



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

WENDSON CÉSAR SILVA DO NASCIMENTO

**AS DECISÕES DIDÁTICAS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA
PERSPECTIVA DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO**

**CAMPINA GRANDE
2024**

WENDSON CÉSAR SILVA DO NASCIMENTO

**AS DECISÕES DIDÁTICAS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA
PERSPECTIVA DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO**

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de C.

Orientador: Prof.^a Dr.^a Cibelle de Fátima Castro de Assis

**CAMPINA GRANDE
2024**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

N244d Nascimento, Wendson César Silva do.

As decisões didáticas do professor de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento algébrico [manuscrito] / Wendson César Silva do Nascimento. - 2024.
151 f. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis, Campus I".

1. Pensamento Algébrico. 2. Generalização de Padrões. 3. Decisões Didáticas. I. Título

21. ed. CDD 327.7

WENDSON CÉSAR SILVA DO NASCIMENTO

AS DECISÕES DIDÁTICAS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA
PERSPECTIVA DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Dissertação apresentada à
Coordenação do Curso de Mestrado
Profissional em Ensino de Ciências e
Matemática da Universidade Estadual
da Paraíba, como requisito parcial à
obtenção do título de Mestre em Ensino
de Ciências e Matemática

Linha de Pesquisa: Metodologia,
Didática e Formação do Professor no
Ensino de C.

Aprovada em: 17/12/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jadilson Ramos de Almeida** (***.876.714-**), em **22/04/2025 17:46:26** com chave **dc248df01fba11f0b2b02618257239a1**.
- **Marcus Bessa de Menezes** (***.027.667-**), em **20/03/2025 15:43:28** com chave **36b4fbfc05bb11f0bdf11a7cc27eb1f9**.
- **Cibelle de Fátima Castro de Assis** (***.199.924-**), em **20/03/2025 10:46:25** com chave **b74e581e059111f0bd312618257239a1**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 22/04/2025

Código de Autenticação: cbbe0a



Dedico esta Dissertação aos meus amores:
Ângela, Cecília e Miguel, que são o meu
sentido, o meu refúgio e a força que me move
todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por me dar saúde, força e perseverança ao longo dessa jornada, iluminando meu caminho e me concedendo a oportunidade de seguir em frente nos momentos mais desafiadores.

À minha orientadora, pelo acompanhamento constante, pela dedicação e por sua orientação sempre solícita e compreensiva. Sua paciência e sabedoria foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa, e serei eternamente grato por todo o apoio e encorajamento.

À minha esposa, que compartilhou comigo o percurso do mestrado. Sua parceria, apoio incondicional e compreensão foram essenciais. Mesmo diante da minha ausência em muitos momentos com nossos filhos, você foi minha base, assumindo tantas responsabilidades e me incentivando a seguir em frente.

À minha mãe, por todos os esforços feitos para que eu pudesse continuar estudando e perseguindo meus objetivos.

Aos demais familiares, que nunca deixaram de acreditar nos meus sonhos e que, com palavras de incentivo e carinho, me fortaleceram ao longo dessa caminhada.

Aos professores, coordenação e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB).

Aos amigos e colegas que adquiri durante o curso de mestrado. As trocas de experiências, as conversas e o apoio mútuo foram imprescindíveis para tornar essa jornada mais leve e enriquecedora.

Ao projeto PIPRINT e à professora participante da pesquisa, pela generosidade em ceder as informações necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Sua contribuição foi essencial para que esta dissertação pudesse ser concretizada.

A todos, o meu mais sincero agradecimento

"Nada te perturbe, nada te espante. Tudo passa.
Deus não muda. A paciência tudo alcança.
Quem a Deus tem, nada lhe falta: só Deus
basta."

Santa Tereza d'Ávila

RESUMO

O presente estudo, desenvolvido no campo da Didática da Matemática de origem francesa, tem por objetivo investigar os fatores que influenciam as decisões didáticas realizadas por uma professora de Matemática na (re)construção de uma sequência didática envolvendo padrões e regularidades, voltada para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do Ensino Médio. Para tanto, discutimos inicialmente alguns aspectos que julgamos importantes sobre o ensino de Álgebra e em seguida nos ancoramos no campo teórico das Decisões Didática, teoria proposta por Margolinas (2002, 2005) que apresenta o Modelo dos Níveis da Atividade do Professor, e no Modelo dos Fatores Decisionais propostos por Bessot (2019). Nossa metodologia se constitui de uma abordagem qualitativa e baseia-se no estudo de caso de uma professora de matemática participante do grupo de trabalho do Ensino Médio no Projeto PRIPINT. O procedimento para a produção dos dados da pesquisa ocorreu em três fases: Fase 1 – *A produção de sequências didáticas (versão 1 e 2) a partir da tarefa “Os palitos de fósforo”*; Fase 2 - *Comparação das versões da sequência didática*; Fase 3 - *Elaboração e realização de uma entrevista com a professora*. A análise dos dados foi inspirada na proposta da Análise de conteúdo proposta por Bardin (2016) compreendida pelas fases: *Pré-análise; Exploração do material e Tratamento dos resultados, inferência e interpretação*. Com base nas análises realizadas, inferimos que as decisões tomadas pela professora para reconstrução da proposta didática emergiram da influência direta de uma combinação de fatores do tipo epistêmico e do tipo história didática, com predominância do primeiro, em especial os ligados à *relação pessoal do professor à pedagogia e à relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*. Acreditamos que a predominância desses dois subtipos de fatores epistêmicos está diretamente relacionada às concepções da professora sobre o saber matemático a ser ensinado e sobre a pedagogia que orienta esse ensino.

Palavras-chave: pensamento algébrico; generalização de padrões; decisões didáticas.

ABSTRACT

This study, developed in the field of Mathematics Didactics of French origin, aims to investigate the factors that influence the didactic decisions made by a Mathematics teacher in the (re)construction of a didactic sequence involving patterns and regularities, aimed at developing the algebraic thinking of high school students. To this end, we initially discussed some aspects that we consider important about the teaching of Algebra and then we anchored ourselves in the theoretical field of Didactic Decisions, a theory proposed by Margolinas (2002, 2005) that presents the Model of Levels of Teacher Activity, and in the Model of Decisional Factors proposed by Bessot (2019). Our methodology consists of a qualitative approach and is based on the case study of a mathematics teacher participating in the high school working group in the PRIPINT Project. The procedure for producing the research data occurred in three phases: Phase 1 – The production of didactic sequences (versions 1 and 2) based on the task “The matchsticks”; Phase 2 - Comparison of the versions of the didactic sequence; Phase 3 - Preparation and implementation of an interview with the teacher. Data analysis was inspired by the content analysis proposed by Bardin (2016), which comprises the following phases: Pre-analysis; Exploration of the material; and Treatment of results, inference and interpretation. Based on the analyses performed, we infer that the decisions made by the teacher to reconstruct the didactic proposal emerged from the direct influence of a combination of epistemic and didactic history factors, with a predominance of the former, especially those linked to the teacher's personal relationship with pedagogy and the teacher's personal relationship with the knowledge to be taught. We believe that the predominance of these two subtypes of epistemic factors is directly related to the teacher's conceptions about the mathematical knowledge to be taught and about the pedagogy that guides this teaching.

Keywords: algebraic thinking; generalization of patterns; didactic decisions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Sequência figural com um padrão de repetição	43
Figura 2 - Padrões de repetição	44
Figura 3 - Padrões de crescimento.....	45
Figura 4 - Estruturação do Milieu (Meio)	67
Figura 5 - Síntese esquemática da análise de conteúdo.....	82
Figura 6 - Tarefa “Os palitos de fósforo”	86

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Objetos de conhecimento e habilidades relacionados ao estudo de padrões e regularidades nos anos iniciais do Ensino Fundamental	56
Quadro 2 - Objetos de conhecimento e habilidades relacionados ao estudo de padrões e regularidades nos anos finais do Ensino Fundamental.....	59
Quadro 3 - Habilidades relacionadas ao estudo de padrões e regularidades no Ensino Médio	62
Quadro 4 - Modelo de Estruturação do Milieu (Meio) proposto por Margolinas	68
Quadro 5 - Modelo dos Níveis da Atividade do Professor.....	69
Quadro 6 - Questão 1 e a versão da professora	92
Quadro 7 - Questão 2 e a versão da professora	93
Quadro 8 - Questão 3 e a versão da professora	94
Quadro 9 - Questão 4 e a versão da professora	94
Quadro 10 - Enunciados modificados e decisões da professora (sequência didática).....	95
Quadro 11 - Decisões e tipos de decisões (sequência didática da professora) por questão	97
Quadro 12 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 4).....	100
Quadro 13 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 5).....	102
Quadro 14 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 11).....	104
Quadro 15 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 6).....	105
Quadro 16 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 8).....	106
Quadro 17 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 6).....	107
Quadro 18 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 7).....	108
Quadro 19 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 9).....	111
Quadro 20 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 10).....	113
Quadro 21 - Decisões didáticas e fatores: exploração dos elementos da sequência.....	114
Quadro 22 - Decisões didáticas e fatores: análise do Padrão na sequência.....	116
Quadro 23 - Decisões didáticas e fatores: registro dos alunos	118

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO: APRESENTANDO A PESQUISA	12
1.1	Apresentação da Temática.....	12
1.2	A construção da pesquisa.....	16
1.3	Questão de investigação e objetivos	19
1.3.1	Objetivo Geral	19
1.3.2	Objetivos Específicos	20
1.4	Considerações metodológicas	20
1.5	O Produto educacional.....	21
1.6	Apresentando os capítulos da Dissertação	21
2	PERSPECTIVA PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA: PADRÕES E REGULARIDADES.....	23
2.1	Concepções de Álgebra na área de Educação Matemática	23
2.2	O pensamento algébrico nas pesquisas em Educação Matemática	32
2.3	Padrões e generalizações no desenvolvimento do pensamento algébrico.....	40
2.4	A abordagem de Álgebra e de pensamento algébrico da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).....	51
3	CONSIDERAÇÕES SOBRE AS DECISÕES DIDÁTICAS DO PROFESSOR...64	
3.1	Decisões didáticas do professor	64
3.2	Modelo dos Níveis da Atividade do Professor	66
3.3	Fatores de influência nas decisões didáticas do professor	72
3.2.1	Fatores do tipo externo	74
3.2.2	Fatores do tipo epistêmico.....	74
3.2.3	Fatores do tipo história didática.....	76
4	PRODUÇÃO DOS DADOS DA PESQUISA	78
4.1	Caracterização da pesquisa	78
4.2	As sequências didáticas e a entrevista como <i>corpus</i> da pesquisa	86

4.2.1	A produção de sequências didáticas (Fase 1)	86
4.2.2	Comparação das versões da sequência didática (Fase 2)	87
4.2.3	Elaboração e realização de uma entrevista com a professora (Fase 3)	87
5	EXPLORAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA	89
5.1	Apresentação da formação profissional e experiência na docência da professora	89
5.2	A sequência didática apresentada pela professora.....	90
5.3	Identificação das mudanças realizadas	91
5.4	Identificação dos fatores decisórios da professora	98
5.4.1	Fatores relativos às decisões sobre a exploração da construção da sequência	99
5.4.2	Fatores relativos às decisões sobre a análise do Padrão pelos alunos.....	104
5.4.3	Fatores relativos às decisões sobre os registros dos alunos	107
5.5	Análise dos fatores decisórios.....	113
5.6	Relações da professora com a Álgebra e com o ensino de padrões e regularidades	120
6	CONCLUSÕES.....	123
	REFERÊNCIAS.....	127
	APÊNDICE A – CARTA DE APRESENTAÇÃO.....	135
	APÊNDICE B – QUESTÕES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (VERSÃO 1).....	136
	APÊNDICE C – ROTEIRO DA ENTREVISTA.....	137
	ANEXO A – QUESTÕES DA VERSÃO ADAPTADA PELA PROFESSORA..	138
	ANEXO B – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA.....	140

1 INTRODUÇÃO: APRESENTANDO A PESQUISA

1.1 Apresentação da Temática

Constantemente o ensino da Álgebra tem se limitado a um conjunto de procedimentos isolados, sem relação com outros conceitos matemáticos e descontextualizados. Seu ensino na maioria das vezes se concentra na abstração e formalização matemática, negligenciando aos alunos a oportunidade de refletirem sobre esses conhecimentos em contextos variados. Como resultado, essa abordagem tem dificultado a atribuição de significado ao que está sendo ensinado. Diante dessa realidade, diversos estudiosos têm destacado a importância de introduzir abordagens que desenvolvam o pensamento algébrico desde cedo na educação escolar.

Nos últimos anos, como apontado por Lima e Bianchini (2017), vem crescendo a tendência em considerar o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do trabalho com padrões e regularidades. No cenário nacional, essa forma de abordagem da álgebra ganhou destaque entre habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017) desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Após analisarmos algumas pesquisas realizadas no Brasil, fica evidente que alguns professores e pesquisadores reconhecem a álgebra como uma forma de pensamento e assumem a generalização de padrões como uma das abordagens mais eficazes para promover o desenvolvimento desse pensamento.

Nessa perspectiva destacamos a pesquisa de Lacerda e Gil (2022) cujo objetivo consiste em analisar abordagens pedagógicas que possam promover o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do trabalho com padrões e regularidades desde os primeiros anos da vida escolar dos estudantes, adotando a BNCC como ponto de partida e fundamentando-se em estudos recentes relacionados ao assunto. Na pesquisa, as autoras apresentam, inicialmente, algumas contribuições atualizadas da literatura sobre o tema, que apontam para uma importante relação entre a exploração de padrões e o avanço das competências matemáticas dos estudantes. Em seguida, propõem algumas sugestões de trabalho com padrões e regularidades para a educação infantil e os anos iniciais do ensino fundamental com base nas indicações da BNCC, destacando essa forma de abordagem como sendo essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico e salientando a necessidade da discussão desse tema na formação de professores.

Outro exemplo de pesquisa recente que aborda essa temática é a proposta por Jungbluth, Silveira e Grando (2019) que investigou como a generalização de padrões em sequências repetitivas e recursivas contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos dos anos iniciais da Educação Básica. Os pesquisadores apresentam definições e exemplos encontrados na literatura e em livros didáticos acerca do tema apresentado, evidenciando como o trabalho com padrões possibilita o ensino e aprendizagem de uma matemática mais significativa e, conseqüentemente, promove o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A pesquisa de Silva (2021), por sua vez, buscou investigar as formas de pensamento algébrico mobilizadas por estudantes dos anos finais do ensino fundamental ao responderem uma tarefa de generalização de padrões. Para tanto, a pesquisadora apoiou-se na perspectiva de pensamento algébrico fundamentada na Teoria da Objetivação (TO), desenvolvida pelo professor Luís Radford. Para o desenvolvimento da pesquisa foram analisados estudantes do 6º, 8º e 9º anos, em que a maioria utilizou distintas estratégias para resolver os problemas, como também mobilizaram distintas formas de pensamento algébrico definidas pela TO. Essa pesquisa destaca como resultados mais relevantes a habilidade de alguns alunos em manipular o simbolismo alfanumérico ao realizarem uma tarefa que permitiu a construção de significados nessa linguagem. Além disso, ressaltam a relevância dos gestos na denotação e no trabalho com o indeterminado, as diferentes abordagens adotadas pelos alunos na resolução dos problemas, o trabalho colaborativo entre professor e estudantes, e a não limitação da álgebra ao simbolismo alfanumérico.

Assim, as propostas que envolvem a exploração e a generalização de padrões e regularidades constituem-se como um dos caminhos viáveis para desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes e, de maneira mais geral, ampliar suas competências matemáticas.

Nesse contexto, o professor possui um papel indispensável, uma vez que a maneira como uma tarefa é apresentada ou como um simples questionamento é conduzido pode criar ou não um ambiente de apropriação e de produção de conhecimento propício ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Desse modo, é necessário que os professores, além de possuírem um domínio sólido tanto no âmbito científico quanto no didático na matemática, demonstrem criatividade ao elaborar tarefas. Isso implica em analisar cuidadosamente a construção, aperfeiçoamento e adaptação das atividades, visando sempre estimular a compreensão matemática desejada nos alunos.

No entanto, oferecer aos alunos atividades desafiadoras representa, igualmente, também um desafio para os docentes, não apenas na escolha e criação de atividades, mas também na orientação do trabalho individual e coletivo dos estudantes. Isso exige um domínio profundo e

abrangente tanto do conteúdo matemático quanto das estratégias e recursos de ensino que serão utilizados.

Desse modo, durante o exercício de sua prática, o professor se depara com um conjunto de decisões que precisam ser tomadas desde a fase de preparação da aula até a sua execução. Logo, é importante considerar que os conhecimentos e as concepções do professor de matemática desempenham um papel fundamental ao moldar essas decisões. Sendo assim, suas decisões podem ser influenciadas por diversos fatores que impactam suas ações, como a interpretação do currículo e a escolha dos materiais e estratégias curriculares mais apropriados para serem adotados. Pensando especificamente no contexto do ensino de Álgebra temos que, dependendo das decisões didáticas do professor, sua ênfase pode ser colocada na linguagem algébrica ou no desenvolvimento do pensamento algébrico, por exemplo. Dessa forma, o professor de matemática desempenha um papel crucial no processo de ensino e aprendizagem, podendo ser o catalisador para criar um ambiente de interesse e aprendizagem para os alunos, ampliando as possibilidades de discussão, de exploração e construção de argumentos.

Alguns pesquisadores, em âmbito nacional e internacional, vêm se dedicando ao estudo sobre as decisões didáticas do professor, sendo estas compreendidas como aquelas decisões que possuem o objetivo de proporcionar ao aluno a aprendizagem de determinado saber. A seguir, destacamos, por ordem de ano de publicação, os trabalhos que nos auxiliaram na compreensão do cenário atual da pesquisa científica ligada a essa temática.

Em seu trabalho, Lima (2011) busca identificar concepções e conhecimentos mobilizados por professores de matemática no momento de sua atividade, ou seja, quando analisam a produção do aluno e elaboram uma sequência didática. Para tanto, adotou como referencial teórico-metodológico o Modelo dos Níveis da Atividade do Professor proposto por Margolinas (2002, 2005). A pesquisa encontra-se situada no Nível +1, momento em que, por exemplo, o professor constrói o planejamento da aula, antecipando o que vai acontecer quando estiver em interação com os alunos. Os resultados da pesquisa mostram que as escolhas feitas e as decisões tomadas pelos professores se apoiam nos conhecimentos que eles possuíam acerca dos programas escolares, do conteúdo matemático, como também na análise que estes fizeram da produção do aluno, levando em conta os conhecimentos prévios destes acerca do conteúdo estudado. Nesse estudo, destaca-se ainda que embora partindo da mesma condição e analisando as mesmas produções de alunos, o grupo professores participantes da pesquisa identificou conhecimentos distintos na produção do aluno e sugeriram sequências didáticas bem diferentes no que se refere a escolha dos problemas e a definição dos objetivos.

A investigação de Espíndola e Trgalová (2015) interessou-se em analisar as práticas de um professor de matemática, mais especificamente o trabalho documental do professor relativo à preparação do ensino e à implementação de uma aula sobre Função Exponencial em uma turma do 1º ano do Ensino Médio. Para tanto, usou como base a Abordagem Documental do Didático articulada com o estudo das decisões didáticas, tomando como referência o modelo dos níveis da atividade do professor de Margolinas (2002) e a categorização de fatores que influenciam as decisões didáticas de Bessot e colaboradores (2013). Como resultado, a pesquisa evidenciou nas decisões tomadas pelo professor a influência exercida pelos fatores do tipo epistêmico, a exemplo das concepções de aprendizagem e interpretações das expectativas institucionais advindas do professor, e da história didática, tais como os conhecimentos do professor a respeito das dificuldades dos alunos.

A pesquisa realizada por Brassat (2017) buscou investigar sobre as decisões didáticas do professor quando exerce as suas atividades em sala de aula e interage com os estudantes, e os fatores que influenciam essas decisões. Assim, a pesquisadora propôs um modelo de *microdecisões* que considerou tanto a atividade docente em sala de aula como também as ações dos alunos mediante o saber ensinado. Diante dos fatores que influenciam na tomada de decisões do professor, a pesquisadora destaca a influência dos fatores epistêmicos durante a tomada de decisão do professor, e a influência dos fatores do tipo história didática na construção do plano de ensino. Destaca ainda que ambos os fatores não devem ser compreendidos de maneira independente, já que a formação docente é composta pela relação estabelecida entre esses dois fatores.

No trabalho desenvolvido por Espíndola, Luberiaga e Trgalová (2018) é apresentado um estudo sobre as decisões didáticas de uma professora, objetivando identificar os fatores que as influenciaram durante seu trabalho documental para o ensino do conteúdo de razões trigonométricas. Para tanto, as autoras baseiam seu estudo na abordagem documental do didático; no modelo dos níveis de atividade do professor, na teoria antropológica do didático e no modelo de fatores decisórios. Neste trabalho, as autoras interessaram-se em estudar a tomada de decisões didáticas de uma professora no momento de planejamento de suas aulas. Assim, durante duas semanas, as autoras acompanharam o trabalho documental docente sobre a elaboração de uma sequência didática e de uma aula de revisão. Como resultado, apontam a influência de fatores do tipo epistêmico (tipos de tarefas e de técnicas), e do tipo história didática (relação entre professora e alunos), na tomada de decisões relacionadas ao ensino do tema.

Na pesquisa desenvolvida por Bessot (2019) ao articular dois quadros teóricos, a teoria das situações didáticas e a teoria antropológica do didático, é proposto um modelo teórico de

fatores que podem influenciar o processo de tomada de decisão dos professores. Esse modelo de fatores é agrupado em três grandes categorias distintas: fatores do tipo externos, fatores do tipo epistêmico e fatores do tipo história didática. Os resultados dessa pesquisa mostram que no que se refere ao momento de preparação das aulas, foram os fatores epistêmicos que exerceram a maior influência sobre as decisões dos professores participantes. No entanto, durante a realização das aulas, as decisões didáticas tomadas pelos professores foram orientadas principalmente por fatores relacionados à história didática.

Espíndola, Silva e Brito Júnior (2020), por sua vez, trazem em sua pesquisa um estudo acerca das *microdecisões* didáticas tomadas por um professor de matemática durante a aplicação de um projeto de aula sobre volume de sólidos geométricos. Para o estudo das *microdecisões* didáticas, os autores adotaram o modelo proposto por Brassset (2017). A pesquisa aponta como um dos seus fatores limitantes a necessidade de um olhar mais apurado sobre o projeto de aula do professor. A partir dos resultados desse estudo os autores destacam a importância de se levar em conta as decisões do professor durante o nível +1 no que se refere ao momento de preparação de uma aula; bem como da influência de outros níveis, a exemplo da construção geral do tema (nível +2) e dos conhecimentos sobre a noção matemática e a aprendizagem referente ao nível +3, na realização de novas *macrodecisões* e *microdecisões*.

A partir das pesquisas apresentadas, observamos a relevância dos estudos sobre as decisões didáticas para a Educação Matemática, em particular para o campo da Didática da Matemática, na medida em que trazem reflexões acerca das diferentes fases da atividade do professor em seu exercício profissional, dentro e fora da sala de aula, contribuindo para aprofundar os olhares voltados para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, e indicando caminhos para novos estudos revelados a partir desses.

Essas pesquisas contribuíram para aumentar nosso interesse na problemática docente, mais especificamente nas decisões didáticas tomadas pelo professor e nos fatores capazes de influenciar tais decisões. Entendemos que, no contexto educacional, o professor tem a responsabilidade de promover o desenvolvimento de habilidades e competências essenciais para a integração social dos alunos. Em vista disso, ao planejar e ministrar aulas, o educador enfrenta diversas situações que requerem diferentes escolhas, levando-o a tomar decisões didáticas fundamentais para o processo de ensino e aprendizagem.

1.2 A construção da pesquisa

A provocação inicial para a realização desta pesquisa bem como o desejo de nos concentrarmos especificamente nas decisões didáticas do professor, em especial àquelas tomadas no momento de construção de um projeto de ensino que contemple a exploração de padrões e regularidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico, se deu a partir de três fatos específicos que apresentamos a seguir:

- 1) As propostas em relação à abordagem da Álgebra trazidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC veio sendo obrigatoriamente implantada nas escolas desde 2019, e no que se refere ao ensino da Álgebra esse documento enfatiza como finalidade dessa unidade temática, o desenvolvimento de um tipo de especial de pensamento, o pensamento algébrico (Brasil, 2017, p. 270). Segundo o documento citado, a habilidade de reconhecer e generalizar padrões e regularidades é um aspecto fundamental desse tipo especial de pensamento e que o trabalho sobre padrões e regularidades deve percorrer toda a formação do estudante, dos anos Iniciais ao Ensino Médio. O ensino dessa área de conhecimento era até então proposto apenas a partir dos anos finais do Ensino Fundamental.

No que diz respeito ao Ensino Médio, a proposta da BNCC para o ensino de álgebra, para além do domínio técnico e procedimental, visa a compreensão do papel da álgebra na formação crítica e social dos estudantes, buscando conectar os conceitos algébricos com situações práticas do cotidiano e com outras áreas do conhecimento. A BNCC, nessa etapa de ensino, enfatiza a importância de os alunos reconhecerem padrões e regularidades em diversos contextos matemáticos, incentivando-os a desenvolverem uma visão crítica sobre como essas regularidades se manifestam em diferentes situações, ampliando a compreensão e a aplicabilidade da álgebra.

De maneira geral, a proposta da BNCC para o ensino de álgebra no Ensino Médio volta-se para a construção de competências que contemplem desde a resolução de problemas matemáticos à aplicação prática do conhecimento em situações do dia a dia. Ou seja, essa abordagem busca integrar a álgebra ao cotidiano dos estudantes, desenvolvendo habilidades indispensáveis tanto para o domínio da matemática quanto para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, aptos para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

- 2) Discussões teóricas realizadas na disciplina *Tópicos Contemporâneos em Educação Matemática: Didática da Matemática Francesa*.

Essa disciplina foi cursada durante o semestre 2022.2 no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), realizando discussões sobre a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008) e, posteriormente, sobre Decisões Didáticas a partir do texto de Espindola, Silva e Brito Júnior (2020).

3) Participação no projeto *Pensamento Algébrico: recursos e práticas de ensino no nível do Fundamental*.

O projeto *Pensamento Algébrico: recursos e práticas de ensino no nível do Fundamental* atendeu ao Programa de Incentivo à Internacionalização (PIPRINT) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e foi desenvolvido no período de outubro de 2021 a outubro de 2022. A concepção do PIPRINT foi inspirada no projeto PREMATT em desenvolvimento há alguns anos na França como atividade regular do Instituto Francês de Educação da Escola Normal Superior (IFE-ENS) de Lyon. Para a sua realização, o PIPRINT contou com a participação de professores pesquisadores da PUC-SP, da UFPB, da UFAM e do IFE-ENS-Lyon; de doutorandos, mestrandos e egressos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPG-EDMAT) da PUC-SP e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM) da UEPB; além de professores e formadores da Educação Básica.

O projeto em tela teve como objetivos: (1) conceber recursos (digitais e não digitais) ricos para contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental; (2) identificar práticas que levam ao uso com sucesso desses recursos; (3) divulgar em grande escala esses recursos e práticas aprovadas. A proposta metodológica adotada no PIPRINT foi a pesquisa colaborativa e participativa entre professores, pesquisadores e formadores, sob a forma de incubações. Para tanto, implementou-se uma perspectiva de pesquisa baseada no *Design Based Recherche* (DBR Collective, 2003), apoiando-se em uma parceria conjunta para a efetivação do *design* e da implementação de recursos de ensino, com os professores ao longo do processo. Foram formadas três comunidades (ou grupos) de designers, de modo que cada uma enquadrou, respectivamente, professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e professores do Ensino Médio. Participamos do grupo de professores que atuam no Ensino Médio e, entre os participantes, havia uma professora, um professor, além do autor desta pesquisa, identificado como professor pesquisador.

Em cada grupo foram elaborados e discutidos recursos didáticos para o ensino de álgebra e suas experiências de ensino. Em particular, no grupo do Ensino Médio, houve uma discussão sobre a tarefa “Os palitos de fósforo” a partir da qual foram criadas sequências didáticas como proposta de ensino. As sequências didáticas construídas constituíram o *corpus* desta pesquisa e se referem, particularmente, a sequência apresentada pelo professor pesquisador (versão original ou versão 1) e a sequência apresentada pela professora (versão 2), sendo esta uma adaptação da versão original contendo modificações.

1.3 Questão de investigação e objetivos

A partir dos estudos teóricos, e levando em consideração que uma maioria das pesquisas relacionadas ao pensamento algébrico possuem foco essencialmente no trabalho dos alunos, tivemos o interesse em voltarmos nossa atenção para as decisões didáticas do professor, mais especificamente para as *macrodecisões*, que são aquelas tomadas no momento de preparação do projeto de ensino.

Cientes também de que o desenvolvimento do pensamento algébrico não ocorre de maneira espontânea, pelo contrário, precisa de uma intenção específica, observamos a relevância de uma discussão que relacione esse tema com as decisões didáticas do professor. Acreditamos que é a partir da sua ação intencional durante o processo de tomada de decisões, que se dá a criação de um ambiente que favoreça ao aluno o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Neste sentido, essa pesquisa surgiu a partir do seguinte questionamento: *Quais fatores influenciam as decisões didáticas de professores de Matemática na elaboração de uma proposta de ensino que favoreça o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da exploração de padrões e regularidades?* Delineamos, em seguida, os objetivos da pesquisa:

1.3.1 Objetivo Geral

Investigar os fatores que influenciam as decisões didáticas realizadas por uma professora de Matemática na (re)construção de uma sequência didática envolvendo padrões e regularidades, voltada para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do Ensino Médio.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Comparar as duas propostas de ensino sendo a segunda uma reconstrução da versão inicial;
- Identificar as decisões didáticas tomadas pela professora no processo de (re)construção da proposta de ensino;
- Identificar os fatores capazes de influenciar as decisões didáticas tomadas pela professora;
- Estruturar um produto educacional composto pela sequência didática analisada na pesquisa contendo contribuições das decisões didáticas da professora colaboradora e do professor pesquisador.

1.4 Considerações metodológicas

Esta pesquisa emerge de reflexões acerca da tomada de decisões didáticas com vista à promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes por meio da exploração de padrões e regularidades. Logo, no que tange a natureza de abordagem do objeto desta pesquisa, a metodologia adotada constitui-se de um caráter qualitativo, como define Oliveira (2012), Bogdan e Biklen (1994) e Chizzotti (2000). Quanto aos seus objetivos, esta pesquisa caracteriza-se como descritiva, segundo Prodanov e Freitas (2013), Fiorentini e Lorenzato (2012). Por sua vez, no que se refere aos procedimentos técnicos utilizados para a coleta de dados, esta pesquisa classifica-se como estudo de caso. Enquadramos nosso estudo nesta proposta metodológica a partir de Gil (2002) e Martins (2006).

Os procedimentos para a produção dos dados da pesquisa ocorreram em três fases: Fase 1 – *A produção de sequências didáticas (versão 1 e 2) a partir da tarefa “Os palitos de fósforo”*; Fase 2 - *Comparação das versões da sequência didática*; Fase 3 - *Elaboração e realização de uma entrevista com a professora*. A Fase 1 foi realizada ainda durante o andamento do PRIPINT, durante o ano de 2022, e as Fases 2 e 3, após o encerramento do projeto, entre os meses de agosto e dezembro de 2024.

A análise dos dados foi inspirada na proposta da Análise de conteúdo proposta por Bardin (2016) compreendida pelas fases: *Pré-análise; Exploração do material e Tratamento dos resultados, inferência e interpretação*. Na primeira etapa, referente à fase de Pré-análise, procedemos com a organização do nosso *corpus* de investigação. Na segunda etapa, referente

à fase de Exploração do material, estabeleceremos nossas categorias de análise com base em nossos objetivos e em nosso referencial teórico, bem como no conteúdo das respostas dos entrevistados. Na terceira e última etapa, referente à fase de Tratamento dos resultados, inferência e interpretação, buscamos organizar os resultados obtidos para que estes se tornem significativos e válidos.

1.5 O Produto educacional

O produto educacional, como fruto da pesquisa, consiste na versão comentada da sequência didática analisada. Ele visa colaborar com o trabalho do professor apresentando uma proposta de ensino voltada para estudantes do Ensino Médio, baseada na exploração de padrões e regularidades e que tem como essência favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico desses estudantes. A apresentação da sequência didática é acompanhada de comentários sobre possíveis adaptações baseadas nas decisões didáticas de professores experientes, a professora colaboradora e o professor pesquisador.

1.6 Apresentando os capítulos da Dissertação

Além deste capítulo de Introdução, esta dissertação encontra-se dividida em seis capítulos. No segundo capítulo trazemos alguns aspectos que julgamos importantes sobre o ensino de Álgebra. Inicialmente sistematizamos as ideias de alguns teóricos acerca das concepções de Álgebra na área da Educação Matemática. Em seguida, trazemos caracterizações do que seja pensar algebricamente a partir das ideias de alguns pesquisadores também da área da Educação Matemática. Dando prosseguimento, destacamos o trabalho com padrões e regularidades como possibilidade para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ao fim desse capítulo, trazemos algumas considerações sobre o que é proposto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino da Álgebra no Brasil, e destacamos as habilidades prescritas neste documento para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do trabalho com padrões e regularidades.

No terceiro capítulo realizamos uma discussão acerca das decisões didáticas, considerando sua construção conceitual e seu campo de pesquisa. Refletimos também sobre os fatores de influência nas decisões didáticas tomadas pelos professores. Trazemos contribuições de Margolinas (2002, 2005) sobre os níveis de atividade docente e os fatores de influência nas decisões didáticas do professor abordados por Bessot (2019).

Ao longo do quarto capítulo apresentamos o contexto da nossa pesquisa e sua classificação. Situamos o referencial teórico-metodológico empregado e a partir deles, as etapas de desenvolvimento e os procedimentos de produção dos dados.

No quinto capítulo apresentamos a análise dos dados construídos ao longo da pesquisa, investigando os significados inseridos nos materiais coletados. Procedemos à sistematização da análise dos dados embasados nas técnicas da Análise de conteúdo.

No capítulo sexto, apresentamos as conclusões e as considerações finais da pesquisa realizada.

No sétimo capítulo, apresentamos o produto educacional fruto da pesquisa realizada.

2 PERSPECTIVA PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA: PADRÕES E REGULARIDADES

Trazemos neste capítulo, organizados em cinco seções, alguns aspectos relacionados ao ensino de Álgebra. Na primeira, sintetizamos as ideias de Usiskin (1995), Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Lee (2001) e Lima e Bianchini (2021) para construirmos um quadro teórico acerca das diferentes concepções de Álgebra na área da Educação Matemática. Na segunda, realizamos uma caracterização de pensamento algébrico a partir de Kieran (1992, 2004), Lins (1992), Blanton e Kaput (2005), Ponte, Branco e Matos (2009) e Radford (2006, 2008, 2009, 2010, 2011, 2018). Em seguida, na terceira seção, discutimos acerca do trabalho com padrões e regularidades como possibilidade para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Já na quarta seção, lançamos nosso olhar para o texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a fim de realizarmos um levantamento sobre como está sendo proposto o ensino da Álgebra no Brasil, bem como analisarmos as habilidades prescritas nesse documento para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do trabalho com padrões e regularidades.

2.1 Concepções de Álgebra na área de Educação Matemática

A Álgebra sempre esteve presente ao longo do desenvolvimento da humanidade, e seu surgimento, a princípio, se deu pela necessidade do homem em resolver problemas do cotidiano nos quais o uso da aritmética não era mais suficiente para encontrar a solução. Coelho e Aguiar (2018) sugerem que se olharmos para a história do desenvolvimento da Álgebra partindo de quando o objeto de estudo consistia em equações algébricas específicas até a consolidação desta como área de conhecimento, notaremos uma extensa trajetória de busca de padrões e acúmulo teórico. “Houve a necessidade da construção de uma linguagem simbólica apropriada às questões tratadas, aliada à consequente emersão de conceitos algébricos cada vez mais abstratos” (Coelho; Aguiar, 2018, p. 171).

Dessa forma, enquanto área de conhecimento, a Álgebra não é inata ao ser humano, mas resultado de um processo histórico e, portanto, necessita do meio social para ser aprendida e assimilada pelo indivíduo. Assim, levando em consideração a organização da nossa sociedade, cabe à escola, essencialmente à disciplina de Matemática, o ensino da Álgebra (Coelho; Aguiar, 2018).

Almeida (2016) sugere que ao olharmos para a história da Álgebra e analisarmos o seu processo de desenvolvimento, perceberemos que ele se deu a partir de uma linguagem cada vez

mais sucinta e simbólica, “uma linguagem matemática que, liberta das palavras, se volta para expressar o pensamento matemático” (Araújo, 2008, p. 314).

Esse processo de desenvolvimento da linguagem algébrica se deu em três estágios distintos. Inicialmente teve-se o *retórico* (o raciocínio algébrico era expresso por meio de palavras), em seguida o *sincopado* (o raciocínio algébrico era expresso por meio de abreviações) e por fim o *simbólico* (apenas a utilização de símbolos e sua manipulação). Vale salientar que essa evolução dos registros algébricos, desde o estágio retórico até o simbólico, não ocorreu da noite para o dia, foram necessários vários séculos e muito esforço da humanidade (Almeida, 2016).

Ao realizarmos um paralelo entre a evolução da Álgebra e da Álgebra escolar, observamos que

[...] a álgebra geralmente é vista como o domínio de uma certa linguagem simbólica de modo que, desde o começo, todos os esforços na sala de aula são feitos para que os alunos tornem-se competentes nesta linguagem. Historicamente, entretanto, o ‘simbolismo’ (em seu sentido moderno, aquele que encontramos nos livros didáticos atuais) só se tornou a força motriz do desenvolvimento algébrico no período da Renascença (isto é, mais de 30 séculos depois de as primeiras ideias algébricas terem visto a luz do dia!) (Radford, 2011, p. 16-17)

Ou seja, mesmo a história da Álgebra mostrando que a linguagem simbólica algébrica levou séculos para ser desenvolvida, este fato não é levado em consideração no ensino da Álgebra na Educação Básica, uma vez que é esperado que os alunos desenvolvam essa habilidade de representação simbólica em um período muito pequeno de tempo. Arelado a isso, algumas pesquisas como as de Kieran (1992) e Ponte, Branco e Matos (2008) apontam ainda uma supervalorização dessa linguagem simbólica na Álgebra escolar, dando a esta representação uma importância maior até mesmo do que a própria compreensão do que ela significa, tornando o ensino da Álgebra, frequentemente, sem sentido, descontextualizado e mecânico.

Desse modo, concordamos com Almeida (2016) ao afirmar que compreender a Álgebra escolar como uma forma especial de pensar não consiste em desconsiderar ou desmerecer a linguagem simbólica algébrica, pois temos consciência dos avanços adquiridos por esta área de conhecimento desde o momento em que a humanidade dominou essa forma de linguagem específica.

No entanto, conforme destacado por Lima e Bianchini (2021), o modo como os professores ensinam Álgebra está diretamente ligado ao entendimento deles acerca do que acreditam ser a Álgebra. Ou seja, a maneira como o docente compreende esta área de

conhecimento refletirá no modo como as noções de Álgebra serão trabalhadas por ele em sala de aula. Assim, a depender de seus entendimentos do que seja Álgebra, os professores “poderão enfatizar conhecimentos procedimentais como sendo o cerne da Álgebra, em detrimento de aspectos conceituais, do emprego de contextos significativos e de atividades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes” (Lima; Bianchini, 2021).

Texeira Júnior e Silveira (2020), ao refletirem a respeito do que seja Álgebra, sugerem que

[...] a resposta desta pergunta depende da experiência do usuário com esta palavra. Alguém que nunca viu essa palavra não terá noção alguma de qual seja a resposta, enquanto que um estudante dos anos finais do Ensino Fundamental talvez diria que Álgebra é “fazer contas com letras”; outro estudante, do Ensino Médio, talvez diria que Álgebra é “resolver equação”; um professor de Matemática acrescentaria a esta resposta outros conteúdos, como função, polinômios, corpos, anéis, etc. E assim a definição de Álgebra poderia se ampliar, segundo as visões de matemáticos, filósofos, educadores etc. (Teixeira Junior; Silveira, 2020, p. 30).

De maneira complementar, Lima e Bianchini (2021) ressaltam que a dificuldade de se ter uma única resposta acerca do que seja Álgebra está no fato dela estar vinculada fortemente a vários fatores culturais, dentre os quais destacam a forma de pensamento dominante em cada época que, a partir de uma escola filosófica específica, influencia a definição de Álgebra concebida em um determinado período. Esse fato é reforçado ainda por Moura e Souza (2005) ao destacarem que:

Pensar a Álgebra, a partir de Diofanto, significa que devemos pensar os conceitos algébricos conectados ao objeto número, enquanto unidade. Ao mesmo tempo, pensar a Álgebra a partir de Euclides significa pensá-la a partir de aspectos geométricos, como, por exemplo, a imagem e a figura. Pensar sobre a Álgebra a partir do número e dos aspectos geométricos remete-nos a pensar sobre os entes, as coisas. Pensar a Álgebra, a partir de Viète, significa pensá-la a partir da propriedade do número [...]. Permite-nos pensar em espécies e não mais em entes, em coisas. As espécies contêm o número, a geometria e as propriedades do número. A natureza do pensamento de Viète é bem diferente da natureza do pensamento de Diofanto. A lógica de Diofanto é numérica, enquanto que a lógica de Viète é de espécies; é o que permite que as diversas áreas do conhecimento façam da Álgebra uma ferramenta (Moura; Souza, 2005, p. 21-22).

