UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLÉBIO OLIVEIRA DA SILVA

A INTERSECÇÃO ENTRE BINÔMIO DE NEWTON E PROBLEMAS DE CONTAGEM

CAMPINA GRANDE
2025

CLÉBIO OLIVEIRA DA SILVA

A INTERSECÇÃO ENTRE BINÔMIO DE NEWTON E PROBLEMAS DE CONTAGEM

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Área de concentração: Ensino Básico Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sílvio Fernando Alves Xavier Junior

CAMPINA GRANDE
2025

S586i Silva, Clébio Oliveira da.

A intersecção entre binômio de Newton e problemas de contagem [manuscrito] / Clébio Oliveira da Silva. - 2025.

75 f. : il.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Silvio Fernando Alves Xavier Junior, Departamento de Estatística - CCT".

1. Binômio de Newton. 2. Problemas de contagem. 3. Funções geradoras. I. Título

21. ed. CDD 5l0

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

CLÉBIO OLIVEIRA DA SILVA

A INTERSECÇÃO ENTRE BINÔMIO DE NEWTON E PROBLEMAS DE CONTAGEM

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Linha de Pesquisa: Ensino Básico Matemática.

Aprovada em: 27/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **CLAUDILENE GOMES DA COSTA** (***.494.464-**), em **08/08/2025 08:26:23** com chave **83ca2b8a744a11f0ad2106adb0a3afce**.
- **Silvio Fernando Alves Xavier Junior** (***.025.684-**), em **07/08/2025 20:57:21** com chave **41b9d38673ea11f0886f06adb0a3afce**.
- **Luciana Roze de Freitas** (***.867.174-**), em **07/08/2025 21:03:40** com chave **241bd8b473eb11f090b61a1c3150b54b**.

Dedico esse trabalho a meus três filhos: Miguel, Eliza e Luísa

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida e sabedoria. Aos meus familiares que sempre torceram em prol do meu crescimento acadêmico. Aos meus professores pelos compartilhamentos de saberes. Ao Prof. Dr. Sílvio Fernando Alves Xavier Junior pelo apoio e orientação na construção deste trabalho. A SBM, que juntamente com a UEPB, trouxe esse projeto de Mestrado e nos proporcionou uma oportunidade de desenvolver novos conhecimentos.

"O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano".

Isaac Newton (1643-1726)

RESUMO

Esta dissertação explorou a intersecção entre o Binômio de Newton, problemas de contagem e funções geradoras, destacando a importância desses conceitos na matemática combinatória. O Binômio de Newton, que permite a expansão de potências de binômios, é um instrumento fundamental para resolver diversos problemas combinatórios, fornecendo uma estrutura que facilita a identificação de padrões e relações numéricas. Inicialmente, tem-se uma revisão teórica sobre o Binômio de Newton, discutindo suas propriedades e aplicações em contextos variados da matemática. Em seguida, há uma abordagem de como esse conceito se relaciona diretamente com problemas de contagem através de exemplos práticos que ilustram sua eficácia na resolução de questões envolvendo combinações e permutações. Além disso, destacam-se as funções geradoras como uma ferramenta poderosa para lidar com sequências numéricas e séries e a forma como as funções geradoras podem ser utilizadas em conjunto com o Binômio de Newton para resolver alguns problemas combinatórios. O trabalho também incluiu a análise de atividades didáticas que incorporarm esses conceitos no ensino médio, com o objetivo de promover um aprendizado mais dinâmico e significativo. É perceptível que a integração do Binômio de Newton e das funções geradoras no currículo escolar não só enriquece o conhecimento matemático dos alunos, mas também desenvolve habilidades críticas essenciais para a resolução de problemas. Este trabalho visou contribuir para o entendimento da matemática combinatória e sua aplicação em contextos educacionais, incentivando futuras pesquisas nessa área.

Palavras-chave: binômio de Newton; contagem; funções geradoras.

ABSTRACT

This dissertation explored the intersection between Newton's Binomial, counting problems and generating functions, highlighting the importance of these concepts in combinatorial mathematics. Newton's Binomial, which allows the expansion of powers of binomials, is a fundamental tool for solving various combinatorial problems, providing a structure that facilitates the identification of numerical patterns and relationships. Initially, there is a theoretical review of Newton's Binomial, discussing its properties and applications in various contexts of mathematics. Then, there is an approach to how this concept directly relates to counting problems through practical examples that illustrate its effectiveness in solving problems involving combinations and permutations. In addition, generating functions are highlighted as a powerful tool for dealing with numerical sequences and series and how generating functions can be used in conjunction with Newton's Binomial to solve some combinatorial problems. The work also included the analysis of teaching activities that incorporate these concepts in high school, with the aim of promoting more dynamic and meaningful learning. It is noticeable that the integration of Newton's Binomial and generating functions into the school curriculum not only enriches students' mathematical knowledge, but also develops critical skills essential for problem-solving. This work aimed to contribute to the understanding of combinatorial mathematics and its application in educational contexts, encouraging future research in this area.

Keywords: Newton's binomial; count; generating functions.

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma disciplina que se destaca pela sua capacidade de modelar e resolver problemas do mundo real. Entre os diversos conceitos que compõem essa vasta área do conhecimento, o Binômio de Newton emerge como uma ferramenta fundamental, especialmente em contextos relacionados à contagem e à análise combinatória (Apostol, 2013, p. 123). Este teorema não apenas facilita a expansão de expressões algébricas, mas também serve como um ponto de partida para a compreensão de diversas situações combinatórias que podem ser aplicadas em problemas práticos (Grimald, 2004, p. 456).

A relação entre o Binômio de Newton e os problemas de contagem é intrínseca, uma vez que o teorema permite calcular rapidamente coeficientes binomiais, que são essenciais na determinação do número de maneiras de selecionar elementos em conjuntos finitos (Chartrand, 2011, p. 123). Por exemplo, ao resolver problemas que envolvem combinações e permutações, a aplicação do Binômio de Newton se revela eficaz na simplificação dos cálculos e na identificação das soluções desejadas (Rosen, 2013, p. 456).

Além disso, as funções geradoras emergem como um recurso poderoso que complementa a análise do Binômio de Newton. Essas funções permitem representar sequências numéricas e resolver problemas complexos de contagem por meio da manipulação algébrica (Wilf, 2006, p. 123). No contexto do ensino médio, a introdução dessas ferramentas matemáticas pode proporcionar aos alunos uma compreensão mais profunda das relações combinatórias, ao mesmo tempo em que estimula seu interesse pela matemática (Rosen, 2013, p. 456) .

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os professores do Ensino Médio devem trabalhar com alunos a habilidade de "elaborar e resolver problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamentos de elementos, por meio dos princípios aditivo e multiplicativo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore" (Brasil, 2018, p.123). Essa habilidade está dentro da Competência Matemática e suas Tecnologias. Tal competência refere-se à "capacidade do aluno de utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente"(Brasil, 2018, p. 456). Além disso, encontra-se também na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a habilidade EF09MA09 que consiste em: compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Nesse contexto, cabe ao professor verificar qual a melhor maneira de trabalhar esse conteúdo com os seus alunos, o quão aprofundada ela será dada (Brasil, 2018, p. 123). Segundo a BNCC, o professor deve estar presente e ser atuante nas diferentes fases do processo de aprendizagem de seu aluno, tendo necessariamente que interpretar, gerir, planejar, colocar em prática e avaliar as suas opções curriculares (Brasil, 2018, p. 456). Isso evidencia que o professor deve ser um facilitador do processo de aprendizagem, proporcionando um ambiente de ensino-aprendizagem que estimule e desafie para os alunos, e que permita-lhe um eficaz desenvolvimento de suas habilidades e competências (Perrenoud, 2000, p. 123).

Diante desse cenário, esta dissertação tem como objetivo investigar a intersecção entre o Binômio de Newton, os problemas de contagem e as funções geradoras no ensino médio. Com base em uma revisão teórica e na análise de práticas pedagógicas, buscamos demonstrar como a integração desses conceitos no currículo escolar pode enriquecer o aprendizado dos alunos, promovendo habilidades cruciais para a resolução de problemas matemáticos.

Por fim, tem-se uma análise de um recurso didático que visa implementar esses conceitos no ambiente escolar, contribuindo para a formação de estudantes mais críticos e habilidosos na matemática.

1.1 Um pouco da história

Segundo Morgado (2006), o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. O caso $n=2$ já pode ser encontrado nos Elementos de Euclides, em torno de 300 a.C. O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China, (em torno de 1300) e antes disso, pelos hindus e árabes. O matemático hindu Bhãskara (1114-1185), conhecido geralmente pela "formula de Báskara" para soluções de equações do 2° grau, sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos. O mesmo aconteceu com o matemático e filósofo religioso francês Levi Ben Gerson (1288-1344) que nasceu e trabalhou na França, e que, entre outras coisas, tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides. O nome coeficiente binomial foi introduzido mais tarde por Michael Stifel (1486-1567), que mostrou, em torno de 1150, como calcular $(1+x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1+x)^{n-1}$. Sabe-se também que o matemático árabe Al-Karaji (fins do século X) conhecia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal,

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

O primeiro aparecimento do triângulo de Pascal no ocidente foi no frontispício de um livro por Petrus Apianus (1495-1552). Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1559) relacionou os elementos do triângulo de Pascal com potências de $(x+y)$. Pascal (1623-1662) publicou um tratado de 1654 mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$. Jaime Bernoulli (1654-1705) em seu *Ars Conjectandi*, de 1713, usou a interpretação de Pascal para demonstrar que

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p.$$

A segunda parte deste livro de Jaime Bernoulli é dedicada à teoria das combinações e permutações.

Isaac Newton (1642 - 1727) mostrou como calcular diretamente $(1+x)^n$ sem antes calcular $(1+x)^{n-1}$. Ele mostrou que cada coeficiente pode ser determinado, usando o anterior, pela fórmula,

$$\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$$

Conforme (Hazzan, 2013), os anos de 1666 e 1667 foram particularmente difíceis para os ingleses. Uma terrível peste, a peste bubônica, abateu-se sobre a Inglaterra, forçando, inclusive, o fechamento temporário das universidades de Oxford e Cambridge. Esse período de recolhimento foi, no entanto, propício para as ciências. Um estudante de Cambridge retornou para a casa de seus avós, que ficava na zona rural de Woolsthorpe, Lincolnshire. Esse jovem de 24 anos produziu então uma série de resultados científicos que mudariam, de maneira dramática e definitiva, o panorama das ciências.

Seu nome era Isaac Newton, entre as descobertas feitas por Newton neste período, que ficou conhecido como *anni mirabili* (anos miraculosos), temos uma generalização do Teorema Binomial, a Teoria da Gravitação e a análise da natureza da luz.

O teorema binomial foi enunciado pela primeira vez numa carta enviada a Oldenburg, destinada a Leibniz (1646-1716) e, a partir daí, os processos infinitos seriam amplamente usados.

A importância dos trabalhos de Newton reside na praticidade de seus métodos e no tipo de problemas que ele pôde resolver. Por exemplo, partindo das leis de gravitação e usando os métodos de cálculo por ele desenvolvidos, pôde demonstrar as leis de Kepler (Oliveiro, 2006).

Um exemplo da visão de Newton é sua generalização do Teorema Binomial. Esse teorema descreve como obter a expansão do binômio $(a+b)^n$ para todo inteiro positivo n. Veja,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

e assim por diante. Para determinar os coeflcientes dessas expansões, basta tomar a correspondente linha no chamado triângulo de Pascal. Para obter a próxima lista, basta começar com o número 1 e seguir somando os dois números logo acima da posição a ser preenchida. Ela seria 1, 8, 28 e assim por diante.

O jovem Newton percebeu que é possível determinar os coeficientes diretamente, sem a construção do triângulo linha por linha até chegar a potência desejada. Algo como é feito agora com a fórmula para determinar o coeficiente do termo $a^{n-p}b^p$.

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Dessa forma, para expandir $(1+x)^3$, faz-se

$$1 + 3x + \frac{3\cdot 2}{2}x^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{4\cdot 3\cdot 2}x^4 + \cdots$$

É perceptível que, a partir do termo de grau 4, os coeflcientes se anularão. Newton observou que essa fórmula vale para expoentes fracionários e negativos.

Para calcular $(1+x)^{-3}$, ele faria

$$1 + (-3)x + \frac{(-3)\cdot(-4)}{2}x^2 + \frac{(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

obtendo,

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \cdots$$

A diferença, agora, é que o lado direito da igualdade é uma soma infinita. Ele confirmou sua descoberta observando que

$$(1 + 3x + 3x^2 + x^3)(1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \cdots) = 1.$$

Newton não observou que essa expressão só vale para valores de x no intervalo $(-1, 1)$. Mas essas computações eram mais do que somente interessantes. Eram uma poderosa ferramenta de cálculo. Usando esse teorema binomial, obteve a expansão em série da função $y = \sqrt{1-x}$, obtendo

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \cdots$$

Por exemplo, usando esses termos da série, podemos calcular uma aproximação para $\sqrt{3}$. Primeiro, precisamos observar que $3 = 4 - 1$. Assim,

$$\sqrt{3} = \sqrt{4\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} \qquad e,$$

$$\sqrt{3} \cong 2\cdot\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{128} - \frac{1}{1024} - \frac{5}{32768} - \frac{7}{262144}\right) = 2\cdot\frac{227025}{262144} \cong 1.732063293.$$

É perceptível a possibilidade decomparar essa aproximação com aquela que pode ser obtida usando uma simples calculadora ciêntifica. Observa-se que foram utilizados apenas 6 termos da série.

Em 1642 Newton lança o "*Methodus fluxiorum et serierium infinitorum*"(Métodos dos fluxos e séries infinitas), aproximando-se bastante dos conceitos de limites e derivadas, onde utilizou sistema de coordenadas polares. Em 1669 publicou "*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*"(Análise por meio de equações infinitas quanto ao número de termos), onde expôs sua principal descoberta em Matemática, o Cálculo e o método das séries infinitas.

Em 1672 Newton publicou seu "*Philosophical Transaction*"(Transação filosófica) onde anunciou aquilo que achava uma das mais estranhas obras da natureza, o fato de a luz branca ser uma simples combinação de raios de diferentes cores, com diferentes índices de refração, o que lhe custou muitas críticas e ataques. "*Apahilodophise naturalis principia mathematica*"(Princípios matemáticos de filosofia natural), neste mais admirável tratado científico de todos os tempos em 1687, Newton apresenta os fundamentos da Física e da Astronomia, dando preferência aos métodos geométricos sem hesitar, na utilização de seus métodos de Cálculo e séries infinitas. Nesta obra está incluída a maior formulação matemática conseguida por Newton que é a lei da gravitação.

Generalizando as leis de Galileu, formulou "as leis do movimento de Newton"que, combinadas às de Kleper e Huygens, lhe deram oportunidades de enunciar o grande princípio unificador de duas partículas quaisquer do universo se atraem mutuamente com uma força que varia de modo inversamente proporcional à distância entre elas. Graças a sua capacidade de manejar a Matemática é que esse princípio foi aceito pelos homens de sua época; entretanto, 40 anos se passaram até que a teoria gravitacional de Newton derrubasse a cosmologia de Decartes.

