção:**

1. **Criar o centro da primeira circunferência O_1**
    - Ferramenta Ponto: marque o ponto O_1.

2. **Criar um ponto A** que será usado para definir o raio da primeira circunferência.
3. **Construir a primeira circunferência**
    - Ferramenta **Circunferência (Centro e Raio):** centro O_1, raio O_1A.
4. **Criar o centro da segunda circunferência $\boldsymbol{O_2}$**
    - Escolha um ponto O_2 de forma que as duas circunferências se intersectem (pode ser dentro ou fora da primeira circunferência).
5. **Criar um ponto B** para definir o raio da segunda circunferência.
6. **Construir a segunda circunferência**
    - Ferramenta Circunferência (Centro e Raio): centro O_2, raio O_2B.
7. **Identificar os pontos de interseção P e Q**
    - Ferramenta Interseção: clique nas duas circunferências para marcar P e Q.
8. **Traçar os raios envolvidos**
    - Construa os segmentos $O_1P \ e \ O_2P$.
9. **Medir o ângulo entre os raios**
    - Ferramenta Ângulo: selecione O_1, P, O_2.
    - Deve aparecer 90° se as circunferências forem ortogonais.
10. **Ajustar para ortogonalidade** (opcional, se construir por comando)
    - Para garantir ortogonalidade, escolha os raios de forma que $O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2$, onde $r_1 \ e \ r_2$ são os raios das circunferências.
11. **Ocultar elementos auxiliares**

- Deixe visível apenas as duas circunferências, seus centros, os pontos de interseção e os raios até um dos pontos de interseção.

📝 **Justificativa geométrica:**

- Duas circunferências são ortogonais se, em qualquer ponto de interseção, seus raios são perpendiculares.
- Isso decorre da relação entre os comprimentos:

$$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2$$

- Essa condição garante que o triângulo O_1, PO_2 é retângulo em P.

📐 **Propriedade destacada:**

Em duas circunferências ortogonais, no ponto de interseção, os raios são perpendiculares:

$$\angle O_1PO_2 = 90º$$

Referências

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

BRAZ, R. A. F. da S. **GeoGebra e a resolução de problemas na aprendizagem da função polinomial**. 2020. 136f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.

GALDINO, J. F.; NASCIMENTO JÚNIOR, E. C. do; PAULINO, O. F. . Teorema de Pitágoras: demonstração do Presidente Garfield com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, *[S. l.]*, v. 14, n. 1, p. 225–239, 2025. DOI:

10.23925/2237-9657.2025.v14i1p225-239. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/67973. Acesso em: 05 jul. 2025.

MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA, V.; NÓS, R.; SANO, M. Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, *[S. l.]*, v. 12, n. 1, p. 062–077, 2023. DOI: 10.23925/2237-9657.2023.v12i1p062-077. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/59199. Acesso em: 09 mai. 2025.

SCORTEGAGNA. L. **Informática na Educação**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

HÖLZL, R. **The Geometry of Dynamic Geometry Software**. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 4, n. 1, p. 1–28, 1999.

PREINER, J. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) – University of Salzburg, 2008. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 10 mai. 2025.

GEOGEBRA

O produto educacional "Explorando as Relações Métricas no Triângulo Retângulo com o GeoGebra" constitui o produto educacional derivado da dissertação intitulada "O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MEDIADO PELA PLATAFORMA GEOGEBRA". Este material tem por objetivo subsidiar professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem das propriedades métricas do triângulo retângulo, utilizando a Plataforma GeoGebra como instrumento de apoio e potencialização das práticas pedagógicas.

A obra apresenta um roteiro sistemático e detalhado para a construção e visualização das relações métricas do triângulo retângulo, fomentando a exploração geométrica e o desenvolvimento da autonomia discente.

Com linguagem clara e recursos visuais acessíveis, este livro busca contribuir para a prática docente, enriquecendo as atividades em sala de aula e promovendo a construção de habilidades geométricas de forma interativa e dinâmica.