



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DOUTORADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

**EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
PESQUISAS DO GEPEP E SUAS POSSIBILIDADES PARA A PRÁTICA
PEDAGÓGICA**

CAMPINA GRANDE –PB

2025

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

**EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
PESQUISAS DO GEPEP E SUAS POSSIBILIDADES PARA A PRÁTICA
PEDAGÓGICA**

Tese apresentada à Coordenação do Curso de
Doutorado em Ensino de Ciências e Educação
Matemática da Universidade Estadual da
Paraíba, como requisito parcial à obtenção do
título de Doutor em Ensino de Ciências e
Educação Matemática

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e
Formação do Professor no Ensino de Ciências e
Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB

2025

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S587e Silveira, Adriano Alves da.
Exploração, Proposição e Resolução de Problemas
[manuscrito] : pesquisas do GEPEP e suas possibilidades para
a prática pedagógica / Adriano Alves da Silveira. - 2025.
464 f. : il. color.

Digitado.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de
Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento
de Matemática - CCT".

1. Ensino-Aprendizagem de Matemática. 2. Exploração-
Proposição-Resolução de Problemas. 3. Narrativas
Matemáticas. 4. Formação de Professores. I. Título

21. ed. CDD 371.36

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PESQUISAS DO
GEPEP E SUAS POSSIBILIDADES PARA A PRÁTICA PEDAGÓGICA

Tese apresentada à Coordenação do Curso de
Doutorado em Ensino de Ciências e Educação
Matemática da Universidade Estadual da
Paraíba, como requisito parcial à obtenção do
título de Doutor em Ensino de Ciências e
Educação Matemática

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e
Formação do Professor no Ensino de Ciências e
Educação Matemática.

Aprovado em: 26/02/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Silvanio de Andrade** (***.076.315-**), em **15/04/2025 19:32:31** com chave **851731dc1a4911f084b306adb0a3afce**.
- **Luiz Carlos Leal Junior** (***.885.559-**), em **16/04/2025 08:49:08** com chave **ce60cc261ab811f0814a1a1c3150b54b**.
- **Nilton Cezar Ferreira** (***.514.811-**), em **23/04/2025 10:55:28** com chave **9cdf429e204a11f0906806adb0a3afce**.
- **CLAUDIO REJANE DA SILVA DANTAS** (***.535.823-**), em **23/04/2025 09:13:19** com chave **57b3f4e8203c11f0b5a01a1c3150b54b**.
- **VINICIO DE MACEDO SANTOS** (***.965.428-**), em **05/05/2025 10:30:24** com chave **19c793f629b511f09d222618257239a1**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 06/05/2025

Código de Autenticação: d36a99



Dedico este trabalho aos meus pais, Ozildo Alves da Silveira (*in memorian*) e Maria da Penha da Silva Duarte, ao meu primo Erivaldo da Silva Andrade (*in memorian*) e ao meu sobrinho Ivan Júnior da Silva Duarte (*in memorian*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela realização deste sonho, sobretudo, por ter me proporcionado fé, foco, força e perseverança diante dos obstáculos encontrados durante a caminhada.

Ao meu orientador, Silvanio de Andrade, pelos ensinamentos, paciência e dedicação; por ter acreditado na minha proposta de pesquisa e, sobretudo, pela capacidade de saber lidar com o Adriano Alves da Silveira – pesquisador, e o Adriano Alves da Silveira – ser humano, sendo, para mim, uma fonte de inspiração enquanto professor, pesquisador e ser humano.

Aos meus pais, Ozildo Alves da Silveira (*in memorian*) e Maria da Penha da Silva Duarte, por me incentivarem e por serem a razão de todas as coisas boas que acontecem em minha vida.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECM/UEPB), em especial, ao Prof. Dr. Silvanio de Andrade, ao Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, ao Prof. Dr. John Andrew Fossa e ao Prof. Dr. Paulo Cesar Geglio.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos, Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira, Prof. Dr. Cláudio Rejane da Silva Dantas e o Prof. Dr. Luiz Carlos Leal Junior, por aceitarem o meu convite para a compor a banca e pelas contribuições e observações, que enriqueceram a presente pesquisa.

Aos membros do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), pelas discussões e reflexões que contribuíram, de forma significativa, para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Em especial, aos amigos: Jair Dias de Abreu, Fabíola da Cruz Martins e Maurício Alves Nascimento.

À minha sobrinha, Dayana da Silva Duarte, por ter contribuído com esta conquista.

Aos meus amigos que acompanharam os desafios dessa empreitada: Carlos Alex Alves, José Guilherme Silva Fernandes, Alexandre Rodrigues Lins de Albuquerque, Sandro Onofre Cavalcante, Bruno Francisco do Nascimento e Tony Regy Ferreira da Silva.

À Escola Municipal de Ensino Fundamental Ulisses Maurício de Pontes, localizada em Sertãozinho-PB e à Escola Estadual Professor Joaquim Torres, situada na cidade de Serra de São Bento-RN, as quais tive que me afastar para se dedicar exclusivamente ao curso de doutorado.

À direção da escola em que a pesquisa de campo foi realizada, em especial ao diretor Luiz Henriques Francisco e à secretária de Educação do Município de Alagoinha-PB, Jacielly

de Almeida Farias, por ter incentivado a participação dos professores que ensinam Matemática, e ter cedido o espaço para o desenvolvimento do curso.

Aos professores que participaram de forma efetiva do curso de Formação de Professores que ensinam Matemática.

À Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ/PB), pela bolsa de doutorado.

À UEPB, em especial, ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, por ter oportunizado o meu crescimento acadêmico.

Por fim, a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, analisa-se quais as possibilidades das pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na prática pedagógica. A pesquisa se situa numa abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. Inicialmente, foi realizada uma pesquisa documental por meio da qual foram analisadas dissertações dos participantes do GEPEP que desenvolveram um trabalho com a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas. O mapeamento dessas pesquisas ajudou a perceber movimentos didáticos que nos auxiliaram no desenvolvimento de um curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática através de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas de Matemáticas. Os resultados evidenciaram que, para trabalhar a Resolução de Problemas (RP) via Exploração de Problemas (EP), é necessário incorporar alguns movimentos didáticos, dentre eles: há uma busca do refinamento da resolução do problema, trabalhando o problema em diferentes níveis de dificuldades e aprofundamentos; gera-se novos problemas, a partir da resolução do problema; e, com isso, a discussão do problema não se finda na (re)solução, uma vez que o professor pode retomá-la e aprofundá-la em diferentes momentos e níveis; ademais, o problema pode ser o ponto de partida para a geração de novos problemas; por sua vez, há um descontentamento em só encontrar a resolução e, com isso, incentiva-se a busca de múltiplos processos de resolução, que ajudam a aprofundar/refinar a discussão, podendo chegar a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses; e à exploração do problema, podendo, inclusive, gerar um debate acerca de questões sócio-político-culturais. Já na Proposição de Problemas (PP) via Exploração de Problemas (EP), elenca-se os seguintes movimentos didáticos: o processo de problematização antecede a proposição do problema, isto é, é necessário se familiarizar com a situação-geradora de problemas para iniciar a proposição do problema; além disso, conceitos e conteúdos matemáticos são desenvolvidos a partir dos problemas propostos pelos professores e alunos; ademais, é necessário ir sempre além da proposição do problema, isto é, não se limitar apenas a propor e resolver o problema; assim, os problemas propostos podem ser fonte para a geração de novos problemas, por meio do refinamento e da reescrita do problema inicial; dessa forma, a proposição de problemas pode ocorrer antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas; os problemas propostos privilegiam não só a discussão de processos e conceitos matemáticos, mas refletem acerca de questões de cunho sócio-político-cultural. Com este estudo, concluímos que,

numa prática pedagógica via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o trabalho de exploração-problematização-proposição de problemas possibilitou que o problema ou a situação-geradora de problemas fosse discutida em diferentes níveis de aprofundamento, indo além e além, com a realização do trabalho de: explorar, problematizar, propor, reescrever/reformular e resolver problemas. Outrossim, na experiência realizada com os professores que ensinam Matemática, notou-se que o processo de exploração de problemas impulsionou uma percepção melhor dos aspectos sócio-político-culturais em torno dos problemas propostos.

Palavras-chave: ensino-aprendizagem de matemática; exploração-proposição-resolução de problemas; narrativas matemáticas; formação de professores.

ABSTRACT

This paper analyzes the possibilities of research developed by the Study and Research Group on Education and Postmodernity (GEPEP) in the Problem Exploration, Posing and Solving in pedagogical practice. The research follows a qualitative approach, aiming to seek meanings, interpret, and understand the information gathered. Initially, a documentary research was carried out, in which dissertations from GEPEP participants who worked on Problem Exploration, Posing and Solving were analyzed. The mapping of these studies helped to identify didactic movements that contributed to the development of a Continuing Education course for Mathematics teachers, focusing on activities of problem exploration, posing and solving in the form of Mathematical Narratives. The results showed that, in order to work with Problem Solving (PS) via Problem Exploration (PE), it is necessary to incorporate specific didactic movements, such as: the pursuit of refining problem resolution by addressing the problem at different levels of difficulty and depth; the generation of new problems based on the solution of the initial problem; and the idea that the discussion of the problem does not end with its (re)solution, as the teacher may revisit and deepen it at different moments and levels; additionally, the problem can serve as a starting point for generating new problems; furthermore, there is a dissatisfaction with merely finding a resolution, and, with this, the search for multiple resolution processes is encouraged, which help to deepen/refine the discussion, potentially resulting in new content, new problems, further work, new reflections and new syntheses; as well as the exploration of the problem, which may even spark debates on socio-political-cultural issues. In Problem Posing (PP) via Problem Exploration (PE), the following didactic movements are identified: the process of problematization precedes the posing of the problem, that is, it is necessary to become familiar with the problems generating-situation before posing the problem; additionally, mathematical concepts and content are developed based on the problems proposed by both teachers and students; moreover, it is essential to go beyond simply posing the problem, meaning that one should not limit the activity to posing and solving the problem; thus, the proposed problems can serve as a source for generating new problems through refinement and rewriting of the initial problem; in this way, problem posing can occur before, during and after the problem exploration and solving process; the proposed problems not only emphasize the discussion of mathematical processes and concepts but also reflect on socio-political-cultural issues. This study concludes that, in pedagogical practice via Problem Exploration-Posing-Solving, the work of problem exploration-problematization-posing enabled the problem or problems generating-situation to be discussed at various levels

of depth, going further and further with the work of: exploring, problematizing, posing, rewriting/reformulating and solving problems. Furthermore, in the experience with Mathematics teachers, it was observed that the process of problem exploration led to a better understanding of the socio-political-cultural aspects surrounding the proposed problems.

Keywords: mathematics teaching-learning; problem exploration-posing-solving; mathematical narratives; teacher education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Mesa circular com seis pessoas.....	179
Figura 2 – Mosaico formado pela repetição de hexágonos regulares.	182
Figura 3 – Trabalho de proposição de problemas realizado por P3	196
Figura 4 – Problema proposto por P11.....	196
Figura 5 – Problema proposto por P14.....	200
Figura 6 – Problema proposto por P11.....	200
Figura 7 – Problema proposto por P5.....	200
Figura 8 – Problema proposto por P2.....	200
Figura 9 – Problema proposto por P5.....	201
Figura 10 – Problema proposto por P13.....	203
Figura 11 – Problema proposto por P12.....	204
Figura 12 – Problema proposto por P1.....	204
Figura 13 – Problema proposto por P5.....	205
Figura 14 – Problema proposto por P6.....	205
Figura 15 – Problema proposto por P8 e resolução.....	205
Figura 16 – Problema proposto por P5.....	206
Figura 17 – Alguns modos de organizar a mesa	209
Figura 18 – Reescrita de P11 ao problema proposto por P2	211
Figura 19 – Reescrita de P2 ao problema proposto por P11	212
Figura 20 – Reescrita de P3 ao problema proposto por P1	213
Figura 21 – Reescrita de P1 ao problema proposto por P3	214
Figura 22 – Reescrita de P14 ao problema proposto por P12	215
Figura 23 – Reescrita de P12 ao problema proposto por P14	216
Figura 24 – Reescrita de P9 ao problema proposto por P5	217
Figura 25 – Problemas propostos por P9 no primeiro episódio de sala de aula.....	217
Figura 26 – Reescrita de P5 ao problema proposto por P9	218
Figura 27 – Reescrita de P6 ao problema proposto por P13	218
Figura 28 – Reescrita de P13 ao problema proposto por P6	219
Figura 29 – Reescrita de P5 ao problema proposto por P12	221
Figura 30 – Reescrita de P4 ao problema proposto por P12	222
Figura 31 – Reescrita de P13 ao problema proposto por P12	223
Figura 32 – Reescrita de P12 ao seu próprio problema.....	224
Figura 33 – Reescrita de P11 ao problema proposto por P12	225
Figura 34 – Reescrita de P6 ao problema proposto por P12	226
Figura 35 – Reescrita de P14 ao problema proposto por P12	227
Figura 36 – Reescrita de P10 ao problema proposto por P12	228
Figura 37 – Representação gráfica do Sistema Linear relativo ao problema proposto por P10	229
Figura 38 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P5.....	231
Figura 39 – Acréscimo de uma nova “fala”, formulação e resolução do problema por P4	234
Figura 40 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P14.....	234
Figura 41 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P2.....	235
Figura 42 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P12.....	235
Figura 43 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P1.....	236
Figura 44 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P10.....	237
Figura 45 – Problema proposto por P2.....	244
Figura 46 – Problema proposto por P11.....	245

Figura 47 – Problema proposto por P5.....	245
Figura 48 – Problema proposto por P7.....	245
Figura 49 – Problema proposto por P10.....	245
Figura 50 – Problema proposto por P6.....	245
Figura 51 – Problema proposto por P12.....	247
Figura 52 – Problema proposto por P2.....	248
Figura 53 – Problema proposto por P5.....	248
Figura 54 – Problema proposto por P3.....	248
Figura 55 – Problema proposto por P14.....	248
Figura 56 – Problema proposto por P14.....	249
Figura 57 – Problema proposto por P7.....	249
Figura 58 – Problema proposto por P5.....	250
Figura 59 – Representação gráfica da função de várias sentenças por meio da calculadora gráfica Desmos	255
Figura 60 – Possibilidades de configurações para os favos	260
Figura 61 – Reescrita de P11 ao problema proposto por P5	262
Figura 62 – Reescrita de P13 ao problema proposto por P5	262
Figura 63 – Reescrita de P2 ao problema proposto por P5	263
Figura 64 – Reescrita de P1 ao problema proposto por P5	264
Figura 65 – Reescrita de P10 ao problema proposto por P5	264
Figura 66 – Reescrita de P7 ao problema proposto por P5	266
Figura 67 – Reescrita de P4 ao problema proposto por P5	267
Figura 68 – Reescrita de P6 ao problema proposto por P5	267
Figura 69 – Reescrita de P14 ao problema proposto por P5	268
Figura 70 – Reescrita de P12 ao problema proposto por P5	269
Figura 71 – Segunda reescrita de P12 ao problema proposto por P5.....	270
Figura 72 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P14.....	274
Figura 73 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P5.....	276
Figura 74 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P3.....	277
Figura 75 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P1.....	277
Figura 76 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P9.....	278
Figura 77 – Acréscimo de uma nova “fala” por P10.....	279
Figura 78 – Problema proposto por P10 com o acréscimo de uma nova “fala” e resolução do item a)	279
Figura 79 – Problema proposto por P10 com o acréscimo de uma nova “fala” e resolução do item b).....	280
Figura 80 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P13.....	281
Figura 81 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P12.....	281
Figura 82 – Problema proposto por P10.....	286
Figura 83 – Problema proposto por P9.....	287
Figura 84 – Problema proposto por P5.....	290
Figura 85 – Problema proposto por P2.....	290
Figura 86 – Problema proposto por P4.....	292
Figura 87 – Problema proposto por P5.....	292
Figura 88 – Problema proposto por P6.....	292
Figura 89 – Problema proposto por P7.....	293
Figura 90 – Problema proposto por P8.....	293
Figura 91 – Problema proposto por P14.....	293
Figura 92 – Problema proposto por P12.....	294
Figura 93 – Problema proposto por P13.....	295

Figura 94 – Problema proposto por P5.....	296
Figura 95 – Problema proposto por P7.....	296
Figura 96 – Problema proposto por P9.....	296
Figura 97 – Problema proposto por P1.....	297
Figura 98 – Problema proposto por P5.....	297
Figura 99 – Utilizando a calculadora gráfica Desmos para explorar a representação gráfica do problema proposto por P4.....	302
Figura 100 – Aprofundando a exploração da representação gráfica do problema proposto por P4 na calculadora gráfica Desmos.....	303
Figura 101 – Fazendo uso da calculadora gráfica Desmos para explorar a representação gráfica do problema proposto por P1.....	305
Figura 102 – Aprofundando a exploração da representação gráfica do problema proposto por P1 na calculadora Desmos.....	306
Figura 103 – Refinando a exploração da representação gráfica do problema proposto por P1 na calculadora gráfica Desmos.....	307
Figura 104 – Reescrita de P4 ao problema proposto por P1.....	308
Figura 105 – Reescrita de P1 ao problema proposto por P4.....	309
Figura 106 – Reescrita de P7 ao problema proposto por P5.....	309
Figura 107 – Reescrita de P5 ao problema proposto por P7.....	310
Figura 108 – Reescrita de P14 ao problema proposto por P6.....	311
Figura 109 – Reescrita de P6 ao problema proposto por P14.....	312
Figura 110 – Reescrita de P9 ao problema proposto por P10.....	312
Figura 111 – Reescrita de P10 ao problema proposto por P9 e resolução (primeira parte).....	313
Figura 112 – Reescrita de P10 ao problema proposto por P9 e resolução (segunda parte).....	314
Figura 113 – Fazendo uso da calculadora gráfica Desmos para explorar a representação gráfica do problema proposto por P10.....	315
Figura 114 – Reescrita de P8 ao problema proposto por P12.....	316
Figura 115 – Reescrita de P12 ao problema proposto por P8.....	317
Figura 116 – Utilizando a calculadora gráfica Desmos para explorar a representação gráfica do problema proposto por P4.....	320
Figura 117 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P14.....	323
Figura 118 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P9.....	323
Figura 119 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P13.....	324
Figura 120 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P6.....	325
Figura 121 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P8.....	325
Figura 122 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P1.....	326
Figura 123 – Acréscimo de uma nova “fala”, formulação e resolução do problema por P10 (primeira parte).....	327
Figura 124 – Continuação do acréscimo de uma nova “fala”, formulação e resolução do problema por P10 (segunda parte).....	327
Figura 125 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P7.....	329
Figura 126 – Acréscimo de uma nova “fala”, formulação e resolução do problema por P4.....	330
Figura 127 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P12.....	331
Figura 128 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P2.....	332
Figura 129 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P5.....	333
Figura 130 – Problema proposto por P12.....	338
Figura 131 – Problemas propostos por P10 e resoluções.....	340
Figura 132 – Problema proposto por P2.....	341

Figura 133 – Problema proposto por P1.....	341
Figura 134 – Problemas propostos por P5.....	342
Figura 135 – Problema proposto por P7.....	343
Figura 136 – Problema proposto por P5.....	344
Figura 137 – Problema proposto por P14.....	344
Figura 138 – Problema proposto por P4.....	345
Figura 139 – Problema proposto por P9.....	345
Figura 140 – Problema proposto por P8 e resolução do problema	346
Figura 141 – Problema proposto por P6.....	347
Figura 142 – Problema proposto por P3.....	348
Figura 143 – Narrativa Matemática elaborada por P13.....	348
Figura 144 – Continuação da Narrativa Matemática elaborada por P13.....	349
Figura 145 – Resolução apresentada por P10 ao item a).....	353
Figura 146 – Resolução apresentada por P10 ao item b)	353
Figura 147 – Utilizando a calculadora gráfica Desmos para explorar a função com várias sentenças.....	356
Figura 148 – Aprofundando a exploração da função com várias sentenças por meio da calculadora gráfica Desmos	357
Figura 149 – Reescrita de P9 ao problema proposto por P1	358
Figura 150 – Reescrita de P1 ao problema proposto por P9	358
Figura 151 – Reescrita de P14 ao problema proposto por P12	359
Figura 152 – Reescrita de P12 ao problema proposto por P14	360
Figura 153 – Reescrita de P5 ao problema proposto por P10	364
Figura 154 – Reescrita de P10 ao problema proposto por P5 e resolução dos problemas ...	365
Figura 155 – Reescrita de P2 ao problema proposto por P7	367
Figura 156 – Reescrita de P1 ao problema proposto por P7	368
Figura 157 – Reescrita de P6 ao problema proposto por P7	369
Figura 158 – Reescrita de P10 ao problema proposto por P7 e resolução dos problemas ...	370
Figura 159 – Reescrita de P9 ao problema proposto por P7	371
Figura 160 – Reescrita de P5 ao problema proposto por P7	371
Figura 161 – Reescrita de P14 ao problema proposto por P7	373
Figura 162 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P4.....	378
Figura 163 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P2.....	379
Figura 164 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P9.....	380
Figura 165 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P8.....	381
Figura 166 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P12.....	382
Figura 167 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P14.....	383
Figura 168 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P1.....	383
Figura 169 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P13.....	384
Figura 170 – Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P5.....	385
Figura 171 – Problema proposto por P5 e resolução do problema	393
Figura 172 – Problemas propostos por P6.....	394
Figura 173 – Problemas propostos por P3.....	394
Figura 174 – Problema proposto por P13.....	394
Figura 175 – Problema proposto por P12.....	395
Figura 176 – Problema proposto por P14.....	396
Figura 177 – Problemas propostos por P2.....	397
Figura 178 – Problemas propostos por P4.....	398
Figura 179 – Problema propostos por P8	399
Figura 180 – Problema proposto por P7	400

Figura 181 – Problema proposto por P9.....	402
Figura 182 – Problema proposto por P1.....	403
Figura 183 – Problema proposto por P10.....	403
Figura 184 – Esquema de uma prática de Resolução de Problemas (RP) via Exploração de Problemas (EP).....	417
Figura 185 – Esquema de uma prática de Proposição de Problemas (PP) via Exploração de Problemas (EP).....	420

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Resumo dos estudos	42
Quadro 2 – Alguns problemas propostos.	73
Quadro 3 – Perfil dos sujeitos da pesquisa.....	102
Quadro 4 – Conteúdos e conceitos matemáticos trabalhados com as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.....	106
Quadro 5 – Questões de cunho sócio-político-cultural trabalhadas com as Narrativas Matemáticas.	107
Quadro 6 – Resumo das pesquisas	121
Quadro 7 – Nível de ensino e conteúdos trabalhados	125
Quadro 8 – Nota fiscal 1.	159
Quadro 9 – Nota fiscal 2	160
Quadro 10 – Nota fiscal 3	160
Quadro 11 – Nota fiscal 4	161
Quadro 12 – Valores atribuídos às cartas em um jogo de Sueca	193
Quadro 13 – Organização das possibilidades para aposta de dois jogos de futebol	201
Quadro 14 – Modelo válido para n jogos.....	202
Quadro 15 – Listagem das possíveis duplas	211
Quadro 16 – Representação tabular referente aos valores do quilograma de batata.....	301
Quadro 17 – Representação tabular referente ao troco de moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00 ...	320

SUMÁRIO

1	PALAVRAS INICIAIS	20
2	DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS.....	30
2.1	Reflexões sobre os estudos.....	42
3	EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA.....	51
3.1	A Resolução de Problemas no cenário de pesquisa em Educação Matemática.....	51
3.2	Diferentes concepções para trabalhar a Resolução de Problemas em sala de aula.....	56
3.3	O que é um problema matemático na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas?.....	60
3.4	Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação, Decodificação de Problemas (EPRCDP).....	62
3.5	Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC).....	70
3.6	A Proposição de Problemas nas pesquisas.....	75
3.7	Definição de Proposição de Problemas.....	80
3.8	O Trabalho em grupo na Proposição de Problemas.....	82
3.9	A Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática.....	83
3.10	Abordagens de Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática.....	89
3.10.1	<i>Reflexões sobre as abordagens de Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática.....</i>	96
4	CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS.....	100
4.1	Metodologia de pesquisa.....	100
4.2	Descrição das etapas e sujeitos da pesquisa.....	101
4.3	Metodologia do Produto Educacional – atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.....	103
4.4	Narrativas no ensino-aprendizagem de Matemática.....	109

5	MAPEAMENTO DAS PESQUISAS DESENVOLVIDAS PELO GEPEP EM EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	111
5.1	Descrição das pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP e categorias de análise.....	112
5.2	Elucidando movimentos didáticos no trabalho com Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.....	154
5.2.1	<i>Notas de aulas – uma experiência de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na pós-graduação.....</i>	<i>154</i>
5.2.2	<i>Orquestrando uma sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.....</i>	<i>163</i>
5.2.3	<i>A Resolução de Problemas (RP) e a Proposição de Problemas (PP) pensadas a partir da Exploração de Problemas (EP).....</i>	<i>169</i>
6	CONSTRUÇÃO INICIAL DO NOSSO PRODUTO EDUCACIONAL: ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO FORMATO DE NARRATIVAS MATEMÁTICAS.....	174
6.1	Produto Educacional: motivações, objetivo, abordagens e o público-alvo.....	174
6.2	Movimentos didáticos para a sala de aula de matemática.....	176
6.3	Atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.....	178
6.3.1	<i>Jogo de Sueca.....</i>	<i>178</i>
6.3.2	<i>Um “enxame de problemas”.....</i>	<i>180</i>
6.3.3	<i>Mercado de problemas.....</i>	<i>183</i>
6.3.4	<i>A crise hídrica – um problema mundial.....</i>	<i>184</i>
6.3.5	<i>Qual é o preço justo?.....</i>	<i>186</i>
7	NARRATIVAS MATEMÁTICAS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR VIA EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS..	189
7.1	Primeiro episódio de sala de aula (26/06/2023): uma introdução a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas via Narrativa Matemática “Jogo de Sueca”	189
7.2	Segundo episódio de sala de aula (27/06/2023): refinando/aprofundando a Narrativa Matemática “Jogo de Sueca”.....	208

7.3	Terceiro episódio de sala de aula (30/06/2023): explorando e problematizando a Narrativa Matemática “Jogo de Sueca”.....	220
7.4	Quarto episódio de sala de aula (03/07/2023): explorando, propondo e resolvendo problemas a partir da Narrativa Matemática Um “enxame de problemas”.....	240
7.5	Quinto episódio de sala de aula (04/07/2023): refinando/aprofundando a Narrativa Matemática Um “enxame de problemas”.....	259
7.6	Sexto episódio de sala de aula (07/07/2023): explorando e problematizando a Narrativa Matemática Um “enxame de problemas”.....	272
7.7	Sétimo episódio de sala de aula (15/07/2023): explorando, propondo e resolvendo problemas a partir da Narrativa Matemática “Mercado de problemas”.....	284
7.8	Oitavo episódio de sala de aula (22/07/2023): refinando/aprofundando a Narrativa Matemática “Mercado de problemas”.....	300
7.9	Nono episódio de sala de aula (29/07/2023): explorando e problematizando a Narrativa Matemática “Mercado de problemas”.....	319
7.10	Décimo episódio de sala de aula (05/08/2023): explorando, propondo e resolvendo problemas a partir da Narrativa Matemática “A crise hídrica – um problema mundial”.....	336
7.11	Décimo primeiro episódio de sala de aula (12/08/2023): refinando/aprofundando a Narrativa Matemática “A crise hídrica – um problema mundial”.....	352
7.12	Décimo segundo episódio de sala de aula (19/08/2023): explorando e problematizando a Narrativa Matemática “A crise hídrica – um problema mundial”.....	375
7.13	Décimo terceiro episódio de sala de aula (26/08/2023): explorando, propondo e resolvendo problemas a partir da Narrativa Matemática “Qual o preço justo?”.....	387
7.14	Reflexões acerca de uma prática de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação do professor via Narrativas Matemáticas.....	408
7.14.1	<i>A Proposição de Problemas (PP) e a Resolução de Problemas (RP) operacionalizadas a partir da abordagem de Exploração de Problemas (EP).....</i>	408

7.14.1.1	<i>Resolução de Problemas (RP) via Exploração de Problemas (EP).....</i>	416
7.14.1.2	<i>Proposição de Problemas (PP) via Exploração de Problemas (EP).....</i>	420
7.14.2	<i>A construção e compreensão de conceitos matemáticos via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.....</i>	423
7.14.3	<i>A dimensão sócio-político-cultural no ensino-aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.....</i>	426
7.14.4	<i>O impacto da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na Formação Continuada do professor que ensina Matemática.....</i>	433
7.14.5	<i>Atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas: implicações para a sala de aula de matemática.....</i>	436
7.14.5.1	<i>Critérios para estratificação do nosso Produto Educacional: atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.....</i>	444
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	447
	REFERÊNCIAS.....	456

1 PALAVRAS INICIAIS

O **Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP)**, sob a liderança do professor e educador Silvanio de Andrade tem desenvolvido estudos em Resolução de Problemas, se destacando por ser um dos grupos mais atuantes na produção e divulgação de pesquisas acerca dessa temática no Brasil. Inclusive, o grupo tem desenvolvido trabalhos que têm tido reconhecimento em âmbito internacional.

Observa-se que há uma produção densa de dissertações, teses e artigos e, diante disso, há uma necessidade de olhar o movimento de pesquisa desse grupo e analisar as possibilidades de uma abordagem inovadora de Resolução de Problema, intitulada **“Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP)”**, para a sala de aula de matemática e para a formação do professor que ensina Matemática. Diante do exposto, realizamos o **mapeamento das pesquisas do GEPEP** e uma **Formação Continuada com professores que ensinam Matemática** através de **atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas**. Desse caminhar, são elucidadas algumas reflexões que possibilitam pensar acerca de uma **prática pedagógica via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**.

A Resolução de Problemas sempre foi uma preocupação nos estudos e experiências do professor Silvanio de Andrade antes, durante e depois de cursar o mestrado. Sobre isso, destacamos que a sua primeira apresentação em um evento de Educação Matemática foi no Encontro Baiano de Educação Matemática (EBEM), no ano de 1991. Na ocasião, ele apresentou o trabalho intitulado *“Didática de Resolução de Problemas de Matemática no ensino de 1º e 2º graus e no magistério (2º grau)”*. Na época, o autor já chamava atenção para o fato de que o problema é que deve exigir a teoria para o desenvolvimento do conteúdo matemático, e não o contrário.

No entanto, foi a sua pesquisa de mestrado que lhe possibilitou tecer múltiplos olhares para a literatura de Resolução de Problemas daquela época, ajudando a trazer contribuições importantes para o campo. Assim, após mais de duas décadas da escrita final da sua dissertação, as discussões propostas por ele naquele período estão em evidência nas atuais pesquisas e práticas de Resolução de Problemas, como, por exemplo, a necessidade de dar mais atenção à **Proposição de Problemas**, devido à sua importância para o processo de resolução e exploração de problemas.

A sua pesquisa de mestrado intitulada *“Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da*

sala de aula” foi realizada na Universidade Estadual Paulista, campus Rio Claro (UNESP-RC), sob a orientação da Profa. Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic, em que foi concebida a proposta, originalmente, denominada **“Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas (RECDP)”**, tendo como foco principal a **Exploração de Problemas**. Contudo, nos últimos anos, em cursos, conferências e palestras ministradas pelo pesquisador Silvanio de Andrade, bem como nos trabalhos de mestrado e doutorado que ele tem orientado, a **Proposição de Problemas** tem recebido uma maior atenção.

Nesse contexto, no âmbito desta proposta, tem-se dado forte atenção ao trabalho com a **Proposição de Problemas**, o que o levou a usar a expressão **“Exploração, Resolução e Proposição de Problemas” (ERP)**, ou ainda, **“Exploração de Problemas”**, o que compreende tanto a resolução quanto a proposição (Andrade, 2017). Atualmente, os membros do GEPEP têm utilizado a denominação **“Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP)”**, na qual o hífen expressa que há conexões entre a **Exploração de Problemas (EP)**, a **Proposição de Problemas (PP)** e a **Resolução de Problemas (RP)**.