Em 1695, para grande desgosto de Newton, Wallis lhe comunica que na Holanda, o Cálculo é considerado descoberta de Leibniz, isto acarretou inúmeros fatos desagradáveis, mas provou-se que Newton foi o precursor.

No seu trabalho "*Opiticks*"(Óptica) de 1704 usa pela primeira vez dois eixos de coordenadas negativas. Ainda uma obra de Newton deve ser lembrada, a "*Arithmetica universalis*"(Aritmética Universal), com muitas contribuições matemática importantes.

Famoso, representou Cambridge no Parlamento Britânico e foi eleito presidente do Royal Society, cargo que ocupou até o fim de sua vida, recebendo o título de nobreza da Rainha Anne. Ao morrer, Newton foi enterrado na Abadia de Westminister com as pompas de um rei (Hazzan, 2013).

2 NÚMEROS BINOMIAIS

2.1 Coeficiente binomial

Nesta seção tem-se a construção de um quadro com números binomiais, conhecido como triângulo de Pascal, o qual apresenta várias propriedades e teoremas relevantes. O coeficiente binomial, também chamado de número binomial, é um conceito matemático que representa o número de maneiras de escolher um subconjunto de k elementos de um conjunto com n elementos, sem considerar a ordem dos elementos.

De acordo com Vieira (2020), o coeficiente binomial $\binom{n}{p}$ é definido pela expressão:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{2.1}$$

A equação (2.1) é válida para $\forall n, p \in \mathbb{N}$, com $p \leq n$. Para $n \in \mathbb{N}$, define-se o fatorial de n, cuja notação é $n!$, da seguinte forma:

$$0! = 1 \quad e \quad n! = n(n-1)!, \quad \forall n > 1.$$

Assim,

$$2! = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Em geral, usando a igualdade $n! = n(n-1)$, tem-se

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

É conveniente estender a definição de $n!$ para o caso $n = 0$, tomando $0! = 1$.

Por exemplo, para $n = 4$ e $0 \leqslant p \leqslant 3$ temos:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1, \qquad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6, \qquad \binom{4}{3} = \frac{4}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Demonstração :

Reescrevendo a equação (2.1) da seguinte forma:

$$\binom{n}{p} p!(n-p)! = n! \tag{2.2}$$

Analisando de maneira combinatória o 1º membro da equação (2.2) tem-se a seguinte questão:

De quantas formas podemos ordenar p objetos em um total de n objetos (todos distintos)?

Temos uma sequência de n objetos distintos, podemos dividir essa sequência da seguinte maneira:

$$\underbrace{1,2,\cdots,p,}_{p \text{ objetos}}\underbrace{p+1,p+2,\cdots,n}_{n-p \text{ objetos}}$$

Os primeiros p objetos podem ser escolhidos $\binom{n}{p}$, mas escolhidos os primeiros objetos ainda podemos ordena-lós, isto é, $p!$ e $(n-p)!$. Logo, temos $\binom{n}{p}p!(n-p)!$, que é rigorosamente igual a $n!$ que é o produto de ordem distintas para n elementos.

2.1.1 Triângulo de Pascal

Segundo Morgado (2006), o triângulo de Pascal pode ser representado da forma abaixo:

$(x+a)^0 = 1$
$(x+a)^1 = 1x + 1a$
$(x+a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$
$(x+a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3.$
$(x+a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4$
$\cdots$

$$\begin{array}{lllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \cdots \end{array}$$

$\binom{0}{0}$
$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$
$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$
$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$
$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$
$\cdots$

Formados pelo números $\binom{n}{p}$ (chamados números binomiais, coeficientes binomiais ou ainda números combinatórios). Contando-se as linhas e as colunas do Triângulo começando em zero, o elemento da linha n e coluna p é $\binom{n}{p}$.

2.1.2 Relação de Stifel

Uma propriedade que permite construir mais depressa o Triângulo de Pascal é a relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \tag{2.3}$$

Com efeito somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela.

Demonstração :

Considere um conjunto A com $n+1$ elementos, e tomando um determinado elemento $a \in A$.

O objetivo é calcular o número de combinações dos elementos de A, tomados $p+1$ a $p+1$, de dois modos:

1º modo: diretamente pela fórmula, isto é,

$$\binom{n+1}{p+1}$$

2º modo: calculado-se o número de combinações que não possuam o elemento a.

Tal número é

$$\binom{n}{p+1}$$

.

Em seguida, calcula-se o número de combinações que possuem o elemento a.

Tal número é

$$\binom{n}{p}$$

.

Ao todo, o número de combinações será:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

dái, tem-se a equação (2.3)

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

.

2.1.3 Propriedades do Triângulo de Pascal

Conforme Hazzan (2013), as propriedades do Triângulo de Pascal são descritas a seguir.

1º) Em cada linha do triângulo o primeiro elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha o primeiro elemento é

$$\binom{n}{0} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

.

2º) Em cada linha do triângulo o último elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha o último elemento é

$$\binom{n}{n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

3º) A partir da 2ª linha somando dois elementos consecultivos de uma mesma linha, obtem-se o elemento situado abaixo da última parcela . Está propriedade é a relação de Stifel (já demonstrada acima).

4º) Numa linha dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Isto equivale a demonstrar que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}. \tag{2.4}$$

O que é imediato, pois

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$$

Exemplo 1: Calcule $\binom{30}{12} + \binom{30}{17} + \binom{31}{14}$

Solução:

$$\binom{30}{12} + \binom{30}{17} = \binom{30}{12} + \binom{30}{13} = \binom{31}{13}$$
$$\binom{31}{13} + \binom{31}{14} = \binom{32}{14}$$

2.1.4 Teorema das linhas

Nesta subseção vamos provar o Teorema das Linhas, também conhecido como Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal.

Teorema 1: A soma dos elementos de uma linha n do Triângulo de Pascal é igual a 2 elevado à potência de n. Em outras palavras, a soma dos termos da linha n é igual a 2^n.

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \tag{2.5}$$

A demonstração será feita por indução em n, segue que

$$Para \quad n = 0, \quad temos \quad \binom{n}{0} = 1 = 2^0,$$

o que mostra que o teorema vale para a linha 0.

Suponha que ele vale para a linha n, isto é,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

e prova-se que vale para $n+1$. Não obstante, tem-se que

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}.$$

Pela relação de Stifell, equação (2.3), tem-se:

$$\Rightarrow \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1}$$
$$= \binom{n+1}{0} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right) + \cdots + \left(\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}\right) + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right) + \binom{n+1}{n+1}$$
$$= \left(\binom{n+1}{0} + \binom{n}{0}\right) + 2\binom{n}{1} + \cdots + 2\binom{n}{n-1} + \left(\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n+1}\right)$$

Segue que,

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = 1 \quad e \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \cdots + 2\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \\
&= 2 \cdot \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}\right) \\
&= 2 \cdot 2^n \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução finita, a propriedade vale para $n+1$, para todo $n \geqslant 0$.

Exemplo 2: Se A possui 512 subconjuntos, qual é o número de elementos de A ?
Solução: O número total de subconjuntos é $2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$.

Exemplo 3: Em uma sala há 7 lâmpadas. De quantos modos pode ser iluminada a sala?

Solução:

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \cdots + \binom{7}{7} = 2^7 - \binom{7}{0} = 128 - 1 = 127$$

Exemplo 4: Calcule $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + 2^n\\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} + 2^n\\
&= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + 2^n\\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} + 2^n\\
&= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right] + 2^n\\
&= n \cdot 2^{n-1} + 2^n\\
&= 2^{n-1}(n+2).
\end{aligned}$$

2.1.5 Teorema das colunas

Teorema 2: A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal começando do primeiro elemento da coluna tem exatamente o mesmo valor do elemento que se encontra na linha e coluna imediatamente posterior ao último coeficiente binomial da soma.

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1} \tag{2.6}$$

Demonstração: Usando a relação de Stifel, equação (2.3), segue que

$$\binom{p+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p}{p+1}$$
$$\binom{p+2}{p+1} = \binom{p+1}{p} + \binom{p+1}{p+1}$$
$$\binom{p+3}{p+1} = \binom{p+2}{p} + \binom{p+2}{p+1}$$
$$\vdots$$
$$\binom{p+n}{p+1} = \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n-1}{p+1}$$
$$\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p+n}{p} + \binom{p+n}{p+1}$$

Somando (e simplificando parcelas iguais que aparecem em membros opostos) obtem-se,

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p}{p+1} + \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$$

Como $\binom{p}{p+1} = 0$, segue que

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$$

Exemplo 5: Calcule utilizando o teorema das colunas a expressão abaixo.

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{19}{3}.$$

Solução:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{19}{3} = \binom{20}{4}.$$

2.1.6 Teorema das Diagonais

Teorema 3: A soma dos elementos de mesma diagonal (isto é, de uma paralela à hipotenusa) do triângulo de Pascal (iniciando-se no primeiro elemento da diagonal) é igual ao elemento que está imediatameete abaixo na última parcela.

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}. \tag{2.7}$$

Demonstração: Usando sucessivamente binomiais complementares, teorema das colunas e binomiais complementares, tem-se

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+p}{p} &= \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} \\ &= \binom{n+p+1}{n+1} \\ &= \binom{n+p+1}{p}.\end{aligned}$$

Exemplo 6: Determine o número de soluções inteiras e não negativas de

$$x + y + z \leqslant 6$$

Solução:

Há várias formas de resolver este problema. Neste caso específico vamos resolver por combinação completa e depois aplicar o teorema das diagonais.

Dado um conjunto de n elementos tomados p a p a combinação completa ou com repetição é calculada por definição da seguinte forma:

$$CR_{n,p} = \binom{n+p-1}{p} \tag{2.8}$$

Onde da equação (2.7) n é o número de variáveis e p é o termo independente da equação linear

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$$

Demonstração:

Consideremos, por exemplo, a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \tag{2.9}$$

Soluções inteiras e positivas para esta equação são triplas ordenadas (x_1, x_2, x_3) de inteiros positivos tendo soma 6. As triplas abaixo são algumas soluções.

$$(2,1,3); (1,0,5); (0,6,0)$$

Essa soluções acima podem ser representadas pelas seguintes configurações de símbolos, barras " e sinais de mais " + ", isto é,

$$(2,1,3) \Longrightarrow \quad |\,| \;+\; | \;+\; |\,|\,| = 6$$

$$(1,0,5) \Longrightarrow \quad | \ + \ + \ | \ | \ | \ | \ | = 6$$

$$(0,6,0) \Longrightarrow \quad + \ | \ | \ | \ | \ | \ | \ + \ = 6$$

Em que a esquerda do primeiro sinal de " + " tem-se o valor de x_1, entre os dois sinais de " + ", obtem-se o valor de x_2 e depois do segundo sinal de " + ", o valor de x_3. O numero de soluções inteiras e não negativas será o número de maneiras desses símbolos serem permutados. Logo, trata-se de uma permutação com repetição, tem-se que

$$P_{6+2}^{6,2} = \frac{8!}{2!6!} = 28 = \binom{8}{2} = \binom{8}{6}.$$

Conclui-se então que n é obtido somando as barras "|" com os sinais de mais " + ", e que o número de sinais de mais " + " é uma unidade a menos que o número de variáveis x. Generalizando, tem-se que o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$ é dada por

$$\binom{p+n-1}{p}.$$

Com efeito, como $x + y + z \leqslant 6$ segue que

$$x+y+z=0 \Longrightarrow CR_{3,0} = \binom{3+0-1}{0} = \binom{2}{0}$$

$$x+y+z=1 \Longrightarrow CR_{3,1} = \binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1}$$

$$x+y+z=2 \Longrightarrow CR_{3,2} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2}$$

$$x+y+z=3 \Longrightarrow CR_{3,3} = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3}$$

$$x+y+z=4 \Longrightarrow CR_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}$$

$$x+y+z=5 \Longrightarrow CR_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5}$$

$$x+y+z=6 \Longrightarrow CR_{3,6} = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6}.$$

Pelo teorema das diagonais segue que:

$$\binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \cdots + \binom{8}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot (9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84.$$

2.2 O desenvolvimento do binômio de Newton

Um resultado importante em álgebra consiste em obter o desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ para todo n inteiro positivo x e a números reais.

Os casos particulares estão descritos a seguir.

$$
\begin{aligned}
(x+a)^0 &= 1 \\
(x+a)^1 &= x+a \\
(x+a)^2 &= x^2+2xa+a^2 \\
(x+a)^3 &= x^3+3x^2a+3xa^2+a^3
\end{aligned}
$$

Para todo n inteiro, positivo, pode-se calcular

$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)\cdot(x+a)\cdot\ldots\cdot(x+a)}_{n \text{ fatores}}$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação. O procedimento é descrito abaixo.

1º) De cada fator $(x+a)$ seleciona-se exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida.

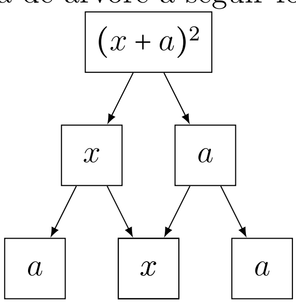
2º) Continua-se o processo até esgotar todas as seleções possíveis de um termo de cada fator.

3º) Tomam-se todos os produtos obtidos e calcula-se sua soma (que consiste em reduzir os termos semelhantes).

4º) Essa soma obtida é o resultado do desenvolvimento de $(x+a)^n$.

Exemplo 1: $(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x+a)$

O diagrama de árvore a seguir foi utilizado para as seleções dos termos.



$\boxed{x\cdot x = x^2}$ $\boxed{a\cdot a = a^2}$

$\boxed{x\cdot a = ax}$ $\boxed{a\cdot x = ax}$

Soma: $x\cdot x + x\cdot a + a\cdot x + a\cdot a$.

Com efeito, segue que $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$.

O problema que surge é o seguinte: será que é possível obter os termos do desenvolvimento de $(x+a)^n$ sem ter que recorrer ao diagrama da árvore?

A respostas é positiva. Abaixo, via resolução de um exemplo, tem-se a solução. Não obstante, também será descrita uma generalização do resultado.

Exemplo 2: $(x+a)^3 = (x+a)\cdot(x+a)\cdot(x+a)$.

Escolhendo-se um termo de cada fator, tem-se três termos, que devem ser multiplicados entre si. Os tipos de produtos que podem ser obtidos são: $x^3; x^2\cdot a; x\cdot a^2; a^3$.

Agora observam-se quantos aparecem de cada tipo, ou seja,

1º) x^3, só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x\cdot x\cdot x$, que é escolhendo somente o termo "x"de cada fator. Logo, o coeficiente de x^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{0}$.

2°) $x^2\cdot a$, a quantidade de produtos do tipo $x^2\cdot a$ é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a "x"e uma é igual a "a". isto é:

$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{1}$

Logo, o coeficiente de $x^2\cdot a$ é $\binom{3}{1}$.

3°) $x\cdot a^2$, a quantidade de produtos do tipo $x\cdot a^2$ é igual ao número de sequências de três letras onde uma é igual a "x"e duas são iguais a "a", isto é,

$$P_3^{1,2} = \frac{3!}{1!2!} = \binom{3}{2}$$

Logo, o coeficiente de $x^2\cdot a$ é $\binom{3}{2}$.