Não é tarefa fácil respondermos à pergunta *o que é Álgebra?* no contexto da Educação Matemática. São vários os pesquisadores dessa área que, sob diferentes aspectos e aportes teórico-metodológicos, discutem as concepções de Álgebra, bem como seu ensino e a produção de significado para os seus conteúdos. Sendo assim, utilizaremos como base bibliográfica as ideias de Usiskin (1995), Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Lee (2001) e Lima e Bianchini

(2021) para construirmos um quadro teórico acerca das diferentes concepções de Álgebra na área da Educação Matemática.

Em sua pesquisa, Usiskin (1995) destaca a existência de quatro concepções distintas da Álgebra que se relacionam com os diferentes usos das variáveis: *Álgebra como Aritmética generalizada*; *Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*; *Álgebra como estudo de relações entre grandezas*; *Álgebra como estudo das estruturas*.

Em sua primeira concepção – *Álgebra como Aritmética generalizada* – as variáveis traduzem uma regra, sendo assim apresentadas como generalizadoras de modelos, porém não existem incógnitas nessa sua primeira concepção.

A segunda concepção – *Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas* – tem como objetivo a manipulação e simplificação de expressões algébricas para se obter a solução de um problema. Nesta concepção, ao contrário da primeira, as variáveis são encaradas como incógnitas ou constantes.

Na terceira concepção – *Álgebra como estudo de relações entre grandezas* – diferentemente das duas concepções anteriores, as variáveis não assumem o papel nem de incógnitas nem de letras na generalização de modelos numéricos, mas passam a assumir um caráter de argumento (exprime os valores do domínio de uma função) ou de parâmetro (constitui um número do qual outros dependem dele). “O autor considera as fórmulas como ponto inicial para verificar as relações existentes entre as grandezas e destaca a imediata relação dessas com as *funções*” (Ribeiro; Bezerra; Silva, 2016, p. 424).

Na quarta concepção – *Álgebra como estudo das estruturas* – as letras são encaradas como símbolos abstratos, ou seja, “a variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Essa é a visão da variável na Álgebra Abstrata” (Usiskin, 1995, p. 18). Nesta última concepção, “Usiskin destaca o estudo das estruturas (anéis, domínio de integridade, corpos e espaços vetoriais) pertencentes ao ensino superior. Mas esclarece que tais estruturas se conectam com a educação básica [...]” (Ribeiro; Bezerra; Silva, 2016, p. 424).

Destacamos que todas as concepções apresentadas por Usiskin (1995) estão relacionadas à compreensão dos significados das letras, ou seja, essas concepções encontram-se associadas ao papel que é atribuído à ideia de variável. Portanto, a Álgebra apresentava-se como um instrumento essencialmente voltado para a manipulação mecânica de símbolos sem a preocupação com a construção de significados para os objetos e processos algébricos.

Por sua vez, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), buscando caracterizar as fases do ensino da Álgebra no Brasil, apresentam três concepções que exercem influência na educação algébrica: a *linguístico-pragmática*; a *fundamentalista-estrutural*; a *fundamentalista-analógica*.

Na primeira concepção - *linguístico-pragmática* – prevalece a ideia de que a aquisição mecânica das técnicas requeridas pelo transformismo algébrico seria necessária e suficiente para o aluno adquirir a capacidade de resolver problemas. Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 3), “o papel do ensino da álgebra era fornecer um instrumental técnico (superior ao da aritmética) para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis”.

Na segunda concepção – *fundamentalista-estrutural* – o ensino de Álgebra assume “os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem” (Araújo, 2008, p. 333), prevalecendo a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações para justificar logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico possibilita ao estudante identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos em que estivessem implícitas.

Almeida (2016) aponta que essa segunda concepção, assim como a primeira, também está concentrada num ensino mecânico e automatizado. Porém, a mudança principal está no fato da segunda concepção abandonar o caráter pragmático, até então presente no ensino de Álgebra, focando agora na resolução de equações e na simplificação de expressões algébricas.

A terceira e última concepção - *fundamentalista-analógica* – busca realizar uma síntese das duas primeiras na medida em que tenta recuperar o caráter instrumental da Álgebra, porém mantendo seu caráter fundamentalista. Nesta concepção, diferentemente das anteriores, a justificação das passagens presentes no transformismo algébrico não ocorre mais de forma lógico-estrutural, mas passam a ser visuais a partir de recursos analógicos geométricos, como blocos de madeira e figuras geométricas, ou recursos físicos, como a balança. Esta concepção defendia a ideia de que a utilização de materiais concretos que tornassem visíveis determinadas identidades algébricas, seria “didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica” (Fiorentini; Fernandes; Cristóvão, 2005, p. 4), sem, no entanto, abandonar a abordagem simbólico-formal das concepções anteriores.

De acordo com Almeida (2016), essas três concepções apresentadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) correspondem a períodos históricos bem definidos. A primeira concepção corresponde ao período antes do Movimento da Matemática Moderna (MMM), no qual o ensino de Matemática era estruturado em campos de conhecimento isolados (o ensino de Álgebra sucedia o da Aritmética e antecedia o de Geometria). A segunda concepção se

intensifica durante o MMM, período em que o ensino de Álgebra perde o seu papel pragmático, voltando-se excessivamente para a valorização da linguagem simbólica e de cálculos algébricos, e assume um lugar de destaque na escola como “fundamentador dos vários campos da matemática escolar” (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p. 84). Somente após o declínio do MMM é que surge a terceira concepção de educação algébrica no Brasil.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) ressaltam que embora essas três concepções do ensino da Álgebra tenham ocorrido em fases bem específicas, em todas priorizava-se a linguagem simbólica algébrica em detrimento da construção de sentidos para os objetos e procedimentos algébricos. Ou seja, não existia nenhuma preocupação com o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois ambas reduziam o ensino da Álgebra à manipulação mecânica de símbolos sem sentido com foco no transformismo algébrico e em conteúdos descontextualizados que não possibilitam ao aluno compreender o que estava fazendo e nem como utilizar o que estava sendo estudado em outras situações.

Outro estudo sobre concepções de Álgebra considerado foi o da pesquisadora canadense Leslie Lee. A partir de suas considerações, Lee (2001) estabelece um modelo sobre seis diferentes visões de Álgebra, apresentando-a como: *Linguagem*; *Caminhos de Pensamento*; *Atividade*; *Ferramenta*; *Aritmética Generalizada*; *Cultura*

A Álgebra como *Linguagem*, por meio de símbolos e regras próprias, busca desenvolver a comunicação em uma linguagem algébrica. “A autora afirma que a linguagem algébrica não se aproxima da linguagem que permeia o mundo de uma criança e é uma linguagem diferenciada, por assumir um papel mais sintático (regras) do que semântico (significados)” (Ribeiro; Bezerra; Silva, 2016, p. 425).

Por sua vez, a Álgebra como *Caminhos de Pensamento* é percebida por meio de pensamentos sobre relações matemáticas em vez de objetos matemáticos. Para tanto, a autora considera duas categorias de pensamento, os do tipo interno que “está relacionado com as operações, as ações, as transformações e as relações” (Ribeiro; Bezerra; Silva, 2016, p. 425); e os do tipo externo, cujo “pensamento, neste caso, está voltado a pensar sobre algum sistema matemático ou do mundo real, o qual procura traduzir padrões e modelos (gráficos, formas)” (Ribeiro; Bezerra; Silva, 2016, p. 425).

A Álgebra como *Atividade* é entendida por meio de dois aspectos, sendo o primeiro como modelo de construção de atividades e o segundo a partir da perspectiva da manipulação algébrica.

Já a Álgebra como *Ferramenta* é concebida como um artifício para resolver problemas de modo a transmitir e modificar mensagens, seja a disposição de outras ciências e da vida real, ou a serviço da própria Matemática.

A Álgebra enquanto *Aritmética Generalizada*, ou como estudo das estruturas da aritmética, é compreendida com base em generalizações de padrões numéricos, buscando conectar os estudos com letras simbólicas sem, no entanto, atentar para o significado desses símbolos.

Por fim, a Álgebra como *Cultura*, apoiada em uma visão mais antropológica, destaca-se como uma comunidade e, por conseguinte, como uma cultura que envolve práticas, tradições, valores e crenças. Nesta concepção, as atividades algébricas demandam ferramentas algébricas para favorecer o desenvolvimento tanto do pensamento algébrico quanto da linguagem de comunicação algébrica.

No trabalho desenvolvido por Lee (2001) destacamos uma preocupação sobre que tipo de Álgebra deve ser ensinada, como e quando deve ser inserida no espaço escolar, cujo foco deixa de ser a manipulação mecânica de símbolos e passa a ser o desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem, dando ênfase à construção de sentido para os objetos estudados.

O último trabalho considerado nesta seção sobre concepções de Álgebra foi o dos autores Lima e Bianchini (2021), que ao realizarem uma pesquisa bibliográfica, levantam discussões com o intuito de apresentar o que se entende por Álgebra e defendem a ideia de uma concepção de Álgebra como algo que deve pertencer à *cultura matemática*¹ de qualquer cidadão.

Para argumentar em favor dessa ideia de Álgebra como constituinte da *cultura matemática* de todo cidadão, Lima e Bianchini (2021) apoiaram-se nas considerações da pesquisadora canadense Leslie Lee ao tratar a Álgebra como: *artefato cultural; atividade humana; ferramenta*.

Na concepção de Álgebra como um *artefato cultural*, proposta por Lee (2001), trazidas por Lima e Bianchini (2021), a Álgebra é apresentada como algo herdado culturalmente e que está fixado nos sistemas educacionais de diferentes países de acordo com as culturas específicas de cada localidade. Desse modo, sendo concebida como artefato cultural, particularmente em

¹ Consiste em “um conjunto de conhecimentos, habilidades e capacidades matemáticas que possibilitam a um indivíduo, aplicar e contextualizar os conhecimentos matemáticos, pensar matematicamente e utilizar a linguagem matemática para comunicar-se em diferentes contextos” (Lima; Bianchini, 2021, p. 14).

contextos escolares, é natural que os currículos dos diferentes países compreendam a Álgebra de forma conectada às suas culturas escolares.

No entanto, Kaput (2008) destaca que, para Lee (2001), se a Álgebra for compreendida apenas como um conjunto herdado de conhecimentos, poderá ser tratada sem que nos preocupemos com a relação que ela estabelece com os indivíduos que a estudam ou a utilizam. Neste sentido, Lee (2001) considera ser pertinente fundir essa concepção de Álgebra como *artefato cultural* à concepção de Álgebra como *atividade humana*.

Com base nas ideias de Lee (2001), Kaput (2008) ressalta que a concepção de Álgebra como *atividade humana* se relaciona fortemente com a ideia de raciocínio e aqueles que a compreendem a partir desta perspectiva “estão inclinados a considerar as maneiras dos alunos de fazer, pensar e falar sobre matemática como fundamentais. Para eles, a Álgebra emerge da atividade humana; depende dos seres humanos para sua existência, não apenas historicamente, mas também no presente” (Kaput, 2008, p. 7-8).

Portanto, como destacado por Kaput (2008), a Álgebra, considerando sua grandiosidade, “não é um corpo estático de conhecimento. Ela evolui como um artefato cultural em termos dos sistemas de símbolos que incorpora (mais recentemente devido às tecnologias eletrônicas) e evolui como uma atividade humana conforme os alunos aprendem e se desenvolvem” (Kaput, 2008, p. 7-8).

Lima e Bianchini (2021) ao abordarem a concepção de Álgebra como *ferramenta*, baseados na ideia de Lee (1997), ressaltam que ela não se restringe de maneira alguma à Matemática, mas permite a resolução de problemas de diferentes áreas, o que é ratificado por Kaput (2008, p. 11) ao considerar, neste aspecto, “a Álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação dentro e fora da matemática”.

Portanto, a partir das pesquisas bibliográficas realizadas, Lima e Bianchini (2021), mais do que discutir o que se entende por Álgebra, argumentam em favor de uma concepção de Álgebra como um componente importante da cultura matemática de qualquer cidadão e do pensamento algébrico como elemento do pensamento matemático a ser desenvolvido também por qualquer cidadão.

Para Lima e Bianchini (2021), é na cultura matemática de um indivíduo que está a essência de conhecimentos que lhe possibilita “aplicar a Matemática em situações fora do trabalho escolar e reconhecê-la como parte de sua vida” (Abreu León et al., 2014 *apud* Lima; Bianchini, 2021, p. 24). Argumentam ainda que a atribuição de significado para a Álgebra “é mais facilmente desenvolvida no interior da cultura da matemática e, no processo de

generalização, a linguagem simbólica da Álgebra está presente como uma ferramenta eficiente para expressar a generalidade” (Reinhardtsen, 2012 *apud* Lima; Bianchini, 2021, p. 24)

Assim, a partir da visão desses autores, um dos componentes da cultura matemática é a *cultura algébrica*, compreendida por eles como:

[...] um conjunto de conhecimentos inerentes ao campo da Álgebra, de habilidades e capacidades que podem ser desenvolvidas a partir do trabalho, desde os anos iniciais, com as ideias fundamentais da Álgebra, as quais possibilitam a um indivíduo aplicar e contextualizar conhecimentos algébricos, pensar algebricamente e utilizar a linguagem algébrica para comunicar-se e resolver problemas em contextos matemáticos e extra matemáticos (Lima; Bianchini, 2021, p. 25, grifo dos autores).

Desse modo, “ao apresentar a Álgebra como cultura, uma interação entre linguagem e conhecimento pode ser alcançada, em um processo gradual de aculturação algébrica que ocorrerá em sala de aula” (Arriaga García, 2008 *apud* Lima; Bianchini, 2021, p. 24). Daí a importância de estarmos atentos à forma como apresentamos as primeiras ideias da Álgebra aos alunos, pois os significados a serem construídos por eles dependerão “em grande parte do ambiente algébrico para o qual os direcionamos, dos aspectos da cultura algébrica para os quais chamamos a atenção, assim como de suas primeiras experiências nela (na álgebra)” (Lee, 1996 *apud* Machado; Almeida, 2008, p. 51).

Diante das diferentes concepções de Álgebra na área da Educação Matemática aqui apresentadas, defendemos em nossa pesquisa um ensino de Álgebra cuja ênfase maior esteja no desenvolvimento do pensamento algébrico, no entanto sem menosprezar sua linguagem, uma vez que “não se trata de contrapor o pensamento à linguagem; não se pode pretender considerá-los desvinculadamente, ou entificá-los, tratando-os um por vez, uma vez que é só na relação entre ambos que se pode aprendê-los (Machado, 1991 *apud* Coelho; Aguiar, 2018, p. 175).

Entendemos que o desenvolvimento do pensamento deve estar associado com a forma de escrever esse pensamento, sem que haja uma relação de subordinação entre ambos. Acreditamos que, “com o desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno sentirá a necessidade de representá-lo em uma linguagem cada vez mais simbólica, chegando, ao final, ao domínio dessa linguagem, porém, com significado” (Almeida, 2016, p. 56).

Assim como Fiorentini, Miorim e Miguel (1993),

[...] acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-los, a colocar a questão de quais seriam os elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado de algébrico (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993, p.85).

Diante disso, resta-nos compreender o que seria esse pensamento algébrico e como podemos potencializar o seu desenvolvimento pelos alunos através do ensino. Para tanto, temos, na próxima seção, o objetivo de caracterizar esse tipo especial de pensamento a partir das ideias de alguns pesquisadores da área da Educação Matemática que se propuseram a estudar sobre esse tema.

2.2 O pensamento algébrico nas pesquisas em Educação Matemática

O pensamento algébrico é um tema que vem sendo investigado por diversos pesquisadores da área da Educação Matemática. No entanto, ainda não existe um consenso entre os pesquisadores sobre o que caracteriza de fato tal pensamento. Radford (2006) destaca que o motivo de ainda não existir uma caracterização definitiva para pensamento algébrico se deve, provavelmente, ao “extenso escopo de objetos (por exemplo, equações, funções, padrões, ...) e processos algébricos (inversão, simplificação, ...) bem como os vários modos possíveis de conceber o pensamento em geral” (Radford, 2006, p. 2).

Desse modo, considerando que não existe uma definição precisa para pensamento algébrico, apresentaremos nos próximos parágrafos algumas caracterizações do que seja pensar algebricamente a partir da colaboração de alguns pesquisadores da área da Educação Matemática.

Na tentativa de caracterizar o pensamento algébrico, Kieran (1992) buscou fazer uma diferenciação entre esse e o pensamento aritmético. Assim, enquanto o pensamento aritmético está diretamente relacionado ao cálculo e à realização de operações em busca de um resultado, o pensamento algébrico, por sua vez, está relacionado com as estruturas e ao “uso de uma variedade de representações que permitem lidar com situações quantitativas de uma forma relacional” (Kieran, 1992, p. 4). Para essa autora, pensar algebricamente

[...] envolve o desenvolvimento de modos de pensar através de atividades para as quais o simbolismo da Álgebra pode ser usado como ferramenta, mas que não são exclusivas da Álgebra e que podem ser abordadas sem qualquer uso de simbolismo algébrico, tais como, analisar relações entre quantidades, detectar a estrutura, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever (Kieran, 2004, p. 149).

Lins (1992), ao discutir em sua pesquisa a construção de significado em Álgebra, destaca que um objeto matemático se torna conhecimento quando enunciado por um indivíduo, isto é, o conhecimento não está no objeto, mas no significado dado por esse indivíduo ao objeto.

Assim, para esse autor, pensar algebricamente é uma maneira de produzir significado para a Álgebra, uma vez que o aluno está pensando algebricamente quando ele consegue produzir significado para os objetos e símbolos algébricos.

Assim, como destacado por Campos (2019) ao refletir sobre as ideias de Lins (1992), o processo de construção do pensamento algébrico pelo aluno consiste em atribuir significado às ações executadas em cada passo. Em contrapartida, a resolução de problemas por meios aritméticos também não desconsidera a possibilidade da utilização do pensamento algébrico pelo aluno pois, como ressaltado por Almeida (2016, p. 62), “não é a linguagem utilizada para revelar o pensamento que determina a forma que o sujeito está pensando”. É justamente a partir dessa complexidade do que seja pensar algebricamente que Lins (1992) estabeleceu três aspectos dessa forma de pensar: *aritimeticismo*; *internalismo*; *analiticidade*.

O *aritimeticismo* consiste no trabalho com números e operações aritméticas, sendo estes vistos como ferramentas na resolução ou modelação de determinadas situações. Por sua vez, o *internalismo* considera os números e as operações apenas no que se refere às suas propriedades, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade, ou seja, deixam de servir como ferramentas para resolver ou modelar situações problemas e passam a ser enxergados como objetos de estudo. E, por fim, a *analiticidade* implica no trabalho com números desconhecidos como se fossem conhecidos.

De acordo com Lins (1992), o aluno pensa algebricamente ao mobilizar simultaneamente elementos desses três aspectos. Ou seja, pensar algebricamente “é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com [*aritimeticismo*], [*internalismo*] e [*analiticidade*]” (Lins; Gimenez, 1997, p. 151).

Outra característica do pensamento algébrico apresentada por Lins (1992) é que o desenvolvimento desse pensamento não ocorre de maneira espontânea, precisa de um ato intencional para acontecer. Desse modo, no processo de ensino, o professor deve estar ciente que para possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos é necessário haver “[...] uma mudança de perspectiva, um ‘parafuso solto’, uma intenção específica, e isso só pode ser alcançado comparando conscientemente diferentes maneiras de modelar a mesma situação e discutindo abertamente as características, capacidades e dificuldades de cada método usado” (Lins, 1992, p. 12).

Da mesma forma que Lins (1992), os pesquisadores Blanton e Kaput (2005) consideram que para que o aluno desenvolva o pensamento algébrico, a aprendizagem da Álgebra deve estar voltada para a construção de significado. Esses autores caracterizam o pensamento

algébrico como “um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade” (Blanton; Kaput, 2005, p. 413).

Nesse sentido, Blanton e Kaput (2005) consideram quatro vertentes do pensamento algébrico:

- a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
- b) a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional);
- c) a modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações;
- d) a generalização sobre sistemas matemáticos a partir de cálculos e relações. (Blanton; Kaput, 2005, p. 413).

Para estes autores, a *aritmética generalizada* concentra-se na generalização das operações aritméticas e suas propriedades e na reflexão acerca das relações que podem ser estabelecidas entre os números. Podemos destacar como exemplo dessa vertente as generalizações sobre a comutatividade da adição e da multiplicação e, também, a exploração do papel da igualdade como uma relação entre quantidades.

Corroborando com essa ideia de Blanton e Kaput (2005), Canavarro (2007) destaca que

[...] é a partir da estrutura da aritmética que se podem construir os aspectos sintáticos da álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido por meio do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que $33 + 8 = 8 + 33$ não porque ambos representam 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente) (Canavarro, 2007, p. 89).

O *pensamento funcional*, por sua vez, está ligado à exploração de padrões de modo a identificar mudanças e a reconhecer relações entre quantidades. Ou seja, essa vertente do pensamento algébrico envolve a análise de regularidades, no sentido de “comparar diferentes expressões relativas à mesma regularidade ou para determinar valores particulares de uma função motivada, por exemplo, pela necessidade de previsão” (Canavarro, 2007, p. 90).

Blanton e Kaput (2011, p. 12) destacam que o desenvolvimento do pensamento funcional desde os anos iniciais da educação escolar possibilita a “transição da linguagem natural para sistemas de notação simbólicas”, favorecendo a compreensão de conceitos algébricos de forma progressiva, conforme o avanço dos anos escolares.

Desse modo, sendo o pensamento funcional uma forma de generalização, Blanton et al. (2011) sugerem o trabalho, em sala de aula, com sequências crescentes e de repetição como uma excelente oportunidade para os alunos explorarem relações.

Já a terceira vertente apresentada pelos pesquisadores, a *modelação*, envolve as generalizações construídas a partir da exploração de diversas situações (matematizadas ou de fenômenos). Como exemplo, Cyrino e Oliveira (2011, p. 103) propõem “a generalização de regularidades em situações do dia-a-dia onde a regularidade é secundária relativamente ao objetivo mais geral da tarefa”.

Por fim, a última vertente definida como a *generalização sobre sistemas matemáticos* abstratos de cálculos e relações, consiste em uma forma de pensamento algébrico atípico nos currículos do ensino básico, focando na generalização por meio de objetos abstratos e operações sobre classes de objetos.

Os pesquisadores Ponte, Branco e Matos (2009) ao discutirem sobre o ensino da Álgebra no Ensino Básico destacam o desenvolvimento do pensamento algébrico como seu principal objetivo. Para eles, este pensamento não se limita à capacidade de manipulação de símbolos, mas compreende, “igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 10).

Esses autores destacam como um elemento indispensável ao pensamento algébrico a ideia de generalização, que para eles consiste em “descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 10). Essa importância dada à generalização está ligada ao fato de que por meio dela, “dá-se atenção não só aos objetos mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 10).

Nessa perspectiva, Ponte, Branco e Matos (2009) caracterizam o pensamento algébrico a partir de três vertentes: *representar*, *raciocinar* e *resolver problemas*.

A primeira vertente – representar – diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica. Na segunda vertente – raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente – assumem especial importância o relacionar (em particular, analisando propriedades de certos objetos matemáticos) e o generalizar (estabelecendo relações válidas para certa classe de objetos). [...] Finalmente, na terceira vertente – resolver problemas, que inclui modelar situações – trata-se de usar representações diversas de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 10-11).

Outro pesquisador que traz em suas ideias uma caracterização do que seja pensar algebricamente é Luiz Radford. Para ele, o pensamento algébrico consiste em “uma forma particular de refletir matematicamente” (Radford, 2006, p. 2).

Assim como Lins (1992), Radford (2011b) também considera que o desenvolvimento do pensamento algébrico não se dá de maneira espontânea, ou seja,

o pensamento algébrico é de nenhuma maneira “natural”, algo que aparecerá e se desenvolverá uma vez que os estudantes tenham amadurecido o bastante. O pensamento algébrico é um tipo de reflexão e ação cultural muito sofisticado, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual (Radford, 2011b, p. 319).

De acordo com Radford (2010b), o pensamento algébrico é caracterizado por três elementos que estão interrelacionados: (i) o *senso de indeterminação*, que é o oposto da determinação numérica, envolve números desconhecidos e é designado para os objetos algébricos, como incógnitas, variáveis e parâmetros; (ii) a *analiticidade*, consiste em trabalhar com objetos indeterminados, ou seja, objetos desconhecidos são manipulados de forma analítica; (iii) a *designação simbólica* ou *expressão semiótica* de seus objetos, refere-se à forma específica simbólica de designar objetos.

Radford (2011b, p. 318) ao realizar, também, uma diferenciação entre pensamento algébrico e pensamento aritmético, destaca que “o que distingue o pensamento aritmético do algébrico é o fato de este último tratar de quantidades indeterminadas de forma analítica”. Em outras palavras, quantidades desconhecidas (incógnitas ou variáveis) são consideradas como se fossem conhecidas e com elas são realizados cálculos assim como é feito na aritmética, com números já conhecidos. Assim, Radford (2018) destaca que a analiticidade é o principal elemento que distingue essas duas formas de pensar (algebricamente e aritmeticamente), uma vez que a indeterminação e a designação simbólica também podem se fazer presentes no pensamento aritmético.

Desse modo, considerando essas características do pensamento algébrico, Radford (2009, 2010a, 2018) reconhece três formas ou estratos desse modo particular de pensar: *pensamento algébrico factual* (ou *concreto*); *pensamento algébrico contextual*; *pensamento algébrico simbólico* (ou *padrão*).

No *pensamento algébrico factual* a indeterminação encontra-se implícita, uma vez que não alcança o nível de enunciação, pois se expressa em ações concretas, por exemplo, por meio do trabalho sobre números. Nesta forma de pensamento, em particular, os meios semióticos

mobilizados são os gestos, os movimentos, o ritmo, a atividade perceptiva e as palavras (Vergel, 2021).

Devido ao fato de os alunos não utilizarem nenhum simbolismo alfanumérico para mobilizar o pensamento algébrico factual, mas recorrerem a outros meios semióticos para tornar evidente suas ideias, esse pensamento foi chamado inicialmente por Radford (2003) de forma elementar e pré-simbólica do pensamento algébrico.

Como apontado por Silva e Almeida (2021, p. 154), ao mobilizar o pensamento algébrico factual para resolver um problema de generalização de padrões com sequência figural, “o estudante conseguirá encontrar os termos faltantes da sequência a partir de figuras dadas e deduzir uma fórmula algébrica, mas a denotação da indeterminação ficará a cargo de números específicos e ações concretas”, o que caracteriza o trabalho com a indeterminação de maneira implícita.

Na fórmula construída por um estudante nesse estrato do pensamento algébrico não há letras, ela está fortemente ligada a números particulares. De acordo com Radford (2009, p. 40), a fórmula algébrica consiste, portanto, “em um pedaço de ação incorporada”, daí o termo “fórmula-em-ação” de Vergnaud, que Radford (2009) diz ter pegado emprestado. Nesse sentido, Radford (2009, p. 40) destaca que “uma ‘fórmula’ dessa forma concreta do pensamento algébrico pode ser melhor entendida como um predicado concretizado por uma variável implícita: a indeterminação não chega ao nível do discurso”.

Apesar da natureza aparentemente concreta do pensamento algébrico factual, Radford (2009, p. 40) afirma que este “[...] não é uma forma simples de reflexão matemática. Pelo contrário, repousa em mecanismos altamente evoluídos de percepção e uma sofisticada coordenação rítmica de gestos, palavras e símbolos”.

No *pensamento algébrico contextual* ocorre uma mudança tanto na forma de tratamento da indeterminação, quanto nos meios semióticos utilizados pelos alunos para expressar o pensamento. Aqui, de acordo com Radford (2009), a indeterminação se torna agora parte do discurso explícito, e os alunos extrapolam o trabalho com figuras específicas e passam a lidar com um novo objeto, a figura geral. Os meios semióticos utilizados pelos alunos deixam de ser ritmo e gestos, característicos do pensamento algébrico factual, e são substituídos por termos descritivos, sendo estes “o que os linguistas chamam dêiticos espaciais, ou seja, palavras com as quais descrevemos, de forma contextual, objetos no espaço” (Radford, 2009, p. 41).

Ainda sobre esse estrato do pensamento algébrico, Radford (2009, p. 41) acrescenta que,

[...] embora diferente do pensamento algébrico factual, tanto em termos da forma como a indeterminação é tratada quanto dos meios semióticos que os alunos pensam, a nova forma de pensamento algébrico ainda é contextual e “perspectiva”, na medida em que é baseada em uma maneira particular de considerar algo. A fórmula algébrica é de fato uma descrição do termo geral, como deveria ser desenhado ou imaginado. É por isso que denominamos essa forma de pensamento algébrico contextual (Radford, 2009, p. 41).

Portanto, temos que a fórmula deduzida no pensamento algébrico contextual corresponde efetivamente a uma descrição do termo geral, na qual a denotação da indeterminação será explicitamente mencionada através de um conjunto de palavras (dêiticos linguísticos, advérbios etc.). Ou seja, “as fórmulas são expressas em uma percepção e maneira ‘perspectiva’ baseada em termos-chave [...]” (Radford, 2009, p. 44).

Por sua vez, o *pensamento algébrico simbólico* apresenta como principal característica a presença de uma linguagem algébrica simbólica, ou seja, os alunos passam a utilizar fórmulas alfanuméricas para expressar o pensamento. Os mecanismos presentes nesta forma de pensamento algébrico são altamente sofisticados e conseqüentemente mais difíceis de serem mobilizados pelos estudantes. Enquanto nas formas de pensamento algébrico factual e contextual os alunos poderiam utilizar diversos meios semióticos, tais como ritmo, gestos, movimentos, dêiticos linguísticos, advérbios etc., no pensamento algébrico simbólico ocorre uma drástica mudança na linguagem usada por eles para tornar evidente suas ideias (Radford, 2009).

No entanto, como evidenciado por Radford (2009), não são todas as fórmulas que se utilizam do simbolismo alfanumérico que podem ser consideradas algébricas e conseqüentemente revelarem que o aluno esteja pensando algebricamente. Aquelas fórmulas obtidas por tentativa e erro, por exemplo, não podem ser consideradas como algébricas, uma vez que não são obtidas com base em “uma maneira analítica de pensar sobre quantidades indeterminadas - a principal característica do pensamento algébrico” (Radford, 2009, p. 42). O autor reforça que este procedimento, na verdade, é um tipo de indução aritmética ingênua que nem sequer se aproxima da sofisticação de métodos aritméticos pré-algébricos, como o da “falsa posição”.

Radford (2009) ao discutir ainda sobre as fórmulas apresentadas por alguns alunos, ressalta que embora estas sejam denotadas utilizando o simbolismo alfanumérico, em vez de serem um dispositivo de cálculo abstrato, correspondem mais a uma descrição espacial da figura e das ações a serem realizadas, uma narrativa vivida, baseadas exclusivamente no espaço e em considerações contextuais. Estas fórmulas são denominadas por este autor de *fórmulas icônicas*, visto que elas não são “um artefato de cálculo simbólico abstrato, mas sim uma história que

narra, de maneira altamente condensada, a experiência matemática dos alunos” (Radford, 2009, p. 44).

Como destacado por Radford (2009), o trabalho para o desenvolvimento do pensamento algébrico não se limita às atividades mediadas pelo sistema semiótico alfanumérico padrão de álgebra, uma vez que na perspectiva da semiótica são várias as maneiras de raciocinar analiticamente através e sobre quantidades indeterminadas. Portanto, apesar de apontar o domínio da linguagem simbólica algébrica como o ápice do desenvolvimento do pensamento algébrico, Radford (2009) enfatiza a importância do percurso trilhado pelo estudante no desenvolvimento dessa forma de pensar e consequente construção de significado para os objetos e para a linguagem algébrica. Percurso esse que se inicia no pensamento algébrico factual, segue pelo contextual e finda no pensamento algébrico simbólico.

As fronteiras dessas três categorias do pensamento algébrico apresentadas por Radford (2009, 2010a, 2018) não são necessariamente bem definidas, ao mesmo tempo que também não se excluem, podendo um estudante combinar formas distintas delas, como por exemplo o aluno pode ao mesmo tempo combinar formas factuais e simbólicas de pensamento. Para esse autor, essa classificação “é antes uma tentativa de entender os processos que os alunos passam em seu contato com as formas de ação, reflexão e raciocínio transmitidas pela práxis historicamente construída da álgebra escolar” (Radford, 2009, p. 44).

Diante das compreensões dos pesquisadores que aqui trouxemos para discutir e caracterizar o pensamento algébrico, percebemos a complexidade para delimitar a caracterização dessa forma de pensar. Essa dificuldade pode estar ligada ao fato de a Álgebra ser um vasto campo de estudo que lida com diversos objetos matemáticos. No entanto, concluímos que o pensamento algébrico está diretamente associado à produção de significados para os objetos algébricos, ou seja, o aluno está pensando algebricamente quando consegue construir significados para os objetos da álgebra, como equações, inequações, sistemas, funções etc., bem como para sua linguagem.

A partir do final dos anos 1990, professores e pesquisadores iniciaram um movimento internacional no intuito de propor mudanças no ensino da Álgebra escolar realizando discussões acerca da possibilidade, da viabilidade e das formas de abordagem de aspectos algébricos desde o início da escolarização. Nesse sentido, Gualandi (2019) sugere que a proposição de situações envolvendo as ideias de regularidade e generalização de padrões, por meio de tarefas exploratórias, é uma maneira de garantir que o trabalho com a Álgebra esteja presente em todos os anos da Educação Básica. Assim, na próxima seção apresentamos uma discussão acerca do

trabalho com padrões e regularidades e sua importância como uma das formas de introdução da Álgebra nas escolas e consequente desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.3 Padrões e generalizações no desenvolvimento do pensamento algébrico

Conforme destacado por Vale e Barbosa (2019), são várias as discussões promovidas pela comunidade de educadores matemáticos sobre quais abordagens de ensino possuem maior potencial na promoção da aprendizagem de conceitos algébricos. Nesse sentido, Lima e Bianchini (2017) destacam que recentemente existe uma tendência em considerar o desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início da escolarização por meio do trabalho com padrões e regularidades. O NCTM (2000) reitera essa ideia ao afirmar que os padrões constituem a base do pensamento algébrico e o trabalho com padrões possibilita aos estudantes identificarem relações e fazerem generalizações.

Assim, devido às suas potencialidades, o trabalho com padrões vem ganhando destaque nos currículos de diversos países, uma vez que mais do que um tema a ser explorado, compreende um contexto propício para que os alunos pensem matematicamente (Vale; Pimentel, 2010).

Fundamentando-se nos estudos de Blanton e Kaput (2005), Favero e Manrique (2021) reforçam essa ideia da utilização de tarefas com padrões e regularidades uma vez que estas permitem aos alunos preverem resultados desconhecidos a partir de dados conhecidos, como também identificar e descrever padrões numéricos e geométricos. Para tanto, se faz necessário que o professor que ensina matemática conheça, entenda e oportunize situações de ensino que envolvam padrões e regularidades em todas as etapas da Educação Básica.

De modo geral, o trabalho com padrões e regularidades pode perpassar por todos os níveis de ensino, uma vez que como apontado por Vale e Pimentel (2015, p. 168):

A profundidade e variedade das conexões que os padrões possibilitam com todos os tópicos da matemática conduz à consideração deste tema como transversal em toda a matemática escolar, quer para preparar os alunos para aprendizagens posteriores, quer no desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas e comunicação.

Assim, o trabalho com padrões além de permitir o estabelecimento de conexões entre vários temas e diferentes formas de representação, oportuniza situações interessantes para explorar a Matemática em diversos contextos, de dentro e de fora do ambiente escolar (Vale; Pimentel, 2010). Seguindo esse raciocínio, Vale *et al.* (2007) acrescenta que

os padrões permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque apelam fortemente a que desenvolvam o seu sentido estético e a criatividade, estabeleçam várias conexões entre os diferentes temas, promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas, desenvolvam a capacidade de classificar e ordenar informações e compreendam a ligação entre a Matemática e o mundo em que vivem (Vale *et al.* 2011, p. 10).

Portanto, a inserção de atividades que envolvem padrões e regularidades na Matemática escolar é uma oportunidade para que os alunos estabeleçam conexões entre várias temáticas, desenvolvam sua capacidade de observação, interpretação, generalização e síntese e, conseqüentemente, aprimorem sua capacidade de se comunicar matematicamente e de resolver problemas.

De acordo com Van de Walle (2009, p. 296), “os padrões são encontrados em todas as áreas da matemática. Aprender a procurar por padrões e como descrever, traduzir e ampliá-los, é parte do fazer matemática e do pensar algebricamente”. De maneira complementar, Vale e Pimentel (2010), com base nas ideias de Orton (1999), acrescentam ainda que o trabalho com padrões pode ocorrer “em situações matemáticas e não matemáticas e a procura de padrões numa dada situação mobiliza frequentemente vários conceitos e capacidades matemáticas, nomeadamente os números, a forma, a álgebra e a prova” (Vale; Pimentel, 2010, p. 34).

Na mesma linha de Vale *et al.* (2007), Pimentel e Vale (2012) argumentam que embora saibamos do que estamos falando quando mencionamos o termo “padrão”, ele é frequentemente enunciado sem definição pelos seus utilizadores. Esse fato, possivelmente, ocorre em razão desse termo possuir uma multiplicidade de sentidos, mesmo quando nos limitamos ao campo da Matemática. Essa multiplicidade de sentidos é considerada por Vale *et al.* (2007, p. 14) como “um sinal da riqueza do conceito, que não deve ser esvaziado através de definições restritivas, mas deve antes ser explorado na sua multiplicidade”.

Nesse sentido, Pimentel e Vale (2012) discorrem sobre a definição de padrão proposto por alguns pesquisadores, a saber:

Mason (2011) refere que os padrões são aquilo que experienciamos quando reconhecemos uma relação entre dois ou mais objetos que temos pela frente. Para Sawyer (1955), «Padrão é qualquer tipo de regularidade que possa ser reconhecida pela mente» (p. 12). Na mesma linha, para Frobisher, Monaghan, Orton, Orton, Roper e Threlfall (1999) usa-se o termo padrão em matemática quando se procura ordem ou estrutura, e por isso regularidade, repetição e simetria estão muitas vezes presentes. Se quisermos especificar melhor, teremos de distinguir os contextos numéricos dos geométricos. Num contexto geométrico, o termo padrão tem um significado matemático preciso (Veloso, 1998), referindo-se a disposições formadas por cópias de um motivo que se repete por translações em determinadas condições. Em contextos geométricos, e numa abordagem elementar, o termo padrão pode estar associado a propriedades das

transformações geométricas (rotações, translações, reflexões, homotetias) mas pode recorrer apenas a figuras para explorar conceitos geométricos que podem ser traduzidos em números (e.g. área, perímetro), ou simplesmente para as utilizar como suporte de contagens (Pimentel; Vale, 2012, p. 30).

No entanto, sem querer restringir-se a um contexto particular, e buscando uma definição mais abrangente para o termo “padrão”, Vale *et al* (2007, p. 1) consideram que esse termo “é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades”.

O termo “padrão” pode aparecer com frequência associado aos termos regularidade e sequência. Em vista dessa proximidade de conceitos, assim como Pimentel e Vale (2012), consideramos importante especificar e delimitar o seu conteúdo e significado a fim de que possamos saber com mais exatidão o que estamos nos referindo quando usamos algum desses termos.

Ao discutirem sobre a proximidade existente entre os termos padrão e sequência, Pimentel e Vale (2012) afirmam que, num contexto matemático, uma sequência consiste em uma lista ordenada de objetos, números, etc. Nesse sentido, para distinguir esses dois termos, as autoras destacam o fato de que nem toda sequência possui um padrão, como é o caso das casas decimais do número π .

Já com relação aos termos padrão e regularidade, Pimentel e Vale (2012) consideram que ambos possuem o mesmo significado. Para tanto, apresentam para esses termos a seguinte definição: “*Padrão ou regularidade é uma relação discernível, apreendida de modo pessoal, num arranjo de qualquer natureza, através de um processo mental que pode ser partilhado, e que corresponde a uma estrutura traduzível por uma lei matemática*” (Pimentel; Vale, 2012, p. 33, grifo das autoras).

Assim, para essas autoras, o processo de apreensão de um padrão decorre sempre de uma interpretação pessoal e, portanto, apresenta um caráter subjetivo. Dependendo do contexto em que determinado arranjo é apresentado, esse mesmo arranjo pode originar interpretações diferentes e, conseqüentemente, padrões ou regularidades diferentes (Pimentel; Vale, 2012). Como exemplo, as autoras apresentam uma sequência de figuras com um padrão de repetição (Figura 1) que pode ser explorada tanto de um ponto de vista numérico, quanto de um ponto de vista puramente geométrico.

