UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Os Palitos de fósforo: uma sequência didática sobre Padrões e Regularidades para o estudo da Álgebra no Ensino Médio

Autores

Wendson César do Nascimento
Professor/ SEE-PB
wendsoncsn@gmail.com

Prfa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis
UFPB/ Campus IV - Rio Tinto
cibelle@dcx.ufpb.br

Campina Grande 2024

N244d Nascimento, Wendson César Silva do.
Os Palitos de fósforo: [manuscrito] : uma sequência didática sobre Padrões e Regularidades para o estudo da Álgebra no Ensino Médio / Wendson César Silva do Nascimento. - 2024.
23 f. : il. color.

Digitado.

Produto Educacional apresentado ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática/UEPB

"Orientação : Prof. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis, Campus I".

1. Pensamento Algébrico. 2. Generalização de Padrões. 3. Decisões Didáticas. I. Título

21. ed. CDD 327.7

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

WENDSON CÉSAR SILVA DO NASCIMENTO

OS PALITOS DE FÓSFORO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE PADRÕES E REGULARIDADES PARA O ESTUDO DA ÁLGEBRA NO ENSINO MÉDIO

Produto Educacional apresentado à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial ao título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de C.

Aprovado em: 17/12/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
CIBELLE DE FATIMA CASTRO DE ASSIS
Data: 30/05/2025 05:20:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof.ª Dr.ª Cibelle de Fátima Castro de Assis (Orientadora)
Universidade Federal da Paraíba – UFPB/ UEPB - PPGECEM

Documento assinado digitalmente
MARCUS BESSA DE MENEZES
Data: 11/06/2025 10:06:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Interno)
Universidade Federal de Campina Grande UEPB - PPGECEM

Documento assinado digitalmente
JADILSON RAMOS DE ALMEIDA
Data: 06/06/2025 14:53:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Membro externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Apresentação

O produto educacional *Os Palitos de fósforo: uma sequência didática sobre Padrões e Regularidades para o estudo da Álgebra no Ensino Médio* é fruto da pesquisa de mestrado (profissional) intitulada *As Decisões Didáticas do Professor de Matemática na perspectiva do desenvolvimento do Pensamento Algébrico*, realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGECEM - da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB entre os anos de 2021 e 2024.

O produto educacional compreende um recurso didático voltado para professores que atuam no Ensino Médio, com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes a partir da exploração de padrões e regularidades.

Esse material, além da sequência didática, está acompanhado de comentários reflexivos que apresentam: expectativas de respostas; intervenções a serem realizadas; identificação de possíveis dificuldades dos estudantes e orientações para que o professor atue como mediador nesses momentos.

A sequência didática foi concebida de forma colaborativa entre uma experiente professora que atua no Ensino Médio na rede pública do Estado de São Paulo e o professor autor da pesquisa que também tem experiência nessa etapa de ensino. Ambos os professores participaram do projeto denominado *Pensamento Algébrico: recursos e práticas de ensino no nível do Fundamental*, vinculado ao Programa de Incentivo à Internacionalização (PIPRINT) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Tal projeto foi executado no durante o período de outubro de 2021 a outubro de 2022 onde, na ocasião, discutiram a tarefa "Os palitos de fósforo" adaptando-a para o Ensino Médio.

Acreditamos que o produto educacional servirá como um instrumento de formação continuada para professores. A apresentação comentada da sequência didática fruto das análises reflexivas contribuem para a ampliação do repertório pedagógico dos docentes, incentivando práticas mais fundamentadas e ajustadas às necessidades dos alunos.

Sumário

Sobre pensamento algébrico…

O pensamento algébrico é um tema que vem sendo investigado por diversos pesquisadores da área da Educação Matemática. Lins (1992), ao discutir em sua pesquisa a construção de significado em Álgebra, destaca que um objeto matemático se torna conhecimento quando enunciado por um indivíduo, isto é, o conhecimento não está no objeto, mas no significado dado por esse indivíduo ao objeto. Assim, para esse autor, pensar algebricamente é uma maneira de produzir significado para a Álgebra, uma vez que o aluno está pensando algebricamente quando ele consegue produzir significado para os objetos e símbolos algébricos.

Da mesma forma que Lins (1992), os pesquisadores Blanton e Kaput (2005) consideram que para que o aluno desenvolva o pensamento algébrico, a aprendizagem da Álgebra deve estar voltada para a construção de significado. Esses autores caracterizam o pensamento algébrico como "um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade" (Blanton; Kaput, 2005, p. 413).