4°) a^3, só existe uma maneira de obter $a^3 = a\cdot a\cdot a$, que é escolhendo somonte o termo "a"de cada fator. Logo, o coeficiente de a^3 no binômio é dado por 1 ou $\binom{3}{3}$.

Em resumo:

$$(x+a)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2a + \binom{3}{2}xa^2 + \binom{3}{3}a^3.$$

2.3 Teorema Binomial

Teorema 4: Se x e a são números reais e n é um inteiro positivo, segue que

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^{n-p}a^p = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0a^n \tag{2.10}$$

.

Demonstração:

Pela propriedade distribuitiva da multiplicação e tendo em vista os exemplos precedentes, observa-se que os diferentes tipos de termos que podem ser obtidos na multiplicação, serão dados por

$$x^n; x^{n-1}\cdot a; x^{n-2}\cdot a^2; \ldots; x^{n-p}\cdot a^p; \ldots; a^n.$$

Abaixo tem-se a quantidade de cada um desses diferentes tipos de termos.

1°) x^n, o produto x^n só pode ocorrer de uma forma: $x \cdot x \cdot x \cdots x$ (n fatores) e portanto, o coeficiente de x^n é 1 ou $\binom{n}{0}$.

2°) $x^{n-1} \cdot a$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podem ser permutadas $(n-1)$ letras "x"e uma letra "a". isto é,

$$P_n^{n-1,1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \binom{n}{1}.$$

Portanto, o coeficiente de $x^{n-1} \cdot a$ é $\binom{n}{1}$

3°) $x^{n-2} \cdot a^2$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podem ser permutadas $(n-2)$ letras "x"e duas letras "a". isto é,

$$P_n^{n-2,2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \binom{n}{2}.$$

Portanto, o coeficiente de $x^{n-2} \cdot a^2$ é $\binom{n}{1}$

4°) $x^{n-p} \cdot a^p$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podem ser permutadas $(n-p)$ letras "x"e uma letra "a", isto é,

$$P_n^{n-p,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

5°) a^n, o produto a^n só pode ocorrer de uma forma: $a \cdot a \cdot a \cdots a$ (n fatores) e portanto, o coeficiente de a^n é 1 ou $\binom{n}{n}$

Das considerações feitas acima, segue que

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 a^n (x+a)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^{n-p}a^p \tag{2.11}$$

.

Obeserva-se a partir da equação (2.10):

i) O desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui $n+1$ termos.

ii) Os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^n$ são os elementos da linha n do Triângulo de Pascal.

iii) Escrevendo os termos do desenvolvimento na ordem acima, isto é, ordenados segundo as potências decrescentes de x, o termo de ordem $p+1$ é

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p. \tag{2.12}$$

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \ldots + \binom{n}{n}x^0 a^n$$

A demonstração também pode ser feita por indução em n.

Caso base:

$$n = 0 \Rightarrow 1 = \binom{0}{0}x^0 a^0$$

$$n = 1 \Rightarrow x + a = \binom{1}{0}x^1 a^0 + \binom{1}{1}x^0 a^1 = x + a$$

Supondo que $(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \ldots + \binom{n}{n}a^n$ seja válida para um certo n natural e prova-se que vale também para $n+1$. Multiplicando ambos os lados da hipótese por $(x+a)$, o primeiro membro fica: $(x+a)^{n+1}$. No segundo membro, fazendo-se primeiramente a multiplicação por x e depois por a e somando as duas expressões tem-se:

$$= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^n$$

Usando a relação de Stifel para somar o termos semelhantes obtem-se

$$(x+a)^{n+1} = \binom{n}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n a + \cdots + \binom{n+1}{n}xa^n + \binom{n}{n}a^{n+1}$$

Como

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$$

e

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = .1$$

Logo, substituindo na expressão acima segue que

$$(x+a)^{n+1} = \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n a + \cdots + \binom{n+1}{n}xa^n + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}$$

Portanto, por indução finita, a propriedade é válida para $n+1$.

Exemplo 1: Mostre que $9^n - 1$ é um múltiplo de 8 para todo n natural.

Há muitas maneiras de resolver esse problema, por aritmética, por indução. Neste caso a resolução será aplicando o Binômio de Newton.

Solução: Como segue que

$$9^n = (8+1)^n = \binom{n}{0}8^n 1^0 + \binom{n}{1}8^{n-1}1^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}8^1 1^{n-1} + \binom{n}{n}8^0 1^n.$$

$$9^n = 8k + 1 \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$9^n - 1 = 8k + 1 - 1 = 8k$$

.

Exemplo 2: No desenvolvimento $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$, sendo n inteiro positivo, pela formula do binômio de Newton, existe um termo que não depende de x?

Solução: O termo geral é:

$$\binom{2n+1}{p} x^{2n+1-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{2n+1}{p} x^{2n+1-2p}$$

Tomando $2n + 1 - 2p = 0 \Rightarrow p = n + \frac{1}{2}$. Como n é natural, resulta que p não é inteiro, o que não convém. Logo, não há termo independente de x.

Exemplo 3: Determine o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1-x)^2 \cdot (1+x)^n$.

Solução:

$$\begin{aligned}
(1-x)^2 &= \binom{2}{0}1^0(-x)^{2-0} + \binom{2}{1}1^1(-x)^{2-1} + \binom{2}{2}1^2(-x)^{2-2} \\
&= x^2 - 2x + 1; \\
(1+x)^n &= \binom{n}{0}1^0 x^{n-0} + \binom{n}{1}1^1 x^{n-1} + \binom{n}{2}1^2 x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}1^n x^{n-n} \\
&= x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \cdots + 1.
\end{aligned}$$

Os termos em x^n no produto $(1-x)^2 \cdot (1+x)^n$, são:
$1 \cdot x^n = x^n$; $\quad -2x \cdot nx^{n-1} = -2nx^n$; $\quad$ e $\quad x^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}x^n$, respectivamente.
Logo, o coeficiente de x^n é dado por:

$$1 - 2n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - 5n + 2}{2}.$$

Exemplo 4: Determine o termo máximo e o termo mínimo do desenvovimento de

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{120}.$$

Solução: Conforme Morgado (2015), o termo genérico do desenvolvimento é

$$T_{k+1} = \binom{120}{k} 1^{120-k} \cdot \frac{1}{2}^{k} = \binom{120}{k} \cdot \frac{1}{2^k}$$

. $T_{k+1} > T_k$ (ou seja, cada termo é maior que o anterior). Se ocorre que

$$\begin{aligned}\binom{120}{k} \cdot \frac{1}{2^k} &> \binom{120}{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \\ = \frac{120!}{k!(120-k)! \cdot 2^k} &> \frac{120!}{(k-1)!(121-k)! \cdot 2^{k-1}} \\ = \frac{(121-k)!}{(120-k)!} &> \frac{k!}{(k-1)!} \cdot \frac{2^k}{2^{k-1}} \cdot \frac{120!}{120!},\end{aligned}$$

Ou seja, $121 - k > k \cdot 2 \cdot 1$, isto é, $k < 40,333\ldots$. Logo, $T_{k+1} > T_k$ para $k \in \{1, 2, ..., 40\}$ e analogamente, $T_{k+1} < T_k$ para $k \in \{41, 42, ..., 120\}$.

Portanto, $T_{p+1} > T_p$ se $p \leq 40$ e $T_{p+1} < T_p$ se $p \geq 41$. Daí

$$T_1 < T_2 < T_3 < \cdots < T_{40} < T_{41} > T_{42} > T_{43} > T_{44} > \cdots > T_{121}$$

Segue-se, então, que o termo máximo é

$$T_{41} = \binom{120}{40} \cdot \frac{1}{2^{40}}$$

e o mínimo é T_{121}, pois $T_1 = 1$ e $T_{121} = \frac{1}{2^{120}}$.

Exemplo 5: Prove que $47^{47} + 77^{77}$ é divisível por 4.

Solução:

$$47^{47} + 77^{77} = (48-1)^{47} + (76+1)^{77}$$

No desenvolvimento de $(48-1)^{47}$ todos os termos são múltiplos de 48 (e, portanto, multiplos de 4), à exceção do último termo, $(-1)^{47} = -1$. Logo, existe um termo inteiro k tal que $(48-1)^{47} = 4k - 1$.

No desenvolvimento de $(76+1)^{77}$ todos os termos são múltiplos de 76 (e, portanto, múltiplos de 4), à exceção do último termo, $1^{77} = 1$. Logo, existe um inteiro r tal que $(76+1)^{77} = 4r + 1$.

Portanto, segue que $(48-1)^{47} + (76+1)^{77} = 4k - 1 + 4r + 1 = 4(k+r)$ é múltiplo de 4.

Exemplo 6: Determine o valor da soma $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + +3^2\binom{n}{2} + \cdots + 3^n\binom{n}{n}$.

Solução:

$$\begin{aligned}S &= \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + +3^2\binom{n}{2} + \cdots + 3^n\binom{n}{n}\\ &= \binom{n}{0}1^n3^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}3^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}3^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0 3^n\\ &= (1+3)^n\\ &= 4^n.\end{aligned}$$

Exemplo 7: (IME 2021/2022) Considere as propriedades dos coeficientes binomiais. Qual das seguintes identidades está **incorreta**?
(a) $\binom{100}{39} + \binom{100}{40} = \binom{101}{40}$
(b) $2\cdot 1\cdot\binom{100}{2} + 3\cdot 2\cdot\binom{100}{3} + 4\cdot 3\cdot\binom{100}{4} + \cdots + 100\cdot 99\cdot\binom{100}{100} = 9900\cdot 2^{98}$
(c) $\binom{100}{1} + 2\cdot\binom{100}{2} + \cdots + 100\cdot\binom{100}{100} = 100.2^{99}$
(d) $1 - \binom{100}{1} + \binom{100}{2} - \binom{100}{3} + \cdots - \binom{100}{99} + \binom{100}{100} = 0$
(e) $\binom{100}{0}^2 + \binom{100}{1}^2 + \cdots + \binom{100}{100}^2 = \binom{200}{100}^2$

Solução: O item (a) está correto, pois é uma aplicação direta da relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Logo,

$$\binom{100}{39} + \binom{100}{40} = \binom{101}{40}$$

O item (b) está correto porque pode ser usado o seguinte argumento combinatório: De quantas maneiras pode-se escolher uma comissão, de um universo de 100 pessoas, de forma que haja um líder e vice-líder (de todos os tamanhos possíveis)?

$$2\cdot 1\cdot\binom{100}{2} + 3\cdot 2\cdot\binom{100}{3} + 4\cdot 3\cdot\binom{100}{4} + \cdots + 100\cdot 99\cdot\binom{100}{100} =$$

Usando o fato de que

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$$

$$2\cdot 1\cdot\binom{100}{2} + 3\cdot 2\cdot\binom{100}{3} + \cdots + 100\cdot 99\cdot\binom{100}{100} = 100\cdot 99\cdot\left[\binom{98}{0} + \binom{98}{1} + \cdots + \binom{98}{98}\right] = 9900\cdot 2^{98}$$

O item (c) também está correto e é um caso semelhante ao item (b), que pode ser utilizado o seguinte argumento combinatório: De quantas maneiras podemos escolher uma comissão, de um universo de 100 pessoas, de forma que haja um líder (de todos os tamanhos possíveis)?

$$\binom{100}{1} + 2\cdot\binom{100}{2} + \cdots + 100\cdot\binom{100}{100} = 100.\left[\binom{99}{0} + \binom{99}{1} + \cdots + \binom{99}{99}\right] = 100\cdot 2^{99}$$

O item (d) está correto, pois como

$$(1-1)^{100} = \binom{100}{0} - \binom{100}{1} + \cdots + \binom{100}{100} = 0$$

Segue que o item (e) é o item **incorreto**, pois

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \binom{100}{0}^2 + \binom{100}{1}^2 + \cdots + \binom{100}{100}^2\\ &= \binom{100}{0}\cdot\binom{100}{0} + \binom{100}{1}\cdot\binom{100}{1} + \cdots + \binom{100}{100}\cdot\binom{100}{100}\end{aligned}$$

e usando o fato de que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ tem-se:

$$= \binom{100}{0}\cdot\binom{100}{100} + \binom{100}{1}\cdot\binom{100}{99} + \cdots + \binom{100}{100}\cdot\binom{100}{0}$$

Chegando neste momento da questão, visualiza-se o seguinte argumento combinatório:

Há duas turmas, A e B, de 100 pessoas cada. De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de 100 pessoas destas 200 pessoas?

$$\binom{200}{100}$$

Logo,

$$\binom{100}{0}\cdot\binom{100}{100} + \binom{100}{1}\cdot\binom{100}{99} + \cdots + \binom{100}{100}\cdot\binom{100}{0} = \binom{200}{100}.$$

2.3.1 Uma outra maneira de encontrar os coeficientes binomiais

Anteriormente foi demonstrado que para encontrar os coeficientes no desenvolvimento de um binômio, utiliza-se as linhas do Triângulo de Pascal. Por outro lado, há uma maneira recursiva para localizar esses coeficientes de uma forma mais direta, pois não é necessário utilizar o Triângulo de Pascal e nem realizar os cálculos binomiais.

No desenvolvimento de $(x+a)^n$ ordenado de modo usual, tem-se

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p.$$

Tomando-se um coeficiente de um termo T_{p+1}, multiplicando-o pelo expoente de x desse mesmo termo e depois dividindo-o pelo expoente do a desse mesmo termo, acrescentando-se uma unidade, o resultado será o coeficiente seguinte, ou seja,

$$\frac{\binom{n}{p} \cdot (n-p)}{p+1} = \binom{n}{p+1}.$$

Demonstração:

Segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{p} \cdot (n-p)}{p+1} &= \frac{\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \cdot (n-p)}{p+1} \\
&= \frac{n!}{p! \cdot (n-p) \cdot (n-p-1)!} \cdot \frac{(n-p)}{p+1} \\
&= \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{(p+1)! \cdot [(n-(p+1)]!} \\
&= \binom{n}{p+1}.
\end{aligned}$$

Daí, por exemplo,

$$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5.$$

Os coeficientes foram obtidos da seguinte maneira

$$1, \quad \frac{1 \cdot 5}{1} = 5. \quad \frac{5 \cdot 4}{2} = 10, \quad \frac{10 \cdot 3}{3} = 10, \quad \frac{10 \cdot 2}{4} = 5, \quad \frac{5 \cdot 1}{5} = 1.$$

2.3.2 Alguns resultados importantes

1. Demonstrar a relação de Euler

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p-2} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0}.$$

Sugestão: $(1+x)^m \cdot (1+x)^n$; desenvolver cada membro e identificar os termos semelhantes.