Figura 1 - Sequência figural com um padrão de repetição



Fonte: Pimentel; Vale (2012, p. 32)

A partir da sequência apresentada na imagem, as autoras discorrem que ao se perguntar sobre como estaria posicionado um termo qualquer dessa sequência, se na vertical ou na horizontal (os termos de ordem ímpar estão na horizontal e os de ordem par na vertical), a imagem estaria sendo explorada de um ponto de vista numérico. Ou seja, embora a sequência seja constituída de figuras geométricas, estaria sendo realizada aí uma abordagem e exploração numérica dela. Em contrapartida, as autoras destacam que se fosse pedido para investigar, por exemplo, os tipos de simetria presentes nessa sequência figural, a exploração dessa imagem estaria, desse modo, situada no campo puramente geométrico.

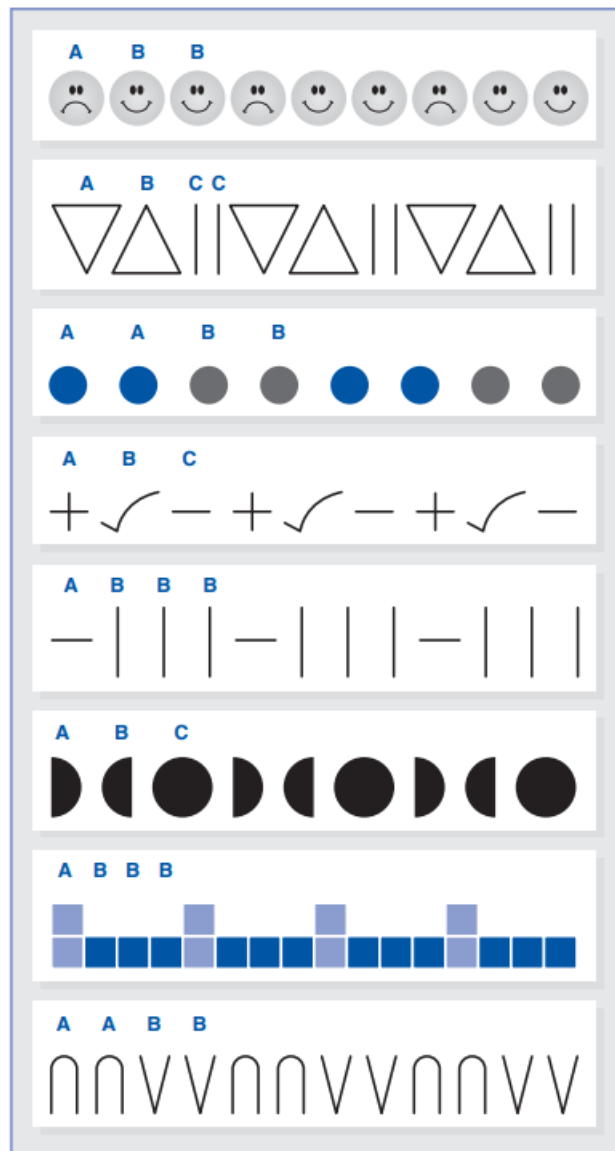
Por sua vez, para Ponte (2009) os termos padrão e regularidade são distintos, porém, complementares. Como discorre este autor,

ao passo que “padrão” aponta sobretudo para a unidade de base que eventualmente se replica, de forma exatamente igual ou de acordo com alguma lei de formação, “regularidade” remete sobretudo para a relação que existe entre os diversos objetos, aquilo que é comum a todos eles ou que de algum modo os liga (Ponte, 2009, p. 170).

Os padrões estão presentes de formas variadas em muitas situações do nosso dia a dia: na natureza, nas obras arquitetônicas e artísticas, nos ritmos musicais, nos movimentos dos corpos, dentre outras. Explorar essa diversidade em sala de aula é indispensável para o desenvolvimento de competências matemáticas nos alunos.

Mesmo diante de sua grande variedade de formas, Vale (2012) argumenta que a ideia principal num padrão envolve repetição e mudança. Nesse sentido, os padrões podem ser classificados como sendo de repetição ou de crescimento. Para esta autora, “um padrão será de repetição quando há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente” (Vale, 2012, p. 186). Essa menor cadeia de elementos que se repete é chamada por Van de Walle (2009) de núcleo do padrão repetitivo. Em seu livro, o autor propõe vários exemplos de padrões repetitivos da forma ABB, ABCC, AABB, ABC e ABBB, como mostra a Figura 2.

Figura 2 - Padrões de repetição



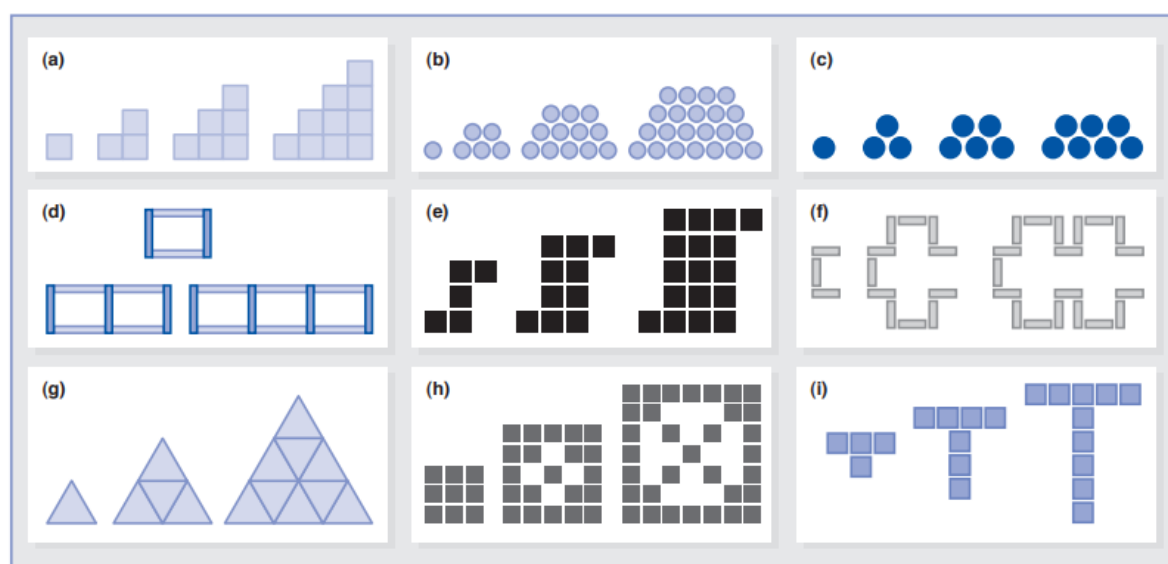
Fonte: Van de Walle (2009, p. 297)

Como ressaltado por Vale e Pimentel (2010, p. 34), embora prevaleça a ideia de que o trabalho com padrões de repetição seja muito incipiente, estes “podem ser explorados de forma aprofundada incluindo tópicos como a multiplicação, múltiplos e divisores, as relações numéricas, e o raciocínio proporcional, e sobretudo processos de generalização, proporcionando assim a entrada no domínio da álgebra”. Estas autoras ainda complementam que, para além de uma abordagem procedimental ou mesmo rítmica, faz-se necessário levar o aluno a identificar o grupo de repetição para que só então sejam abordadas questões mais globais, tais como analisar aspectos relativos a termos distantes, como por exemplo quem seria o 20º termo de uma sequência dada. Assim, de maneira geral, Vale et al. (2011, p. 23) recomendam a importância de “proporcionar aos estudantes tarefas que lhes permitam

reconhecer o motivo da repetição, descrever, completar, continuar e criar padrões, recorrendo a contextos diversificados e em que sejam incentivados a verbalizar os seus pensamentos e a justificá-los”.

Por sua vez, os padrões de crescimento envolvem uma progressão passo a passo. Ou seja, como destacado por Vale (2012, p. 186), “um padrão será de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior”. Esse processo de como o padrão é modificado de um passo ao passo seguinte é chamado de relação de recursividade (Van de Walle, 2009). Como exposto por Vale e Pimentel (2010, p. 35), a investigação dessa mudança pode despertar vários modos de ver que levam a distintas representações numéricas e/ou algébricas. Esse modo de ver, influencia no processo de generalização, relacionando cada termo com o anterior ou com a ordem que ocupa na sequência. A Figura 3 ilustra alguns padrões crescentes propostos por Van de Walle (2009).

Figura 3 - Padrões de crescimento



Fonte: Van de Walle (2009, p. 299)

Como aponta Van de Walle (2009), os padrões de crescimento além de conduzirem os alunos a procurarem por uma generalização ou uma relação algébrica que lhes permitirão encontrar o elemento do padrão que ocupará qualquer lugar da sequência, também podem ser usados para explorar o conceito de função, uma vez que ao buscarmos construir uma regra que determine o número de elementos em um passo a partir do número de passos, estamos estabelecendo uma relação funcional.

Os padrões de crescimento além de poderem ser representados a partir de materiais concretos ou figuras e regras simbólicas, podem ainda ser representados por meio de quadros

(tabelas) e gráficos. Como argumenta Van de Walle (2009), devido ao fato de os padrões de crescimento possuírem um componente numérico, o número de objetos a cada passo, uma tabela pode ser feita para qualquer padrão crescente. “Uma linha da tabela ou quadro é sempre o número de passos e o outro é para registro de quantos objetos estão naquele passo” (Van de Walle, 2009, p. 299). Nesse mesmo sentido, este autor chama a atenção para o fato de “que um gráfico pode ser feito a partir de uma tabela sem uma fórmula geral. O eixo horizontal é sempre usado para o número de passos (ordem), a variável independente” (Van de Walle, 2009, p. 301). Assim, Van de Walle (2009) ressalta a importância de os alunos perceberem conexões entre os padrões, a tabela de valores e os gráficos.

As tarefas de exploração de padrões podem ainda ser propostas em contextos numéricos e figurativos. “Muitos padrões valiosos podem ser observados com apenas números. Estes podem ser simples padrões repetitivos tais como 1, 2, 1, 2, ...” (Van de Walle, 2009, p. 298). No entanto, Van de Walle (2009) aponta que, de maneira geral, os padrões numéricos envolvem algum tipo de progressão como no padrão 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, ..., e podem ser encontrados em quadros (tabelas) ou sequências numéricas, baseados em uma regra particular. Esses padrões propiciam desafios favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico em todas as séries, visto que a preocupação não está apenas em encontrar e expandir o padrão, mas também fazer generalizações.

Desse modo, as tarefas envolvendo padrões numéricos são outra oportunidade para que os estudantes possam expandir sua compreensão acerca dos padrões matemáticos. De maneira complementar, como enfatizado por Vale et al. (2011, p. 38), “a procura de padrões em sequências numéricas pode ser uma boa oportunidade para introduzir ou relembrar números e relações numéricas, números pares ou ímpares, múltiplos, potências”. Van de Walle (2009) propõe alguns outros exemplos de padrões numéricos:

2, 4, 6, 8, 10, ... (números pares; adicione 2 a cada vez)
 1, 4, 7, 10, 13, ... (comece com 1; adicione 3 a cada vez)
 1, 4, 9, 16, ... (números quadrados; 1^2 , 2^2 , 3^2 , etc.)
 0, 1, 5, 14, 30, ... (adicione o próximo número quadrado)
 2, 5, 11, 23, ... (dobre o número anterior e adicione 1)
 2, 6, 12, 20, 30, ... (multiplique pares de números consecutivos)
 3, 3, 6, 9, 15, 24, ... (adicione os dois números anteriores, exemplo de uma sequência de Fibonacci) (Van de Walle, 2009, p. 298).

Por sua vez, os padrões figurativos ou visuais são “[...] aqueles que utilizam figuras, no sentido de Rivera e Becker (2005), que utilizam o termo (figural) para se referir aos objetos (ou desenhos) que possuem atributos ou possuem relações entre eles” (Vale, 2012, p. 189). O

trabalho com padrões em contextos figurativos contribui para o desenvolvimento de várias capacidades matemáticas, uma vez que segundo Vale (2009) pode ser um percurso didático para:

promover diferentes estratégias de contagem; descobrir diferentes modos de ver em sequências e problemas; dar sentido a expressões numéricas relacionando-as com a representação visual; permitir a alunos muito novos formular conjecturas de modo intuitivo, recorrendo à linguagem verbal, ou mais formal, recorrendo à simbologia matemática; permitir utilizar de forma flexível diferentes formas de representação; proporcionar oportunidades de argumentar e comunicar matematicamente; permitir o desenvolvimento da capacidade de generalização (próxima e distante), que é uma componente essencial do pensamento algébrico e do próprio raciocínio matemático; e contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática por parte dos alunos, porque são desafiantes e apelam fortemente ao seu sentido estético, curiosidade e criatividade (Vale, 2009, p. 27-28).

Embora Pimentel e Vale (2012) e Vale e Barbosa (2019) assumam que todos os tipos de padrões possuem um papel central em matemática, reconhecem de modo especial a importância das tarefas que envolvem generalizações na descoberta de padrões em contextos figurativos/visuais, por fomentar o estabelecimento de conexões entre vários modos de representação que permite uma melhor compreensão da estrutura matemática subjacente, conduzindo, mais eficientemente, à conjectura e generalização, à explicação e argumentação, e, por fim, à prova.

Portanto, os padrões podem sugerir abordagens tanto numéricas quanto figurativas/visuais, sendo assim importante que na sala de aula de matemática sejam propostas tarefas desafiantes que enfatizem a compreensão da generalização envolvendo esses dois contextos essenciais no desenvolvimento do pensamento algébrico, atendendo ao seu nível de escolaridade e aos fins almejados.

Nesse contexto da sala de aula, Lacerda e Gil (2022) destacam ainda o fato de que o trabalho com padrões não deve se limitar a atividades mecânicas e repetitivas de completar sequências,

[...] visto que o ganho cognitivo é muito mais significativo quando o aluno passa da identificação dos padrões e sua reprodução intuitiva à compreensão da regra geral e à capacidade de expressar os raciocínios envolvidos na tarefa. Ou seja, é importante que a aula de Matemática com padrões seja um momento de fala, troca de ideias, resolução de problemas e observação das soluções dadas pelos colegas (Lacerda; Gil, 2022, p. 499).

Portanto, para o avanço no desenvolvimento do pensamento algébrico, é indispensável que seja possibilitado aos alunos não apenas oportunidades de darem continuidade a uma

determinada sequência, mas também de expressarem e discutirem o raciocínio que os levou a identificar o padrão e continuar a sequência.

Pimentel e Vale (2012) argumentam que a generalização é um elemento essencial na atividade matemática, sendo construída através de representações e argumentações, e explicitada de um modo gradualmente mais formal de acordo com a idade. Nesse sentido, as tarefas com padrões conferem aos estudantes a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico a partir da generalização de diferentes ideias matemáticas pela observação de um conjunto de evidências. Esse fato é evidenciado por Vale (2012) ao destacar que

as tarefas com padrões dão aos estudantes oportunidades para observar e verbalizar as suas próprias generalizações e traduzi-las numa linguagem mais formal de acordo com a idade. E, se os professores não tiverem nas suas práticas o hábito de propor aos alunos tarefas para exprimir as suas próprias generalizações, então não haverá lugar para o pensamento matemático, em particular, não há pensamento algébrico (VALE, 2012, p. 190).

Para Radford (2013), a capacidade de generalizar consiste em observar e analisar algo que vai além do que realmente se vê. Este pesquisador considera a generalização como um dos principais procedimentos de produção de conhecimento, sendo esta constituída por três aspectos fundamentais que se relacionam mutuamente: *aspecto fenomenológico*; *aspecto epistemológico*; *aspecto semiótico*.

O *aspecto fenomenológico* está ligado ao processo da escolha de determinações sensíveis sobre objetos (notar semelhanças e diferenças) que envolvem, entre outros, a intuição, a atenção, a intenção e a sensibilidade. Já o *aspecto epistemológico* refere-se à generalização propriamente dita, através da qual o novo objeto é produzido. Por fim, o *aspecto semiótico* consiste nos meios utilizados para denotação do objeto generalizado. “No caso de objetos matemáticos, a denotação pode assumir várias formas. Na generalização de padrões, por exemplo, a denotação pode ser feita através do gestual, da linguagem natural ou do simbolismo alfanumérico (ou combinação destes)” (Radford, 2013, p. 4).

De acordo com Jungbluth, Silveira e Grando (2019), as atividades que envolvem exploração e generalização de padrões, normalmente solicitam que os alunos: descubram o padrão da sequência para continuá-la; indiquem um termo faltante da sequência (podendo este ser subsequente ao último termo da sequência e ir se distanciando); encontrem um termo numa posição qualquer da sequência. Vale e Barbosa (2019) ainda acrescentam a possibilidade de articulação com a relação funcional subjacente ao padrão usando símbolos. Pode-se afirmar que estes são processos fundamentais na construção do pensamento algébrico.

Sendo assim, Jungbluth, Silveira e Grando (2019) ressaltam que a ideia que se encontra implícita nesse tipo de atividade é que o estudante tenha como ponto de partida uma *generalização próxima* e, progressivamente, alcance uma *generalização distante*. Para Stacey (1989), em atividades que envolvem padrões, a *generalização próxima* compreende a descoberta do termo seguinte relacionando cada termo com o(s) anterior(es), ou seja, consiste na construção do resultado passo a passo por meio de estratégias de contagem, desenho ou recorrendo ao uso de uma tabela. Esse tipo de generalização, normalmente, envolve relações recursivas. Por sua vez, a *generalização distante* envolve a compreensão do padrão que determina a situação em sua totalidade, relacionando cada termo com a ordem que ocupa na sequência, bem como a construção de uma lei de formação, ou seja, uma regra geral através de uma expressão matemática que permite encontrar qualquer termo da sequência e que envolve o raciocínio funcional.

Por sua vez, Radford (2013) aponta que existem vários elementos envolvidos no processo de generalização. Inicialmente tem-se a identificação, a partir de um número finito de termos, de uma característica comum local. Ou seja, nesta etapa ocorre a realização de uma escolha entre determinações sensíveis potenciais. Por conseguinte, ocorre a generalização dessa característica comum para os outros termos da sequência, sendo esse processo da generalização chamado de abdução, isto é, algo que é apenas provável. É somente a partir do caminho tomado no uso dessa abdução que ocorre a diferenciação entre as generalizações aritmética e algébrica.

Para Radford (2006, 2010, 2013), quando os alunos apenas percebem uma semelhança em alguns termos específicos de uma sequência, ou seja, identificam uma regularidade nos termos dessa sequência, e generalizam essa semelhança a todos os seus termos, de modo a simplesmente continuá-la, sem que ocorra a dedução de uma expressão direta que lhes permitam encontrar qualquer termo dessa sequência, eles estão trabalhando no campo aritmético e, portanto, realizando uma *generalização aritmética*. Sendo assim, como destacado por Radford (2013, p. 7), “quando a abdução é simplesmente usada para passar de um termo para o outro [...], chegamos a uma generalização aritmética”.

Radford (2013) sugere que a *generalização algébrica* de padrões, por sua vez, envolve os seguintes pontos:

- (a) a tomada de consciência de uma propriedade comum que se nota a partir de um trabalho no terreno fenomenológico de observação sobre certos termos particulares (por exemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$), (b) a generalização de tal propriedade a todos os termos subsequentes da sequência ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$) e (c) a capacidade de usar essa propriedade comum a fim de deduzir uma expressão direta que permite calcular o valor de qualquer termo da sequência (Radford, 2013, p. 6).

Em outras palavras, como apresentado por Radford (2006, 2010) a generalização algébrica de um padrão consiste na capacidade de perceber aspectos comuns em alguns elementos de uma sequência S (identificação de uma regularidade local); tomar consciência de que estes aspectos comuns se aplicam a todos os termos de S (generalização a todos os termos da sequência); e ser capaz de usá-la para fornecer uma expressão direta de qualquer termo de S (construção de uma regra que forneça uma expressão de qualquer termo da sequência).

Portanto, de acordo com Radford (2013),

Para que a generalização seja algébrica é necessário [...] que a abdução que se faz da característica comum seja utilizada de forma *analítica*. Isto quer dizer que a abdução será usada não mais como simples possibilidade, mas como princípio assumido para deduzir apoditicamente uma fórmula que proporciona o valor de qualquer termo. Como vemos, o ponto crucial corresponde ao papel epistemológico desempenhado pela característica comum, C , extraída durante o trabalho realizado no terreno fenomenológico. C passa de entidade plausível para princípio assumido, isto é, hipótese H (Radford, 2013, p. 7, grifos do autor).

Percebemos aqui que a analiticidade é a ideia chave na caracterização da generalização algébrica. Na generalização aritmética a abdução propicia um procedimento, mas não uma expressão direta (uma fórmula), ou seja, não há abdução analítica neste caso. Já na generalização algébrica temos um processo de dedução de uma expressão direta que permite calcular qualquer termo da sequência, isto é, a abdução passa a ser utilizada de forma analítica.

Como destacam Pimentel e Vale (2012, p. 42), “o processo de generalização, em particular, embora possa aplicar-se a toda a produção de conhecimento matemático, está em forte ligação com as tarefas de exploração de padrões usadas como veículo para o pensamento algébrico”. Desse modo, como aponta Radford (2010), a generalização de padrões constitui-se como uma das formas mais importantes de introdução da Álgebra nas escolas.

Podemos concluir que o trabalho com padrões, em suas diferentes formas e contextos, tem revelado grandes potencialidades no desenvolvimento da capacidade de generalizar e, conseqüentemente, promover o pensamento algébrico. No entanto, esse trabalho com padrões deve ser compatível com o ano escolar e com o grau de dificuldade de generalização que cada situação exige. Assim, cabe ao professor estar atento e recorrer a diferentes estratégias para explorar o potencial de seus alunos a partir das tarefas utilizadas, avaliando de forma cuidadosa quando é possível avançar de uma generalização próxima e/ou aritmética para uma generalização distante e/ou algébrica.

Na próxima seção analisamos o conteúdo da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no que se refere à abordagem do ensino de Álgebra na Educação Básica, discutindo como está apresentado neste documento o sentido de pensamento algébrico, bem como os meios indicados para o seu desenvolvimento. Por fim, destacamos e comentamos, dentro da unidade temática Álgebra, as habilidades associadas ao trabalho com padrões e regularidades visando o desenvolvimento desse tipo especial de pensamento.

2.4 A abordagem de Álgebra e de pensamento algébrico da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no fim do ano de 2017, constituiu um marco legal para a reorganização dos currículos escolares no Brasil, sendo a mesma definida nos seguintes termos:

[...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (Brasil, 2017, p. 7).

Fruto de um longo processo de discussão e debates conduzidos pela Secretaria da Educação Básica do Ministério da Educação (MEC), Conselho Nacional de Educação (CNE), Conselho Nacional de Secretários de Educação (CONSED) e pela União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME), a aprovação da BNCC se consistiu na mudança mais significativa ocorrida recentemente na esfera educacional brasileira. Paralelamente a esse processo de aprovação encontrava-se também em discussão a implementação do Novo Ensino Médio, o que fez com que a homologação da BNCC ocorresse em dois momentos distintos, sendo a parte referente às etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental homologada em 20 de dezembro de 2017, enquanto a parte referente a etapa do Ensino Médio foi homologada somente em 14 de dezembro de 2018.

Em consonância com os fundamentos pedagógicos apresentados na introdução da BNCC, cujo enfoque consiste no desenvolvimento de competências, o documento está estruturado “de modo a explicitar as competências que devem ser desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica e em cada etapa da escolaridade, como expressão dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento de todos os estudantes” (Brasil, 2017, p. 23).

Nesse sentido, destacamos a importância de se investigar o que propõe a BNCC, uma vez que este documento norteia políticas públicas nacionais em diversos eixos:

Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação (Brasil, 2017, p. 8).

Portanto, de maneira mais específica, cientes da necessidade de conhecermos os recursos que subsidiam os professores no exercício do trabalho cotidiano, é indispensável que nos apropriemos do conteúdo deste documento que serve de apoio para o trabalho docente, na medida em que orienta a sua prática efetiva em sala de aula.

No que tange o ensino de Matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas a serem trabalhadas ao longo de todo Ensino Fundamental, a saber: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística. Estas unidades temáticas encontram-se correlacionadas, conduzindo o desenvolvimento de diferentes habilidades a serem exploradas com perspectivas distintas de acordo com o ano de escolarização.

A BNCC de Matemática no Ensino Médio, por sua vez, possui como foco a construção de uma visão integrada dessa área de conhecimento, na perspectiva de sua aplicação à realidade, nos variados contextos, levando em consideração as diferentes vivências cotidianas dos alunos. Nesta última etapa da Educação Básica, a área de Matemática e suas Tecnologias “propõe a consolidação, a ampliação, e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental” (Brasil, 2018, p.527). Desse modo, no Ensino Médio, esta área de conhecimento deve possibilitar aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas, que não possuem uma ordem preestabelecida, e que estão relacionadas a habilidades que deverão ser conquistadas nessa etapa.

Dentre as principais mudanças propostas pela BNCC para o ensino de Matemática, podemos destacar a diversificação e ampliação do número de unidades temáticas de quatro para cinco, já que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), que até então orientavam o currículo brasileiro, organizavam os conteúdos matemáticos nos seguintes blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação.

Cabe ressaltar que a Álgebra aparece hoje como temática única, o que não ocorria anteriormente com os PCN, visto que assim como Probabilidade e Estatística, essa unidade

temática era abordada de maneira implícita a partir da articulação de conceitos dentro dos outros temas.

Destacamos ainda no documento da BNCC a inserção da Álgebra na Educação Básica desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que até então era realizada prioritariamente a partir dos Anos Finais desta etapa de ensino. Ou seja, a BNCC consolidou e difundiu a necessidade do ensino de Álgebra como uma unidade temática a ser trabalhada de modo obrigatório a partir dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Brasil, 2017).

Nessa perspectiva de abordagem da Álgebra desde o início dos estudos dos alunos, Soares (2018, p. 43) ressalta a importância de:

[...] integrar a aprendizagem de Álgebra com a de outros assuntos (estendendo e aplicando conhecimentos matemáticos); abarcar as várias formas de pensamento algébrico (aplicando conhecimento matemático); acontecer com base em saberes que os estudantes já possuem, de tal maneira que reflitam sobre o que aprendem e articular o que sabem; e, por fim, incentivar a aprendizagem e a construção de relações que possibilitem a compreensão.

Como destacado por Ferreira, Leal e Moreira (2020), embora essa mudança na abordagem da Álgebra, em um primeiro momento, não aparente ser tão significativa, tem em si grande capacidade na função de minimizar as rupturas decorrentes da transição da Aritmética para Álgebra e, de maneira mais ampla, da transição da Matemática dos anos iniciais para a Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Esse modelo curricular de construção da linguagem algébrica ainda nos anos iniciais emerge a partir do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), instituição de referência no domínio de tendências curriculares internacionais, através da divulgação de pesquisas fundamentadas na proposta de *Early Algebra* que se tornaram instrumentos norteadores para as mudanças nos currículos de diversos países. Entretanto, mesmo diante dessa significativa mudança curricular no Brasil, trazida pela BNCC,

não se tem um amplo debate sobre a inclusão do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a formação de professores para os anos iniciais, em geral, ainda não considera a Álgebra como um assunto a ser tratado desde a alfabetização e não se tem clareza sobre a caracterização dos problemas que podem ser abordados para desenvolver o pensamento algébrico da criança, já que não há uma convenção do tipo de problema que pode ser caracterizado como algébrico nos anos iniciais (Beck, 2018, p. 16)

Ao apresentar a unidade temática Álgebra, a BNCC afirma que esta unidade:

[...], tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (Brasil, 2017, p. 270).

Temos aqui a primeira menção específica sobre pensamento algébrico no texto da BNCC. No entanto, como apontado por Bortolete, Oliveira e Guaranha (2022), ao realizar essa caracterização o documento associa-o à ideia da utilização de modelos matemáticos vinculados essencialmente a seus aspectos quantitativos e não qualitativos. Somando-se a isso, estes autores ainda destacam que o documento associa diretamente o pensamento algébrico ao uso de letras e outros símbolos, o que, de certo modo, vai na contramão da concepção de pensamento algébrico discutidas aqui em nosso texto como algo que está diretamente associado à produção de significados para os objetos algébricos. Entendemos que não é o olhar para os símbolos que caracteriza o pensamento algébrico, mas enxergar para além da representação dada por meio desses símbolos, entendendo o que eles significam. Ou seja, não como a expressão com um fim em si mesma, mas sim a compreensão do dito através dela, ultrapassando seus aspectos operatórios e algorítmicos, permitindo pelo ato de pensar o entendimento dos significados que estão contidos na expressão.

Dando prosseguimento à análise do documento, ao tratar sobre os meios essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a BNCC afirma que, para tanto:

[...] é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (Brasil, 2017, p. 270).

A BNCC ao reduzir a identificação de regularidades e padrões como caminho para o estabelecimento de leis matemáticas com fim na criação, interpretação e transformação entre as representações gráficas e simbólicas para resolução de problemas, mais uma vez privilegia a dimensão quantitativa da Álgebra, podendo limitá-la a uma concepção extremamente pragmática. Assim, Bortolete, Oliveira e Guaranha (2022) denominam essa visão, cuja ênfase está nos aspectos algorítmicos e procedimentais, de visão tecnicista, que também pode ser encontrada em outros trechos do documento, a exemplo de “em síntese, essa unidade temática [Álgebra] deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações” (Brasil, 2017, p. 270).

Os autores Bortolote, Oliveira e Guaranha (2022) também ressaltam que o documento ao indicar que “as técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos” (Brasil, 2017, p. 271), está evidenciando uma instrumentalização da Álgebra, dando destaque a processos sistemáticos, negligenciando sua dimensão qualitativa e a necessidade de compreendê-la assim como ela é, e não somente como o que ela possibilita em sua aplicação prática. Portanto, quando analisamos a Álgebra em sua dimensão qualitativa, entendemos que ela não se limita a esses processos algorítmicos apontados na BNCC.

Essa dimensão qualitativa da Matemática, e consequentemente da Álgebra, tem por base a concepção descrita pela Fenomenologia de Edmund Husserl (1859-1938) sobre o ato de pensar. Como descrito por Bortolote, Oliveira e Guaranha (2022), a Fenomenologia permite

[...] entender a Matemática como uma aquisição cultural, uma forma de expressão, em cuja menção os significados, ao serem desvelados, revelam um mundo de idealidades que só é acessível a um olhar que se projete através da expressão, que contemple, além do caminho, que é o método, o fim que desvela os sentidos e os significados dessa simbologia (Bortolote; Oliveira; Guaranha, 2022, p. 328).

Desse modo, ainda que a representação simbólica, os algoritmos operatórios, sua organização e sua utilização na resolução de problemas práticos sejam inerentes ao pensamento algébrico, não constituem a totalidade desse modo de pensar. Portanto, conforme apontado por Bortolote, Oliveira e Guaranha (2022), a ênfase dada ao método e aos aspectos algorítmicos sem a compreensão dos conceitos revelados através deles, pode ocasionar no indivíduo uma perda de sentido ao apresentar apenas os símbolos como um fim em si mesmos.

Ao continuarmos com a leitura do conteúdo do documento, podemos identificar algumas dimensões da Álgebra que deverão estar presentes no processo de ensino e aprendizagem desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Nesse sentido, nos Anos Iniciais devem estar presentes “as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade” (Brasil, 2017, p. 270). Entretanto, é ressaltado que para essa fase é dispensado o uso de letras para expressar regularidades, mesmo que de forma simplificada. Nos Anos Finais, por sua vez, a ideia é aprofundar e ampliar o que foi trabalhado ao longo dos Anos Iniciais a partir da inserção de outras dimensões da Álgebra. Para tanto, ao longo dessa etapa, os alunos precisam

[...] compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas (Brasil, 2017, p. 270).

Já no Ensino Médio, como destacado anteriormente, a BNCC propõe aproveitar todo o potencial já constituído pelos estudantes na etapa anterior afim de que novos conhecimentos possam “estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos” (Brasil, 2018, p. 529).

A BNCC evidencia a necessidade de inserir a Álgebra desde os primeiros anos do Ensino Fundamental a partir do trabalho com padrões e regularidades. Isto posto, de acordo com Gualandi (2019), uma forma de garantir que o trabalho com a Álgebra seja incluído desde os anos iniciais da Educação Básica é por meio de situações de ensino que proponham o uso de tarefas exploratórias que envolvam as ideias de regularidade e generalizações de padrões.

A partir da análise da BNCC fizemos um levantamento do que é proposto, dentro da unidade temática Álgebra, para o estudo de padrões e regularidades, elencando os objetos de conhecimento e as habilidades associadas à área de Matemática a serem alcançadas pelos alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental; e as habilidades associadas à área de Matemática e suas Tecnologias a serem alcançadas pelos alunos do Ensino Médio.

No Quadro 1 destacam-se todos os objetos de conhecimento e habilidades descritas na BNCC a serem desenvolvidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental na área de Matemática, dentro da unidade temática Álgebra, relacionados ao estudo de padrões e regularidades.

Quadro 1 - Objetos de conhecimento e habilidades relacionados ao estudo de padrões e regularidades nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Anos	Objetos de conhecimento	Habilidades
1º	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões de sequências	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos como cor, forma e medida
	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

2º	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
		(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
4º	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

Fonte: Brasil (2017)

Conforme apontado no quadro 1, para os anos iniciais do Ensino Fundamental, evidencia-se que as habilidades relacionadas ao estudo de padrões e regularidades estão associadas a objetos de conhecimento propostos no documento para o 1º, 2º, 3º e 4º anos, não havendo, portanto, habilidades dessa natureza especificadas para o 5º ano. Temos aqui um total de sete objetos de conhecimento e oito habilidades que se encontram separadas por ano de escolaridade e vão evoluindo progressivamente ao longo dessa etapa.

No 1º ano, o foco está na investigação, reconhecimento e explicitação de padrões e regularidades a partir da observação da disposição e ordenamento de objetos conhecidos pelos estudantes, de figuras fazendo uso de características como cor, forma e medida, ou de seriações numéricas. Aqui, os alunos já iniciam de maneira modesta o trabalho com sequências recursivas.

Para o 2º ano, a proposta sugerida pelo documento concentra-se na construção e identificação de regularidades de sequências e, também na especificação de elementos faltantes em uma sequência. Para tanto os alunos podem construir sequências crescentes ou decrescentes de números naturais seguindo um padrão específico, bem como explicitar o padrão de sequências, que tanto podem ser repetitivas quanto recursivas, por meio de diferentes representações.

O documento propõe tanto no 3º quanto no 4º ano a continuação do trabalho de identificação de regularidades em sequências formadas por números naturais cujo padrão, agora, se justifica a partir da realização de operações numéricas sucessivas, bem como a especificação de termos omitidos em uma sequência.

Portanto, a partir da análise feita, observamos que a proposta para aprendizagem da Álgebra presente na BNCC para os anos iniciais do Ensino Fundamental consiste no estudo da noção de regularidades em sequências recursivas² ou repetitivas³, no entanto sem recorrer a utilização de letras para expressar essas regularidades. Os alunos são conduzidos progressivamente a reconhecer um padrão, descrever uma regra de formação da sequência, bem como determinar seus elementos faltantes.

Favero e Manrique (2021) categorizaram as habilidades propostas na BNCC que se relacionam com o desenvolvimento do pensamento algébrico e constataram que estas não se encontram limitadas à unidade temática Álgebra, mas aparecem também nas unidades temáticas Grandezas e Medidas, Números e Geometria. Destacaram também o grande foco dado à abordagem de padrões e regularidades no documento, o que afirmam ser uma iniciativa bastante interessante uma vez que é uma das estratégias da *Early Algebra*. Porém, apontam que esta abordagem “está muito centralizada em sequências” e que “é necessário explorar regularidades e padrões em outras situações também” (Favero; Manrique, 2021, p. 13), como por exemplo “[...] propostas pedagógicas que mobilizem identificação, descrição e generalização de padrões

² As *sequências recursivas* são aquelas cujos termos sucessores dependem de um ou mais termos anteriores para serem calculados, ou seja, cada termo da sequência é resultado de uma operação realizada a partir de um ou mais termos anteriores.

³ As *sequências repetitivas* são aquelas que possuem um mesmo padrão de organização que se repete a cada elemento.

em atividades associadas à leitura, escrita, arte, educação física etc. (Lacerda e Gil;2022, p. 498 - 499).

Por sua vez, Ferreira, Leal e Moreira (2020) ao analisarem também a BNCC de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, e realizarem uma comparação entre este documento e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam uma significativa mudança em relação à abordagem da Álgebra nos anos iniciais. Segundo os autores, os PCN traziam de forma sucinta os objetivos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico, estando estes concentrados na perspectiva da aritmética generalizada. Já a BNCC, além das habilidades associadas à perspectiva da aritmética generalizada, traz habilidades associadas ao pensamento funcional.

De maneira complementar, Silva, Alves e Andrade (2021) sugerem que, na BNCC, o motivo da Álgebra nos anos iniciais estar mais focada no pensamento funcional deve-se, em parte, às possibilidades de abordagem por figuras, diagramas e atividades lúdicas. Os autores afirmam ainda que a inserção pela BNCC de habilidades envolvendo o pensamento funcional “materializa uma predominância de atividades referentes a este tipo de situação nos livros didáticos”, utilizando-se de “recursos pictóricos como ilustrativos e motivacionais para capturar a atenção dos estudantes” (Silva; Alves; Andrade, 2021, p. 8).

No Quadro 2 destaca-se todos os objetos de conhecimento e habilidades descritas na BNCC a serem desenvolvidas nos anos finais do Ensino Fundamental na área de Matemática, dentro da unidade temática Álgebra, relacionados ao estudo de padrões e regularidades.

Quadro 2 - Objetos de conhecimento e habilidades relacionados ao estudo de padrões e regularidades nos anos finais do Ensino Fundamental

Anos	Objetos de conhecimento	Habilidades
7º	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
		(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
8º	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figurar não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
		(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Fonte: Brasil (2017)

No que se refere aos anos finais do Ensino Fundamental, como apresentado no quadro 2, as habilidades relacionadas ao estudo de padrões e regularidades estão associadas a objetos de conhecimento propostos no documento para o 7º e 8º anos, visto que não são especificadas explicitamente habilidades dessa natureza para o 6º e 9º anos. Temos aqui um total de três objetos de conhecimento e cinco habilidades que do mesmo modo que nos anos iniciais, encontram-se separadas por ano de escolaridade e vão evoluindo progressivamente ao longo dessa etapa.

Como já apresentado anteriormente, a abordagem da Álgebra nesta etapa é retomada e abordada de maneira mais aprofundada, de modo a ampliar o que foi trabalhado ao longo dos anos iniciais. Ou seja, o trabalho com padrões e sequências, numéricas e não numéricas, pode agora recorrer à simbologia algébrica para expressar e justificar regularidades.

No 7º ano são exploradas no estudo de padrões as sequências recursivas e não recursivas⁴. No entanto, ao reconhecer que o conceito de recursão não se limita à Matemática, a BNCC sugere que o trabalho com padrões não se restrinja apenas à utilização de elementos dessa natureza, mas que seja proporcionado aos estudantes situações que permitam a percepção de padrões em outros contextos, como nas artes e na literatura, conforme apontado no próprio documento.

⁴ As *sequências não recursivas* são aquelas cujos termos não dependem de termos anteriores para serem determinados, ou seja, cada novo elemento da sequência independe de algum elemento anterior.

É apontado ainda no 7º ano que, no trabalho com sequências numéricas, os alunos podem recorrer à representação na linguagem algébrica para expressar e justificar regularidades, como também perceber a equivalência de expressões algébricas para caracterizar a regularidade de uma mesma sequência numérica.

Nas habilidades destinadas ao 8º ano é explorado no trabalho com padrões o reconhecimento da regularidade de sequências numéricas recursivas e de sequências não recursivas, sendo elas numéricas ou figurais, associado à construção de algoritmo fazendo uso de fluxogramas para determinar os números ou as figuras subsequentes da sequência. Aqui destacamos a associação realizada entre o estudo de padrões e elementos pertencentes às bases do pensamento computacional, o que contribui para o desenvolvimento desse pensamento nos alunos.

No que se refere ao Ensino Médio, tratando-se especificamente da área de Matemática e suas Tecnologias, “os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração” (Brasil, 2018, p. 471). Desse modo, a BNCC considera que os estudantes tiveram a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico a partir de suas vivências no Ensino Fundamental, “tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações” (Brasil, 2018, p. 527).

Nesta última etapa da Educação Básica, as habilidades não são especificadas por ano de escolaridade. De maneira geral, são definidas competências específicas associadas a habilidades que deverão ser desenvolvidas no decorrer dessa etapa, sem uma ordem preestabelecida. “Por sua vez, embora cada habilidade esteja associada a determinada competência, isso não significa que ela não contribua para o desenvolvimento de outras” (Brasil, 2018, p. 530).

No que se refere ao trabalho com padrões de sequências no Ensino Médio, destacamos a competência específica cinco da área de Matemática e suas Tecnologias, que propõe ao estudante

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 531).

Como apresentado no documento, as habilidades vinculadas a essa competência específica estão relacionadas ao desenvolvimento das capacidades de investigação e argumentação dos estudantes, resultantes de suas experiências “decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo” (Brasil, 2018, p. 540).

Associadas a essa competência, destacamos quatro habilidades relacionadas ao estudo de padrões e regularidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio na área de Matemática e suas Tecnologias, conforme apontado no Quadro 3.