De acordo com Radford (2010b), o pensamento algébrico é caracterizado por três elementos que estão interrelacionados: (i) o *senso de indeterminação*, que é o oposto da determinação numérica, envolve números desconhecidos e é designado para os objetos algébricos, como incógnitas, variáveis e parâmetros; (ii) a *analiticidade*, consiste em trabalhar com objetos indeterminados, ou seja, objetos desconhecidos são manipulados de forma analítica; (iii) a *designação simbólica* ou *expressão semiótica* de seus objetos, refere-se à forma específica simbólica de designar objetos.

Desse modo, considerando essas características do pensamento algébrico, Radford (2009, 2010a, 2018) reconhece três formas ou estratos desse modo particular de pensar: *pensamento algébrico factual* (ou *concreto*); *pensamento algébrico contextual*; *pensamento algébrico simbólico* (ou *padrão*).

No *pensamento algébrico factual* a indeterminação encontra-se implícita, uma vez que não alcança o nível de enunciação, pois se expressa em ações concretas, por exemplo, por meio do trabalho sobre números (Radford, 2009).

No *pensamento algébrico contextual* a indeterminação se torna agora parte do discurso explícito, e os alunos extrapolam o trabalho com figuras específicas e passam a lidar com um novo objeto, a figura geral. Os meios semióticos utilizados pelos alunos são substituídos por termos descritivos, sendo estes "o que os linguistas chamam dêiticos espaciais, ou seja, palavras com as quais descrevemos, de forma contextual, objetos no espaço" (Radford, 2009, p. 41).

Por sua vez, o *pensamento algébrico simbólico* apresenta como principal característica a presença de uma linguagem algébrica simbólica, ou seja, os alunos passam a utilizar fórmulas alfanuméricas para expressar o pensamento.

No entanto, como evidenciado por Radford (2009), não são todas as fórmulas que se utilizam do simbolismo alfanumérico que podem ser consideradas algébricas e consequentemente revelarem que o aluno esteja pensando algebricamente. Aquelas fórmulas obtidas por tentativa e erro, por exemplo, não podem ser consideradas como algébricas, uma vez que não são obtidas com base em "uma maneira analítica de pensar sobre quantidades indeterminadas - a principal característica do pensamento algébrico" (Radford, 2009, p. 42).

Sobre padrões, generalizações e sequências …

Conforme destacado por Vale e Barbosa (2019), são várias as discussões promovidas pela comunidade de educadores matemáticos sobre quais abordagens de ensino possuem maior potencial na promoção da aprendizagem de conceitos algébricos. Nesse sentido, Lima e Bianchini (2017) destacam que recentemente existe uma tendência em considerar o desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início da escolarização por meio do trabalho com padrões e regularidades. O NCTM (2000) reitera essa ideia ao afirmar que os padrões constituem a base do pensamento algébrico e o trabalho com padrões possibilita aos estudantes identificarem relações e fazerem generalizações.

Pimentel e Vale (2012) consideram que o processo de apreensão de um padrão decorre sempre de uma interpretação pessoal e, portanto, apresenta um caráter subjetivo. Dependendo do contexto em que determinado arranjo é apresentado, esse mesmo arranjo pode originar interpretações diferentes e, consequentemente, padrões ou regularidades diferentes.

Os padrões estão presentes de formas variadas em muitas situações do nosso dia a dia: na natureza, nas obras arquitetônicas e artísticas, nos ritmos musicais, nos movimentos dos corpos, dentre outras. Explorar essa diversidade em sala de aula é indispensável para o desenvolvimento de competências matemáticas nos alunos.

Mesmo diante de sua grande variedade de formas, Vale (2012) argumenta que a ideia principal num padrão envolve repetição e mudança. Nesse sentido, os padrões podem ser classificados como sendo de repetição ou de crescimento. Para esta autora, "um padrão será de repetição quando há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente" (Vale, 2012, p. 186). Essa menor cadeia de elementos que se repete é chamada por Van de Walle (2009) de núcleo do padrão repetitivo.

Por sua vez, os padrões de crescimento envolvem uma progressão passo a passo. Ou seja, como destacado por Vale (2012, p. 186), "um padrão será de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior". Esse processo de como o padrão é modificado de um passo ao passo seguinte é chamado de relação de recursividade (Van de Walle, 2009). Como exposto por Vale e Pimentel (2010, p. 35), a investigação dessa mudança pode despertar vários modos de ver que levam a distintas representações numéricas e/ou algébricas. Esse modo de ver, influencia no processo de generalização, relacionando cada termo com o anterior ou com a ordem que ocupa na sequência.

Como aponta Van de Walle (2009), os padrões de crescimento além de conduzirem os alunos a procurarem por uma generalização ou uma relação algébrica que lhes permitirão encontrar o elemento do padrão que ocupará qualquer lugar da sequência, também podem ser usados para explorar o conceito de função, uma vez que ao buscarmos construir uma regra que determine o número de elementos em um passo a partir do número de passos, estamos estabelecendo uma relação funcional.