Observa-se, então, que as preocupações, discussões e reflexões apresentadas por ele naquela época, assim como as atuais, são fruto dos múltiplos olhares, munidos de sensibilidade para o cotidiano, e da **multicontextualidade** da sala de aula de matemática. Consequentemente, a sua pesquisa de doutorado – em parte realizada no Programa de Educação Matemática da *University of Georgia*, Estados Unidos (em virtude do estágio de doutorado sanduíche), sob a supervisão do notável educador e pesquisador Prof. Dr. Jeremy Kilpatrick (1935-2022), um dos grandes expoentes do campo da Educação Matemática, investigou a relação entre a prática de pesquisa e a prática de sala de aula em Educação Matemática. Andrade (2008) justifica que os dados que surgiram da sua pesquisa de mestrado, num primeiro momento, desencadearam o tema da sua pesquisa de doutorado. Isso porque ele percebeu “[...] a existência de um grande desencontro entre a prática da pesquisa e a prática da sala de aula” (*Ibid*, 2008, p. 216).

Embora sua tese não tenha sido sobre Resolução de Problemas, percebe-se que tem impulsionado os seus trabalhos de pesquisa e de orientação na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), uma vez que são investigações que têm uma forte aderência à sala de aula de matemática. Nesse contexto, ressaltamos que a sua pesquisa de mestrado é marcada por uma intensa preocupação com a de sala de aula matemática (inclusive, ele destaca que a construção de sua proposta pedagógica – Exploração de Problemas foi ancorada num intenso e amplo trabalho de sala de aula) e se consolida com a pesquisa de doutorado, de tal forma que a

preocupação de apreender movimentos e facetas da sala de aula de matemática tem permeado toda sua prática de pesquisa. Sobre isso, Andrade (2008) destaca que,

Em nossa atuação como professores e pesquisadores, tendo em vista nossas preocupações constantes e muitas das vezes excessivas com o processo de mudança, transformação e reinvenção da sala de aula de Matemática e o insucesso escolar dos alunos nessa disciplina, entre outras reflexões, temos, então sido acompanhados pela preocupação de conhecer e investigar, de modo mais profundo, as relações que se estabelecem entre a prática de pesquisa em Educação Matemática e prática de sala de aula (Andrade, 2008, p. 215).

Nesse caminhar, enfatizamos que o nome do grupo denominado de GEPEP é em decorrência de sua tese de doutorado. Entretanto, percebe-se que há uma concentração de pesquisas produzidas pelos membros do GEPEP envolvendo a temática de **Exploração, Proposição e Resolução de Problemas**.

Vale ressaltar, aqui, que fazemos parte do projeto em andamento aprovado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), intitulado “*Exploração, Proposição e Resolução de Problemas em Educação Matemática na formação do professor, do formador de professor e do pesquisador*”. Como resultado do projeto, no ano de 2024, publicamos o artigo intitulado “*Abordagens de Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática*”, na Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC, com a autoria do professor Silvanio de Andrade e do professor Jinfa Cai.

Nos últimos anos, Jinfa Cai tem contribuído, de forma significativa, para o progresso das pesquisas no campo de Resolução de Problemas. Em especial, suas últimas publicações tem levantado a bandeira da abordagem de Proposição de Problemas como uma forma promissora de ensinar e aprender Matemática. Com isso, os membros do GEPEP têm se debruçado e refletido acerca de diferentes publicações do pesquisador Jinfa Cai, sendo estes estudos de autoria individual ou em colaboração com outros pesquisadores (por exemplo, Cai, 2010; Cai *et al.*, 2015; Lester, Cai, 2016; Cai, Hwang, 2020; Liljedahl, Cai, 2021; Zhang, Cai, 2021; Cai, 2022, Cai *et al.*, 2022; Cai, Hwang, Melville, 2023).

O GEPEP foi fundado em 2008 pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade, época em que ele foi credenciado no **Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECM/UEPB)** e iniciou, em 2009, o trabalho de orientação em nível de mestrado. Desde então, os pesquisadores do GEPEP se reúnem, semanalmente e semestralmente, em encontros presenciais, *on-line* ou de forma híbrida, para discutirem suas pesquisas. O grupo é composto por alunos regulares e egressos do PPGECM/UEPB, em nível de mestrado e doutorado. O GEPEP é considerado um ambiente propício, para que os participantes discutam seus projetos de pesquisa em andamento, leituras

realizadas, bem como desenvolvam atividades com foco nas suas pesquisas, a saber: oficinas, experimentação de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas, dentre outras, buscando, assim, aprofundar ideias e identificar limitações e potencialidades em suas atividades antes delas serem levadas a campo.

Os pesquisadores, portanto, desenvolvem pesquisas e práticas de ensino que alcançam a sala de aula de matemática, no contexto da Educação Matemática, as quais vem abrangendo, principalmente, discussões geradas em torno da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e suas implicações para o cotidiano de sala de aula.

Essas pesquisas têm proporcionado destaque ao grupo em âmbito nacional e internacional, em que, sob a ótica da proposta de **“Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas”**, os participantes do grupo discutem como se configura e reconfigura uma aula de Matemática por meio dessa proposta. Desse modo, podem identificar suas potencialidades a partir de um olhar profundo em relação a um episódio de sala de aula, o que emerge de um olhar multicontextual para a sala de aula de matemática.

É importante destacar que fazemos parte do GEPEP desde 2014, época em que cursávamos o mestrado do PPGECEM/UEPB. No ano de 2015, cursamos uma disciplina intitulada “Tópicos em ensino de Matemática”, ministrada pelo professor Silvanio de Andrade. Nela, vivenciamos a proposta de **“Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas”**, que nos ajudou a desenvolver uma pesquisa no cotidiano de sala de aula enfocando o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória por meio desta proposta.

Assim, os membros do GEPEP desenvolveram/ampliaram diversas discussões no campo da Educação Matemática, possibilitando resultados satisfatórios em relação à Matemática ensinada no cotidiano de sala de aula. Nesse viés, o pesquisador Andrade (2017) destaca que tem orientado diversas pesquisas em mestrado com a temática de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas (como também há pesquisas de doutorado finalizadas, a exemplo da nossa) no PPGECEM/UEPB.

Nesse contexto, um foco dos estudos do GEPEP é desenvolver pesquisas que alcancem principalmente a sala de aula via **Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP)**. Em vista disso, os participantes do GEPEP têm desenvolvido estudos em Resolução de Problemas na concepção de Andrade (1998, 2017), tendo como orientação teórico/prática não apenas a busca da resolução e solução do problema,

mas a transposição dessa prática com a realização de um trabalho de exploração e proposição de problemas em perspectivas múltiplas.

Entretanto, as pesquisas do GEPEP não tratam apenas de discussões voltadas para a metodologia de Resolução de Problemas, uma vez que o grupo tem investigado diferentes temáticas no campo da Educação Matemática. Inclusive, no primeiro trabalho de mestrado orientado por ele, pesquisou-se a **Formação Inicial de Professores de Matemática**, em que Cavalcante (2011) procurou elucidar como acontecia a mobilização de saberes docentes necessários à prática profissional do professor de Matemática nos processos de formação inicial das disciplinas preconizadas como pedagógicas nas licenciaturas.

Ademais, os estudos do GEPEP têm refletido sobre temáticas que emergem como destaque nas atuais pesquisas em Educação Matemática, tratadas numa perspectiva da Educação Matemática Crítica e Pós-crítica. Por exemplo, é sabido que o desafio de incorporar as **Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC)** nas aulas de Matemática tem se intensificado nos últimos anos. Para essa discussão, enfatizamos o estudo de Abreu (2018), o qual buscou identificar os limites e as potencialidades dos aplicativos educacionais móveis ou *smartphones* voltados ao ensino-aprendizagem da Matemática em sala de aula.

O GEPEP tem como preocupação estudar as questões do Ensino de Matemática numa **perspectiva Crítica, e Pós-crítica** e, por este motivo, os estudos desenvolvidos em **Exploração, Proposição e Resolução de Problemas** contemplam este olhar para a sala de aula de matemática e para o cotidiano escolar. Observa-se que, embora o professor Silvanio de Andrade tenha defendido um olhar numa perspectiva pós-crítica, os trabalhos desenvolvidos nas suas orientações possuem variadas perspectivas, a depender do referencial teórico adotado por cada orientando.

Em suma, acreditamos que essa discussão é importante, pois, esclarece aos leitores que o GEPEP não se limita apenas às investigações com ênfase na Resolução de Problemas, destacando-se temas de forte preocupação do grupo, como Educação Inclusiva, Tecnologias Digitais, Educação Financeira, dentre outros.

Diante do que foi exposto, enfatizamos que as pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP abrangem três grandes eixos, a saber: (i) estudos vinculados à temática de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Matemática; (ii) investigações que adentram as discussões que envolvem a Educação Matemática Crítica e Pós-Crítica, com este enfoque, o professor Silvanio de Andrade, tem usado o termo **Exploração Multicontextual Crítica de Problemas (EMC)** ou **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC)**, compreendendo que o ensino de

Matemática não deve adentrar apenas as questões internas da própria Matemática (visão internalista/cognitiva), mas deve provocar o engajamento dos estudantes no tratamento de questões em nível sócio-político-cultural (visão externalista); e (iii) Sala de Aula de Matemática e o Cotidiano Escolar, em que se percebe que há uma imersão do professor-pesquisador no cotidiano de sala de aula – sendo esta uma característica marcante das pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP.

Em contrapartida, é importante destacar que o nosso interesse é olhar/ver/enxergar o que as pesquisas do GEPEP na temática de **Exploração, Proposição e Resolução de Problemas** nos dizem sobre as suas potencialidades na sala de aula. Assim, os estudos selecionados têm em comum o fato de tecer reflexões sobre episódios de sala de aula com foco nessa **abordagem metodológica de Resolução de Problemas**.

Sob esse enfoque elencamos como problemática de nosso estudo o seguinte questionamento: *Quais as possibilidades das pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na prática pedagógica?*

Nosso objetivo é analisar quais as possibilidades das pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na prática pedagógica.

Em contrapartida, a pesquisa de Sousa (2021) analisou os trabalhos de mestrado produzidos pelos membros do GEPEP com foco na temática de Proposição de Problemas no período de 2013 a 2019, buscando identificar pontos de encontro e contribuições da Proposição de Problemas no ensino-aprendizagem de Matemática. A autora buscou compreender facetas da Proposição de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas.

Contudo, é preciso esclarecer que o nosso estudo diferencia-se da pesquisa de Sousa (2021), uma vez que buscamos, a partir do mapeamento das pesquisas do GEPEP, compreender o que nos diz uma sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, isto é, elucidamos movimentos didáticos para orquestrarmos episódios de sala de aula por meio desta proposta na Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática.

Com isso, no tocante à nossa questão de pesquisa, justificamos que o mapeamento das pesquisas realizadas pelos membros do GEPEP possibilita refletir sobre o trabalho realizado em sala de aula, tendo a **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas** como **metodologia de ensino-aprendizagem**. Dessa maneira, podemos obter um panorama do que foi feito e levantar perspectivas dos estudos vindouros.

No artigo “*Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula*”, Andrade (2017) faz uma descrição literal de trabalhos de pesquisa de mestrado orientados por ele. O pesquisador apresenta uma síntese sobre o que as pesquisas têm evidenciado acerca da temática da exploração, resolução e proposição de problemas no cotidiano de sala de aula.

Nos diferentes trabalhos de pesquisa que temos orientado em nível de mestrado na temática da exploração, resolução e proposição de problemas temos sempre experienciado um mergulho intenso no cotidiano da sala de aula. Esses trabalhos na sua totalidade têm contribuído para explicitar, a partir do experienciado-vivido, como é o processo de exploração, resolução e proposição de problemas quando mergulhamos no cotidiano da sala de aula (Andrade, 2017, p. 376).

Andrade (1998) observou que, na década de 1990, em sua maioria, as pesquisas de Resolução de Problemas foram desenvolvidas em ambientes laboratoriais. Sendo assim, poucos estudos foram desenvolvidos em sala de aula reais. Em contrapartida, “[...] nos últimos anos, que tem havido uma boa quantidade de estudos desenvolvidos em salas de aula inteiras” (Andrade, 2017, p. 359). O pesquisador enfatiza, então, que as análises desenvolvidas precisariam problematizar um pouco mais o cotidiano encontrado nas salas de aula. Ademais, evidencia sua preocupação com a dimensão sócio-político-cultural, devido ao fato de sua presença ainda ser sendo muito incipiente nos trabalhos de Resolução de Problemas até os dias atuais.

Além disso, o campo de pesquisa em nível internacional vem sinalizando a **Proposição de Problemas** como uma forma de avançar nas **pesquisas e práticas de Resolução de Problemas**. Ressaltamos que, desde a década de 1980 (apontada como a década de ouro da pesquisa em Resolução de Problemas), não tivemos nenhum movimento do campo que intensificasse as pesquisas, tal como as discussões atuais, as quais envolvem a Proposição de Problemas, uma temática emergente e promissora no âmbito da Educação Matemática.

Contudo, Andrade (2017) ressalta que, em todas as pesquisas realizadas, a partir de um mergulho intenso no cotidiano da sala de aula, tem notado que a Proposição de Problemas parece a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida junto aos alunos. Ainda de acordo com ele, isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada apenas na resolução de problemas oriunda de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos. A partir de um olhar para as pesquisas do GEPEP, o autor percebeu que a proposição de problemas só é desenvolvida após um período intenso de trabalho de sala de aula, “num primeiro momento emerge muito mais a resolução de problemas, num segundo momento a exploração de problemas e num terceiro momento a proposição de problemas” (*Ibid.*, 2017, p. 388).

Em suma, nossa pesquisa se concentra em acompanhar o movimento do campo da Resolução de Problemas e Proposição de Problemas, amparado na proposta de Andrade (1998, 2017), que nos permite operacionalizar a **Proposição de Problemas como ponto de partida a partir da proposta de Exploração de Problemas**, como também situar uma discussão que envolve a **dimensão sócio-político-cultural**, uma vez que essa dimensão tem sido pouca explorada nos estudos em Resolução de Problemas e Proposição de Problemas (Andrade, 1998, 2017, 2021).

Assim, elaboramos e propomos **atividades de exploração, proposição e resolução de problemas em formato de Narrativas Matemáticas**, constituindo, de modo, o nosso **Produto Educacional**, com o propósito de potencializar o trabalho de exploração, proposição, resolução de problemas na **Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática**, dando uma atenção especial para a **Proposição de Problemas** e a **dimensão sócio-político-cultural**, como também buscando compreender como uma abordagem de Resolução de Problemas pode impactar a prática docente de professores que ensinam Matemática.

Essa abordagem ocorreu por meio de um curso de Formação de Professores que ensinam Matemática, intitulado “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social**”, o qual foi ofertado por meio da parceria entre a Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e o município de Alagoinha-PB. Todavia, além dos professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental II no município de Alagoinha-PB, convidamos também professores do respectivo município que ministram aulas de Matemática em escolas estaduais da Paraíba e no Estado do Rio Grande do Norte, bem como em outros municípios paraibanos.

O presente trabalho está estruturado em **oito capítulos**:

No segundo capítulo, fazemos uma discussão que enfoca da Resolução Problemas a Proposição de Problemas, com o propósito de situar nosso estudo no campo de pesquisa. Com isso, selecionamos alguns trabalhos em Resolução de Problemas escritos por educadores matemáticos renomados em âmbito internacional. A partir deles, buscamos perceber as principais discussões que movimentaram o campo ao longo do tempo, como também identificar o estado atual das pesquisas em Resolução de Problemas para que, posteriormente, enfatizemos como contribuir com o progresso das pesquisas com foco nesta temática.

No terceiro capítulo, nos dedicamos a discutir sobre a “Exploração, Proposição e Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Matemática”. Para isso, situamos a Resolução de Problemas no cenário de pesquisa em Educação Matemática; destacamos diferentes concepções para trabalhar a Resolução de Problemas em sala de aula; apresentamos o que é um problema matemático na perspectiva da Exploração, Proposição e Resolução de

Problemas; discorremos sobre a proposta “**Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas**”; discutimos sobre a Proposição de Problemas nas pesquisas; enfatizamos a importância da Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática; e, por fim, apresentamos e refletimos sobre distintas abordagens de Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática.

No quarto capítulo, apresentaremos a metodologia de pesquisa que adotada em nossa investigação, sendo caracterizada como uma abordagem qualitativa (Bogdan, Biklen, 1994; Minayo, 2010; Prodanov, Freitas, 2013). Posteriormente, detalhamos a pesquisa, descrevendo as etapas, bem como os participantes. Em seguida, descrevemos a Metodologia do Produto Educacional - atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, elencando, etapas da pesquisa que contribuíram para a sua elaboração; como se deu o processo de pré-validação do Produto Educacional; a metodologia de ensino-aprendizagem escolhida para trabalhar em um curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática; o levantamento dos dados; as dimensões conceitual, social e pedagógica, incorporadas às atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas. Por fim, destacamos o uso de narrativas no ensino-aprendizagem de Matemática.

Posteriormente, **no quinto capítulo**, descrevemos e analisamos os estudos desenvolvidos pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) que abordaram a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas em sala de aula. Para aprofundar a discussão, buscamos identificar movimentos didáticos de um episódio de sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas a partir da análise de duas atividades trabalhadas pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade em uma disciplina de pós-graduação. Amparados nas pesquisas do GEPEP, refletimos sobre algumas questões que podem ajudar a compreender como orquestrar uma sala de aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

No sexto capítulo, contextualizamos como se deu a elaboração inicial do nosso Produto Educacional – **atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas**, destacando motivações, objetivo, abordagens e o público-alvo e, posteriormente, apontamos como tais narrativas foram trabalhadas – descrevendo os encaminhamentos que foram solicitados aos professores, bem como apresentamos as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas,

além de elencaremos conteúdos, conceitos matemáticos e questões sócio-político-culturais que podem ser abordadas com cada Narrativa Matemática.

Em seguida, **no sétimo capítulo**, nos debruçamos acerca da descrição e análise dos episódios de sala de aula com os professores, buscando elucidar os resultados, de modo a levar as reflexões acerca de possibilidades da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação dos professores que ensinam Matemática via Narrativas Matemáticas.

No último capítulo, tecemos as considerações finais acerca do nosso estudo. Assim, retomamos nosso objetivo de pesquisa e apontamos o caminho trilhado, buscando elucidar elementos identificados no mapeamento das pesquisas do GEPEP, bem como no desenvolvimento do curso com os professores que ensinam Matemática, nos ajudando, assim, a refletir acerca da nossa questão de pesquisa. Por fim, sugerimos caminhos para as futuras pesquisas envolvendo a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

2 DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

O papel da Resolução de Problemas nos Currículos de Matemática tanto em âmbito nacional e internacional, aparentemente, está bem definido, uma vez que o problema matemático vem sendo concebido como ponto de partida de uma aula de Matemática. Percebe-se que, em nível global, a Resolução de Problemas vem sendo amplamente aceita pela comunidade de educadores matemáticos como uma metodologia de ensino e como parte integrante do currículo escolar de Matemática.

Contudo, Andrade (2008) no seu trabalho de doutorado, explica que, a partir da sua pesquisa de mestrado e a vivência em cursos e minicursos por ele ministrados envolvendo a temática de Resolução de Problemas, constatou-se “[...] que há um desencontro entre o que a literatura diz sobre Resolução de problemas e o que, de fato, os professores sabem e fazem na sua sala de aula” (*Ibid.*, 2008, p. 25). Sobre isso, o autor argumenta que, nas pesquisas de Educação Matemática, a Resolução de Problemas é concebida como um meio de ensinar Matemática (ensinar Matemática via/através da Resolução de Problemas), isto é, como uma metodologia de ensino, já na prática escolar, a Resolução de Problemas não é compreendida nem mesmo como aplicação do conteúdo (ensinar Matemática para resolver problemas), visando apenas aplicação de técnicas, receitas, treino etc. Nesse contexto, como viabilizar que a Resolução de Problema enquanto metodologia de ensino esteja presente na prática dos professores que ensinam Matemática?

Nessa perspectiva, o papel do professor em uma aula de Matemática centrada na metodologia de Resolução de Problemas deve estar bem definido. Sobre isso, Lester (1994) ressalta que não acredita que qualquer Currículo de Matemática com foco em problemas tem chance de obter sucesso se, ao menos, o papel do professor no currículo não esteja exposto de forma clara. Ele percebe que há poucas discussões na literatura sobre ensino de resolução de problemas matemáticos, uma vez que discutiu-se, de modo insuficiente, a relevância do papel do professor, como também da pesquisa sobre o ensino com a Resolução de Problemas. Para o autor, a atenção ao papel do professor deve ser o item mais importante em qualquer agenda de pesquisa em Resolução de Problemas.

No entanto, há esforços dos pesquisadores no mundo inteiro, que explicitam diferentes estudos e práticas de Resolução de Problemas que avançaram nos últimos 70 anos ou mais. Desse modo, após décadas de pesquisas e práticas de Resolução de Problemas, percebe-se que pesquisadores em Educação Matemática têm se concentrado em sintetizar o movimento do campo, evidenciando as principais descobertas, avanços e apontando direções futuras para as

investigações sistemática sobre Resolução de Problemas (Lester, 1994; Cai, 2010; English, Sriraman, 2010; Lester, Cai, 2016; Liljedahl *et al.*, 2016; Jurado, 2016a; Liljedahl; Cai, 2021).

A seguir, iremos discorrer sobre os respectivos estudos, buscando identificar os principais movimentos da literatura de Resolução de Problemas, com o intuito de situar nosso trabalho no campo de pesquisa. Na verdade, acreditamos que esses pesquisadores nos mostram diversos movimentos das pesquisas e contribuem, significativamente, para o desenvolvimento do campo, nos possibilitando ter um panorama dos diferentes momentos da pesquisa em Resolução de Problemas. Ademais, neste capítulo, contextualizaremos o cenário de pesquisa em Resolução de Problemas e finalizaremos com a Proposição de Problemas, uma vez que a última tem recebido destaque nas pesquisas e práticas de sala aula nos dias atuais.

No artigo intitulado “*Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994*” (Reflexões sobre a pesquisa de resolução de problemas matemáticos: 1970-1994), o pesquisador Lester (1994) explica que, nos últimos 25 anos (tomando como referência o ano de publicação do seu estudo), muito se tem aprendido sobre como os alunos aprendem a resolver problemas e como a Resolução de Problemas pode ser ensinada, no entanto, ainda não é o suficiente.

De acordo com Lester (1994), as duas publicações pelo “*National Council of Teachers of Mathematics*” (NCTM) - Conselho Nacional de Professores de Matemática: “*An Agenda for Action*” (Uma Agenda para Ação), datado em 1980, e o “*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*” (Currículo e Padrões de Avaliação para Matemática Escolar), datado em 1989, possibilitaram, naquela época, o desenvolvimento do Currículo de Resolução de Problemas e Pesquisa na América do Norte (Estados Unidos e Canadá). Em consequência disso, a década de 1980 foi conclamada a década da Resolução de Problemas.

Embora tenha dado um destaque especial à Resolução de Problemas na Agenda para Ação, os pesquisadores sentiram a necessidade de mais clareza sobre como tornar a Resolução de Problemas o foco da Matemática escolar para esta década. Por outro lado, as normas apresentavam diversas sugestões que podiam ajudá-los. Naquele período (1980-1994), desde a publicação da Agenda, a Resolução de Problemas tem sido o tópico que mais recebeu atenção dos educadores matemáticos, no entanto, possivelmente, o menos compreendido nos Currículos de Matemática nos Estados Unidos. É consensual que grande parte dos pesquisadores em Educação Matemática concordam que o desenvolvimento de habilidades de Resolução de Problemas deve ser o principal objetivo do ensino em sala de aula. Em contrapartida, eles admitem que uma questão a ser pensada é o que deve ser feito para atingir esse objetivo, ou

seja, por onde começar, quais problemas e experiências de resolução de problemas usar, quando dar atenção especial à Resolução de Problemas etc (Lester, 1994).

“Assim, embora a aceitação da noção de que a resolução de problemas deva desempenhar um papel proeminente no currículo tenha sido amplamente aceita, não há aceitação generalizada de como torná-la parte integrante do currículo” (Lester, 1994, p. 661, tradução nossa).¹

Amparado, principalmente, nos estudos de Kilpatrick (1985) e Schoenfeld (1992), que o possibilitou captar as principais discussões da literatura daquela época, Lester (1994) expõe quatro focos de investigações, nos quais se registraram progressos notáveis das pesquisas de Resolução de Problemas, sendo eles: (a) determinantes da dificuldade do problema; (b) distinções entre bons e maus solucionadores de problemas, (c) atenção ao ensino de resolução de problemas, e (d) o estudo da metacognição na resolução de problemas.

Dentre esses diferentes enfoques, chamamos atenção para o penúltimo, visto que aparece como um dos focos das pesquisas atuais de Resolução de Problemas. Lester (1994) apresenta cinco resultados importantes sobre o ensino de resolução de problemas: (1) os alunos devem se debruçar na resolução de muitos problemas para melhorar sua habilidade de resolução de problemas; (2) a capacidade de resolução de problemas desenvolve-se lentamente, durante um período de tempo prolongado; (3) para que os alunos se beneficiem do ensino, eles devem acreditar que seu professor compreende que a resolução de problemas é importante; (4) a maioria dos alunos se beneficia com o ensino de resolução de problemas sistematicamente planejado; e (5) ensinar aos alunos sobre estratégias heurísticas e fases de resolução de problemas (como, por exemplo, as quatro etapas de Polya), em geral, pouco contribui para melhorar a capacidade dos alunos resolverem problemas matemáticos.

Assim, “temos claramente um longo caminho a percorrer antes de sabermos tudo o que precisamos saber como ajudar os alunos a se tornarem solucionadores de problemas bem-sucedidos” (Lester, 1994, p. 666, tradução nossa).²

Ademais, o último foco de investigação também ainda tem despertado o interesse dos pesquisadores, principalmente, pela necessidade de entender como o desenvolvimento dos

¹ Thus, although acceptance of the notion that problem solving should play a prominent role in the curriculum has been widespread, there has been anything but widespread acceptance of how to make it an integral part of the curriculum.

² We clearly have a long way to go before we will know all we need to know about helping students become successful problem solvers.

processos metacognitivos influenciam na capacidade de resolução de problemas. Lester (1994) esclarece que o papel da metacognição na atividade de resolução de problemas tem se preocupado com dois componentes que estão intimamente conectados: (a) conhecimento dos próprios processos de pensamento; e (b) regulação e monitoramento (também conhecido como "controle") da atividade do solucionador durante a resolução de problemas.

Até meados da década de 1990, Lester (1994) nota que há um declínio das pesquisas em Resolução de Problemas e discorre sobre quatro possíveis explicações:

- **Outras questões desviaram a atenção da Resolução de Problemas** – nesse período, os pesquisadores focaram em novas questões que não estavam diretamente ligadas à Resolução de Problemas, principalmente desde a publicação das “*Curriculum and Evaluation Standards*” (Currículo e Padrões de Avaliação), que recomendou que os principais focos do currículo são: resolução de problemas, conexões, comunicação e raciocínio, em que cada um deles atraiu a atenção de alguns pesquisadores, culminando, de alguma forma, na baixa no quantitativo das pesquisas de Resolução de Problemas. Ademais, outros focos de estudos também têm despertado o interesse dos pesquisadores, tais como: questões associadas a temas como as crenças sobre a natureza da Matemática, influências socioculturais na aprendizagem de Matemática, aplicações da Matemática e avaliação;
- **Achamos que já sabemos tudo sobre Resolução de Problemas** – sem dúvidas, essa é uma das justificativas mais perigosas, pois os pesquisadores podem cair no comodismo e não haver esforços para que uma teoria continue em constante desenvolvimento. Desse modo, o autor argumenta que, embora a literatura disponha de boas análises de pesquisas de Resolução de Problemas, os pesquisadores têm se apoiado nos padrões em Resolução de Problemas para fornecer uma justificativa para seus esforços, ao invés de posicionar seu trabalho em uma literatura de pesquisa bem estabelecida, visto que os padrões se tornaram autoridade, não havendo, assim, necessidade de se referir à literatura relevante de Resolução de Problemas;
- **O construtivismo substituiu a Resolução de Problemas como "ideologia" dominante, conduzindo a pesquisa em Educação Matemática** – o autor observou que, naquela época, alguns estudos utilizaram a “Resolução de Problemas” e o “construtivismo” de forma alternada, cabendo a compressão, que eles sugerem de que essas duas posições são essencialmente as mesmas. Sendo assim, manter essa última posição acarretou que a atenção dada à Resolução de Problemas e o uso de terminologia de Resolução de Problemas diminuiu;

- **A Resolução de Problemas é ainda mais complexa do que nós pensamos** – devido à sua natureza, a Resolução de Problemas se apresenta como uma forma complexa do esforço humano, uma vez que envolve muito mais do que a simples recordação de fatos ou a aplicação de procedimentos que foram aprendidos. Ademais, o autor argumenta que a capacidade de resolver os problemas de Matemática se desenvolve lentamente, durante um período muito longo, visto que o sucesso não depende só do conhecimento do conteúdo matemático. Sobre isso, ele explica que o desempenho na resolução de problemas parece ser uma função de várias categorias de fatores interdependentes, tais como: aquisição e utilização de conhecimento, controle, crenças, afetos e contextos socioculturais, sendo que cada uma delas interage entre si, não sendo possível separá-las completamente.

Tomando como referência a literatura daquela época, ele apresenta algumas questões que as pesquisas em Resolução de Problemas devem continuar refletindo, pois o estado de conhecimento daquele período era insuficiente para compreender, com clareza, a complexidade de uma aula de Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas, tais como: “Como se desenvolve a capacidade de resolução de problemas? Que fatores influenciam esse desenvolvimento? Como os alunos podem ser ajudados a se tornarem melhores solucionadores de problemas e, portanto, melhores praticantes de matemática?” (Lester, 1994, p. 672, tradução nossa).³

Nota-se que as pesquisas sobre Resolução de Problemas avançaram significativamente durante os últimos 70 anos ou pouco mais. No entanto, há muito a caminhar para que se tenha uma compreensão do que precisa ser feito em sala de aula, para que ajude a tornar os alunos bons solucionadores de problemas. Cai (2010), em um artigo intitulado “*Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion*” (Comentários sobre a Heurística de Resolução de Problemas, Afeto e a Matemática Discreta: Uma Discussão Representacional), ressalta que o estudo de Goldin (2010) pode ser encarado como uma tentativa de sugerir uma direção futura das pesquisas de Resolução de Problemas Matemáticos. Ao se debruçar nos escritos de Goldin (2010), Cai (2010) aponta que o **domínio da Matemática Discreta** tem um grande potencial para aumentar o interesse dos alunos em explorar a Matemática e desenvolver a heurística de resolução de problemas.

³ How does problem-solving ability develop? What factors influence this development? How can students be helped to become better problem solvers and, hence, better doers of mathematics?

Cai (2010) faz uma síntese do que as suas pesquisas de Resolução de Problemas têm indicado sobre alguns encaminhamentos pedagógicos que devem ser amplamente aceitos, quando os professores se propõem a ensinar Matemática via/através da Resolução de Problemas:

- uma aula de Matemática, nessa perspectiva, sempre começa com um problema ou situação-problema, no qual os alunos aprendem e compreendem um conceito importante ou ideia matemática quando explora uma situação-problema;
- os problemas podem ser abertos, visto que permitem uma investigação mais profunda das múltiplas respostas corretas e abordagens de soluções;
- com relação às atitudes dos alunos frente à exploração da situação-problema, percebe-se que os mesmos desempenham um papel muito ativo em sua aprendizagem e, sob a orientação do professor, eles inventam/elaboram suas próprias estratégias de solução dos problemas, a partir dos seus conhecimentos prévios, é importante, ainda, a tomada de consciência de que a própria exploração do problema pelos alunos é um componente essencial no ensino de Matemática via/através da Resolução de Problemas;
- os alunos tomam como ponto de partida qualquer conhecimento que tenham aprendido e justificam suas ideias da forma mais convincente possível;
- a princípio, os alunos trabalham individualmente e os professores interagem com eles, a fim de entender seu progresso e fornecer orientação individual, após implementar ou tentar utilizar pelo menos uma estratégia para resolver o problema, abre-se o espaço para os alunos compartilharem suas múltiplas estratégias uns com os outros, oportunizando, assim, a melhora da aprendizagem e a compreensão da Matemática por eles ao debater a validade de abordagens alternativas, sendo que durante o processo de discussão e comparação dos alunos, o trabalho realizado por eles sobre o problema passa a ser desafiado e discutido, uma vez que, escuta-se as ideias de outros alunos e compara-se os pensamentos deles com os seus;
- essas interações ajudam os alunos a esclarecer suas ideias e adquirir diferentes perspectivas com relação ao conceito ou ideia matemática que estão aprendendo, ou seja, apropria-se do conhecimento, porque elaboram suas próprias estratégias para construir as soluções;
- ao fim, cabe aos professores fazer resumos concisos e levar os alunos a entender aspectos-chave do conceito baseado no problema e suas múltiplas soluções.