Quadro 3 - Habilidades relacionadas ao estudo de padrões e regularidades no Ensino Médio

Séries	Habilidades
1 ^a , 2 ^a e 3 ^a	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
	(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
	(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: Brasil (2018)

Ao analisarmos as habilidades destacadas, observamos que o trabalho com padrões está associado a outros conteúdos matemáticos como funções polinomiais do 1º e 2º grau, envolvendo tabelas e gráficos para investigar relações entre números, estabelecer padrões e expressar generalizações a partir da simbologia algébrica; e progressões aritméticas e

geométricas com vista a análise de propriedades, dedução de fórmulas e resolução problemas. Portanto, no Ensino Médio o trabalho com padrões encontra-se relacionado com outros temas, o que permite uma construção mais integrada da Matemática, conduzindo os alunos a expressarem diferentes possibilidades de pensar e continuarem avançando na sua capacidade de generalização.

Nesta seção, discutimos sobre a abordagem da Álgebra e do pensamento algébrico presente na BNCC e em seguida fizemos um levantamento do que é proposto, dentro da unidade temática Álgebra, para o trabalho com padrões e regularidades visando o desenvolvimento desse tipo especial de pensamento. Como destacamos na seção anterior, são vários os estudos que apontam a eficiência dessa forma de abordagem tanto para a construção do pensamento algébrico quanto para a construção de vários conceitos matemáticos.

3 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS DECISÕES DIDÁTICAS DO PROFESSOR

Ao longo deste capítulo trazemos uma discussão geral acerca das decisões didáticas, contemplando sua construção conceitual e seu campo de pesquisa. Para tanto, discutimos sobre a problemática da tomada de decisões didáticas do professor na perspectiva do modelo dos níveis da atividade do professor proposto por Margolinas (2002, 2005) e acerca dos fatores de influência nas decisões didáticas do professor abordados por Bessot (2019).

3.1 Decisões didáticas do professor

No desempenho de sua atividade profissional, o professor toma decisões de diversas naturezas, incluindo as institucionais, metodológicas, pedagógicas e didáticas. Entre essas, concentramos nossa atenção nas decisões didáticas, ou seja, aquelas que estão intimamente relacionadas à aprendizagem do aluno em relação a um conhecimento definido pelo professor. Tais decisões podem ser tomadas durante a aula, quando o professor interage diretamente com o aluno. Contudo, mesmo no contexto do ensino presencial, a atuação do professor não se limita ao que ocorre na sala de aula, uma vez que, fora desse ambiente físico, ele planeja, elabora ou seleciona os problemas apresentados aos alunos e avalia as produções destes, momento em que também realiza decisões didáticas (Lima, 2017).

Como apontado por Lima (2011, 2017), a investigação sobre esse processo de tomada de decisões por parte dos professores tem se tornado um tema de interesse cada vez mais frequente entre os pesquisadores do campo da Educação, mais especificamente na área de Educação Matemática. A ideia subjacente é que o ensino pode ser compreendido como uma sucessão de tomadas de decisões pelo professor, em qualquer etapa da sua atividade, visando oportunizar aos alunos a aprendizagem de novos conhecimentos. Desse modo, a tomada de decisões didáticas é algo inerente à atividade docente.

De fato, no exercício de suas responsabilidades, o professor elabora, implementa e analisa os desdobramentos de suas ações visando aprimorar o processo de aprendizagem de seus alunos em relação a um determinado conhecimento. Durante esse contexto, o docente toma decisões embasadas em suas concepções, formação, observações e experiências anteriores. Assim, frequentemente, o professor se depara com diversas escolhas diante das quais precisa tomar uma decisão.

Nessa perspectiva, antes de continuarmos essa discussão, faz-se necessário refletirmos sobre os termos “escolha” e “decisão”. Para tanto, Lima (2017) apresenta um exemplo dado por Margolinas (1993) para fazer uma distinção entre esses termos.

Se eu digo ao meu vizinho “Passe-me o sal” e ele a executa, ele produziu uma ação, mas não tomou nenhuma decisão. [...]. O educado vizinho teve, portanto, algumas escolhas diante dele: recusar, pegar o saleiro da direita ou da esquerda [...]. Negamos, portanto, a nomear tais escolhas de decisão. Mas podemos imaginar situações nas quais uma ação assim banal poderia ter todas as características de uma verdadeira decisão (se esta pessoa sabe que o saleiro da direita está ligado a um detonador, e não o da esquerda, por exemplo). Toda decisão é, portanto, ligada à existência de uma escolha [...] (Margolinas, 1993 *apud* Lima, 2017, p. 161-162).

A partir deste exemplo, Lima (2017) destaca o fato de que um indivíduo estará tomando uma decisão somente quando ele identifica algumas escolhas possíveis e tem a liberdade de trilhar por qualquer uma delas. “Uma decisão se caracteriza então pela ação voluntária do sujeito de escolher um caminho dentre aqueles que estão disponíveis” (Lima, 2017, p. 162).

Seguindo tal raciocínio, Espíndola, Silva e Júnior (2020) ao realizarem essa reflexão acerca dos termos “escolha” e “decisão”, entendem que ambos estão relacionados, porém são distintos. Ou seja, o ato de decidir está atrelado a uma escolha, porém não se restringe à reprodução de uma ação de forma automática. Decidir sobre algo, implica em uma reflexão prévia do sujeito envolvido na ação acerca das escolhas possíveis.

De acordo com Margolinas (2005), o ato de decidir representa um momento de extrema relevância na atividade do professor. Assim, a tomada de decisões didáticas pode ocorrer em qualquer momento da atividade docente, ou seja, antes da realização da aula, durante a sua execução, e até depois, visando as aulas futuras. Desse modo, as decisões didáticas diferenciam-se em dois tipos: *macrodecisões* e *microdecisões*.

As *macrodecisões* caracterizam-se como aquelas decisões tomadas pelo professor antes da realização da aula propriamente dita, ou seja, no momento de preparação do projeto de ensino. Ao planejar a estrutura geral de um tema específico ou de um projeto de aula, o professor confronta-se com diversas escolhas dentro de um contexto mais amplo para elaborar suas estratégias pedagógicas. Por exemplo, quando os professores planejam uma aula eles precisam definir os objetivos a serem alcançados e selecionar os recursos que os auxiliarão na execução de sua prática.

Por sua vez, as *microdecisões* são aquelas tomadas pelo professor em sala de aula durante a ação didática, isto é, no seu momento de interação com os alunos. Nesse momento, surge a necessidade de tomar decisões de caráter imediatista que são influenciadas por diversos

fatores associados a circunstâncias específicas durante o exercício da atividade em sala de aula. Isso envolve as expectativas quanto ao desempenho dos estudantes, a dinâmica interpessoal com os alunos e as abordagens para ensinar determinado conteúdo, tudo isso levando em conta o desempenho das metodologias e recursos utilizados ao longo de sua trajetória profissional.

Ressaltamos que, em nosso trabalho, no que se refere às decisões didáticas do professor, voltamos nosso olhar, especificamente, para as *macrodecisões*, ou seja, as decisões tomadas antes da ação didática, no momento de preparação do projeto de ensino. Em particular, nos concentramos nas decisões didáticas tomadas durante o processo de (re)construção de uma atividade de ensino envolvendo padrões e regularidades, com vistas à promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Isto posto, em concordância com Perrin-Glorian (2002), acreditamos que quando o professor prepara sua aula ele é submetido a exigências de diversas origens, sejam elas advindas do estabelecimento de ensino (tempo de aula, livro escolar...), dos alunos (nível escolar, origem social...) e do próprio professor (sua história, seus conhecimentos acerca do saber a ensinar, suas preferências...). Nesse momento, como sugere Lima (2011), o professor procura antecipar as situações que poderão acontecer no momento de interação com os alunos. Isso implica em estabelecer objetivos de ensino, selecionar os recursos necessários para alcançá-los, estruturar as atividades futuras considerando a seleção de problemas a serem abordados e definir os meios necessários para efetivar o ensino. Além disso, o docente decide sobre os instrumentos de avaliação que possibilitam a observação da aprendizagem do aluno.

Assim, para refletirmos sobre a complexidade da atividade do professor, compreendendo a tomada de decisões didáticas como algo inerente a essa atividade e levando em consideração os momentos essenciais dessa tomada de decisões, apresentamos a seguir o *Modelo dos Níveis da Atividade do Professor* proposto por Margolinas (2002, 2005), desenvolvido a partir da ampliação do *Modelo de Estruturação do Milieu* (Meio) concebido por Brousseau (1986).

3.2 Modelo dos Níveis da Atividade do Professor

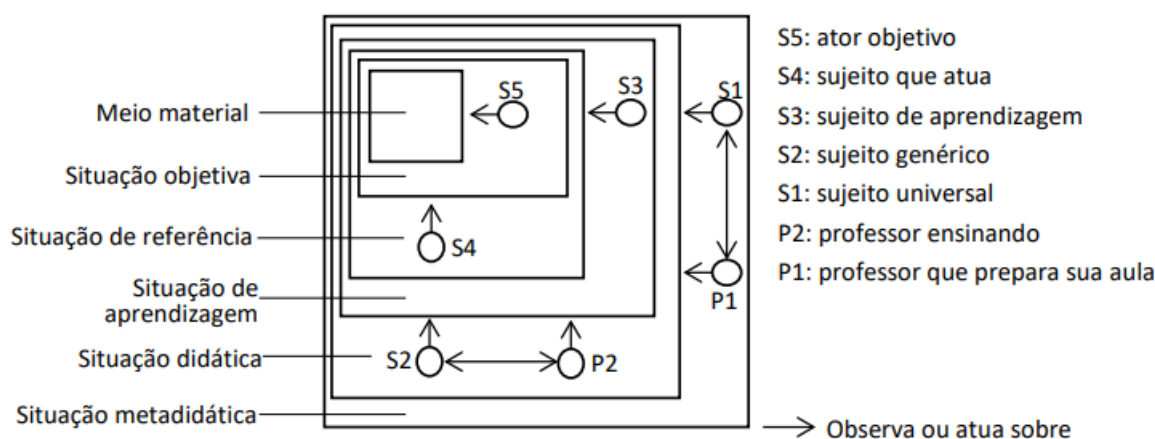
O modelo dos *Níveis da Atividade do Professor* busca explicar a complexidade da atividade do professor levando em conta os elementos com os quais ele interage. Este modelo foi proposto por Margolinas (2002, 2005) e desenvolvido a partir da ampliação do modelo de *Estruturação do Milieu* (Meio) concebido por Brousseau (1986). Sendo, portanto, fundamentado na Teoria das Situações Didáticas (TSD).

De acordo com Margolinas (1995, p. 4) a ideia inicial de meio apresentada por Brousseau (1986) sugere que “o meio é um jogo ou parte de um jogo que se comporta como um sistema inacabado”. Posteriormente, o pesquisador descreve-o como um sistema antagonista ao sujeito e que permite retroações às suas ações (Margolinas, 2002). Ou seja, nesse sistema antagônico, o sujeito age sobre o meio e, por sua vez, esse meio age sobre o sujeito produzindo interações (ação e retroações) que criam condições de aprendizagem.

Na estruturação do meio (Figura 4) proposta por Brousseau,

pode-se identificar o sujeito professor tendo em mente duas posições: o professor que prepara a aula e o professor que leciona. Já o aluno tem a escolha de adotar cinco posições diferentes, de modo que podem ser identificados cinco meios diversos de interação. Nos diferentes níveis de um meio, as interações de um sujeito – seja ele professor ou aluno – também são diferentes: ele toma decisões conforme regras, estratégias e conhecimentos, atua em função das informações que recebe e interpreta etc. (BROUSSEAU, 2008, p. 56-57).

Figura 4 - Estruturação do Milieu (Meio)



Fonte: Brousseau (2008, p. 57)

Como destacado por Brousseau (2008, p. 57), ao analisarmos essa estrutura de dentro para fora “[...] podemos observar que a *situação* de um nível passa a ser *meio* para um sujeito externo”. Assim, o *meio material* e o *ator objetivo* constituem a *situação objetiva*, que se torna um *meio objetivo* para o sujeito que atua (S4)”.

Vale salientar, que essa estrutura apresentada na Figura 4 consiste em uma das versões mais atuais, resultado de estudos e aprofundamentos de outros pesquisadores, dentre os quais destaca-se a própria Margolinas (Brousseau, 2008).

Como reforça Lima (2017), com base nas ideias de Margolinas (1995), durante muito tempo o modelo de estruturação do meio de Brousseau (1986) foi mais citado do que utilizado nas pesquisas em Didática da Matemática. “Dentre as razões apontadas pela autora estão a

complexidade do esquema utilizado no modelo, além da insuficiência de ‘posições’ que contemplem o papel que o professor exerce na relação didática” (Lima, 2017, p. 163).

Portanto, para colocar em evidência o papel do professor nessa relação didática, Margolinas (2002) propôs uma ampliação e uma nova sistematização no modelo de estruturação do meio, como pode ser observado no Quadro 4. De acordo com Lima (2017), foram introduzidas novas posições e uma configuração planificada do modelo, em oposição ao modelo original que possui uma estrutura “encaixada” que lembra as camadas de uma “cebola”, como descreve Brousseau (1986). Logo, nessa configuração observa-se as posições ocupadas pelo meio (M), pelo aluno (E), pelo professor (P) e as diferentes situações (S) em que esses elementos se envolvem.

Quadro 4 - Modelo de Estruturação do Milieu (Meio) proposto por Margolinas

M+3 M de construção		P+3 P-noosfera	S+3 Situação noosférica	Sobre – didática
M+2 M de projeto		P+2 P-construtor	S+2 Situação de construção	
M+1 M didático	E+1 E-reflexivo	P+1 P-planejador	S+1 Situação de projeto	
M0 M de aprendizagem	E0 Aluno	P0 Professor	S0 Situação Didática	
M-1 M de referência	E-1 E-aprendiz	P-1 P-observador	S-1 Situação de aprendizagem	A-didática
M-2 M-objetivo	E-2 E-agindo		S-2 Situação de referência	
M-3 M-material	E-3 E-objetivo		S-3 Situação objetiva	

Fonte: Margolinas (2002)

As posições S+1, S+2 e S+3 constituem as *situações sobre-didáticas*, momento em que o professor não está em interação real com o aluno, porém sua memória didática sobre o aluno e/ou sobre a classe influencia na sua atividade. Já as posições S-1, S-2 e S-3 constituem as *situações a-didáticas*, relacionadas diretamente com a atividade do aluno, e interagem com as posições E-1 (momento que o professor observa o aluno em atividade), E-2 e E-3

(correspondentes ao *aluno em ação* e ao *aluno objetivo*, respectivamente). Por fim, S0 corresponde à *situação didática* propriamente dita, momento em que o professor está em interação real com o aluno. Ela se caracteriza na parte mais visível da atividade do professor (Lima, 2017).

Isto posto, a partir desse modelo sistemático de estruturação do meio podemos compreender melhor as interações entre professor e aluno na relação didática. Essa estruturação apresenta níveis que estão associados entre si, e o *milieu* de cada nível é constituído pela situação do nível imediatamente anterior. Nela são realizadas as análises descendentes e ascendentes de uma situação didática: descendente pela atividade do professor nos níveis de estruturação do *milieu* (do nível S+3 ao S0) e ascendente pela atividade do aluno em uma situação adidática, iniciada no S-3, e indo até a situação didática no nível S0. Desse modo, as situações de professor e aluno são colocadas em posições simétricas (Soares; Bianchini, 2017).

Esse modelo sistemático de estruturação do meio proposto por Margolinas (2002, 2005), contempla, ao mesmo tempo, as atividades do professor e do aluno. No entanto, com o objetivo de se concentrar apenas na atividade do professor, essa pesquisadora apresentou um modelo organizado por níveis, denominando-o *Modelo dos Níveis da Atividade do Professor* (Quadro 5), que busca analisar as diferentes etapas da atividade docente, abrangendo desde o planejamento, a realização da aula (durante a qual ocorre sua interação com o aluno), até a observação do aluno em ação.

Quadro 5 - Modelo dos Níveis da Atividade do Professor

Nível +3: Valores e concepções sobre o ensino e a aprendizagem

Projeto educativo: valores educativos, concepções de aprendizagem e de ensino.

Nível + 2: Construção do tema

Construção didática global na qual se inscreve a aula: noções para estudar e aprendizagem para realizar.

Nível + 1: Planejamento da aula

Projeto didático específico para uma aula: objetivos, planejamento do trabalho.

Nível 0: Situação didática

Realização da aula, interação com os estudantes, tomada de decisões na ação.

Nível -1: Observação do estudante em atividade

Percepção da atividade dos estudantes, regulação do trabalho destinado aos estudantes.

Fonte: Margolinas (2002)

Segundo Margolinas *et al.* (2005, p. 208), “este modelo foi projetado para melhor levar em consideração a complexidade da atividade do professor, e em particular para capturar os elementos com os quais o professor está lidando”. Margolinas e Wozniak (2010, p. 236) ainda acrescentam que esse modelo busca “explicar a interação complexa entre as diferentes situações que o professor experimenta, em diferentes níveis, na maioria das vezes simultaneamente”.

Conforme evidenciado neste modelo, os níveis que estão associados à atividade do professor são +3, +2, +1, 0 e -1. Esses níveis, por sua vez, correspondem respectivamente às oposições do professor propostas no modelo de estruturação do meio, ou seja, ao professor-noosfera (P+3), professor-construtor (P+2), professor-planejador (P+1), professor (P0) e ao professor-observador (P-1).

Como destacamos anteriormente, as decisões didáticas do professor podem ocorrer em termos de *macrodecisões* e *microdecisões*. Desse modo, podemos inferir que as decisões tomadas pelo professor nos níveis +3, +2 e +1, quando não está em interação real com o aluno, correspondem às *macrodecisões*. Já as decisões tomadas de imediato pelo professor no nível 0, quando está em interação real com o aluno, correspondem às *microdecisões*.

Cada um desses níveis possui características distintas em relação à situação do professor. Apesar da sua apresentação sequencial e linear, Margolinas (2002) esclarece que os níveis de atividade não devem ser relacionados ao aspecto temporal, pois deve-se levar em conta a dinamicidade da atividade do professor em todos os momentos, bem como a interação não linear existente entre esses níveis.

Essa organização deve ser compreendida unicamente como estrutural. Portanto, é fundamental estar ciente da natureza reflexiva existente entre seus níveis, pois a interação do professor com o seu *milieu* em cada um deles pode induzir alterações em sua abordagem nos demais níveis. Assim, ao interagir com os alunos no Nível 0, o professor pode reavaliar seu planejamento e adotar abordagens distintas no Nível +1, reexaminando suas concepções sobre o ensino de um determinado tema (Nível +2) e até mesmo modificando sua perspectiva sobre o ensino da matemática (Nível +3). Da mesma forma, ao refletir sobre o ensino de matemática (Nível +3), o professor pode alterar suas concepções sobre o ensino de um determinado tema (Nível +2), o planejamento da aula (Nível +1) e a interação em sala de aula com o saber e os alunos (Nível 0) (Margolinas, 2002).

Para fazer uma descrição mais detalhada dos níveis da atividade do professor, visando compreender melhor as características encontradas em cada um deles, utilizaremos os argumentos apresentados por Comitì, Grenier e Margolinas (1995) e Lima (2011, 2017).

O **Nível +3**, considerado como *noosférico* ou *ideológico*, caracteriza-se pela ação do professor que reflete, de forma abrangente, sobre as concepções de disciplina, o ensino da matemática, o ensino-aprendizagem em geral. Esse momento de sua atividade envolve a mobilização de conhecimentos relacionados à noção matemática e à aprendizagem que sustentam o seu projeto de ensino e que determinam os conhecimentos envolvidos nos diferentes níveis da situação (Lima, 2011; Comiti; Grenier; Margolinas, 1995).

O **Nível +2** é caracterizado como sendo o de *construção*. Nesse nível, a atuação do professor consiste em estruturar, de maneira geral, o ensino de um conteúdo matemático. Para tanto, ele mobiliza conhecimentos relacionados à situação de ensino e de aprendizagem (Lima, 2011). Aqui, é possível descrever as decisões didáticas gerais tomadas pelo professor, bem como as razões para essas decisões (Comiti; Grenier; Margolinas, 1995).

O **Nível +1**, tido como o de *planejamento*, compreende o momento em que o professor prepara sua aula, mobilizando conhecimentos globais acerca do conhecimento do aluno e das dificuldades de aprendizagem associadas a uma noção específica (Lima, 2011). Ao elaborar o planejamento, o professor antecipa possíveis eventos que poderão ocorrer na sala de aula, estabelece objetivos de ensino e de aprendizagem, bem como os meios prováveis para atingi-los. Ele estrutura as ações futuras, considerando aspectos como metodologia e avaliação, entre outros elementos essenciais ao processo de ensino (Lima, 2017). No entanto, como ainda destaca essa pesquisadora, a estruturação das ações não está subordinada exclusivamente à vontade e conhecimento do professor, uma vez que ele se depara com fatores como o desempenho dos alunos, a dinâmica da turma e da escola, além da interferência familiar. Dessa forma, a tomada de decisões será moldada por diferentes fatores.

O **Nível 0**, correspondente à *situação didática*, caracteriza-se pela ação do professor em sala decorrente da sua interação com os alunos. Como argumentam Comiti, Grenier e Margolinas (1995) e Lima (2011), nesse momento o professor mobiliza conhecimentos baseados nas interpretações e/ou representações que ele tem das dificuldades dos alunos e de suas causas, para subsidiar sua tomada de decisões imediatas, ou seja, suas microdecisões.

Margolinas (2002) aponta que o professor, assim como o aluno, desempenha um papel ativo na relação didática e, estando em situação, também interage com um meio e aprende a partir desta interação. “O meio do professor contempla o aluno e o meio do aluno. O professor em situação didática age sobre o seu meio e, em função das retroações que dele recebe, pode modificá-lo porque foi ele quem o concebeu com o objetivo de ensinar” (Lima, 2017, p. 166).

O **Nível -1** compreende o momento em que o professor realiza a *observação da atividade do aluno*. Neste nível entram em jogo “conhecimentos que permitem ao professor

distinguir no trabalho do aluno, os erros e as dificuldades de aprendizagem que estão relacionadas com o saber a ensinar” (Lima, 2011, p. 365). Aqui, a postura do professor não implica realmente em um silêncio absoluto, mas sim uma suspensão de conclusões em relação à situação apresentada. Os conhecimentos mobilizados pelo professor estão ligados à análise implícita que ele realiza da situação didática que acredita ter estabelecido. Desse modo, são esses conhecimentos que determinam se o professor intervém ou não durante uma fase em que ele não desempenha um papel ativo (diferentemente das fases de validação e institucionalização) (Comiti; Grenier; Margolinas, 1995).

Tendo em vista que nossa pesquisa está centrada nas decisões didáticas tomadas pelo professor durante o processo de (re)construção de uma atividade de ensino, nos concentramos particularmente nas decisões tomadas pelo professor antes da situação didática, ou seja, nas suas *macrodecisões*. Assim, à luz desse Modelo dos Níveis da Atividade do Professor (Margolinas, 2002, 2005), nos situamos especificamente no Nível +1, que compreende o momento em que o professor constroi o planejamento da aula. No entanto, ressaltamos o fato desse referido nível da atividade do professor não estar isolado dos demais, uma vez que nesse nível o professor interage simultaneamente com sua construção didática mais global na qual se inscreve sua proposta de ensino (Nível +2), e com as concepções de ensino e aprendizagem relacionadas com o seu projeto didático (Nível +3). Como já destacamos, nesse momento o professor não está em interação real com o aluno, porém sua memória didática sobre o aluno e/ou sobre a classe influencia na sua atividade.

Ao lançarmos nosso olhar para investigarmos as decisões didáticas tomadas pelos professores, temos que levar em consideração a existência de fatores de origens diversas que são subjacentes a essas decisões e passíveis de influenciá-las. Desse modo, cientes de que os professores são suscetíveis a influências que interferem em suas decisões para organização de um saber a ser ensinado, destacamos a seguir um modelo de fatores decisoriais proposto por Bessot (2019) que evidencia alguns elementos que podem influenciar o processo de tomada de decisão docente.

3.3 Fatores de influência nas decisões didáticas do professor

Como evidenciamos na seção anterior, o professor é levado a tomar decisões variadas em diversos momentos de sua atividade profissional. No entanto, entendemos como decisões didáticas aquelas tomadas pelo professor com o objetivo de promover o avanço da aprendizagem dos alunos em relação a um dado conhecimento.

Conforme apresentado por Lima (2017), ao tomar como ponto de partida a classificação de conhecimentos do professor proposta por Shulman (1986) – *conhecimento do conteúdo*, *conhecimento pedagógico* e *conhecimento pedagógico do conteúdo* – alguns pesquisadores como Tahri (1993), Bloch (2005) e Lima (2006, 2009) realizaram estudos sobre os conhecimentos que têm o potencial de influenciar as escolhas do professor e, por conseguinte, suas decisões didáticas. À vista disso, Lima (2017) salienta que

É consenso entre os profissionais da Educação e, podemos dizer, entre os alunos, famílias e outros atores sociais, que o domínio dos conteúdos da disciplina que ensina é condição indispensável para um bom professor. Porém, este domínio, por si só, não é suficiente para lograr êxito no ensino. Conhecer o aluno e sua realidade, a classe, o programa escolar e/ou as orientações oficiais para o professor, por exemplo, é pertinente e necessário para qualificar socialmente um bom professor. Modelizar decisões didáticas requer considerar, também, estes aspectos (Lima, 2017, p. 167).

Desse modo, da mesma forma que Lima (2017), entendemos que a tomada de decisões do professor é influenciada por fatores de origens diversas, não se limitando à vontade e aos conhecimentos do professor. Assim, a compreensão do professor sobre aspectos como para quem ensina, onde ensina e em que se orienta, também desempenha um papel significativo em suas decisões.

Cientes de que os professores estão sujeitos a influências que afetam suas decisões sobre como organizar a maneira pela qual um determinado conhecimento será apresentado em uma situação didática, utilizaremos como base o modelo teórico de fatores decisoriais apresentado por Bessot (2019) para nos aprofundarmos no processo de tomada de decisão didática do professor. A autora propõe um modelo abrangente de fatores capazes de influenciar as decisões didáticas dos professores, agrupando-os em três categorias distintas: fatores do tipo *externo*, fatores do tipo *epistêmico* e fatores do tipo *história didática*.

Os fatores do tipo *externo* consistem naqueles cujo domínio não está nas mãos do professor, mas que influenciam sua atividade. Em outras palavras, são restrições sobre as quais o professor não tem autonomia para decidir, pois estão além do seu controle.

Por sua vez, os fatores do tipo *epistêmico* compreendem tudo o que envolve a relação pessoal do professor com um objeto do saber a ensinar, isto é, suas concepções acerca de um determinado saber ou prática pedagógica. Estes fatores englobam conhecimentos do professor acerca do que é a disciplina; do que é aprender; de como ensinar; dos programas e dos recursos institucionais; da comunidade de prática (Espíndola; Luberiaga; Tragalova, 2018).

Por fim, os fatores do tipo *história didática* referem-se ao que o professor absorve da história compartilhada com seus alunos acerca de um dado conhecimento, ou seja, estão

relacionados às situações experienciadas pelos docentes a partir da sua interação com os estudantes e com um saber a ser ensinado.

Assim, para uma reflexão mais aprofundada sobre as decisões didáticas do professor, as quais são tomadas em todos os níveis de sua atividade, vamos explorar mais detalhadamente a seguir cada um dos fatores decisoriais apresentados por Bessot (2019).

3.2.1 Fatores do tipo externo

Sendo os fatores do tipo externo caracterizados como aqueles que influenciam a atividade docente sem que o professor possua domínio sobre eles, podem ser categorizados em dois tipos: *os genéricos e os circunstanciais*.

Os **genéricos** caracterizam-se como restrições e condições mais gerais, estando relacionados aos níveis superiores da escala de codeterminação (Bessot, 2019). Como destaca Silva (2020):

Aqui no Brasil podemos observar que os fatores decisoriais externos que se referem à categoria das restrições genéricas, podem ocorrer nas instituições escolares por meio da determinação de semanas avaliativas, inserção do conteúdo programático vinculado a datas comemorativas, evento cultural realizado envolvendo a escola e a comunidade local, dentre outros (Silva, 2020, p. 47).

Desse modo, os fatores externos genéricos estão relacionados às restrições e condições impostas pela escola, como semana de provas e períodos de férias escolares, por exemplo.

Por sua vez, os fatores externos **circunstanciais** estão relacionados a eventos imprevisíveis que impactam no desenvolvimento das aulas, como, por exemplo, um alagamento (Bessot, 2019). Essas restrições circunstanciais correspondem a situações não recorrentes em sala de aula que se sobrepõem à atividade do professor (Silva, 2020).

Portanto, como podemos perceber, enquanto os fatores externos genéricos estão conectados a aspectos relacionados a instâncias superiores, como normas a serem seguidas, exigidas ou recomendadas; os fatores externos circunstanciais compreendem acontecimentos imprevisíveis que podem interromper ou modificar o tempo didático.

3.2.2 Fatores do tipo epistêmico

Nos fatores do tipo epistêmico, o professor é considerado como um sujeito epistêmico, isto é, a análise das decisões do professor é reduzida à sua dimensão cognitiva (Bessot, 2019).

Esses fatores estão “[...] relacionados à relação pessoal do professor com diferentes objetos de conhecimento” (Bonna *et al.*, 2020, p. 13). Sendo assim, Bessot (2019) apresenta três subtipos de fatores do tipo epistêmico: *relação pessoal do professor à pedagogia*; *relação pessoal do professor à disciplina*; *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*.

No que se refere à **relação pessoal do professor à pedagogia**, como evidencia Bonna *et al.* (2020, p. 13), encontram-se reunidos aqui “o conhecimento profissional do professor descrito como Conhecimento Pedagógico (PK) (Ball *et al.* 2008), que pode ser enriquecido tendo em conta as novas tecnologias para incluir o conhecimento do tipo TPK em referência ao modelo TPACK (Mishra e Koehler 2006)”. Desse modo, esse conhecimento envolve dois aspectos específicos: *Como aprendemos* e *Como ensinamos*.

O aspecto *Como aprendemos*, “reflete as diferentes ideologias que circulam em uma determinada sociedade, num determinado momento, ligada a diferentes teorias de aprendizagem” (Bessot, 2019, p. 14). Assim, essa autora sugere que a forma como aprendemos um determinado saber (através da resolução de problemas, repetição, investigação etc.) é influenciada pelas diferentes concepções e teorias de aprendizagem presentes na sociedade em um dado momento. Desse modo, esse aspecto possui uma grande influência na tomada de decisões didáticas uma vez que a maneira como se aprende pode influenciar futuras decisões do professor.

Quanto ao aspecto *Como ensinamos*, Bessot (2019) destaca que este também está ligado às diferentes ideologias ou teorias sobre o ensino que circulam na sociedade. Portanto, podemos considerar que, durante sua prática, seja na elaboração de uma atividade ou na explicação de como resolvê-la, o professor mobiliza elementos epistêmicos relacionados às práticas de ensino e aos saberes docentes. Assim, ele combina conhecimentos sobre o conteúdo a ser ensinado com questões didáticas que influenciam a aprendizagem dos alunos (Silva, 2022).

No que tange à **relação pessoal do professor à disciplina**, Bessot (2019) sugere que essa relação é codeterminada pela sociedade, ou até mesmo pela civilização, na qual o professor está inserido. Essa relação envolve conhecimentos sobre o objeto a ser ensinado, ou seja, abrange a compreensão dos conteúdos matemáticos e a capacidade do professor de justificar certos conceitos e afirmações aceitos como verdadeiros. Nesse sentido, assim como Silva (2022), acreditamos que as relações do professor com o conhecimento a ser trabalhado em sala de aula são particulares. Cada professor carrega consigo suas próprias concepções sobre o conteúdo (como resolução de problemas, modelagem matemática, etnomatemática, entre outros), construídas a partir das experiências vivenciadas, sejam elas acadêmicas ou profissionais.

Já a **relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado**, compreende o conhecimento profissional do professor acerca do conteúdo e do currículo proposto pelos órgãos oficiais, isto é, como o conhecimento para ensinar é oficialmente prescrito: “sobre a divisão em programas e recursos oficiais por área, setor ou tema, mas também por indicações sobre como ensiná-lo (pedagogia)” (Bessot, 2019, p. 16). Portanto, refere-se ao conhecimento do professor sobre os conteúdos estabelecidos para cada ano escolar e as orientações de aprendizagem presentes nos documentos que orientam a educação.

3.2.3 Fatores do tipo história didática

De acordo com Bessot (2019), os fatores do tipo história didática referem-se à história compartilhada entre aluno(s) e professor, isto é, suas relações ao se trabalhar certo conteúdo em determinado momento escolar, sendo descrita no Modelo de Estruturação do Meio principalmente em S+1, S0 e S-1. Assim, como sugere Espíndola e Trgalová (2015), tais fatores estão relacionados ao conhecimento do professor sobre um aluno em particular, sobre seus alunos de uma turma, ou sobre os alunos em geral de um determinado nível. Vale salientar “que o aluno só é considerado aqui em suas relações e interações com o professor, já que adotamos o ponto de vista do professor” (Bessot, 2019, p. 16).

Desse modo, no que diz respeito à história didática, são propostos por Bessot (2019) três fatores principais: *história interaluno de uma turma genérica*; *história interaluno de uma turma alvo*; *história intra-aluno*.

O primeiro fator, **história interaluno de uma turma genérica**, está vinculado a uma turma que o professor ensinou em algum momento de sua carreira docente, na qual ele recorda algumas das decisões tomadas em sala de aula, bem como os efeitos dessas decisões na condução do estudo do assunto, tema ou campo específico. O professor recorda certos comportamentos dos alunos observados nos níveis S-1 ou S0, recorrentes ou inesperados, em relação à matéria ou tema ministrado (estratégias, procedimentos, motivações, erros, bloqueios etc.) (Bessot, 2019; Bonna *et al.*, 2020).

Por sua vez, o fator **história interaluno de uma turma alvo** está relacionado à percepção do professor sobre a turma na qual está lecionando atualmente, dos comportamentos observados dos alunos nos níveis S-1 e S0. O professor lembra de algumas de suas decisões e dos efeitos dessas decisões sobre o comportamento dos alunos da turma alvo (Bessot, 2019; Bonna *et al.*, 2020).

Já o fator **história intra-aluno** refere-se à percepção do professor sobre os comportamentos observados em um aluno específico e/ou sua condição (repetente, novato, bom aluno, mau aluno etc.) no momento da aula. O professor se recorda de algumas de suas decisões e dos efeitos dessas decisões sobre esse aluno em particular (Bessot, 2019; Bonna *et al.*, 2020).

Bessot (2019) destaca que as memórias relacionadas a esses três fatores da história didática possibilitam ao professor projetar-se no futuro para tomar decisões didáticas nas situações S+2, S+1 e S0.

4 PRODUÇÃO DOS DADOS DA PESQUISA

Neste capítulo caracterizamos a pesquisa realizada, apresentamos as fases e os procedimentos realizados para o levantamento dos dados e elaboração das categorias para análise dos mesmos.

4.1 Caracterização da pesquisa

Como apontam Fiorentini e Lorenzato (2012), a natureza do fenômeno a ser estudado é o que determina a abordagem metodológica mais adequada a ser adotada ou desenvolvida pelo pesquisador. Nesse sentido, encontramos na pesquisa qualitativa o caminho para compreendermos as decisões didáticas tomadas pela professora, bem como os fatores capazes de influenciar tais decisões.

A pesquisa qualitativa é definida por Oliveira (2012) como:

[...] um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação. Esse processo implica em estudos segundo a literatura pertinente ao tema, observações, aplicações de questionários, entrevistas e análise de dados que deve ser apresentada de forma descritiva (OLIVEIRA, 2012, p. 37).

Desta forma, não é o foco da pesquisa qualitativa enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem se utilizar de técnicas estatísticas para a análise dos dados. Ela parte de temas abrangentes que vão se delineando à medida que a pesquisa avança. Essa abordagem implica na obtenção de dados descritivos pelo contato direto do pesquisador com a situação em análise, visando compreender os fenômenos a partir da perspectiva dos sujeitos envolvidos, ou seja, dos participantes da situação investigada (Godoy, 1995a).

Partindo dessa perspectiva, o nosso papel enquanto pesquisadores qualitativos consiste em tentar “[...] compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados” (Bogdan; Biklen, 1994, p. 70). Para tanto, esses autores consideram necessário recorrermos à observação empírica, uma vez que é em função de instâncias concretas do comportamento humano que se pode refletir de forma mais clara e profunda sobre a condição humana.

Do ponto de vista de Chizzotti (2000):

A abordagem qualitativa parte do fundamento de que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, uma interdependência viva entre o sujeito e o objeto, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito. O conhecimento não se reduz a um rol de dados isolados, conectados por uma teoria explicativa; o sujeito-observador é parte integrante do processo de conhecimento e interpreta os fenômenos, atribuindo-lhes um significado. O objeto não é um dado inerte e neutro; está possuído de significados e relações que sujeitos concretos criam em suas ações (Chizzotti, 2000, p. 79).

A presente pesquisa vai justamente ao encontro dessa perspectiva de abordagem qualitativa apresentada por Chizzotti (2000), na medida em que é: descritiva, pois os dados estão repletos de descrições referentes ao que é observado; o processo é priorizado em relação aos resultados, ou seja, focamos em entender como o problema em questão se revela nos dados analisados; a análise dos dados é conduzida de maneira indutiva, pois as abstrações surgem à medida que o pesquisador coleta e examina os dados; e os significados encontrados nos dados representam o cerne da análise (Lüdke; André, 2015).

Como apontam Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 71), “uma pesquisa é considerada descritiva quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema”. Desse modo, ao buscarmos analisar as decisões didáticas tomadas por um professor de Matemática, procederemos de modo a observar, registrar, analisar, classificar e interpretar os dados obtidos, sem a realização de qualquer interferência sobre eles, fato que caracteriza uma pesquisa como sendo descritiva. Ao caracterizar esse tipo de pesquisa, Prodanov e Freitas (2013, p. 52) propõem que,

Tal pesquisa observa, registra, analisa e ordena dados, sem manipulá-los, isto é, sem interferência do pesquisador. Procura descobrir a frequência com que um fato ocorre, sua natureza, suas características, causas, relações com outros fatos. Assim, para coletar tais dados, utiliza-se de técnicas específicas, dentre as quais se destacam a entrevista, o formulário, o questionário, o teste e a observação.

De modo complementar, ao pensarmos na maneira pela qual obteremos os dados necessários para a elaboração da pesquisa, ou seja, nos procedimentos técnicos adotados, consideramos que nossa investigação se constitui de um estudo de caso, visto que “busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização” (Fiorentini; Lorenzato, 2012, p. 110).

Como argumenta Gil (2002, p. 54), o estudo de caso “consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento [...]”. Seguindo tal raciocínio, Fiorentini e Lorenzato (2012) destacam que o caso

não se limita a uma única pessoa, grupo de pessoas ou instituições educacionais. Pode abranger qualquer "sistema delimitado" que exiba características singulares que justifique uma atenção investigativa especial por parte do pesquisador. Nesta pesquisa o estudo de caso foi realizado com a colaboração de uma professora de matemática do Ensino Médio que participou do projeto PRIPINT.

Martins (2006, p. 11) aponta que “como estratégia de pesquisa, um Estudo de Caso, independentemente de qualquer tipologia, orientará a busca de explicações e interpretações convincentes para situações que envolvam fenômenos sociais complexos”, e, ainda, a estruturação “de uma teoria explicativa do caso que possibilite condições para se fazerem inferências analíticas sobre proposições constatadas no estudo e outros conhecimentos encontrados.” (Martins, 2006, p. 12).

Com o objetivo de favorecer a compreensão do objeto de estudo da pesquisa, consideramos importante a realização de uma entrevista. Assim, esta foi utilizada como procedimento de coleta de dados da pesquisa por compreendermos que ela “pode desempenhar um papel vital na combinação com outros métodos” (Gaskell, 2002, p. 65). O material coletado pela entrevista se constituirá também como *corpus* dessa investigação.

Duarte (2004) destaca que as entrevistas, na pesquisa qualitativa, oferecem ao pesquisador a oportunidade de realizar uma análise mais aprofundada, capturando nuances das percepções individuais e significados atribuídos à realidade de cada participante. Logo, a utilização da entrevista nesta pesquisa é justificada pela necessidade de obtermos informações da professora, acerca de suas percepções sobre o nosso objeto de estudo. Pois, como evidenciado por Franco (2008, p. 21), “toda mensagem falada, escrita ou sensorial contém, potencialmente, uma grande quantidade de informações sobre o seu autor”, e este “seleciona o que considera mais importante para ‘dar o seu recado’”.

Para a nossa pesquisa, adotaremos o modelo de entrevista semiestruturada, visto que

[...] na entrevista semi-estruturada, a resposta não está condicionada a uma padronização de alternativas formuladas pelo pesquisador como ocorre na entrevista com dinâmica rígida. Geralmente, a entrevista semi-estruturada está focalizada em um objetivo sobre o qual confeccionamos um roteiro com perguntas principais, complementadas por outras questões inerentes às circunstâncias momentâneas à entrevista [...]. É mais adequado quando desejamos que as informações coletadas sejam fruto de associações que o entrevistado faz, emergindo, assim, de forma mais livre (MANZINI, 1990, p. 154).