Os padrões de crescimento além de poderem ser representados a partir de materiais concretos ou figuras e regras simbólicas, podem ainda ser representados por meio de quadros (tabelas) e gráficos. Como argumenta Van de Walle (2009), devido ao fato de os padrões de crescimento possuírem um componente numérico, o número de objetos a cada passo, uma tabela pode ser feita para qualquer padrão crescente. "Uma linha da tabela ou quadro é sempre o número de passos e o outro é para registro de quantos objetos estão naquele passo" (Van de Walle, 2009, p. 299). Nesse mesmo sentido, este autor chama a atenção para o fato de "que um gráfico pode ser feito a partir de uma tabela sem uma fórmula geral. O eixo horizontal é sempre usado para o número de passos (ordem), a variável independente" (Van de Walle, 2009, p. 301). Assim, Van de Walle (2009) ressalta a importância de os alunos perceberem conexões entre os padrões, a tabela de valores e os gráficos.

Pimentel e Vale (2012) argumentam que a generalização é um elemento essencial na atividade matemática, sendo construída através de representações e argumentações, e explicitada de um modo gradualmente mais formal de acordo com a idade. Nesse sentido, as tarefas com padrões conferem aos estudantes a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico a partir da generalização de diferentes ideias matemáticas pela observação de um conjunto de evidências.

Radford (2013) aponta que existem vários elementos envolvidos no processo de generalização. Inicialmente tem-se a identificação, a partir de um número finito de termos, de uma característica comum local. Ou seja, nesta etapa ocorre a realização de uma escolha entre determinações sensíveis potenciais. Por conseguinte, ocorre a generalização dessa característica comum para os outros termos da sequência, sendo esse processo da generalização chamado de abdução, isto é, algo que é apenas provável. É somente a partir do caminho tomado no uso dessa abdução que ocorre a diferenciação entre as generalizações aritmética e algébrica.

Para Radford (2006, 2010, 2013), quando os alunos apenas percebem uma semelhança em alguns termos específicos de uma sequência, ou seja, identificam uma regularidade nos termos dessa sequência, e generalizam essa semelhança a todos os seus termos, de modo a simplesmente continuá-la, sem que ocorra a dedução de uma expressão direta que lhes permitam encontrar qualquer termo dessa sequência, eles estão trabalhando no campo aritmético e, portanto, realizando uma *generalização aritmética*. Sendo assim, como destacado por Radford (2013, p. 7), "quando a abdução é simplesmente usada para passar de um termo para o outro [...], chegamos a uma generalização aritmética".

Por sua vez, como apresentado por Radford (2006, 2010) a generalização algébrica de um padrão consiste na capacidade de perceber aspectos comuns em alguns elementos de uma sequência S (identificação de uma regularidade local); tomar consciência de que estes aspectos comuns se aplicam a todos os termos de S (generalização a todos os termos da sequência); e ser capaz de usá-la para fornecer uma expressão direta de qualquer termo de S (construção de uma regra que forneça uma expressão de qualquer termo da sequência).

A BNCC veio sendo obrigatoriamente implantada nas escolas desde 2019, e no que se refere ao ensino da Álgebra esse documento enfatiza como finalidade dessa unidade temática, o desenvolvimento de um tipo de especial de pensamento, o pensamento algébrico (Brasil, 2017, p. 270). Segundo o documento citado, a habilidade de reconhecer e generalizar padrões e regularidades é um aspecto fundamental desse tipo especial de pensamento e que o trabalho sobre padrões e regularidades deve percorrer toda a formação do estudante, dos anos Iniciais ao Ensino Médio. O ensino dessa área de conhecimento era até então proposto apenas a partir dos anos finais do Ensino Fundamental.

No que diz respeito ao Ensino Médio, a proposta da BNCC para o ensino de álgebra, para além do domínio técnico e procedimental, visa a compreensão do papel da álgebra na formação crítica e social dos estudantes, buscando conectar os conceitos algébricos com situações práticas do cotidiano e com outras áreas do conhecimento. A BNCC, nessa etapa de ensino, enfatiza a importância de os alunos reconhecerem padrões e regularidades em diversos contextos matemáticos, incentivando-os a desenvolverem uma visão crítica sobre como essas regularidades se manifestam em diferentes situações, ampliando a compreensão e a aplicabilidade da álgebra.

Apresentando a sequência didática "Os palitos de fósforo"

1. Imagine que sejam dados palitos de fósforo para seu grupo. É possível construir um triângulo em que cada palito representa um destes lados? Registre como seria o desenho desta figura.