As pesquisas indicam que uma abordagem de Matemática através da Resolução de Problemas melhora o desempenho dos alunos na resolução de problemas, não só porque

aprendem estratégias gerais e heurísticas de resolução de problemas, mas porque eles apresentam uma compreensão profunda e conceitual da matemática (Cai, 2010).

Desse modo, percebendo as potencialidades de uma aula de Matemática nessa perspectiva, algumas questões vão tomando forma, e Cai (2010) sugere as seguintes questões para futuras pesquisas em Resolução de Problemas:

- (1) O ensino em sala de aula usando uma abordagem de resolução de problemas tem algum impacto positivo no aprendizado de matemática dos alunos? Se sim, qual é a magnitude do impacto?
- (2) Como a instrução em sala de aula usando essa abordagem afeta o aprendizado de matemática dos alunos?
- (3) O que realmente acontece dentro da sala de aula quando uma abordagem de resolução de problemas é usada de forma eficaz ou ineficaz?
- (4) O que os resultados da pesquisa sugerem sobre a viabilidade de ensinar matemática através da resolução de problemas em sala de aula?
- (5) Como os professores podem aprender a ensinar matemática através da resolução de problemas?
- (6) Quais são as crenças dos alunos sobre o ensino através da resolução de problemas?
- (7) Os alunos sacrificarão habilidades matemáticas básicas se aprenderem matemática através da resolução de problemas? (Cai, 2010, p. 256, tradução nossa).⁴

Ao fim, o autor aponta a necessidade de as pesquisas em Resolução de Problemas procurar respostas para estas questões, contemplando um olhar tanto para o domínio discreto, quanto para as outras áreas de conteúdo.

No artigo intitulado “*Problem solving for the 21st century*” (Resolução de problemas para o século 21), English e Sriraman (2010) apresentam uma breve reflexão sobre pesquisa em Resolução de Problemas dos últimos 20 anos.

Os autores apontam algumas discussões que surgiram ao longo desta trajetória de pesquisa, como, por exemplo, destaca que a obra “*How to Solve It*”, de autoria de Polya (1945), foi importante para introduzir a noção de heurísticas e estratégias, sendo estas ferramentas de um solucionador de problemas bem-sucedido. O livro foi utilizado pelos educadores matemáticos como um recurso valioso para melhorar as habilidades dos alunos para resolver problemas. Argumentam, ainda, que apesar de inovador, parece que o ensino de heurísticas/estratégias não obteve avanços significativos na melhoria de habilidades de resolução de problemas dos alunos. Eles explicam que, para avançar na solução de um

⁴ (1) Does classroom instruction using a problem-solving approach have any positive impact on students’ learning of mathematics? If so, what is the magnitude of the impact?

(2) How does classroom instruction using this approach impact students’ learning of mathematics?

(3) What actually happens inside the classroom when a problem-solving approach is used effectively or ineffectively?

(4) What do the findings from research suggest about the feasibility of teaching mathematics *through* problem solving in classroom?

(5) How can teachers learn to teach mathematics through problem solving?

(6) What are students’ beliefs about teaching through problem solving?

(7) Will students sacrifice basic mathematical skills if they are taught mathematics through problem solving?

problema, são necessários processos de raciocínio e ferramentas de resolução de problemas, sendo essas ferramentas conceituais, estratégicas, metacognitivas, emocionais (como crenças e disposições), ou sociais (como cursos de ação mediados por grupos). No entanto, as dificuldades encontradas pelos alunos é saber quais ferramentas aplicar, quando aplicá-las e como aplicá-las, em decorrência de regras prescritivas que, de modo geral, são complicadas de ser utilizadas.

English e Sriraman (2010) se mostram preocupados, também, com a maneira tradicional pela qual a Resolução de Problemas tem sido implementada em muitas salas de aula de matemática, em que algumas perspectivas existentes abordam a mesma como um tópico isolado. A prática mais efetiva consiste em promover as habilidades de resolução de problemas por meio da aprendizagem inicial de conceitos e procedimentos básicos, que estão sendo praticados na resolução de problemas de “história” de palavras. Eles advogam que, quando ensinados dessa maneira, a Resolução de Problemas passa a ser vista como independente e isolada do desenvolvimento de ideias matemáticas centrais, entendimentos e processos. Por sua vez, a Resolução de Problemas deve ser utilizada com foco na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos a partir de um problema.

O que, de fato, ocorre é que o trabalho com a Resolução de Problemas é complexo, já que envolvem diferentes elementos que estão interagindo entre si, tais como: conteúdos matemáticos, estratégias, processos de pensamento e raciocínio, disposições, crenças, emoções e fatores contextuais e culturais (English; Sriraman, 2010).

English e Sriraman (2010) chamam atenção para a necessidade de uma melhor integração da Resolução de Problemas em todas as áreas temáticas do Currículo de Matemática e disciplinas. Nesse contexto, os autores argumentam que a incorporação de problemas do mundo real dentro do currículo pode melhorar as chances de aumentar a motivação e as competências dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Para isso, cabe ao professor selecionar problemas que atraem seus alunos competentes e de diferentes culturas; além disso, ele deve ser capaz de reestruturar tais problemas para potencializar o desenvolvimento matemático dos alunos.

Desse modo, os autores designam a **Modelagem Matemática como uma forma de avançar na pesquisa de Resolução de Problemas e no desenvolvimento curricular**. Sobre isso, eles percebem que o aumento de sistemas complexos no mundo exigiu mudanças nos tipos de habilidades de resolução de problemas que serão necessários no sucesso para além do chão da escola. Sendo assim, eles pontuam que, embora alguns estudos tenham investigado a relação entre o aprendizado e a aplicação da matemática dentro e fora da sala de aula, ainda sabemos

pouco sobre as capacidades de resolução de problemas dos alunos para além da sala de aula, e enfatizam que devemos ter mais informações sobre o que levam os alunos a terem dificuldades em aplicar os conceitos e habilidades matemáticas (normalmente, eles aprenderam na escola) fora da escola ou em outras ciências.

É preciso, ainda, reavaliarmos a natureza das experiências de resolução de problemas que apresentamos aos nossos alunos, em que devemos levar em consideração: a natureza do conteúdo e como ele é apresentado; os contextos do problema e a extensão de suas conexões com o mundo real; os processos de raciocínio, que, provavelmente, serão promovidos; e, por fim, as ferramentas de resolução de problemas que estão disponíveis para o aluno. Portanto, a mudança na natureza da resolução de problemas fora da escola requer a tomada de consciência que é necessária para refletir sobre essas questões (English; Sriraman, 2010).

O estudo de Lester e Cai (2016), intitulado “*Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research*” (A Resolução de Problema Matemático pode ser Ensinada? Respostas Preliminares de 30 Anos de Pesquisa), apresenta os avanços dos últimos 30 anos de pesquisa, elencando que houve avanços sobre a compreensão de aspectos afetivos, cognitivos e metacognitivos da resolução de problemas em Matemática, sobre o ensino e aprendizagem de problemas matemáticos e o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Por sua vez, os resultados encontrados, ao longo deste percurso, fornecem sugestões úteis para professores e os escritores de currículo. Para isso, eles refletiram sobre as seguintes questões:

- (1) Deveria a resolução de problemas ser ensinada como um tópico separado no currículo de matemática ou deve ser integrada ao longo do currículo?
- (2) O ensino de matemática através de problemas não requer mais tempo do que as abordagens mais tradicionais? Especificamente, que tipo de comprometimento de tempo é necessário para ensinar através da resolução de problemas?
- (3) Que tipos de atividades instrucionais devem ser usadas no ensino através de problemas?
- (4) Como os professores podem orquestrar pedagogicamente a resolução de problemas na sala de aula?
- (5) Como as crenças produtivas em relação à resolução de problemas matemáticos podem ser nutridas?
- (6) Os alunos sacrificarão as habilidades básicas se aprenderem matemática através da resolução de problemas? (Lester; Cai, 2016, p. 117, tradução nossa).⁵

⁵ (1) Should problem solving be taught as a separate topic in the mathematics curriculum or should it be integrated throughout the curriculum?

(2) Doesn't teaching mathematics through problem require more time than more traditional approaches? Specifically, What Sort of Time Commitment Is Required to Teach Through Problem Solving?

(3) What kinds of instructional activities should be used in teaching through problems?

(4) How can teachers orchestrate pedagogically sound, problem solving in the classroom?

(5) How can productive beliefs toward mathematical problem solving be nurtured?

(6) Will students sacrifice basic skills if they are taught mathematics through problem solving?

Os autores nos alertam que ainda há muito mais perguntas do que respostas sobre essa forma complexa de atividade (A resolução de problema matemático pode ser ensinada?). As reflexões realizadas sobre cada questão fornecem algumas respostas parciais, tendo em vista que carecem de muito mais de pesquisas para dar conta de todos os questionamentos dos professores sobre o ensino de Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas, embora as pesquisas comecem a sinalizar evidências convincentes que podem ajudar a ensinar os alunos a serem melhores solucionadores de problemas. Sendo assim, os autores sintetizam alguns resultados importantes, tais como:

- a pesquisa indica que a resolução de problemas não precisa ser ensinada como um tópico separado no Currículo de Matemática, ao invés disso, a resolução de problemas precisa ser ensinada como uma parte integrante da aprendizagem da Matemática;
- a resolução de problemas precisa ser trabalhada de forma efetiva em todos níveis de ensino e abordando todos os tópicos matemáticos;
- cabe aos professores a responsabilidade de selecionar tarefas adequadas e conduzir os discursos em sala de aula com o intuito de aumentar as oportunidades de aprendizagem;
- focar na resolução de problemas em sala de aula não afeta o desenvolvimento das habilidades de pensamento dos alunos de ordem superior, como também reforça atitudes dos alunos frente a um problema;
- por fim, são poucas as evidências que indicam que os professores precisam se preocupar com o fato de os alunos sacrificarem suas habilidades básicas, quando se concentram em desenvolver suas habilidades matemáticas para resolver problemas (Lester; Cai, 2016).

No ano de 2016, foi sediado a décima terceira edição do ICME – “*The 13th International Congress on Mathematical Education*” (Congresso Internacional de Educação Matemática), em Hamburgo, Alemanha, no qual a resolução de problemas matemáticos foi amplamente discutida no TSG 19: *Topic Study Group 19* (Grupo de Estudo Temático 19) – “*Problem Solving in Mathematics Education*” (Resolução de Problemas na Educação Matemática). As discussões geradas no âmbito do Grupo de Estudo Temático propiciaram a publicação do livreto “*Problem Solving in Mathematics Education*” - Resolução de Problemas na Educação Matemática (Liljedahl *et al.*, 2016). Nele, os autores reuniram quatro resumos olhando para quatro distintas, mas inter-relacionadas, dimensões da resolução de problemas matemáticos, a saber: o primeiro, escrito pela pesquisadora Regina Bruder, discorre sobre uma visão diferenciada das heurísticas para a resolução de problemas; ademais, essa noção de heurística é

transferida para o resumo de Peter Liljedahl, que se dedicou a olhar, especificamente, para uma progressão de heurísticas levando a aspectos cada vez mais criativos da resolução de problemas; Luz Manuel Santos Trigo propõe a integração da Resolução de Problemas com as Tecnologias Digitais; no último resumo, intitulado: “*Problem Posing: An Overview for Further Progress*” – A Proposição de Problemas: uma visão geral para o progresso do futuro, o pesquisador Uldarico Malaspina Jurado **documenta o surgimento da Proposição de Problemas dentro do campo da Educação Matemática em geral e da literatura de Resolução de Problemas em particular.**

Posteriormente, em 2021, o ICME 14 foi sediado em Shanghai, China. Percebendo que a Proposição de Problemas começa a despertar a atenção dos pesquisadores em nível global, tal temática apareceu agora, de forma explícita, como foco de discussão no TSG 17 - *Topic Study Group 17* (Grupo de Estudo Temático 17): “*Problem Posing and Solving in Mathematics Education*” – Proposição e Resolução de Problemas em Educação Matemática.

Assim, é preciso avançar nas pesquisas de Resolução de Problemas e, neste sentido, Jurado (2016a) destaca que a proposição e a resolução de problemas são dois aspectos essenciais da atividade matemática, contudo, os pesquisadores em Educação Matemática não têm enfatizado sua atenção sobre a Proposição de Problemas da mesma forma que sobre a Resolução de Problemas. Acrescentamos, também, que o mesmo acontece com a Exploração de Problemas.

Contudo, percebe-se que um número importante de pesquisadores em Educação Matemática tem dado importância à Proposição de Problemas e, atualmente, temos um número importante de publicações que lidam com diferentes aspectos da Proposição de Problemas relacionados ao ensino dos alunos em todos os níveis e à formação de professores (Jurado, 2016a).

Esta visão geral, embora incompleta, nos permite ver que uma parte da experiência de proposição de problemas envolve a importância desta na aprendizagem matemática dos alunos. Uma tarefa importante é continuar a refletir sobre as questões levantadas por Kilpatrick (1987). Para continuar a progredir na pesquisa sobre Proposição de Problemas e contribuir para uma maior consolidação desta linha de pesquisa, será importante que todos os educadores matemáticos prestem mais atenção à Proposição de Problemas, busquem integrar abordagens e resultados e promovam trabalhos conjuntos e interdisciplinares (*Ibid.*, 2016a).

O estudo de Liljedahl e Cai (2021), intitulado “*Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art*” (Pesquisa empírica sobre Resolução de Problemas e Proposição de problemas: um olhar para o estado da arte), trata-se de um estado

da arte (foram analisados 16 estudos) que examina momentos marcantes na história das pesquisas de Resolução de Problemas e Proposição de Problemas. Nesse contexto, eles discorrem, cronologicamente, sobre essas temáticas, fazendo uso da história para situar diferentes direcionamentos das pesquisas até o momento atual e sugerem novos rumos para as pesquisas de Resolução de Problemas e Proposição de Problemas (vamos nos concentrar apenas nas reflexões sobre a temática de Resolução de Problemas).

Os autores destacam que, embora as pesquisas sobre Resolução de Problemas, tanto do passado quanto do presente, possam ser classificadas por meio das três categorias propostas por Stanic e Kilpatrick (1989) – como um empreendimento cognitivo (a resolução de problemas como contexto), como algo para ser ensinado (resolução de problemas como capacidade) e como algo para ensinar (resolução de problemas como arte), nota-se que essa categorização não captura a complexidade que os pesquisadores do campo vêm abordando nos últimos 25 anos, nem mesmo as pesquisas emergentes dos últimos cinco anos, que continuaram trabalhando ativamente para descobrir as nuances por trás da resolução de problemas, como uma atividade contextual e socialmente construída. No entanto, têm surgido estudos que abordam temas que encapsulam a pesquisa contemporânea em Resolução de Problemas.

Com isso, Liljedahl e Cai (2021) levantaram algumas categorias para a análise dos estudos que emergem como temas que fornecem um pano de fundo para algumas das discussões atuais de Resolução de Problemas, tais como: o papel da colaboração na Resolução de Problemas, o papel do desenvolvimento profissional na Resolução de Problemas, o papel das variáveis de tarefa na Resolução de Problemas, o papel da tecnologia na Resolução de Problemas e Resolução de Problemas como atividade cognitiva.

Entretanto, por mais que os estudos tenham recebido essa classificação, eles também poderiam ter sido classificados de acordo com as três categorias propostas por Stanic e Kilpatrick (1989). Observou-se que sete dos artigos analisados caíram na primeira categoria, olhando de uma forma ou de outra, para o que aconteceu dentro de um ambiente de resolução de problemas, seja esse ambiente colaborativo, influenciado pela natureza da tarefa ou pela tecnologia usada. Desse modo, percebe-se que a nossa curiosidade sobre como se comporta a Resolução de Problemas em diferentes contextos não foi saciada nos últimos 25 anos de pesquisa (Liljedahl; Cai, 2021).

Os autores explicam que, até certo ponto, a razão para essa complexidade se deve ao fato de a Resolução de Problemas ter sido liberada das restrições de um indivíduo trabalhando sozinho em um problema. Assim, as diferentes variações em ambientes de resolução de problemas mantêm esta área de pesquisa relevante, importante e interessante.

Portanto, Liljedahl e Cai (2021) chamam atenção da **importância do contexto, tanto na prática de resolução de problemas, quanto de proposição de problemas**. Dessa forma, eles explicam que o ensino de Matemática, como um objetivo global, só pode ser atingido se tivermos a compreensão de algumas variáveis contextuais associadas à resolução de problemas e à proposição de problemas. Os resultados do respectivo estudo possibilitam aos autores tecer alguns olhares para pesquisas futuras, explicitando a necessidade de desenvolver mais pesquisas que nos ajudem a entender melhor que resolução de problemas e a proposição de problemas aparecem em várias situações contextualizadas, como podemos melhorar nossas competências para resolver e propor problemas nesses contextos e como a resolução de problemas e a proposição de problemas podem ser usadas para ensinar Matemática nesses contextos.

2.1 Reflexões sobre os estudos

Os estudos que enfocamos nesta seção foram desenvolvidos por educadores e pesquisadores matemáticos reconhecidos em âmbito mundial, que se destacam, principalmente, por terem contribuído significativamente para o avanço da literatura de pesquisa em Resolução de Problemas. Nesse contexto, situamos um pouco da trajetória de pesquisa sobre essa temática, visando perceber alguns movimentos que alavancaram o campo e o debate atual que vem intensificando os estudos em todo o mundo. A seguir, apresentamos um quadro que resume algumas das principais reflexões dos autores.

Quadro 1 – Resumo dos estudos

Título - Autor(es) - ano	Avanços/direções futuras/principais discussões
<i>Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994</i> (Lester, 1994)	- As publicações do NCTM (1980, 1989) intensificaram os estudos de Resolução de Problemas na América do Norte. - A Resolução de Problemas era o tópico mais pesquisado na década de 1980, porém o menos compreendido nos currículos dos Estados Unidos. - Não havia consenso sobre como tornar a Resolução de Problemas o foco da Matemática Escolar para a década de 1980. - O desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas precisa ser o principal objetivo do ensino. - Identificar o que precisa ser feito para tornar os alunos bons solucionadores de problemas. - Ensinar os alunos sobre estratégias, heurísticas e fases de resolução de problemas pouco contribuiu para melhorar a capacidade de os alunos resolverem problemas matemáticos. - Elenca fatores que justificam o declínio das pesquisas de Resolução de Problemas.

<i>Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion</i> (Cai, 2010)	- A partir do estudo de Goldin (2010), sugere-se a Matemática Discreta como direcionamento para as futuras pesquisas. - Faz uma síntese de alguns movimentos pedagógicos que precisam ser adotadas pelos professores, quando se propõem a ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. - Sugere sete questões para as futuras pesquisas de Resolução de Problemas.
<i>Problem solving for the 21st century</i>” (English; Sriraman, 2010)	- Parece que o ensino de heurísticas e estratégias não obteve avanços significativos na melhoria de habilidades de resolução de problemas dos alunos (ensinar sobre resolução de problemas). - A aprendizagem ocorre a partir da apresentação direta de conceitos e procedimentos. A Resolução de Problemas tem sido implementada nas salas de aula como um tópico isolado (ensinar para resolver problemas). - Sugere a integração da Modelagem Matemática com a Resolução de Problemas como uma forma de avançar nas pesquisas de Resolução de Problemas e no desenvolvimento do Currículo de Matemática.
<i>Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research</i> (Lester; Cai, 2016)	- Apresenta os avanços dos últimos 30 anos de pesquisa em Resolução de Problemas. - Os achados fornecem sugestões úteis para professores e os escritores de currículo. - Apresentam respostas parciais para seis questões que são indicadas como sugestões para novas pesquisas de Resolução. Inclusive, algumas delas foram propostas por Cai (2010). - A resolução de problemas precisa ser ensinada como uma parte integrante da aprendizagem da matemática (ensino de Matemática através da Resolução de Problemas).
<i>Problem Solving in Mathematics Education</i> (Liljedahl et al., 2016)	- Situa quatro distintas, mas inter-relacionadas, dimensões da resolução de problemas matemáticos: heurísticas para a resolução de problemas – Regina Bruder; ampliando a discussão de heurísticas, olhando para aspectos criativos da Resolução de Problemas – Peter Liljedahl; integração da Resolução de Problemas com as Tecnologias Digitais - Luz Manuel Santos Trigo; e a Proposição de Problemas como o progresso do futuro - Uldarico Malaspina Jurado (sendo este o estudo ao qual nos debruçamos).
<i>Problem Posing: An Overview for Further Progress</i> (Jurado, 2016)	- Aponta a Proposição de Problema como um progresso do futuro para a literatura de Resolução de Problemas. - Os pesquisadores têm dado muito mais atenção à Resolução de Problemas do que à Proposição de Problemas. - É importante que os educadores matemáticos prestem mais atenção à Proposição de Problemas.
<i>Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art</i> (Liljedahl; Cai, 2021)	- As pesquisas sobre Resolução de Problemas tanto do passado quanto do presente podem ser classificadas por meio das três categorias propostas por Stanic e Kilpatrick (1989) – como um empreendimento cognitivo (a resolução de problemas como contexto), como algo para ser ensinado (resolução de problemas como capacidade) e como algo para ensinar (resolução de problemas como arte). - Observou-se que sete dos artigos analisados caíram na primeira categoria, olhando de uma forma ou de outra para o que aconteceu dentro de um ambiente de resolução de problemas, seja esse ambiente

	colaborativo, influenciado pela natureza da tarefa ou pela tecnologia usada. - O interesse dos pesquisadores sobre como se comporta a Resolução de Problemas em diferentes contextos não foi saciado nos últimos 25 anos de pesquisa. - É preciso compreender a importância do contexto, tanto na prática de resolução de problemas quanto de proposição de problemas. - Novos estudos podem se concentrar em entender melhor como a resolução de problemas e a proposição de problemas aparecem em várias situações contextualizadas, como podemos melhorar nossas competências para resolver e propor problemas nesses contextos e como a resolução de problemas e a proposição de problemas podem ser usadas para ensinar Matemática nesses contextos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

As discussões enfatizadas aqui propiciam uma visão ampla de um caminhar de pesquisas de Resolução de Problemas que foi se configurando e reconfigurando à medida que novas reflexões movimentaram o campo, fornecendo indícios que, ao longo do tempo, promoveram a Resolução de Problemas, como uma forma de ensinar e aprender Matemática, cabendo, para aceitação dessa concepção, estudos que contribuíssem para um escopo de evidências que solidificasse a teorização da Resolução de Problemas enquanto metodologia de ensino em sala de aula.

O conjunto de evidências que são sistematizadas nas diferentes pesquisas decorridas acima sinalizam como vem se dando a configuração do trabalho em sala de aula via/através da Resolução de Problemas, apresentando impactos que potencializam e transformam a sala aula de matemática. Com efeito, nossa atribuição, enquanto pesquisador em Educação Matemática, que, por sua vez, enfoca com pesquisa e prática docente voltada para a Resolução de Problemas, é o desenvolvimento e a divulgação de práticas de sala de aula que alcancem os professores que ensinam Matemática sobre como essa metodologia aumenta e intensifica momentos de aprendizagens dos alunos, que vão em direção a uma educação transformadora e emancipatória.

O trabalho seminal de George Polya, datado a partir de 1944, é um marco histórico nos estudos em Resolução de Problemas, servindo como base teórica para fundamentar as pesquisas nesse campo. Naquela época, as discussões propostas pelo autor eram inovadoras e inspiradoras. Com os avanços das pesquisas, principalmente, as investigações desenvolvidas a partir da década 1980, motivadas pelas duas publicações do “*National Council of Teachers of Mathematics*” (NCTM, 1980, 1989) e alguns estudos que tiveram como propósito mapear as descobertas do campo, foi possível perceber que os achados sinalizam que ensinar aos alunos estratégias, heurísticas e fases de resolução de problemas melhorava muito pouco a capacidade de resolver problemas matemáticos (Lester, 1994; English; Sriraman, 2010).

Por outro lado, algumas discussões propostas por Polya naquela época estão sendo ampliadas e aprofundadas e possuem influências no cenário atual de pesquisa. Por exemplo, dentre as quatro fases propostas por ele para resolver problemas, a última consiste no **retrospecto**, em que um aluno tem a responsabilidade de verificar se a solução dada ao problema está correta. O autor aponta essa etapa como uma forma de consolidar o conhecimento, em que devemos impulsionar o pensamento dos alunos, isto é, “o professor deve encorajar os alunos a imaginar casos em que eles poderão outra vez utilizar o procedimento usado ou o resultado obtido. **É possível utilizar o resultado, ou método em algum outro problema?**” (Polya, 1995, p. 11, grifo nosso). Nesse sentido, o modelo de Polya para resolver problemas destacava a Proposição de Problemas (tema de grande interesse das atuais pesquisas) como uma forma de melhorar a habilidade de resolução de problemas dos alunos. Observa-se que o autor já sugeria que o professor incentivasse os alunos a pensarem em novos problemas com o intuito de verificar se o procedimento utilizado no problema anterior daria conta de um novo problema. Neste caso, a proposição de problemas ocorria depois da resolução do problema.

De fato, a década de 1980 foi marcada por publicações do NCTM que intensificam os estudos de Resolução de Problemas. Na verdade, naquela época, havia uma necessidade de uma busca de significados para a Resolução de Problemas, como uma parte integrante do Currículo de Matemática. Sem dúvidas, essa preocupação surge no estudo de Lester (1994) como principal questão a ser pensada, para que o campo de Resolução Problemas se consolidasse como temática de pesquisa e como uma forma de ensinar e aprender Matemática. Embora o autor reporte diferentes estudos que mostraram que a habilidade de resolução de problemas merecia mais atenção dos professores que ensinam Matemática, não havia consenso dos pesquisadores sobre como fazer da Resolução de Problemas o foco da Matemática Escolar, bem como um objetivo de ensino a ser atingido em sala de aula.

O artigo de Lester e Cai (2016) dá continuidade ao estudo de Lester (1994), visto que toma como pano de fundo algumas das suas principais preocupações: a falta de um consenso sobre como os professores devem atingir o objetivo que indica que o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas dos alunos precisa ser o principal objetivo de ensino em sala de aula, como é sugerido pelo NCTM; e como podemos ajudar os alunos a se tornarem solucionadores de problemas bem sucedidos; avança/aprofunda a pesquisa de Cai (2010), ao discutirem e analisarem seis questões, das quais algumas foram propostas por ele, como apontamentos para as futuras pesquisas de Resolução de Problemas, em que os autores tomam como base, principalmente, os resultados dos seus próprios estudos, como também se apoiam

nos trabalhos de outros pesquisadores, para ver com mais clareza o que essas investigações nos dizem sobre as práticas de Resolução de Problemas.

Nesse sentido, Lester e Cai (2016) se preocuparam em analisar como os dados dos estudos que foram produzidos ao longo dos anos dão conta de questões que ajudam a entender o que é uma aula de Matemática via/através da Resolução de Problemas. As respostas a essas perguntas fornecem insights aos professores sobre como operacionalizar uma aula de Matemática via/através da Resolução de Problemas, entendendo que é um trabalho complexo, pois depende, inicialmente, da crença do professor de que a habilidade de resolução de problemas do aluno precisa ser desenvolvida a partir de um problema ou situação-problema que possibilite, ao fim da aula, em decorrência das descobertas feitas pelos alunos e das discussões mediada pelo professor, a apresentação de um novo conceito ou conteúdo. É sabido que a condução de uma aula com esse enfoque exige, sobretudo, o planejamento de ações, que se iniciam desde a seleção/formulação do problema, em que o professor, em uma aula intencionalizada, tenta antecipar procedimentos/processos de resolução de problemas, possíveis dificuldades, mediações que ajudem os alunos a avançar no trabalho de resolução de problemas, oportunizando, por sua vez, um cenário de sala de aula com essas atribuições, demanda tempo para todo desenrolar de direcionamentos, descobertas e sínteses que são encaminhadas durante a aula.

As pesquisas sugerem algumas abordagens que podem promover avanços nos estudos de Resolução de Problemas: a integração no currículo dos tópicos de Resolução de Problemas e a **Modelagem Matemática**, como uma forma de avançar nas pesquisas de Resolução de Problemas (English; Sriraman, 2010); o domínio da **Matemática Discreta** como uma forma de intensificar o interesse dos alunos e desenvolver a heurística de resolução de problemas (Cai, 2010); e a **Proposição de Problema** como uma temática emergente na literatura de Resolução de Problema (Jurado, 2016a).

Embora essas diferentes abordagens apresentem potenciais promissores, carecendo, assim, de mais pesquisas que evidenciem e as promovam com foco das atuais pesquisas de Resolução de Problemas, nota-se que o que, de fato, vem movimentando o campo de pesquisa de Resolução de Problemas é a abordagem de **Proposição de Problemas** que emerge como um dos principais avanços das pesquisas nas últimas décadas, e voltamos a afirmar, e porque não dizer que desde a década de 1980 (década de ouro da Resolução de Problemas) não tivemos um interesse pelo campo tão intenso dos pesquisadores em Educação Matemática em nível global.

De fato, houve um aumento crescente de estudos que focaram no impacto do ensino-aprendizagem de Matemática via Proposição de Problemas. Observamos que pesquisadores de

diferentes países têm publicado sobre essa temática em periódicos, revistas, edições especiais de livros e eventos científicos (Silver, 1994, Singer; Ellerton; Cai, 2013; Singer, Ellerton, Cai, 2015; Cai *et al.*, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Cai, Hwang, 2020, Liljedahl, Cai, 2021; Cai, 2022). Em vista disso, foram divulgadas uma gama importante de experiências de proposições de problemas vivenciadas em sala de aula reais, com alunos da Educação Básica; no chão da universidade, trabalhando na formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática.

Os estudos Brown e Walter (1983), Silver (1994) e Kilpatrick (1987) demarcaram o campo e impulsionaram os debates atuais em Proposição de Problemas. No ano de 2015, foi publicada a obra intitulada “*Mathematical Problem: Posing From Research to Effective Practice*” (Proposição de Problemas Matemáticos: da Pesquisa à Prática Eficaz), organizada pelos pesquisadores Florence Mihaela Singer, Nerida F. Ellerton e Jinfa Cai. Esse livro traz 26 capítulos, contemplando 52 autores de diversos países que discutem sobre o passado, o presente e o futuro das pesquisas em Proposição de Problemas.

Ademais, a Proposição de Problemas tem recebido atenção em grandes eventos internacionais de Educação Matemática, a exemplo do ICME – “*International Congress on Mathematical Education*” (Congresso Internacional de Educação Matemática), uma vez que, nas últimas duas edições (ICME-14, 2021 e ICME-15, 2024), a Proposição de Problemas tem aparecido, de forma explícita no TGS – “*Topic Study Group*” (Grupo do Estudo Temático) “*Problem Posing and Solving in Mathematics Education*” (Proposição e Resolução na Educação Matemática).

Desse modo, os estudos sobre Proposição de Problemas têm focado diferentes aspectos, a saber: **compreender o pensamento matemático dos alunos quando propõem problemas** (Silver, 1994; Zhang; Cai, 2021; Cai, 2022); **o link entre a Resolução de Problemas e a Proposição de Problemas** (Silver, 1994; Cai *et al.*, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016); **o processo de criatividade suscitado no ato de propor problemas** (Silver, 1994; Singer, Ellerton, Cai, 2013; Bonotto, Santo, 2015; Singer, Voica, 2015); **variáveis de tarefas** (Liljedahl, Cai, 2021; Cai *et al.*, 2022); **a integração da Proposição de Problemas com outros tópicos do currículo** (Abramovich, Cho, 2015; Hansen, Hana, 2015); **um olhar para a proposição de problemas advindo do alunos** (Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Crespo, 2015; Milinković, 2015); **abordagens que auxiliam na proposição dos problemas** (Crespo, Sinclair, 2008; Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Crespo, 2015; Milinković, 2015; Cai, 2022; Silveira, Andrade, Cai, 2024); **a Proposição de Problemas na Formação Inicial e Continuada**, olhando, aqui, para as oportunidades de aprendizagem que os professores

fornece aos seus alunos, quando eles formulam problemas para as suas aulas de matemática, dentre outros (Crespo, Sinclair, 2008; Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Crespo, 2015; Milinković, 2015; Cai, 2022), dentre outros.

Os estudos analisados aqui sintetizam o estado de conhecimento das pesquisas de Resolução de Problemas, que evidenciam os principais interesses dos pesquisadores durante o caminhar das pesquisas, como também foram apresentadas algumas abordagens que surgiram como resposta ao declínio das pesquisas de Resolução de Problemas, isto é, há uma preocupação dos pesquisadores em continuar avançando o campo de pesquisa, uma vez que as descobertas dos estudos precisam adentrar a sala de aula de matemática, fornecendo *insights* aos professores sobre o impacto da Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Matemática.