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}(1+x)^{m+n} &= \binom{m+n}{0} + \binom{m+n}{1}x + \binom{m+n}{2}x^2 + \cdots + \binom{m+n}{m+n}x^{m+n} \qquad (*)\\ &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m\\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.\end{aligned}$$

Então,

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m\right] \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right].$$

Nota-se que, ao efetuar esse produto, segue que o termo independente será dado por

$$\binom{m}{0}\binom{n}{0}$$

O termo que contém x será dado por

$$\binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}$$

O termo que contém x^2 será dado por $\binom{m}{0}\binom{n}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0}$, e assim por diante. Comparando-se os coeficientes de (*), tem-se

$$\begin{aligned}\binom{m}{0}\binom{n}{0} &= \binom{m+n}{0}\\ \binom{m+n}{1} &= \binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}\\ \binom{m+2}{0} &= \binom{m}{0}\binom{n}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0},\end{aligned}$$

e assim por diante.

De maneira geral, segue que

$$\binom{m+n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0},$$

cujo objetivo era a demonstração.

2. Prove, a partir da Fórmula de Euler, a Fórmula de Lagrange (1736-1813)

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Na relação de Euler tem-se que m, n e p são variáveis, daí tomando-se $m = p = n$ segue que

$$\binom{n+n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Agora, usando binomiais complementares, é possível escrever

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.\end{aligned}$$

A seguir alguns exemplos da soma de produtos de dois binomiais onde aplica-se o teorema Euler.

3. Mostre que o valor da soma S abaixo é igual a $\binom{2n}{n-2}$.

$$S = \binom{n}{0}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-2}\binom{n}{n}.$$

Demonstração: Usando as combinações complementares segue que

$$S = \binom{n}{0}\binom{n}{n-2} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}\binom{n}{0}.$$

Pela fórmula de Euler,

$$S = \binom{2n}{n-2}.$$

4. Calcule $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$ utilizando a fórmula de Euler.

Solução:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\cdot\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}\\
&= n\cdot\left[\binom{n-1}{0}\binom{n}{n-1}+\binom{n-1}{1}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\binom{n}{0}\right]\\
&= n\cdot\binom{2n-1}{n-1}.
\end{aligned}$$

5. Calcule aproximadamente $(1,002)^{20}$ usando o Teorema Binomial.

Solução:

A ideia é mostrar que $(1+x)^n \simeq 1+x\cdot n$ para nx pequeno. De fato, pelo Teorema Binomial:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n\\
&= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+x^n.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\left|\frac{n(n-1)x^2}{2}\right| < \left|\frac{n^2x^2}{2}\right|$ e $\left|\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!}\right| < \left|\frac{n^3x^2}{3!}\right|$, etc.

Se nx é pequeno (próximo de zero) então n^2x^2 e n^3x^3 são muito pequenos comparados com nx, então, desprezando-se termos do desenvolvimentoa partir do 3º termo, tem-se que

$$(1+x)^n \simeq 1+x\cdot n.$$

No exemplo $(1,002)^{20} = (1+0,002)^{20} \simeq 1+20\cdot 0,002 = 1,04$. Calculando-se $(1+0,002)^{20}$ sem aproximação, obtem-se $1,0408$.

6. Demonstre que para todo n inteiro positivo que

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
0=[1+(-1)]^n &= \binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}(-1)+\binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2+\cdots+\binom{n}{n}(-1)^n\\
&= \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n},
\end{aligned}$$

que é um resultado importante para provar o Princípio da Inclusão-Exclusão. Um outro fato importante, conforme Morgado (2006) é o seguinte Teorema:

Teorema 5: Afirma que na primeira metade de cada linha os elementos estão em ordem crescente (cada termo é menor que o seguinte, $\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}$) e que na segunda metade os elementos estão em ordem decrescente (cada termo é maior que o anterior, $\binom{n}{p} > \binom{n}{p+1}$)

$$\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1} \quad \text{se} \quad p < \frac{n-1}{2}$$
$$\binom{n}{p} > \binom{n}{p+1} \quad \text{se} \quad p > \frac{n-1}{2}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p+1} - \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)} - \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(n-p) - n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(n-1-2p)}{(p+1)!(n-p)!}.\end{aligned}$$

Como $n!$, $(p+1)!$ e $(n-p)!$ são positivos, o sinal de $\binom{n}{p+1} - \binom{n}{p}$ é o mesmo de $(n-1-2p)$. Logo,

$$\binom{n}{p+1} - \binom{n}{p} > 0 \quad se \quad (n-1-2p) > 0$$

e

$$\binom{n}{p+1} - \binom{n}{p} < 0 \quad se \quad (n-1-2p) < 0,$$

ou seja,

$$\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1} \quad se \quad p < \frac{n-1}{2}$$

e

$$\binom{n}{p} > \binom{n}{p+1} \quad se \quad p > \frac{n-1}{2}.$$

Encerra-se esta seção com algumas observações:

A expressão $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p-1)}{p!}$ faz sentido para qualquer n real, desde que p seja um inteiro positivo. Definiremos então para qualquer n real e qualquer p inteiro não negativo o *binomial* de n sobre p por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p-1)}{p!}, \qquad (p > 0) \quad e \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Assim, por exemplo, segue que

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16},$$

$$\binom{-5}{4} = \frac{(-5)(-5-1)(-5-2)(-5-3)}{4!} = \frac{(-5)(-6)(-7)(-8)}{4!} = 70$$

e

$$\binom{3}{5} = \frac{(3)(3-1)(3-2)(3-3)(3-4)}{5!} = \frac{(3)(2)(1)(0)(-1)}{5!} = 0.$$

É claro que se n é inteiro não negativo, $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$ é igual a $C_{n,p}$, número de p-subconjuntos de um conjunto com n elementos. Se n não for inteiro não negativo, $C_{n,p}$ não tem sentido, mas $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$ continua tendo sentido.

É interessante observar que mesmo se n não for um inteiro não negativo, continua sendo verdade a Relacão de Stifel

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

e o Teorema das Diagonais

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Enquanto que o Teorema das Linhas

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

e o Teorema das Colunas

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+p}{,}n = \binom{n+p+1}{n+1}$$

bem como o Teorema das Combinações Complementares $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, não tem sentido se n não for um inteiro não negativo.

2.4 Teorema das colunas: Aplicações

O teorema das colunas é bastante usado em problemas envolvendo soma. Uma característica de um problema onde pode ser aplicado o teorema das colunas é na soma de produtos de inteiros consecutivos. Quando esse produto não aparece no problema, pode ser usando uma estratégia de resolução para que o produto de inteiros consecutivos ocorra, e dessa forma, a aplicação do teorema das colunas venha a ser feita.

Exemplo 1: Calcule o valor da soma $S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$

Solução:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)\cdot 3!}{3!}\\
&= 3!\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3} = 6\cdot\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{n+2}{3}\right]\\
&= 6\cdot\binom{n+3}{4} = 6\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2: Qual o valor da soma $S = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$?

Solução: A soma pedida é $S = \sum_{k=1}^{n} k^2$. O exemplo anterior mostrou como calcular uma soma de inteiros consecutivos. Segundo Morgado (2006), pode-se tentar transformar o polinômio do 2º grau (k^2) em um polinômio do 2º grau no qual apareçam em vez de produtos de inteiros iguais, produtos de inteiros consecultivos. Dessa forma, pode-se tentar obter uma identidade do tipo

$$k^2 \equiv Ak(k+1) + Bk + C.$$

Segue que,

$$k^2 \equiv Ak^2 + (A+B)K + C,$$

$$A = 1, \quad A + B = 0, \quad C = 0,$$

isto é,

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

$$k^2 \equiv k(k+1) - k.$$

Então,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}[k(k+1)-k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)\cdot 2!}{2!} - \sum_{k=1}^{n} k \\
&= 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = 2\left[\binom{2}{2}+\cdots+\binom{n+1}{2}-\binom{1}{1}+\cdots+\binom{n}{1}\right] \\
&= 2\cdot\binom{n+2}{3}-\binom{n+1}{2} = 2\cdot\frac{(n+2)(n+1)n}{6}-\frac{(n+1)n}{2} \\
&= n(n+1)(\frac{n+2}{3}-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3: Calcule o valor da soma $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.
Solução:

$$\begin{aligned}
&S = \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&k^3 = Ak(k+1)(k+2) + Bk(k+1) + Ck + D \\
&k^3 = Ak^3 + (A+B)k^2 + (2A+B+C)k + D \\
&A = 1, \quad A+B = 0, \quad 2A+B+C = 0, \quad D = 0 \\
&A = 1, \quad B = -3, \quad C = 1, \quad D = 0.
\end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}[k(k+1)(k+2) - 3k(k+1) + k] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[3!\cdot\frac{k(k+1)(k+2)}{3!} - 3\cdot 2!\frac{k(k+1)}{2!} + k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[6\cdot\binom{k+2}{3} - 6\cdot\binom{k+1}{2} + \binom{k}{1}\right] \\
&= 6\cdot\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{n+2}{3}\right] - 6\cdot\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n+1}{2}\right] + \left[\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\cdots+\binom{n}{1}\right] \\
&= 6\cdot\binom{n+3}{4} - 6\cdot\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= 6\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - 6\cdot\frac{(n+2)(n+1)n}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{(n+1)n}{2\cdot 1}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n - 4(n+2)(n+1)n + 2(n+1)n}{4} \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \cdot [(n+2)(n+3) - 4(n+2) + 2] \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \cdot [(n+2)(n-1) + 2] \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \cdot [n^2 + n] \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \cdot (n+1) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= [\frac{n(n+1)}{2}]^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 4: Calcule o valor da soma $S = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2(k+2)$.
Solução:

$$
\begin{aligned}
(2k-1)^2 \cdot (k+2) &= (4k^2 - 4k + 1) \cdot (k+2) \\
&= 4k^3 - 4k^2 + k + 8k^2 - 8k + 2 \\
&= 4k^3 + 4k^2 - 7k + 2 \\
4k^3 + 4k^2 - 7k + 2 &= Ak(k+1)(k+2) + Bk(k+1) + Ck + D \\
&= Ak^3 + (3A+B)k^2 + (2A+B+C)k + D \\
A = 4, \quad B = -8, \quad C &= -7, \quad D = 2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\Big[4k(k+1)(k+2) - 8k(k+1) - 7k + 2\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[4\cdot 3!\cdot\frac{k(k+1)(k+2)}{3!} - 8\cdot 2!\frac{k(k+1)}{2!} - 7k + 2\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[24\cdot\binom{k+2}{3} - 16\cdot\binom{k+1}{2} - 7\binom{k}{1} + 2\binom{k}{0}\right]\\
&= 24\cdot\binom{n+3}{4} - 16\cdot\binom{n+2}{3} - 7\cdot\binom{n+1}{2} + 2\left[\binom{n+1}{1} - 1\right]\\
&= 24\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4\cdot 3\cdot 2} - 16\cdot\frac{(n+2)(n+1)n}{3\cdot 2} - 7\frac{(n+1)n}{2} + 2n\\
&= \frac{6n(n+1)(n+2)(n+3) - 16n(n+1)(n+2) - 21n(n+1) + 12n}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdot\ [6(n+3) - 16] - n\cdot[21(n+1) - 12]}{6}\\
&= \frac{(n^3 + 3n^2 + 2n)\cdot(6n+2) - n\cdot(21n+9)}{6}\\
&= \frac{6n^4 + 20n^3 - 3n^2 - 5n}{6}.
\end{aligned}
$$

Problema 5: Calcule $1^4 + 2^4 + 3^4 \cdots + n^4$.
Solução:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4$$

$$
\begin{aligned}
k^4 &= Ak(k+1)(k+2)(k+3) + Bk(k+1)(k+2) + Ck(k+1) + Dk + E\\
&= A(k^2+k)(k^2+5k+6) + Bk(k^2+3k+2) + C(k^2+k) + Dk + E\\
&= A(k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k) + B(k^3 + 3k^2 + 2k) + C(k^2+k) + Dk + E\\
k^4 &= Ak^4 + (6A+B)k^3 + (11A + 3B + C)k^2 + (6A + 2B + C + D)k + E,
\end{aligned}
$$

daí,

$$A = 1, \quad 6A + B = 0, \quad 11A + 3B + C = 0, \quad 6A + 2B + C + D = 0, \quad E = 0.$$

Resolvendo os sistemas segue que

$$A = 1, \quad B = -6, \quad C = 7, \quad D = -1, \quad E = 0.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} \Big[k(k+1)(k+2)(k+3) - 6k(k+1)(k+2) + 7k(k+1) - k\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[4! \cdot \binom{k+3}{4} - 6 \cdot 3! \binom{k+2}{3} + 7 \cdot 2! \binom{k+1}{2} - \binom{k}{1}\right] \\
&= 24 \cdot \binom{n+4}{5} - 36 \binom{n+3}{4} + 14 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2} \\
&= 24 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 36 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} + 14 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \cdot 2} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(n+1) \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot (n+2)(n+3)(n+4) - \frac{3}{2} \cdot (n+2)(n+3) + \frac{7}{3} \cdot (n+2) - \frac{1}{2}\right] \\
&= n(n+1) \cdot \left[\frac{(n+2)(n+3)(2n-7)}{10} + \frac{14n+25}{6}\right] \\
&= n(n+1) \cdot \left[\frac{3(n+2)(n+3)(2n-7) + 70n + 125}{30}\right] \\
&= \frac{1}{30} \cdot n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \\
&= \frac{1}{30} \cdot n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1).
\end{aligned}
$$

2.5 A distribuição binomial

Nesta seção será descrita uma relação entre o teorema binomial aplicado-o em problemas de probabilidade. De acordo com Morgado (2006), vamos considerar um experimento com apenas dois resultados possíveis, denominados de *sucesso* e *fracasso*. Exemplicando a seguir.

a) Joga-se uma moeda não viciada e define-se *sucesso* = cara, *fracasso* = coroa.

b) Lança-se um dado não viciado e define-se *sucesso* = resultado é 5 ou 6; *fracasso* = o resultado é $1, 2, 3\ ou 4$.

c) De uma urna que contém 6 bolas brancas e 4 bolas pretas, retira-se uma bola e define-se *sucesso*= a bola é preta; *fracasso* = a bola é branca. Denomina-se de p a probabilidade de sucesso e $q = 1 - p$ a probabilidade de fracasso, pois, $0 \leq p \leq 1$. Nos exemplos, os valores de p são $\frac{1}{2}, \frac{2}{6}$ e $\frac{4}{10}$, respectivamente.

Supondo-se agora que façamos repetições (provas) do nosso experimento, realizando-o um número fixo n de vezes. Assim, por exemplo, no caso $n = 3$ jogando-se a moeda três vezes, lançando-se o dado três vezes, retirando-se sucessivamente 3 bolas da urna.

Vamos supor que a probabilidade p de *sucesso* mantenha-se constante ao longo das provas. Isso, no exemplo a), significa que probabilidade de obter cara em qualquer dos lançamentos é 1/2. Supondo-se finalmente que as provas sejam independentes, isto é, que o conhecimento dos resultados de algumas provas não altere as probabilidades dos resultados das demais. Isso, no exemplo c), significa que as bolas são sacadas com reposição.

O problema que deseja-se solucionar é o seguinte:

Qual é a probabilidade de obtermos k sucessos nessas n provas?