2. Como se daria a construção de dois triângulos com alguns destes palitos? Quantos palitos seriam utilizados? Seria possível a construção de dois triângulos com uma quantidade menor de palitos? Neste caso, quantos palitos seriam necessários? Desenhe uma representação desta figura.

3. Com a ideia utilizada na pergunta anterior, como você construiria três triângulos com menos de nove palitos? Quantos palitos seriam necessários para esta construção? Faça a representação desta figura.

4. Observe as três figuras das etapas 1, 2 e 3 já construídas. O que você observa de comum na construção das figuras das etapas 2 e 3? Como seria a construção da figura da etapa seguinte (etapa 4)?

5. Seguindo este mesmo padrão, e sem a construção da figura, como fariam para construir as figuras das etapas 5 e 6? Quantos palitos são necessários em cada uma destas etapas?

6. A partir das figuras dos triângulos com palitos de fósforo construídas, complete a tabela a seguir:

ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS
1		
2		
3		
4		
5		
6		

a) Observe a sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos. Como você descreveria a imagem da figura na 10ª etapa? Quantos palitos de fósforo foram necessários para construir essa figura?

b) Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência.

c) Quantos palitos são necessários para construir todos os triângulos até a etapa 15?

7. Imagine que você possui 87 palitos. Existe, nesta sequência, alguma figura composta por esta quantidade de palitos? Descreva como chegou no resultado positivo ou negativo. Se existir, indique a etapa correspondente.

8. Existe alguma forma para descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos? Descreva este procedimento com suas palavras.

9. Como você explicaria a um colega, que não acredita na sua regra anterior, que ela funciona?

10. Escreva uma expressão algébrica (fórmula) que traduz a sua regra descrita anteriormente.

11. Quais são as variáveis envolvidas na questão?

12. Agora que vocês já encontraram a função, que tal construir um gráfico que relacione o número de palitos com o número de triângulos?

Essa sequência didática foi elaborada para uma turma da 1ª série do Ensino Médio. Tal proposta de ensino parte de uma sequência recursiva com padrão crescente em contexto figurativo formado por triângulos cujos lados são representados por palitos de fósforo. A partir da segunda figura, cada novo triângulo formado utiliza um palito do lado do triângulo anterior como um de seus lados.

De maneira geral, essa sequência didática tem como objetivo levar os alunos a identificarem um padrão na sequência figurativa; traduzi-lo em uma expressão algébrica (lei de formação) que permite encontrar o número de palitos para formar figuras com um número qualquer de triângulos e vice-versa; representar a relação entre as variáveis envolvidas por meio de um gráfico.

A sequência didática está organizada de forma gradativa, partindo de atividades concretas que exploram números específicos (*pensamento factual*), avançando para tarefas que abordam indeterminações explícitas (*pensamento contextual*) e culminando na formalização algébrica por meio de fórmulas e gráficos (*pensamento simbólico*).
As questões de 1 a 7 referem-se à mobilização do *pensamento algébrico factual*, pois envolve questionamentos ligados a números particulares, a indeterminação é trabalhada implicitamente. Por exemplo, quando a professora solicita no item *b* da questão 6 "Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência".

As questões 8 e 9 estão relacionadas ao *pensamento algébrico contextual*, visto que abordam uma figura indeterminada, ou seja, a indeterminação passa agora a ser trabalhada explicitamente. Por exemplo, quando a professora pergunta na questão 8 "Existe alguma forma para descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos? Descreva este procedimento com suas palavras".

Por fim, as questões 10, ao solicitar que o aluno utilize o simbolismo alfanumérico para expressar seu pensamento, bem como as questões 11 e 12 que consistem, específica e respectivamente, na determinação das variáveis envolvidas e na construção de um gráfico que relaciona tais variáveis, referem-se ao *pensamento algébrico simbólico*.

Destacamos que embora as questões estejam alinhadas às características das diferentes formas de pensamento algébrico, é possível que o aluno não consiga pensar algebricamente ao resolvê-las ou não mobilize esse pensamento em todas as suas formas.

A sequência didática “Os palitos de fósforo”: versão comentada

A seguir, trazemos a sequência didática acompanhada de comentários reflexivos que apresentam: expectativas de respostas; intervenções a serem realizadas; identificação de possíveis dificuldades dos estudantes e orientações para que o professor atue como mediador no momento de aplicação.