Percebemos que esses estudos não apresentaram, a partir da literatura estudada, uma abordagem de resolução de problemas que admite um olhar para questões que podem ser pensadas não só a partir da Matemática, uma vez que exige uma leitura de mundo, mas com a sua integração com outros campos do conhecimento, uma vez que provê uma visão multicontextual para sala de aula de matemática, carecendo da sensibilidade do professor em mergulhar em questões que vão além do que a Matemática pode desvendar.

Desse modo, um olhar para essas pesquisas permitiu enxergarmos não só os rumos que estão tomando as pesquisas e práticas de Resolução de Problemas, ao pontuar o principal enfoque dado aos estudos nos dias atuais (a Proposição de Problemas surge como um tema que vem impulsionando o debate de Resolução de Problemas - estado atual das pesquisas), mas também ajudou a identificar o que os estudos ainda vêm negligenciando ao longo dos 70 anos ou mais de pesquisas, chamamos atenção aqui, uma abordagem futura para as pesquisas de Resolução de Problemas: abordar a resolução de problemas em suas múltiplas dimensões: Dimensões Matemáticas Internas (DMI), compreendendo, aqui, um olhar para os processos e conceitos matemáticos (visão internalista), cabendo, nessa discussão, ir além dessa concepção, ao inferir as Dimensões Matemáticas Sócio-Política-Culturais (DMSPC), promovendo uma discussão de problemas/questões por meio ou para além da Matemática (visão externalista).

A literatura tem chamado atenção para a forma que os professores, em geral, concebem a Resolução de Problemas em sala de aula. Para ajudar aos professores, as pesquisas têm evidenciado alguns movimentos didáticos que precisam ser assumidos para orquestrar uma aula de Matemática via/através da Resolução de Problemas. Assim, destacam-se práticas de sala de aula que se sobressaíram com relação à compreensão conceitual e atitudes dos alunos frente a

um problema, quando comparada ao **ensino sobre resolução de problemas** ou **para resolver problemas**.

Percebe-se, ainda, que alguns pesquisadores, a partir da preocupação apontada por Lester (1994) no início deste capítulo, têm se dedicado a delimitar o papel do professor em uma aula de Matemática com foco na Resolução de Problemas, tais como: movimentos da ação pedagógica dos professores frente a uma aula de Matemática através da Resolução de Problemas (Cai, 2010); o professor precisa selecionar problemas que provoquem seus alunos competentes e de diferentes culturas, além disso, ele precisa adequar o problema à realidade social aluno, visando melhorar o desenvolvimento matemático dos alunos (English; Sriraman, 2010); as respostas às perguntas fornecem informações sobre como o professor pode ensinar Matemática via/através da Resolução de Problemas (Lester; Cai, 2016); o papel do desenvolvimento profissional na Resolução de Problema e o papel do professor dentro de um ambiente de resolução de problemas, seja esse ambiente colaborativo, influenciado pela natureza da tarefa ou pela tecnologia usada (Liljedahl; Cai, 2021).

Acreditamos que, para os professores e futuros professores se convencerem sobre as potencialidades de uma aula de Matemática que enfoca a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, é necessário que se envolvam em discussões teóricas e práticas em Resolução de Problemas, isto é, amparados a um curso de Formação Inicial e/ou Continuada, eles precisam desenvolver competências para conduzir uma aula que sugere que o problema precisa ser o ponto de partida para a apresentação de conceitos e conteúdos matemáticos ou uma aula via Proposição de Problemas.

Ademais, defendemos que as pesquisas precisam adentrar na sala de aula de matemática de diferentes níveis de ensino. Desse modo, tal afirmação coloca em evidência a necessidade de refletir sobre o nosso papel enquanto pesquisador. Não é nosso foco entrar no mérito desta discussão, no entanto, cremos que devemos discutir com professores em formação inicial e/ou continuada atividades de ensino que promovam reflexões que transformem as suas e as nossas aulas de Matemática. Com isso, acreditamos que estejamos ajudando a situar o papel do professor no ensino centrado na Resolução de Problemas.

Em suma, as reflexões que foram viabilizadas a partir de um olhar para os trabalhos enfatizados neste capítulo nos possibilitaram situar nosso estudo no campo de pesquisa, percebendo o que foi feito, o estado atual das pesquisas (a Proposição de Problemas) e como podemos contribuir com o progresso dos estudos em Resolução de Problemas (trabalhar uma proposta de Resolução de Problemas que aborde aspectos cognitivos e sócio-político-culturais). E, ainda, evidenciou o quão é importante desenvolver um curso para professores em formação

inicial e/ou continuada, visando construir, juntos com eles, a compreensão do nosso papel frente a uma abordagem de Resolução de Problemas e seu impacto para a sala de aula de matemática.

Portanto, neste estudo, trabalharemos com a proposta “**Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas**”, em que vamos dar uma atenção especial para a **Proposição de Problemas**, operacionalizando-a a partir da **Exploração de Problemas**, abordando **múltiplos contextos, (cognitivos e sócio-político-culturais)** em um curso para à **Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática**, com o propósito de compreender o que essa sala de aula pode nos dizer.

3 EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

3.1 A Resolução de Problemas no cenário de pesquisa em Educação Matemática

Os problemas matemáticos ocuparam um lugar central nos currículos desde a antiguidade, o mesmo não ocorreu com a Resolução de Problemas. Entretanto, nas últimas décadas, apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece uma atenção especial (Stanic; Kilpatrick, 1989; Andrade, 1998).

Em um contexto histórico, os problemas contribuíram para a evolução da Matemática pelo fato de trazerem à tona o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Além disso, ao resolver problemas que fizeram parte da história da Matemática, estamos evidenciando a necessidade de um povo em diferentes contextos (Silveira, 2016). Desse modo, um argumento convincente sobre a concepção de iniciar uma aula de Matemática com um problema é apoiado na própria história da humanidade que evidencia que o homem sistematizou os conceitos matemáticos a partir das soluções de problemas que emergiram da sua própria realidade. Isso implica dizer que os problemas matemáticos antecederam os conceitos, e estes foram sendo sintetizados e ampliados à medida que os problemas foram sendo solucionados. Sobre isso, Andrade (2017) esclarece que o problema antecedeu, invariavelmente, todas as descobertas matemáticas, isto é, o problema que deve exigir a teoria e não o contrário. Desse modo,

A resolução de problemas é uma das estratégias mais específica da educação matemática, cuja presença entende-se para todos os níveis de ensino e serve de interface com outras disciplinas. Como no plano histórico, os conceitos e as teorias estão quase sempre associados à solução de um problema, esta articulação sinaliza para o professor um pressuposto a ser cultivado na prática educativa da Matemática (Pais, 2013, p. 131).

Stanic e Kilpatrick (1989) destacam que os problemas nos currículos remontam em documentos antigos egípcios, chineses e gregos, a exemplo do Papiro de Ahmes reproduzido pelo escriba Ahmes, cerca de 1650 A. C, de um documento mais antigo, que, por sua vez, é um manuscrito matemático egípcio que consiste numa coleção de problemas. Os pesquisadores nos mostram alguns desses problemas para evidenciar que os problemas têm uma longa história nos Currículos de Matemática. No entanto, eles ressaltam que,

[...] principalmente no último século, as discussões sobre o ensino da resolução de problemas passaram da defesa de que aos alunos devem ser simplesmente apresentados problemas ou regras para resolver problemas particulares para o desenvolvimento de abordagens mais gerais da resolução de problemas. Embora o ensino da resolução de problemas esteja agora a receber uma maior ênfase, os educadores matemáticos não examinaram completamente a razão porque deveríamos

ensinar a resolução de problemas. O papel da resolução de problemas no currículo escolar de Matemática é o resultado do conflito entre forças ligadas a ideias antigas e persistentes acerca das vantagens do estudo da Matemática e uma variedade de acontecimentos que se influenciaram uns aos outros e que ocorreram no princípio do séc. XX (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 4, tradução nossa).⁶

Os autores advogam que a principal razão para a maior ênfase dada pelos educadores matemáticos ao ensino da resolução de problemas é que, até o século XX, era assumido que o estudo da Matemática, rigorosamente de qualquer Matemática, não apenas daquela que agora considerariamos problemas – seria, de uma maneira geral, a melhoria do pensamento das pessoas.

Em convergência à essa compreensão, nos anos 40, Polya surge como uma referência enfatizando a importância da descoberta e de levar o aluno a pensar por meio da resolução de problemas. Polya (1995) diz que uma grande descoberta resolve um grande problema, e há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. Para o autor, resolver problema era o tema mais importante para se fazer matemática, pois, ao resolver um problema, o aluno é levado a pensar.

Sobre isso, Stanic e Kilpatrick (1989) notaram que, desde pelo menos Platão, idealizamos que, ao estudarmos Matemática, melhoramos as capacidades de pensar, raciocinar, resolver problemas com que nos confrontaremos no mundo real. Desse modo, eles dizem que,

Num certo sentido, a resolução de problemas nos currículos era simplesmente um meio de levar os alunos a estudar Matemática. Os problemas eram um elemento do currículo de Matemática que contribuía, tal como outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocinar (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 9-10, tradução nossa).⁷

Os estudos de Resolução de Problemas preocuparam-se, inicialmente (período anterior a 60), com o desempenho bem-sucedido na obtenção da solução de problemas, ou seja, não havia preocupação com o processo. Desse modo, para desenvolver sua capacidade de resolução de problemas, a criança deveria exercitar-se exaustivamente na solução de uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo. Assim, o ensino de resolução de problemas limitava-

⁶ [...] primarily within the last century, discussions of the teaching of problem solving have moved from advocating that students simply be presented with problems or with rules for solving particular problems to developing more general approaches to problem solving. Although the teaching of problem solving is now receiving a greater emphasis, mathematics educators have not fully examined the issue of why we should teach problem solving at all. The role of problem solving in the school mathematics curriculum is the result of conflicting forces tied to ancient and enduring ideas about the benefits of the study of mathematics and to a variety of interacting events that took place near the beginning of the 20th century.

⁷ In a sense, solving problems in the curriculum was simply a means to get students to study mathematics. Problems were a given element of the mathematics curriculum that contributed, like all the other elements, to the development of reasoning power.

se ao ensino de solução de problemas, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta. Posteriormente (período 60-80), a preocupação era com o processo envolvido na resolução de problemas. Nessa ocasião, o ensino de resolução de problemas centra-se no ensino e no uso de estratégias (Andrade, 1998). “Nos fins dos anos 70, a Resolução de Problemas ganha espaço no mundo inteiro. Começa o movimento a favor do ensino da resolução de problemas” (*Ibid.*, p. 9).

Na década de 1960, um pequeno número de pesquisadores, motivado pelos estudos de George Polya com foco na Resolução de Problemas, começaram a identificar as práticas heurísticas que eram utilizadas pelos alunos quando resolviam problemas. Em vista disso, os estudos iniciais buscaram estabelecer relações entre os usos das várias estratégias de soluções e sucesso na resolução de problemas. Posteriormente, outros estudos começaram a caracterizar os processos de resolução de problemas e seu impacto mais direto no sucesso de resolução de problemas (Schoenfeld, 2007).

Por sua vez, na década de 1970 até o início da década 1980, foi dada muita atenção aos determinantes de dificuldade do problema, concentrando-se nos recursos e nos tipos de problemas que os alunos eram solicitados a resolver na escola (Lester, 1994).

Andrade (1998) destaca que, em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares tiveram início, aproximadamente, na década de 1970. O autor também enfatiza a necessidade de reconhecer a relevância dos trabalhos de George Polya, que datam de 1944, os quais foram publicados no livro “*How to solve it*”, cuja primeira edição data de 1945. Nessa obra, a resolução de problemas é tratada pela primeira vez como tema de interesse para professores e estudantes nos níveis superiores de ensino de Matemática.

Durante a década de 1980, após o movimento da Matemática Moderna, aconteceram muitas mudanças curriculares no mundo todo. Nos Estados Unidos, o NCTM – “*National Council of Teachers of Mathematics*” (Conselho Nacional de Professores de Matemática), no documento “*An Agenda for Action - Recommendations for school mathematics of the 1980s*” (Uma Agenda para Ação - Recomendações para a Matemática escolar dos anos 80”), apresentou uma série de recomendações para a Matemática escolar para esta década, em que a primeira enfatizava que a “Resolução de problemas devia ser o foco da Matemática escolar nos anos 80” (NCTM, 1980, p. 1).

Em consequência disso, a Resolução de Problemas tornou-se o termo da moda, no entanto, sua implementação, na maioria das salas de aula, era uma farsa. As editoras adotaram edições de “resolução de problemas” de seus livros didáticos, porém eram apenas modificações

de seus textos anteriores. Embora os novos textos chamassem atenção dos escritos de Polya (1945), isto é, descreviam quatro fases de resolução de problemas, o conteúdo real deles permaneceu basicamente o mesmo. Com isso, de forma prática, a “Resolução de Problemas”, geralmente, significava resolver problemas rotineiros de palavras de uma ou duas etapas (Schoenfeld, 2007).

De acordo com Andrade (1998, p. 12), “[...] os estudos da década de 80 dão atenção substancial ao processo de resolução de problemas em vez de, apenas, a busca da solução. Entretanto, o processo continua preso à busca da solução de problemas”.

Em síntese, a Resolução de Problemas nas salas de aulas de matemática nos Estados Unidos (EUA), na década 1980, passou a significar “resolver problemas de palavras (simples)”. Assim, na prática, surgiram algumas dificuldades da inserção da Resolução de Problema no currículo das escolas dos EUA, tais como: a pesquisa de resolução de problemas ainda estava no início, com isso, havia poucas pesquisas; a resistência dos professores em relação às mudanças que deveriam ocorrer, sobretudo porque tal iniciativa levava tempo e esforço; e as editoras estavam resistentes contra as mudanças (Schoenfeld, 2007).

Nesse contexto, refletindo sobre as potencialidades da Resolução de Problemas, começou-se a fazer um planejamento visando o desenvolvimento de um trabalho em sala de aula. Onuchic e Allevatto (2004) destacam que, na década de 1980, os recursos foram sendo desenvolvidos quanto à temática da Resolução de Problemas, tais como: coleções de problemas, listas de estratégias e sugestões de atividades que pudessem orientar e avaliar o desempenho em Resolução de Problemas. Assim, grande parte desse material passou a ajudar os professores a fazerem da Resolução de Problemas o ponto central de seu trabalho.

De acordo com Andrade (1998), essa década é considerada a “idade de ouro” da Resolução de Problemas. Ele destaca que, nesse período, o Brasil começou a trabalhar de modo mais efetivo sobre Resolução de Problemas. Desse modo,

Finalizando a década de 80, pesquisadores passaram a questionar o ensino e a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. Então, a resolução de problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino, ou seja, como um meio de se ensinar matemática. O problema passa a ser concebido como um agente que pode desencadear um processo de construção do conhecimento (Silveira; Andrade, 2020, p. 6).

“Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos, antes mesmo de sua apresentação e linguagem matemática formal” (Andrade, 1998, p. 12).

Nesse íterim, Andrade (1998) destaca que a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos de Resolução de Problemas

dos anos 90. Em contrapartida, a década de 1990 é marcada por um declínio das pesquisas de Resolução de Problemas (Lester, 1994; Andrade, 1998, 2021; Schoenfeld, 2007; English, Sriraman, 2010).

Embora tenha havido uma queda significativa nos estudos sobre Resolução de Problemas após a década de 1980, as investigações continuaram evoluindo em busca da criação de sentidos em matemática, visto que se deslocaram do laboratório para a sala de aula (Schoenfeld, 2007).

Ademais, Andrade (2021) enfatiza que, embora tenha ocorrido um declínio das pesquisas na década de 1990, devido à falta de interesse por parte dos pesquisadores, essa temática se amplia e se aprofunda com olhares diversos. Sobre isso, ele ressalta que, nesse período, surgiu, ainda de forma tímida, o interesse com o tema Proposição de Problemas e aspectos sócio-político-culturais, como, por exemplo, a sua pesquisa em nível de mestrado.

Contudo, nos anos 2000, o tema Resolução de Problemas, agora muito mais maduro, continua despertando o interesse dos pesquisadores e educadores por todo o mundo, que, por sua vez, está fortemente presente em cursos de formação de professores, propostas curriculares e livros didáticos, como também, é tema de grande interesse por parte dos professores de sala de aula (*Ibid.*, 2021).

A partir das diversas discussões promovidas no campo, nota-se um avanço imenso nos estudos em Resolução de Problemas no período 2010-2020. Assim, observa-se o desenvolvimento e aprofundamento de muitos estudos e publicações na temática de Proposição de Problemas, que emerge em âmbito mundial, como tema de destaque em pesquisas, propostas curriculares, eventos científicos, a exemplo do ICME 14 (*The 14th “International Congress on Mathematical Education”* – Congresso Internacional de Educação Matemática) (*Ibid.*, 2021), que foi sediado em Shanghai, China, datado 2021. Na ocasião, a Proposição de Problemas recebeu uma atenção especial, aparecendo, de forma explícita, no TSG 17 - *Topic Study Group 17* (Grupo de Estudo Temático 17): *“Problem Posing and Solving in Mathematics Education* (Proposição e Resolução de Problemas em Educação Matemática).

No entanto, o grande desafio é que as pesquisas em Resolução de Problemas busquem adentrar nas salas de aula de matemática, cada vez mais, tendo em vista os diferentes níveis de ensino. Desse modo, fazemos a seguinte indagação: como os professores em formação inicial e continuada concebem a Resolução de Problemas em sala de aula? Para esta discussão, destacamos, a seguir, o que a literatura nos diz acerca dos diferentes modos em que os professores trabalham a Resolução de Problemas no cotidiano de sala de aula.

3.2 Diferentes concepções para trabalhar a Resolução de Problemas em sala de aula

“O termo *resolução de problemas* transformou-se num slogan que abrange diferentes visões do que é a educação, a escolaridade, a Matemática e das razões por que devemos ensinar Matemática em geral e resolução de problemas em particular” (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 1, tradução nossa).⁸ Desse modo, Stanic e Kilpatrick (1989) observam que, mesmo após a importância dada a Resolução de Problemas pelo NCTM, com a publicação da Agenda para Ação nos Estados Unidos no início da década de 1980, “não há esclarecimento adequado sobre o que é a resolução de problemas, porque deveremos ensiná-la ou que posição assume no contexto histórico” (*Ibid.*, 1989, p. 1, tradução nossa).⁹

Como vimos acima, ao final da década de 1980, a Resolução de Problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, no entanto, as pesquisas de Resolução de Problemas, ao longo do tempo, sistematizaram diversas formas de se trabalhar a Resolução de Problemas em sala de aula (Stanic; Kilpatrick, 1989; Schroeder; Lester, 1989), evidenciando como os pesquisadores estavam empenhados em perceber de que forma a dinâmica das práticas de Resolução de Problemas no cotidiano de sala de aula possibilitava compreender o que precisa ser feito, para que o problema possa ser concebido como ponto chave para ensinar e aprender Matemática. Tal compreensão exigiu, sobretudo, entender o papel da Resolução de Problemas no Currículo de Matemática, mais do que isso, posicionar a Resolução de Problemas no lugar que é seu por direito, amparada historicamente, ao desenvolvimento da própria Matemática.

Nesse contexto, ao verificar a literatura internacional, iremos discorrer sobre algumas concepções/perspectivas/abordagens de Resolução de Problemas que se consolidaram ao longo do tempo, inferindo que cada uma delas apresenta diversas contribuições para o ensino-aprendizagem de Matemática e foram sendo aprimoradas à medida que as pesquisas avançaram, uma vez que as discussões do campo começaram a sinalizar como fazer da Resolução de Problemas o foco da Matemática escolar, como esperado pelo NCTM.

Stanic e Kilpatrick (1989) discorrem sobre três concepções que caracterizam o papel da resolução de problemas nos currículos de Matemática das escolas, sendo elas: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como capacidade e resolução de problemas como arte.

⁸ The term *problem solving* has become a slogan encompassing different views of what education is, of what schooling is, of what mathematics is, and of why we should teach mathematics in general and problem solving in particular.

⁹ There is no adequate clarification of what problem solving is, why we should teach it, or how the position taken fits into a historical context.

A primeira, **resolução de problemas como contexto**, tem, pelo menos, cinco subtemas, os quais são baseados na ideia de que os problemas e a resolução de problemas são meios para atingir fins relevantes:

- *Resolução de problemas como justificação*: é concebido, historicamente, que a resolução de problemas foi incluída no Currículo de Matemática em parte porque os problemas fornecem uma justificação para ensinar Matemática, em virtude de alguns serem incluídos no Currículo de Matemática para convencer os alunos e professores do valor da Matemática;
- *Resolução de problemas como motivação*: percebe-se que está intimamente relacionado à justificação, uma vez que os problemas justificavam a Matemática que se ensinava. Com relação à motivação, há uma conexão muito mais específica, além do mais é procurado o objetivo de atrair o interesse dos alunos;
- *Resolução de problemas como atividade lúdica*: este está relacionado com a motivação, visto que o interesse dos alunos está envolvido, sendo que, nesse subtema, os problemas possibilitam alguma diversão com a Matemática que eles já aprenderam;
- *Resolução de problemas como veículo*: neste subtema, os problemas são utilizados como veículo através do qual um novo conceito ou técnica precisa ser aprendido;
- *Resolução de problemas como prática*: dentre todos, este é o que tem a maior influência no Currículo de Matemática, pois tem como finalidade reforçar as capacidades e conceitos ensinados (Stanic; Kilpatrick, 1989).

Com relação à **resolução de problemas como capacidade**, Stanic e Kilpatrick (1989) explicam que o tema “capacidade” está claramente relacionado às mudanças ocorridas na virada do século XIX para o século XX, impulsionadas pelos avanços nos estudos em psicologia, que tiveram forte influência no campo educacional. Nesse sentido,

A resolução de problemas é muitas vezes vista como uma entre várias capacidades a serem ensinadas no currículo escolar. De acordo com esta visão, a resolução de problemas não é necessariamente uma capacidade unitária, mas há claramente uma orientação para as capacidades (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 14-15, tradução nossa).¹⁰

Os autores chamam atenção para a visão da resolução de problemas como contexto se manter como um tema forte e persistente, no entanto,

[...] o tema resolução de problemas como capacidade tornou-se dominante para aqueles que veem a resolução de problemas como um objetivo curricular valioso que merece atenção especial, em vez de ser simplesmente um meio para atingir outros fins

¹⁰ Problem solving is often seen as one of a number of skills to be taught in the school curriculum. According to this view, problem solving is not necessarily a unitary skill, but there is a clear skill orientation.

ou um inevitável produto do estudo da Matemática (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 15, tradução nossa).¹¹

Eles afirmam ainda que,

Colocar a resolução de problemas na hierarquia das capacidades a serem adquiridas pelos alunos leva a certas consequências para o papel da resolução de problemas no currículo. Uma consequência é que, dentro das capacidades gerais da resolução de problemas, fazem-se distinções hierárquicas entre resolver problemas de rotina e problemas não rotineiros. E que, a resolução de problemas não rotineiros é caracterizada como uma capacidade de nível superior a ser adquirida depois da capacidade de resolução de problemas rotineiros (que, por sua vez é adquirida depois de os alunos apreenderem conceitos e capacidades matemáticas básicas). Esta visão adia a atenção à resolução de problemas não rotineiros e, como resultado, apenas alguns alunos que conseguiram dominar os pré-requisitos chegam a ser expostos a tais problemas. A resolução de problemas não rotineiros torna-se então uma atividade para os alunos especialmente capazes, e não para todos os alunos (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 15, tradução nossa).¹²

Por fim, a **resolução de problemas como arte** se apresenta como uma visão mais profunda e mais compreensiva da Resolução de Problemas nos currículos escolares de Matemática. Essa visão decorre dos escritos de George Polya que reviveu no nosso tempo a ideia da heurística (a arte da descoberta). Eles explicitam que diferentes matemáticos antigos discutiram métodos e regras para a descoberta e invenção em Matemática, no entanto, as suas ideias nunca tiveram grande aceitação nos currículos escolares, ficando como responsabilidade de Polya a tarefa de reformular, estender e ilustrar várias ideias acerca da descoberta matemática, de tal modo que os professores as pudessem compreender e usar. Dessa forma,

A experiência de Polya na aprendizagem e ensino da Matemática levou-o a perguntar como surgiu a Matemática – como é que as pessoas fizeram descobertas matemáticas? Os alunos não compreenderão melhor a matemática se, em primeiro lugar, virem como ela foi criada e se eles próprios puderem sentir o gostinho da descoberta matemática? A experiência de Polya como matemático levou-o a concluir que a face acabada da Matemática, apresentada dedutivamente em revistas matemáticas e em livros didáticos não fazia justiça a este assunto. A Matemática acabada requer raciocínio demonstrativo, enquanto fazer Matemática requer raciocínio plausível. Se

¹¹ [...] the problem-solving-as-skill theme has become dominant for those who see problem solving as a valuable curriculum end deserving special attention, rather than as simply a means to achieve other ends or an inevitable outcome of the study of mathematics.

¹² Putting problem solving in a hierarchy of skills to be acquired by students leads to certain consequences for the role of problem solving in the curriculum. One consequence is that within the general skill of problem solving, hierarchical distinctions are made between solving routine and nonroutine problems. That is, nonroutine problem solving is characterized as a higher level skill to be acquired after skill at solving routine problems (which, in turn, is to be acquired after students learn basic mathematical concepts and skills). This view postpones attention to nonroutine problem solving, and, as a result, only certain students, because they have accomplished the pre-requisites, are ever exposed to such problems. Nonroutine problem solving becomes, then, an activity for the especially capable students rather than for all students.

os alunos devem usar raciocínio plausível, precisam de ser ensinados como (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 15-16, tradução nossa).¹³

Conforme Andrade (1998), na década de 1980, tivemos estudos que investigaram a influência do uso de estratégias especiais na resolução de problemas. Outros se debruçaram no desenvolvimento de modelos ou programas especiais de ensino de resolução de problemas que buscavam avaliar as consequências dos mesmos na aprendizagem dos alunos. Nesse cenário, “a resolução de problemas era pensada como uma arte e como um objetivo que justifica o ensino da Matemática” (*Ibid.*, p. 12).

Em contrapartida, no final da década 1980, os pesquisadores no mundo inteiro colocaram sobre questionamento a resolução de problemas como uma arte e como um objetivo. Desse modo, os pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito do uso de estratégias e modelos na aprendizagem de Matemática. Seus olhares estavam voltados para as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas (Andrade, 1998).

Com isso, Schroeder e Lester (1989) identificaram três concepções distintas para abordar a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: ensinar *sobre* resolução de problemas, ensinar *para* resolver problemas e ensinar Matemática *através* da resolução de problemas.

Ensinar **sobre** resolução de problemas – contempla o modelo de Polya (1945) em suas quatro fases para resolver problemas (1. compreensão do problema; 2. estabelecimento de um plano; 3. execução do plano; e 4. retrospecto) ou alguma variação dele; ensinar Matemática **para** resolver problemas – o professor enfoca na maneira como a Matemática é ensinada e como aplicá-la na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros, sendo assim, o propósito para aprender Matemática é a capacidade de saber aplicá-la; e ensinar Matemática **através** da Resolução de Problemas – nessa concepção, a Resolução de Problemas é aceita como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de ensinar Matemática, ou seja, o problema passa a ser concebido como um agente que pode desencadear o processo de construção do conhecimento.

O debate atual do campo de Resolução de Problemas tem se concentrado em torno da última concepção enfatizada por Schroeder e Lester (1989), ao inferir que os problemas são

¹³ Polya's experience in learning and teaching mathematics led him to ask how mathematics came to be-how did people make mathematical discoveries? Won't students understand mathematics better if they see how it was created in the first place and if they can get some taste of mathematical discovery themselves? Polya's experience as a mathematician led him to conclude that the finished face of mathematics presented deductively in mathematical journals and in textbooks does not do justice to the subject. Finished mathematics requires demonstrative reasoning, whereas mathematics in the making requires plausible reasoning. If students are to use plausible reasoning, they need to be taught how.

importantes não somente como um meio de se aprender Matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. Uma situação-problema é apresentada com o propósito de se construir novos conceitos e novos conteúdos, bem como a compreensão deles.

Em vista disso, o problema é concebido como o ponto de partida e orientação para aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos (Andrade, 1998, 2017; Onuchic, 1999; Onuchic, Allevato, 2004, 2011; Törner, Schoenfeld, Reiss, 2007; Cai, 2010; English, Sriramann, 2010; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Lester, Cai, 2016; Abramovich, 2019). Nesse cenário, o aluno aparece como ator principal do seu próprio processo de aprendizagem, no qual ele faz intervenções por si só, cabendo ao professor mediar e proporcionar situações que levam o aluno a pensar matematicamente (Silveira; Assis, 2021).

Discutimos algumas abordagens de Resolução de Problemas que foram identificadas na literatura ao longo do tempo, e que ainda estão presentes nas mais variadas salas de aulas de matemática. Contudo, é limitado um estudo que negligencia o estado atual das pesquisas em Resolução de Problemas, isto é, não discorre sobre a abordagem de Proposição de Problemas que, atualmente, vem impulsionando o campo de Resolução de Problemas. No nosso estudo, nos comprometemos a direcionar olhares para este debate que se configura como o estado atual das pesquisas.

3.3 O que é um problema matemático na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas?

Na literatura em Educação Matemática, há diferentes conceituações sobre o que é um problema matemático, que variam de acordo com concepções teóricas adotadas em cada estudo. Por exemplo, há autores que definem um problema matemático quando não se tem um algoritmo de imediato para resolver o problema, outros, além disso, destacam que é preciso que o problema desperte o interesse do indivíduo, para que, assim, se esteja diante de um problema matemático. Contudo, em nossa pesquisa, assumimos o conceito de problema defendido por Andrade (1998, 2017), que enfoca na ideia de que o problema pode despertar o interesse e engajar os alunos na realização de um trabalho efetivo. O autor diz que, “o importante nisso é que as situações ou tarefas que o professor elabora e propõe aos alunos no estatuto de problema precisam ser pensadas de modo que estes possam concretamente assumir tal situação ou tarefa como um problema” (*Ibid*, 2017, p. 363-364).

Nesse contexto, Andrade (2017) ressalta que, na sua proposta, o Problema é entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que:

a) O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução. O problema precisa exigir, da parte do aluno, a realização de um trabalho não-repetitivo, não rotineiro, precisa estabelecer conexão entre o que o aluno já sabe e aquilo que ele ainda não sabe, precisa ser um nó entre o que o aluno sabe e aquilo que ele não sabe;

b) O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo. Esse projeto, essa questão posta, essa tarefa ou a situação dada precisa despertar o interesse do aluno e quando isso não acontece, cabe ao professor iniciar um trabalho de problematização que possa despertar o interesse do aluno pela situação;

c) Se introduz ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo. Nesse ponto, o essencial é que o trabalho seja feito com bastante esforço e dedicação por parte do aluno. Não importa se o aluno tenha conseguido resolver ou não resolver o problema, mas importa o seu trabalho, desde que haja o seu envolvimento efetivo, desde que ele se sinta engajado e o que se espera é que o aluno trabalhe o máximo possível. O que o aluno produziu nesse trabalho pode ser o ponto de partida do caminhar que o professor precisa trilhar com ele. Nesse caminhar, não há um ponto fixo de chegada. A missão do professor é levar o aluno e a turma até o ponto em que eles possam ir e ir cada vez mais (Andrade, 2017, p. 364-365).

Dentre as compreensões de um problema matemático apresentadas por Andrade (2017), ele chama atenção para a última, explicando que, no primeiro momento, não estamos interessados no fato de que o aluno resolva a tarefa ou a questão proposta, mas é importante que a situação ou tarefa proposta possa desencadear no aluno a realização de algum trabalho efetivo, que, num processo de reflexão e síntese, com a mediação-refutação do professor e/ou dos próprios alunos, os estudantes possam, então, ser bem-sucedidos na resolução e solução da tarefa proposta e ir, inclusive, além dela. O que se espera nesse caminhar é que não se limite apenas à busca da solução da tarefa proposta, podendo ir muito além dela. Inclusive, pode até acontecer da tarefa proposta não ser solucionada, porém as discussões em torno dela podem propiciar muitas descobertas. Portanto, o autor explana que concebe a ideia de problema como alguma coisa que não compreende apenas a resolução do problema ou situação-problema, mas a sua exploração em toda a sua multicontextualidade.