Desse modo, optamos pela entrevista semiestruturada, pois as respostas não seguem um padrão fixo, permitindo uma abordagem mais flexível, adaptando-se às necessidades

específicas do momento e podendo ser complementada com perguntas conforme necessário. Planejamos que a entrevista não fosse algo rígido e mecânico, mas que se desenvolvesse de forma dinâmica e fluida, permitindo espaço para curiosidades e dúvidas surgirem naturalmente, tornando-a mais semelhante a uma conversa. Sendo assim, acreditamos que o modelo de entrevista semiestruturada nos permitirá estabelecer um melhor diálogo com os professores, possibilitando a construção de um ambiente no qual eles se sintam mais à vontade para falar, expor suas ideias e dar explicações.

Para analisar os dados da pesquisa oriundos da produção dos professores (oral e escrita), nos inspiramos na abordagem da análise de conteúdo de Bardin (2016), enquanto um método interpretativo em pesquisas qualitativas. Na concepção de Bardin (2016), o termo análise de conteúdo designa

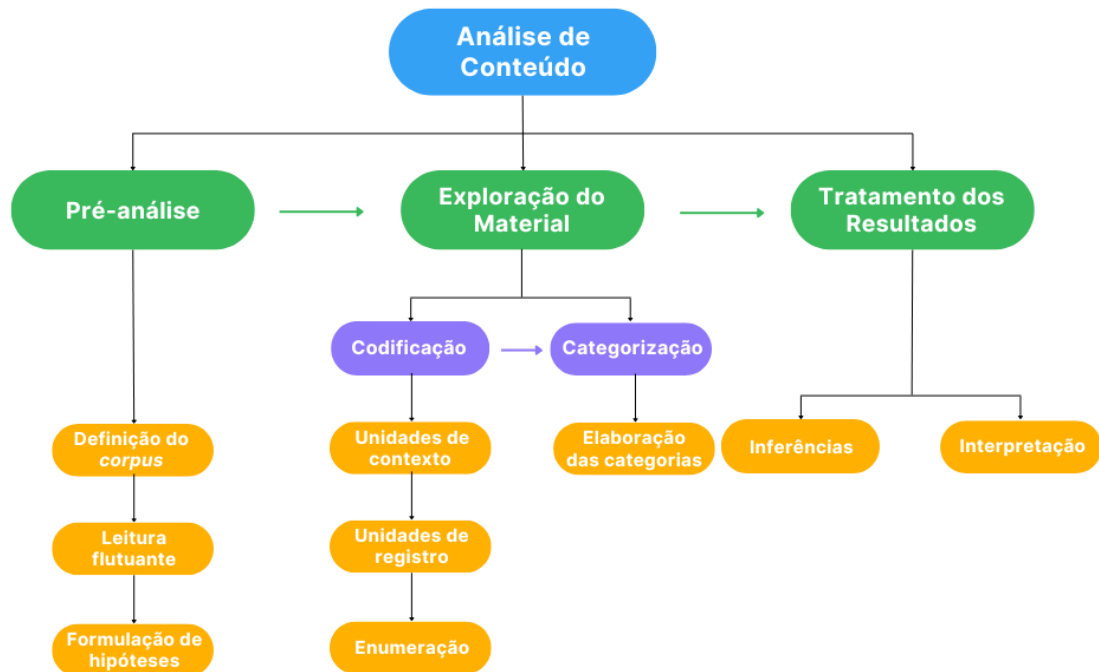
um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter, por procedimentos objetivos e sistemáticos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens (Bardin, 2016, p. 48).

Esta abordagem transcende a mera descrição das mensagens, buscando alcançar uma compreensão mais profunda do conteúdo nelas contidas por meio da interpretação. Essa interpretação pode ser conduzida com base em um arcabouço teórico preestabelecido ou através do desenvolvimento de uma teoria emergente a partir dos próprios dados. Independentemente da abordagem escolhida, a interpretação representa um momento fundamental da análise de conteúdo. Momento este no qual os resultados são validados e seus significados são elucidados (Rodrigues, 2019).

Isto posto, frente às ideias de Bardin (2016), para melhor compreendermos a estruturação da análise dos dados coletados, sistematizamos na Figura 5 os aspectos relativos à análise de conteúdo que foram adotados na presente pesquisa.

Desse modo, procedemos a sistematização da análise seguindo as três fases propostas por Bardin (2016): *Pré-análise; Exploração do material; Tratamento dos resultados, inferência e interpretação.*

Figura 5 - Síntese esquemática da análise de conteúdo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Pré-análise

A pré-análise pode ser compreendida como uma fase de organização dos dados com o objetivo de constituir o *corpus* da pesquisa. “O *corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (Bardin, 2016, p. 126).

A fase da pré-análise, segundo Bardin (2016), envolve: leitura “flutuante”; escolha dos documentos; formulação das hipóteses e dos objetivos; referenciação dos índices e a elaboração de indicadores; preparação do material. Vale destacar que essas atividades da fase de pré-análise não necessariamente se sucedem obedecendo uma ordem cronológica, porém estão estreitamente relacionadas.

A primeira atividade da fase de pré-análise, a **leitura “flutuante”**, consiste no contato inicial com o material que será submetido à análise objetivando conhecê-lo, “[...] deixando-se invadir por impressões, representações, emoções, conhecimentos e expectativas” (Franco, 2008, p. 48).

Por conseguinte, inicia-se o processo de **escolha dos documentos** a serem submetidos à análise (*corpus*), que corresponde à segunda atividade desta fase. De acordo com Bardin (2016, p. 126), “o universo de documentos de análise pode ser determinado *a priori* [...]. Ou

então o objetivo é determinado e, por conseguinte, convém escolher o universo de documentos suscetíveis de fornecer informações sobre o problema levantado [...].”

A terceira atividade da fase de pré-análise compreende a **formulação das hipóteses e dos objetivos**. Para Bardin (2016), uma hipótese consiste em uma afirmação provisória que será investigada pelo pesquisador por meio de procedimentos analíticos. Ela representa uma conjectura originada da intuição e que permanece sem confirmação até ser devidamente testada. O objetivo refere-se à finalidade geral que buscamos alcançar, o contexto teórico e/ou pragmático no qual os resultados serão aplicados. A descrição clara desse objetivo auxilia na delimitação dos dados que de fato serão relevantes para a pesquisa em questão.

A **referenciação dos índices e a elaboração de indicadores** correspondem à quarta atividade da fase de pré-análise. Ao se encarar os textos como uma manifestação que contém índices a serem elucidados pela análise, o processo preliminar envolve a seleção destes, com base nas hipóteses, seguido por sua organização sistemática em indicadores (Bardin, 2016). Segundo Franco (2008, p. 54) “o índice pode ser a menção explícita, ou subjacente, de um tema em uma mensagem”. Esta pesquisadora aponta ainda que na maioria das pesquisas, independentemente do tema abordado, a relevância do mesmo para a análise dos dados aumenta conforme a frequência com que é mencionado. “Neste caso, o *indicador* correspondente será a *frequência* observada acerca do tema em questão” (Franco, 2008, p. 54).

Por fim, a quinta atividade da fase de pré-análise consiste na **preparação do material**. Como especificado por Bardin (2016), antes de iniciar a análise em si, é necessário preparar o material coletado. Assim, esta atividade compreende o momento em que deve ser realizada uma edição do material antes da análise de conteúdo propriamente dita.

Exploração do material

Após a realização da fase de pré-análise, temos, na sequência, a exploração do material, que compreende as operações de **codificação**, decomposição ou enumeração, a partir de regras previamente estabelecidas. A codificação está associada à transformação de dados brutos, usando regras precisas, em informações representativas dentro de um contexto específico.

De acordo com Bardin (2016) o processo de codificação envolve três escolhas, a saber: das unidades de registro e de contexto (recorte); das regras de contagem (enumeração); das categorias (classificação e agregação).

A **unidade de registro** é a unidade de significação codificada e corresponde ao segmento de conteúdo considerado unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial” (Bardin, 2016, p. 134). Assim, esta unidade consiste na “menor parte do conteúdo,

cuja ocorrência é registrada de acordo com as categorias levantadas” (Franco, 2008, p. 41). Os registros, conforme Franco (2008), podem apresentar uma variedade de tipos, incluindo a palavra, o tema, o personagem e o item, os quais podem estar interrelacionados e se complementarem.

A **unidade de contexto** “serve de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores às da unidade de registro) são ótimas para que se possa compreender a significação exata da unidade de registro” (Bardin, 2016, p. 137). Ou seja, a unidade de contexto pode ser usada quando há ambiguidade de significados entre os elementos codificados (unidades de registro), permitindo o entendimento correto dos itens dentro do contexto de onde foram obtidos (Cardoso; Oliveira; Ghelli, 2021).

No que se refere às escolhas das **regras de contagem**, Bardin (2016) destaca a importância de se fazer a diferenciação entre o que se conta (unidade de registro) e o modo de contagem (regra de enumeração). Para tanto, diversos tipos de enumerações podem ser utilizados, dos quais destacamos: *presença (ou ausência)*, *frequência* ou *ordem*.

A *presença* de determinados elementos em um material analisado pode ser significativa e se constituir como um certo indicador. Da mesma forma, a *ausência* de elementos também pode veicular um sentido e se constituir como uma variável de análise importante, na medida em que pode significar a resistência ou recusa de algo. A *frequência* de aparição de uma importante unidade de registro aumenta com a frequência de sua aparição (Bardin, 2016, p. 138). No entanto, se avaliarmos que a aparição de determinado item tem maior importância do que outro, podemos recorrer a um sistema de ponderação. A *ordem* de aparição das unidades de registro, no quadro da inferência, pode ter uma significação mais importante do que a frequência. “Ou então a frequência e o encadeamento das unidades de registro podem combinar-se nas medidas” (Bardin, 2016, p. 142)

A terceira tarefa a ser realizada no processo de codificação consiste na **escolha das categorias**. Segundo Bardin (2016, p. 147), “as categorias, são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns destes elementos”. Assim, o processo de categorização consiste na classificação e agrupamento de dados levando em consideração suas características comuns.

Bardin (2016) ainda destaca que um conjunto de categorias boas deve seguir os seguintes critérios: a) *exclusão mútua*: um elemento não pode ser classificado em duas ou mais categorias; b) *homogeneidade*: um único princípio de classificação deve reger a organização

das categorias; c) *pertinência*: a categoria deve estar relacionada com as intenções do investigador, aos objetivos da pesquisa, bem como pertencer ao quadro teórico definido; d) *objetividade e fidelidade*: as diferentes partes de um mesmo material, que se enquadram na mesma grelha categorial, devem ser codificados igualmente; e) *produtividade*: para ser produtivo, um conjunto de categorias deve fornecer resultados férteis em índices de inferências, em hipóteses novas e em dados exatos.

De acordo com Rodrigues (2019) o processo de categorização pode se dar *a priori*, quando as categorias podem ser estabelecidas pelo analista com base em seus objetivos e no referencial teórico, ou ainda *a posteriori*. Nas categorias *a priori*, há uma propensão à segmentação e simplificação do conteúdo, ao passo que nas categorias *a posteriori*, é requerido que o analista demonstre um domínio mais aprofundado do conhecimento teórico.

Tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação

A terceira e última fase da análise de conteúdo refere-se ao tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Nessa fase, os dados coletados (resultados brutos) são tratados de modo a torná-los significativos e válidos. “É o momento de confrontação entre teoria fundante, objetivos, hipóteses e achados da pesquisa (os indicadores), a fim de proceder inferências e redigir sínteses interpretativas” (Cardoso; Oliveira; Ghelli, 2021, p. 110).

A produção de inferências constitui o propósito central da análise de conteúdo, proporcionando uma compreensão mais profunda dos dados provenientes de diversas mensagens, oriundas de diferentes discursos e contextos. Entendemos que a inferência consiste em investigar o que está oculto por trás da realidade aparente, buscando compreender genuinamente o significado do discurso proferido e desvendar, em profundidade, as intenções subjacentes em afirmações que, à primeira vista, parecem superficiais. Ao realizarmos a interpretação dos dados é fundamental que nos reportamos aos referenciais teóricos relevantes à pesquisa, pois são eles que fornecem a base e os direcionamentos essenciais para essa finalidade. A conexão entre os dados coletados e a estrutura teórica é o que confere significado à interpretação.

De maneira geral, a análise de conteúdo objetiva a interpretação de uma mensagem em sua totalidade, revelando os significados e a importância dos conteúdos contidos no material analisado.

Assim, ao considerarmos nossa questão de investigação, nossos objetivos e o contexto de produção dos dados, entendemos que a abordagem metodológica da forma como foi

estabelecida nos possibilitou uma interpretação contextualizada e pormenorizada do fenômeno estudado, valorizando o significado atribuído às ações dos sujeitos envolvidos.

4.2 As sequências didáticas e a entrevista como *corpus* da pesquisa

O levantamento dos dados da pesquisa aconteceu em três fases: Fase 1 – *A produção de sequências didáticas (versão 1 e 2) a partir da tarefa “Os palitos de fósforo”*; Fase 2 - *Comparação das versões da sequência didática*; Fase 3 - *Elaboração e realização de uma entrevista com a professora*. Durante o desenvolvimento dessas fases, definimos o *corpus* da pesquisa como sendo a sequência didática da professora e as respostas da entrevista realizada com ela.

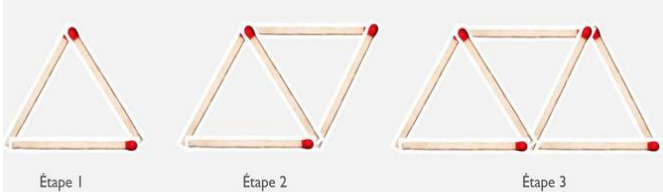
Neste tópico apresentamos cada uma dessas fases e deixamos para o capítulo seguinte a apresentação dos dados e as análises deles.

4.2.1 A produção de sequências didáticas (Fase 1)

Uma das atividades desenvolvidas no grupo do Ensino Médio no Projeto PRIPINT, foi a elaboração de uma sequência didática, a partir da tarefa “Os palitos de fósforo” (Figura 6), com vistas à promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico de seus estudantes. A tarefa original apresentada foi concebida para alunos do 6^{me} do Collège no sistema educacional francês, mas que equivale ao 6º ano do Ensino Fundamental no Brasil.

Figura 6 - Tarefa “Os palitos de fósforo”

Com palitos de fósforos construa triângulos conforme o modelo abaixo



Étape 1
Étape 2
Étape 3

- Quantos palitos de fósforo são necessários para construir 1 triângulo?
- 2 triângulos? 5 triângulos? 10 triângulos? 100 triângulos? 265 triângulos?
- Encontre uma fórmula para dizer o número de palitos necessários em função do número de triângulos construídos

Fonte: PIPRINT (2021)

O autor desta pesquisa, como membro do grupo do Ensino Médio, ficou na incumbência de construir uma primeira proposta para a 1ª série do Ensino Médio (versão 1). Esta proposta

foi socializada e em seguida, foi solicitado a outros dois participantes (um professor e uma professora) que construíssem uma outra versão da proposta a fim de adaptá-la para o seu próprio ensino.

4.2.2 Comparação das versões da sequência didática (Fase 2)

Nas fases 1 e 2 da pesquisa, ocorreu, respectivamente, a produção seguida da comparação entre a versão original apresentada pelo autor desta pesquisa (versão 1) e as versões modificadas pelos dois professores integrantes do PRIPINT do grupo de Ensino Médio.

De posse desse material foi realizada uma leitura flutuante na fase de Pré-análise (Bardin, 2016) o que nos permitiu escolher apenas a versão da professora para constituir o *corpus* da pesquisa. A razão dessa escolha deu-se pelo fato de que a sua versão possuía modificações em relação a versão 1, o que não ocorreu com a versão do professor. Com base em nosso referencial teórico, elaboramos a hipótese de que as modificações nos levariam às decisões didáticas da professora e que essas decisões possuem naturezas distintas e guiadas por fatores diversos. Consideramos que essas modificações manifestam índices a serem elucidados (Bardin, 2016) e a presença e frequência deles revelam a importância das modificações, das decisões e fatores decisórios da professora.

4.2.3 Elaboração e realização de uma entrevista com a professora (Fase 3)

A necessidade de aprofundamento sobre decisões e fatores que influenciaram tais decisões tomadas pela professora nos levou a realizar uma entrevista semiestruturada com ela.

Para tanto, consideramos as decisões identificadas na fase anterior e elaboramos um roteiro. A entrevista foi composta por 12 perguntas que foram organizadas conforme objetivos distintos: 1 - levantar o perfil acadêmico e profissional da professora entrevistada, sua experiência docente com o Ensino Médio e sua relação com a Álgebra; 2 - investigar os fatores que explicam as decisões (modificações) tomadas pela professora da sequência original proposta pelo professor pesquisador. O roteiro da entrevista (semiestruturada) encontra-se no Apêndice C.

Devido ao fato do pesquisador e da professora não residirem na mesma localidade, a entrevista foi realizada através de um encontro síncrono por meio da plataforma *Google Meet*. Antes da entrevista, foi enviado à professora por *e-mail* uma Carta de Apresentação (Apêndice A) para confirmar seu interesse em participar da pesquisa. Após sua confirmação, enviamos o

roteiro da entrevista juntamente com a versão original e a versão adaptada da sequência didática para rememorar à professora as modificações realizadas. A entrevista foi realizada no dia 11 de outubro de 2024 e teve uma duração de 1 hora e 9 minutos.

A entrevista foi gravada em áudio e vídeo e armazenada no computador pessoal do pesquisador, o que possibilitou o seu acesso posterior para a transcrição de suas falas e realização da análise dos dados. A transcrição foi feita usando o software *MeetPulp*.

Novamente, realizamos a *leitura flutuante* (Bardin, 2016) das respostas da professora estabelecendo contato com os dados objetivando uma percepção inicial das mensagens contidas nas suas falas. Ainda nesta fase, reafirmamos a hipótese de que seus fatores decisórios estão fortemente ligados à sua formação acadêmica e sua experiência na docência. Consideramos que essas falas manifestaram índices importantes, conforme (Bardin, 2016), e que a presença e frequência deles detalham as decisões tomadas e revelam os fatores decisórios da professora.

5 EXPLORAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos o tratamento dos dados e a análise deles. Buscamos no nosso *corpus* de investigação, ou seja, na sequência didática da professora e nas respostas dadas às questões da entrevista, elementos que explicitam as decisões tomadas por ela na reconstrução da sequência didática e seus respectivos fatores decisórios.

Iniciamos com a apresentação da formação profissional da professora, sua experiência na docência e sua relação com o ensino no Ensino Médio. Esses dados foram coletados na primeira parte da entrevista. Em seguida, apresentamos a versão da sequência da professora, realizamos a comparação com a versão do professor para identificar as decisões tomadas (Fase 2) para, finalmente, apresentar fatores decisórios e uma análise deles. No último tópico deste capítulo, apresentamos, baseados nas respostas da entrevista, as relações da professora com a Álgebra e com o ensino sobre padrões em sequências.

5.1 Apresentação da formação profissional e experiência na docência da professora

Com base na resposta da professora dada à **Pergunta 1** do roteiro de entrevista, pudemos conhecer o perfil acadêmico e profissional da professora entrevistada e sua experiência docente no Ensino Médio.

A professora possui uma Licenciatura em Matemática, com aperfeiçoamento e especialização na área, especificamente em Educação Matemática. Possui mestrado e doutorado em Educação Matemática, ambos realizados na PUC de São Paulo, sendo o primeiro concluído em 2010 e o último em 2021.

Como professora da Educação Básica, possui 19 anos de experiência, tendo atuado por dez anos no Ensino Público Estadual Paulista e, nos últimos nove anos, no Instituto Federal de São Paulo, no campus Itaquaquecetuba. A professora possui 15 anos de experiência específica no Ensino Médio, interrompidos apenas pelo período de afastamento para conclusão do doutorado. Além disso, também teve atuação concomitante no Ensino Fundamental em alguns anos.

A combinação de uma formação acadêmica avançada em Educação Matemática (mestrado e doutorado) juntamente com sua ampla vivência na Educação Básica apontam para um conhecimento sólido das práticas pedagógicas e das necessidades de aprendizagem dos alunos em Matemática. Essa análise nos permitiu elaborarmos como hipótese que as decisões didáticas da professora foram fortemente influenciadas pelo conhecimento adquirido na

formação acadêmica e na sua longa experiência no Ensino Médio que proporcionou uma compreensão das dificuldades específicas dessa etapa e a reflexão crítica sobre sua própria experiência docente.

5.2 A sequência didática apresentada pela professora

As duas sequências didáticas, tanto a versão proposta pelo pesquisador quanto a versão modificada pela professora, foram elaboradas para uma turma da 1ª série do Ensino Médio. Ambas as versões partem de uma sequência recursiva com padrão crescente em contexto figurativo formado por triângulos cujos lados são representados por palitos de fósforo. A partir da segunda figura, cada novo triângulo formado utiliza um palito do lado do triângulo anterior como um de seus lados.

De maneira geral, as duas sequências didáticas tinham como objetivo levar os alunos a identificar um padrão na sequência figurativa; traduzi-lo em uma expressão algébrica (lei de formação) que permitisse encontrar o número de palitos para formar figuras com um número qualquer de triângulos e vice-versa; representar a relação entre as variáveis envolvidas por meio de um gráfico.

Assim como no exemplo da sequência de crescimento das cancelas proposta por Pimental e Vale (2012), o reconhecimento de um padrão nas sequências de ambas as versões (inicial e modificada) pode dar origem a mais de uma lei de formação, dependendo do modo como o padrão é apreendido e interpretado. Podemos elencar aqui três hipóteses dentre as várias possíveis.

No primeiro caso, a pessoa apreende um padrão na sequência, e interpreta-o no arranjo como sendo um palito a que se vão acrescentando grupos de dois palitos, sendo este padrão traduzido pela expressão $1 + 2n$; o segundo é semelhante ao primeiro, porém, é visto não um palito inicial, mas um triângulo que vai sendo acrescentado de sucessivos grupos de dois palitos, sendo o padrão representado pela forma $3 + (n - 1)2$; no terceiro pode ser vista uma sequência com um número crescente de triângulos a que são retirados os “lados” duplicados, sendo o padrão traduzido pela forma $3n - (n - 1)$. Vale salientar que as expressões apresentadas, embora equivalentes, não são idênticas, pois manifestam modos diferentes de ver o padrão.

Na sequência, por via de regra, a percepção de que apenas na primeira figura eram necessários 3 palitos e de que os outros triângulos que se juntassem usariam o lado do triângulo anterior era muito importante para o reconhecimento do que varia (o número de triângulos em cada figura) e o que não variava (o 1º palito ou o 1º triângulo em cada figura).

A versão inicial da proposta didática é composta por 9 questões, enquanto a versão proposta pela professora é composta por 12. Essa diferença na quantidade de questões se deu em virtude de algumas mudanças realizadas pela professora (decisões didáticas) que serão pormenorizadas nas próximas seções.

Para caracterizarmos a sequência didática modificada pela professora quanto ao tipo de pensamento algébrico passível de ser mobilizado, utilizamos a classificação proposta por Radford (2009, 2010a, 2018) que reconhece três formas ou estratos desse modo particular de pensar: *pensamento algébrico factual* (ou *concreto*); *pensamento algébrico contextual*; *pensamento algébrico simbólico* (ou *padrão*).

As questões de 1 a 7 referem-se à mobilização do *pensamento algébrico factual*, pois envolve questionamentos ligados a números particulares, a indeterminação é trabalhada implicitamente. Por exemplo, quando a professora solicita no item *b* da questão 6 “Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência”.

As questões 8 e 9 estão relacionadas ao *pensamento algébrico contextual*, visto que abordam uma figura indeterminada, ou seja, a indeterminação passa agora a ser trabalhada explicitamente. Por exemplo, quando a professora pergunta na questão 8 “Existe alguma forma para descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos? Descreva este procedimento com suas palavras”.

Por fim, as questões 10, ao solicitar que o aluno utilize o simbolismo alfanumérico para expressar seu pensamento, bem como as questões 11 e 12 que consistem, específica e respectivamente, na determinação das variáveis envolvidas e na construção de um gráfico que relaciona tais variáveis, referem-se ao *pensamento algébrico simbólico*. Por exemplo, quando a professora solicita na questão 10 “Escreva uma expressão algébrica (fórmula) que traduza a sua regra descrita anteriormente”.

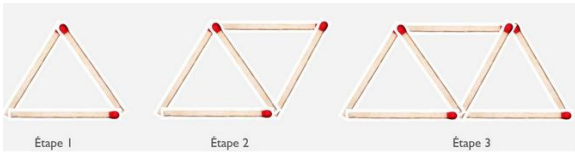
Destacamos que embora as questões estejam alinhadas às características das diferentes formas de pensamento algébrico, é possível que o aluno não consiga pensar algebricamente ao resolvê-las ou não mobilize esse pensamento em todas as suas formas.

5.3 Identificação das mudanças realizadas

Nos quadros a seguir, apresentamos as mudanças realizadas pela professora (decisões didáticas) a partir da comparação dos enunciados das questões propostas nas duas versões. As questões 5, 6, 7, 8 da versão do professor não foram modificadas na sua essência, e por isso não

as tratamos na pesquisa, pois acreditamos que ela concordou com a proposta original das questões. Os quadros a seguir dizem respeito às questões 1, 2, 3, 4 e 9.

Quadro 6 - Questão 1 e a versão da professora

Versão do professor pesquisador (Questão 1)
Observe como os triângulos são formados na sequência abaixo:  Desenhe/Construa a figura da etapa seguinte dessa sequência. Quantos palitos foram necessários para construir os triângulos dessa figura?
Versão da professora
<i>Questão 1.</i> Imagine que sejam dados palitos de fósforo para seu grupo. É possível construir um triângulo em que cada palito representa um destes lados? Registre como seria o desenho desta figura.
<i>Questão 2.</i> Como se daria a construção de dois triângulos com alguns destes palitos? Quantos são estes palitos? Será possível a construção de dois triângulos com menos de seis palitos? Neste caso, quantos palitos seriam necessários? Desenhe uma representação desta figura.
<i>Questão 3.</i> Com a ideia utilizada no item anterior, como você construiria três triângulos com menos de nove palitos? Quantos palitos seriam necessários para esta construção? Faça a representação desta figura.
<i>Questão 4.</i> Observe as três figuras das etapas 1, 2 e 3 já construídas. O que você observa de comum na construção das figuras da etapa 2 e 3? Como seria a construção da figura da etapa seguinte (etapa 4)?
<i>Questão 5.</i> Seguindo este mesmo padrão, e sem a construção da figura, como fariam para construir as figuras das etapas 5 e 6? Quantos palitos são necessários em cada uma destas etapas?
Modificações
- Não explorou os três primeiros elementos da sequência, ou seja, as imagens formadas pelos triângulos nas três primeiras etapas de construção, segundo o padrão dado (questão 1), isto é, o padrão proposto inicialmente. - Explorou uma característica geométrica de um triângulo (primeiro elemento da sequência); - Explorou a possibilidade de ter triângulos construídos com e sem lados em comum;

- Propôs a construção pelos alunos das três primeiras figuras da sequência ao longo das questões 1, 2 e 3, explorando a relação entre número de triângulos para uma quantidade de palitos dada;
- Propôs aos alunos a observação da regularidade da forma geométrica de cada elemento da sequência (questão 4);
- Acrescentou as etapas 5 e 6 no início da exploração e sem recorrer à construção das figuras;
- Usou o termo padrão (em destaque) na questão 5;
- Solicitou aos alunos o registro de suas construções por meio de desenhos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Quadro 7 - Questão 2 e a versão da professora

Versão do professor pesquisador (Questão 2)																							
A partir do padrão apresentado na construção dos triângulos com palitos de fósforo, complete a tabela e responda:																							
	<table><tr><th>ETAPA</th><th>NÚMERO DE TRIÂNGULOS</th><th>NÚMERO DE PALITOS</th></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table>	ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS	1			2			3			4			5			6			
ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS																					
1																							
2																							
3																							
4																							
5																							
6																							
a) Como ficará a imagem da figura na 10ª etapa? Quantos palitos de fósforo foram necessários para construir essa figura? b) Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência.																							
Versão da professora																							
Questão 6. A partir das figuras dos triângulos com palitos de fósforo construídas, complete a tabela a seguir:																							
	<table><tr><th>ETAPA</th><th>NÚMERO DE TRIÂNGULOS</th><th>NÚMERO DE PALITOS</th></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS	1			2			3												
ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS																					
1																							
2																							
3																							

	4			
	5			
	6			
a) Observe a sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos. Como você descreveria a imagem da figura na 10ª etapa? Quantos palitos de fósforo foram necessários para construir essa figura? b) Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência. c) Quantos palitos são necessários para construir todos os triângulos até a etapa 15?				
Modificações				
- Não usa o termo padrão no início do enunciado. - Acrescentou ao enunciado do item a), uma indicação sobre o uso da tabela para a observação da relação entre as grandezas (número de triângulos e palitos) - Acrescentou a etapa 15 (item b) antecipada da questão 9 (original).				

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Quadro 8 - Questão 3 e a versão da professora

Versão do professor pesquisador (Questão 3)
Existe, nesta sequência, alguma figura composta por 87 palitos? Se existir, indique sua ordem/etapa correspondente.
Versão da professora
<i>Questão 7.</i> Imagine que você possui 87 palitos. Existe, nesta sequência, alguma figura composta por esta quantidade de palitos? Descreva como chegou no resultado positivo ou negativo. Se existir, indique a etapa correspondente.
Modificações
- Acrescentou a solicitação de descrição de como eles chegaram ao resultado da questão.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Quadro 9 - Questão 4 e a versão da professora

Versão do professor pesquisador (Questão 4)
Existe uma forma de descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos?
Versão da professora

Questão 08. Existe alguma forma para descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos? Descreva este procedimento com suas palavras.

Modificações

- Acrescentou a solicitação da descrição do procedimento a ser realizado.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Como vimos, a realização da leitura flutuante e comparação das sequências didáticas (versão 1 e 2) nos permitiu associar cada enunciado modificado a uma decisão tomada pela professora. Na fase de exploração dos dados, desenvolvemos, como orienta Bardin (2016), a codificação e a categorização dos dados. As unidades de contexto (UC) foram identificadas nos enunciados modificados pela professora. As unidades de registro (UR) foram obtidas através da codificação, por temática, sobre as decisões, ou seja, sobre as mudanças realizadas nos enunciados das questões.

No quadro a seguir, destacamos dos enunciados modificados as passagens relevantes (UC) e as decisões da professora que foram identificadas por nós (UR).

Quadro 10 - Enunciados modificados e decisões da professora (sequência didática)

Novos enunciados (UC)	Decisões (UR)
<i>Questão 1.</i> <u>Imagine</u> que sejam dados palitos de fósforo para seu grupo. É possível <u>construir um triângulo</u> em que cada palito representa um destes lados? <u>Registre como seria o desenho desta figura.</u>	- Não explorou as imagens dos 3 primeiros elementos; - Explorou uma característica geométrica de um triângulo (primeiro elemento da sequência); - Solicitou os registros das construções dos alunos por meio de desenhos;
<i>Questão 2.</i> Como se daria a construção de <u>dois triângulos com alguns destes palitos</u> ? <u>Quanto são estes palitos?</u> <u>Será possível a construção de dois triângulos com menos de seis palitos?</u> Neste caso, quantos palitos seriam necessários? <u>Desenhe uma representação desta figura.</u>	- Explorou a construção do segundo elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada de acordo com o padrão. - Solicitou aos alunos o registro de suas construções por meio de desenhos;
<i>Questão 3.</i> Com a ideia utilizada no item anterior, como você <u>construiria três triângulos com menos de nove palitos</u> ? Quantos palitos	- Explorou a construção do terceiro elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada de acordo com o padrão.

seriam necessários para esta construção? <u>Faça a representação desta figura.</u>	- Solicitou aos alunos o registro de suas construções por meio de desenhos;																					
<u>Questão 4.</u> Observe as três figuras das etapas 1, 2 e 3 já construídas. <u>O que você observa de comum na construção das figuras da etapa 2 e 3? Como seria a construção da figura da etapa seguinte (etapa 4)?</u>	- Propôs aos alunos a observação da regularidade da forma geométrica de cada elemento da sequência (padrão); - Solicitou o procedimento de construção da figura da etapa 4																					
<u>Questão 5.</u> <u>Seguindo este mesmo padrão</u> , e sem a construção da figura, como fariam <u>para construir as figuras das etapas 5 e 6?</u> Quantos palitos são necessários em cada uma destas etapas?	- Usou o termo <i>padrão</i> no enunciado; - Acrescentou as etapas 5 e 6 no início da exploração e sem recorrer à construção das figuras																					
<u>Questão 6.</u> <u>A partir das figuras dos triângulos com palitos de fósforo construídas</u> , complete a tabela a seguir: <table><tr><th>ETAPA</th><th>NÚMERO DE TRIÂNGULOS</th><th>NÚMERO DE PALITOS</th></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td></tr></table> a) <u>Observe a sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos.</u> Como você descreveria a imagem da figura na 10ª etapa? Quantos palitos de fósforo foram necessários para construir essa figura? b) Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência. c) <u>Quantos palitos são necessários para construir todos os triângulos até a etapa 15?</u>	ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS	1			2			3			4			5			6			 <
ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS																				
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						
6																						

<i>Questão 8.</i> Existe alguma forma para descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos? <u>Descreva este procedimento com suas palavras.</u>	- Acrescentou a solicitação da descrição do procedimento a ser realizado.
---	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Ainda na fase de Exploração do material coletado, segundo Bardin (2016), temos a realização da categorização e enumeração dos dados. Ela foi feita a partir do agrupamento das decisões comuns codificadas na totalidade nas unidades de registro caracterizando como sendo do tipo semântico por temática. Optamos por enumerar as unidades de registro pelo tipo *presença* (Bardin, 2016) de alguma modificação no enunciado. Como resultado, apresentamos no Quadro 11 as categorias para as decisões da professora relativas às mudanças realizadas nos enunciados das questões da sequência didática do professor pesquisador.

Quadro 11 - Decisões e tipos de decisões (sequência didática da professora) por questão

Decisões (UR)	Tipos de decisões (Categorias)
- D1 - Não explorou as imagens dos 3 primeiros elementos; (Q1) - D2 - Explorou uma característica geométrica de um triângulo (primeiro elemento da sequência); (Q1) - D3 - Explorou a possibilidade de ter 2 triângulos construídos com e sem lados em comum; (Q2) - D4 - Explorou a construção do segundo elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada, de acordo com o padrão. Q2) - D5 - Explorou a construção do terceiro elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada, de acordo com o padrão. (Q3) - D6 - Acrescentou as etapas 5 e 6 no início da exploração e sem recorrer à construção das figuras; (Q5) - D7 - Acrescentou a etapa 15 de construção de acordo com o padrão; (Q6)	Categoria 1 - <i>Exploração da construção da sequência</i>
- D8 - Propôs a observação da regularidade da forma geométrica dos três primeiros elementos da sequência (padrão) (Q4)	Categoria 2 - <i>Análise do Padrão</i>

- D9 - Propôs a observação da sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos. (Q6) - D10 - Não usou o termo padrão no enunciado; (Q6) - D11 - Usou o termo padrão no enunciado; (Q5)	
- D12 - Solicitou os registros das construções dos alunos por meio de desenhos; (Q1, Q2, Q3) - D13 - Solicitou a descrição de como eles chegaram ao resultado da questão (Q7) - D14 - Solicitou a descrição do procedimento a ser realizado. (Q8) - D15 - Solicitou o procedimento de construção da figura da etapa 4 (Q4)	Categoria 3 - <i>Registro dos alunos</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

A partir do Quadro 11, observamos um total de 15 modificações realizadas pela professora organizadas em três categorias: aquelas mudanças que dizem respeito a forma de conduzir a exploração da construção da sequência, (categoria 1 com 7 decisões); aquelas que enfatizam a análise do padrão pelos alunos (categoria 2 com 4 decisões) e a aquelas que dizem respeito a solicitação de registros dos alunos em seus processos e resultados (categoria 3 com 4 decisões). Além disso, observamos que existem questões onde mais de uma decisão foi tomada, inclusive decisões pertencentes a categorias diferentes. A categoria 1 apresentou quase metade da quantidade (frequência) de modificações em comparação com as demais. Isso significa que as decisões relativas às mudanças da sequência didática voltaram-se mais para a forma de explorar a construção da sequência.

5.4 Identificação dos fatores decisórios da professora

Neste tópico apresentamos os fatores que justificam as decisões didáticas tomadas pela professora no momento de reconstrução da proposta de ensino.

Apresentamos esses fatores tomando como referência as decisões relativas às três categorias: 1 - *Exploração da construção da sequência*, 2 - *Análise do Padrão pelos alunos* e 3 - *Registros dos alunos*, identificadas anteriormente (Quadro 11).

Novamente, nesta fase de Exploração do Material (Bardin, 2016), ocorreram os processos de elaboração das unidades de contexto, das unidades de registro e das categorias de análise, a partir da identificação de excertos da entrevista. As Unidades de contexto (UC) na

entrevista são os trechos da fala da professora que justificam suas decisões. As Unidades de Registro (UR), por sua vez, tratam da codificação dos fatores.

Para a análise posterior dos fatores decisórios, usamos as categorias e subcategorias do referencial teórico apresentado por Bessot (2019), a saber: do tipo externo (*os genéricos e os circunstanciais*); do tipo epistêmico (*relação pessoal do professor à pedagogia; relação pessoal do professor à disciplina; e relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*) e do tipo história didática (*história interaluno de uma turma genérica; história interaluno de uma turma alvo; história intra-aluno*).

5.4.1 Fatores relativos às decisões sobre a exploração da construção da sequência

A questão 1 da versão original da atividade trazia as figuras dos três primeiros elementos da sequência (formada por triângulos) para que os alunos pudessem visualizá-los e em seguida dar continuidade à figura seguinte (etapa 4). No entanto, a professora não apresentou tais elementos (D1) e ao invés disso propôs uma exploração diferente para a sequência. Na **Pergunta 4** da entrevista, perguntamos por qual motivo e a professora respondeu:

Professora: O motivo foi exatamente para buscar trabalhar outros aspectos que não necessariamente a questão da álgebra. Imaginando que eu estou no primeiro ano, o primeiro ano ele já tem um arcabouço um pouco maior de conhecimento, pelo menos deveria ter, que faça com que eles consigam entender instruções. Então, no caso, a gente poderia trabalhar a questão da geometria, do conhecimento do que são as figuras, no caso, triangulares, o que significa ser um triângulo equilátero, o porquê aquilo ali é um triângulo equilátero. Todos os lados desse triângulo teriam a mesma medida, então quais seriam as consequências? Eu queria explorar com eles os possíveis desenhos que poderiam ter, triângulos equiláteros, quando eles são desenhados de um lado comum ao outro. E foi interessante que isso apareceu na atividade. Eles foram fazendo e falei, olha, um, aí coloca um palito. Eles não tiveram a ideia de olhar para os alunos, os palitos e tudo mais. Eu tirei essa ideia de fazer com palitos e pedi para que eles fizessem escrevendo e desenhando, que para mim era uma dificuldade maior para eles, porque, com os palitos, você perceberia que os palitos têm a mesma medida. E, desenhando, não necessariamente. Você teria que entender que o seu desenho teria que formar triângulos que têm a mesma medida de lado. E aconteceu, em um dos grupos, em que os triângulos não ficaram de lado. Mesmo separados, eles não estavam girados. Ficaram um pra cima e dois pra baixo. Eles fizeram isso. E conseguiram fazer isso com medidas diferentes dos lados. Eles aumentaram um lado e ficou muito maior do que o outro lado. Então, quando isso aconteceu, eu falei, nossa, que legal. Que aí eram outros aspectos que poderiam ser trabalhados também nessa atividade, que é o aspecto da nomenclatura, da classificação, dos triângulos, e o porquê que eles são chamados assim, quais são as características e propriedades daí, por conta desse desenho que eles fizeram. E tem várias outras coisas que poderiam ser trabalhadas que acabaram não trabalhando, mas que isso poderia começar um outro trabalho que vem além de pensar só na parte da atividade. Achei que esse momento de descoberta dos desenhos que poderiam ser criados também faria parte do início desse raciocínio algébrico, dessa generalização. Uma vez que ele vai ter que contar obrigatoriamente, ele vai ter que pensar nessas posições e isso poderia dar o primeiro gatilho para tentar pensar, ah, aqui é só colocar mais um, aqui é só colocar mais um, coloca assim, coloca assim. Então isso

poderia iniciar esse pensamento. E esses outros aspectos também poderiam ser trabalhados.

Analisando a resposta da professora, identificamos trechos da sua fala que exprimem algumas das razões pelas quais ela optou por conduzir a exploração da sequência diferentemente da versão original. No Quadro 12, destacamos esses recortes da entrevista.