1. Imagine que sejam dados palitos de fósforo para seu grupo. É possível construir um triângulo em que cada palito represente um destes lados? Registre como seria o desenho desta figura.
Essa questão propõe a construção de um triângulo utilizando palitos de fósforo, onde cada palito representa um lado. **Expectativas de Respostas:** ● Reconhecimento de que é possível formar um triângulo com três palitos, desde que sejam posicionados para que as extremidades de todos os palitos se conectem. ● Desenho do triângulo construído, demonstrando a compreensão do conceito de figura geométrica fechada. **Possíveis Dificuldades dos Estudantes:** ● Alguns estudantes podem não compreender que os três palitos (lados) devem se conectar nas extremidades para formar uma figura fechada. **Orientações para o Professor como Mediador:** ● Fornecer palitos e permitir que os alunos realizem uma exploração concreta da formação da figura (caso considere necessário). ● Pedir que os alunos expliquem por que o arranjo escolhido representa um triângulo, incentivando a comunicação matemática. ● Caso necessário, realizar perguntas para auxiliar na exploração dos conceitos geométricos envolvidos e estimular a comunicação, como: - “Como sabemos que isso é um triângulo?” - “Os três lados estão conectados?” - “O que aconteceria se não conectássemos os três vértices?”

2. Como se daria a construção de dois triângulos com alguns destes palitos? Quantos palitos seriam utilizados? Seria possível a construção de dois triângulos com uma quantidade menor de palitos? Neste caso, quantos palitos seriam necessários? Desenhe uma representação destas figuras.

Nesta etapa, os alunos exploram a construção de dois triângulos utilizando palitos.

Expectativas de Respostas:

- Inicialmente, perceber que dois triângulos independentes (não compartilhando lados) requerem 6 palitos (3 para cada triângulo).
- Em seguida, reconhecer que é possível reduzir o número de palitos reutilizando lados (compartilhando um lado entre os triângulos), totalizando 5 palitos.
- Representação gráfica (desenho) das duas formas:

- Dois triângulos separados, utilizando 6 palitos.
- Dois triângulos compartilhando um lado, utilizando 5 palitos.

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Alguns alunos podem ter dificuldade em imaginar como dois triângulos podem compartilhar um lado e, consequentemente, em identificar a economia de palitos ao compartilhar esse lado.

Orientações para o Professor como Mediador:

- Fornecer palitos para que os alunos experimentem construir dois triângulos e testem maneiras de economizar palitos.
- Estimular o pensamento com perguntas como:

- “Se reutilizarmos um lado, quantos palitos economizamos?”
- “Como você posicionaria os palitos para criar dois triângulos conectados?”

3. Com a ideia utilizada na pergunta anterior, como você construiria três triângulos com menos de nove palitos? Quantos palitos seriam necessários para esta construção? Faça a representação desta figura.

Nesta etapa, os alunos devem construir três triângulos utilizando menos de nove palitos, aplicando o conceito de reutilização de lados introduzido anteriormente.

Expectativas de Respostas:

- Reconhecer que, sem compartilhar lados, seriam necessários 9 palitos (3 para cada triângulo independente), o que viola a restrição.

- Descobrir que, ao compartilhar lados, é possível formar 3 triângulos utilizando apenas 7 palitos.
- Desenhar a configuração solicitada, mostrando claramente a reutilização de lados.

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Alguns alunos podem ter dificuldade em aplicar a lógica da questão anterior.

Orientações para o Professor como Mediador:

- Instruir os alunos a dispor os triângulos em uma estrutura linear, onde dois lados são compartilhados entre triângulos adjacentes.
- Guiar os alunos com questionamentos como:

- “Qual é a quantidade mínima de palitos que podemos usar para formar 3 triângulos em uma estrutura linear?”

4. Observe as três figuras das etapas 1, 2 e 3 já construídas. O que você observa de comum na construção das figuras das etapas 2 e 3? Como seria a construção da figura da etapa seguinte (etapa 4)?

A questão pede que os alunos analisem o padrão observado nas construções anteriores (etapas 1, 2 e 3) e façam previsões para a próxima figura (etapa 4).

Expectativas de Respostas:

- Reconhecer que nas etapas 2 e 3, os triângulos compartilham lados, formando estruturas linearmente interligadas.
- Identificar que a próxima figura (etapa 4), a partir da utilização de mais dois palitos, terá mais um triângulo adicionado à estrutura (reutilizando lados).
- Desenho de uma configuração com 4 triângulos interligados, mostrando claramente o compartilhamento de lados e a economia de palitos.

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Alguns alunos podem ter dificuldade em perceber como o compartilhamento de lados segue um padrão lógico.

Orientações para o Professor como Mediador:

- Revisar as figuras das etapas 1, 2 e 3, destacando como os triângulos compartilham lados e como isso afeta o número total de palitos.

- Fazer perguntas como:

- “Quantos lados novos adicionamos em cada etapa?”
- “Como podemos reaproveitar lados existentes para formar o próximo triângulo?”