Ademais, Van de Walle (2009) salienta que um problema voltado para a aprendizagem da Matemática possui as seguintes características: o problema deve começar onde os alunos estão, o aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender e a aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para respostas e métodos.

Quando se diz que o problema deve começar onde os alunos estão, isso diz respeito às ideias iniciais que os alunos têm para resolver o problema, não perdendo os aspectos desafiantes e interessantes. O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionando à matemática que os alunos vão aprender, tendo como foco dar significado à matemática ao resolver o problema. Por fim, ao se falar sobre a aprendizagem matemática, observa-se as

responsabilidades dos estudantes em validar suas respostas, compreendendo que esse momento é de grande relevância na sistematização do problema.

Por fim, destacamos que as diferentes demandas cognitivas exigidas em um problema matemático podem gerar mais oportunidades de aprendizagem para os nossos alunos. Sobre isso, Cai (2010) explica que os tipos de problemas trabalhados em sala de aula são importantes para envolver os alunos em resolver problemas e aprender Matemática.

3.4 Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas (EPRCDP)

Em sua pesquisa em nível de mestrado, Andrade (1998) teve como propósito principal sugerir uma proposta de Resolução de Problemas com a sala de aula numa perspectiva sócio-político-cultural à luz de uma educação progressista, crítica e libertadora. Nesse contexto, a partir dos estudos feitos sobre a Pedagogia Libertadora de Paulo Freire (que propiciou os fundamentos da Resolução de Problemas à luz de uma perspectiva Educação Crítica), da Psicologia Sócio-Histórica de Vygotsky (que aborda as questões psicológicas, em especial a formação de conceitos científicos na escola) e da Filosofia da Dubitabilidade Matemática de Lakatos (que adotou a visão falibilista, porque ele percebeu que, numa perspectiva de educação crítica, é necessário que se admita a Matemática como um construto social falível ao invés de um conhecimento absoluto), como também de um olhar para estudos de Resolução de Problemas das últimas décadas, além disso, apoiado na experiência com o ensino da Matemática e ancorado por um intenso trabalho de sala de aula, feito com alunos da Educação Básica, e ainda, em entrevistas, seminários/cursos e discussões feitas com professores de matemática, nasceu a proposta, originalmente, intitulada “Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas (RECDP)”, e atualmente vem sendo denominada “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Proposição, Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas (EPRCDP)”.

Assim, durante a elaboração de sua proposta, o autor preocupou-se com o fato de que ela deveria estar apoiada a uma árdua investigação em sala de aula, argumentando que “[...] uma proposta pedagógica precisa estar ancorada num intenso e amplo trabalho de sala de aula, permitindo, assim, ao professor-pesquisador ter uma visão mais abrangente e mais profunda do processo no todo” (Andrade, 2017, p. 362). Para isso, ele se preocupou em observar/olhar e descrever/analisar a sala de aula em seus múltiplos aspectos, entendendo que esse caminhar proporcionará a oportunidade de vivenciar e discutir criticamente e extensivamente o que é uma

sala de aula de matemática via Exploração, Proposição, Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas ou via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas, sendo pensada, sobretudo, em toda sua multicontextualidade.

Por meio da articulação entre teoria e prática, o nascimento da proposta decorre de um movimento não-linear resultante de uma prática intencionalizada, em que “a teoria é a prática refletida, e a prática é a teoria intencionalizada. Dessa forma temos a alegria de dizer que a presente proposta foi desenvolvida na *práxis* concreta da sala de aula de matemática” (Andrade, 2017, p. 361).

Essa proposta também assume que o ensino de Matemática começa sempre com um problema ou situação-problema. “Os estudantes, através de um processo de codificação e descodificação, aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito ou ideia matemática explorando, resolvendo e propondo problemas ou situações-problema” (Andrade, 2017, p. 357). Por sua vez, os conceitos ou ideias nunca são formados apenas a partir de um único problema ou situação-problema, mas carecem de um conjunto de problemas ou situações-problema, além disso, a exploração, a proposição e a resolução de um problema se desenvolve a partir do movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R), no qual o enunciado do problema ou situação-problema traz sempre algo novo a ser explorado no contexto de uma sala de aula e o planejamento do trabalho é sempre aberto, não fechado, embora não solto, possibilitando ganhar vários formatos e explorações ao longo do trabalho desenvolvido entre aluno, aluno-aluno, aluno-professor etc (*Ibid.*, 2017).

A respectiva proposta, também chamada de Exploração de Problemas, compreendendo, aqui, que a proposição e resolução de problemas estão presentes em todo caminhar de exploração de problemas, emerge como uma resposta do autor ao movimento das pesquisas de Resolução de Problemas durante a década 1980. Naquela época, como atualmente, ele já apontava algumas direções que as pesquisas de Resolução Problemas, de modo geral, estavam negligenciando. Assim, o autor chamou a atenção, por exemplo, que os estudos se concentravam apenas para os processos/conceitos matemáticos, deixando de lado questões de natureza sócio-político-cultural.

Assim, enfatizamos que iremos retomar a discussão que enfoca na dimensão sócio-político-cultural no contexto da proposta de Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP), destacando alguns autores que podem nos ajudar a idealizar uma aula de Matemática com foco não apenas em preocupações dentro da própria Matemática, mas para, a partir dela, ver/enxergar o que pode estar implícito ou não numa atividade intencionalizada pelo professor para ser trabalhada abordando seus múltiplos

contextos. Inclusive, vamos discorrer sobre alguns estudos que desenvolvemos focando nesse tipo de abordagem de Resolução de Problemas.

Andrade (1998, 2017) percebeu, também, que as abordagens iniciais de Resolução de Problemas, principalmente as da década de 1980, limitavam-se apenas à busca da solução do problema. Portanto, o processo se limitava apenas à solução do problema, nunca ia além do problema inicialmente dado. Nota-se que isso ainda é uma prática comum em diferentes salas de aulas com foco na metodologia de Resolução de Problemas. A partir daí, o autor apresenta uma proposta de Exploração de Problema, visando dar conta dessa limitação, já que, entre outros pontos, tem-se como orientação teórica/prática ir além da resolução e solução do problema. O pesquisador diz que,

No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez ...” (Andrade, 1998, p. 24).

Andrade (2017) enfatiza um novo modelo em que a **exploração** e a **resolução** de um problema são desenvolvidas a partir de um movimento aberto, não fechado, embora não solto, denominado de **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R)**. Ele explica que, numa aplicação prática desse modelo, inicialmente, é dado ou proposto um problema ou situação-problema, que pode partir tanto do professor quanto dos próprios alunos, esses mesmos alunos realizarão um trabalho sobre ele e, juntos, professor e alunos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e sínteses, chegando, desse modo, possivelmente, à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

Nesse novo modelo, o pesquisador enfatiza a necessidade de inclusão do termo **Resultado**, enquanto na proposta original era apenas **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses**. Em meio às experiências vivenciadas pelo autor, ele enfatiza que o acréscimo da palavra “resultado” define melhor o processo como um todo, entendendo, aqui, o resultado como um refinamento das diversas sínteses desenvolvidas ao longo do processo de uma experiência de exploração de problemas, bem como apresenta a solução do problema como um tipo de resultado. Andrade (2017) destaca ainda que,

A proposta de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas precisa ser sempre percebida como uma proposta aberta, não fechada, embora não solta, para que possamos escutar/ver/olhar o que acontece nas tramas, nos encantos e desencantos, na transfiguração poética, no espaço-tempo, que o cotidiano da sala de aula nos proporciona. O final de uma experiência de Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias. Trabalhar com Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um

sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo (Andrade, 2017, p. 367).

O trabalho em sala de aula, na perspectiva da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, permite que o aluno possa fazer diversas descobertas, como também o levantamento de ideias com o intuito de compreender os conceitos matemáticos que vão aparecendo durante a exploração do problema. Ademais, a exploração de um problema não pode ser vista como fim, mas sob uma perspectiva na qual, em um determinado momento, podemos retornar ao problema anterior, buscando apresentar um novo conceito ou conteúdo em um nível mais avançado ou não (Silveira; Andrade, 2020).

O trabalho de exploração de um problema, em sala de aula, pode sempre ser continuado. O que acontece é que alunos e professor, num determinado momento, param, mas não acabam, definitivamente, de explorar o problema colocado, partindo para outros problemas, podendo, depois, se necessário e oportuno, retornar, se o desejarem, ao problema original. Um mesmo problema pode ser trabalhado, com os alunos, em diversos momentos e em diversos níveis de complexidade e pode também ser trabalhado com alunos de diferentes níveis (Andrade, 1998, p. 179).

Sobre isso, Silveira e Andrade (2020) pontuam que a resolução de um problema não deve ser vista apenas como uma busca de resposta, mas, sim, interessada na compreensão do aluno. Na exploração de um problema, o ponto de partida é o aluno, que está diante de um problema aberto, no qual ele desenvolve sua autonomia, levantando hipóteses, tomando decisões, refletindo sobre o seu fazer e investigando novos problemas que vão surgindo durante a exploração da situação-problema.

Com efeito, para que o professor conduza um ambiente de exploração de problemas é necessário valorizar a criatividade dos alunos e sua autonomia, os incentivando na elaboração dos seus próprios processos/procedimentos de resolução dos problemas, não negando a compreensão apresentada pelos alunos sobre um problema, mesmo que não ajude na sua resolução (Silveira; Assis, 2021), mas entendendo que os diferentes trabalhos em torno da situação-problema podem ampliar as discussões, inclusive com o surgimento de novos problemas.

Nesse contexto, Silveira e Andrade (2020) enfatizam que, nessa abordagem, quando o aluno compreende o problema e suas soluções, cabe ao professor incentivar a exploração de novos problemas a partir do problema inicial, visando uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Ademais, quando o professor está explorando variações do problema que foi apresentado inicialmente, está propondo meios valorosos que levam os alunos a refletir sobre os significados das diversas ideias matemáticas que estão implícitas nos problemas trabalhados.

Silva, A. (2013) ressalta alguns movimentos didáticos que o professor pode adotar, quando operacionaliza a proposta de Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP):

Ir além do problema – no momento em que o professor faz uso do problema, mas extrapola os limites curriculares dele;

Construindo novos problemas – na exploração de uma determinada situação-problema, o professor lança mão de novas situações derivadas da primeira;

Buscando padrões e mediando a aprendizagem – ao trazer situações mediadoras para situações mais complexas, intensificando a aprendizagem do aluno (Silva, A., 2013, p. 21-22, grifos do autor).

No entanto, dentre alguns pontos de divergências, percebe-se que essa proposta difere de outras que encontramos na literatura de Resolução de Problemas, pelo fato de não ter uma receita pronta para operacionalizá-la em sala de aula,

Nessa perspectiva, a Exploração, a Resolução e a Proposição de Problemas se configuram e se reconfiguram no cotidiano da sala de aula, mas não o de uma sala de aula sustentada com bases teóricas fechadas, mas no cotidiano de uma sala de aula que é percebido como uma aventura, uma viagem aberta. No cotidiano da sala de aula não é possível prescrever exatamente como podemos trabalhar com a exploração de problemas. O que temos são apenas ferramentas possíveis de serem ou não usadas na aventura da travessia de um rio ou de uma viagem qualquer (Andrade, 2017, p. 367).

Desse modo, Andrade (2017) argumenta que o seu trabalho em nível de mestrado, como os estudos desenvolvidos pelos seus orientandos do mestrado, além dos episódios de sala de aula reportados nos respectivos trabalhos, teve como propósito relatar as viagens vividas no/com o cotidiano da sala de aula, mas não como um guia que revela exatamente aos leitores como fazer uma viagem de sala de aula em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, em vez disso, os leitores podem desenvolver ferramentas que possam usar nas viagens que realizam ou pretendem realizar via (ou através) Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas.

Por sua vez, a **resolução de problemas**, que decorre desse caminhar, envolve o movimento: Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Solução, como também ela envolve dois aspectos: o processo (**Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses**) e o Produto (**Sínteses-Solução**) e, ainda, uma parte do processo de Exploração de Problemas (Andrade, 2017).

“A uma experiência aberta, não fechada, embora não solta, que caminha a partir do movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Solução (P-T-RS-Solução)** chamamos de uma experiência de **Resolução de Problemas**” (Andrade, 2017, p. 368, grifos do autor). Enquanto “a uma experiência aberta, não fechada, embora não solta, que caminha a partir do movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado** chamamos de uma Experiência de **Exploração de Problemas**” (*Ibid.*, 2017, p. 368, grifos do autor).

Contudo, esse movimento Problemas-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado baseia-se num processo de Codificação e Descodificação. Nesse cenário, a **codificação** e **descodificação** surgem como ferramentas essenciais durante todo o processo de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas (*Ibid*, 2017).

De acordo com Andrade (2017), **codificar** um problema consiste em representá-lo em uma outra forma, outro código, outra linguagem, numa forma mais curta, mais simplificada e mais conveniente. Ademais, a codificação refere-se a todo trabalho de síntese que é desenvolvido em torno de um problema. Ele destaca, ainda, que o próprio problema dado já se constitui num código.

Enquanto **descodificar** um problema consiste em procurar o seu significado, procurando entendê-lo, é decifrar a mensagem que ele expressa e, principalmente, fazer uma análise crítica dessa mensagem. Assim, este trabalho de descodificação refere-se, sobretudo, a toda **análise crítica** que se faz sobre um problema, sobre sua resolução ou sobre cada trabalho feito (Andrade, 2017). Em síntese, o autor explica que,

Quando o aluno busca compreender o problema que lhe é dado e procura representá-lo em um código possível de operacionalização, está fazendo, quase que simultaneamente, um trabalho de descodificação e de codificação. Este trabalho ajuda o aluno a explorar e a resolver esse problema. A codificação e a descodificação podem considerar vários objetivos. A codificação e a descodificação de problemas são ferramentas utilizadas no processo de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas e precisam, sistematicamente, estar presentes em todo o trabalho que se faz em torno dele. A codificação e a descodificação podem ser usadas como ferramentas na compreensão de um dado problema. Em certas ocasiões, o professor pode codificar o problema dado em uma forma que o torne mais compreensivo para os alunos. O professor pode fazer um desenho representativo do problema dado, pode discutir uma determinada parte do problema, etc. As diferentes codificações e descodificações podem ajudar a chegar a uma compreensão mais ampla do problema e podem sugerir diversos caminhos de resolução e indicar novas explorações e novos problemas, sendo que o trabalho feito por um aluno pode ajudar na compreensão do problema por parte de outro aluno e, quando um aluno codifica ou descodifica um problema dado, ele também passa a ter uma melhor compreensão do mesmo (Andrade, 2017, p. 369-370).

Diante da experiência vivenciada com o tema Resolução e Exploração de Problemas, Andrade (2017) enfatiza o caminhar para uma experiência ligeiramente modificada que hoje denomina de Exploração, *Resolução_{exploração}*, *Proposição_{exploração}* e Codificação - Descodificação de Problemas (ERPCDP). Conforme o autor, a nova denominação permite uma melhor compreensão e tomada de consciência do processo como um todo. Ele também destaca que colocar o termo *Resolução_{exploração}* implica numa tomada de consciência, percebendo a resolução como parte integrante e resultante de um caminhar feito num processo de exploração de problemas. Já o termo *Proposição_{exploração}* implica numa tomada de consciência ao perceber a proposição também como parte impactante, integrante e resultante de um caminhar

realizado ao longo de um processo de exploração de problemas.

Silveira (2016) argumenta que a exploração e a proposição de problemas trazem um olhar para além da resolução do problema, uma vez que permitem um olhar investigador e reflexivo dos conceitos que estão sendo trabalhados, tanto matematicamente (abordando processos, conceitos e conteúdos matemáticos), como também para interpretação e compreensão de mundo (questões de natureza sócio-político-cultural). Sobre isso, Andrade (2017) explica que,

Frisamos aqui que a proposição de problemas nesse trabalho é percebida no contexto da Exploração de Problemas e não como um tema em separado, mas, como parte consciente do processo de exploração de problemas, na qual ela é vista como um processo de **problematização**, que ocorre por meio da codificação e da decodificação (Andrade, 2017, p. 389, grifo nosso).

Com isso, percebe-se que o processo de problematização surge como uma alavanca, que faz com que o trabalho de exploração de problemas progrida. No contexto da nossa pesquisa, destacamos que “a problematização baseia-se em perguntas geradoras, feitas pelos alunos ou pelo professor, em processos que levam o aluno a se envolver com novos problemas e, portanto, à realização de novos trabalhos” (Andrade, 1998, p. 30). De modo geral, percebe-se, que “[...] essa problematização é provocada apenas pelo professor, principalmente nos casos em que o processo emperra. A arte do professor consiste em fazer nascer perguntas-problema ou situações-problema” (*Ibid*, 1998, p. 30).

Ampliando essa discussão, nos apoiaremos nas ideias da pesquisadora Domite (2001, n.p, tradução nossa)¹⁴, que nos diz que “problematização é um movimento cognitivo, ainda não claramente delineado, feito para fazer perguntas e encontrar respostas sobre o que se espera que evolua para um problema”. A autora percebe o processo de problematização como ponto de partida para a proposição de problemas. Em convergência a esta perspectiva, Andrade (1998, p. 30) ressalta que “a problematização é o caminho para se chegar ao problema que, se bem formulado, pode desencadear, a partir do movimento P-T-RS, a construção de novos conhecimentos matemáticos”.

Domite (2001) se propôs a mostrar que o ato de fazer perguntas é fundamental para aprender, como também discutir criticamente a visão de que a problematização, a partir de uma situação real, pode ser pensada/idealizada como uma proposta para uma Educação Matemática em que a experiência é usada para desenvolver o conhecimento matemático dos alunos. Em sua tese de doutorado, a autora explica que,

¹⁴ Problematization is a cognitive movement, not yet clearly delineated, made up of a push and pull between the asking of questions and the finding of answers about what is hoped will evolve into a problem.

Ao caracterizar a problematização devemos, sem dúvida, assinalar o binômio inseparável: o **pensar** e o **agir**. Toda **problematização** procede do pensamento e todo pensamento é tornado efetivo a partir da ação. Na verdade, a **problematização** é inseparável da atitude de **perguntar**, ou seja, admite-se o **primado da pergunta**, orientamo-nos dentro de uma **epistemologia da pergunta** (Mendonça, 1993, p. 6, grifos da autora).

Mendonça (1993) explica que no âmbito do seu trabalho, a **problematização** é entendida como:

- um diálogo interno e/ou externo que se instala no educando, quando ele se volta para situações de sua realidade concreta e procura **desinibido** investigá-la;
- um diálogo, a partir da análise instrumental matemático, que facilita a conversão de um problema estudado na sua representação matemática, de modo a analisar problemas análogos, dentre de outros contextos (Mendonça, 1993, p. 23, grifo da autora).

A pesquisadora defende uma abordagem externalista para o ensino-aprendizagem de Matemática. Para ela, neste tipo de abordagem, o professor deve levar em consideração o contexto cultural e social no processo de ensino-aprendizagem de Matemática (Mendonça, 1993; Domite, 2001). Domite (2001) explica que sentiu a necessidade de mudar o foco da discussão da resolução de problemas para a proposição de problemas, ao sugerir e discutir a problematização como meio de alcançar o problema formulado. Essa posição pedagógica surgiu a partir de suas experiências e reflexões. Dentre elas, destacamos:

- O processo de problematização é um movimento produtivo de transformação social, o que significa que as atitudes do professor de matemática podem ampliar a concepção dos alunos sobre sua vida social;
- O objeto de conhecimento pode ser mais ou menos internalizado pelo aluno de acordo com sua necessidade ou interesse. Essa expectativa está ligada à crença de que o conhecimento matemático começa com a pergunta sendo gerada pelo aluno;
- O trabalho pedagógico produzido pelas situações advindas da realidade social dos alunos é uma possível direção criativa que motiva a aprendizagem e o ensino de matemática;
- Como professores de matemática, devemos ser capazes de pensar/argumentar sobre a produção do grupo - em outras palavras, devemos ser capazes de prestar atenção no processo do aluno ao invés de apenas ensinar um conteúdo matemático (Domite, 2001, n.p, tradução nossa).¹⁵

A seguir, iremos ampliar a discussão, que tem como propósito levantar a bandeira de uma abordagem de Resolução de Problema numa perspectiva externalista. Amparados a

¹⁵ - The problematization process is a productive movement towards social transformation, which means that the mathematics teacher's attitudes could expand the students' concept of their social life;

- The object of knowledge can be more or less internalized by the student according to his or her need or interest. This expectation is linked to the belief that mathematical knowledge begins with the question being generated by the learner;

- The pedagogical work produced by the situations that come from students' social reality is a possible creative direction that motivates learning and teaching of mathematics;

- As teachers of mathematics, we must be able to think/argue about the group's production – in other words, we must be able to pay attention on the student's process instead of just teaching a mathematical content.

proposta de Andrade (1998, 2017) e de Gutstein e Peterson (2013), iremos defender que uma aula de Matemática não deve ficar limitada apenas às discussões de cunho cognitivo, mas precisa extrapolar essa perspectiva, com o tratamento de questões em nível sócio-político-cultural.

3.5 Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC)

A abordagem de Resolução de Problemas, operacionalizada no cotidiano de sala de aula na ótica de Andrade (1998, 2017), é pensada numa perspectiva da Educação Matemática Crítica. Com isso, algumas pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP com esse enfoque têm usado os termos: **Exploração Multicontextual Crítica de Problemas (EMC)** ou **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC)**.

Nesse sentido, a Exploração, a Proposição e a Resolução de Problemas, além de serem assumidas como uma metodologia de ensino, são tratadas à luz de uma perspectiva de Educação Progressista, Crítica e Libertadora, de modo que não é olhada apenas no nível de processos e conceitos matemáticos, mas, também, no nível de questões de natureza sócio-político-cultural (Andrade, 2017). Assim,

Essa proposta metodológica, voltada num primeiro momento, para o ensino de matemática, em sua dinâmica, apresenta o conhecimento matemático num diálogo contínuo com os contextos sócio-político-culturais, ou seja, compreende que a Matemática não é um objeto de conhecimento distante das dores e dos sabores das vidas dos envolvidos (professores, estudantes, pais, mães, entre outros) (Silveira; Nascimento, 2023, p. 435).

Desse modo, um episódio de sala de aula à luz desta proposta possibilita uma discussão que abrange não apenas um olhar para a própria Matemática (dimensão cognitiva/internalista), mas, também, um olhar pela e/ou além da Matemática (dimensão externalista). Sobre estas distintas abordagens, Domite (2001) explica que,

[...] uma **abordagem internalista** que vê a matemática como uma forma explicativa clássica composta de uma série de declarações ligadas a conectivos lógicos enraizados na própria matemática, uma **abordagem externalista** à matemática fornece modelos matemáticos e estruturas conceituais que são gerados a partir de fenômenos externos aos sistemas simbólicos do campo. A grosso modo, uma visão externalista reconhece os aspectos socioculturais como os principais fatores da ação pedagógica (Domite, 2001, n.p, tradução nossa, grifos nosso).¹⁶

¹⁶ [...] na internalist approach that views mathematics as a classical explanatory form made up of a series of statements linked to logical connectives rooted in mathematics itself, an externalist approach to mathematics provides mathematical models and conceptual structures that are generated from phenomena external to the symbolic systems of the field. Roughly, an externalist point of view recognizes socio-cultural aspects as the principal factors of pedagogical action.

O estudo de Gutstein e Peterson (2013) trata-se de uma proposta de ensino que enfoca em vermos a Matemática como uma ferramenta para ajudar a tornar o mundo mais igual e justo, isto é, os autores sugerem o uso da Matemática para defender nossos direitos e perceber as injustiças ao nosso redor, por conseguinte, defendem o ensino de Matemática numa perspectiva crítica, permitindo aos alunos entenderem mais claramente suas vidas e seu entorno.

Com isso, pontuamos que, neste estudo, desenvolveremos a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Andrade, 1998; 2017), com foco em uma abordagem de Matemática para Justiça Social (Gutstein; Peterson, 2013), o que nos tem levado a usarmos a denominação **“Exploração-Proposição-Resolução e Resolução de Problemas para Justiça Social”**.

Gutstein e Peterson (2013) apresentam benefícios potenciais dessa abordagem de Justiça Social para a Matemática, a saber,

- Os alunos podem reconhecer o poder da matemática como uma ferramenta analítica essencial para compreender e potencialmente mudar o mundo, em vez de meramente considerar a matemática como uma coleção de regras desconexas a serem memorizadas e regurgitadas remotamente;
- Os alunos podem aprofundar sua compreensão sobre importantes questões sociais, como racismo e sexismo, assim como ecologia e classe social;
- Os alunos podem conectar a matemática com suas próprias histórias culturais e comunitárias e pode apreciar as contribuições que várias culturas e povos fizeram para matemática;
- Os alunos podem compreender seu próprio poder como cidadãos ativos na construção de uma sociedade democrática e se equipar para desempenhar um papel mais ativo nessa sociedade;
- Os alunos podem ficar mais motivados para aprender uma matemática importante. (Gutstein; Peterson, 2013, p. 2, tradução nossa).¹⁷

Nesse sentido, a nossa responsabilidade, enquanto educadores matemáticos, consiste em preparar professores que deem conta da complexidade e multicontextualidade da sala de aula de Matemática, em direção às questões de justiça social que emergem nos dilemas da própria prática e do cotidiano escolar. Esse tipo de abordagem em sala de aula impulsiona a

-
- ¹⁷ Students can recognize the power of mathematics as an essential analytical tool to understand and potentially change the world, rather than merely regarding math as a collection of disconnected rules to be rote memorized and regurgitated;
 - Students can deepen their understanding of important social issues, such as racism and sexism, as well as ecology and social class;
 - Students can connect math with their own cultural and community histories and can appreciate the contributions that various cultures and peoples have made to mathematics;
 - Students can understand their own power as active citizens in building a democratic society and become equipped to play a more active role in that society;
 - Students can become more motivated to learn important mathematics.

compreensão dos alunos sobre a sociedade e os prepara para ser participantes críticos e ativos em uma democracia (Gutstein; Peterson, 2013).

Os alunos que experienciam/vivenciam uma aula de Matemática no contexto da Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas tem a oportunidade de,

[...] explorarem/proporem/resolverem problemas refletindo sobre o conhecimento matemático presente, bem como o diálogo desse conhecimento com outros que não estão necessariamente literalmente presentes no problema, mas são fundamentais para o desvelamento das injustiças sociais (Silveira; Nascimento, 2023, p. 436).

Desse modo, uma aula de Matemática, nessa perspectiva, visa aprofundar a compreensão dos indivíduos sobre a sociedade e prepará-los para serem participantes críticos e ativos, possibilitando-os fazerem intervenções em seu cotidiano. Esse tipo de abordagem nos permite compreender o nível de criticidade dos alunos e ajudá-los a aprofundar os conhecimentos, por meio do debate coletivo, impulsionado pela metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Nela, a Matemática não é problematizada apenas com o foco em determinados conteúdos ou conceitos matemáticos, uma vez que ela pode e precisa ser usada para debater problemas de cunho social e desenvolver a criticidade dos alunos, podendo ambas as temáticas ter o mesmo nível de importância dentro da situação-problema (Silveira; Abreu; Andrade, 2022).

Silva, L. (2013) enaltece essa proposta pelo fato de propiciar um espaço para se pensar em questões que envolvem a interdisciplinaridade (conexões com outras áreas do saber) e a transdisciplinaridade (conexões com atitudes, valores, ética, cidadania). Em vista disto,

[...] extrapolam os muros da escola e podem trazer para a sala de aula de Matemática os problemas do cotidiano que o cidadão e a sociedade estejam enfrentando na sua realidade. Sobretudo na exploração de temas sociais, políticos e culturais que ajudam a formar cidadãos conscientes dos seus direitos e deveres, críticos e reflexivos prontos para exercer plenamente a sua cidadania (Silva, L., 2013, p. 104).

O acesso ao conhecimento matemático possibilita entender diferentes aspectos do funcionamento da sociedade, tais como: orçamento governamental, o impacto de uma guerra, o significado de uma dívida nacional ou os efeitos a longo prazo de uma proposta como a privatização da Previdência Social. Ademais, ajuda a compreender aspectos sociais e ecológicos que podem afetar diretamente as gerações futuras, como, por exemplo, o nível de poluentes na água, ar e solo; e os perigos dos produtos químicos nos alimentos (Gutstein; Peterson, 2013), sendo impossível intervir nesses tipos de questões, *a priori* com a Matemática, como também a partir de sua conexão com outras áreas do conhecimento.

A seguir, descreveremos alguns estudos que temos desenvolvido com foco na proposta de Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC), aliada à abordagem de Matemática para Justiça Social.

O artigo de Silveira, Abreu e Andrade (2022) foi desenvolvido sob a ótica da proposta de “Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC)” e na perspectiva da Matemática para Justiça Social (Gutstein, Peterson, 2013), em que os autores descreveram e analisaram uma oficina que foi ministrada de forma síncrona via *Google Meet*, a partir do tema “Mídias Sociais”, na disciplina “Ensino de Ciências e Educação Matemática Crítica-Pós-Crítica, EPRMC (Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica), Direitos Humanos e Justiça Social”, ofertada pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM), em uma turma de pós-graduação (mestrado e doutorado) no ano de 2021.

Os autores justificam que a escolha da temática se deu pelo fato de terem percebido, a partir de uma imagem compartilhada no *Facebook* por milhares de pessoas, que comparava os preços das barras de chocolates e dos ovos de Páscoa (ambos da mesma marca), o potencial para a discussão de temas que estão diretamente relacionados à transição da modernidade sólida para a modernidade líquida (conceitos trabalhados pelo sociólogo e filósofo Zygmunt Bauman): o consumismo e o capitalismo na sociedade contemporânea. “A campanha educativa no *Facebook* evidencia como se posicionar criticamente nas mídias sociais, promovendo um espaço de reflexão e conscientização de um mundo mais justo e igual por meio da Matemática” (Silveira; Abreu; Andrade, 2022, p. 3). Dentre os problemas propostos, destacamos:

Quadro 2: Alguns problemas propostos

Observando os produtos, em relação à quantidade de gramas de chocolate, o que é mais vantajoso, a barra ou o ovo? E por que eles têm essas diferenças de valor?

Será que a embalagem e a possibilidade do ovo se quebrar corresponde ao aumento de valor na grama do chocolate?

Quais fatores podem levar uma pessoa a optar pelo ovo de Páscoa, mesmo sabendo que sairá em desvantagem no valor a pagar?

Fonte: Silveira, Abreu e Andrade (2022, p. 4)

Os autores explicam que os resultados evidenciaram que os/as problemas/questões propostos/as pelos/as participantes possibilitaram pensar sobre a proposta da atividade em diferentes perspectivas, pois não só contemplava um olhar para a própria Matemática (abordando conceitos/processos matemáticos), mas ressaltava algumas preocupações sobre temas advindos da modernidade líquida (consumismo e capitalismo), que, ao serem sanadas, explicam os interesses e o funcionamento da sociedade.

O artigo de Silveira, Nascimento e Andrade (2023) teve como propósito discutir a proposta de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas na perspectiva da Justiça Social, trazendo, para isso, uma discussão da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas tanto em seus aspectos cognitivos quanto na sua dimensão sócio-político-cultural. Desse modo, os autores discorrem sobre dois cenários de sala de aula compreendendo o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória: o primeiro traz uma situação-problema de Análise Combinatória (clássico problema da formação de casais) que aborda o conteúdo de gênero, no qual é defendida a importância de se pensar a Proposição e a Resolução de Problemas em uma dimensão sócio-cultural-política; no último cenário, é discutido um episódio de sala aula que evidencia como a proposta de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (Andrade, 1998; 2017) potencializou uma aprendizagem com compreensão do conceito de Permutação Simples.

Os autores ressaltam que os dois cenários de sala de aula se distinguem, devido ao primeiro trazer uma reflexão a partir de um olhar externalista para o conhecimento matemático, sobre um padrão social (formação de um casal: homem e mulher e vice-versa) amplamente difundido e/ou reforçado nos nossos livros didáticos de Matemática, como também ainda bem presente em nossa sociedade. Com isso, a discussão possibilitou abordar a situação-problema contemplando toda sua multicontextualidade, ou seja, foi aprofundada em termos de processos e conceitos matemáticos (concepção internalista), abrangendo não só a ideia do Princípio Fundamental da Contagem (olhar recorrente de uma dimensão cognitiva), mas, também, o conceito de Combinação simples (ir além da concepção internalista). Enquanto o segundo cenário, se contentou em refletir sobre a exploração de uma situação-problema que levou à compreensão do conceito de Permutação Simples, ou seja, abrangendo apenas a concepção cognitiva/internalista do conhecimento matemático.