A probabilidade das n provas sejam k sucessos e , em consequência, $n-k$ fracassos em uma ordem predeterminada, por exemplo, os sucessos nas k primeiras provas e os fracassos nas demais, ou seja, nas $n - k$ provas. Por exemplo: $SS \cdots S\ FF \cdots F$ é representado por $ppp \cdots p\ (1-p) \cdots (1-p) = p^k(1-p)^{n-k}$, pois as provas são independentes. É claro que, em outra ordem, a probabilidade seria a mesma, pois apenas a ordem dos fatores se alteraria. A probabilidade de obtermos k sucessos e $n-k$ fracassos em qualquer ordem é $p^k(1-p)^{n-k}$ multiplicado pelo número de ordem possíveis que é $\binom{n}{k}$ (para escolher uma ordem basta escolher em quias das n provas ocorrerão os k sucessos).

Acabamos de provar o Teorema Binomial, ou seja, a probabilidade de k sucessos em uma sequência de n provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada prova é p, é igual a:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{2.13}$$

Exemplo 1: Dois adversários A e B disputam uma série de 10 partidas. A probabilidade de A ganhar uma partida é $0,6$ e não há empates. Qual é a probabilidade de A ganhar a série?

Solução:

A deve ganhar seis ou mais das partidas, então pelo Teorema Binomial segue que $\binom{10}{k}(0,6)^k \cdot (0,4)^{n-k}$, onde $6 \leq k \leq 10$.

$$\binom{10}{6}(0,6)^6 \cdot (0,4)^4 \cong 0,2505$$
$$\binom{10}{7}(0,6)^7 \cdot (0,4)^3 \cong 0,2142$$
$$\binom{10}{8}(0,6)^8 \cdot (0,4)^2 \cong 0,1208$$
$$\binom{10}{9}(0,6)^9 \cdot (0,4)^1 \cong 0,04028$$
$$\binom{10}{10}(0,6)^{10} \cdot (0,4)^0 \cong 0,00604.$$

Logo, a probabilidade de A ganhar é dada por: $0,2505 + 0,2142 + 0,1208 + 0,04028 + 0,00604 \cong 0,6318$.

Exemplo 2: Os motores de avião funcionam independentemente e cada motor tem a mesma probabilidade ($p > 0$) de falhar durante um voo. Um avião voa com segurança se pelo menos a metade de seus motores funciona. Para quais valores de p é mais seguro viajar em um avião com 2 motores do que em um com 4 motores?

Solução: Um avião de 2 motores cairá se os 2 motores falharem, então pelo Teorema Binomial segue que:

$$\binom{2}{2}p^2 \cdot (1-p)^{2-2} = p^2.$$

Por outro lado, um avião de 4 motores cairá se 3 ou 4 motores falharem, então,

$$\binom{4}{3}p^3 \cdot (1-p)^{4-3} + \binom{4}{4}p^4 \cdot (1-p)^{4-4} = 4p^3(1-p) + p^4.$$

Logo, será mais seguro viajar no avião de 2 motores quando, $p^2 < 4p^3(1-p) + p^4$, isto é, $3p^2 - 4p + 1 < 0$.

Resolvendo-se a inequação quadrática, encontra-se que $\frac{1}{3} < p < 1$.

Exemplo 3: Suponha que uma característica (como cor dos olhos, por exemplo) dependa de um par de genes. Representa-se por A um gene dominante e por a um gene recessivo. Dessa forma, um indivíduo com genes AA é dominante puro, um com genes aa é um recessivo puro e um com genes Aa é um híbrido. Dominantes puros e híbridos são semelhantes em relação à característica. Filhos recebem um gene do pai e outro da mãe. Suponha que o pai e a mãe sejam híbridos e tenham 4 filhos.

(a) Qual é a probabilidade do primeiro filho ser um recessivo puro?

(b) Qual é a probabilidade de exatamente um dos quatro filhos ser um recessivo puro?

Solução:

(a) A probabilidade do primeiro filho herdar o gene a do pai é $\frac{1}{2}$ e herdar o gene a da mãe também é $\frac{1}{2}$, já que os pais são Aa. Logo, a probabilidade do primeiro ser aa é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

(b) Pelo Teorema Binomial

$$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-1} = \frac{27}{64} \cong 0,4219.$$

3 EXPANSÃO MULTINOMIAL

Em matemática o teorema multinomial, polinômio de Leibnitz ou fórmula do multinômio de Newton é uma generalização do binômio de Newton. Já foi demonstrado que é possível obter o desenvolvimento de um binômio$(x+a)^n$ para todo n natural.

Conforme Hazzan (2013), com raciocínio semelhante, pode-se obter o desenvolvimento de expressões do tipo $(x+y+z)^n, (x+y+z+t)^n$, $n \in \mathbb{N}$, onde a base da potência de expoente n é um polinômio.

Exemplo 1:

$$(x+y+z)^5 = (x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot(x+y+z)$$

Pela propriedade distribuitiva da multiplicação deve-se tomar um termo de cada fator (escolhidos entre x, y, z) e em seguida multiplicá-los. Feitas todas as escolhas possíveis e multiplicados os termos, a soma desses produtos será o desenvolvimento de $(x+y+z)^5$. Os tipos de produtos que podemos obter são da forma $x^i \cdot y^j \cdot z^k$; em que $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i+j+k=5$.

Para cada i, j, k fixados, o coeficiente do termo $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ será o número de sequências de cinco letras, com i letras x, j letras y e k letras z, isto é:

$$P_5^{i,j,k} = \frac{5!}{i!j!k!}.$$

Tomando todos os termos do tipo $x^i \cdot y^i \cdot z^k$ para $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i+j+k=5$ e calculando os seus coeficientes, a soma deles, precedidos pelos respectivos coeficientes, dará a expansão de $(x+y+z)^5$.

Em particular, o coeficiente do termo $x^2 \cdot y^2 \cdot z$ será: $P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!2!1!} = 30$. Portanto, o termo em x^2y^2z será $30x^2y^2z$. De modo geral, a expansão do polinômio é dada por:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_p!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p} \qquad .(3.1)$$

Estendendo-se o somatório a todos os valores inteiros não negativos de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ tais que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p = n$.

Demonstração: De Morgado (2006) segue que,

$$(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n = (x_1+x_2+\cdots+x_p)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_p).$$

O termo genérico do produto é obtido escolhendo-se em α_1 dos parênteses escolhermos x_1 em α_2 dos parêntes escolhermos x_2. Obtem-se $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$, em que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ são inteiros não negativos e $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p = n$.

O termo $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_p^{\alpha_p}$ aparece tantas vezes quantos são os modos de se escolher os n parênteses α_1 deles para usar o x_1 para fator, α_2 dentre os que sobraram para tomar-se o x_2 como fator e assim por diante. Mas isso pode ser feito com o cálculo abaixo:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \binom{n}{\alpha_1}\cdot\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\binom{n-(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_3}\cdot\binom{n-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_4}\cdots\binom{n-(\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_{p-1})}{\alpha_p}\\
&= \frac{n!}{\alpha_1!(n-\alpha_1)!}\cdot\frac{(n-\alpha_1)!}{\alpha_2![(n-(\alpha_1+\alpha_2)]!}\cdots\frac{[n-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{p-1})!]}{\alpha_p![n-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{p-1}+\alpha_p)]!}\\
&= \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_p!}.
\end{aligned}$$

Logo, $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_p^{\alpha_p}$ aparece no desenvolvimento $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_p!}$ vezes. Daí,

$$(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n = \sum\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_p!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_p^{\alpha_p}.$$

Exemplo 2: Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x^2-x+2)^6$ *Solução:*

$$\begin{aligned}
(x^2-x+2)^6 &= \sum\frac{6!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(x^2)^{\alpha_1}(-x)^{\alpha_2}2^{\alpha_3}\\
&= \sum\frac{6!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(-1)^{\alpha_2}2^{\alpha_3}x^{2\alpha_1+\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Para que o expoente de x seja 4 tem-se que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=6$, $2\alpha_1+\alpha_2=4$.
Na tabela 1 estão os valores dos expoentes.

Tabela 1 - Valores dos expoentes

α_1	α_2	α_3	Termo
0	4	2	$60x^4$
1	2	3	$480x^4$
2	0	4	$240x^4$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025. .

Somando-se o termo em x^4 do desenvolvimento encontra-se $780x^4$. Logo, a resposta é 780.

3.0.1 Dedução de uma fórmula para o cálculo do quadrado e de um cubo de um polinômio

Exemplo 1: Deduzir a fórmula para o cálculo do quadrado de um polinômio.
Solução:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = \sum\frac{2!}{\alpha_1!+\alpha_2!+\cdots+\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

onde $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ são inteiros não negativos tais que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=2$. Há dois tipos de soluções para a equação acima.

(i) um dos α é igual a 2 e os demais são iguais a zero. Supondo $\alpha_1 = 2$ e os demais $\alpha_2, \alpha_3 \cdots, \alpha_n = 0$. Então,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \sum \frac{2!}{2!0! \cdots 0!} x_1^2 x_2^0 \cdots x_n^0 = x_1^2.$$

O mesmo ocorre para as demais incógnitas. Logo, obteremos então termos da forma x_i^2, $(1 \leq i \leq n)$.

(ii) Dois dos α são iguais a 1 e os demais são iguais a zero. Supondo $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$ e os demais $\alpha_3, \alpha_4 \cdots, \alpha_n = 0$ segue que,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \sum \frac{2!}{1!1!0! \cdots 0!} x_1^1 x_2^1 x_3^0 \cdots x_n^0 = 2x_1 x_2.$$

O mesmo ocorre para os demais α. Logo, tem-se termos da forma $2x_i x_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Portanto,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Assim, por exemplo:

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 &= x^2 + 2^2 + 2 \cdot x \cdot 2 \\
&= x^2 + 4x + 4 \\
(x^2 + 3x + 1)^2 &= (x^2)^2 + (3x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3x + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 2 \cdot 3x \cdot 1 \\
&= x^4 + 9x^2 + 1 + 6x^3 + 2x^2 + 6x \\
&= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1.
\end{aligned}$$

Exemplo 2: Deduza a fórmula para o cálculo do cubo de um polinômio.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 = \sum \frac{3!}{\alpha_1! + \alpha_2! + \cdots + \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são inteiros não negativos tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 3$. Há três tipos de soluções para esta equação:

(i) Um dos α vale 3 e os demais valem 0. Por exemplo $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2, \cdots, \alpha_n = 0$, então temos,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 = \sum \frac{3!}{3!0! \cdots 0!} x_1^3 x_2^0 \cdots x_n^0 = x_1^3.$$

O mesmo ocorre para os demais α. Essas soluções dão origem aos termos da forma $\sum_{i=1}^{n} x_i^3$.

(ii) Um dos α vale 2, o outro vale 1 e as demais valem 0. Por exemplo $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$

e $\alpha_3, \cdots, \alpha_n = 0$; então temos que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 = \sum \frac{3!}{2!1!0!\cdots 0!} x_1^2 x_2^1 x_3^0 \cdots x_n^0 = 3x_1^2 x_2.$$

O mesmo ocorre para as demais α. Essas soluções dão origem aos termos da forma

$$\sum_{i,j=1 \; i \neq j}^{n} 3x_i^2 x_j.$$

A restrição $i \neq j$ faz-se necessária para que não apareça novamente os termos que já apareceram em i.

(iii) Três incógnitas valem 1 e as demais valem 0. Por exemplo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$, então segue que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 = \sum \frac{3!}{1!1!1!0!\cdots 0!} x_1^1 x_2^1 x_3^1 x_4^0 \cdots x_n^0 = 6x_1 x_2 x_3.$$

O mesmo ocorre para as demais α. Essas soluções dão origem aos termos da forma

$$\sum_{i,j,k=1 \; i<j<k}^{n} 6x_i x_j x_k.$$

A restrição $i < j < k$ é necessária, pois para que um termo como $x_1 x_2 x_3$ não seja contado várias vezes, o que poderia acontecer em $x_i x_j x_k$. Fazendo (i, j, k) igual a

$$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).$$

Portanto,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \sum_{i,j=1 \; i \neq j}^{n} 3x_i^2 x_j + \sum_{i,j,k=1 \; i<j<k}^{n} 6x_i x_j x_k$$

.

Então, por exemplo:

$$\begin{aligned}(x^2+3x+1)^3 &= (x^2)^3 + (3x)^3 + 1^3 + 3(x^2)^2(3x) + 3(3x)^2(x^2) + 3(x^2)^2(1) + 3(3x)(1)^2(x^2) + 3(3x)^2(1) \\ &= x^6 + 27x^3 + 1 + 9x^5 + 27x^4 + 3x^4 + 3x^4 + 27x^2 + 9x + 18x^3 \\ &= x^6 + 9x^5 + 30x^4 + 45x^3 + 30x^2 + 9x + 1.\end{aligned}$$

3.1 Noções de funções geradoras: Aplicações em alguns problemas de contagem

Em algumas áreas da Matemática, como por exemplo combinatória, é fácil encontrar questões fáceis de enunciar, mas que são difíceis de responder. Nesta seção será apresentada uma importante ferramenta para atacar alguns problemas de contagem: as funções geradoras.

As chamadas funções geradoras são objetos que transformam problemas de sequências em problemas de funções. A principal vantagem está no fato de que pode-se usar toda a álgebra disponível no âmbito das funções para manipular "as contas"e depois regressar ao problema original de uma maneira eficiente. Além dos problemas de contagem, também podem ser utilizadas as funções geradoras para resolver problemas envolvendo certas somas, assim como problemas que utilizam recorrências.

Definição 1: (Função Geradora). Dada uma sequência numérica (a_n), com $n \geq 0$, define-se a função geradora (ordinária) dessa sequência como sendo a série de potências formal,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cdots$$

onde a_n, para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, são números reais e x é uma variável. Por definição qualquer polinômio em x é uma série de potências. Por exemplo, o polinômio $2x + 3x^3 + x^4$ pode ser escrito como $0 + 2x + 0x^2 + 1x^4 + 0x^5 + 0x^6 + \cdots$.

Na definição a palavra "formal"significa que o interesse não é em questões de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ou seja, o objetivo não são os valores de x para os quais essa série torna-se convergente. Não obstante, o interesse é apenas nessa série como um objeto algébrico.

Definição 2: Se a_r, para $r = 0, 1, 2, \ldots$, é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots$$

Exemplo 1: Considere o problema de encontrar o número de maneiras de retirarmos p objetos de um conjunto de n objetos distintos com $p \leq n$. Determinar a função geradora para esse problema?

Solução:

A função geradora para esse problema é

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

De maneira que é igual a $(1 + x)^n$.

3.1.1 Sequências numéricas e suas respectivas funções geradoras

A seguir tem-se algumas sequências numéricas e suas respectivas funções geradoras.