- Mostrar como o padrão se desenvolve nas etapas anteriores, ilustrando como a próxima figura se encaixa na sequência.

- Pedir aos alunos que expliquem o padrão observado e justifiquem como ele os ajuda a prever a etapa seguinte.

5. Seguindo este mesmo padrão, e sem a construção da figura, como fariam para construir as figuras das etapas 5 e 6? Quantos palitos são necessários em cada uma destas etapas?

Nesta questão, os alunos devem continuar a sequência de construção de triângulos interligados, observando o padrão estabelecido anteriormente.

Expectativas de Respostas:

- Determinar o número de palitos adicionados em cada etapa:

- A estrutura da etapa 5 terá 5 triângulos e reutilizará lados, necessitando de **11 palitos**.
- A estrutura da etapa 6 terá 6 triângulos e reutilizará lados, necessitando de **13 palitos**.

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Dificuldade em perceber a relação entre o número de triângulos e o número de palitos utilizados.

- Confusão ao calcular o número de palitos necessários à medida que a sequência avança.

Orientações para o Professor como Mediador:

- Revisar as etapas anteriores (1 a 4) com os alunos, destacando o número de triângulos e o número correspondente de palitos em cada etapa.

- Identificar que a cada etapa é adicionado um triângulo à estrutura anterior reutilizando lados.

- Explicar que o número de palitos cresce de acordo com o padrão: para cada triângulo adicional, 2 palitos extras são usados (aproveitando um lado de triângulos anteriores).

- Fazer perguntas como:

- “Quantos palitos novos são adicionados em cada etapa?”
- “Como podemos prever o número total de palitos sem construir a figura?”
- Propor que os alunos discutam entre si e comparem respostas.

6. A partir das figuras dos triângulos com palitos de fósforo construídas, complete a tabela a seguir:

ETAPA	NÚMERO DE TRIÂNGULOS	NÚMERO DE PALITOS
1		
2		
3		
4		
5		
6		

a) **Observe a sequência de valores das colunas com o número de triângulos e o número de palitos. Como você descreveria a imagem da figura na 10ª etapa? Quantos palitos de fósforo foram necessários para construir essa figura?**

b) **Explique como poderá obter a figura referente à 100ª etapa dessa sequência.**

c) **Quantos palitos são necessários para construir todos os triângulos até a etapa 15?**

Nesta questão, os alunos completam a tabela com os valores observados nas construções anteriores, identificam o padrão e fazem previsões para etapas futuras.

Expectativas de Respostas:

- Preenchimento da Tabela:

- Etapa 1: 1 triângulo, 3 palitos.
- Etapa 2: 2 triângulos, 5 palitos.
- Etapa 3: 3 triângulos, 7 palitos.
- Etapa 4: 4 triângulos, 9 palitos.
- Etapa 5: 5 triângulos, 11 palitos.
- Etapa 6: 6 triângulos, 13 palitos.

- O número de palitos aumenta em 2 a cada etapa (identificação do padrão)

- Com relação ao item *a*:

- Com base no padrão, para 10 triângulos serão necessários **21 palitos**.
- Será uma sequência de 10 triângulos interligados, reutilizando lados consecutivamente.

- Com relação ao item *b*:

- Utilizando o padrão identificado, para 100 triângulos, serão necessários **201 palitos**. A figura será composta por 100 triângulos interligados em sequência.

- Com relação ao item *c*:

- Para calcular o número total de palitos até a etapa 15, somam-se os palitos de todas as etapas 3+5+7+⋯+31 = **255 palitos**.

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Dificuldade em perceber que a sequência dos números de palitos segue um padrão de crescimento linear.

Orientações para o Professor como Mediador:

- Ajudar os alunos a preencherem as etapas iniciais (1 a 6) destacando o padrão de crescimento linear.

- Mostrar a estrutura de algumas etapas construídas para reforçar o padrão de crescimento.

- Fazer perguntas como:

- "Como os números de palitos mudam de uma etapa para outra?"
- "Qual é o padrão de crescimento?"
- "Como podemos prever o total de palitos para muitas etapas sem construir todas as figuras?"

7. Imagine que você possui 87 palitos. Existe, nesta sequência, alguma figura composta por esta quantidade de palitos? Descreva como chegou no resultado positivo ou negativo. Se existir, indique a etapa correspondente.

A questão desafia os alunos a identificar se, na sequência estabelecida, existe uma figura que pode ser construída com exatamente 87 palitos.

Expectativas de Respostas:

- Sim, existe uma figura nesta sequência composta por 87 palitos. Ela corresponde à etapa **43**. Uma possibilidade para se chegar nesse resultado seria: subtrair 1 de 87 e dividir o resultado por 2.