Quadro 12 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 4)

Resposta à Pergunta 4 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
O motivo foi <u>exatamente para buscar trabalhar outros aspectos que não necessariamente a questão da álgebra.</u>	Necessidade de integrar álgebra e geometria	<i>Epistêmico: relação pessoal do professor à disciplina</i>
Achei que esse momento de <u>descoberta dos desenhos que poderiam ser criados, também faria parte do início desse raciocínio algébrico, dessa generalização.</u>	O reconhecimento do padrão, pelos alunos, ocorre durante a construção de desenhos	<i>Epistêmico: relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado</i>
Eu tirei essa ideia de fazer com palitos e pedi para que eles fizessem escrevendo e desenhando, <u>que para mim era uma dificuldade maior para eles, porque, com os palitos, você perceberia que os palitos têm a mesma medida. E, desenhando, não necessariamente.</u>	Adequação ao nível de conhecimentos matemáticos prévios dos alunos	História didática: <i>história interaluno de uma turma alvo.</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

No primeiro recorte da resposta, a professora explica querer trabalhar a disciplina de maneira que haja a articulação entre álgebra e geometria e esse fator explica as decisões *D2 - Explorou uma característica geométrica de um triângulo (primeiro elemento da sequência) e D3 - Explorou a possibilidade de ter 2 triângulos construídos com e sem lados em comum.* Tal abordagem vai ao encontro com a ideia proposta pela BNCC de que as unidades temáticas de Matemática devem ser trabalhadas de maneira integrada para promover uma compreensão mais ampla e contextualizada da disciplina. Essas decisões também revelam, como apontado por Vale e Pimentel (2015), que o trabalho com padrões possibilita uma variedade de conexões com diferentes tópicos da matemática escolar. Esse seria um fator decisional do tipo epistêmico que está ligado à *relação pessoal do professor à disciplina.*

No segundo recorte, identificamos que a justificativa para a decisão de usar os desenhos feitos pelos alunos (ou *DI - Não explorou as imagens dos 3 primeiros elementos*) seria para iniciar o estudo da generalização pelo reconhecimento do padrão (composição de triângulos) presente em cada elemento da sequência. De acordo com Bessot (2019), essa decisão está diretamente relacionada com os fatores do tipo epistêmico, mais especificamente, com aqueles que fazem referência à *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*. A presença desse fator se torna aparente no entendimento da professora de que a habilidade de identificar padrões e expressar generalidades é central para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O uso de palitos (ou outro material manipulável equivalente) foi cogitado nas discussões do PIPRINT para trabalhar a formação da sequência. Na entrevista, observamos que ela não os considerou no seu planejamento, e optou pelo uso de desenhos feitos pelos alunos, acreditando explorar conhecimentos prévios dos alunos em geometria (estudo dos triângulos). Podemos dizer também que outras decisões didáticas tomadas pela professora foram influenciadas pelo fator história didática, especificamente o que Bessot (2019) chama de fator *história interaluno de uma turma alvo*. A influência desse elemento se revela na expectativa da professora quanto ao nível de conhecimento dos alunos do primeiro ano para conseguirem entender as instruções para construção das três primeiras figuras da sequência.

Continuando a entrevista, de maneira complementar à pergunta anterior (Pergunta 4), na **Pergunta 5** questionamos à professora sobre o porquê ela escolheu fazer com que os alunos construíssem cada uma das três primeiras figuras da sequência ao invés de já as apresentar previamente. Em resposta, a professora argumentou que:

Professora: É, exatamente. Até quando eu fui pensar nesta organização, eu lembrei do Guy Brousseau, em relação às sequências didáticas. A teoria das sequências didáticas, a gente tem isso como pressuposto, em que a gente apresenta uma atividade, essa atividade é um exemplo disso, em que é uma situação adidática, em que a gente apresenta isso para o aluno, Ele não sabe, efetivamente, qual é o seu objetivo, mas ele segue as suas orientações para fazer algo. Então, o fato de não mostrar os desenhos era para tentar trazer esse adidático. Eu não sei o que vai acontecer, sabendo que muitos deles já tiveram essa experiência de observar padrões, porque é algo que está muito presente nos materiais do ensino fundamental agora, no finalzinho, no nono ano. Então, já tem esse tipo de atividade, contar bolinhas, de contar quadradinhos e ver qual é o centésimo, isso tem no ensino fundamental. Enquanto alguns que chegaram no ensino médio, eles chegaram com algum tipo de bagagem, porque antes de aplicar essa atividade, eu já tinha aplicado uma avaliação diagnóstica na sala. E aí, nessa avaliação diagnóstica, tinha uma atividade, um exercício lá, em que eles tinham que fazer, não a generalização, mas descobrir algum padrão. Então, não era uma atividade nova para eles. Se eu simplesmente mostrasse, eles já sabiam. Ah, já sei, é para entrar no centésimo número. Então, é exatamente para trazer essa dificuldade de que aquele desenho, sim, aquela forma de construir, ela vai trazer padrões e ela vai trazer no futuro, depois de você analisar, essa generalização.

Analisando a resposta da professora, identificamos trechos da sua fala que exprimem outras razões pelas quais ela optou por modificar a questão 1 da proposta inicial (*D4 - Explorou a construção do segundo elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada, de acordo com o padrão e D5 - Explorou a construção do terceiro elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada, de acordo com o padrão.*) No quadro 13 destacamos esses recortes da entrevista.

Quadro 13 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 5)

Resposta à Pergunta 5 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
Até quando eu fui pensar nesta organização, eu lembrei do <u>Guy Brousseau</u> , em relação às sequências didáticas. A teoria das sequências didáticas, a gente tem isso como pressuposto, em que a gente apresenta uma atividade, essa atividade é <u>um exemplo disso, em que é uma situação adidática</u> , em que a gente apresenta isso para o aluno. <u>Ele não sabe, efetivamente, qual é o seu objetivo, mas ele segue as suas orientações para fazer algo. Então, o fato de não mostrar os desenhos era para tentar trazer esse adidático.</u>	Uso do referencial de Brosseau sobre situação adidática para construir sua proposta	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à pedagogia;</i>
E aí, nessa avaliação diagnóstica, tinha uma atividade, um exercício lá, em que eles tinham que fazer, não a generalização, mas descobrir algum padrão. <u>Então, não era uma atividade nova para eles. Se eu simplesmente mostrasse, eles já sabiam. Ah, já sei, é para entrar no centésimo número.</u> Então, é exatamente para trazer essa dificuldade de que aquele desenho, sim, aquela forma de construir, ela vai trazer padrões e ela vai trazer no futuro, depois de você analisar, essa generalização.	Conhecimentos matemáticos prévios dos alunos	História didática: <i>história interaluno de uma turma alvo.</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

A partir desse recorte, notamos na decisão tomada pela professora a influência tanto de fatores epistêmicos quanto de fatores ligados à história didática. A professora, justifica que a modificação da proposta, relativas às decisões *D1 - Não explorou o padrão geométrico proposto inicialmente (3 primeiros elementos); D2 - Explorou uma característica geométrica de um triângulo (primeiro elemento da sequência); D3 - Explorou a possibilidade de ter 2*

triângulos construídos com e sem lados em comum; D4 - Explorou a construção do segundo elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada, de acordo com o padrão; D5 - Explorou a construção do terceiro elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada, de acordo com o padrão, foi inspirada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. Nesse momento inicial da atividade a professora fez escolha por uma abordagem didática na qual os alunos devem seguir instruções sem que o objetivo final seja explicitado, induzindo-os a um processo de descoberta e de análise de padrões. A professora demonstra entendimento de que essa experiência prática é fundamental para que o aluno avance no processo de generalização, elemento chave da álgebra. Tal decisão, segundo Bessot (2019), faz referência à *relação pessoal do professor à pedagogia*, uma vez que essa abordagem reflete uma concepção pedagógica que visa criar uma experiência na qual os alunos explorem e identifiquem padrões por conta própria, favorecendo seu envolvimento ativo na construção do conhecimento.

Referindo-se ainda à reconstrução desse momento inicial da atividade, destacamos a presença do fator *história interaluno de uma turma alvo* quando a professora afirma ter realizado uma avaliação diagnóstica com sua turma anteriormente, fato que lhes permitiu avaliar os conhecimentos prévios de seus alunos e ajustar a atividade em função das necessidades observadas. Esse fator indica uma decisão didática focada nas características e habilidades da turma específica com o que ela está trabalhando.

Uma outra alteração feita pela professora na atividade consistiu em *D7 - Acrescentou a etapa 15 de construção de acordo com o padrão*, antecipando o item “c” (da questão 9 da sequência do pesquisador) para a questão 6 da proposta reescrita por ela. Quando questionada na entrevista, **Pergunta 11**, a professora afirmou o seguinte:

Professora: Ah, sim. Eu trouxe porque achei que ela estava deslocada ali. Eu achei realmente que ela estava deslocada porque todo esse pensamento mais concreto de você saber quanto que está... E a etapa 15, no caso, que ele colocou como sendo a etapa 15, era uma etapa muito próxima do que eles já estavam fazendo. Então, lá você chegar no final de todo o trabalho de observação de padrão, em que ele já vai observar um cálculo, você colocar essa questão, eu achei meio desproporcional. Então, eu botei ela lá onde ele estava ainda trabalhando com a questão de observar esse padrão, de escrever e tentar entender qual é esse padrão. Eu entendo que ali poderia, deixa eu ver... Eu sei que na etapa C tem a questão da gente pensar na soma de todos os... E aí poderia trabalhar na questão de progressões aritméticas, somas de progressões. Mas aí é para suscitar essa questão de como é que eu poderia fazer essa soma de uma forma mais rápida que não é somando um por um. Também é pensando sempre nessa generalização. Eu falei, vou trazer ela para cá para eles pensarem também na generalização e pensar que também pode haver padrões se eu quisesse somar até lá.

Analisando a resposta da professora, identificamos trechos da sua fala que exprimem a razão pela qual ela optou por antecipar a exploração da etapa 15 da sequência geométrica da sequência original (Quadro 14)

Quadro 14 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 11)

Resposta à Pergunta 11 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
Eu achei realmente que ela estava deslocada porque todo esse pensamento mais concreto de você saber quanto que está... E a etapa 15, no caso, que ele colocou como sendo a etapa 15, era <u>uma etapa muito próxima do que eles já estavam fazendo</u> . Então, <u>lá você chegar no final de todo o trabalho de observação de padrão, em que ele já vai observar um cálculo</u> , você colocar essa questão, eu achei meio desproporcional.	Adequação gradual nas etapas de exploração do padrão	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Nesse sentido, entendemos que a decisão da professora de reposicionar a questão está atrelado ao seu conhecimento acerca do conteúdo, uma vez que ela opta por trazer essa questão para o momento em que os alunos ainda estão explorando o padrão num sentido mais concreto, buscando criar uma trajetória de construção gradual de compreensão do padrão. Esse fato revela a influência da *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*.

5.4.2 Fatores relativos às decisões sobre a análise do Padrão pelos alunos

Neste tópico apresentamos os fatores que explicam itens dos enunciados que solicitam aos alunos uma análise do padrão da sequência.

Na **Pergunta 6** do roteiro da entrevista, perguntamos sobre sua intenção na proposição da questão 4 da sequência didática, quando acrescenta no enunciado (da questão 1 do professor) que os alunos observem o que há de comum na construção das figuras da etapa 2 e 3 (o padrão), a professora respondeu o seguinte:

Professora: [...] quando eu pensei na quarta, é como se a quarta fosse exatamente o início da atividade proposta. Então, a minha adaptação foi as três primeiras, foi para explorar essa construção. Essa construção da sequência. E a quarta questão seria, de fato, a primeira. Então, olha só, agora que vocês pensaram, como a gente... E lá na hora, quando eu apliquei, eles já começaram a falar sobre isso. Não, é isso. Para construir a

outra, é só colocar de dois em dois a mais que a gente consegue fazer o outro. Isso já começou a ser falado. Então, essa construção inicial, que foi o objetivo, já começou a despertar neles essa visualização de algum padrão, inclusive na construção de cada um dos triângulos. O que estava acontecendo, não lembro se era mais dois, era mais três, enfim. Não, é só você colocar mais dois e sempre colocar mais dois para a próxima, você vai ter mais dois, mais dois, alguma coisa assim. Então, isso já propiciou uma visualização do padrão. Então, ali foi mais para eles. Se eles não perceberam o padrão ainda, durante a construção, nas questões 1, 2 e 3, na 4, olha, agora olhe a questão 1, 2 e 3. Está vendo alguma coisa que está acontecendo de uma para outra? O que tem em comum nessa construção? Então, o que aconteceria também em comum com a quarta? Na quarta também entraria esse padrão. Então, para mim, essa construção inicial já sustentaria essas ideias.

Analisando a resposta da professora, identificamos trechos da sua fala (Quadro 15) que transmitem as razões pelas quais ela tomou a decisão *D8 - Propôs a observação da regularidade da forma geométrica dos três primeiros elementos da sequência (padrão)* para dedução da etapa posterior 4.

Quadro 15 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 6)

Resposta à Pergunta 6 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
Se eles não perceberam o padrão ainda, durante a construção, nas questões 1, 2 e 3, na 4, olha, agora olhe a questão 1, 2 e 3. <u>Está vendo alguma coisa que está acontecendo de uma para outra? O que tem em comum nessa construção? Então, o que aconteceria também em comum com a quarta?</u> Na quarta também entraria esse padrão. <u>Então, para mim, essa construção inicial já sustentaria essas ideias.</u>	Assegurar que os alunos reconheceram o padrão	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à pedagogia</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Diante desse recorte notamos que a decisão da professora funciona como uma estratégia para culminância (análise) do processo de visualização e reconhecimento do padrão, necessária para a continuidade do estudo. Essa decisão, segundo Bessot (2019) está diretamente relacionada com o fator do tipo epistêmico, de maneira mais específica, com aquele que faz referência à *relação pessoal do professor à pedagogia*, visto que essa abordagem pedagógica evidencia a preocupação com o desenvolvimento gradual da aprendizagem dos alunos sobre o reconhecimento do padrão.

Tratando-se da **Pergunta 8**, quando questionada sobre o motivo pelo qual modificou o item *a* da questão 2 da proposta original (item *a* da questão 6 da proposta adaptada),

acrescentando a frase “Observe a sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos” (D9), a professora fez a seguinte colocação:

Professora: [...] Assim, aí já é o momento em que, uma vez que eles já conseguiram observar que existe um padrão, eles percebem que tem um padrão, mas é muito comum eles perceberem um padrão simplesmente em relação às somas. [...] Ele observa simplesmente os resultados finais. Então, da quantidade total dos palitinhos. [...] Ele não percebe essa relação que existe entre o número de triângulos, isso de cara, tá? O número de triângulos e a quantidade total de palitos. Ele só vai falando assim. Ah, vai pulando de dois em dois. E o pular de dois em dois, efetivamente, para a generalização não é o padrão que está acontecendo. O padrão que tem que ser observado é em relação ao número de triângulos e a quantidade de palitos. Então, essa tabela, ela é importantíssima, ela não pode deixar de existir. Exatamente para que você fomente no aluno essa questão de observar não o quanto está pulando de tantos em tantos, né? E o fato de você pedir para ir para o décimo e aí você ir para o vigésimo, vigésimo quinto, é para tirar essa visão de vamos pular de dois em dois, porque isso vai dar um pouco de trabalho. Como é que a gente pode fazer de uma forma, observando algo que está acontecendo, que vai facilitar esse meu cálculo. Então, é pra tirar isso mesmo, pra tirar o de dois em dois. [...] Então, é pra não pensar apenas no resultado final e observar. E aí, nessa questão em específico, alguns alunos... Eu tive que fazê-los olhar essa relação. Então, fazer essa tabela fez com que eles observassem o 1, 3, o 2 e o 5. Nossa, é o dobro mais um. Esse o dobro mais um só apareceu depois que a tabela estava pronta e não na confecção da figura, efetivamente.

Ao analisarmos a resposta da professora, identificamos trechos da sua fala (Quadro 16) que exprimem as razões pelas quais ela tomou a decisão *D9 - Propôs a observação da sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos*. Porém, não encontramos em sua fala nada que justificasse a decisão *D10 - Não usou o termo padrão no enunciado*.

Quadro 16 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 8)

Resposta à Pergunta 8 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
Eles percebem que tem um padrão, mas é muito comum eles perceberem um padrão simplesmente em relação às somas. [...] <u>Ele observa simplesmente os resultados finais.</u> Então, da quantidade total dos palitinhos. [...] <u>Ele não percebe essa relação que existe entre</u> o número de triângulos, isso de cara, tá? <u>O número de triângulos e a quantidade total de palitos.</u>	Importância da percepção pelo aluno da relação existente entre as variáveis envolvidas	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Nesse trecho, notamos a presença do fator *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado* quando a professora busca, a partir da reescrita da questão, promover uma compreensão mais profunda do padrão apresentado, demonstrando familiaridade com esse saber. A professora expõe sua preocupação em conduzir os alunos a perceberem que o reconhecimento do padrão não consiste apenas em notar incrementos numéricos (somas sucessivas de dois em dois), mas na observação da relação entre o número de triângulos e a quantidade de palitos como o ponto central para a generalização. Atrelado a essa situação, a professora destaca ainda a utilização da tabela como um recurso importante para direcionar os alunos no processo de compreensão do padrão e de sua generalização. Esse fato demonstra uma relação clara entre a decisão da professora com o saber a ser ensinado.

5.4.3 Fatores relativos às decisões sobre os registros dos alunos

Embora não tenha sido perguntado de maneira direta na entrevista porque ela solicita, explicitamente, aos alunos desenhos de suas construções (desenhos) durante o estudo do padrão (D12 - *Solicitou os registros das construções dos alunos por meio de desenhos* nas questões 1, 2 e 3 e D15 - *Solicitou o procedimento de construção da figura da etapa 4*, questão 4), observamos na mesma resposta anteriormente dada à **Pergunta 6**, algumas de suas razões (Quadro 17).

Quadro 17 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 6)

Resposta à Pergunta 6 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
Então, essa construção inicial, que foi o objetivo, já começou a despertar neles essa <u>visualização de algum padrão</u> , inclusive na construção de cada um dos triângulos. O que estava acontecendo, não lembro se era mais dois, era mais três, enfim. <u>Não, é só você colocar mais dois e sempre colocar mais dois para a próxima, você vai ter mais dois, mais dois, alguma coisa assim. Então, isso já propiciou uma visualização do padrão.</u>	Uso de desenhos possibilita a expressão e a visualização do padrão	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à pedagogia</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Diante desse trecho a professora expressa que os desenhos produzidos pelos alunos têm o papel de despertá-los para a visualização do padrão e a expressão deles. Portanto, a professora

utiliza-se de um saber que diz respeito à importância do reconhecimento do padrão geométrico de uma sequência para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, o que manifesta a influência da *relação pessoal do professor à pedagogia*.

Ao perguntarmos à professora, na **Pergunta 7**, o motivo pelo qual ela havia acrescentado na questão 5 da sua proposta didática que os alunos determinassem a quantidade de palitos necessários para obter as figuras das etapas 5 e 6, sem recorrer à construção das figuras (D6), ela justificou da seguinte forma:

Professora: Exatamente, para que eles consigam falar o padrão. Que isso é algo que eu entendo muito que faz parte da generalização. Se você consegue falar e refletir sobre como aquilo está acontecendo, como aquele padrão está acontecendo, você consegue descrever com uma facilidade maior qual é a generalização que você está vendo. Eu sinto isso muito no meu dia a dia com os meus alunos. Eu falo isso pra eles quando eles estão falando de função, no ensino médio. E aí eu falo pra eles que a função, a escrita da função, nada mais é do que os cálculos que vocês estão fazendo pra que vocês consigam chegar nas respostas. Então, quando eu falo com eles, para que eles digam para mim como você fez o cálculo. Ah, não, eu peguei o número, multipliquei por 2 e depois eu somei o 3. Eu falei, tá vendo que você multiplicou por 2 e depois você somou o 3? É isso, são essas operações que tem que ter na sua fórmula, na sua função. Então, isso, o falar como fez, facilita, isso aí já pensando na minha experiência, facilita a questão do entendimento do que significa essa generalização, que nada mais é do que você está fazendo a mesma coisa que com os números concretos, só que isso vai ser uma... como chama, um padrão, um padrão em que você sempre vai recorrer ao mesmo tipo de operação, com os mesmos números e resultados que serão diferentes, já puxando para a questão da função, que vão ser resultados diferentes porque a gente está falando sobre a relação de dependência entre os outros dois números, mas é sempre a mesma operação, é sempre o mesmo pensamento, é o mesmo padrão. Então é aí que vem a questão, vamos tentar começar a observar os padrões que estão lá e puxar para aqueles alunos que, eventualmente, não tenham entendido que existia um padrão. Então, nesse momento, eu apliquei em grupos, né? Então, grupos com três, quatro alunos. Então, tinha alguns grupos que já tinham percebido esse padrão e eu pedi para eles falarem. E um falando para o outro, o outro olhava. Ah, eu não tinha percebido. Então, agora eu percebi. Então, por isso que eu pedi para eles fazerem dessa maneira.

Analisando a resposta da professora, identificamos trechos da sua fala que transmitem as razões pelas quais ela acrescentou a questão à sua proposta didática (*D6 - Acrescentou as etapas 5 e 6 no início da exploração e sem recorrer à construção das figuras feitas anteriormente*) (Quadro 18).

Quadro 18 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 7)

Resposta à Pergunta 7 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
Exatamente, <u>para que eles consigam falar o padrão. que isso é algo que eu entendo muito que faz parte da generalização.</u> Se você consegue falar	A explicitação do padrão facilita o processo de	Epistêmico: <i>relação pessoal</i>

e refletir sobre como aquilo está acontecendo, como aquele padrão está acontecendo, você consegue descrever com uma facilidade maior qual é a generalização que você está vendo.	generalização dos alunos	<i>do professor à pedagogia</i>
Então, isso, o falar como fez, facilita, <u>isso aí já pensando na minha experiência</u> , facilita a questão do entendimento do que significa essa generalização.	Conhecimento prático sobre o uso da verbalização na aprendizagem	<i>História didática: história interaluno de uma turma alvo</i>
[..] facilita a questão do entendimento do que significa essa <u>generalização</u> , que nada mais é do que você está fazendo a mesma coisa que com os <u>números concretos</u> , só que isso vai ser uma... como chama, um <u>padrão</u> , um padrão em que você sempre vai recorrer ao mesmo tipo de <u>operação</u> , com os mesmos números e resultados que serão diferentes, já puxando para a questão da <u>função</u> , que vão ser resultados diferentes porque a gente está falando sobre a <u>relação de dependência</u> entre os outros dois números, mas é sempre a mesma operação, é sempre o mesmo pensamento, é o mesmo padrão.	Conhecimento da relação existente entre padrões, generalização e funções	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Segundo a resposta da professora, o incentivo à comunicação entre os alunos e a explicitação do raciocínio são estratégias essenciais para o desenvolvimento da autonomia intelectual e reflexiva dos alunos. A professora utiliza uma abordagem pedagógica que valoriza a verbalização dos processos de pensamento dos alunos para compreensão de padrões e construção de generalizações, demonstrando uma preocupação em criar um ambiente de aprendizagem onde a comunicação e a troca de ideias entre os alunos favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Compreendemos que tal decisão está associada, conforme Bessot (2019), à *relação pessoal do professor à pedagogia*.

Em sua fala, a professora evidencia que a explicitação dos cálculos auxilia os alunos a se aproximarem mais facilmente da generalização, e que compreender e descrever padrões é fundamental para a construção do pensamento algébrico. Tal fato revela a influência do fator decisional ligado à *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*. A professora mostra uma compreensão acerca da relação existente entre padrões, generalização e funções, demonstrando proximidade com o saber a ser ensinado e como eles se articulam.

Ainda nesse trecho da entrevista, a professora ao evocar experiências anteriores sobre a turma na qual está lecionando atualmente, lembrando de situações nas quais os alunos foram

incentivados a verbalizar e compartilhar suas descobertas, revelam a influência do fator *história interaluno de uma turma alvo*. Como apontam Bessot (2019) e Bonna et al. (2020) sobre esse fator decisional, na pesquisa, foi evidenciado na fala da professora quando ela se recorda de uma decisão anterior e dos efeitos dessa decisão sobre o comportamento de seus alunos.

Na **Pergunta 9**, quando questionada sobre o que a motivou a acrescentar na questão 3 da proposta original (questão 7 da proposta da professora) a solicitação da descrição de como os alunos chegaram ao resultado da questão (D13), a professora apresentou a seguinte declaração:

Professora: Esse aí, eu pensei nela, é a mesma questão e o objetivo é exatamente para você conseguir observar que a gente tem uma quantidade de palitos, desculpa, uma quantidade de triângulos, a partir dos triângulos, que foi essa primeira observação que ocorreu na tabela. Que a partir dessa quantidade de triângulos você consegue calcular fazendo o dobro mais um em relação a quantidade de palitos. Nesse caso é exatamente para mostrar que não é necessário simplesmente, a gente consegue fazer a volta, tanto do número de triângulos para a quantidade de palitos, e o contrário também, o número de palitos para a quantidade de triângulos que tem ali. Então, essa relação que aparece ali, essa relação precisa ficar evidente. Existe essa dependência e essa dependência vem tanto de um lado quanto do outro, de uma variável entre a outra. E aí, tem a questão do aluno perceber que existe uma sequência de números que vai atender a essa regra que está acontecendo. Se ele percebe que é o dobro mais um, ele vai ter que pensar nesse número. Que número eu consigo o dobro, coloco mais um e dá 87? Talvez surgiria aí uma resolução de uma equação para conseguir fazer isso. Ou não, ele pode ir pensando. Então por isso que eu pedi pra descrever como ele chega ao resultado positivo ou negativo. Então ele vai talvez, se ele entendeu a questão do padrão, ele vai entender que eu preciso pensar em um número, multiplicar por dois, somar um, e será que isso vai chegar em 87? Se sim, aí ele vai dizer lá como ele fez. Algumas soluções pra mim seria isso, né? Ele utilizar uma equação ou simplesmente falar como tem que dar 87, eu sei que é o dobro de um número mais um, então eu penso que eu posso tirar o 1, tirando o 1 de 87 tem 86, a metade de 86, e aí ele conseguiria fazer esse percurso, tanto via equação, quanto falando como ele encontrou. Mas isso aí é um trabalho que dentro da sala de aula tem que ter uma interação bastante com o professor para que ele encaminhe o aluno a pensar nisso. Que nem todos os professores e alunos conseguem fazer isso de forma natural. O aluno tem que estar raciocinando, estar nesse momento de formulação de respostas. Ele está formulando a resposta dele e nessa formulação vão vir várias falas que não necessariamente são verdadeiras. Então, pensando em Brousseau, que é a ideia total dessa sequência, eles estariam formulando as respostas deles e automaticamente validando para ver se aquilo realmente é efetivo. Então, alguns vão estar pensando dessa forma. E outros vão estar indo de dois em dois até chegar a 87. Então isso sim pode acontecer. E aí algum ou outro... Não, não precisa ser desse jeito. A gente pode trocar as informações aqui, ó. É uma outra forma de fazer. Então isso aconteceu lá também. Então é bem interessante que isso... Nessa questão ser bem interessante isso acontecer.

Ao analisarmos a resposta da professora, destacamos os trechos da sua fala que justificam sua decisão *D13 - Solicitou a descrição de como eles chegaram ao resultado da questão*. (Quadro 19).

Quadro 19 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 9)

Resposta à Pergunta 9 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
Que a partir dessa quantidade de triângulos você consegue calcular fazendo o <u>dobro mais um em relação a quantidade de palitos</u> . Nesse caso é exatamente para mostrar que não é necessário simplesmente, a gente consegue fazer a volta, tanto do número de triângulos para a quantidade de palitos, e o contrário também, o número de palitos para a quantidade de triângulos que tem ali. Então, <u>essa relação que aparece ali, essa relação precisa ficar evidente. Existe essa dependência e essa dependência vem tanto de um lado quanto do outro, de uma variável entre a outra.</u>	Importância da percepção pelo aluno da relação existente entre as variáveis envolvidas	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado</i>
Se ele percebe que é o dobro mais um, ele vai ter que pensar nesse número. Que número eu consigo o dobro, coloco mais um e dá 87? Talvez surgiria aí uma resolução de uma equação para conseguir fazer isso. Ou não, ele pode ir pensando. <u>Então por isso que eu pedi pra descrever como ele chega ao resultado positivo ou negativo.</u> Então ele vai talvez, se ele entendeu a questão do padrão, ele vai entender que eu preciso pensar em um número, multiplicar por dois, somar um, e será que isso vai chegar em 87? <u>Se sim, aí ele vai dizer lá como ele fez.</u> Algumas soluções pra mim seria isso, né? <u>Ele utilizar uma equação ou simplesmente falar como tem que dar 87,</u> eu sei que é o dobro de um número mais um, então eu penso que eu posso tirar o 1, tirando o 1 de 87 tem 86, a metade de 86, e aí <u>ele conseguiria fazer esse percurso, tanto via equação, quanto falando como ele encontrou.</u>	Conhecimento prático sobre a importância da verbalização na aprendizagem	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à pedagogia</i>
Mas isso aí é um trabalho que dentro da sala de aula <u>tem que ter uma interação bastante com o professor para que ele encaminhe o aluno a pensar nisso.</u> Que nem todos os professores e alunos conseguem fazer isso de forma natural. O aluno tem que estar raciocinando, estar nesse momento de formulação de respostas. Ele está formulando a resposta dele e nessa formulação vão vir várias falas que não necessariamente são verdadeiras. Então, <u>pensando em Brousseau,</u> que é a ideia total dessa sequência, <u>eles estariam formulando as respostas deles e</u>	Conhecimento do referencial de Brousseau sobre as etapas das situações didáticas	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à pedagogia</i>

automaticamente validando para ver se aquilo realmente é efetivo.		
---	--	--

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Nesse trecho notamos a presença de três fatores epistêmicos que caracterizam a decisão da professora. De fato, ao discutir as diferentes formas dos alunos resolverem o problema, destacar a importância de se identificar corretamente o padrão “o dobro mais um” e sua relação com conceitos como dependência funcional, apontando a necessidade de tornar evidente essa relação de dependência para que os alunos avancem no processo de generalização reflete a influência da *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*, visto que, segundo Bessot (2019), este fator está ligado ao conhecimento do professor sobre o conteúdo.

Por sua vez, ao reformular o comando da questão, a professora apresenta uma compreensão pedagógica que valoriza o processo de aprendizagem, demonstrando uma abordagem que busca incentivar seus alunos a descreverem seu raciocínio e promover a formulação de hipóteses e validações, o que justifica que a modificação da proposta, relativa à decisão D13 também foi inspirada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. Tais aspectos caracterizam a presença do fator decisional ligado à *relação pessoal do professor à pedagogia*.

Dando continuidade à entrevista, na **Pergunta 10** questionamos sobre o motivo pelo qual acrescentou na questão 4 da proposta original (questão 8 da proposta adaptada) a frase “Descreva este procedimento com suas palavras” (D14). A forma como a questão 4 havia sido elaborada poderia levar os alunos a responderem apenas “Sim” ou “Não”. Sobre esse aspecto a professora apresentou a seguinte declaração:

Professora: Ah, sim. Isso aí já é buscando conduzir o aluno para uma generalização. Isso aí é, de fato, e é necessário também para esse processo. A gente precisa sair desse contar fisicamente, de forma concreta, para esse pensamento mais geral acontecer. Para isso, você tem que incentivá-los. Sem pensar nisso, sem pensar efetivamente no número. Existe uma forma... E aí, de novo, é aquele pensamento de qual é o cálculo que você poderia fazer. Qual cálculo você poderia fazer, o que você está fazendo desde o início até agora para você conseguir chegar nesses resultados desse estado em relação ao número de triângulos que tem, em relação ao número total de palitos. Quais são os cálculos que vocês estão fazendo, que não é o somar de dois em dois? O que tem na relação entre esses dois números para isso acontecer? Então, essa etapa, e é por isso que ela foi reescrita, não sei se eu reescrevi da mesma maneira. Eu não sei se foi da mesma maneira, mas é uma etapa essencial para a questão da generalização. Se ela não existir, a generalização também não vai existir [...].

Analisando a resposta da professora, ressaltamos trechos de sua fala (Quadro 20) que revelam a razão pela qual ela tomou a decisão *D14 - Solicita a descrição do procedimento a ser realizado*.

Quadro 20 - Unidades de contexto e de registro (Pergunta 10)

Resposta à Pergunta 10 (UC)	Fatores (UR)	Categoria e subcategorias (Bessot, 2019)
<u>A gente precisa sair desse contar fisicamente, de forma concreta, para esse pensamento mais geral acontecer. Para isso, você tem que incentivá-los. Sem pensar nisso, sem pensar efetivamente no número. Existe uma forma... E aí, de novo, é aquele pensamento de qual é o cálculo que você poderia fazer. Qual cálculo você poderia fazer, o que você está fazendo desde o início até agora para você conseguir chegar nesses resultados desse estado em relação ao número de triângulos que tem, em relação ao número total de palitos. Quais são os cálculos que vocês estão fazendo, que não é o somar de dois em dois? O que que tem na relação entre esses dois números para isso acontecer?</u>	Importância de conduzir os alunos a uma generalização explicitada de um modo gradualmente mais formal	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor ao saber à pedagogia</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Diante desse trecho a professora expressa uma necessidade em guiar os alunos para além da contagem concreta, partindo para uma formalização (algébrica) o que revela sua compreensão acerca do conceito matemático envolvido (generalização de padrões) e a importância de conduzir os alunos a perceberem a relação entre as variáveis (número de triângulos e número total de palitos). Portanto, entendemos que a decisão D14 está associada, conforme Bessot (2019), à *relação pessoal do professor à pedagogia*.

5.5 Análise dos fatores decisórios

Neste tópico, buscamos apresentar uma síntese dos fatores decisórios identificados na pesquisa e uma interpretação dos dados coletados. Apoiando-se em Bardin (2016), essas fases significam tratamento dos dados e interpretação deles. Com o intuito de facilitar tal compreensão, destacamos nos quadros seguintes as decisões didáticas tomadas pela professora durante a reconstrução da proposta didática e os fatores que influenciaram tais decisões. Os

quadros estão organizados de acordo com as decisões tomadas, conforme as categorias: 1 - *Exploração dos elementos da sequência*, 2 - *Análise do Padrão* e 3 - *Registros dos alunos*

Diante do exposto no Quadro 21, percebemos que as decisões tomadas pela professora agrupadas na categoria *Exploração dos elementos da sequência* (Categoria 1) tiveram influência de fatores do tipo epistêmico e história didática. No entanto, identificamos uma maior frequência de fatores do tipo epistêmico. Essa maior frequência se deve ao fato de a maioria das decisões elencadas nessa categoria estarem relacionadas a como a professora compreende o ensino e a aprendizagem da Matemática e do conteúdo em questão. Contudo, apesar do fator história didática ter aparecido com uma menor frequência, não podemos menosprezar sua influência nas decisões tomadas pela professora, uma vez que, como destaca Lima (2017), apenas o domínio dos conteúdos da disciplina que o professor ensina não é suficiente para lograr êxito no ensino, sendo necessário, além de outros fatores, conhecer a turma, o aluno e sua realidade.

Quadro 21 - Decisões didáticas e fatores: exploração dos elementos da sequência

Decisões (categoria 1) - <i>Exploração dos elementos da sequência</i>	
- D1 - Não explorou as imagens dos 3 primeiros elementos; (Q1) - D2 - Explorou uma característica geométrica de um triângulo (primeiro elemento da sequência); (Q1) - D3 - Explorou a possibilidade de ter 2 triângulos construídos com e sem lados em comum; (Q2) - D4 - Explorou a construção do segundo elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada, de acordo com o padrão; (Q2) - D5 - Explorou a construção do terceiro elemento da sequência a partir de uma quantidade de palitos dada, de acordo com o padrão; (Q3) - D6 - Acrescentou as etapas 5 e 6 no início da exploração e sem recorrer à construção das figuras; (Q5) - D7 - Acrescentou a etapa 15 de construção de acordo com o padrão. (Q6)	
<i>Fatores</i>	
- Necessidade de integrar álgebra e geometria.	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à disciplina</i>
- O reconhecimento do padrão pelos alunos ocorre durante a construção de desenhos; - Adequação gradual nas etapas de exploração do padrão.	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado</i>

- Uso do referencial de Brosseau sobre situação adidática para construir sua proposta.	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à pedagogia;</i>
- Adequação ao nível de conhecimentos matemáticos prévios dos alunos; - Conhecimentos matemáticos prévios dos alunos.	História didática: <i>história interaluno de uma turma alvo</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

As decisões da professora tomadas aqui (D1 a D7), de maneira geral, refletem estratégias que articulam geometria e álgebra, explorando padrões e promovendo a transição gradual dos alunos para um pensamento mais abstrato. Entendemos que tais decisões oportunizam aos estudantes o aprimoramento da sua capacidade de observação e interpretação, etapas essenciais para o desenvolvimento de sua capacidade de generalização e, conseqüentemente, de sua capacidade de pensar algebricamente.

No que se refere à decisão D1, a ideia de não explorar as imagens das três figuras de maneira imediata está alinhada à intenção da professora de possibilitar aos alunos, à medida que eles mesmos forem construindo tais figuras, se atentem às características presentes no padrão e à relação existente entre seus elementos.

Por sua vez, no que concerne à decisão D2, a escolha de explorar a forma geométrica da sequência (triângulo) oportuniza uma conexão entre a álgebra e a geometria. Essa conexão, por sua vez, pode promover situações interessantes para explorar a Matemática em diversos contextos, de dentro e de fora da escola, como apontam Vale e Pimentel (2010).

A abordagem proveniente da decisão D3 cria espaço para que os alunos ao explorarem a construção de triângulos com e sem lados em comum, comecem a identificar regularidades e diferenças, que são essenciais para a compreensão do padrão e sua generalização.

As decisões D4 e D5 permitem que os alunos ao explorarem a construção dos elementos da sequência (segundo e terceiro) a partir de uma quantidade de palitos dada, tenham a oportunidade de visualizar como o padrão evolui (embora ele ainda não estivesse claramente definido), permitindo que eles construam o entendimento de forma progressiva, o que facilita o reconhecimento da relação entre variáveis envolvidas.

Com relação a decisão D6, ela exige que os alunos trabalhem com uma abordagem mais abstrata, utilizando o padrão numérico para prever elementos subsequentes sem a necessidade de representações concretas. Tal decisão estimula o pensamento algébrico ao desafiar os alunos a pensarem além do concreto e estabelecer generalizações a partir do padrão previamente identificado.

Por fim, a decisão D7, como já especificado anteriormente, se constituiu basicamente em uma adequação da trajetória de construção gradual de compreensão do padrão, reposicionando a questão para o momento em que os alunos ainda estão explorando o padrão num sentido mais concreto.

Desse modo, entendemos que as decisões da professora (D1 a D7), agrupadas nessa categoria, são projetadas de maneira a criar um percurso didático que estimule o reconhecimento do padrão, a generalização e a abstração, promovendo assim o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Ao analisarmos o quadro seguinte, Quadro 22, referente às decisões tomadas pela professora agrupadas na categoria *Análise do Padrão* (Categoria 2), observamos o predomínio da influência dos fatores do tipo epistêmico. Esse fato está atrelado à preocupação da professora com o desenvolvimento gradual da aprendizagem dos alunos sobre o reconhecimento do padrão. A professora mobiliza uma pedagogia própria para construir e organizar o ensino do conteúdo, de modo a possibilitar um refinamento no processo de visualização e reconhecimento do padrão e viabilizar o aperfeiçoamento da capacidade de generalização e desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

Quadro 22 - Decisões didáticas e fatores: análise do Padrão na sequência

Decisões (categoria 2) – <i>Análise do Padrão</i>	
- D8 - Propôs a observação da regularidade da forma geométrica dos três primeiros elementos da sequência (padrão); (Q4) - D9 - Propôs a observação da sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos; (Q6) - D10 - Não usou o termo padrão no enunciado. (Q6)	
<i>Fatores</i>	
- Assegurar que os alunos reconheceram o padrão.	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à pedagogia</i>
- Importância da percepção pelo aluno da relação existente entre as variáveis envolvidas.	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

As decisões da professora (D8 a D10) revelam estratégias pensadas para promover a identificação de regularidades e a construção de relações funcionais pelos alunos.

No que diz respeito especificamente à decisão D8, a proposta de observar a regularidade da forma geométrica dos três primeiros elementos da sequência busca garantir que os alunos identifiquem padrões concretos, partindo de suas representações visuais para criar uma base sólida de compreensão. Tal decisão incentiva os alunos a considerarem a estrutura dessas formas geométricas, conectando características visuais a ideias mais abstratas, como relações numéricas, por exemplo.

Com relação à decisão D9, ao relacionar o número de triângulos ao número de palitos, a professora destaca a importância de estabelecer conexões entre variáveis, preparando os alunos para explorar conceitos de função. Desse modo, essa decisão estimula os alunos a compreenderem a relação funcional entre variáveis, um dos principais objetivos da álgebra.

Quanto à omissão do termo "padrão", proveniente da decisão D10, uma vez que não questionamos a professora sobre tal ação, acreditamos que essa omissão pode ter sido intencional para evitar uma instrução direta e fomentar a autonomia dos alunos na identificação da regularidade. Isto é, sem a palavra "padrão", os alunos precisam identificar, por si mesmos, a regularidade ou relação existente entre os triângulos construídos. Isso promove habilidades como observação, análise e formulação de hipóteses, tornando a atividade mais investigativa.