Por fim, eles ressaltam que, dentre os principais resultados evidenciados nos dois cenários, observou-se que:

[...] os alunos desenvolvem múltiplos caminhos, justificativas, engajamentos e processos no trabalho de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas; participando efetivamente da construção do seu conhecimento de Análise Combinatória em múltiplos contextos, cognitivos e sócio-cultural-políticos (Silveira, Nascimento, Andrade, p. 150, 2023).

Ambos os estudos sinalizam como a proposta de “Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC)” problematiza a multicontextualidade e cotidiano da sala de aula de matemática, uma vez que atendeu às questões que envolveram

múltiplos contextos, ampliando, assim, a compreensão da situação-problema como um todo, a partir de um olhar internalista e externalista para o conhecimento matemático. Portanto, nosso interesse é desenvolver uma abordagem que dê conta de questões que podem emergir de uma sala real de matemática, como por exemplo, temáticas como consumismo e capitalismo (Silveira; Abreu; Andrade, 2022); questões de gênero (Silveira; Nascimento; Andrade, 2023). Tais discussões são fruto de múltiplos olhares para o movimento não-linear de um cotidiano de sala de aula que é tocado por tudo que, de fato, ocorre dentro e fora do chão da escola.

3.6 A Proposição de Problemas nas pesquisas

“A Resolução de problemas e a proposição de problemas têm sido de interesse da comunidade de educação matemática” (Liljedahl; Cai, 2021, p. 723, tradução nossa).¹⁸ Por conseguinte, os estudos de Resolução de Problemas têm se intensificado nas últimas décadas, se consolidando, concomitantemente, como campo de pesquisa em Educação Matemática. Nesse percurso, as pesquisas e práticas de Resolução de Problemas avançaram significativamente. O mesmo não ocorreu com a Proposição de Problemas, visto que esta ainda tem recebido pouca atenção nos currículos de Matemática e nas pesquisas em Educação Matemática (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Crespo, 2015; Milinkovic, 2015; Jurado, 2016a, 2016b; Cai, Hwang, 2020).

Contudo, para avançar na pesquisa e na prática de Resolução de Problemas, as pesquisas sugeriram diferentes abordagens, como a Proposição de Problemas (Silver, 1994; Singer, Ellerton, Cai, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Jurado, 2016a, 2016b; Cai, Hwang, 2020; Liljedahl, Cai, 2021), já que “uma maneira de envolver os alunos na resolução de problemas é fazer com que eles formulem e resolvam seus próprios problemas” (Kilpatrick, 1985, p. 12, tradução nossa).¹⁹

Embora nos últimos anos os pesquisadores começaram a prestar mais atenção na Proposição de Problemas como temática de pesquisa e como uma forma de ensinar e aprender Matemática (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Crespo, 2015; Milinkovic, 2015; Singer, Ellerton, Cai, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Cai, Hwang, 2020; Liljedahl, Cai, 2021; Cai, 2022), ainda há muito o que avançar para compreender

¹⁸ Problem solving and problem posing have long been of interest to the mathematics education community.

¹⁹ One way of involving students in problem solving is to have them formulate and solve their own problems.

o impacto de uma aula de Matemática que coloca a responsabilidade do problema advinda do aluno, como também do professor.

Nessa perspectiva, Liljedahl e Cai (2021) apontam que, na Educação Matemática, a Proposição de Problemas, de fato, chamou a atenção da comunidade de educadores matemáticos apenas a partir do início da década de 1980. Entretanto, eles argumentam que aspectos da Proposição de Problemas poderiam ser encontrados nos trabalhos em Educação Matemática antes da década de 1980.

Nesse sentido, a Proposição de Problemas é uma temática antiga. O que, de fato, é novo é a consciência de que ela precisa adentrar os sistemas educacionais ao redor o mundo, tanto como um meio de ensinar (visando envolver os alunos em atividades que promovam uma aprendizagem com compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos) quanto como um objeto de ensino (focando em desenvolver a competência dos alunos em identificar e propor problemas a partir de situações abertas) com foco em importantes situações da vida real (Singer; Ellerton; Cai, 2013).

Percebe-se que a literatura faz referência aos estudos de Brown e Walter (1983), Kilpatrick (1987) e Silver (1994) pelo fato desses autores serem pioneiros, uma vez que situam a Proposição de Problemas como um tema de pesquisa no campo da Educação Matemática, sugerindo algumas estratégias pedagógicas para ajudar a propor problemas, de modo a apresentar a proposição de problema como um meio de ensinar Matemática, apontando algumas razões potenciais para se pensar em uma aula na perspectiva da Proposição de Problemas. Assim, eles chamam atenção a respeito da importância de compreender quais processos cognitivos são mobilizados quando os alunos propõem seus próprios problemas e sugerem questões ricas para futuras pesquisas de Proposição de Problemas.

Nota-se que, após décadas de estudos sobre Proposição de Problemas, sendo intensificado, principalmente, na metade da última década, as preocupações apontadas por esses pesquisadores ainda permanecem intactas e dignas de aprofundamento. Esses estudos tiveram o papel de fomentar a comunidade de Educação Matemática que, timidamente, começaram a perceber que a habilidade de propor problemas merecia mais atenção nas pesquisas e práticas de sala de aula.

Assim, a Proposição de Problemas não deve ser vista apenas como um objetivo de ensino, mas também como um meio de ensinar Matemática. Nesse sentido, a experiência de descobrir e criar os próprios problemas matemáticos deve fazer parte da formação de cada aluno (Kilpatrick, 1987).

Singer, Ellerton e Cai (2013) pontuam que os pesquisadores têm reconhecido que a proposição de problemas é uma parte importante da atividade matemática, ainda que a pesquisa sobre ela não tenha sido o principal foco na pesquisa em Educação Matemática. Além disso, os autores acrescentam que, em suas explorações neste campo crescente de pesquisa em Educação Matemática, esse é o momento de mais análises sistemáticas emergirem para organizar a pesquisa e a teoria da Proposição de Problemas, bem como suas aplicações à prática de ensino.

As pesquisas sobre a Proposição de Problemas Matemáticos (PPM), em especial, aquelas que focaram sobre como aprender e ensinar através da PPM, tiveram um crescimento importante nas últimas décadas, mas, só recentemente, começaram a reunir o conjunto de descobertas (Cai; Hwang, 2020).

Jurado (2016b) pontua que uma questão natural no ensino e aprendizagem de Matemática por meio da resolução de problemas deve-se ao fato de estar restrito a problemas que foram criados por outras pessoas. O autor ressalta que existem problemas muito bons criados por matemáticos e educadores matemáticos e eles podem ser muito úteis para certas circunstâncias de ensino ou aprendizagem. No entanto, cada aluno tem suas peculiaridades, motivações, dificuldades e exigências, bem como seu próprio ambiente sociocultural e seu conjunto de experiências e conhecimentos anteriores.

Kilpatrick (1987) se questiona: “De onde vêm os bons problemas de matemática?”. Para ele, a resposta mais óbvia, inferida por qualquer aluno que concluiu o segundo grau, é que os problemas de matemática vêm de professores e livros didáticos de matemática, ou seja, bons problemas de matemática devem vir de bons professores de matemática e de bons livros didáticos de matemática. Ele ainda argumenta que a compreensão de que os próprios alunos podem ser a fonte de bons problemas de matemática, possivelmente, não ocorreu a muitos alunos, como também a muitos dos seus professores.

Silver (1994) pontua que, na maioria das vezes, os alunos não têm a oportunidade de propor e resolver seus próprios problemas matemáticos. Sobre isso, o pesquisador faz uma crítica ao modelo tradicional de ensino, em que os alunos recebem, passivamente, o conhecimento como resultado do ensino por transmissão. O ensino, nessa perspectiva, colocava a responsabilidade pela proposição de problemas exclusivamente nas mãos de professores e autores de livros didáticos. No entanto, o autor defende o ensino de Matemática numa perspectiva construtivista, que consiste em reconhecer a importância da proposição de problemas gerada pelo aluno, como um componente da atividade educativa.

O fato é que quase todos os problemas matemáticos que um aluno encontra foram propostos e formulados pelo professor ou pelo autor do livro didático (na maioria das vezes,

esses problemas são formulados pelo último), no entanto, na vida real, fora da escola, muitos problemas, senão a maioria, devem ser criados ou descobertos pelo solucionador, que dá ao problema uma formulação inicial (Kilpatrick, 1987).

Jurado (2013a) aponta diferentes potencialidades da Proposição de Problemas com relação à **aprendizagem** de Matemática, ou seja, quando o aluno propõe seus próprios problemas, contribuindo para,

[...] motivar ainda mais o estudo; fortalecer as capacidades de resolução de problemas, fazer perguntas, identificar problemas e investigar; ampliar a visão de matemática (muitas vezes, eles criam problemas cujas soluções requerem conhecimentos matemáticos que ainda não possuem); adquirir uma formação matemática mais sólida (são experiências que vão além de problemas do tipo operacional); ver aspectos matemáticos do ambiente que os rodeia; fazer conexões com outros campos do conhecimento; desenvolve a criatividade; e para fortalecer a autoestima do aluno (suas dúvidas e observações são levadas em consideração e ele verifica que pode propor problemas; aliás, o papel do professor é muito importante) (Jurado, 2013a, p. 130-131, tradução nossa).²⁰

A sociedade atual exige que o indivíduo se adapte rapidamente a situações que exigem suas intervenções. Para tanto, é necessário saber identificar e formular problemas matemáticos que podem contribuir para a tomada de boas decisões (Singer; Ellerton; Cai, 2013).

A realidade é abundante em situações que permitem propor problemas, o que passa por identificá-los e, a partir deles, saber suscitar questões, sendo essas capacidades fundamentais para o desenvolvimento dos nossos alunos. Desse modo, propor problemas matemáticos, a partir de situações reais, contribuirá para uma visão mais analítica da realidade que será útil não apenas no campo da Matemática (Jurado, 2017).

Boavida *et al.* (2008) enfatizam a relevância do trabalho em sala de aula com a Proposição de Problemas ao afirmar que “[...] é uma actividade de importância inquestionável, pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução” (Boavida *et al.*, 2008, p. 27). De acordo com tais autoras, quando o aluno é encorajado a escrever, partilhar e resolver seus próprios problemas, eles são conduzidos a um ambiente de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Além disso, ao propor

²⁰ [...] motivar más el estudio; fortalecer las capacidades de resolver problemas, de formular(se) preguntas, de identificar problemas y de investigar; ampliar la visión de las matemáticas (suele ocurrir que creen problemas cuyas soluciones requieren conocimientos matemáticos que aún no los tienen); adquirir una formación matemática más sólida (son experiencias que van más allá de lo operativo y de los problemas tipo); ver aspectos matemáticos en el medio que los rodea; establecer conexiones con otros campos del conocimiento; desarrollar la creatividad; y a fortalecer la autoestima del alumno (sus preguntas y observaciones son tomadas en cuenta y verifica que puede crear problemas; por cierto, el papel del profesor es muy importante).

problemas, os alunos desenvolvem o pensamento crítico e capacidades de raciocínio, ao mesmo tempo em que aprendem a exprimir suas ideias de modo mais preciso.

Silveira e Andrade (2022) defendem a Proposição de Problemas como um tema que possibilita ampliar os conceitos matemáticos que estão sendo construídos. Eles ressaltam que uma ideia que confirma sua relevância está relacionada ao fato de os alunos deixarem de ser meros expectadores para serem autores em sala de aula. Assim,

Nesse processo, aproxima-se a língua materna e a matemática, as quais se completam na produção de textos e permitem o desenvolvimento da linguagem específica. O aluno deixa de ser um resolvidor para ser um propositos de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas (Chica, 2001, p. 151).

Uma abordagem em sala de aula via Proposição de Problemas dá a oportunidade de os alunos criarem contextos inerentes à sua realidade e comunicarem ideias que permitirão fazer relações entre os afazeres cotidianos e os conceitos matemáticos. Desse modo, algumas pesquisas revelam que, na Proposição de Problemas, o aluno é desafiado a problematizar situações vivenciadas, apresentando e descrevendo suas conexões com o meio social em que está inserido através dos seus conhecimentos cotidianos (Boavida *et al.*, 2008; Singer, Ellerton; Cai, 2013; Jurado, 2016b; Cai, Hwang, 2020; Silveira, 2016; Silveira, Andrade, 2022).

Igualmente, algumas pesquisas apontam e evidenciam que a Proposição de Problemas potencializa a criatividade dos alunos (Silver, 1994; Singer, Ellerton, Cai, 2013; Bonotto, Santo, 2015; Singer, Voica, 2015; Silveira, 2016; Silveira, Andrade, 2022).

Ademais, um ambiente de proposição de problemas possibilita ao aluno desenvolver o controle sobre ideias matemáticas, pensamento crítico e capacidade de raciocínio (Chica, 2001; Boavida *et al.*, 2008; Silveira, 2016).

Ainda, as tarefas de proposição de problemas contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático, possibilitam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, como também impulsionam a capacidade de resolver problemas (Silver, 1994; Boa Vida *et al.*, 2008, Singer, Ellerton, Cai, 2013; Silveira, 2016; Cai, Hwang, 2020; Cai, 2022).

Com isso, incentivar os alunos a proporem problemas, provavelmente, não promoverá apenas a compreensão sobre a matemática incorporada nas tarefas de proposição de problemas, mas, também, estimulará o desenvolvimento de estratégias mais avançadas de resolução de problemas (Zhang; Cai, 2021).

A literatura de pesquisa em Proposição de Problemas também tem chamado atenção de um problema como fonte de novos problemas, por meio de um processo de reformulação de problemas (Kilpatrick, 1987; Crespo, 2015; Carrillo, Cruz, 2016). Uma questão que os professores e pesquisadores podem se debruçar é: se focar a atenção dos alunos para os

processos de reformulação e dando-lhes prática, podemos melhorar seu desempenho na resolução de problemas (Kilpatrick, 1987).

A partir da exploração de um problema, Kilpatrick (1987) propõe que a discussão em sala de aula não deve girar apenas em torno da resolução, que está sendo refinada, mas também da reformulação do próprio problema. Ele sugere dois tipos de reformulação: (1) refinar o modelo matemático que foi construído para uma situação; e (2) apresentar o problema de uma maneira alternativa, que pode levar a um modelo matemático diferente. O autor explica que a questão subjacente em ambos os casos é como a reformulação muda o problema.

Contudo, tomando como ponto de partida os objetivos de aprendizagem esperados para uma aula de Matemática específica, o professor pode selecionar problemas dos livros didáticos e pode reformulá-los, obtendo problemas matemáticos valiosos (Crespo, 2015; Lester, Cai, 2016).

A seguir, iremos discutirmos como a literatura de pesquisa define a Proposição de Problemas.

3.7 Definição de Proposição de Problemas

Encontramos, na literatura de pesquisa, algumas compreensões sobre o que venha a ser a Proposição de Problemas (Silver, 1994; Cai, Hwang, 2020). Silver (1994, p. 19, tradução nossa)²¹ diz que a “Proposição de problemas refere-se tanto à geração de novos problemas, quanto à reformulação dos problemas dados”. Com isso, ele explica que a proposição de problemas em sala de aula pode ocorrer **antes**, **durante** ou **depois** da solução do problema.

No ano de 2017, foi promulgado um documento normativo intitulado “Base Nacional Comum Curricular (BNCC)”, que propõe mudanças no currículo escolar brasileiro. Esse documento recomenda que, no ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental II, os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido (proposição de problemas **depois** da resolução), cabendo ao professor questionar aos alunos o que poderia ocorrer se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto inicialmente.

Percebe-se que as recomendações propostas pela BNCC acerca do trabalho de proposição de problema em sala de aula não estão em consenso com as discussões nas pesquisas referentes ao campo teórico em especial quando se aborda que podem ser ofertadas melhores oportunidades de aprendizagem aos alunos, no momento em que eles são incentivados a

²¹ Problem posing refers to both the generation of new problems and the re-formulation, of given problems.

proporem problemas **antes**, **durante** e **depois** da (re)solução de problemas. De modo geral, as pesquisas têm apontado que o temporal **antes** deve ser o encaminhamento a ser seguido em uma aula de Matemática via Proposição de Problemas (Silver, 1994; Singer, Ellerton, Cai, 2013; Cai *et al.*, (2015); Crespo, 2015; Milinković, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Andrade, 2017; Cai, Hwang, 2020; Silveira, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, 2023).

De acordo com Cai e Hwang (2020, p. 2, tradução nossa)²², a Proposição de Problemas Matemáticos (PPM) é um “[...] processo de formular e expressar um problema dentro do domínio da matemática”. Os autores ainda nos dizem que:

Por proposição de problemas na educação matemática, nos referimos a vários tipos de atividades relacionadas que envolvem ou apoiam professores e alunos formulando (ou reformulando) e na expressão de um problema ou tarefa com base em um contexto particular (ao qual nos referimos como o contexto do problema ou situação-problema) (Cai; Hwang, 2020, p. 2, tradução nossa).²³

Sobre isso, Cai e Hwang (2020) esclarecem como eles interpretam os termos *problema* e *tarefa* de forma ampla, incluindo, aqui, qualquer questão matemática que possa ser feita e qualquer tarefa matemática que possa ser executada com base na situação-problema. Com relação ao termo *contexto*, ele é interpretado de forma ampla, com a intencionalidade de incluir situações dentro da Matemática que dão origem a novas questões, bem como situações extraídas (ou embutidas) em referentes externos, como fenômenos da vida real e questões que surgem de outras disciplinas. Outro fator que merece destaque é que, durante a implementação do/da problema/tarefa, os professores e alunos estão engajados na proposição de problemas, em que o problema proposto pelos professores não é, necessariamente, o mesmo problema proposto pelos alunos, seja na sua intenção, seja na sua execução.

Ademais, eles ainda explicam que sua estrutura de definição se concentra em vários aspectos diferentes da Proposição de Problemas na Educação Matemática, uma vez que cada um deles tem implicações para as oportunidades de aprendizagem que uma tarefa de proposição de problemas pode oferecer. Em resumo, Cai e Hwang (2020) explicam sua estrutura de definição da PPM separando os tipos de atividades intelectuais formuladas de acordo com o nível matemático e experiência dos propositores de problemas,

Para os alunos, definimos PPM como consistindo nas seguintes atividades intelectuais específicas: (a) Os alunos propõem problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou

²² [...] process of formulating and expressing a problem within the domain of mathematics.

²³ By problem posing in mathematics education, we refer to several related types of activity that entail or support teachers and students formulating (or reformulating) and expressing a problem or task based on a particular context (which we refer to as the *problem context* or *problem situation*).

diagramas, e (b) os alunos propõem problemas alterando (ou seja, reformulando) os problemas existentes (Cai; Hwang, p. 3, tradução nossa, grifo nosso).²⁴

Para os professores, definimos PPM como consistindo nas seguintes atividades intelectuais específicas: (a) Os próprios professores propõem problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas, (b) os professores prevêm os tipos de problemas que os alunos podem propor com base em determinadas situações problemas, (c) os professores propõem problemas ao alterar os problemas existentes, (d) os professores geram situações de proposição de problemas matemáticos para os alunos proporem problemas e (e) os professores propõem problemas matemáticos para os alunos resolverem (Cai; Hwang, 2020, p. 3, tradução nossa, grifo nosso).²⁵

Em síntese, esta definição sinaliza o quão é importante, *a priori*, os professores vivenciarem um ambiente de proposição de problemas – propondo e reformulando problemas para os alunos resolverem; prevendo problemas que os alunos podem propor a partir de uma determinada situação; e gerando situações de proposição de problemas que sirvam como ponto de partida para os alunos proporem problemas. Com isso, defendemos a necessidade de a Proposição de Problemas adentrar os cursos de Licenciatura em Matemática e na Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática.

3.8 O Trabalho em grupo na Proposição de Problemas

Um ponto que claramente carece de mais pesquisas no âmbito da temática de Proposição de Problemas é entender como as discussões em grupo pode potencializar o processo de proposição de problemas. O trabalho em grupo pode mobilizar diferentes níveis de discussões entre os alunos, uma vez que impulsiona o trabalho bem-sucedido de proposição de problemas (Kilpatrick, 1987; Silveira, 2016; Silveira; Andrade, 2022; Cai *et al.*, 2022) e cabe ao professor conduzir e orientar diferentes discursos que emergem no caminhar de proposição dos problemas.

O professor vai orientar, durante todo o processo, partindo das ideias que os alunos têm, de tal forma que ele possa contribuir, com a sua criatividade, levantando hipótese, questionando, fazendo relações entre conceitos matemáticos e problemas que foram já discutidos (Silveira, 2016, p. 61).

A dinâmica do trabalho em grupo parece fornecer um contexto natural para a proposição de problemas. Isso ocorre porque, quando os alunos trabalham juntos, eles, geralmente,

²⁴ For students, we define MPP as consisting of the following specific intellectual activities: (a) Students pose mathematical problems based on given problem situations which may include mathematical expressions or diagrams, and (b) students pose problems by changing (i.e., reformulating) existing problems.

²⁵ For teachers, we define MPP as consisting of the following specific intellectual activities: (a) Teachers themselves pose mathematical problems based on given problem situations which may include mathematical expressions or diagrams, (b) teachers predict the kinds of problems that students can pose based on given problem situations, (c) teachers pose problems by changing existing problems, (d) teachers generate mathematical problem-posing situations for students to pose problems, and (e) teachers pose mathematical problems for students to solve.

identificam problemas que não seriam percebidos se estivessem trabalhando sozinhos. Assim, uma ideia mal formulada, levantada por um aluno, pode ser perdida no grupo e reformulada para gerar um problema frutífero. Nesse contexto, os alunos participam de um diálogo com outros que reflete o tipo de diálogo interno que bons propositores de problemas parecem ter consigo mesmos (Kilpatrick, 1987), sinalizando que a construção do conhecimento matemático pode ser fruto de uma conquista coletiva.

Silveira (2016) e Silveira e Andrade (2022) notaram que, durante o trabalho colaborativo, os alunos se mobilizavam na construção de suas ideias e defendiam, debatendo e refletindo sobre suas produções, para chegar, enfim, a um consenso sobre o que fizeram. Ademais, a cooperação entre cada grupo propiciou o planejamento de ações que contribuíram para a proposição do problema.

Assim, os alunos precisam de tempo para refletir sobre o processo de proposição de problemas, além da necessidade de desenvolverem uma linguagem para falar uns com os outros e com o professor. Desse modo, comparada a uma aula amparada a uma discussão teórica, uma aula organizada para que os alunos possam trabalhar juntos, focando em investigações matemáticas parece fornecer um contexto mais rico para a reflexão e o desenvolvimento da linguagem e argumentação matemática (Kilpatrick, 1987).

A seguir, iremos trazer algumas discussões que advogam sobre as oportunidades de aprendizagem que o professor propicia aos seus alunos quando propõe problemas para suas aulas de Matemática.

3.9 A Proposição de Problemas na formação do professor que ensinam Matemática

Em meados da década de 1990, os pesquisadores em Educação Matemática começam a prestar atenção na proposição de problemas advinda dos alunos, trazendo um olhar para a relação entre habilidades de resolução e proposição de problemas. Nos anos 2000, os pesquisadores começaram a se concentrar na proposição de problemas advinda do professor e como isso possibilita oportunidades de aprendizagem para os alunos (Crespo, 2015).

Os estudos sobre Proposição de Problemas evidenciam que os alunos de todas as idades, incluindo, aqui, aqueles que mais tarde se tornam professores, apresentam experiências limitadas com relação à tarefa de propor seus próprios problemas (Crespo; Sinclair, 2008).

“Os professores devem ser capazes de propor problemas matemáticos importantes e valiosos para usar o PPM de forma eficaz, como uma ferramenta pedagógica para compreender o pensamento matemático de seus alunos” (Cai; Hwang, 2020, p. 4, tradução nossa).²⁶

Ellerton (2015) percebe que as pesquisas têm dada pouca atenção para uma abordagem holística sobre a Proposição de Problemas Matemáticos, que visa envolver os professores em formação inicial e em exercício na proposição ativa de problemas; que oportuniza o planejamento e a reflexão sobre os problemas propostos, criticando e avaliando os próprios problemas, como também compartilhando e discutindo soluções para os problemas propostos com seus pares. Desse modo, as atividades de proposição de problemas que fazem parte de uma abordagem holística tornam esses professores (tanto prospectivos quanto praticantes) conscientes das ligações entre a Resolução de Problemas e a Proposição Problemas, contribuindo não só para a sua própria aprendizagem de Matemática, mas, também, para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas que usarão com seus próprios (ou seus futuros) alunos.

Milinković (2015) se questiona sobre a importância de os educadores matemáticos estudarem a Proposição de Problemas; se é importante para os professores; e se é uma atividade que também vale a pena para os alunos. Para dar conta da primeira indagação, ela nota que uma nova questão emerge, sendo necessário refletir se o professor pode decidir autonomamente que conjunto de problemas dar aos alunos, como também quando usar um determinado problema ou em que ordem apresentar os problemas aos alunos. Sobre isso, a autora diz que espera que os professores aprendam não apenas a propor problemas, mas também saber como e quando usá-los, em que ordem e como apresentá-los. Na segunda questão, ela enfatiza duas boas razões: a primeira é que, na vida real, os alunos não se deparam com tarefas de livros didáticos, mas, sim, com situações mais ou menos complexas; e a última decorre do fato de que formular um problema implica em uma compreensão do conteúdo da matéria.

Assim, a tarefa de propor problemas para as suas aulas de Matemática se apresenta como uma atividade mais complexa para os professores do que para os alunos, sobretudo porque as responsabilidades dos mesmos são ainda maiores, visto que devem refletir não só a partir de perspectivas matemáticas do problema formulado, mas também olhar através de perspectivas pedagógicas (Crespo; Sinclair, 2008). Desse modo, o próprio professor pode refletir sobre os problemas que eles formulam para suas aulas de Matemática: está difícil ou fácil? Qual foi o

²⁶ Teachers must be able to pose important and worthwhile mathematical problems to use MPP effectively as a pedagogical tool for understanding their students' mathematical thinking.

nível de envolvimento dos alunos? Possibilitou abordar os conceitos e conteúdos matemáticos previamente estabelecidos para a aula? Ajudou a acessar o processo de pensamento dos alunos? É necessário reformular? Como engajar seus alunos numa tarefa de proposição de problemas? São questões que emergem durante um olhar reflexivo para a própria prática docente, quando abraçamos um trabalho em sala de aula via Proposição de Problemas.

O que se percebe é que há um certo distanciamento entre os problemas propostos pelos professores em sala de aula (a grande maioria retirados dos livros didáticos ou da *internet*) e os problemas que os alunos se deparam no seu cotidiano. Por esse fato é que a questão tão temida pelos professores emerge durante uma aula de Matemática: “Por que preciso aprender isso?”. Percebemos um potencial da Proposição de Problemas como um meio de superar/minimizar essa preocupação dos alunos, sobretudo, no que tange ao reconhecimento de conexões existentes entre os conceitos matemáticos e os conhecimentos dos alunos, adquiridos em sua vivência cotidiana e no chão da escola e que podem ser moldados a partir da exposição de anseios, desejos e preocupações que carecem de reflexões, não só a partir da Matemática, mas também de outras áreas do conhecimento.

Desse modo, percebendo a Proposição de Problemas como um tema emergente no campo da Educação Matemática e da literatura de Resolução de Problemas, aumenta-se a responsabilidade do professor em uma aula de Matemática, pois, de modo geral, os professores reproduzem exercícios e problemas dos livros didáticos ou de sites de *internet*, sem ligação alguma com a realidade social dos seus alunos.

Assim, observa-se que na literatura, os pesquisadores chamam atenção para práticas engessadas e duradouras, que são legitimadas, uma vez que os problemas propostos pelos professores aos seus alunos, na maioria das vezes, são retirados dos livros didáticos (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Crespo, Sinclair, 2008; Milinković, 2015; Ellerton, 2015).

Além do mais, mesmo sendo teoricamente correto envolver os alunos em atividades de proposição de problemas com o propósito de compreender e melhorar seu aprendizado de matemática, observa-se que os materiais curriculares e livros didáticos atuais, normalmente, não trazem tarefas de proposição de problemas. Com isso, atualmente, o apoio aos professores para ensinar Matemática via Proposição de Problemas é, portanto, insuficiente, carecendo, assim, de pesquisas para entender mais sobre suas implicações na prática real de sala de aula (Zhang; Cai, 2021).

Acrescentamos, ainda, outro paradigma a ser vencido: se, por um lado, a maioria dos professores não se aventuram em formular problemas para as suas aulas de Matemática, por outro, não dão a oportunidade de os alunos proporem seus próprios problemas. Nesse contexto,

a Proposição de Problemas deve ser pensada em dois vieses: como uma possibilidade pedagógica para o ensino de Matemática e como uma forma de perceber como os alunos aprendem Matemática.

Contudo, se, por um lado, defendemos que a Proposição de Problemas deve ser o ponto de partida de uma aula de Matemática, por outro, há uma preocupação sobre a preparação dos professores e futuros professores para conduzirem uma experiência de Proposição de Problemas no cotidiano de sala de aula.

Há um interesse dos pesquisadores em ajudar os professores a aprenderem a usar a Proposição de Problemas de maneira eficaz. Entretanto, ainda não sabemos muito sobre o ensino via Proposição de Problemas Matemáticos (PPM) e como os professores podem aprender a fazer isso de maneira mais eficaz (Cai; Hwang, 2020).

Cai (2022) aponta alguns desafios que precisam ser direcionados aos professores para que eles aprendam a ensinar via Proposição de Problemas: (1) a escassez de tarefas de proposição de problemas em materiais curriculares; e (2) a adesão dos professores ao ensino de Matemática via Proposição de Problemas, que, naturalmente, vão se deparar com a dificuldade de implementá-la em sala de aula.

Ademais, há poucas pesquisas que dedicaram-se a ajudar os professores a ensinarem via Proposição de Problemas. Cai (2022) desenvolve um projeto que envolve professores de matemática, com o propósito de aprender a ensinar via Proposição de Problemas. Ele ressalta que esse projeto foi concebido com o objetivo de superar os desafios citados anteriormente. Nele, foram desenvolvidas três estratégias que foram identificadas na literatura de Proposição de Problemas, visando melhorar a integração da Proposição de Problemas no Currículo escolar de Matemática:

- Capacitar professores, de tal forma, que eles sejam capazes de reinterpretar os materiais curriculares existentes e remodelá-los de maneiras simples para criar tarefas matemáticas de proposição de problemas que possibilitem maior e mais oportunidades de aprendizado;
- Enfocar na melhora dos currículos existentes com tarefas adicionais de proposição de problemas, incluindo apoio na forma de amostra de problemas propostos;
- Incentivar os alunos a propor variações de um problema, ou seja, propor novos problemas tomando como base problemas existentes, variando parâmetros ou contextos dos aspectos do problema original (Cai, 2022).

O estudo de Zhang e Cai (2021) buscou compreender o ensino da Matemática via Proposição de Problemas a partir da análise de 22 casos de ensino desenvolvidos por 68

professores. Essa pesquisa forneceu *insights* que ajudam a entender como pode ocorrer o ensino de Matemática via Proposição de Problemas: o professor precisa selecionar/elaborar tarefas de ensino apropriadas – o ensino de Matemática, nessa perspectiva, começa com tarefas de proposição de problemas; e o professor precisa lidar com os problemas propostos pelos alunos em sala de aula, seja aqueles que foram antecipados (neste caso, a proposição de problemas é vista como meio de entender o pensamento matemáticos dos alunos), como também os que não foram previstos.

Os casos de ensino também precisam incluir informações sobre o pensamento por trás das grandes decisões de ensino que precisam ser tomadas, bem como reflexões e discussões sobre essas decisões. Por sua vez, o desenvolvimento de casos de ensino precisa ser baseado em casos reais, que surgem da implementação de lições de ensino em sala de aula. Contudo, o professor, normalmente, ao planejar uma aula, gerando um caso de ensino, precisa incluir explicações sobre os problemas antecipados que os alunos podem propor. Entretanto, os professores não lidam apenas com os problemas que eles conseguiram antecipar, mas também com aqueles que não foram previstos. É importante ressaltar que estes problemas imprevistos se tornam um material potencial para o caso de ensino (Cai, 2022).

Com isso, além de selecionar/formular tarefas de proposição de problemas para o ensino em sala de aula, outro aspecto essencial ao ensinar Matemática via Proposição de Problemas é a forma como os professores lidam com os problemas propostos pelos alunos. Nesse sentido, os alunos irão propor seus próprios problemas e a forma como os professores lidam com estes problemas torna-se um aspecto crítico do ensino via Proposição de Problemas, pois pode moldar o efeito da proposição de problemas na aula (*Ibid.*, 2022).