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Não compreender o padrão existente

Orientações para o Professor como Mediador:

- Fazer perguntas como:
- "Como podemos verificar se o número encontrado está correto?"

8. Existe alguma forma para descobrir quantos palitos são necessários para formar figuras com um número qualquer de triângulos? Descreva este procedimento com suas palavras.

Os alunos devem identificar e descrever o procedimento que permita calcular o número de palitos necessários para formar figuras com qualquer quantidade de triângulos na sequência.

Expectativas de Respostas:

- Como apontam Pimentel e Vale (2012), o reconhecimento de um padrão numa sequência pode dar origem a mais de uma lei de formação, dependendo do modo como o padrão é apreendido e interpretado. Desse modo, podemos elencar aqui três hipóteses dentre as várias possíveis.

- um palito a que se vão acrescentando grupos de dois palitos, sendo este padrão traduzido pela expressão $1 + 2n$;
- um triângulo que vai sendo acrescentado de sucessivos grupos de dois palitos, sendo o padrão representado pela forma $3 + (n - 1)2$;
- uma sequência com um número crescente de triângulos a que são retirados os "lados" duplicados, sendo o padrão traduzido pela forma $3n - (n - 1)$.

- Vale salientar que as expressões apresentadas, embora equivalentes, não são idênticas, pois manifestam modos diferentes de ver o padrão.
- Na sequência, por via de regra, a percepção de que apenas na primeira figura eram necessários 3 palitos e de que os outros triângulos que se juntassem usariam o lado do triângulo anterior é muito importante para o reconhecimento do que varia (o número de triângulos em cada figura) e o que não variava (o 1º palito ou o 1º triângulo em cada figura).

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Não perceber que apenas na primeira figura são necessários 3 palitos e que os outros triângulos que se juntam usam o lado do triângulo anterior.
- Não reconhecimento do que varia (o número de triângulos em cada figura) e o que não variava (o 1º palito ou o 1º triângulo em cada figura)
- Dificuldade em generalizar o padrão e descrever a regra em palavras.

Orientações para o Professor como Mediador:

- Revisar o Padrão auxiliando os alunos a identificarem como o número de palitos cresce com o número de triângulos.

- Guiar os alunos na generalização do padrão, começando pela observação do crescimento linear na sequência:

- “Qual é o número inicial de palitos quando há apenas 1 triângulo?”
- “Quantos palitos são adicionados a cada novo triângulo?”

- Incentivar os alunos a compartilharem suas descrições e comparar abordagens.

9. Como você explicaria a um colega, que não acredita na sua regra anterior, que ela funciona?

Os alunos devem explicar de forma convincente e como a regra anterior funciona para calcular o número de palitos necessários em qualquer etapa da sequência.

Expectativas de Respostas:

- Vai depender do modo como o padrão é apreendido e interpretado (ver comentário das expectativas de resposta da questão 8).

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Dificuldades elencadas na questão 8.
- Dificuldade em justificar a lógica por trás do crescimento linear da sequência.
- Problemas para traduzir o raciocínio matemático em explicações convincentes.

Orientações para o Professor como Mediador:

- Mostrar como usar valores conhecidos da sequência para validar a regra (ou a fórmula, caso algum aluno já tenha conseguido chegar nela).
- Fazer perguntas que ajudem os alunos a articularem sua explicação:

- “Por que adicionamos exatamente 2 palitos a cada triângulo novo?”
- “Como a reutilização de lados afeta o total de palitos?”

- Propor que os alunos expliquem a fórmula em grupos e discutam diferentes maneiras de validar sua aplicabilidade.

10. Escreva uma expressão algébrica (fórmula) que traduz a sua regra descrita anteriormente.
Nesta questão, os alunos devem traduzir a regra identificada anteriormente em uma fórmula algébrica que relaciona o número de triângulos (n) ao número de palitos (P(n)). **Expectativas de Respostas:** ● Vai depender do modo como o padrão é apreendido e interpretado (ver comentário das expectativas de resposta da questão 8). **Possíveis Dificuldades dos Estudantes:** ● Traduzir o padrão concreto observado em uma fórmula algébrica. ● Explicar por que a fórmula funciona ou como foi construída. **Orientações para o Professor como Mediador:** - Pedir aos alunos que testem a fórmula com diferentes valores de n para verificar sua consistência. - Incentivar os alunos a compararem fórmulas criadas e discutir diferenças, garantindo a compreensão do padrão.