As decisões tomadas aqui pela professora, além de favorecerem aos estudantes a oportunidade de dar continuidade à sequência, contribuem para que eles se expressem e discutam o raciocínio que os levou a identificar o padrão e continuar a sequência. Desse modo, encontra-se implícita nas decisões tomadas a ideia de que o estudante tenha como ponto de partida uma generalização próxima pela descoberta do termo seguinte, relacionando cada termo com o(s) anterior(es) e avance, progressivamente, para uma generalização distante compreendendo o padrão que determina a situação em sua totalidade, relacionando cada termo com a ordem que ocupa na sequência, como sugere Stacey (1989). O desenvolvimento dessa capacidade de generalização (próxima e distante) é um componente essencial do pensamento algébrico e do próprio raciocínio matemático (Vale, 2009).

De maneira complementar, entendemos ainda que as decisões tomadas nessa categoria permitem que os alunos trabalhem ainda no campo aritmético, percebendo uma semelhança em alguns termos específicos da sequência e generalizando essa semelhança a todos os seus termos, de modo a simplesmente continuá-la, sem a ocorrência da dedução de uma expressão direta que lhes permitam encontrar um termo qualquer da sequência. Radford (2006, 2010, 2013) chama esse tipo de generalização de generalização aritmética.

No próximo e último quadro, Quadro 23, no que tange às decisões tomadas pela professora agrupadas na categoria *Registros dos alunos* (Categoria 3), houve a influência de

fatores do tipo epistêmico e história didática, com uma maior ocorrência do primeiro. Neste caso, entendemos que a predominância dos fatores epistêmicos se deve principalmente às concepções que a professora tem sobre o saber matemático a ser ensinado e sobre a pedagogia que orienta esse ensino, o que se reflete na forma como ela estrutura a atividade e nas abordagens utilizadas. Desse modo, a professora demonstra não apenas conhecer o conteúdo, mas também possuir uma visão clara de como ele deve ser ensinado e internalizado pelos alunos, com um foco no desenvolvimento da capacidade deles de refletir sobre e generalizar conceitos matemáticos.

Quadro 23 - Decisões didáticas e fatores: registro dos alunos

Decisões (categoria 3) – Registros dos alunos	
- D12 - Solicitou os registros das construções dos alunos por meio de desenhos; (Q1, Q2, Q3) - D13 - Solicitou a descrição de como eles chegaram ao resultado da questão (Q7) - D14 - Solicitou a descrição do procedimento a ser realizado. (Q8) - D15 - Solicitou o procedimento de construção da figura da etapa 4 (Q4)	
Fatores	
- Uso de desenhos possibilita a expressão e a visualização do padrão; - A explicitação do padrão facilita o processo de generalização dos alunos; - Conhecimento prático sobre a importância da verbalização na aprendizagem; - Conhecimento do referencial de Brosseau sobre as etapas das situações didáticas; - Importância de conduzir os alunos a uma generalização explicitada de um modo gradualmente mais formal.	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor à pedagogia</i>
- Conhecimento da relação existente entre padrões, generalização e funções; - Importância da percepção pelo aluno da relação existente entre as variáveis envolvidas.	Epistêmico: <i>relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado</i>
- Conhecimento prático sobre o uso da verbalização na aprendizagem.	História didática: <i>história interaluno de uma turma alvo</i>

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Ao analisarmos as decisões da professora de solicitar desenhos e descrição de procedimentos de resolução, entendemos que tais decisões refletem a crença de que essas práticas promovem a visualização e a verbalização do raciocínio matemático dos alunos, facilitando a generalização de padrões e a construção do conhecimento de forma cada vez mais formal e abstrata. A proposição da utilização dessas estratégias/ferramentas (desenhos e verbalização) está diretamente ligada ao conhecimento pedagógico da professora que, por meio delas, busca ajudar os alunos a construir seu próprio conhecimento, permitindo-lhes não apenas entender os conceitos, mas também articular como chegar às instruções dadas.

Também destacamos aqui a visão da professora sobre como o aprendizado matemático deve evoluir, proporcionando uma abordagem gradual em busca de uma formalização progressiva. Tal abordagem reflete a influência do envolvimento da professora com a teoria das situações didáticas de Brousseau, que enfatiza a necessidade de estruturar atividades que permitam aos alunos explorar, refletir e formalizar seus conhecimentos de forma gradual.

De modo geral, as decisões didáticas tomadas pela professora agrupadas nessa categoria (Categoria 3) potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes pois promovem práticas e estratégias que estimulam a generalização, o raciocínio lógico e a abstração, elementos centrais desse modo de pensar.

No que confere à decisão D12, os desenhos construídos pelos alunos permitem que eles observem o padrão e a relação entre as variáveis envolvidas, facilitando assim a identificação da regularidade. Nesse sentido, os desenhos construídos são importantes para ajudar os alunos a darem o passo inicial transitarem entre o concreto e o abstrato, habilidade essencial para o pensamento algébrico.

Por sua vez, nas decisões D13, D14 e D15, que consistem na solicitação da descrição dos procedimentos utilizados para se chegar a um resultado, entendemos que para justificarem suas estratégias, os alunos são levados a organizar e verbalizar seu raciocínio promovendo a identificação e a compreensão da estrutura subjacente ao padrão. A verbalização do raciocínio é um ponto central no desenvolvimento de competências algébricas pois conecta a resolução de problemas com a reflexão sobre processos, facilitando a transição para a linguagem algébrica. Como enfatiza Radford (2006, 2010, 2013), a linguagem, tanto oral quanto escrita, contribui para a transição da aritmética para a álgebra, facilitando a internalização da linguagem algébrica.

Portanto, compreendemos que as decisões tomadas aqui potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, na medida em que oferecem

oportunidades para que eles explorem o padrão, conectem representações e construam ideias mais formais de maneira gradual.

5.6 Relações da professora com a Álgebra e com o ensino de padrões e regularidades

Na entrevista realizamos uma discussão acerca da Álgebra, perguntando (**Pergunta 2**) à professora sobre sua relação com este campo da Matemática, desde a sua formação escolar, enquanto estudante, até sua experiência como professora. E como as vivências provenientes desta relação influenciam na elaboração de suas aulas.

Como resposta, a professora aponta que sua relação com a Álgebra começou muito cedo, uma vez que ela sempre demonstrou grande interesse e gosto pela Matemática. Segundo a professora, a consciência de sua facilidade com conceitos algébricos se deu quando na sétima série (oitavo ano do Ensino Fundamental) conseguia realizar de forma tranquila fatorações de produtos notáveis, sendo para ela algo prazeroso de ser realizado. Esse gosto pela Matemática continuou no Ensino Médio e a impulsionou a cursar a licenciatura em Matemática. Na graduação, seu interesse pela Álgebra continuou a crescer, tendo ótimos desempenhos em disciplinas como Álgebra 1, Álgebra 2 e Álgebra Linear, chegando a atuar como monitora de Álgebra por três anos durante a graduação, o que reforçou sua relação com a área.

A professora conta ainda que devido essa sua relação com a Álgebra durante toda sua vida acadêmica, ao ingressar no mestrado e doutorado seu foco de pesquisa se manteve nesse campo da Matemática. No entanto, a sua facilidade com a Álgebra apresentou-se como um obstáculo para seu ensino.

No que se refere à influência de suas experiências anteriores com a Álgebra no planejamento de suas aulas, a professora fez a seguinte afirmação:

Professora: Sim, eu tive um problema que pra mim foi um problema muito bom, por ter esse problema, de que o fato de no meu crescimento, no meu desenvolvimento, na construção dos conhecimentos que eu tive, eu não tive muita dificuldade, então eu sofri bastante nos meus primeiros anos. Nos meus primeiros anos eu sofri porque eu, de fato, eu não entendia o porquê que os alunos não entendiam. Porque era muito simples na minha cabeça. E isso começou a mudar exatamente no mestrado. Porque no mestrado, entrando no grupo, no GPEA lá da PUC, eu tive contato, inicialmente, o primeiro contato que eu tive foi exatamente com esse assunto, que é a generalização de padrões, observação e generalização de padrões. Foi dali que eu falei, gente, eu acho que agora estou conseguindo entender qual é a dificuldade dos alunos, não é algo imediato. Eu consegui de forma imediata, ou de uma forma um pouco mais tranquila, entender a questão da generalização. Os alunos, eles não conseguem, eles precisam de um passo a passo, eles precisam de um guia um pouco

diferenciado, a maior parte deles. Aí eu comecei a entender um pouco melhor como isso funcionava e, sim, isso me ajudou muito na questão da elaboração e até hoje me ajuda em pensar em, não com a minha cabeça de professora, e sim com a cabeça de aluno que está vendo aquilo pela primeira vez, que, sim, os alunos já estão vindo com algum histórico de dificuldade na questão de lidar com a matemática concreta. Como é que ele vai lidar com essa matemática se tornando abstrata? Então, isso tudo, depois de várias leituras, passando pelo mestrado, pelo doutorado, isso, sim, aconteceu, e eu tento, sim, constantemente fazer isso dentro de sala de aula. Entender de forma um pouco mais profunda, não superficial, tipo, você não sabe, você não estudou, você não leu. Tentar entender um pouco mais profundamente o porquê que existem essas dificuldades. Se de fato é em relação a algum conceito específico algébrico ou se tem uma dificuldade anterior que faça com que essa generalização não ocorra.

Na entrevista a professora reflete a diferença entre sua própria experiência de aprendizagem e a dos estudantes, relatando como a facilidade que tem com conceitos algébricos dificultou sua compreensão acerca dos desafios enfrentados pelos alunos. Essa reflexão, ou seja, esse reconhecimento de que sua relação com a Álgebra é diferente da dos seus alunos, é essencial para entender as dificuldades de aprendizagem deles, ao passo que reflete uma ação pedagógica na busca de ferramentas didáticas que possam ajustar suas estratégias para atender às necessidades dos seus alunos.

Sua relação com o ensino da matemática evolui na medida em que ela se torna consciente de que o entendimento dos alunos sobre a disciplina exige estratégias pedagógicas diferentes daquelas que lhe foram suficientes. Aqui, destacamos a importância da formação continuada para a evolução e amadurecimento da prática docente. Ao participar de grupos de pesquisa e estudar temas como a generalização de padrões no mestrado, a professora teve a oportunidade de ampliar sua compreensão acerca das dificuldades dos alunos e refinar suas estratégias de ensino, o que aprofundou ainda mais sua própria relação com a disciplina.

O entendimento de que a generalização algébrica não é um processo simples para a maioria dos alunos possibilitou à professora enxergar que o seu desenvolvimento ocorre de forma mais processual e gradativa. Essa perspectiva pode permitir à professora trabalhar a álgebra de uma maneira que não apenas apresente o conhecimento, mas que também apoie a construção desse saber de forma acessível, gradativa e significativa para os alunos.

Na entrevista (**Pergunta 12**), quando questionada sobre a existência de algum material de referência que tenha sido utilizado como embasamento para a reconstrução da atividade, a professora respondeu:

Professora: Então, a referência maior não foi nenhuma referência física especificamente, foi referência que eu já tenho da experiência. Como eu disse para você

na minha formação, o primeiro contato que eu tive com a questão da observação e generalização de padrões foi desde o mestrado. Então, a partir daí, constantemente eu tenho utilizado esse tipo de atividade para quando eu quero conduzir os alunos ao pensamento funcional. Então, se eu for pensar especificamente num material, meu primeiro material de referência foi o caderno do aluno, o caderno do professor da rede pública. Porque lá traz, lá tem isso, essa ideia da generalização de padrões exatamente no... Sétima série, oitavo ano. No oitavo ano aqui em São Paulo, não sei como é aí, mas aqui em São Paulo existe o currículo paulista. Que agora está com um monte de outros materiais ali de apoio, de suporte, que tem, por conta do novo ensino médio, do novo um monte de coisa, que acabam entrando aí na questão do currículo do aluno. Mas existe o currículo paulista. E no currículo paulista, existem muitas ideias da educação matemática ali dentro. E uma das ideias que eles incorporaram foi a questão da sequência didática. Isso que a gente apresentou, sendo uma atividade lá, os exercícios que vão aparecendo nesse caderno são exercícios que pedem isso para o aluno descrever, para o aluno observar, para ele refletir. Muitas dessas atividades começaram a aparecer a partir de 2008, que foi a primeira elaboração, o início da implementação desse currículo paulista. Foi a partir dali que eu comecei a ter essa experiência. e juntamente com um grupo de pesquisa que também estava trabalhando com isso. E aí, a partir daí, o que eu adaptei foi baseado nessa experiência com o caderno e com o grupo de pesquisa que estava trabalhando com isso. Não foi com o material em específico. Foi mais com essa experiência mesmo de lidar com esse tipo de atividade.

Observamos, a partir desse recorte da fala da professora, que ela possui conhecimento e acesso a propostas de ensino que exploram sequências didáticas, particularmente sobre generalizações de padrões. Esses materiais, a saber o currículo paulista, estiveram integrados com a sua formação profissional. A professora também destaca que a experiência acumulada com a leitura dos cadernos dos alunos foi fonte de ideias para as modificações da proposta original da sequência.

6 CONCLUSÕES

Na busca por respostas à nossa questão norteadora da pesquisa, a saber, *Quais fatores influenciam as decisões didáticas de professores de Matemática na elaboração de uma proposta de ensino que favoreça o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da exploração de padrões e regularidades?*, realizamos uma investigação sobre as mudanças realizadas por uma professora na adaptação de uma proposta dada. Associamos a essas modificações, decisões didáticas e fatores decisórios.

Como resultado, identificamos modificações nos enunciados das questões 1, 2, 3, 4 e 9 da versão original da sequência didática. Ao analisar essas modificações, associamos, precisamente 15 modificações realizadas pela professora organizadas em três categorias: aquelas mudanças que dizem respeito a forma de conduzir a exploração da construção da sequência, (categoria 1 com 7 decisões); aquelas que enfatizam a análise do padrão pelos alunos (categoria 2 com 4 decisões) e a aquelas que dizem respeito a solicitação de registros dos alunos em seus processos e resultados (categoria 3 com 4 decisões). Além disso, observamos que existem questões onde mais de uma decisão foi tomada, inclusive decisões pertencentes a categorias diferentes.

A categoria 1 apresentou quase metade da quantidade de modificações em comparação com as demais. Isso significa que as decisões relativas às mudanças da sequência didática voltaram-se mais para a forma de explorar a construção da sequência.

Com base nas análises realizadas, inferimos que as decisões tomadas pela professora para reconstrução da proposta didática (D1 a D15) emergiram da influência direta de uma combinação de fatores do tipo epistêmico e do tipo história didática. No que se refere às decisões tomadas na categoria 1 - *Exploração dos elementos da sequência*, houve uma maior predominância da influência de fatores do tipo epistêmico em comparação com os ligados à história didática. Os do tipo epistêmico, além de terem surgido com uma maior frequência, foram identificados em seus três subtipos (*relação pessoal do professor à pedagogia; relação pessoal do professor à disciplina; relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*), enquanto do tipo história didática foi identificado apenas o que se relaciona com a *história interaluno de uma turma alvo*.

Com relação à categoria 2 - *Análise do Padrão*, foram identificados apenas fatores epistêmicos ligados à *relação pessoal do professor à pedagogia* e à *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*. Por fim, no que diz respeito à categoria 3 - *Registros dos*

alunos, identificou-se a influência tanto de fatores do tipo epistêmico quanto do tipo história didática, com uma maior incidência dos primeiros. Os do tipo epistêmico evidenciados contemplam os subtipos: *relação pessoal do professor à pedagogia* e *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*. Com respeito ao fator história didática, mais uma vez foi identificado apenas o que se relaciona com a *história interaluno de uma turma alvo*.

Desse modo, temos que os fatores do tipo epistêmico emergem como principais influenciadores nas decisões didáticas da professora, em especial os ligados à *relação pessoal do professor à pedagogia* e à *relação pessoal do professor ao saber a ser ensinado*. Acreditamos que a predominância desses dois subtipos de fatores epistêmicos está diretamente relacionada às concepções da professora sobre o saber matemático a ser ensinado e sobre a pedagogia que orienta esse ensino.

Analisando o perfil acadêmico e profissional da professora, inferimos que as decisões tomadas para reconstrução da sequência didática (D1 a D15) foram claramente moldadas por seu conhecimento teórico-pedagógico, adquirido na sua formação acadêmica, especialmente em Educação Matemática, bem como por sua experiência prática acumulada ao longo de 19 anos, especialmente no Ensino Médio, que proporcionou percepções importantes sobre as dificuldades e necessidades dos alunos.

A análise da sequência didática modificada pela professora sugere um potencial para explorar as diferentes formas de pensamento algébrico descritas por Radford (2009, 2010a, 2018): factual, contextual e simbólico. As questões de 1 a 7 exploram situações concretas e números específicos, familiarizando os alunos com padrões e regularidades (*pensamento algébrico factual*). Já as questões 8 e 9 trazem a ideia do trabalho com a indeterminação explícita (*pensamento algébrico contextual*). Por fim, as questões 10 a 12 desafiam os alunos a usar linguagem algébrica formal (*pensamento algébrico simbólico*).

Por outro lado, é importante considerar que, embora as questões possuam potencial para explorar esses três tipos de pensamento algébrico, há a possibilidade de os alunos não conseguirem mobilizar esses estratos em todas as suas formas. Haja vista que fatores como conhecimentos prévios insuficientes, dificuldades na interpretação de questões ou limitações no domínio das representações algébricas podem interferir no processo. Nesse sentido, a mobilização plena do pensamento algébrico depende do nível de compreensão dos alunos, exigindo ajustes e mediações do professor para superar possíveis dificuldades, adaptando estratégias pedagógicas para apoiar os alunos nas transições entre os níveis de abstração.

O produto educacional derivado dessa pesquisa consiste na versão comentada da sequência didática analisada, compreendendo um material didático fundamentado e

direcionado ao Ensino Médio, com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes a partir da exploração de padrões e regularidades. O material busca incentivar os alunos a identificarem padrões e generalizá-los, possibilitando transitar gradualmente entre representações concretas, contextuais e simbólicas, alinhadas às teorias de Radford.

O produto educacional está organizado de forma gradativa, partindo de atividades concretas que exploram números específicos (*pensamento factual*), avançando para tarefas que abordam indeterminações explícitas (*pensamento contextual*) e culminando na formalização algébrica por meio de fórmulas e gráficos (*pensamento simbólico*).

Cada etapa do produto está acompanhada de comentários reflexivos que apresentam: expectativas de respostas; intervenções a serem realizadas; identificação de possíveis dificuldades dos estudantes e orientações para que o professor atue como mediador nesses momentos.

Acreditamos que o produto educacional, além de beneficiar diretamente os estudantes, também servirá como um instrumento de formação continuada para professores. A apresentação comentada da sequência didática e as análises reflexivas contribuem para a ampliação do repertório pedagógico dos docentes, incentivando práticas mais fundamentadas e ajustadas às necessidades dos alunos.

Portanto, julgamos que o produto educacional, fruto desta pesquisa, tem potencial para estimular uma compreensão mais profunda e significativa da álgebra; promover o protagonismo dos alunos, ao permitir que construam conhecimento de maneira significativa; e enriquecer o ensino de matemática no Ensino Médio com uma abordagem dinâmica, reflexiva e compatível com contextos reais de aprendizagem.

A pesquisa realizada aqui, trouxe contribuições relevantes para compreender os fatores que influenciam as decisões didáticas de uma professora de Matemática no desenvolvimento de uma proposta para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Contudo, embora apresente uma análise qualitativa detalhada, a pesquisa não incluiu a implementação prática da sequência didática na sala de aula, o que limitou a possibilidade de observar como as decisões tomadas e os fatores decisórios impactam diretamente o aprendizado dos alunos. Uma outra limitação da pesquisa consiste no fato dela ter sido centrada em uma única professora, o que pode restringir a diversidade de perspectivas e experiências relacionadas às decisões didáticas e fatores decisórios.

Desse modo, para superar as limitações mencionadas, algumas ações podem ser realizadas em estudos futuros. A primeira delas seria a implementação da sequência didática em sala de aula, permitindo observar como os alunos interagem com as atividades propostas e

como as decisões didáticas impactam suas aprendizagens. Já a segunda seria a inclusão de professores de diferentes contextos escolares e níveis de experiência para compreender melhor como fatores variados influenciam suas decisões.

Nessa perspectiva de continuidade, a pesquisa abre caminhos para desdobramentos futuros como a realização de um estudo de doutorado que envolva a implementação prática do produto educacional em salas de aula do Ensino Médio, analisando não apenas a eficácia das estratégias propostas, mas também os ajustes necessários para diferentes realidades escolares.

Portanto, embora essa pesquisa tenha gerado descobertas valiosas, sua continuidade é fundamental para validar e ampliar os resultados. A execução do produto educacional e a análise de seu impacto na sala de aula podem oferecer respostas mais completas e diretas à questão norteadora, fortalecendo o vínculo entre pesquisa acadêmica e prática docente e promovendo um ensino de Matemática mais eficaz e significativo.

REFERÊNCIAS

- AARTS, B; BAUER, M. A construção do corpus: um princípio para a coleta de dados qualitativos. In: BAUER, M.; GASKELL, G. (Ed.). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático**. Petrópolis: Vozes, 2002. p. 39-63.
- ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática – UFRPE. Recife, 2016.
- ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 10, n. 2, 2008.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BECK, Vinicius Carvalho. **Invariantes operatórios do campo conceitual algébrico mobilizados por crianças do terceiro ano do Ensino Fundamental**. 133 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande/RS, 2018.
- BESSOT, A. Les décisions didactiques de l'enseignant: un modèle pour tenter de les comprendre. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 5, p. 01-20, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/45577>. Acesso em: 10 ago. 2022.
- BLANTON, M. L. et al. **Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5**. Reston, VA: NCTM, 2011.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). **Early algebraization**, Berlin: Springer, p.5-23, 2011.
- BOGDAN, R. BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Editora Porto. 1994. 335 p.
- BONNAT, C. et al. Proposition d'un modèle pour la compréhension des décisions didactiques d'un enseignant. *Éducation et didactique*, v. 14, n. 3, p. 69- 90, 2020. Disponível em: <https://journals.openedition.org/educationdidactique/7793>. Acesso em: 12 ago. 2022.
- BORTOLETE, J.; GUARANHA, M. F.; OLIVEIRA, V. O Pensamento Algébrico na Base Nacional Comum Curricular: reflexões e alternativas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 24, n. 2, p. 325-352, 2022.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASSET, N. **Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH**: étude de facteurs de type histoire didactique. 2017. 311 f. Tese (Doutorado) - Curso de Didactique Des Mathématiques, Université Grenoble-Alpes., Grenoble, 2018. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01857580/document>. Acesso em: 10 out. 2023.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CAMPOS, M. A. **Uma Sequência Didática para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental**. 206 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Estadual da Bahia, Salvador, 2019.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In: **Quadrante**, v. VXi, n. 2. Portugal, 2007.

CARDOSO, M. R. G.; OLIVEIRA, G. S.; GHELLI, K. G. M. Análise de Conteúdo: uma metodologia de pesquisa qualitativa. **Cadernos da Fucamp**, v. 20, n. 43, p. 98-111, 2021.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da Álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**. São Paulo, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018.

COMITI, C.; GRENIER, D.; MARGOLINAS, C. Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In: ARSAC, G. et al. **Différents types de savoirs et leur articulation**. La Pensée Sauvage: Grenoble, 1995, p. 92-113.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 97 a 126, abril 2011.

DBR (Design Based Research) Collective. (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. **Educational Researcher** 32(1), 5-8.

DUARTE, R. Entrevistas em pesquisas qualitativas. **Educar em revista**, n. 24, p. 213-225, 2004

ESPINDOLA, E. B. de M.; LUBERIAGA, E.; TRAGALOVA, J. Decisões didáticas e fatores que as influenciam no ensino de razões trigonométricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 3, p. 263-279, 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39192>. Acesso em: 10 ago. 2022.

ESPÍNDOLA, E. B. M.; SILVA, R. M.; BRITO JÚNIOR, J. J. R. T. Microdecisões didáticas em uma aula sobre volume de sólidos geométricos. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v. 2, n. 21. p.37, 2020.

ESPÍNDOLA, E.; TRGALOVÁ, J. Trabalho Documental e Decisões Didáticas do Professor de Matemática: um estudo de caso. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana**, Recife, v. 6, n. 3, p. 1-25, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2251>. Acesso em: 10 ago. 2022.

FAVERO, D. C. B. P.; MANRIQUE, A. L. A abordagem do pensamento algébrico da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**. Florianópolis, v. 16, p. 1-17, jan./dez. 2021.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.25, n.3, p. 496-514, set./dez. 2017.

FERREIRA, W. C.; LEAL, M. R.; MOREIRA, G. E. Early Algebra e Base Nacional Comum Curricular: desafios aos professores que ensinam Matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 01-21, 2020.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores**. Lisboa, 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v.4, n.1, p.78-91. mar. 1993.

FRANCO, M. L. P. B. **Análise de conteúdo**. Brasília, DF: Liber Livro Editora, 2008.

GASKELL, G. Entrevista individuais e grupais. In: BAUER, M.; GASKELL, G. (Ed.). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático**. Petrópolis: Vozes, 2002. p. 64-89.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, mar./abr. 1995a.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, maio/jun. 1995b

GUALANDI, J. H. **Os reflexos de uma formação continuada na prática profissional de professores que ensinam matemática**. 2019. 167 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2019.

JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. C. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais dos Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, pp 96-118, 2019.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (ed.) **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 5-17.

KIERAN, C. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (ed.). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra – The 12th ICMI Study**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 21-33.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of school Algebra. In: GROWS, D. A. (ed). **Handbook of Resarch on Mathematics Teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992.

LACERDA, S. M.; GIL, N. Desenvolvimento do pensamento algébrico e estudo de padrões e regularidades com crianças: perscrutando possibilidades para educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 103, n. 264, p. 486-504, maio/ago. 2022.

LEE, L. **Early – but which algebra?** The future of the teaching and learning of algebra. In: ICMI STUDY CONFERENCE, 2001, Melbourne (Austrália).

LEITE, R. F. A perspectiva da análise de conteúdo na pesquisa qualitativa: algumas considerações. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v.5, n.9, p. 539-551, dez. 2017.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L. Álgebra como integrante da cultura matemática de todo cidadão. In: GUALANDI, J. H. (Org.). **Ensino de matemática: possibilidades e desafios**. Curitiba: Editora Bagai, 2021. p. 10-29. *E-book*.

LIMA, I. Conhecimentos e concepções de professores de matemática: análise de sequências didáticas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, p. 359-385, 2011.

LIMA, I. M. da S. Modelo, modelização e decisões didáticas. In: TELES, Rosinalda Aurora de Melo; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa, MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira. (Org.). **Investigações em didática da matemática**. Recife: Ed. UFPE, 2017. p.155-184. *E-book*. Disponível em: <https://editora.ufpe.br/books/catalog/download/207/217/628?inline=1>. Acesso em: 10 ago. 2022.

LIMA, J. R. C.; BIANCHINI, B. L. A álgebra e o pensamento algébrico na proposta da Base Nacional Comum Curricular para os anos iniciais do ensino fundamental. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 197-208, 2017.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálisis**, v. 10, n. SPE, p. 37-45, 2007.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nottingham, Nottingham, UK: 1992.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas. Papirus, 1997.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: EPU, 2015. 112 p.

MACHADO, S. D. A.; ALMEIDA, M. M. M. A generalização de padrão sob o ponto de vista de um professor de Matemática do Ensino Fundamental. **Perspectivas da educação matemática**, Campo Grande, MS, v. 1, n. 1, p. 41-54, jan./jun., 2008.

MANZINI, E. J. A entrevista na pesquisa social. **Didática**, v. 26, p. 149-158, 1990.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Técnicas de pesquisa**, 5ª edição, Revista e Ampliada, Editora Atlas S. A. São Paulo, 2002.

MARGOLINAS, C. La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In: SIMMT, E.; DAVIS, B. (Org.). **Actes 2004 de la rencontre annuelle du groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques**. Edmonton: CMESG/GCEDM, p.1-21, 2005.

MARGOLINAS, C. La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Les débats de didactique des mathématiques, La pensée sauvage, **Recherches em didactique des mathématiques**, 1995, p.89-102.

MARGOLINAS, C. Situations, milieux, connaissances: analyse de l'activité du professeur. In Dorier, J.-L. et al. (Eds.), **Actes de la 11 École d'Été de Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, p.141-156, 2002.

MARGOLINAS, C.; WOZNIAK, F. Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur: le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In: GUEUDET, G.; TROUCHE, L. (Eds.). **Ressources vives: le travail documentaire des professeurs en mathématiques**. Rennes: Presses Universitaires de Rennes, 2010. p.223-269.

MARTINS, G. A. **Estudo de Caso: Uma estratégia de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2006.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 4. ed. Petrópolis: Vozes, 2012. 232 p. PERRIN-GLORIAN, M.-J. Didactique des mathématiques In Bressoux, P. et al. (Eds.). **Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction**. Rapport de recherche pour Cognitique, Programme École et Sciences Cognitives. Ministère de la Recherche, 2002, p.1-10.

PONTE, J. P. Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino aprendizagem da Matemática e na formação de professores. In: VALE, I.; BARBOSA, A.

(org) **Padrões: Múltiplas Perspectivas e Contextos em Educação Matemática**. Projecto Padrões, 2009. p. 169 – 175.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. **Educação e Matemática**, Lisboa - Portugal. 2008.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 277p.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. **PME**, v. 1, p. 1-20, 2006. Disponível em: http://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf. Acesso em: 19 jul. 2023.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research In Mathematics Education**, [S.L.], v. 12, n. 1, p.1-19, mar. 2010a.

RADFORD, L. Antes que outras incógnitas fossem inventadas: investigações didáticas acerca dos métodos e problemas da álgebra italiana medieval. In: RADFORD, L. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Livraria da Física. São Paulo, 2011a.

RADFORD, L. Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: a semiotic-cultural approach to students' types of generalization. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 5, n. 1, p.37-70, jan. 2003.

RADFORD, L. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds). **A global dialogue from multiple perspectives**. Editora Springer. Berlin, 2011b.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática)**, Granada, v. 4, n. 2, p. 37-62, jan. 2010b. Disponível em: http://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf. Acesso em: 19 jul. 2023.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: CERME 6., 2009, Lyon, França. **Anais [...]**. Lyon: INRP, 2009. p. 33-53. Disponível em: http://www.luisradford.ca/pub/25_CERME6plenary1radford.pdf. Acesso em: 27 jul. 2023.

RADFORD, L. The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In: KIERAN, C. (ed.). **Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: the global evolution of na emerging field oof research and practice**. New York: Springer, p. 3 25, 2018. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2018%20-%20Radford%20-%20The%20emergence%20of%20symbolic%20algebraic%20thinking%20-%20web.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2023.

RIBEIRO, A. J.; BEZERRA, F. J. B.; SILVA, R. L. Mapeamento de concepções de Álgebra: uma alternativa para compreender seus diversos significados. **Acta Scientiae**. Canos, v. 18, n. 2, p. 419-434, maio/ago., 2016.

RODRIGUES, M. U. (Org.). **Análise de Conteúdo em pesquisas qualitativas na área da Educação Matemática**. Curitiba, PR: Editora CRV, 2019.

SILVA, J. A.; ALVES, L.L.; ANDRADE, R. P. Análise de Situações que Abordam Álgebra em Livros Didáticos dos Anos Iniciais. **Perspectivas da Educação Matemática**. INMA/UFMMS, v. 14, n. 35, p. 01-20, 2021.

SILVA, R. M. **Pensamento algébrico em tarefa com padrões**: uma investigação nos anos finais do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

SILVA, T. P. S. Áreas de figuras planas: decisões didáticas de um professor nas aulas de matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2022.

SILVA, T. R. F. **Decisões didáticas e contrato didático**: interrelações no ensino de um saber algébrico. 2020. Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, 2020.

SOARES, S. M. **Pensamento Algébrico**: quais elementos são identificados por professores de Matemática em atividades com este foco?. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

SOARES, S. M.; BIANCHINI, B. L. Saberes docentes e análise do milieu descendente em uma atividade sobre pensamento algébrico. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matem.**, São Paulo, v.6, n.1, pp.132-144, 2017.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalizing problems. **Educational Studies in Mathematics**, n. 20, p. 47-164, 1989.

TEIXEIRA JUNIOR, V.; SILVEIRA, M. R. A. O ensino de álgebra e a filosofia de Wittgenstein: sobre regras e essência. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 29-49, 2020.

USISKIN, Z. Concepções de álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hyginio H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. **Interacções**, Santarém, v. 8, n. 20, p. 181-207, 2012.

VALE, I. Das tarefas com padrões visuais à generalização. In: FERNANDES, J; MARTINHO, H.; VISEU, F. (Orgs.). **Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Viana do Castelo: APM, p. 35-63. 2009.

VALE, I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 398-418, 2019.

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T., BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. **Padrões em Matemática**: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico. Lisboa: Texto, 2011.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. **Os padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra**. Lisboa SEM-SPCE, 2007. Disponível em: <http://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2023.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 110, p. 33-38, 2010. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1899/1940>. Acesso em: 10 ago. 2023.

VAN DE WALLW, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6 ed. Tradução: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGEL, R. Reflexões teóricas sobre a atividade semiótica dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma tarefa de sequenciamento de padrões. In: MORETTI, V. D; RADFORD, L. (org.). **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021. p. 79-104.

APÊNDICE A – CARTA DE APRESENTAÇÃO

CARTA DE APRESENTAÇÃO DO PESQUISADOR

Ao Senhor(a) **Professor(a)**

Assunto: **Apresentação da Pesquisa**

Prezado(a) Professor(a)

Sou o mestrando Wendson César Silva do Nascimento, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM, do Centro de Ciências e Tecnologia – CCT, da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. Estou desenvolvendo uma pesquisa de Mestrado intitulada **“As decisões didáticas do professor de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de padrões e regularidades”**, sob a orientação da Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis.

O objetivo da minha pesquisa consiste em analisar os fatores de influência das decisões didáticas tomadas por professores de Matemática para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes por meio da exploração de padrões e regularidades. Assim, solicito sua autorização para que possa entrar em contato para a realização de uma Entrevista de forma online e voluntária para a contribuição da pesquisa.

Saliento que apenas o pesquisador em questão e sua orientadora terão acesso às respostas. Além disso, caso queira se retirar da pesquisa terá seu direito de retirar-se garantido.

O professor que aceitar participar desta pesquisa terá ciência que a análise dos dados será feita respeitando a sua opinião e será fiel às suas palavras, sem emitir juízos de valor em suas respostas. Os dados coletados nesta pesquisa serão utilizados apenas para fins científicos, sendo fidedignos com a realidade.

Informamos também que os participantes não receberão nenhum tipo de recompensa financeira pela sua participação voluntária.

Agradeço sua compreensão e colaboração no processo de desenvolvimento desta pesquisa de Mestrado e colocamo-nos à disposição para eventuais esclarecimentos.

Desde já agradeço sua atenção e eventual colaboração.

Atenciosamente,

Wendson César Silva do Nascimento

Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM, do Centro de Ciências e Tecnologia – CCT, da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

APÊNDICE B – QUESTÕES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (VERSÃO 1)

ATIVIDADE – Os palitos de fósforo

Observe como os triângulos são formados na sequência abaixo:



01. Desenhe/Construa a figura da etapa seguinte dessa sequência. Quantos palitos foram necessários para construir os triângulos dessa figura?
02. A partir do padrão apresentado na construção dos triângulos com palitos de fósforo, complete a tabela e responda:

ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS
1	1	3
2	2	5
3	3	7
4	4	9
5	5	11
6	6	13

Como ficará a imagem da figura na 10ª etapa? Quantos palitos de fósforo foram necessários para construir essa figura?

Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência.

03. Existe, nesta sequência, alguma figura composta por 87 palitos? Se existir, indique sua ordem/etapa correspondente.
04. Existe uma forma de descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos?
05. Como você explicaria a um colega, que não acredita na sua regra anterior, que ela funciona?
06. Escreva uma expressão algébrica (fórmula) que traduza a sua regra descrita anteriormente.
07. Quais são as variáveis envolvidas na questão?
08. Agora que vocês já encontraram a função, que tal construir um gráfico que relacione o número de palitos com o número de triângulos?
09. Quantos palitos são necessários para construir todos os triângulos até a etapa 15?

APÊNDICE C – ROTEIRO DA ENTREVISTA

- 1** – Qual a sua formação profissional e há quanto tempo leciona matemática? Há quanto tempo você atua como docente no ensino médio?
- 2** – Qual a sua relação com a álgebra desde sua formação escolar, na educação básica, até sua experiência como professora? Por exemplo, você sentiu alguma dificuldade de aprendizagem e/ou de ensino, e hoje com base na sua experiência você prepara aulas também pensando nessas dificuldades vivenciadas por você?
- 3** – Olhando para a atividade proposta no âmbito do projeto PIPRINT, de modo geral, houve alguma necessidade de adequação para sua realidade de sala de aula? Quais os fatores que o motivaram a realizar ou não essas adequações?
- 4** – A proposta inicial da atividade já trazia a princípio as três primeiras figuras da sequência prontas. Por qual motivo você optou por não as trazer desse modo na sua proposta didática?
- 5** – Por que você escolheu fazer com que os alunos construíssem cada uma das três primeiras figuras da sequência, ao invés de já as apresentar previamente?
- 6** – Com que intenção você propôs a questão 4 da sua proposta didática, visto que ele é uma adaptação da questão 1 da proposta original?
- 7** – Por qual motivo você acrescenta a questão 5 na sua proposta didática? Por que você solicita que os alunos determinem a quantidade de palitos necessários para construir as figuras das etapas 5 e 6 sem que eles recorram à construção das figuras?
- 8** – Por que você decidiu reescrever na sua proposta didática o item (a) da questão 6 (item (a) da questão 2 da proposta original)?
- 9** – Com que intenção você optou por reescrever na sua proposta didática questão 7 (questão 3 da proposta original)?
- 10** – Por que você reescreveu na sua proposta didática o comando da questão 8 (questão 4 da proposta original)?
- 11** – Por que você optou por trazer a última questão da proposta original para o item (c) da questão 6 da sua proposta didática?
- 12** – Você utilizou algum material de referência como embasamento para reconstrução/adaptação da atividade? Qual material foi utilizado e por quê?

ANEXO A – QUESTÕES DA VERSÃO ADAPTADA PELA PROFESSORA

1. Imagine que sejam dados palitos de fósforo para seu grupo. É possível construir um triângulo em que cada palito representa um destes lados? Registre como seria o desenho desta figura.

2. Como se daria a construção de dois triângulos com alguns destes palitos? Quantos serão estes palitos? Será possível a construção de dois triângulos com menos de seis palitos? Neste caso, quantos palitos seriam necessários? Desenhe uma representação desta figura.

3. Com a ideia utilizada no item anterior, como você construiria três triângulos com menos de nove palitos? Quantos palitos seriam necessários para esta construção? Faça a representação desta figura.

4. Observe as três figuras das etapas 1, 2 e 3 já construídas. O que você observa de comum na construção das figuras da etapa 2 e 3? Como seria a construção da figura da etapa seguinte (etapa 4)?

5. Seguindo este mesmo **padrão**, e sem a construção da figura, como fariam para construir as figuras das etapas 5 e 6? Quantos palitos são necessários em cada uma destas etapas?

6. A partir das figuras dos triângulos com palitos de fósforo construídas, complete a tabela a seguir:

ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS
1		
2		
3		
4		
5		
6		

- Observe a sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos. Como você descreveria a imagem da figura na 10ª etapa? Quantos palitos de fósforo foram necessários para construir essa figura?
- Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência.
- Quantos palitos são necessários para construir todos os triângulos até a etapa 15?

7. Imagine que você possui 87 palitos. Existe, nesta sequência, alguma figura composta por esta quantidade de palitos? Descreva como chegou no resultado positivo ou negativo. Se existir, indique a etapa correspondente.

8. Existe alguma forma para descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos? Descreva este procedimento com suas palavras.

9. Como você explicaria a um colega, que não acredita na sua regra anterior, que ela funciona?

10. Escreva uma expressão algébrica (fórmula) que traduza a sua regra descrita anteriormente.

11. Quais são as variáveis envolvidas na questão?

12. Agora que vocês já encontraram a função, que tal construir um gráfico que relacione o número de palitos com o número de triângulos?

ANEXO B – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA

Entrevistador: Bom dia, Joice.

Professora: Bom dia!

Entrevistador: Você está me ouvindo bem?

Professora: Estou sim

Entrevistador: Então vamos começar. O objetivo dessa entrevista é discutirmos as modificações realizadas por você na sequência didática elaborada no PIPRINT para que a gente possa tentar identificar alguns fatores que levaram você a realizar essas mudanças. Você viu que eu mandei pra você o roteiro de entrevista e as duas versões da sequência didática, a elaborada no projeto e a adaptada por você?

Professora: Vi sim. Eu creio que deu para melhorar a minha lembrança e entender de fato o porquê que eu fiz cada coisa.

Entrevistador: Então, ótimo. Então, vamos começar o roteiro de entrevista. E a primeira pergunta do roteiro era o seguinte. Qual a sua formação profissional e há quanto tempo leciona matemática? Há quanto tempo você atua como docente do ensino médio?