(a) $(0, 0, 0, 0, \ldots) \mapsto f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots = 0$

(b) $(1, 1, 1, 1, \ldots) \mapsto f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

(c) $(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots) \mapsto f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$

(d) $(1, 1, 2, 3, \ldots) \mapsto f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Nota-se que se a sequência for indexada a partir do 0, o coeficiente de x^k na função geradora da sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ é exatamente igual a a_k. Quando $|x| < 1$, segue que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}.$$

Apesar dessa igualdade não ser verdadeira quando $|x| \geq 1$, como estamos trabalhando com as séries de potências formais, isto é, não esta sendo levado em consideração os intervalos de convergência das séries de potências em questão. Então, considerando-se que a função geradora da sequência $(1, 1, 1, 1, \cdots)$ seja

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}.$$

De modo análogo, vamos considerando-se que

$$(1, -1, 1, -1, \ldots) \mapsto f(x) = 1 - 1x + 1x^2 - 1x^3 + \ldots = \frac{1}{1 + x}$$

$$(1, a, a^2, a^3, \ldots) \mapsto f(x) = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots = \frac{1}{1 - ax}$$

$$(1, 0, 1, 0, 1 \ldots) \mapsto f(x) = 1 + x^2 + 1x^4 + \ldots = \frac{1}{1 - x^2}$$

Exemplo 2: Dê exemplo de uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ cuja função geradora seja dada por $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Portanto, $f(x)$ é a função geradora da sequência $(a_n)_{n\geq 0} = (1, 0, 1, 0, \cdots)$.

Solução: Segue que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$. Na igualdade acima substituindo x por x^2, obtem-se

$$\frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots$$

Exemplo 3: Qual é função geradora para a sequência $(a_r) = (0,1,0,1,1,\cdots)$?

Solução:

$$f(x) = x + x^3 + x^4 + \cdots = x + (x^3 + x^4 + \ldots)$$
$$= x + x^3 \cdot (1 + x + \cdots) = x + \frac{x^3}{1-x}$$

3.1.2 Operações com funções geradoras

As funções geradoras podem ser multiplicadas por constantes, adicionadas, subtraídas e multliplicadas como mostraremos logo a seguir. Considerando as sequências numéricas $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ cujas funções geradoras são, respectivamente: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots$, $g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3 \ldots$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Nessas condições, definem-se as seguintes operações formais.

(I) Multiplicação por escalar:

$$\lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot a_0 + \lambda \cdot a_1x^1 + \lambda \cdot a_2x^2 + \cdots$$

Em particular, se $\lambda = -1$ tem-se que $(-1)\cdot f(x) = -f(x)$. Assim, $-f(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots$.

(II) Adição:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \ldots$$

(III) Subtração:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x)) = (a_0 + (-b_0) + (a_1 + (-b_1))x + (a_2 + (-b_2))x^2 + \ldots$$

(IV) Multiplicação:

$$f(x) \cdot g(x) = (a_0 + a_1x + \ldots)(b_0 + b_1x + \ldots) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$$

em que:

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i} = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0.$$

Proposição 1

Sejam f e g funções geradoras para as sequências (a_r) e (b_r). Então:
(i) A função geradora para a sequência $(Aa_r + Bb_r)$ é $Af + Bg$, $A, B \in \mathbb{R}$
(ii) A função geradora para $(a_0 + a_1 + \ldots + a_r)$ é $(1 + x + x^2 + \ldots)f$
(iii) A função geradora para (ra_r) é xf'. Onde f' representa a derivada da função f.

Exemplo 3: Encontre a função geradora para $a_r = r^2$.
Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
&= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots \left(x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' \\
&= 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots \\
&= g
\end{aligned}$$

Logo, a função geradora para $a_r = r^2$ é $xg = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)'$.

3.1.3 Relação entre os coeficientes de uma expansão multinomial e funções geradoras

Nesta seção tem-se a demonstração de como as funções geradoras podem ser usadas para resolver alguns problemas de contagem. Para iniciar as primeiras ideias sobre essa temática, vamos comentar o seguinte exemplo abaixo.

Exemplo 1: Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1+x_2+x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$ e $x_3 \in \{3,4,5\}$?

Solução: Definem-se três polinômios, um para cada variável x_i, com $1 \leq i \leq 3$ da seguite maneira:

$$\begin{aligned}
x_1 &\in \{2,3\} \Rightarrow p_1(x) = x^2 + x^3 \\
x_2 &\in \{1,4\} \Rightarrow p_2(x) = x + x^4 \\
x_3 &\in \{3,4,5\} \Rightarrow p_3(x) = x^3 + x^4 + x^5
\end{aligned}$$

Em seguida define-se o polinômio $p(x)$ que é dado por:

$$\begin{aligned}
p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\
&= (x^2 + x^3) \cdot (x + x^4) \cdot (x^3 + x^4 + x^5) \\
&= x^{12} + 2x^{11} + 2x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 2x^7 + x^6
\end{aligned}$$

Para obtenção do número de soluções inteiras e não negativas que possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$ e $x_3 \in \{3,4,5\}$, basta observar o coeficiente de x^9 no polinômio p, ou seja, 2. Mas por que isso funciona? observa-se que

$$x^9 = x^2x^4x^3 \quad e \quad x^9 = x^3x^1x^5;$$

Além disso, os termos $(2,4,3)$ e $(3,1,5)$ são soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$ e $x_3 \in \{3,4,5\}$ correspondem ao número de maneiras de obter x^9 quando multiplicam-se três fatores, a saber:

(i) um polinômio $p_1(x) = x^2 + x^3$;

(ii) outro do polinômio $p_2(x) = x + x^4$;

(iii) e outro do polinômio $p_3(x) = x^3 + x^4 + x^5$.

Logo, o número de maneiras distintas de obter x^9 efetuando o produto,

$$p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x)$$

corresponde a quantidade de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$ e $x_3 \in \{3,4,5\}$.

No exemplo acima mencionou-se que o polinômio $p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x)$ é a função geradora associada ao problema, visto que gera as respostas para o seguinte problema combinário:

Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1 + x_2 + x_3 = m$? onde $x_1 \in \{2,3\}$, $x_2 \in \{1,4\}$, $x_3 \in \{3,4,5\}$ e $m \in \{6,7,8,9,10,11,12\}$? então,

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\ &= (x^2 + x^3) \cdot (x + x^4) \cdot (x^3 + x^4 + x^5) \\ &= x^{12} + 2x^{11} + 2x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 2x^7 + x^6 \end{aligned}$$

Exemplo 2: Numa caixa há 3 bolas azuis, 2 bolas brancas e uma cinza de quantas maneiras podemos retirar 4 bolas desta caixa?

Solução: Deve-se encontrar o coeficiente de x^4 na multiplicação dos polinômos p_1, p_2 e p_3, que representam respectivamente bolas azuis, brancas e cinza. Define-se então $p_1(x) = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3$, onde o coeficiente 1 nesse polinômio representa a não retirada de bola azul, a representa a retirada de uma bola azul, a^2 representa a retira de duas bolas azuis e a^3 a retirada de três bolas azuis. Usando o mesmo raciocínio para p_2 e p_3 segue que $p_2(x) = 1 + bx + b^2x^2$, e $p_3(x) = 1 + cx$.

Olhamos, agora, para o produto desses três polinômios:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \\ &= (1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3) \cdot (1 + bx + b^2x^2) \cdot (1 + cx) \\ &= 1 + (a + b + c)x + (a^2 + ab + ac + bc)x^2 + (a^3b + a^3c + a^2b^2 + a^2bc + ab^2c)x^4 \\ &+ (a^3b^2 + a^3bc + a^2b^2c + a^2bc)x^5 + a^3b^2cx^6. \end{aligned}$$

O número procurado é 5 e as maneiras possíveis podem ser listadas da expressão $(a^3b + a^3c + a^2b^2 + a^2bc + ab^2c)x^4$.

$a^3b = aaab$ (três bolas azuis e uma branca)

$a^3c = aaac$ (três bolas azuis e uma cinza)

$a^2b^2 = aabb$ (duas bolas azuis e duas brancas)

$a^2bc = aabc$ (duas azuis, uma branca e uma cinza)

$ab^2c = abbc$ (uma azul, duas brancas e uma cinza).

Essa técnica resolve vários problemas simultaneamente; por exemplo, se a pergunta fosse: De quantas maneiras podemos retirar 6 bolas dessa caixa no problema acima?

A resposta é 1, basta olhar para o coeficiente de x^6. Logo, existe uma única maneira de retirar 6 bolas dessa caixa, que é, $a^3b^2c = aaabbc$ (três bolas azuis, duas brancas e uma cinza). O mesmo vale para a retirada de nenhuma bola, uma, duas, três ou cincos bolas.

Exemplo 3: Sejam n lançamentos de uma moeda honesta. Qual é a probabilidade de se obter exatamente k caras ($k \leq n$)?

Solução:

Sabendo que no lançamento de uma moeda a probabilidade de sair cara é $\frac{1}{2}$ e a probabilidade de sair coroa também é $\frac{1}{2}$. Então, segue que

$p_1(x) = a_0$ e $p_2(x) = a_1x$, onde a_0 é a probabilidade de sair cara e a_1 a probabilidade de sair coroa. Como há apenas duas possibilidades, cara ou coroa, em um lançamento de uma moeda então definimos outro polinômio,

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) = a_0 + a_1x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1+x}{2}.$$

Como são n lançamentos, segue que

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{1+x}{2}\right)\cdots\left(\frac{1+x}{2}\right) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^n = \frac{(1+x)^n}{2^n}.$$

Expandindo o binômio $(1+x)^n =$ tem-se

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^n1^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}1^1 \cdots \binom{n}{n}x^0 1^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i.$$

Com efeito, para obter exatamente k caras em n lançamentos de uma moeda, basta encontrar o coeficiente de x^k na expressão

$$\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i}{2^n}.$$

Fanzendo $i = k$, segue que $\frac{\binom{n}{k}x^k}{2^n}$. Logo, a resposta é $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

Exemplo 4: Quantas saladas distintas podem ser formadas com exatamente 12 frutas contendo, necessariamente, maçãs, bananas, laranjas e pêras com as seguintes a seguir?

(I) O número de maçãs deve ser par;

(II) O número de bananas deve ser um múltiplo de 5;

(III) Deve conter no máximo três laranjas;

(IV) Deve conter no máximo duas pêras.

Solução: Sejam m, b, l e p os números de maçãs, bananas, laranjas e peras, respectivamente. Ora, como as saladas que queremos formar deve ser obrigatoriamente 20 frutas, segue que $m + b + l + p = 12$, onde m é par, b é multiplo de 5, $l \in \{1, 2, 3\}$ e $p \in \{1, 2\}$. Para cada uma das variáveis podemos associar uma expressão algébrica, a saber

$$m \Rightarrow p_1(x) = x^2 + x^4 + \cdots + x^{12}$$

$$\begin{aligned} b &\Rightarrow p_2(x) = x^5 + x^{10} \\ l &\Rightarrow p_3(x) = x + x^2 + x^3 \\ p &\Rightarrow p_4(x) = x + x^2 \end{aligned}$$

Nesse caso, a função geradora associada às condições impostas pelo enunciado é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdot p_4(x) \\ &= (x^2 + \cdots + x^{12}) \cdot (x^5 + x^{10}) \cdot (x + x^2 + x^3) \cdot (x + x^2) \end{aligned}$$

Deve-se encontrar o coeficiente de x^{12} na expansão do polinômio acima.

Em $f(x) = (x^2 + \cdots + x^{12}) \cdot (x^5 + x^{10}) \cdot (x + x^2 + x^3) \cdot (x + x^2)$ os seguintes produtos resultam em x^{12}. Tomando-se os termos x^2 em p_1, x^5 em p_2, x^3 em p_3 e x^2 em p_4 obtem-se

$$x^2 \cdot x^5 \cdot x^3 \cdot x^2 = x^{12};$$

x^4 em p_1, x^5 em p_2, x^1 em p_3 e x^2 em p_4,

$$x^4 \cdot x^5 \cdot x^1 \cdot x^2 = x^{12};$$

x^4 em p_1, x^5 em p_2, x^2 em p_3 e x^1 em p_4,

$$x^4 \cdot x^5 \cdot x^2 \cdot x^1 = x^{12};$$

Somando, obtem-se $3x^{12}$. Logo, existem 3 saladas de frutas cumprindo as condições impostas pelo enunciado.

Exemplo 5: Se 4 dados comuns e honestos são lançados simultaneamente, de quantas formas distintas a soma dos resultados obtidos pode ser igual a 9?

Solução:

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 os resultados obtidos em cada um dos 4 dados. Como o objetivo é a soma dos 4 resultados obtidos seja 9, tem-se que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$. Lembrado que em um dado comum os resultados possíveis são $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, segue que $1 \leq x_i \leq 6$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Assim, usando o método de funções geradoras tem-se,

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4.$$

Daí o problema se resume em calcular o coeficiente de x^9 na função acima. Segue pela expansão multinomial que,

$$\begin{aligned}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 &= \sum \frac{4!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_6!} x^{\alpha_1}(x^2)^{\alpha_2}(x^3)^{\alpha_3}(x^4)^{\alpha_4}(x^5)^{\alpha_5}(x^6)^{\alpha_6} \\ &= \sum \frac{4!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_6!} x^{\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+5\alpha_5+6\alpha_6}\end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 4$$

e

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 = 9.$$

As soluções são descritas na tabela 2 a seguir.

Tabela 2 - Valores de α.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	Termo
3	0	0	0	0	1	$4x^9$
2	1	0	0	1	0	$12x^9$
1	2	0	1	0	0	$12x^9$
2	0	1	1	0	0	$12x^9$
1	1	2	0	0	0	$12x^9$
0	3	1	0	0	0	$4x^9$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

A soma dos termos de x^9 do desenvolvimento é $56x^9$. Portanto, existem 56 maneiras distintas para que a soma dos resultados obtidos nos 4 dados seja igual a 9.

Observou-se na seção acima que o número de soluções em inteiros não-negativos para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ é igual a $\binom{n+p-1}{p}$. Dado que cada x_i pode assumir qualquer valor inteiro não-negativo a função geradora que "controla"a presença de x_i é dado pela expressão $(1+x+x^2+x^3+\cdots) = \frac{1}{(1-x)}$ e, portanto, a função geradora para este problema é

$$(1+x+x^2+\cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Para que seja possivel identificar, nesta função, que o coeficiente de x^p é, de fato, $\binom{n+p-1}{p}$, é necessário um teorema que generaliza a expansão binomial vista na seção anterior. Se tomarmos a expansão em série de Taylor, em torno do zero, da função $f(x) = (1+x)^u$, onde u é um número real arbitrário, pode-se provar que $|x| < 1$.

3.1.4 Teorema Binomial expandido

Nesta seção apresentaremos o teorema binomial expandido. Segue que:

Teorema 6:

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{u(u-1)\cdots(u-r+1))}{r!}x^r + \cdots.$$

E, se denotarmos por

$$\binom{u}{r} = \frac{u(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!}, \quad se \quad r > 0,$$

e

$$\binom{u}{r} = 1 \quad se \quad r = 0.$$

Segue que

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r. \tag{3.2}$$

O número $\binom{u}{r}$ definido acima é chamado de coeficiente binomial generalizado. Caso u seja igual ao inteiro positivo n, $\binom{u}{r}$ será o familiar coeficiente binomial, e como $\binom{u}{r}$ é zero para $r > n$, a expansão acima se reduzirá à expansão binomial usual. Chama-se a atenção para o fato de que (3.2) se verifica somente para $|x| < 1$, mas que, como já foi dito, o estudo não enfatiza questões de convergência, uma vez que não necessitamos atribuir valores numéricos à variável x. Dispondo desde resultado podemos provar o teorema seguinte.