11. Quais são as variáveis envolvidas na questão?
Os alunos devem identificar as variáveis presentes na fórmula $P(n) = 2n + 1$ e compreender seu significado no contexto da questão. **Expectativas de Respostas:** As respostas esperadas incluem: ● Identificação das Variáveis: - n: Representa o número de triângulos. - P(n): Representa o número de palitos necessários para formar a figura com n triângulos. ● Descrição das Variáveis: - n é a variável independente, pois determina o número de triângulos de cada figura. - P(n) é a variável dependente, pois seu valor depende do número de triângulos (n). ● Relação entre as Variáveis: - A fórmula descreve como P(n) cresce linearmente em função de n.

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Alguns alunos podem confundir os conceitos de variável dependente e independente.
- Dificuldade em associar n ao número de triângulos e P(n) ao número de palitos no contexto do problema.
- Erros ao descrever a relação entre as variáveis de forma matemática.

Orientações para o Professor como Mediador:

- Reforçar o significado de n e P(n) no contexto do problema, relacionando-os diretamente à sequência dos triângulos e palitos.
- Fazer perguntas como:

- "O que acontece com P(n) se dobrarmos o valor de n?"
- "Qual variável podemos escolher livremente? E qual depende da outra?"

12. Agora que vocês já encontraram a função, que tal construir um gráfico que relacione o número de palitos com o número de triângulos?

Os alunos devem construir um gráfico que represente a relação entre o número de triângulos (n) e o número de palitos (P(n)), com base na fórmula $P(n) = 2n + 1$.

Expectativas de Respostas:

As respostas esperadas incluem:

- Eixos do Gráfico:

- Eixo x: Representa o número de triângulos (n), variando de 1 em diante.
- Eixo y: Representa o número de palitos (P(n)).

- Pontos Representados:

- Cada ponto no gráfico terá coordenadas (n, P(n)) calculadas a partir da fórmula: (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), etc.

- Forma do Gráfico:

- O gráfico será uma linha reta crescente, pois $P(n) = 2n + 1$é uma função linear, com coeficiente angular 2 e intercepto 1.

- Análise do Gráfico:

- Os alunos devem identificar que a relação entre n e P(n) é linear, com um crescimento constante de 2 palitos para cada triângulo adicional.

Possíveis Dificuldades dos Estudantes:

- Dificuldade em posicionar os pontos corretamente no gráfico.
- Reconhecer que a função linear gera uma reta no gráfico.

Orientações para o Professor como Mediador:

Orientar os alunos na escolha das escalas para os eixos x e y.

Mostrar como marcar os pontos correspondentes a cada par (n, P(n)).

- Fazer perguntas como:

- "O que o gráfico nos diz sobre o número de palitos em relação ao número de triângulos?"
- "Qual é a taxa de crescimento do número de palitos?"

- Destacar a inclinação da reta (2) e o ponto inicial (1) como características da função.

Referência

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2017.

LIMA, J. R. C.; BIANCHINI, B. L. A álgebra e o pensamento algébrico na proposta da Base Nacional Comum Curricular para os anos iniciais do ensino fundamental. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 197-208, 2017.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

PIMENTEL, T.; VALE, I. Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. **Quadrante**, v. 21, n. 2, p. 29-50, 2012.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. **PME**, v. 1, p. 1-20, 2006. Disponível em: http://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf. Acesso em: 19 jul. 2023.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research In Mathematics Education**, [S.L.], v. 12, n. 1, p.1-19, mar. 2010a.

RADFORD, L. En torno a tres problemas de generalización. In: RICO, L.; CAÑADAS, M. C.; GUTIÉRREZ, J.; MOLINA, M.; SEGOVIA, I. (ed.). **Investigación en Didáctica de las Matemáticas**. Granada, Espanha: Editorial Comares, 2013. p. 3-12.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática)**, Granada, v. 4, n. 2, p. 37-62, jan. 2010b. Disponível em: http://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf. Acesso em: 19 jul. 2023.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: CERME 6., 2009, Lyon, França. **Anais [...]**. Lyon: INRP, 2009. p. 33-53. Disponível em: http://www.luisradford.ca/pub/25_CERME6plenary1radford.pdf. Acesso em: 27 jul. 2023.

RADFORD, L. The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In: KIERAN, C. (ed.). **Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds:** the global evolution of na emerging field oof research and practice. New York: Springer, p. 3 25, 2018. Disponível em: http://www.luisradford.ca/pub/2018%20-%20Radford%20-

%20The%20emergence%20of%20symbolic%20algebraic%20thinking%20-%20web.pdf. Acesso em: 19 jun. 2023.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. **Interacções**, Santarém, v. 8, n. 20, p. 181-207, 2012.

VALE, I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 398-418, 2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 110, p. 33-38, 2010.

VAN DE WALLW, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6 ed. Tradução: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.