Cai (2022) argumenta que há pelo menos três desafios quando os professores se deparam com os problemas propostos pelos alunos: (1) alguns dos alunos podem propor problemas que não sejam matemáticos; (2) alguns dos alunos podem propor problemas que não estão relacionados aos objetivos de aprendizagem da aula, embora sejam problemas matemáticos interessantes; e (3) a natureza dos problemas propostos, isto é, as tarefas de proposição de problemas são muito abertas, uma vez que os alunos podem propor uma variedade de problemas com base em suas próprias experiências, e essa variedade de problemas pode dificultar a tomada de decisão sobre como lidar com os problemas propostos.

Em contrapartida, os professores, além de lidar com os problemas propostos, precisam usar estes problemas para entender o pensamento dos alunos. De fato, um dos benefícios potenciais de trabalhar com a Proposição de Problemas nas aulas de Matemática é a capacidade das tarefas de proposição de problemas revelarem informações úteis sobre o pensamento

matemático dos alunos. Assim, quanto mais informações os professores tiverem sobre o que os seus alunos sabem e pensam, mais dados eles terão para direcionar esforços a fim de criar oportunidades efetivas de aprendizagem para todos os seus alunos. Em suma, o conhecimento dos professores sobre o pensamento dos seus alunos tem um impacto importante em seu ensino em sala de aula e, ou seja, na aprendizagem dos alunos (*Ibid.*, 2022).

Zhang e Cai (2021) defende que, devido à eficácia do uso dos casos de ensino, são necessários mais esforços para acumular casos de ensino na proposição de problemas. Com o sucesso na implementação dos casos de ensino, os professores podem aprender a ensinar Matemática usando a Proposição de Problemas. Ademais, o acúmulo de casos de ensino possibilitará explorar múltiplos padrões de discurso para lidar com os problemas propostos pelos alunos, como também identificar quais padrões de discurso são mais eficazes no ensino de Matemática via Proposição de Problemas.

Na literatura encontramos diferentes estudos que focaram na formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática, objetivando desenvolver habilidades e competências dos professores e futuros professores, atribuindo a eles a responsabilidade de propor problemas para as suas aulas de Matemática (Crespo; Sinclair, 2008; Jurado, 2013a, 2017; Crespo, 2015; Ellerton, 2015; Zhang; Cai, 2021).

Ellerton (2015) advoga que a Proposição de Problemas precisa ser incluída como um componente integral do Currículo de Matemática, devendo ser experienciada pelos futuros professores, isto é, eles devem torná-la parte integrante do Currículo de Matemática de seus alunos. Por sua vez, as experiências que esses professores em potencial adquirem ao propor problemas matemáticos devem fornecer um modelo para eles usarem em suas próprias escolas e salas de aula de matemática.

Em contrapartida, engajar os professores em formação inicial em uma experiência de Proposição de Problemas não é uma questão de unicamente solicitá-los que proponham seus próprios problemas, uma vez que, enquanto estudantes de matemática, geralmente, eles tiveram poucas oportunidades de propor seus próprios problemas, em vez disso a prática mais frequente consiste em resolver problemas propostos pelo professor, sendo, na maioria das vezes, problemas retirados dos livros didáticos (Crespo; Sinclair, 2008).

Em convergência ao que foi exposto anteriormente, as autoras argumentam que é de suma importância que os professores vivenciem experiências matemáticas semelhantes às que pretendem proporcionar aos seus alunos. Ademais, elas ainda acrescentam a necessidade de tornar a proposição de problema uma temática que precisa manter um diálogo estreito com a formação de professores, devido ao seu papel central nas salas de aula de matemática.

Entretanto, não é apenas importante que os professores em formação inicial compreendam a relevância de se engajar na prática de proposição de problemas matemáticos, mas, também, que eles próprios se tornem propositores de problemas competentes e consistentes (Ellerton, 2015).

Jurado (2013a) descreve diversas razões didáticas que evidenciam o potencial da Proposição de Problemas no **ensino**, ou seja, quando o professor propõe seus próprios problemas, contribui para,

[...] propor problemas próximos das motivações dos alunos e aos contextos em que vivem; propor uma sequência de problemas de dificuldade gradual que levam a um problema particularmente importante; propor problemas que coletam as iniciativas, percepções ou dúvidas dos alunos, que contribuem para esclarecer ou expandir suas ideias, diante do desafio de solucionar problemas ou compreender matemática (isso fortalece muito uma dinâmica de aprendizagem por descoberta); [...] fortalecer a capacidade de pesquisa dos professores; melhorar a qualidade de avaliações; e consolidar a formação matemática de professores (Jurado, 2013a, p. 130)²⁷.

O professor tem papel relevante no trabalho com a Proposição de Problemas. Para Chica (2001), as primeiras propostas devem ser planejadas com muito cuidado, uma vez que os alunos demonstram dificuldades em realizar tal tarefa por estarem acostumadas a somente resolver problemas.

A seguir, vamos discorrer sobre algumas abordagens de Proposição de Problemas que os professores em formação inicial e/ou continuada podem operacionalizar em suas aulas de Matemática.

3.10 Abordagens de Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática

Ao adentrar a literatura, nota-se que algumas pesquisas têm se concentrado na proposição de problemas advindas do professor (Crespo, Sinclair, 2008; Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Crespo, 2015; Milinković, 2015; Cai, 2022). Esses pesquisadores descrevem algumas abordagens que podem potencializar o desenvolvimento de competências dos professores na formação inicial e continuada, quando eles são colocados em uma experiência de Proposição de Problemas. Posteriormente, discorreremos sobre essas diferentes abordagens de Proposição de

²⁷ [...] proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los alumnos y a los contextos en los que viven; crear secuencias de problemas de dificultad gradual que lleven a un problema particularmente importante; proponer problemas que recojan las iniciativas, percepciones o interrogantes de los alumnos, que contribuyan a aclarar o ampliar sus ideas, ante el reto de resolver problemas o de comprender temas de matemáticas (esto fortalece mucho una dinámica de aprendizaje por descubrimiento); [...] fortalecer la capacidad de investigación de los profesores; mejorar la calidad de las evaluaciones; y a consolidar la formación matemática de los profesores.

Problemas trabalhadas por esses pesquisadores, para ajudar os professores a planejarem e operacionalizarem uma aula de Matemática via Proposição de Problemas.

A hipótese levantada por Crespo e Sinclair (2008) para elaboração da sua perspectiva de Proposição de Problemas é que a falta de exploração antes e durante o processo de geração de problemas matemáticos pode acarretar na formulação de problemas mal formulados, triviais e não interessantes, tanto por parte dos alunos, quanto dos professores. Nesse contexto, elas desenvolveram um estudo para testar se a exploração antes da proposição do problema melhoraria os tipos de problemas propostos pelos futuros professores de matemática, totalizando 22 participantes, que cursavam o quarto ano de um programa de preparação de professores.

Para fazer isso, elas dividiram a turma, em que a metade dos professores ficaram incumbidos de explorar a situação matemática dada, antes de propor um problema, enquanto para a outra metade solicitou-se que propusessem problemas sem explorar a situação, a partir das primeiras impressões sobre a tarefa. Por meio de um esquema adotado pelas autoras para avaliar a qualidade dos problemas propostos, foi observado que o grupo que explorou a situação antes de propor o problema obteve mais sucesso ao gerar problemas que exigiam mais raciocínio. “Isso sugere que o processo de exploração os levou a problemas pedagogicamente mais ricos, embora os vissem como matematicamente interessantes. Isso não deveria ser surpreendente” (Crespo; Sinclair, 2008, p. 405, tradução nossa).²⁸

O que, de fato, ocorreu, foi que explorar a situação primeiro levou os futuros professores a obterem uma melhor noção sobre quais tipos de problemas seriam triviais ou irrespondíveis (ou muito abertos). Sendo assim, problemas óbvios não exigiriam exploração e, desse modo, não surgiriam de seu envolvimento inicial com a situação-geradora de problemas. Isso sinaliza que o processo de exploração contribuiu, de forma efetiva, para a formulação e qualidade dos problemas (Crespo; Sinclair, 2008).

Através das experiências desenvolvidas em sala de aula e oficinas em diferentes níveis de ensino, Jurado (2013a) pontua que desenvolver a capacidade de formular problemas, para os alunos e professores, é contribuir para o desenvolvimento da capacidade de fazer (a si mesmo) perguntas e identificar problemas e, dessa maneira, estimulá-los à pesquisa.

É essencial que nossos alunos aprendam matemática não só resolvendo, mas também propondo problemas. Contudo, é de suma importância que os professores desenvolvam a

²⁸ This suggests that the process of exploration led them to pedagogically richer problems, even though they saw them as being mathematically interesting.

capacidade de propor problemas matemáticos, de forma a orientar adequadamente o desenvolvimento dessa habilidade em nossos alunos (Jurado, 2017).

Jurado (2013a) apresenta duas estratégias que podem ajudar os professores a proporem problemas em suas aulas: **Variação de um do problema** e **Elaboração de um problema**. O pesquisador explica que, para desenvolver sua perspectiva sobre Proposição de Problemas, é necessário perceber quatros elementos essenciais de um problema: informação, requisito, contexto e ambiente matemático.

Jurado (2013a, 2013b, 2017) esclarece que as **informações** são compostas por dados quantitativos que são fornecidos no problema; os **requisitos** são os que se pedem para ser encontrados, examinados ou concluídos, que podem ser quantitativos ou qualitativos, incluindo gráficos e demonstrações; o **contexto**, geralmente, é chamado de "problema contextualizado", está relacionado com alguma situação real, à vida cotidiana, assim, o contexto pode ser formal ou estritamente matemático, ou seja, intra-matemático (o problema está confinado à matemática) ou extra-matemático (o problema está ligado a uma situação real); e, por fim, o **ambiente matemático** refere-se aos conceitos matemáticos que intervêm ou podem intervir para resolver o problema.

Assim sendo, Jurado (2013a) define a **Variação de um problema** como um processo no qual um novo problema é formulado, modificando um ou mais elementos de um determinado problema, enquanto a **Elaboração de um problema** é um processo segundo o qual se formula um novo problema partindo de uma situação específica.

Crespo (2015) descreve três experiências de Proposição de Problemas que podem ajudar os professores e futuros professores a ampliarem sua visão profissional e prática de ensino de Matemática, elas consistem em aprender a: **(a) propor, conscientemente, problemas aos alunos; (b) envolver-se em propor problemas com os alunos; e (c) propor problemas matemáticos pessoais e socialmente relevantes.**

A pesquisadora explica que a primeira experiência tem como finalidade envolver os futuros professores na seleção, análise e adaptação de problemas matemáticos de livros didáticos, ajudando-os a reconhecer diferenças no contexto, conteúdo e qualidade das tarefas matemáticas. Uma experiência de ensino de Matemática nessa perspectiva possibilita aos professores em formação inicial aprenderem critérios não apenas para julgar a qualidade instrucional de problemas matemáticos, mas, também, aprender a usar esses critérios para identificar tarefas matemáticas como altas ou baixas e reformular os problemas de maneiras que aumentem sua qualidade instrucional.

Crespo (2015) pontua, ainda, que envolver-se em propor problemas com os alunos consiste em dar oportunidade para os futuros professores experimentarem os problemas de matemática, que eles mesmos selecionaram e adaptaram, a fim de aprender com os alunos suas perspectivas sobre o que constitui um bom problema de matemática. Sobre essa estratégia de proposição de problemas, ela enfatiza que ofereceu uma dessas oportunidades ao envolver futuros professores em uma troca interativa de cartas com os alunos da quarta série. A pesquisadora esclarece que, através dessa experiência interativa de proposição e resolução de problemas, os professores em potencial tiveram a oportunidade de praticar a seleção, adaptação e apresentação de tarefas para os alunos e de ler o trabalho matemático real dos alunos e o *feedback* sobre esses problemas. Crespo (2015) diz que,

Os futuros professores tiveram, então, a melhor condição para compreender a qualidade instrucional e o potencial de suas tarefas propostas. Além disso, essa experiência de propor o problema, deu aos futuros professores oportunidades de aprender com seus alunos como apresentar problemas e também vê-los como criadores de problemas, uma vez que os alunos da quarta série criaram ou selecionaram problemas de matemática em suas cartas para que os futuros professores também os resolvessem (Crespo, 2015, p. 502, tradução nossa).²⁹

A pesquisadora enfatiza que o mais importante foi que os futuros professores experimentaram, em primeira mão, o poder de compartilhar a Matemática com autoridade aos seus alunos e que problemas matemáticos podem ser gerados por eles e seus alunos, em vez de se limitar a proposições apenas do livro de Matemática.

As duas experiências de Proposição de Problemas, apresentadas anteriormente, preparam os futuros professores para pensar pedagogicamente sobre os problemas matemáticos, ou seja, que tipos de problemas são bons para os alunos, qual é o valor instrucional ou demanda cognitiva das tarefas que podemos oferecer aos nossos alunos (Crespo, 2015).

Ademais, foram exploradas maneiras de apoiar as próprias explorações pessoais dos futuros professores em seus problemas matemáticos. Essa exploração incluiu a pergunta: "O que torna os problemas matematicamente interessantes?", como também leva em consideração as conexões entre a Matemática e o mundo fora da escola, especialmente maneiras em que a Matemática pode ser usada para influenciar a opinião pública, para distorcer a verdade e estudar questões sociais que têm consequências reais, como questões de (in)justiça social que ecoa em nossa sociedade (Crespo, 2015).

²⁹ The prospective teachers were then in a better position to understand the instructional quality and potential of their posed tasks. In addition, this posing experience gave prospective teachers opportunities to learn from their students how to pose problems and to see them as problem posers too, since the fourth graders created or selected mathematics problems in their letters for the prospective teachers to solve as well.

Sendo assim, na última experiência de Proposição de Problemas, Crespo (2015) ressalta que trabalhou em um projeto de proposição de problemas que buscava tornar explícito o papel que a Matemática podia desempenhar na abordagem de problemas fora da escola, como questões com desigualdades e lutas de poder entre interesses públicos e privados e entre grupos privilegiados e oprimidos. Ela ressalta que se inspirou na obra de Gutstein e Peterson (2005), intitulada: *Rethinking Mathematics* (Repensando a Matemática), que ajudou a mesma a explorar “[...] maneiras de envolver os futuros professores na proposição de problemas que tenham relevância social, em particular problemas relacionados às vidas e comunidades de seus jovens alunos, bem como às escolas onde eles ensinam” (Crespo, 2015, p. 506, tradução nossa).³⁰

Crespo (2015) destaca que o ensino de Matemática através dessa experiência de proposição de problemas dá conta da temida pergunta dos alunos: "Por que eu preciso saber disso?"

Porque a maioria dos alunos em geral muitas vezes questiona a utilidade da matemática quando a experimentam de forma desconectada dos acontecimentos do mundo real - o que está nas notícias e o que é falado fora da sala de aula de matemática - parece que esse tipo de projeto alternativo de proposição de problemas pode ser bem recebido e abraçado pela maioria dos futuros professores [...]. (Crespo, 2015, p. 506, tradução nossa).³¹

O estudo de Milinković (2015) teve como objetivo delinear uma abordagem para desenvolver a proficiência dos professores em propor problemas por meio de transformações. “Transformar um problema em um novo significa que alguns (um ou mais) dos elementos do espaço do problema serão alterados enquanto os outros permanecem os mesmos” (Milinković, 2015, p. 53, tradução nossa).³²

Assim, os problemas podem ser transformados de modo que reflitam na mudança da estrutura matemática. Desse modo, ela explica que um novo problema pode ser proposto, mudando: (a) o que é dado - correspondem às respostas às perguntas de Polya; (b) o que é procurado (desconhecido) - as relações entre os elementos (dados e desconhecidos) também fazem parte das "condições" de Polya ou (c) o contexto - pode ser abstrato ou realista.

³⁰ [...] ways to engage prospective teachers in posing problems that have social relevance, in particular problems that are related to their young students' lives and communities, as well as to the schools where they teach.

³¹ Because most students in general often question the usefulness of mathematics when they experience it as disconnected from real world happenings—what is in the news and what is talked about outside the mathematics classroom—it would seem that this kind of alternative problem-posing project would be welcomed and embraced by most prospective teachers [...].

³² Transforming a problem into a new one means that some (one or more) of the elements of the problem space are changed while the others remain the same.

Com relação à proposição de problemas por meio da transformação de representação, ela defende que um elemento importante da competência matemática envolve a compreensão das relações entre as diferentes representações (gráfica, tabular, verbal, dentre outras). Sendo assim, a autora propõe uma abordagem representacional na ótica da Proposição de Problemas, e explica que diferentes tipos de representações podem fornecer bons contextos para definir um espaço de problemas, como também podemos considerar as transformações de um para outro. Milinković (2015) ressalta que as representações múltiplas podem ajudar no desenvolvimento da flexibilidade de raciocínio, como também aprofundar a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos. Acrescentamos, ainda, que a transição entre as diferentes representações pode fornecer um ambiente propício para a transformação dos problemas via representação.

A pesquisadora discute uma série de exemplos de problemas criados por transformações dentro do mesmo contexto e propõe três estratégias para a Proposição de problemas: (a) transformar problemas com menos parâmetros (mais simples) em problemas com mais (normalmente, mais complicados) parâmetros (“números difíceis”); (b) transformar problemas adicionando novos parâmetros; e, por último, (c) transformar problemas removendo algumas condições.

Por sua vez, o problema transformado pode ser mais ou menos difícil do que o problema inicial, como também pode não ter solução. Mas isso é resultado do conhecimento do professor sobre o assunto ou da falta dele (Milinković, 2015). Sobre isso, ela chama atenção que a ligação entre saber matemática (conhecimento de conteúdo) e saber como propor problemas (conhecimento pedagógico) de um professor precisam ser explorados.

Por fim, a pesquisadora ressalta que a abordagem de Proposição de Problemas via transformação potencializa os futuros professores com meios valiosos para ajudar seus alunos a aprenderem Matemática. “Para o professor, é tão importante ser flexível e capaz de adaptar problemas em novos problemas, quanto reconhecer o valor particular de cada exemplo” (Milinković, 2015, p. 67, tradução nossa).³³

Por fim, nota-se que anos de dedicação em pesquisas sobre Proposição de Problemas possibilitou ao pesquisador Cai (2022) elaborar um modelo de ensino centrado na Aprendizagem Baseada na Proposição de Problemas (A-BPP). Esse modelo instrucional

³³ For the teacher, it is just as important to become flexible and to be able to adapt problems into new ones as it is to recognize the value of each particular example.

descreve etapas para discutir uma tarefa de proposição de problemas para ensinar Matemática, isto é, desenvolvê-la para promover o aprendizado de matemática dos alunos. O autor propõe as seguintes etapas: (1) o professor apresenta uma situação-problema aos alunos; (2) o professor fornece ao aluno um *prompt* (comando) de problema junto com a situação-problema; (3) os alunos devem propor problemas individualmente ou em grupo; e (4) os professores têm a incumbência de lidar com os problemas propostos com base nos objetivos de aprendizagem para os alunos resolverem os problemas selecionados.

De acordo com o autor, a primeira e a segunda etapas são, geralmente, apresentadas juntas. No modelo, ele separou essas etapas propositalmente, visando mostrar a importância de considerar ambas as situações e *prompts* durante o planejamento do ensino via Proposição de Problemas.

A segunda etapa consiste em especificar o número e os níveis de dificuldade dos problemas que serão propostos, como também o professor pode usar *prompts* para motivar a proposição dos problemas dos alunos, tais como: propor problemas matemáticos que desafiassem seus colegas de classe ou professores de matemática; ou propor problemas matemáticos que envolvem porcentagens (Cai, 2022).

Na terceira etapa, os alunos se envolvem na Proposição dos Problemas. Para isso, são geradas oportunidades para eles trabalharem em tarefas de proposição de problemas, individualmente ou em grupo. Contudo, alunos precisam entender uma situação de proposição de problemas e o *prompt* antes que eles possam, de fato, propor problemas (Ibid., 2022).

A última etapa envolve maneiras de lidar com os problemas propostos durante o ensino. De fato, propor problemas é uma atividade que fomenta a aprendizagem dos alunos, contanto que essa aprendizagem seja reforçada através da resolução de alguns dos problemas propostos, ou seja, resolvendo alguns dos problemas propostos, gera-se oportunidades adicionais de aprendizagem para os estudantes. Para essa etapa, são propostas quatro práticas instrucionais possíveis: analisar, selecionar, sequenciar e resolver. Deste modo, enquanto os alunos dedicam um tempo a uma tarefa de proposição de problemas, na terceira etapa, o professor pode monitorar seu progresso e propor problemas para facilitar sua análise posterior, selecionar, sequenciar e promover resoluções práticas (Ibid., 2022).

3.10.1 Reflexões sobre as abordagens de Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática

Agora, apontaremos pontos de encontros e desencontros das distintas abordagens de Proposição de Problemas discorridas anteriormente. Acrescenta-se a essa análise a abordagem de Proposição de Problemas trabalhada por nós - a proposta de **“Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas”** (Andrade, 1998; 2017).

A perspectiva de Proposição de Problemas trabalhada por Crespo e Sinclair (2008) apresenta pontos de encontros com a proposta de Andrade (1998, 2017), uma vez que ambos percebem a necessidade de promover um processo de problematização em torno da tarefa de proposição de problemas, para que se tenha uma compreensão sobre os caminhos e possibilidades de explorações que podem apresentar um panorama rico em termos de ideias e contextos matemáticos, sobretudo com foco nos diferentes trabalhos realizados pelos propositores de problemas, decorridos, principalmente, de um processo de decodificação da tarefa que possibilita aos alunos decifrarem a situação como todo, vendo até o que muitos não viram, inclusive, possivelmente, um propositor de problemas mais experiente (professor).

Os estudos de Jurado (2013a, 2013b, 2017) e Milinković (2015) convergem, principalmente, pelo fato de os pesquisadores elencarem estratégias prescritivas para propor problemas. Chamamos atenção para a necessidade de refletirmos sobre esses tipos de esquemas para gerar problemas, pois, quando não incorporados de forma consciente, podem se tornar apenas um jogo de gerar novos problemas, que não impulsionam pensar sobre a ideia matemática inerente ao problema, não havendo um grau de criatividade, visto que é apenas uma cópia do problema original, ou seja, exige o mesmo procedimento matemático para resolução do problema.

Notamos que um ponto de divergência dessas abordagens de Proposição de Problemas é que, durante a implementação da proposta de Jurado (2013a, 2013b, 2017), não há uma preocupação explícita em formular uma sequência de problemas que possa dar conta de um conceito mais complexo, e sim está interessado na habilidade de modificar algum elemento de um problema inicial e gerar um novo problema, deixando a encargo dos professores e alunos a possibilidade de gerar o conjunto de problemas que possibilite pensar numa ideia matemática com profundidade. Contudo, este processo está bem explícito na proposta de Milinković (2015).

As propostas de Proposição de Problemas trabalhadas por Andrade (1998, 2017) e Milinković (2015) se aproximam pelo fato de ambos argumentarem que um conceito é

construído e/ou compreendido a partir de um/uma conjunto/sequência de problemas. Nesse sentido, observa-se que, durante a operacionalização de uma aula na perspectiva desses autores, há um descontentamento em parar na proposição e solução do problema. Assim, são propostos vários problemas, modificando algum elemento do espaço do problema (Milinković, 2015) ou a partir de um processo de problematização, novos problemas vão surgindo conscientemente à medida que a exploração de uma atividade vai sendo aprofundada e/ou refinada (Andrade, 1998; 2017).

Andrade (1998, 2017) e Crespo (2015) avançam, quando propõem abordagens de Proposição de Problemas que compreendem a dimensão sócio-político-cultural (visão externalista) para o conhecimento matemático. Nesse sentido, os/as problemas/questões formulados/as possibilitaram pensar sobre a proposta de tarefa em diferentes perspectivas, pois não só contempla um olhar para a natureza dos conceitos matemáticos (visão cognitiva/internalista), mas ressalta algumas preocupações sobre temas sociais relevantes, que, ao ser sanadas, possibilita intervir e compreender o funcionamento de diferentes aspectos da nossa sociedade.

Cai (2022) propõe um modelo instrucional baseado em quatro etapas, que apresenta pontos de encontros com os estudos de Jurado (2013a, 2013b, 2017) e Milinković (2015), uma vez que, na segunda etapa, o professor precisa fornecer ao aluno *prompts* – comandos que devem ser realizados, visando transformar o espaço da situação-problema, isto é, modificando o que é dado/informações, o que é procurado/requisitado ou o contexto. Ademais, ambas as propostas têm o potencial de abordar um conceito ou conteúdo matemático a partir da proposição de um conjunto/sequência de problemas.

Sobre isso, observamos que o modelo proposto por Cai (2022) apresenta convergência com os estudos de Crespo e Sinclair (2008) e Crespo (2015), pelo fato das autoras proporem a necessidade de criar critérios para analisar e classificar a qualidade dos problemas propostos. Assim, na quarta etapa proposta por Cai (2022), é atribuído ao professor a responsabilidade de lidar com os problemas propostos pelos alunos. Para isso, sob a orientação do professor, os próprios alunos podem analisar e classificar os problemas, surgindo, assim, a elaboração de algumas categorias, que possibilitem determinar a relevância dos problemas para o objetivo de ensino e o nível de dificuldades deles. Ademais, o professor pode selecionar os problemas que serão resolvidos, a partir dos dois aspectos citados anteriormente, como também os alunos podem opinar sobre os problemas que devem ser discutidos. Por fim, o professor deverá sequenciar os problemas, visando à resolução dos problemas selecionados. Para isso,

defendemos que a escolha da ordem dos problemas precisa potencializar a construção de um conceito e/ou conteúdo matemático.

Ressaltamos ainda, que a proposta de Cai (2022) segue um modelo prescritivo, munido de algumas etapas que precisam ser seguidas pelo professor para orquestrar uma aula de Matemática via Proposição de Problemas. Notamos que este é um ponto de divergência com a perspectiva de Proposição de Problemas trabalhada por Andrade (1998, 2017). Nesse sentido, a proposta deste autor se caracteriza por ser aberta, assim, juntos, professor e alunos, experienciam um mergulho no desconhecido (embora com um certo grau de intencionalidade do professor), em que etapas não dão conta desta viagem aberta, sendo preciso, portanto, movimentos didáticos que vão sendo incorporadas à prática do professor que se aventura em uma aula de Matemática via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

Os estudos analisados evidenciaram que a Proposição de Problemas pode ocorrer **antes** do processo de resolução e solução do problema, quando se toma como ponto de partida alguma situação que tem um potencial para a proposição de problemas matemáticos (Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Cai, 2022), por meio das transformações de diferentes representações (Milinković, 2015), tomando como referência alguma tarefa de proposição de problemas, que possui o potencial para o surgimento de questões/problemas que envolvem temas que possuem relevância social, que podem ser pensadas/abordadas a partir da Matemática, como através de outros campos do conhecimento (Crespo, 2015) e por meio de *prompts* (comandos), que direciona os que alunos devem fazer na tarefa de proposição de problemas (Cai, 2022).

Pode ocorrer, também, **durante** e **depois** do processo de resolução e solução do problema, através das sucessivas reformulações do problema inicial (Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Milinković, 2015), reformulações de problemas dos livros didáticos (Crespo, 2015) e durante a análise e classificação dos problemas, possivelmente, alguns deles podem não estar claros, sendo necessário reformulá-los (Cai, 2022).

Sobre isso, Kilpatrick (1987) explica que os próprios problemas podem ser a fonte de novos problemas. Ele nota que há duas fases no processo de solução, durante as quais novos problemas podem ser criados. Assim, à medida que um modelo matemático está sendo construído para um problema, o solucionador pode alterar, intencionalmente, algumas ou todas as condições do problema para ver qual novo problema pode resultar (a proposição de problemas ocorre durante o processo de resolução do problema). Ademais, depois que um problema foi resolvido, o solucionador pode olhar para trás para ver como a solução pode ser afetada por várias modificações no problema (a proposição de problemas ocorre depois do processo de resolução do problema).

Ademais, a proposição de problemas ainda pode ocorrer tanto antes, como durante e depois do processo de resolução e exploração de problema (Andrade, 1998; 2017).

Por fim, advogamos que as diferentes abordagens de Proposição de Problemas apresentadas aqui, quando operacionalizadas, individualmente ou combinadas, oferecem aos futuros professores, professores em exercício e pesquisadores em Educação Matemática possibilidades de proporem problemas conscientemente aos seus alunos. Por sua vez, a autorreflexão sobre a própria prática docente, de forma crítica, pode promover um impacto na formação do professor que ensina Matemática, pelo fato de o mesmo não sentir mais tanta dependência dos livros didáticos e de *sites de internet*, pois vivenciar/experienciar um ambiente de proposição de problemas pode qualificá-lo, enquanto propositor de problemas. Além disso, os professores vão se sentir mais seguros, para conduzir uma aula que transfere a responsabilidade da proposição do problema para o aluno.

4 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

4.1 Metodologia da pesquisa

Observando as pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP, desenvolveremos um caminho metodológico para a pesquisa realizada. O nosso estudo analisou quais as possibilidades das pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na prática pedagógica.

Assim, a nossa pesquisa se situa numa abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. Na pesquisa qualitativa, o pesquisador é a peça central para captar dados descritivos e atribuir significados, buscando identificar diferentes concepções e perspectivas dos participantes sobre o objeto de estudo em foco. Sobre a pesquisa qualitativa, Minayo (2010, p. 21) diz que, “[...] ela trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes”.

Na literatura, há autores que elencam características das investigações qualitativas que se assemelham, a saber: na investigação qualitativa, a fonte direta para a coleta de dados é o ambiente natural, sendo o investigador/pesquisador o instrumento principal/chave; a investigação qualitativa se caracteriza como descritiva; há um interesse maior pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; há uma tendência em analisar os dados produzidos de forma indutiva; a atribuição de significado aos dados é o foco principal de uma abordagem qualitativa (Bogdan, Biklen, 1994; Prodanov, Freitas, 2013).

Assim, destacamos que o ambiente natural da nossa pesquisa foi um curso de Formação Continuada de professores que ensinam Matemática, desenvolvido na Escola Municipal de Ensino Fundamental localizada no município de Alagoinha/PB, sendo este o instrumento principal para levantamento dos dados, cabendo a nós elaborar atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, aplicá-las, observar, descrever e analisar o que nos pode dizer uma prática pedagógica em Exploração-Proposição-Resolução de Problemas via Narrativas Matemáticas.

Enfatizamos, ainda, que os dados coletados são descritivos, tal como transcrições de registros de áudios, notas de campo, registros dos materiais impressos utilizados pelos sujeitos da pesquisa, resoluções na lousa e observações da prática vivenciada.

O nosso interesse é priorizar a qualidade dos procedimentos/processos, que podem sinalizar o nível de desempenho dos professores, e não simplesmente focar nos resultados.

Com relação à análise dos dados de forma indutiva, nos apoiamos em nosso quadro teórico que nos guia acerca do levantamento e análise dos dados, buscando o entrelaçamento

entre teoria e prática, no nosso caso, acerca do impacto da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação do professor que ensina Matemática.

Por fim, buscamos compreender como os professores que ensinam Matemática se sentiram tocados pela proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, atribuindo significados para os seus discursos, concepções e o trabalho realizado durante o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas.

4.2 Descrição das etapas e sujeitos da pesquisa

Na etapa de delimitação de sujeitos, trabalhamos com dois grupos distintos: membros do GEPEP que desenvolveram pesquisas em sala de aula com o tema Resolução de Problemas e professores que ensinam Matemática em formação continuada.

Assim, a princípio, foi realizada uma pesquisa documental por meio da qual foram consultadas e analisadas dissertações dos membros do GEPEP que desenvolveram um trabalho com a metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula na perspectiva de Andrade (1998, 2017). “A pesquisa documental apresenta algumas vantagens por ser ‘fonte rica e estável de dados’: não implica altos custos, não exige contato com os sujeitos da pesquisa e possibilita uma leitura aprofundada das fontes” (Gil, 2002, p. 62-63).

Desse modo, analisamos 13 dissertações de mestrado desenvolvidas no período de 2013 a 2020 pelos membros do GEPEP. Adotamos como elementos de descrição: principal objetivo do estudo, sujeitos da pesquisa, a metodologia de ensino-aprendizagem utilizada, conteúdos e conceitos matemáticos em foco e os resultados mais relevantes. Posteriormente, elucidamos algumas categorias de análise, a saber: (i) Construção e compreensão de conceitos matemáticos, e indo além do processo de resolver e propor problemas; (ii) Dimensão sócio-político-cultural; (iii) A Proposição de Problemas em sala de aula; e (iv) Formação de professores que ensinam Matemática.