Professora: Sim, vamos lá. A minha formação é licenciatura em matemática. Então, fiz a licenciatura em matemática. Tenho aperfeiçoamento e especialização também na área de matemática. No caso, especialização em educação matemática. O meu mestrado e o meu doutorado, eles foram feitos na PUC, São Paulo. Os dois também são em educação matemática. Então, mestrado e doutorado. E como docente, eu já atuo há 19 anos. Estou no meu 19º ano aí de docência. Fiquei dez anos no Ensino Público Estadual Paulista, e aí os outros nove, que eu estou nesses últimos nove, eu trabalho no Instituto Federal de São Paulo, no campus Itaquaquecetuba. E no ensino médio específico, eu tenho 15 anos de experiência, especificamente no ensino médio. Nesse tempo, só deixei de estar atuando efetivamente no ensino médio por conta de um tempo que eu fiquei afastada para cumprir o doutorado. Mas, exceto isso, todos os outros anos eu tive o contato com o ensino médio. E também alguns anos, concomitantemente, com o ensino fundamental. É isso? Tem alguma coisa a mais?

Entrevistador: Não, acho que fechou essa primeira pergunta. A segunda pergunta seria, no caso, qual a sua relação com a álgebra desde a sua formação escolar, na educação básica, até a sua experiência como professor. Por exemplo, você sentiu alguma dificuldade de aprendizagem e ou de ensino, e hoje, com base na sua experiência, você prepara aulas também pensando nessas dificuldades vivenciadas por você?

Professora: Vamos lá. A minha relação com a álgebra, sim, ela começou muito cedo. Eu sempre gostei de matemática, de estudar matemática. E eu costumo dizer, isso eu tinha percebido já que eu gostava de matemática quando mais nova, assim, criança, mas eu comecei a entender que eu sabia um pouco mais de matemática, né, enquanto criança, quando eu tava na sétima série em que a gente começou a ver o quadrado da soma pela diferença. Quando a gente começou a ver o produto da soma pelo produto soma, eu falei, gente, eu acho que eu gosto disso. As fatorações eu adorava fazer. O professor colocava lá algum tipo de dificuldade, eu conseguia êxito na dificuldade que ele colocava. Então, eu falei, eu acho que eu consigo fazer isso. E aí a minha relação com a álgebra começou, nesse enfrentamento dessas questões de

fatorações dos produtos notáveis. E aí foi. Começou no próprio ensino médio. Eu sempre tive bastante facilidade. Eu nunca tive efetiva dificuldade em matemática. Isso foi algo que me motivou sempre, fazer matemática, porque pra mim era fácil, assim, né? Eu entendia, não era fácil, mas eu entendia, segundo minha explicação. E a mesma coisa aconteceu na faculdade. Na faculdade, eu comecei a ver as coisas que estavam sendo feitas, dadas nas disciplinas. E na disciplina de álgebra, álgebra 1, álgebra 2, álgebra linear, que tem alguns assuntos de álgebra, eu sempre fui muito bem. Inclusive, durante a graduação, eu fiquei três anos sendo monitora de álgebra. Então, a álgebra sempre esteve presente no meu percurso como um todo. E aí, estando no mestrado e no doutorado, meu foco acabou sendo também na álgebra por conta dessa experiência, esse lado de experiência inicial de vida, isso já aconteceu. Então, eu falei, bom, vou focar no mestrado. No mestrado, o tema foi a divisibilidade. E no meu doutorado, o tema foi o Teorema Fundamental da Aritmética. Então, alguns podem até pensar, mas divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética, eles são álgebra? Sim. Para nós, a gente entende que sim, essa é uma parte da álgebra. A teoria dos números é uma parte da álgebra, até porque é a partir dela que a gente consegue ter a questão da generalização, e assim por diante. Então a gente, sim, faz parte da álgebra. E é bastante interessante que quando a gente pensa que a álgebra abrange também a teoria elementar dos números, a gente dá uma riqueza maior a esses temas, por exemplo. Dele, que vai além do que isso é muito fácil, isso todo mundo consegue fazer, todo mundo consegue aprender, e não é assim que acontece, né? Aí você comentou sobre se isso me ajudou na minha prática.

Entrevistador: Isso, se a sua experiência anterior com relação a álgebra, se isso faz com que você, de certa forma, pense nas atividades propostas pensando nas suas experiências.

Professor: Sim, eu tive um problema que pra mim foi um problema muito bom, por ter esse problema, de que o fato de no meu crescimento, no meu desenvolvimento, na construção dos conhecimentos que eu tive, eu não tive muita dificuldade, então eu sofri bastante nos meus primeiros anos. Nos meus primeiros anos eu sofri porque eu, de fato, eu não entendia o porquê que os alunos não entendiam. Porque era muito simples na minha cabeça. E isso começou a mudar exatamente no mestrado. Porque no mestrado, entrando no grupo, no GPEA lá da PUC, eu tive contato, inicialmente, o primeiro contato que eu tive foi exatamente com esse assunto, que é a generalização de padrões, observação e generalização de padrões. Foi dali que eu falei, gente, eu acho que agora estou conseguindo entender qual é a dificuldade dos alunos, não é algo imediato. Eu consegui de forma imediata, ou de uma forma um pouco mais tranquila, entender a questão da generalização. Os alunos, eles não conseguem, eles precisam de um de um passo a passo, eles precisam de um guia um pouco diferenciado, a maior parte deles. Aí eu comecei a entender um pouco melhor como isso funcionava e, sim, isso me ajudou muito na questão da elaboração e até hoje me ajuda em pensar em, não com a minha cabeça de professora, e sim com a cabeça de aluno que está vendo aquilo pela primeira vez, que, sim, os alunos já estão vindo com algum histórico de dificuldade na questão de lidar com a matemática concreta. Como é que ele vai lidar com essa matemática se tornando abstrata? Então, isso tudo, depois de várias leituras, passando pelo mestrado, pelo doutorado, isso, sim, aconteceu, e eu tento, sim, constantemente fazer isso dentro de sala de aula. Entender de forma um pouco mais profunda, não superficial, tipo, você não sabe, você não estudou, você não leu. Tentar entender um pouco mais profundamente o porquê que existem essas dificuldades. Se de fato é em relação a algum conceito específico algébrico ou se tem uma dificuldade anterior que faça com que essa generalização não ocorra.

Entrevistador: Ótimo, perfeito. Então vamos para a terceira. Isso, consegui responder perfeitamente a questão. E vamos agora para a terceira. Na terceira questão, olhando para a atividade. Agora a gente vai focar especificamente na atividade.

Professora: Eu posso abrir a atividade aqui só para eu ver?

Entrevistador: Pode sim, com certeza.

Professora: Eu estava com ela aqui pronta? Não sei onde ela está agora. Aqui. Aqui, ok.

Entrevistador: Pronto. Então, olhando para a atividade, na proposta, no âmbito do Piprint, de modo geral, houve alguma necessidade de adequação para a sua realidade de sala de aula? Quais os fatores que a motivaram a realizar ou não essas adequações?

Professora: A adequação aconteceu porque, a princípio, a atividade que veio, aplicada lá na França e tudo mais, ela veio com foco no ensino fundamental. Então, era para o ensino fundamental e, como eu estava no ensino médio, aquilo do jeito que estava para o ensino médio, eu achei um pouco básico demais, entendendo que poderia ter algum outro tipo de aprofundamento. Então, imaginando que eles estão no ensino médio, o ensino médio tem a questão das funções sendo trabalhadas. E aí o meu pensamento foi o porquê não usar essa atividade para também começar a ter uma inicialização da questão da função, da questão da relação que existem entre duas variáveis. E aí eu vi nessa atividade o potencial para gerar esse primeiro contato, ou algum contato, porque acabou que, quando eu apliquei, alguns alunos já tinham contato, já tinham tido contato com a função, inclusive com esse tipo de atividade. Então, eles já conheciam mais ou menos essa atividade, mas eles não sabiam o significado futuro, o que poderia ser feito depois, que para mim o objetivo eram as funções. Para eles era só olhar os triângulos e encontrar ali alguma coisa. Mas para a gente tinha uma outra perspectiva. Então, exatamente, a motivação foi. Inicialmente foi para um nível escolar e eu estava em outro e a adaptação foi necessária pra não ser uma coisa muito imediata, pra eles acharem que é uma coisa até muito fácil, eventualmente, na hora de fazer. Descobri que talvez se eu tivesse colocado a atividade do mesmo jeito, traria tantas dificuldades quanto. Exatamente por tudo que eu falei na outra questão. Mas assim, eu senti inicialmente essa necessidade de adaptar.

Entrevistador: Você aplicou para que... Não tá no roteiro, mas só pra ter noção, você aplicou para que ano?

Professora: Primeiro ano. É, primeiro ano do ensino médio. E no dia da aplicação tinha uma aluna que era do terceiro. Porque ela tava lá e falou, ah, tô esperando a minha irmã, eu posso participar? Falei, pode participar. E aí acabou que essa aluna do terceiro ano, ela já tinha feito muitas questões em relação a isso, já tinha visto progressões aritméticas, geométricas, então ela tinha aí um leque de conhecimento um pouco maior, e aí no grupo dela eles falaram, era só fazer isso, era só fazer isso fácil, isso é fácil. Aí um outro grupo já não era assim, que eram de alunos só do primeiro ano, que eram um pouco mais de dificuldade. Então, já estou falando da atividade. Enfim, só para você entender o que aconteceu. Essa aplicação.

Entrevistador: Pronto. Aí, como eu já havia enviado, essa primeira... Esse primeiro anexo, depois do roteiro, foi a atividade proposta no Piprint e a segunda foi a que você adaptou. Aí agora a pergunta vai ser, já com relação, vão ser perguntas mais específicas. A proposta inicial da atividade já trazia a princípio as três primeiras figuras da sequência pronta. Por qual motivo você optou por não as fazer desse modo na sua proposta didática?

Professora: O motivo foi exatamente para buscar trabalhar outros aspectos que não necessariamente a questão da álgebra. Imaginando que eu estou no primeiro ano, o primeiro ano ele já tem um arcabouço um pouco maior de conhecimento, pelo menos deveria ter, que

faça com que eles consigam entender instruções. Então, no caso, a gente poderia trabalhar a questão da geometria, do conhecimento do que são as figuras, no caso, triangulares, o que significa ser um triângulo equilátero, o porquê aquilo ali é um triângulo equilátero. Todos os lados desse triângulo teriam a mesma medida, então quais seriam as consequências? Eu queria explorar com eles os possíveis desenhos que poderiam ter, triângulos equiláteros, quando eles são desenhados um lado comum ao outro. E foi interessante que isso apareceu na atividade. Eles foram fazendo e falei, olha, um, aí coloca um palito. Eles não tiveram a ideia de olhar para os alunos, os palitos e tudo mais. Eu tirei essa ideia de fazer com palitos e pedi para que eles fizessem escrevendo e desenhando, que para mim era uma dificuldade maior para eles, porque, com os palitos, você perceberia que os palitos têm a mesma medida. E, desenhando, não necessariamente. Você teria que entender que o seu desenho teria que formar triângulos que têm a mesma medida de lado. E aconteceu, em um dos grupos, em que os triângulos não ficaram de lado, Mesmo separados, eles não estavam girados. Ficaram um pra cima e dois pra baixo. Eles fizeram isso. E conseguiram fazer isso com medidas diferentes dos lados. Eles aumentaram um lado e ficou muito maior do que o outro lado. Então, quando isso aconteceu, eu falei, nossa, que legal. Que aí eram outros aspectos que poderiam ser trabalhados também nessa atividade, que é o aspecto da nomenclatura, da classificação, dos triângulos, e o porquê que eles são chamados assim, quais são as características e propriedades daí, por conta desse desenho que eles fizeram. E tem várias outras coisas que poderiam ser trabalhadas que acabaram não trabalhando, mas que isso poderia começar um outro trabalho que vem além de pensar só na parte da atividade. Achei que esse momento de descoberta dos desenhos que poderiam ser criados também faria parte do início desse raciocínio algébrico, dessa generalização. Uma vez que ele vai ter que contar obrigatoriamente, ele vai ter que pensar nessas posições e isso poderia dar o primeiro gatilho para tentar pensar, ah, aqui é só colocar mais um, aqui é só colocar mais um, coloca assim, coloca assim. Então isso poderia iniciar esse pensamento. E esses outros aspectos também poderiam ser trabalhados.

Entrevistador: Ótimo. Por que você escolheu fazer com que os alunos construíssem cada uma das três primeiras figuras da sequência ao invés de já as apresentar previamente?

Professora: É, exatamente. Até quando eu fui pensar nessa organização, eu lembrei do Gui Brousseau, em relação às sequências didáticas. A teoria das sequências didáticas, a gente tem isso como pressuposto, em que a gente apresenta uma atividade, essa atividade é um exemplo disso, em que é uma situação adidática, em que a gente apresenta isso para o aluno, Ele não sabe, efetivamente, qual é o seu objetivo, mas ele segue as suas orientações para fazer algo. Então, o fato de não mostrar os desenhos era para tentar trazer esse adidático. Eu não sei o que vai acontecer, sabendo que muitos deles já tiveram essa experiência de observar padrões, porque é algo que está muito presente nos materiais do ensino fundamental agora, no finalzinho, no nono ano. Então, já tem esse tipo de atividade, contar bolinhas, de contar quadradinhos e ver qual é o centésimo, isso tem no ensino fundamental. Enquanto alguns que chegaram no ensino médio, eles chegaram com algum tipo de bagagem, porque antes de aplicar essa atividade, eu já tinha aplicado uma avaliação diagnóstica na sala. E aí, nessa avaliação diagnóstica, tinha uma atividade, um exercício lá, em que eles tinham que fazer, não a generalização, mas descobrir algum padrão. Então, não era uma atividade nova pra eles. Se eu simplesmente mostrasse, eles já sabiam. Ah, já sei, é para entrar no centésimo número. Então, é exatamente para trazer essa dificuldade de que aquele desenho, sim, aquela forma de construir, ela vai trazer padrões e ela vai trazer no futuro, depois de você analisar, essa generalização.

Entrevistador: Ótimo. Próxima questão.

Professora: O que é o correto? Não é nem o correto, mas eu estou respondendo o que está acontecendo.

Entrevistador: Não, está ótimo. Está ótimo. A próxima questão é com que intenção você propôs a questão 4 da sua proposta didática, visto que ela é uma adaptação da questão 1 da proposta original.

Professora: A questão 1 é desenhe a etapa ... quanto é necessário para construir... Tá, o 4. E agora deixa eu ver a minha 4. 1, 2, 3, 4. 2 e 3. Sim, esse aqui, na verdade, é a mesma questão. Quando eu pensei na quarta, é como se a quarta fosse exatamente o início da atividade proposta. Então, a minha adaptação foi as três primeiras, foi para explorar essa construção. Essa construção da sequência. E a quarta questão seria, de fato, a primeira. Então, olha só, agora que vocês pensaram, como a gente... E lá na hora, quando eu apliquei, eles já começaram a falar sobre isso. Não, é isso. Para construir a outra, é só colocar de dois em dois a mais que a gente consegue fazer o outro. Isso já começou a ser falado. Então, essa construção inicial, que foi o objetivo, já começou a despertar neles essa visualização de algum padrão, inclusive na construção de cada um dos triângulos. O que estava acontecendo, não lembro se era mais dois, era mais três, enfim. Não, é só você colocar mais dois e sempre colocar mais dois para a próxima, você vai ter mais dois, mais dois, alguma coisa assim. Então, isso já propiciou uma visualização do padrão. Então, ali foi mais para eles. Se eles não perceberam o padrão ainda, durante a construção, nas questões 1, 2 e 3, na 4, olha, agora olhe a questão 1, 2 e 3. Está vendo alguma coisa que está acontecendo de uma para outra? O que tem em comum nessa construção? Então, o que aconteceria também em comum com a quarta? Na quarta também entraria esse padrão. Então, para mim, essa construção inicial já sustentaria essas ideias.

Entrevistador: Ótimo. Próxima questão. Por qual motivo você acrescenta a questão 5 na sua proposta didática? Porque você solicita que os alunos determinem a quantidade de palitos necessários para construir as figuras das etapas 5 e 6, sem que eles recorram à construção das figuras.

Professora: Exatamente, para que eles consigam falar o padrão. que isso é algo que eu entendo muito que faz parte da generalização. Se você consegue falar e refletir sobre como aquilo está acontecendo, como aquele padrão está acontecendo, você consegue descrever com uma facilidade maior qual é a generalização que você está vendo. Eu sinto isso muito no meu dia a dia com os meus alunos. Eu falo isso pra eles quando eles estão falando de função, no ensino médio. E aí eu falo pra eles que a função, a escrita da função, nada mais é do que os cálculos que vocês estão fazendo pra que vocês consigam chegar nas respostas. Então, quando eu falo com eles, para que eles digam para mim como você fez o cálculo. Ah, não, eu peguei o número, multipliquei por 2 e depois eu somei o 3. Eu falei, tá vendo que você multiplicou por 2 e depois você somou o 3? É isso, são essas operações que tem que ter na sua fórmula, na sua função. Então, isso, o falar como fez, facilita, isso aí já pensando na minha experiência, facilita a questão do entendimento do que significa essa generalização, que nada mais é do que você está fazendo a mesma coisa que com os números concretos, só que isso vai ser uma... como chama, um padrão, um padrão em que você sempre vai recorrer ao mesmo tipo de operação, com os mesmos números e resultados que serão diferentes, já puxando para a questão da função, que vão ser resultados diferentes porque a gente está falando sobre a relação de dependência entre os outros dois números, mas é sempre a mesma operação, é sempre o mesmo pensamento, é o mesmo padrão. Então é aí que vem a questão, vamos tentar começar a observar os padrões que estão lá e puxar para aqueles alunos que, eventualmente, não tenham entendido que existia um padrão. Então, nesse momento, eu apliquei em grupos, né? Então, grupos com três, quatro alunos. Então, tinha alguns grupos que já tinham percebido esse padrão e eu pedi para eles

falarem. E um falando para o outro, o outro olhava. Ah, eu não tinha percebido. Então, agora eu percebi. Então, por isso que eu pedi para eles fazerem dessa maneira.

Entrevistador: Ótimo. Próxima questão, porque você decidiu reescrever na sua proposta didática o item A da questão 6 que corresponde ao item A da questão 2 da proposta original?

Professora: Peraí, item A... Peraí, da 2... Calma aí... Isso, tá! A, 2, como ficaria dessa? Assim, aí já é o momento em que, uma vez que eles já conseguiram observar que existe um padrão, eles percebem que tem um padrão, mas é muito comum eles perceberem um padrão simplesmente em relação às somas. Eles observam que tem... Ah, tá acontecendo aqui. Deixa eu só olhar aqui. Aqui, é isso que ele tá percebendo. Ele observa simplesmente os resultados finais. Então, da quantidade total dos palitinhos. Então, o que aconteceu lá? Quando tem um palitinho, tem três. O número de palitos, né? Tem dois triângulos e cinco. Ele não percebe essa relação que existe entre o número de triângulos, isso de cara, tá? O número de triângulos e a quantidade total de palitos. Ele só vai falando assim. Ah, vai pulando de dois em dois. E o pular de dois em dois, efetivamente, para a generalização não é o padrão que está acontecendo. O padrão que tem que ser observado é em relação ao número de triângulos e a quantidade de palitos. Então, essa tabela, ela é importantíssima, ela não pode deixar de existir. Exatamente para que você fomente no aluno essa questão de observar não o quanto está pulando de tantos em tantos, né? E o fato de você pedir para ir para o décimo e aí você ir para o vigésimo, vigésimo quinto, é para tirar essa visão de vamos pular de dois em dois, porque isso vai dar um pouco de trabalho. Como é que a gente pode fazer de uma forma, observando algo que está acontecendo, que vai facilitar esse meu cálculo. Então, é pra tirar isso mesmo, pra tirar o de dois em dois. É isso mesmo que eu tava acontecendo, a cada dois quadradinhos, palitinhos a mais, formava um novo triângulo, era isso. Então, é pra não pensar apenas no resultado final e observar. E aí, nessa questão em específico, Alguns alunos... Eu tive que fazê-los olhar essa relação. Então, fazer essa tabela fez com que eles observassem o 1, 3, o 2 e o 5. Nossa, é o dobro mais um. Esse o dobro mais um só apareceu depois que a tabela estava pronta e não na confecção da figura, efetivamente.

Entrevistador: Ótimo. Então, no caso, você optou por reescrever dessa forma para chamar a atenção para essas duas informações, esses dois dados importantes.

Professora: Exatamente. Essa relação que existe entre eles. Porque eles não estavam... Na verdade, eu sabia que isso ia acontecer. Que eles nunca observam... Nunca não. Se você não pede para eles observarem essa relação entre o número de triângulos e palitos total, eles só vão tentar encontrar o resultado. Eles não vão observar, ah, é o vigésimo, então você dobra mais um. Não. Eles vão tentando de dois em dois. É muito comum isso acontecer. Ah, mas é muito grande, não... Ah, ele pediu qual que estaria no milésimo lugar, o milésimo triângulo. Nossa, é muito grande, não quero fazer. Então, para tentar, eles observarem ali na tabela. A tabela, eu acho que é um recurso absolutamente primordial quando você está tentando observar padrão. É ali que você consegue mostrar isso na tabela, e tanto na minha quanto na original, realmente ele é absolutamente necessário.

Entrevistador: Ótimo. Nona questão, com que intenção você optou por reescrever na sua proposta didática a questão 7, que corresponde à questão 3 da proposta original?

Professora: Tá, deixa eu ver aqui a 3. Só olhar aqui. A 3, qual que é a 3? Ah, tá. É isso. Aqui também. Deixa eu ver. É a mesma... Eu escrevi a mesma coisa, né?

Entrevistador: Isso. É você reescrever ou você... Aham.

Professora: Esse aí, eu pensei nela, é a mesma questão e o objetivo é exatamente para você conseguir observar que a gente tem uma quantidade de palitos, desculpa, uma quantidade de triângulos, a partir dos triângulos, que foi essa primeira observação que ocorreu na tabela. Que a partir dessa quantidade de triângulos você consegue calcular fazendo o dobro mais um em relação a quantidade de palitos. Nesse caso é exatamente para mostrar que não é necessário simplesmente, a gente consegue fazer a volta, tanto do número de triângulos para a quantidade de palitos, e o contrário também, o número de palitos para a quantidade de triângulos que tem ali. Então, essa relação que aparece ali, essa relação precisa ficar idêntica. Existe essa dependência e essa dependência vem tanto de um lado quanto do outro, de uma variável entre a outra. E aí, tem a questão do aluno perceber que existe uma sequência de números que vai atender a essa regra que está acontecendo. Se ele percebe que é o dobro mais um, ele vai ter que pensar nesse número. Que número eu consigo o dobro, coloco mais um e dá 87? Talvez surgiria aí uma resolução de uma equação para conseguir fazer isso. Ou não, ele pode ir pensando. Então por isso que eu pedi pra descrever como ele chega ao resultado positivo ou negativo. Então ele vai talvez, se ele entendeu a questão do padrão, ele vai entender que eu preciso pensar em um número, multiplicar por dois, somar um, e será que isso vai chegar em 87? Se sim, aí ele vai dizer lá como ele fez. Algumas soluções pra mim seria isso, né? Ele utilizar uma equação ou simplesmente falar como tem que dar 87, eu sei que é o dobro de um número mais um, então eu penso que eu posso tirar o 1, tirando o 1 de 87 tem 86, a metade de 86, e aí ele conseguiria fazer esse percurso, tanto via equação, quanto falando como ele encontrou. Mas isso aí é um trabalho que dentro da sala de aula tem que ter uma interação bastante com o professor para que ele encaminhe o aluno a pensar nisso. Que nem todos os professores e alunos conseguem fazer isso de forma natural. O aluno tem que estar raciocinando, está nesse momento de formulação de respostas. Ele está formulando a resposta dele e nessa formulação vão vir várias falas que não necessariamente são verdadeiras. Então, pensando em Brousseau, que é a ideia total dessa sequência, eles estariam formulando as respostas deles e automaticamente validando para ver se aquilo realmente é efetivo. Então, alguns vão estar pensando dessa forma. E outros vão estar indo de dois em dois até chegar a 87. Então isso sim pode acontecer. E aí algum ou outro... Não, não precisa ser desse jeito. A gente pode trocar as informações aqui, ó. É uma outra forma de fazer. Então isso aconteceu lá também. Então é bem interessante que isso... Nessa questão ser bem interessante isso acontecer.

Entrevistador: É... Você falando aí, eu lembrei de quando eu apliquei também aqui pra... Quando eu apliquei aqui, quando chegou nessa caixa de eles... encontrarem a centésima quantos palitos teria na centésima figura pelo menos comigo aqui alguns grupos eles fizeram assim eles fizeram uma filhinha com 10 e multiplicaram depois separadamente por 10 para chegar na 100 só que aí eles esqueceram de que a filhinha com 10 tinha que estar encostada na outra filhinha com 10 eles fizeram assim aqui comigo também.

Professora: Então, a questão do forçar, orientar a observar o padrão é para evitar essas coisas que eles fazem, porque a gente sabe que eles tentam facilitar. Não, eles tentam encontrar uma lógica dentro do desafio que você deu, mas é uma lógica que traz aí alguns conceitos errados. Então, dentro dessa perspectiva, eles conseguem pensar, e acho que esse é o mais legal de fazer esse tipo de exercício, essa atividade, a gente observar que os nossos alunos são muito criativos na hora de pensar em soluções. Eles utilizam o arcabouço de ferramentas que eles têm, que podem ser ferramentas bastante elementares, e eu só sei somar. Então, eu vou fazer tudo somando. E vão chegar na resposta de alguma maneira. O quadro, pedir para que eles escrevam, essa discussão que há entre eles, faz com que essas ferramentas, de alguma maneira, se amplifiquem. Porque um vai estar dando uma outra ferramenta para outro grupo, para outro aluno, que não necessariamente é esse tão trabalhoso, né? E que gera uma resposta equivocada. Então é bastante interessante esse momento da atividade.

Entrevistador: Aí outra coisa, Joyce, quando eu falo também de reescrever, é de tipo assim, você pegou a mesma questão da proposta inicial e reescreveu da sua maneira, né? Aí também é no sentido de perguntar assim, Você achava que como estava escrito inicialmente não estava compreensível o suficiente para o seu aluno ou a forma que você reescreveu facilitou a compreensão por eles ou chamou a atenção mais para uma coisa que a questão não estava chamando a atenção, sabe? Também nesse sentido.

Professora: Sim. Não, o reescrever, deixa eu ver, só olhar primeiro aqui. Existe nessa sequência alguma figura composta por 87? Se existir, indique sua ordem. Sim, reescrever pra que eles entendam melhor. Foi pra entender melhor mesmo. Escrevi aqui, deixa eu só lembrar aqui.

Entrevistador: A 7 era a 3, a original.

Professora: A 7. Isso.

Entrevistador: A sua 7 é a 3.

Professora: Isso. Foi para um melhor entendimento da questão. O que eu achei que não estava tão compreensível para eles pode ser uma coisa besta, né? Mas ali estava escrito uma questão de ordem na original. Deixa eu ver. Aqui. Existe nessa sequência alguma figura composta por 87 palitos? Na sequência. Se existir, indique sua ordem ou etapa correspondente. Eu entendi que dizer isso, eu entendi que sua ordem para eles seria algo complexo, porque a gente está falando de uma sequência. Ah, mas eu sei se sequência é o décimo, é o quinto, mas não é só em relação à sequência. A gente, o tempo todo lá, estava trabalhando com número de triângulos. A gente não estava trabalhando com ordem. Primeiro, segundo, terceiro. Então, eu achei por bem tirar essa questão da ordem e falar da questão da sequência, uma sequência de triângulos. Então, se eu falar triângulo na etapa 15, não, não é na etapa 15, é a figura composta com 15 triângulos. Então, foi nesse sentido que houve a mudança. Eu não sei se faz sentido isso aí.

Entrevistador: Sim, sim, com certeza. Era isso, com certeza. Décima questão né porque você reescreveu na sua proposta didática que o comando da questão 8 que é a questão 4 da original.

Professora: Ah, sim. Isso aí já é buscando conduzir o aluno para uma generalização. Isso aí é, de fato, e é necessário também para esse processo. A gente precisa sair desse contar fisicamente, de forma concreta, para esse pensamento mais geral acontecer. Para isso, você tem que incentivá-los. Sem pensar nisso, sem pensar efetivamente no número. Existe uma forma... E aí, de novo, é aquele pensamento de qual é o cálculo que você poderia fazer. Qual cálculo você poderia fazer, o que você está fazendo desde o início até agora para você conseguir chegar nesses resultados. desse estado em relação ao número de triângulos que tem, em relação ao número total de palitos. Quais são os cálculos que vocês estão fazendo, que não é o somar de dois em dois? O que que tem na relação entre esses dois números para isso acontecer? Então, essa etapa, e é por isso que ela foi reescrita, não sei se eu reescrevi da mesma maneira. Eu não sei se foi da mesma maneira, mas é uma etapa essencial para a questão da generalização. Se ela não existir, a generalização também não vai existir. Qualquer... aí é qual?

Entrevistador: A 8, eu acho que você mudou a fórmula de apresentar para os alunos.

Professora: A 8 e voltando ao original.

Entrevistador: A 4.

Professora: A 4. É, foi só uma forma de escrever diferente mesmo, mas com o objetivo mesmo de pensar nessa questão da multiplicação e da fórmula propriamente dita. Essa questão não é necessariamente para a fórmula, mas assim, a forma de pensar esse cálculo, né? você observar o número de triângulos e conseguir ter essa resposta.

Entrevistador: Ok.

Professora: É o início da generalização, isso tem que acontecer.

Entrevistador: Questão 11 agora, né? A minha questão 11, né? Por que você optou por trazer a última questão da proposta original para o item C da questão 6 da sua proposta?

Professora: Peraí. Ai, meu Deus. Peraí, deixa eu pegar aqui. Fala de novo, por favor.

Entrevistador: Porque você optou por trazer a última questão da proposta original. Você pegou a última questão da proposta original e trouxe para o item C da sua sexta questão.

Professora: Ah, sim. Eu trouxe porque eu achei que ela estava deslocada ali. Eu achei realmente que ela estava deslocada porque todo esse pensamento mais concreto de você saber quanto que está... E a etapa 15, no caso, que ele colocou como sendo a etapa 15, era uma etapa muito próxima do que eles já estavam fazendo. Então, lá você chegar no final de todo o trabalho de observação de padrão, em que ele já vai observar um cálculo, você colocar essa questão, eu achei meio desproporcional. Então, eu botei ela lá onde ele estava ainda trabalhando com a questão de observar esse padrão, de escrever e tentar entender qual é esse padrão. Eu entendo que ali poderia, deixa eu ver... Eu sei que na etapa C tem a questão da gente pensar na soma de todos os... E aí poderia trabalhar na questão de progressões aritméticas, somas de progressões. Mas aí é para suscitar essa questão de como é que eu poderia fazer essa soma de uma forma mais rápida que não é somando um por um. Também é pensando sempre nessa generalização. Eu falei, vou trazer ela para cá para eles pensarem também na generalização e pensar que também pode haver padrões se eu quisesse somar até lá. Ok.

Entrevistador: Questão 12. Você utilizou algum material de referência como embasamento para a reconstrução ou adaptação da sua atividade? Se sim, qual material foi utilizado e por quê?

Professora: Então, a referência maior não foi nenhuma referência física especificamente, foi referência que eu já tenho da experiência. Como eu disse para você na minha formação, o primeiro contato que eu tive com a questão da observação e generalização de padrões foi desde o mestrado. Então, a partir daí, constantemente eu tenho utilizado esse tipo de atividade para quando eu quero conduzir os alunos ao pensamento funcional. Então, se eu for pensar especificamente num material, meu primeiro material de referência foi o caderno do aluno, o caderno do professor da rede pública. Porque lá traz, lá tem isso, essa ideia da generalização de padrões exatamente no... Sétima série, oitavo ano. No oitavo ano aqui em São Paulo, não sei como é aí, mas aqui em São Paulo existe o currículo paulista. Que agora está com um monte de outros materiais ali de apoio, de suporte, que tem, por conta do novo ensino médio, do novo um monte de coisa, que acabam entrando aí na questão do currículo do aluno. Mas existe o currículo paulista. E no currículo paulista, existem muitas ideias da educação matemática ali dentro. E uma das ideias que eles incorporaram foi a questão da sequência didática. Isso que a gente apresentou, sendo uma atividade lá, os exercícios que vão aparecendo nesse caderno são exercícios que pedem isso para o aluno descrever, para o aluno observar, para ele refletir. Muitas dessas atividades começaram a aparecer a partir de 2008, que foi a primeira elaboração,

o início da implementação desse currículo paulista. Foi a partir dali que eu comecei a ter essa experiência. e juntamente com um grupo de pesquisa que também estava trabalhando com isso. E aí, a partir daí, o que eu adaptei foi baseado nessa experiência com o caderno e com o grupo de pesquisa que estava trabalhando com isso. Não foi com o material em específico. Foi mais com essa experiência mesmo de lidar com esse tipo de atividade.

Entrevistador: E é isso . Chegamos ao final das perguntas. E, Joyce, eu sou muito grato, não sei nem como agradecer a você por estarmos aqui hoje, por você estar colaborando com essas respostas, com a minha pesquisa. Muito obrigado mesmo por tirar um pouco do seu tempo, que é muito corrido. Você vive aí numa cidade grande e a gente já conversou isso no início, esse tempo que você tem de deslocamento, enfim. Muito obrigado mesmo.

Professora: Eu que agradeço, agradeço seu convite, porque eu também fiquei bastante feliz, porque quando a gente tava lá no Piprint, é... Piprint, né? Piprint, Piprint. Tinha tanto P, né? Que eu não sabia falar direito. Quando a gente tava lá, eu falei, será que vai rolar alguma coisa? Será que a gente vai conseguir fazer alguma coisa? E assim que abriu a possibilidade para o Ensino Médio, porque a princípio estava só no Fundamental, né? E aí quando a Bárbara falou, ah, participa, você é do Médio, mas a gente pode fazer. Eu falei, nossa, que legal que está sendo feito isso, um trabalho grande. que tá sendo feito e que eu tô fazendo parte. E aí pensar que isso tá gerando no seu trabalho, tá gerando o seu trabalho, e aí a gente tá conseguindo compartilhar esse tipo de coisa no seu trabalho, eu também na sala de aula, eu acho que isso é o que a gente tem que fazer como educador matemático. É isso que a gente tem que fazer. Eu aqui na minha cidade, você aí na sua, e aos pouquinhos a gente vai tentando modificar aí o que tem, com cada um fazendo um pedacinho. Acho que isso é absolutamente importante. E eu agradeço bastante a participação. E se você precisar, em outro momento, você está fazendo o mestrado, não é?

Entrevistador: Isso, isso.

Professora: Você vai para o doutorado. Se você precisar, estamos aí à disposição, tá bom?

Entrevistador: Tá bom. Muito obrigado. Eu estava dizendo aqui em casa, eu vou ter um ano que vem, vai ser meu ano sabático. Eu não vou fazer nada, eu quero... E é isso.

Professora: Eu vou te falar como foi a minha história. Do meu mestrado pro meu doutorado, eu terminei o mestrado em 2010. O meu doutorado eu só comecei em 2017. Concluí agora em 2021. Porque eu falo que tem que ser bastante corajoso pra ligar uma coisa na outra.

Entrevistador: Eu preciso de uma respirada. Eu tô assim numa fase, assim, já terminando a... Vamos pras lamentações agora, né? Terminando as perguntas. E já hoje eu tava conversando com a minha orientadora. Disse, professor, eu não tô conseguindo produzir. Eu não consigo abrir meu texto. Eu fico procrastinando. Daqui a pouco eu vou fazer. Daqui a pouco eu vou fazer. O tempo passa e eu não faço nada. A semana passa. E eu me pergunto, meu Deus, eu não abri nem o computador. Mas é porque Eu não estou conseguindo, minha cabeça não...

Professora: Eu vou te falar que no meu mestrado, eu não sei como é que é a questão das disciplinas. Vocês têm muitas disciplinas aí?

Entrevistador: O programa que eu estou, ele deveria ter menos. Eu acho que ele deveria ter menos, mas acho que tem muitas disciplinas.

Professora: Eu me lembro que no meu mestrado, eles exigiam que a gente fizesse um total de nove disciplinas. Divididas aí nos dois anos de mestrado. Mas as disciplinas eram tão pesadas

que a gente não conseguia escrever. Porque, além de tudo, a gente trabalhava. No meu caso, o momento que eu tinha para o mestrado era o momento que eu estava lá. Então, para a escrita, não. Eu sei que eu consegui escrever o meu trabalho em seis meses. E foi só o tempo que eu tive, porque foi um ano e meio de disciplinas, e aí os outros três meses eu até pedi um mês a mais, né, do tempo, pra conseguir concluir, mas eu tive que escrever tudo em seis meses. E essa escrita em seis meses, ela foi muito dura, porque eu estava nessa condição o tempo todo. Eu não sei nem o que escrever, o que escrever ou como escrever, mas eu preciso escrever. E eu sentava em treta com todo mundo e eu falei, não, E aí a minha, isso aí, tanto no mestrado quanto no doutorado, eu entendi que isso é a minha forma, né, isso é pra tudo. Um artigo que você tenha que escrever, eu tenho que escrever um artigo agora. Eu não sento no meu computador enquanto o artigo não estiver pronto na minha cabeça. Então, foi assim no mestrado e assim no doutorado. No momento que eu sentei, em dois meses eu escrevi tudo. Mas pra esses dois meses acontecer, eu fiquei oito meses procrastinando, elaborando todos os textos na minha cabeça. Uma vez que eu sabia o que eu ia escrever nesse tópico, nesse outro tópico, nesse outro tópico dentro da minha cabeça, a escrita foi de uma beleza, assim, ó. Foram bem tranquilos.

Entrevistador: Aqui no meu programa, eu acho que é basicamente isso. Eu também terminei com um ano e meio as disciplinas, por causa do meu tempo. Teve semestre que eu não tinha, como eu ia dois dias na semana para o programa, só podia ir um dia na semana, então eu tive que fracionar as minhas disciplinas e aqui, eu não sei aí com vocês, mas aqui até o estágio docência é obrigatório.

Professora: Aqui não.

Entrevistador: Aqui é obrigatório, no programa da gente é obrigatório, então até o tempo para o estágio docência eu tinha que, o bom para mim foi porque eu encontrei, aqui perto da minha cidade tem o... a federal daqui, eu consegui o meu estágio à noite.

Professora: Nossa!

Entrevistador: Aí o meu estágio foi à noite. Porque senão eu não ia conseguir conciliar o meu dia ainda pra estagiar.

Professora: Mas esse estágio que você tá falando, estágio docente, no mestrado?

Entrevistador: Isso, no mestrado. Aqui no programa da gente é obrigatório.

Professora: Não tem mesmo. Nossa, isso é novidade pra mim. Eu não sabia que tinha essa questão do estágio ainda aí no mestrado. Interessante isso. Mas são muitas horas que vocês têm que fazer?

Entrevistador: São 30 horas.

Professora: Nossa. A gente fala é 30 horas, mas vai botando duas horas por dia pra você ver como que dá. É muita coisa. Nossa, que loucura, eu não sabia disso não. Interessante. Mas assim, vai, você vai conseguir. E assim, você vai ver que as coisas, pra mim, as coisas começaram a mudar quando eu tinha material pra escrever. Quando eu tinha que falar dos outros, falar das outras pesquisas, falar dos outros, isso pra mim foi bastante enfadonho, foi muito chato. E aí eu procrastinava mesmo, porque eu falei, vou fazer isso aqui, preciso fazer esse resumo, fazer aí a observação do... Enfim, várias coisas anteriores, o que pra mim sempre começou a fazer sentido quando eu comecei a escrever sobre... Você escrever sobre o seu próprio trabalho, eu vou escrever sobre aquilo que eu coletei. Aí a satisfação vem, aí você fala,

beleza, agora eu sei o que eu vou escrever, vou escrever sobre isso e se eu tive aquela ideia e aí vai começando a fluir comigo foi assim que aconteceu, eu acho que você vai ser a mesma coisa, quando você começar a ter uma... não sei se você vai conseguir entrevistar o Sérgio, o sergiano, né, o Sérgio é Sergiano, mas se você não conseguir...

Entrevistador: Minha baby chegou aqui agora, ó!

Professora: Oi!

Entrevistador: Oi!

Professora: Tudo bem? Mas quando você começar a trabalhar no que é a sua pesquisa, no que você fez efetivamente na pesquisa, eu acredito que a escrita vai começar a fluir melhor. Essa foi a minha experiência nos dois momentos, tanto no mestrado quanto no doutorado. Quando eu comecei a falar sobre o meu trabalho, escrever sobre ele, as coisas começaram a fluir melhor. Mestrado da Procrastinação em Educação Matemática. Mestrado, doutorado, porque é o que a gente só faz. Não se preocupe, porque é normal.

Entrevistador: Então é isso, Joyce. Muito obrigado e até uma próxima oportunidade.

Professora: E quando você terminar de escrever, manda o link depois. Só manda o link pra depois eu conseguir ler o seu trabalho.

Entrevistador: Pronto, pronto.

Professora: Tá bom?

Entrevistador: Tá bem, pode deixar. Eu vou dar esse feedback pra você.

Professora: Perfeito. Muito obrigada, viu?

Entrevistador: Até mais. Obrigado. Tchau. Bom dia.

Professora: Bom dia.