Teorema 7: o coeficiente de x^p na expansão de

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n = \binom{n+p-1}{p}$$

. *Demonstração*: Basta aplicar o teorema anterior, uma vez que

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}.$$

Substituindo, em (3.2), x por $-x$ e u por $-n$ segue que

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-1)^r x^r.$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado tem-se que o coeficiente de x^p é igual a

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)}{p!} \cdot (-1)^p \\
&= \frac{(-1)^p (n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \binom{n+p-1}{p}.
\end{aligned}$$

Como foi visto na seção anterior, este é o número total de maneiras de selecionar p objetos dentre n objetos distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

Exemplo 1: Usar o teorema binomial expandido para encontrar o coeficiente de x^3 na expansão de $(1+4x)^{1/2}$.

Solução: Substituindo x por $4x$ e u por $1/2$ em (3.2), segue que

$$(1+4x)^{1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} (4x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} 4^r \cdot \frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-r+1)}{r!} \cdot x^r.$$

Logo, o coeficiente de x^3 é dado por

$$\frac{4^3(1/2)(1/2-1)(1/2-3+1)}{3!} = 4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) \cdot \frac{1}{3!} = \frac{4^3 \cdot 3}{2^3 \cdot 3 \cdot 2} = 4.$$

3.2 Função geradora exponencial

Nesta seção será explicada as vantagens deste novo tipo de função geradora por meio de um exemplo.

Exemplo 1: Dispondo de três tipos diferentes de livros a, b e c, de quantos modos diferentes é possível retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro a pode ser retirado no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e c no máximo duas vezes?

Primeiramente considerando apenas a função geradora ordinária, já conhecida, que nos fornecerá as possíveis escolhas (com as restrições impostas) mas sem dar importância para a ordem. Vamos associar à retirada dos livros do tipo a ao polinômio $p_1(x) = 1 + ax$, à retirada do tipo b, $p_2(x) = (1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3)$ e a retirada dos livros do tipo c ao polinômio $p_3(x) = (1 + cx + c^2x^2)$. Agora é possível definir o polinômio $p(x)$ por:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \\ &= (1 + ax)(1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3)(1 + cx + c^2x^2) \\ &= (a + b + c)x + (b^2 + ab + bc + ac + c^2)x^2 + (b^3 + ab^2 + ac^2 + b^2c + abc + bc^2)x^3 \\ &+ (ab^3 + b^3c + ac^2c + b^2c^2 + abc^2)x^4 + (ab^3c + b^3c^2 + ab^2c^2)x^5 + ab^3c^2x^6. \end{aligned}$$

Observe que no polinômio $p(x)$, o coeficiente de x é $(a + b + c)$ corresponde a lista de todas as possíveis escolhas de um só livro. Já o coeficiente de x^2, $(b^2 + ab + bc + ac + c^2)$, corresponde a lista de todas as possibilidades de escolher dois livros e assim por diante. Assim, o coeficiente de x^4, ou seja, $(ab^3 + b^3c + ab^2c + b^2c^2 + abc^2)$ corresponde a lista de todas as 5 possibilidades de escolhermos 4 livros.

É possível também ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira. Assim, por exemplo, quando retira-se ab^3, isto é, um livro do tipo a e três livros do tipo b, tem-se então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordená-los numa prateleira. Diante do exposto, as possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são descritas abaixo.

$$\begin{aligned} b^3c = bbbc &\Longrightarrow \frac{4!}{1!3!} \\ ab^2c = abbc &\Longrightarrow \frac{4!}{1!2!1!} \\ b^2c^2 = bbcc &\Longrightarrow \frac{4!}{2!2!} \\ abc^2 = abcc &\Longrightarrow \frac{4!}{1!1!2!}. \end{aligned}$$

Portanto, o número de maneiras de escolher 4 livros e arrumá-los numa prateleira é:

$$\left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right).$$

Por outro lado, como seria possível obter uma função geradora cujo coeficiente de x^4 fosse justamente esse?

Com efeito, tem-se a definição abaixo:

Definição 3: A série (formal) de potências

$$f(x)=a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+a_3\frac{x^3}{3!}+\cdots+a_r\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

é a função geradora exponencial da sequência $(a_r)_{r\geq 0}$.

Esse nome "exponencial" vem do fato de que a função geradora exponecial da sequência $(1,1,1,...)$ é igual a $f(x)=e^x$, visto que nos cursos de cálculo prova-se

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{r!}x^r+\ldots.$$

Utilizando-se a função geradora exponencial quando a ordem dos objetos retirados deve ser considerada. Quando a ordem é irrelevante, utiliza-se, como foi visto nos exemplos anteriores, a função geradora ordinária.

Exemplo 2: De quantas maneiras podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos sem que nenhum quarto fique vazio?

Solução: Observa-se, inicialmente, que nenhum quarto poderá receber mais do que 6 pessoas, uma vez que nenhum deles poderá ficar vazio. Usamos função geradora exponencial, pois os quartos são diferentes e a ordem das pessoas dentro de um quarto não nos importa. A função geradora exponencial para este problema é, potanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x+\frac{x^2}{2!}\cdots+\frac{x^6}{6!}\right)\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}\cdots+\frac{x^6}{6!}\right)\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}\cdots+\frac{x^6}{6!}\right)\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}\cdots+\frac{x^6}{6!}\right)\\ &= \left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)^4 \end{aligned}$$

Assim, a resposta do problema combinatório é o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima. Como

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)^4=(e^x-1)^4,$$

uma vez que as potências extras acrescentadas não contribuem para o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$. Tem-se que $f(x)=(e^x-1)^4=e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1$ é a função geradora associada ao problema. Por fim, lembrado que vale a igualdade

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
e^{4x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x)^k}{k!} = 1 + 4x + \cdots + \frac{(4x)^9}{9!} + \cdots \\
-4e^{3x} &= -4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} = -4\cdot 1 - 4(3x) - \cdots - 4\frac{(3x)^9}{9!} + \cdots \\
6e^{2x} &= 6\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = 6\cdot 1 + 6(2x) + \cdots + 6\frac{(2x)^9}{9!} + \cdots \\
-4e^{x} &= -4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^k}{k!} = -4\cdot 1 - 4x - \cdots - 4\frac{(x)^9}{9!} + \cdots
\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ em $f(x)$ é obtido combinando-se os coeficientes de $\frac{x^9}{9!}$ em cada uma das séries acima, ou seja, o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ em $f(x)$ é

$$4^9 - 4\cdot 3^9 + 6\cdot 2^9 - 4 = 186480.$$

É importante frisar para o fato de não estarmos diante de nenhuma coincidência, mas sim de um mesmo problema visto sob ângulos distintos. No teorema seguinte prova-se um resultado que os permitirá concluir a equivalência de certos problemas.

Teorema 8:

(i) O número de maneiras de distribuirmos n bolas distintas em k caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia, é

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \tag{3.3}$$

(ii) O número de n-uplas cujos elementos pertencem ao conjunto $\{1, 2, 2, \ldots, k\}$ nas quais cada um dos números $1, 2, ..., k$, aparece pelo menos uma vez é $T(n,k)$, cuja expressão é dada em (3.3).

Demonstração: Iniciando primeiramente pelo item (ii). Como cada um dos números $1, 2, \ldots, k$, deve ocorrer pelo menos uma vez, e a ordem dos n números retirados é relevante, a função geradora exponencial para este problema é

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^k = (e^x - 1)^k.$$

O interesse é o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ nesta função. Sabe-se que,

$$(e^x - 1)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{x(k-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{i} (-1)^i e^{(k-i)x},$$

e como

$$e^{(k-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n,$$

temos,

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k-i)^n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Disto, concluí-se que o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ é $\sum_{n=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ que é a expressão para $T(n,k)$ fornecida em (3.3)

A prova do item (i) será usando apenas argumentos combinatórios. Como $T(n,k)$ é o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, com $n(A)$ e $n(B) = k$, vamos mostrar que, dada uma distribuição das bolas, é possível definir uma função sobrejetora, e que cada função sobrejetora fornece uma única distribuição. Considerando $A = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ o conjunto das n bolas e $B = \{c_1, c_2, ..., c_k\}$ o conjunto de k caixas. Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Logo,

$$f^{-1}(c_i) \neq \{\} \quad para \quad i = 1, 2, ..., k \quad e \quad \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(c_i) = A.$$

Portanto, uma maneira de distribuirmos as n bolas, conhecida a função f, é colocar na caixa c_i todas as bolas que estão em $f^-1(c_i)$. Reciprocamente, dada uma distribuição das bolas em que nenhuma caixa fique vazia, podemos definir uma função $f : A \to B$, que associa a cada bola da caixa c_i, o valor c_i. Não havendo caixa vazia, esta função será sobrejetora e, da forma como foi definida, única.

Dispondo deste resultado pode-se provar o caso da distribuição de bolas distintas em caixas iguais (sem caixa vazia).

Teorema 9:: O número de maneiras $S(n,k)$ de distribuirmos n bolas distintas em k caixas idênticas sem nenhuma caixa fique vazia é

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} T(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \tag{3.4}$$

Demonstração: Para que seja possível obter uma distibuição de n bolas distintas em k caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia, basta encontrar uma distribuição de n bolas distintas em k caixas idênticas (nenhuma vazia) e ordenar estas caixas. Isto garante que $T(n,k) = k!S(n,k)$, o que conclui a demonstração. O número $S(n,k)$ é chamado de número Stirling do segundo tipo.

Exemplo 2: De quantas maneiras podemos distribuir 4 bolas distintas a, b, c, d em duas caixas idênticas, de modo que nenhuma fique vazia? Listar todas as possibilidades.

Solução: Utilizando a equação (3.4), com $n = 4$ e $k = 2$,

$$\begin{aligned}
S(4,2) &= \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}(2-i)^4 \\
&= \frac{1}{2}\left[(-1)^0\binom{2}{0}(2-0)^4 + (-1)^1\binom{2}{1}(2-1)^4 + (-1)^2\binom{2}{2}(2-2)^4\right] \\
&= \frac{1}{2}(2^4 - 2) = 7.
\end{aligned}$$

As distribuições são:
$(a \quad bcd)$, $(b \quad acd)$, $(c \quad abd)$, $(d \quad abc)$, $(ab \quad cd)$, $(ac \quad bd)$, $(ad \quad bc)$.

3.3 Cálculo do tamanho de uma população de coelhos (Sequência de Fibonacci) através de funções geradoras

Suponha que um casal de coelhos recém-nascidos é colocado numa ilha, e que eles não produzem descendentes até completar dois meses de idade. Uma vez atingida esta idade, cada casal de coelhos produz exatamente um outro casal de coelhos por mês. Qual seria a população de coelhos na ilha após n meses, supondo que nenhum dos coelhos tenha morrido e não haja migração nesse período?

No primeiro e no segundo mês teremos 1 casal; no terceiro mês teremos 2 casais, pois o primeiro casal produziu um outro casal; no quarto mês serão 3 casais; já no quinto mês serão 5 casais; no sexto mês teremos 8 casais; no sétimo mês serão 13 casais; assim segue-se obedecendo uma determinada regra de formação.

Denotando-se por F_n a população de coelhos no n-ésimo mês, segue que, $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3$ e, assim sucessivamente. Dessa maneira é possível mostrar que tal sequência (F_n), dita de Fibonacci, cujos termos são $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0) \quad com \quad F_1 = F_2 = 1. \tag{3.5}$$

Muitas sequências são definidas recursivamente, ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s). Uma recorrência por si só, não define a sequência. Por exemplo, a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2$ é satisfeita não apenas pela sequência dos números ímpares, mas por todas as progressões aritméticas de razão 2. Para que a sequência fique perfeitamente determinada é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termos(s).

Observe que a sequência dos números ímpares é uma recorrência de primeira ordem, isto é, na qual cada termo é expresso em função do antecessor imediato, e que a sequência de Fibonacci é uma recorrência de segunda ordem, ou seja, na qual cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos.

Agora vamos utilizar funções geradoras para encontrar uma fórmula fechada para F_n. De fato, é possível organizar a sequência da população de coelhos da seguinte forma:

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad para \quad n \geq 0$

Calculando alguns termos segue que

$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$\vdots$

A função geradora dessa sequência é dada por

$$f(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots \tag{3.6}$$

Multiplicando (3.6) por $(-x)$ obtem-se

$$-xf(x) = -F_0x - F_1x^2 - F_2x^3 + \cdots \tag{3.7}$$

Agora, multiplicando (3.6) por $(-x^2)$

$$-x^2f(x) = -F_0x^2 - F_1x^3 + \cdots \tag{3.8}$$

Somando as equações (3.6), (3.7) e (3.8) chegamos a seguinte expressão:

$$f(x)[1-x-x^2] = F_0+(F_1-F_0)x+\underbrace{(F_2 - F_1 - F_0)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \cdots + (F_{n+2} - F_{n+1} - F_n)}_{=0}$$

.

$$f(x)[1 - x - x^2] = F_0 + (F_1 - F_0)x$$

Substituindo os valores de F_0 e F_1, obtem-se

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{3.9}$$

O último passo consiste em desenvover (3.9) em uma série de potências, o coeficiente de x^n nesta série será então F_n. Uma maneira de fazer isto é usando o método de expansão em frações parciais, que é visto em cálculo quando se estuda a resolução de integrais de funções racionais. O método será ilustrado neste exemplo, sua descrição completa pode se encontrada nos livros de cálculo.

Calculando-se as raízes do polinômio no denominador de (3.9) e colocando na forma fatorada, e lembrando que $(x-a) = -a(1-\frac{x}{a})$, a equação pode ser reescrita como

$$f(x) = \frac{x}{(-1)\left[x-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]} \tag{3.10}$$

$$= \frac{x}{(-1)\left\{(-1)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[1-\frac{x}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right](-1)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left[1-\frac{x}{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right]\right\}}$$

$$= \frac{x}{\left(1-\frac{x}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right)\left(1-\frac{x}{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right)} \tag{3.11}$$

$$= \frac{x}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

$$= \frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \tag{3.13}$$

As constantes A e B são calculadas de modo que a igualdade entre (3.10) e (3.13) seja verdadeira. Reescrevendo (3.10)

$$= \frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} = \frac{A\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)+B\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} = \frac{\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}A-\frac{1+\sqrt{5}}{2}B\right)x+A+B}{1-x-x^2} \tag{3.14}$$

Para que os polinômios nos numeradores de (3.14) e (3.9) sejam iguais para todo x é necessário e suficiente que os coeficientes das potências de x nos polinômios sejam iguais, o que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2}A - \frac{1+\sqrt{5}}{2}B = 1 \\ A + B = 0, \end{cases}$$

Cuja solução é

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad e \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Substituindo os valores de A e B em (3.13) e desenvolvendo os termos, obtem-se

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

e como

$$f(x) = \frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$$

Logo,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n. \tag{3.15}$$

Portanto, nossa resposta é o coeficiente de x^n em (3.12). Colocando x^n em evidência, obtem-se a fórmula desejada a seguir

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 0.$$

4 PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo será apresentada uma proposta didática para discentes do Ensino Médio que estão estudando Binômio de Newton e Análise Combinatória. Trata-se de uma avaliação aplicada com os alunos da 2ª série do Ensino médio da Escola Estadual Beatriz Maria de Abreu. Foram avaliados uma quantidade de 30 alunos, com o objetivo de fazer uma coleta de dados analisando os erros e acertos dos estudantes em problemas clássicos de Análise Combinatória e Binômio de Newton.

Problema 1: Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode comer 5 pastéis?

Após a correção desse problema, as seguintes respostas foram obtidas na tabela 3.

Tabela 3 - Percentual de respostas da 1ª questão.

Resposta	Porcentagem de alunos que deram essa resposta
243	20 %
10	25 %
35	15 %
21	30%
Não souberam	10 %

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Diante desse resultado foram analisadas as hipóteses dos alunos e foram feitas as intervenções abaixo com o objetivo de auxiliar os estudantes que apresentaram dificuldades ao resolver o problema:

I) Para os alunos que deram como resposta 243, o erro foi em utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e dessa forma, foram contabilizadas mais outras configurações. Logo será necessário retomar o conceito de Combinação com repetição.

II) Para os alunos que respoderam 10, o erro foi em confundir um problema de combinação completa com combinação simples. Na combinação simples cada elemento do conjunto só pode ser utilizado uma vez para formar as diferentes sequências. Já na combinação com repetição, os elementos do conjunto podem ser utilizados várias vezes em uma mesma sequência.

III) Para os alunos que responderam 35 deve ser proposta a releitura do problema para que seja identificado o que é solicitado, já que houve uma confusão entre constantes e variáveis.

IV) Para os estudantes que deram como resposta 21, estão corretos, pois é a resposta da 1ª questão. Utilizou-se o conceito de combinação com repetição quando, tendo um conjunto C com n elementos, formamos novos conjuntos, admitindo repetições com k elementos, todos pertencentes ao conjunto C.

Problema 2: Considerando o desenvolvimento de $(a+b)^n$, em que a e b são reais e n é natural, julgue o item. Se $n = 5$, então a média dos coeficientes da expansão desse binômio é maior que 5.

Verificando as respostas dos alunos na tabela 4.

Tabela 4 - Percentual da resposta da 2ª questão.

Resposta	Porcentagem de alunos que deram essa resposta
Não	30 %
Sim	40 %
Não souberam	30%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Diante do exposto, chegamos as seguintes intervenções abaixo.

I) Para os alunos que responderam "não"foram identificados os seguintes equívocos: erro em identificar a quantidade de coeficientes binomiais, erro no cálculo de alguns desses coeficientes e no cálculo da média aritmética.

II) Para os alunos que responderam "sim", acertaram a questão. Logo souberam utilizar o conceito de Binômio de Newton, onde temos T_{p+1} termos no desenvolvimento de $(a+b)^n$ e que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ e dessa forma, calcularam corretamente os coeficientes binomiais e respectivamente sua média aritmética.

Problema 3: Sabendo que a soma dos coeficientes de $(a+b)^m$ é 512, calcule o número de permutações de $\frac{m}{3}$ elementos.

Os alunos chegaram as seguintes conclusões apresentadas na tabela 5 a seguir.

Tabela 5 - Percentual da resposta da 3ª questão.

Resposta	Porcentagem de alunos que deram essa resposta
9	20 %
3	30 %
6	40%
Não souberam	10%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Diante do exposto, chegamos as seguintes intervenções:

I) Para os alunos que deram como resposta 9, eles encontraram corretamente o valor de m, mas esqueceram de dividir esse valor por 3 e fazer as permutações do número encontrado.

II) Para os alunos que deram como resposta 3, chegaram corretamente ao valor de $\frac{m}{3}$ mas não calcularam o número de permutações desse valor.

III) Para os alunos que deram como resposta 6, chegaram corretamente ao valor do problema, mostrando conhecimento sobre conteúdo solicitado.

Problema 4: Considere a representação de um número binomial conforme a seguir: $\binom{n}{p}$, com n e $p \in \mathbb{N}$ e $0 \leq p \leq n$. Assinale a alternativa que representa uma expressão que corresponde a soma $\binom{23}{13} + \binom{23}{12} + \binom{24}{11}$
(a) $\binom{24}{14}$ (b) $\binom{23}{12}$ (c) $\binom{24}{13}$ (d) $2 \cdot \binom{23}{12}$ e) $2 \cdot \binom{24}{13}$

Segue abaixo as respostas dos alunos por item em valores percentuais descritos na tabela 6.

Tabela 6 - Percentual da resposta da $4^{\underline{a}}$ questão.

Item	Porcentagem de alunos que deram essa resposta
a	10%
b	5 %
c	15 %
d	30 %
e	40%

Fonte: De autoria própria.

O objetivo dessa quesyão era mostrar aos alunos o conceito e aplicação da Relação de Stifel utilizada na construção do triângulo de Pascal. Portanto, o aluno deveria chegar a uma solução tendo conhecimento desse fato chegando como resposta correta o item d.

Problema 5: Quantas comissões de 5 pessoas, contendo pelo menos duas mulheres, podemos escolher de um grupo de 8 homens e 3 mulheres?

Segue abaixo, na tabela , as respostas dos alunos.

Tabela 7 - Percentual da resposta da $5^{\underline{a}}$ questão.

Resposta	Porcentagem de alunos que deram essa resposta
252	25%
196	55 %
Não souberam	20%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Analisando as conclusões dos alunos, foram feitas as seguintes intervenções:

I) Para os alunos que responderam 252, houve uma contagem excessiva de maneiras de se formar essas comissões. Veja como chegaram a esse resultado:

$$\binom{3}{2} \cdot \binom{9}{3} = 252.$$

Ou seja, primeiramente eles garantiram duas das três mulheres, logo após escolheram 3 pessoas das 9 que restaram para totalizar a comissão de 5 pessoas, podendo nesta última escolha ter uma mulher ou não, pois na primeira escolha já garantiram a quantidade mínima de mulheres. Onde está o erro? O erro foi a contabilização das comissões idênticas mais de uma vez. Por exemplo, supondo que nessa comissão de 5 pessoas estejam três mulheres e dois homens e que na primeira escolha tenham duas mulheres e na segunda escolha, uma mulher e dois homens:

$M_1M_2 \quad M_3H_1H_2$

$M_1M_3 \quad M_2H_1H_2$

$M_2M_3 \quad M_1H_1H_2$

Essas três configurações são idênticas, mas elas foram contabilizadas como diferentes de maneira equivocada e dessa forma, produzindo essa contagem excessiva e observa-se que isso acontece para cada par de homens que for escolhido. Logo de quantas manerias poderiamos escolher dois homens? trata-se de uma combinação de oito escoher dois, ou seja, para cada configuração segue que

$$\binom{8}{2} = 28$$

Portanto, tem-se duas contagens que foram contabilizas a mais. Então, corrigindo,

$$252 - 2 \cdot 28 = 196$$

II) Para os alunos que responderam 196, estão corretos, é a solução do problema, pois dividindo em dois casos: No primeiro caso, teríamos exatamente duas mulheres e três homens e no segundo caso, teríamos três mulheres e dois homens, isso nós dá:

$$\binom{3}{2} \cdot \binom{8}{3} + \binom{3}{3} \cdot \binom{8}{2} = 196$$

Problema 6: Usando o binômio de Newton é correto afirmar que a aproximação, a menos de um centésimo, de $(1,003)^{20}$ vale 1,06?

A tabela abaixo mostra as respostas dos alunos.

Tabela 8 - Percentual da resposta da 6ª questão.

Resposta	**Porcentagem de alunos que deram essa resposta**
Não	30 %
Sim	55 %
Não souberam	15%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Como se trata de aproximação de $(1,003)^{20}$, então o intuito seria usar o cálculo de Binômio de Newton por aproximação que é dado por $(1+x)^n \cong 1 + nx$.

Logo, a resposta vale $1 + 20 \cdot 0,003 \cong 1,06$.

Problema 7: Sabendo que: $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 63$, então $n = 10$?

Os alunos chegaram as seguintes conclusões, vide a tabela abaixo.

Tabela 9 - Percentual da resposta da 7ª questão.

Resposta	**Porcentagem de alunos que deram essa resposta**
Não	35 %
Sim	55 %
Não souberam	10%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário sobre o problema:

Esse problema exigia do aluno o conhecimento sobre o teorema das linhas do triângulo de Pascal. O aluno deveria somar e subtrair 1 no primeiro membro da igualdade e depois perceber que o somatório valia 2^n e em seguida, fatorar 64 e achar o valor de $n = 6$.

Problema 8: Determine o valor da expressão $99^5+5(99)^4+10(99)^3+10(99)^2+5(99)+1$. Os alunos chegaram as seguintes conclusões, vide a tabela abaixo.

Tabela 10 - Percentual da resposta da 8ª questão.

Resposta	**Porcentagem de alunos que deram essa resposta**
Souberam responder	25 %
Chegaram a uma solução errada	50 %
Não souberam iniciar o problema	25%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário sobre o problema:

O devido problema exigia que o aluno enxergasse na expressão acima, a expansão de um binômio e dessa forma chegasse a resposta com mais facilidade, pois tentar resolver um problema desses termo a termo é muito trabalhoso. Logo, segue que $99^5 + 5(99)^4 + 10(99)^3 + 10(99)^2 + 5(99) + 1 = (99+1)^5 = 10^5 = 100000$, que é a solução do problema.

Problema 9: (ENEM-2024) Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção do hospital formará uma equipe com 3 médicos, sendo pelo menos 2 cardiologistas. Desenvolva a expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe.

Tabela 11 - Percentual da resposta da 9ª questão.

Resposta	**Porcentagem de alunos que deram essa resposta**
Souberam responder	45%
Chegaram a uma solução errada	35 %
Não souberam iniciar o problema	20%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário sobre o problema:

Para formar a equipe com 5 médicos, sendo pelo menos 3 cardiologistas, devemos analisar os casos abaixo:

3 cardiologistas e 2 neurologistas: $\binom{7}{3} \cdot \binom{6}{2}$

4 cardiologistas e 1 neurologista: $\binom{7}{4} \cdot \binom{6}{1}$

5 cardiologistas e 0 neurologistas: $\binom{7}{5} \cdot \binom{6}{0}$

Portanto, a expressão que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é dada por

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{6}{2} + \binom{7}{4} \cdot \binom{6}{1} + \binom{7}{5} \cdot \binom{6}{0}$$

Problema 10 Calcule o valor numérico do polinômio:

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 6xy^3 + y^4 \quad para \quad x = \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}} \quad e \quad y = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}$$

Tabela 12 - Percentual da resposta da 10ª questão.

Resposta	**Porcentagem de alunos que deram essa resposta**
Souberam responder	50%
Chegaram a uma solução errada	30 %
Não souberam iniciar o problema	20%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário sobre o problema:

Nesse problema os alunos tinham que enxergar na expressão um Binômio, logo após substituir os valores de x e y e em seguida resolver a equação, chegando ao resultado $\frac{16}{5}$.

5 CONCLUSÃO

Nesta dissertação investigou-se a relevância do Binômio de Newton e sua interconexão com a análise combinatória no contexto do ensino médio. A abordagem didática indicou como esses conceitos matemáticos se revelam fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de resolução de problemas entre os alunos, que se beneficiam de uma compreensão mais profunda desses conceitos.

O Binômio de Newton, ao permitir a expansão de potências de binômios, não apenas se apresenta como uma ferramenta para simplificar cálculos, mas também se destaca como um ponto de partida para a compreensão de padrões numéricos e relações combinatórias, que se revelam essenciais para a formação de estudantes críticos e criativos. Ao longo do trabalho foi evidenciado como a aplicação prática dessa ferramenta matemática pode se mostrar estimulante para o interesse dos estudantes pela matemática, que se tornam mais engajados e motivados para aprender.

As identidades binomiais se revelam como uma estrutura que perpassa diversas áreas da matemática, tornando-se uma ponte entre teoria e prática, que se estabelece como fundamental para a compreensão dos conceitos matemáticos. Além disso, foi explorado o papel das funções geradoras como um recurso poderoso na análise combinatória, que se apresenta como uma ferramenta essencial para a resolução de problemas complexos, que se tornam mais acessíveis e visuais por meio da utilização dessas funções.

Sequências e séries representam-se por meio dessas funções, permitindo que os estudantes se aprofundem na compreensão das relações combinatórias subjacentes, que se revelam essenciais para a formação de estudantes mais críticos e criativos. A análise da aplicação do Binômio de Newton e das funções geradoras no ensino médio se apresenta como uma oportunidade para que os educadores sejam capazes de avaliar a eficácia desses conceitos em diferentes contextos, que se mostram fundamentais para a formação de estudantes capacitados.

A interdisciplinaridade entre álgebra e combinação se estabelece como um ambiente rico para o aprendizado e a descoberta, que se revela essencial para a formação de estudantes mais críticos e criativos, que se beneficiam de uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Conclui-se que a inclusão desses temas no currículo do ensino médio pode se mostrar como uma oportunidade para que os estudantes se desenvolvam de forma mais integral, que se tornam mais preparados para enfrentar os desafios do século XXI. Espera-se que esta dissertação torne-se um incentivo para educadores e pesquisadores se engajarem em explorar novas metodologias que incorporem o Binômio de Newton e as funções geradoras no ensino da matemática, revelando uma oportunidade para que os estudantes se beneficiem de uma formação mais sólida e abrangente, essencial para o seu sucesso em diferentes áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, T. M. **Cálculo**. ed. São Paulo; Pearson Education, 2013.

BRASIL, M. D. E. **Base Nacional Com Curricular.** Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CHARTRAND, G. **Introdução à teoria dos grafos**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

GOMES, Carlos A. Diniz, I. C. G. R. Matemática discreta - **Conjuntos, recorrências, Combinatória e Probabilidade.** Livraria da Física da USP São Paulo, 1ª edição, 2021.

GRIMALDI, R. P. **Discrete and combinatorial mathematics**: Grimaldi, R. P. Discrete and combinatorial mathematics: An applied introduction, ser, 1994.

HAZZAN, S. Fundamentos de Matemática elementar, 5: **combinatória, probabilidade**. São Paulo: Atual, 2013. Lovàz, László.

MORGADO, A. C., Carvalho, J. B. P. D., Carvalho, P. C. P., And Fernandez, P. **Análise combinatória e probabilidade; com as soluções dos exercícios**. Coleção do professor de Matemática, ed 9, 2006.

MORGADO, A. C., AND CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM (2015), 16.

OLIVERO, M. **História da Matemática através de problemas**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

ROSEN, K. H. **Matemática discreta e sua aplicação**. São Paulo: McGraw-Hill, 2013.

SANTOS, J. P. O, M. M. M. I. **Indrotução à análise combinatória**. 4 ed, Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2008.

VIEIRA, V. L. **Um curso básico em teoria dos números**. Editora Livraria da Física, 2020.

WILF, H. S. **Generating functionology**. 3. ed. Boston: Academic Press, 2006.