Para a pesquisa de campo, elegemos como sujeitos do estudo professores que ensinam Matemática em formação continuada. Para isso, desenvolvemos um curso, a partir da parceria com a Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e o município de Alagoinha-PB. No entanto, convidamos professores de Matemática que lecionam em outros municípios, em escolas estaduais da Paraíba e numa escola estadual do Rio Grande do Norte. Veja o quadro 3, a seguir, com o perfil dos sujeitos da pesquisa:

Quadro 3: Perfil dos sujeitos da pesquisa

Professores	Gênero: M/F³⁴	Município e/ou estado que leciona	Formação acadêmica	Modalidade de ensino que atua³⁵
P1	F	-----	Pedagogia	-----
P2	M	Estado do Rio Grande do Norte – Serra de São Bento	Matemática	Ensino Médio
P3	M	Alagoinha-PB	Letras e graduando em Matemática	Ensino Fundamental II
P4	M	Alagoinha-PB e Estado da Paraíba – Juarez Távora	Matemática	Ensino Fundamental II e Médio
P5	M	-----	Matemática	-----
P6	M	Alagoinha-PB	Bacharelado em Ciências Contábeis	Ensino Fundamental II
P7	M	Estado da Paraíba – Pilõeszinhos	Matemática	Ensino Médio
P8	M	Estado da Paraíba – Guarabira	Matemática	Ensino Médio
P9	F	Juarez Távora-PB	Matemática	Ensino Fundamental II
P10	M	Alagoinha-PB	Matemática e Geografia	Ensino Fundamental II
P11	M	Estado da Paraíba – Alagoinha	Matemática	Ensino Médio
P12	M	Alagoinha-PB	Matemática	Ensino Fundamental II e Educação de Jovens e Adultos (EJA)
P13	M	Pilões-PB e Estado da Paraíba – Alagoinha	Matemática e Geografia	Ensino Fundamental II e Educação de Jovens e Adultos (EJA)
P14	M	Estado da Paraíba – Alagoinha	Matemática	Ensino Médio

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

No entanto, além dos professores que lecionavam Matemática no município de Alagoinha-PB, no ano letivo de 2023, deixamos o convite aberto para professores(as) que tivessem interesse em participar do curso. Assim, percebe-se o quanto à docência em Matemática é, ainda, hegemonicamente, atrelada ao gênero masculino.

Dessa forma, cinco professores ministram aulas na escola municipal de Alagoinha-PB; seis professores lecionam em escolas estaduais da Paraíba (levando em consideração dois professores que ministram aulas em escolas municipais: Alagoinha-PB e Pilões-PB), sendo três deles em Alagoinha-PB; uma professora leciona no município de Juarez Távora-PB; um professor leciona no município de Pilões-PB; um professor leciona no Estado do Rio Grande do Norte (Serra de São Bento) e dois professores não estavam exercendo a docência na época do desenvolvimento da pesquisa. Com relação à formação acadêmica, observa-se que três dos

³⁴ Legenda: M – masculino e F – feminino.

³⁵ Considerando o ano de 2023.

quatorze professores não possuem formação em Matemática, nos quais dois deles lecionam na escola municipal de Alagoinha-PB, sendo que um deles cursa Licenciatura em Matemática, além disso, temos uma pedagoga que demonstrou interesse em participar do curso, visando aperfeiçoar sua formação. Por fim, dois professores possuem mais de uma graduação (Matemática e Geografia). Ressaltamos, ainda, que esses professores atuam no Ensino Fundamental II, Ensino Médio e na Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Portanto, justificamos que o uso do termo “professores que ensinam Matemática” decorre devido ao fato de que alguns professores que participaram do curso não possuíam uma formação acadêmica em Matemática (P1, P3 e P6), como vimos no quadro 3.

4.3 Metodologia do Produto Educacional - atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas

Entendemos que o Produto Educacional precisa andar lado a lado com cada etapa que compõe a pesquisa. Desse modo, elencamos como percebemos as contribuições de cada etapa da pesquisa e sua associação com o nosso Produto Educacional – (atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas), sendo esta uma construção que se dá antes, durante e pós-pesquisa. Isso implica dizer que o Produto Educacional precisa ser uma elaboração conjunta: professor-pesquisador e sujeitos da pesquisa.

A seguir, elencamos as etapas da pesquisa que contribuíram para a elaboração do nosso Produto Educacional, desde a sua concepção, durante sua aplicação e pós-aplicação.

Na etapa dedicada a situar nosso estudo no campo de pesquisa, elucidamos o foco das atuais pesquisas em Resolução de Problemas (a Proposição de Problemas) e sugerimos a dimensão sócio-político-cultural (direção futura das pesquisas) como uma alternativa para continuar avançando nas pesquisas e práticas de Resolução de Problemas, sendo estes dois aspectos relevantes da nossa pesquisa, que foram vinculados às atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas. Ademais, percebemos a necessidade de as abordagens atuais de Resolução de Problemas alcançarem professores que ensinam Matemática em formação continuada, com o propósito de compreender o impacto de uma sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Na etapa do mapeamento das pesquisas, investigamos as possibilidades das pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP acerca da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no cotidiano de sala de aula; buscamos compreender o que essas pesquisas nos dizem acerca de uma sala de aula de matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas;

e, a partir das pesquisas desenvolvidas em sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, elucidamos movimentos didáticos que nos auxiliaram a desenvolver um curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática por meio de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas de Matemáticas. Para aprofundar a nossa compreensão acerca da proposta **“Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas”**, sentimos necessidade de analisar notas de aulas (análises de atividades desenvolvidas em uma turma de pós-graduação), que nos evidenciam movimentos e facetas da operacionalização desta proposta desenvolvida pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade, “pai” da proposta. Tais empreitadas culminaram na elaboração de alguns encaminhamentos para discutir as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas em um curso para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática.

Com o propósito de testar sua funcionalidade, as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas passaram por um processo de simulação de pré-validação junto aos participantes do GEPEP, o que nos possibilitou uma avaliação inicial de sua adequação e potencial para: abordar problemas que desencadeassem a construção e apresentação de conteúdos e conceitos matemáticos; gerar um debate que privilegie o tratamento de questões que contemplem aspectos sócio-político-culturais, a partir de um olhar com e/ou sem os números; utilizar de recursos que possam potencializar a aplicação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, surgindo no, âmbito da discussão, o uso da calculadora gráfica *Desmos* como uma ferramenta de investigação e um ambiente propício para o desenvolvimento de um caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas; perceber o pleno acesso à *internet* como uma ferramenta de pesquisa de novos acontecimentos que podem enriquecer o enredo de cada Narrativa Matemática, de tal modo que impulse o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas; gerar problemas que envolviam conteúdos e conceitos matemáticos que tínhamos antecipados (prática intencionalizada), bem como problemas que não conseguimos antecipar.

Com relação às limitações, sugere-se que, durante a aplicação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática **“Jogo de Sueca”**, sejam expostas as regras do jogo, para que os professores possam explorar, propor e resolver problemas; explicar o significado de alguns termos, tal como: **“tirar abelha”** e **“postura”**, caso haja dúvidas.

Na etapa de levantamento de dados da pesquisa de campo, desenvolvemos um curso de Formação Continuada para Professores que ensinam Matemática, intitulado “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social**”.

Nesta etapa, os dados foram levantados por meio das observações, notas de campo do professor-pesquisador, resoluções na lousa e registros dos materiais impressos utilizados pelos professores durante o processo de exploração, proposição e resolução de problemas. Decidimos fazer uso de gravações de áudio com o intuito de coletar e captar o máximo possível de dados que pudessem trazer maior clareza diante do que se propôs a investigar.

Com isso, para aprofundar a análise dos dados, descrevemos e refletimos acerca de diálogos reais entre professor-pesquisador e professor(es) e professor e professor(es). Ressaltamos, ainda, que, para preservar a identidade dos professores, os denotamos em ordem alfabética por: P1, P2, P3, P4,..., P14, enquanto nós, professor-pesquisador, por PP.

A metodologia de ensino-aprendizagem escolhida para trabalhar com os professores que ensinam Matemática foi a de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Andrade, 1998, 2017), dando uma atenção especial à Proposição de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas; e à dimensão sócio-político-cultural. Para este enfoque, adotamos abordagem de Matemática para Justiça Social (Gutstein, Peterson, 2013).

O curso foi desenvolvido em 13 encontros, sendo que os 12 primeiros tiveram a duração de 3h cada, e o último, 4h, totalizando 40h, distribuídas em **três movimentos**, a saber: **Movimento α** : Coloque suas curiosidades e reflexões em forma de problemas, explore-os e os resolva; **Movimento β** : Selecione um problema para ser explorado e reescreva/reformule o problema do colega – refinamento/aprofundamento dos problemas; e **Movimento γ** : Acrescente ou modifique uma “fala” dos personagens das Narrativas Matemáticas – refinando/aprofundando as Narrativas Matemáticas.

Nesta etapa, trabalhamos atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, visando abordar conteúdos e conceitos matemáticos amplamente discutidos nas pesquisas do GEPEP, tais como: ideias essenciais de Análise Combinatória, Sistemas Lineares, ideias essenciais de Funções, Equações do 1º grau, Taxa Percentual, Aumentos e Descontos Sucessivos, Razão, Proporção e significados de Frações. Entretanto, durante a intervenção, tivemos que lidar com outros conteúdos e conceitos matemáticos que surgiram no caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas. No quadro a seguir, apresentamos uma síntese de conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser abordados com as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas:

Quadro 4 – Conteúdos e conceitos matemáticos trabalhados com as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas

Narrativa Matemática	Conteúdos e conceitos matemáticos
Jogo de Sueca	- Combinação Simples - Permutação Circular - Princípio Fundamental da Contagem (PFC) - Soma dos termos de Progressão Aritmética (P.A) - Equações do 2º grau - Operações fundamentais - Sistemas Lineares
Um “exame de problemas”	- Razão entre duas grandezas - Velocidade Média - Taxa Percentual - Aumentos e Descontos Sucessivos - Ideias essenciais de Funções - Progressão Aritmética (PA) - Sequências numéricas
Mercado de problemas	- Significados de Frações - Transição entre as diferentes Representações de um Número Racional - Ideias essenciais de Funções - Resolução de Equações do 1º Grau - Transição entre as Representações Múltiplas de Equações Álgebra - Operações fundamentais
A crise hídrica – um problema mundial	- Ideias essenciais de Funções - Significados de Frações - Taxa Percentual - Regra de três simples - Conversão de unidades: m^3 para litros e vice-versa
Qual é o preço justo? (Episódio vivenciado por Andrade)	- Taxa percentual - Descontos - Proporção - Operações fundamentais

	- Transição entre as diferentes Representações de um Número Racional

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Com relação às discussões de cunho sócio-político-cultural, as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas abordam com/sem os números diferentes temas que podem ser debatidos nas salas de aulas de matemática, a saber: a (in)justiça em apostas de jogos esportivos, bem como os mecanismos de sedução que afloram o desejo de realizar apostas; questões emergentes que afetam as gerações futuras, como: o impacto do desaparecimento das abelhas para humanidade e o consumo de água potável e sua má distribuição como uma questão de direitos humanos; questões sobre o racismo; e debates que envolvem temáticas ligadas à sociedade contemporânea, decorrentes da transição da modernidade sólida para a modernidade líquida: o consumismo e o capitalismo. Logo a seguir, apresentamos um quadro que contempla discussões sociais que podem ser enfocadas com essas atividades:

Quadro 5 – Questões de cunho sócio-político-cultural trabalhadas com as Narrativas Matemáticas

Narrativa Matemática	Temas sociais
Jogo de Sueca	Discussões envolvendo questões de (in)justiça em apostas esportivas e mecanismos de sedução.
Um “enxame de problemas”	O desaparecimento das abelhas e seu impacto para a humanidade.
Mercado de problemas	O debate sobre o racismo; e as implicações do consumismo e o capitalismo na sociedade contemporânea.
A crise hídrica – um problema mundial	Intensificar o debate acerca da crise hídrica como um problema mundial emergente.
Qual é o preço justo? (Episódio vivenciado por Andrade)	Discutir questões de (in)justiça social com os números

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Com relação à dimensão pedagógica, discutimos, a partir das reflexões desencadeadas pelo processo de explorar, propor e resolver problemas, o entrelaçamento entre teoria e prática. A seguir, elencamos facetas e movimentos da ação pedagógica que nortearam a nossa intervenção frente aos professores, como também discursos que solicitávamos dos professores com o propósito de ajudar a elucidar o que nos dizem uma sala de aula de matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, bem como o potencial da implementação de Narrativas Matemáticas por meio desta metodologia de ensino-aprendizagem, a saber:

- Operacionalizar a Proposição de Problemas como ponto de partida de uma aula de Matemática a partir da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas;
- Construir e apresentar conceitos e conteúdos matemáticos a partir de problemas propostos;
- Perceber competências dos professores para explorar, propor e resolver problemas;
- Analisar que conceitos e conteúdos matemáticos podem ser discutidos e para que turma os problemas propostos são adequados;
- Trabalhar a proposição de problemas antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas, visando aprofundar a compreensão de processos e conceitos matemáticos;
- Discutir diferentes abordagens de Resolução de Problemas;
- Abordar a dimensão sócio-político-cultural, a partir das discussões geradas;
- Antecipar problemas que serão propostos, evidenciando que, em uma prática de sala de aula na perspectiva Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o professor se prepara com certo nível de intencionalidade;
- Discutir como ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas;
- Compreender como as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas podem impulsionar o ensino-aprendizagem de Matemática;
- Perceber, junto com os professores, limitações e possibilidades das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas;
- Analisar como o uso das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas potencializou a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e vice-versa.

Acrescentamos, ainda, que, para refletir e analisar acerca do trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas, adotamos algumas categorias referentes aos problemas propostos a partir da problematização de cada acontecimento/evento das Narrativas Matemáticas, tomando como base os diferentes momentos de exploração, proposição e resolução de problemas.

Portanto, a última etapa remete à verificação e à análise dos resultados à luz do nosso referencial teórico. Para isso, a partir do objetivo central de nosso estudo, bem como do problema de pesquisa que nos comprometemos a dar conta ao fim desta investigação, *a priori* adotamos alguns temas que ajudarão na descrição e análise dos dados, a saber: (i) A Proposição

de Problemas (PP) e a Resolução de Problemas (RP) operacionalizadas a partir da abordagem de Exploração de Problemas (EP); (ii) A construção e compreensão de conceitos matemáticos via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas; (iii) A dimensão sócio-político-cultural no ensino-aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas; (iv) O impacto da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na Formação Continuada do professor que ensina Matemática e (v) Atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas: implicações para a sala de aula de matemática.

4.4 Narrativas no ensino-aprendizagem de Matemática

É importante destacar que, **tomamos como referência a obra de Malba Tahan, para escrever as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.**

Nesse contexto, o uso de narrativas como uma alternativa no ensino-aprendizagem de Matemática surgiu, principalmente, a partir do trabalho seminal do professor brasileiro Júlio Cesar de Melo e Souza (1895-1974), mais conhecido pelo seu pseudônimo, Malba Tahan, que buscou o estreitamento entre a Matemática e a Literatura, abordando narrativas, contos, romances, poesias, enigmas e lendas na prática pedagógica de Matemática. O autor estudou a língua e a cultura árabe, sendo este o cenário onde se passam as mais divertidas aventuras. Dentre suas obras mais marcantes, ressaltamos **“O Homem que Calculava”**, que traz como personagem principal o astuto e calculista persa Beremiz Samir. Nessa perspectiva,

Tahan apresenta indiscutivelmente com uma escrita minuciosa e lúdica a junção da Literatura à Matemática por meio de narrativas que envolvem o leitor com diálogos sobre diversos elementos, ideias, conceitos matemáticos, bem as diferentes visões de mundo presentes na Literatura (Santos *et al.*, 2022, p. 65).

As ideias matemáticas oriundas nas narrativas escritas por Malba Tahan podem surgir de forma explícita ou implícita. Em cada trama, há uma sucessão de eventos que levam o leitor à constituição de um enigma, problema ou desafio, que, por sua vez, pode ter um desfecho ou uma solução a partir de um olhar matemático.

Sobre isso, Zwiernik e Dalcin (2020) pontuam que há uma relação entre as narrativas de Malba Tahan com o que caracteriza um problema matemático, uma vez que os desafios ou as demandas cognitivas propostas aos personagens estabelecem algo que não se sabe fazer ou como solucionar, mas provoca o desejo de realizar, de modo a aguçar a curiosidade e a busca por processos/procedimentos de resolução. Os autores explicam que neste movimento do diálogo entre a narrativa que apresenta o problema o solucionador elabora suas resoluções,

emergindo, assim, elementos matemáticos, ora pelo próprio processo de pensamento e cálculos envolvidos, ora pela articulação entre a linguagem matemática e a materna.

Assim, percebe-se que, nas narrativas propostas por Malba Tahan, emerge, no primeiro momento, a resolução de problemas, com forte potencial para um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas, sobretudo, com a proposição de problemas podendo ocorrer durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas.

Contudo, nas atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas escritas por nós, transcorremos acerca de uma sucessão de acontecimentos que podem ser um ambiente fértil para uma prática pedagógica de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Essas narrativas foram pensadas, no primeiro momento, tendo a Proposição de Problemas como um ponto de partida de uma aula de Matemática – a proposição de problemas ocorre antes do processo de resolução e exploração de problemas. Para isso, os estudantes e professores terão a incumbência de identificar e problematizar, na trama, diferentes acontecimentos/eventos que levam à geração de problemas em nível matemático e sócio-político-cultural. Além do mais, quando pensamos as narrativas numa perspectiva da proposta Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, entendemos que não estamos diante de um trabalho pronto e acabado, uma vez que a estas narrativas podem ser incorporados novos acontecimentos/fatos que possibilitam avançar o nível de compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e de questões cunho sócio-político-cultural.

As Narrativas Matemáticas **Jogo de Sueca, Um “enxame de problemas”, Mercado de problemas e A crise hídrica – um problema mundial** ocorrem num cenário e com personagens reais da nossa adolescência (Lola – eu, Perobinha, Nêm, Cesinha, PC e Sr. Deda). Enquanto a Narrativa Matemática **“Qual é o preço justo?”** é fruto da contextualização de um episódio real vivenciado pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade, que foi relatado por ele a partir de uma atividade desenvolvida numa disciplina de pós-graduação.

Por fim, dentre estas atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, a que mais se aproxima das narrativas escritas por Malba Tahan em termos de encaminhamentos para um trabalho em que emerge, no primeiro momento, a resolução de problemas, é a Narrativa Matemática **“Qual é o preço justo?”**, já que, embora tenhamos solicitado que sejam colocadas curiosidades e reflexões em forma de problemas (proposição de problemas ocorre antes do processo de resolução e exploração de problemas), *a priori*, pode haver um interesse ou curiosidade em investigar o porquê, no desfecho da trama, o personagem “Andrade” interveio astuciosamente por meio da Matemática, provando para todos a veracidade de suas reivindicações.

5 MAPEAMENTO DAS PESQUISAS DESENVOLVIDAS PELO GEPEP EM EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, iremos descrever e analisar os estudos em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas que foram desenvolvidos pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós Modernidade (GEPEP). Para isso, selecionamos pesquisas em nível de mestrado que estiveram sob a orientação do Prof. Dr. Silvanio de Andrade no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECM/UEPB). Vale ressaltar que as pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP não se concentram apenas na temática de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, sendo esta uma das linhas de pesquisa amplamente trabalhada pelo grupo.

Das dissertações de mestrado defendidas pelos membros do GEPEP no período de 2013 a 2020, trazemos as análises de 13 trabalhos, por compreendermos que essas pesquisas nos ajudam a entender melhor o nosso estudo. Nesse contexto, toda a análise dos dados foi com base nas pesquisas de mestrado dos autores: Silva, L. (2013), Silva, A. (2013), Brandão (2014), Nascimento (2014), Silva (2015), Silva (2016), Silveira (2016), Araujo (2016), Bezerra (2017), Martins (2019), Santos, R. (2019), Santos, E. (2019) e Granjeiro (2020). É importante destacar que essas pesquisas foram desenvolvidas com foco na Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, contemplando diferentes níveis de ensino, tais como: Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio, com foco na aprendizagem dos alunos e no Ensino Superior, a partir do destaque à formação do futuro professor de Matemática.

Contudo, vale destacar que, nesse período, também tivemos alguns trabalhos que abordaram a temática de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, aliada aos recursos didáticos, como as dissertações de Sídney Moreira da Costa e Isnara Mendes Lins, no ano de 2019; e no ensino-aprendizagem de expressões algébricas por meios desta proposta, destaca-se o trabalho de Renata Ranielly Cabral da Silva, no ano de 2020.

Por outro lado, fora deste recorte, até o ano de 2024, foram defendidos os trabalhos de: Cícero Félix da Silva, no ano de 2021, que discutiu o ensino-aprendizagem de Função Afim por meio desta proposta e com o uso da calculadora gráfica *Desmos*; Saul Barbosa de Oliveira, que investigou as contribuições da proposta de Exploração de Problemas aliada às Representações Múltiplas de Álgebra no ensino-aprendizagem do conceito de Espaço Vetorial, no ano de 2021; Jessica Almeida Araujo, que discutiu a promoção de uma aprendizagem reflexiva acerca das Operações Aritméticas Fundamentais via Exploração de Problemas, no ano de 2021; Raimunda Thaiz Mendes Silva, que investigou a atividade algébrica e o significado

de igualdade, através da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores, no ano de 2023; José Joálisson Alexandrino de Araújo, que abordou um estudo sobre endividamento no contexto da Educação Matemática, fazendo uso da metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, no ano de 2023; e Kátia Joana de Queiroz, que trabalhou com a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas e o letramento matemático no ensino e aprendizagem de multiplicação e divisão, no ano de 2023.

Sublinhamos, ainda, que, no capítulo 7, o qual envolve a descrição e análise de dados que foram produzidos no âmbito de curso de Formação de Professores que ensinam Matemática, utilizaremos as duas primeiras teses de doutorado do grupo, a saber: Fabíola Cruz Martins (Martins, 2024) e Jair Dias de Abreu (Abreu, 2024), para ajudar a elucidar os dados que emergiram dessa formação com estes professores.

Por fim, com o propósito de ampliar e aprofundar a discussão, buscando identificar movimentos, facetas e encaminhamentos pedagógicos de um episódio de sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, analisamos e refletimos sobre o que denominamos de **Notas de Aulas**, sendo, especificamente, algumas atividades desenvolvidas pelo pesquisador Silvanio de Andrade em uma disciplina de pós-graduação.

5.1 Descrição das pesquisas desenvolvidas pelo GEPEP e categorias de análise

Nesta seção, discorreremos acerca dessas pesquisas, adotando como critério de ordem de descrição dos trabalhos o nível de ensino em que a pesquisa foi desenvolvida, tal como: Fundamental I (3 **dissertações**) e Fundamental II (2 **dissertações**), Ensino Médio (6 **dissertações**) e Ensino Superior (2 **dissertações**), elencando, principalmente, os seguintes elementos de descrição: objetivo do presente estudo, participantes da pesquisa, metodologia de ensino-aprendizagem, conteúdo matemático abordado e os principais resultados dessas pesquisas, com o intuito de ter um maior conhecimento sobre as pesquisas em foco.

A pesquisa de mestrado de **Sheila Valéria Pereira da Silva** (Silva, 2016), nomeada “Ideias/significados da multiplicação e divisão: o processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental”, investigou as potencialidades e o processo de ensino-aprendizagem via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas com **ideias/significados e propriedades da multiplicação e divisão** por alunos de uma turma do **5º ano do Ensino Fundamental**.

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública municipal da cidade de Campina Grande/PB, numa turma do 5º ano, composta por 33 alunos. A pesquisadora pontua que a

exploração de problemas ocorreu em diversos momentos da pesquisa, em momentos curtos e contínuos. Ela percebeu, ainda, que a proposição de problemas pelos alunos foi uma atividade complexa no início da investigação, mas, após algumas experiências, notou-se maior desenvoltura para a proposição de problemas. Com o estudo, ela conclui que a Resolução de Problemas é processual, por vezes, complexa e estimuladora da aprendizagem de conteúdos e conceitos da Matemática, contribuindo para o desenvolvimento, a formação escolar e social do aluno/cidadão.

O estudo de **Emily de Vasconcelos Santos** (Santos, E., 2019), intitulado “Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental”, investigou as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas (REP) para o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tomando como base estudos relacionados à metodologia da Resolução de Problemas e à **Educação Combinatória**. A necessidade do estudo é explicada pelo fato de a pesquisadora notar, a partir do levantamento bibliográfico, poucos estudos de Combinatória, direcionados, especificamente, ao trabalho pedagógico nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os sujeitos da pesquisa foram 16 alunos de **uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental** de uma escola da rede pública municipal do Estado da Paraíba. A pesquisadora ressalta que as ações pedagógicas realizadas em contexto de sala de aula se apoiaram na perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas defendida por Andrade (1998, 2017).

Ela conclui destacando que a proposta metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas contribui para a promoção da aprendizagem combinatória dos alunos, possibilitando o desenvolvimento de um processo educativo reflexivo. Constatou-se que as problematizações provocadas durante o processo de resolução, exploração e proposição de problemas potencializaram o trabalho de reflexão sobre os invariantes dos problemas combinatórios, o que favoreceu o desenvolvimento do raciocínio combinatório, generalizante e lógico dos alunos, além de também ter possibilitado aos pesquisadores explorar diferentes dimensões dos problemas propostos.

A pesquisa de **Osilene Bezerra Grangeiro** (Grangeiro, 2020), intitulada “Ensino e aprendizagem de fração via exploração-resolução-proposição de problemas”, teve como objetivo identificar como a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode potencializar o ensino e aprendizagem de fração. O seu estudo, com base na perspectiva da Resolução de Problemas, trabalhou **ideias conceituais relativas ao ensino e aprendizagem de fração**, utilizando o Tangram como material manipulativo e tendo, como fio condutor, a Exploração de

Problemas. Ela destaca que o lócus de sua pesquisa foi uma escola pública, localizada no município de Lagoa Seca-PB, com o universo de **25 alunos do 5º ano**, turno manhã, com idade entre 10 e 15 anos. Além disso, o presente estudo desenvolveu-se em 15 encontros, que foram distribuídos em duas fases: a primeira fase consistiu na atividade diagnóstica I e II e a segunda fase se pautou na intervenção pedagógica.

A pesquisadora enfatiza que os resultados obtidos evidenciam que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas potencializa o ensino e a aprendizagem de fração, por conferir ao professor avaliar sua prática ao mesmo tempo em que avalia como e se os alunos estão avançando no processo de aprendizagem de fração e de outros aspectos inerentes ao tema, podendo, assim, articular meios e ações que possam propiciar maior êxito na mediação, por possibilitar, de maneira interativa, livre, crítica e criativa, que os alunos resolvam e proponham problemas no momento em que exploram, externam e adquirem compreensões sobre fração, convertendo e revertendo, representando-a de maneira gráfica, numérica e por extenso.

Por fim, ela conclui que, de maneira significativa, a proposta favoreceu a leitura e a escrita de frações; a identificação da configuração do número fracionário, indicando a diferença entre fração e razão; a identificação dos significados essenciais da fração, observando-se que, quanto à fração com significado de número e a fração com significado de operador, obteve-se identificação, no entanto, constatou-se dificuldade de aprofundamento, especialmente, quanto à fração com significado de número, talvez, por este demandar maior maturação cognitiva abstrata.

O estudo de **Andriely Iris Silva de Araujo** (Araujo, 2016), intitulado “Ensino-aprendizagem de álgebra através da resolução e exploração de problemas”, se preocupou em identificar como a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução e Exploração de Problemas possibilita o entendimento de conceitos que vão desde a generalização de padrões até a resolução de **Equações Polinomiais do Primeiro Grau**. A pesquisadora percebe que essa metodologia visa desenvolver um trabalho mais centrado nos alunos, pois parte de problemas geradores para a aquisição de novos conceitos matemáticos, promovendo, assim, uma participação mais ativa dos alunos no processo de construção do conhecimento.

A investigação em sala de aula foi desenvolvida em **uma turma 7º ano do Ensino Fundamental**, de uma escola da rede pública do município de Itatuba – PB. Com a pesquisa, ela observou que o trabalho com a metodologia de Resolução e Exploração de Problemas permitiu uma maior motivação por parte dos alunos ao questionarem e refletirem sobre as ideias discutidas, sendo sempre instigados a atuarem fortemente durante todo o processo de ensino-

aprendizagem. Ela destaca, ainda, que a metodologia de sala de aula adotada permitiu uma maior compreensão da Álgebra, de modo a minimizar ou até superar as dificuldades apresentadas constantemente pelos alunos.

A pesquisa de **Robério de Oliveira Santos** (Santos, R., 2019), intitulada “Educação Fiscal nas aulas de Matemática, cenários para investigação e exploração de problemas”, analisou a influência da Educação Fiscal (EF) nas aulas de Matemática com vistas à formação da consciência cidadã do aluno, apoiando-se nos estudos da Educação Matemática (EM), da Exploração e Resolução de Problemas, da Educação Matemática Crítica (EMC) e da Educação Fiscal (EF). Ele explica que a ideia é estudar a Educação Fiscal nas aulas de Matemática levando em conta aspectos sociopolíticos, econômicos e culturais. O pesquisador se concentrou nos Cenários para Investigação, relativos à combinação entre problemas com as três referências matemáticas (referência à Matemática pura; referência à semirrealidade e referência à realidade), que estão sendo tratados dentro de um projeto formado por uma coleção de situações e problemas abertos, que recebe o nome de Milieu de Ensino e Aprendizagem, como destaca Skovsmose (2014). Para o levantamento dos dados, foram utilizadas notas, descrições, análises de aulas e as produções dos alunos.

A investigação foi desenvolvida com alunos de uma **turma do 7º ano do Ensino Fundamental**, em uma escola pública do município de Juazeirinho-PB. O conteúdo **matemático trabalhado foi o de porcentagem**, trazendo um olhar para suas conexões, com **frações, razões, proporções** etc., de forma acoplada ao eixo temático dos impostos. Dentre os resultados, ele evidenciou que a Exploração e Resolução de Problemas se sobrepõe ao paradigma do exercício, posto que, no momento em que foram colocados à disposição dos alunos exercícios e problemas, eles passaram a adquirir uma postura crítica e reflexiva frente aos problemas propostos; ao passo que, no paradigma do exercício, isso não aconteceu, pois demonstraram uma postura mais cômoda. Sendo assim, quanto às atividades trabalhadas relacionadas ao paradigma dos exercícios, identificou-se que os alunos não demonstraram tanto interesse por questões fiscais como na exploração e resolução de problemas.

O primeiro estudo de **Ledevande Martins da Silva** (Silva, L., 2013), intitulado “Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas”, investigou compreensões de ideias **essenciais de funções** por alunos do Ensino Médio e analisou as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas. O pesquisador adotou como referências teóricas o ensino-aprendizagem de funções ao longo do

currículo com as representações múltiplas de funções e o desenvolvimento da compreensão essencial de funções por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010).

Com relação ao trabalho em sala de aula, o autor optou pela Resolução, Proposição e Exploração de Problemas, em que a interação e a mediação foram elos para formação de conceitos, conforme Vygotsky. Tal pesquisa é caracterizada por um intenso trabalho em sala de aula. Ela foi realizada com uma turma de **1º ano do Ensino Médio** em uma escola Pública Estadual de Pernambuco, na cidade de Recife. O levantamento dos dados se deu a partir das aulas ministradas, notas de aulas, descrições, análises de aulas e as produções de alunos. A ação/interação em sala de aula ocorreu com a formação de grupos, propiciando o trabalho de atuação na Zona de Desenvolvimento Proximal. Os resultados evidenciaram que uma compreensão de ideias essenciais de funções se dá mediante transições entre essas ideias, tendo em vista múltiplas interpretações, características e conexões entre elas. O pesquisador conclui que o ensino-aprendizagem de Funções via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas favorece possibilidades de desenvolver compreensões essenciais de funções e extensões contextuais mais abrangentes na promoção do conhecimento matemático e da cidadania.

A pesquisa de **Adeilson Pereira da Silva** (Silva, A., 2013), intitulada “Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da Resolução de Problemas: um olhar para a sala de aula”, traçou um mapeamento do **ensino-aprendizagem de Análise Combinatória**, através da prática em sala de aula, utilizando como metodologia de ensino-aprendizagem a Resolução e Exploração de Problemas, fruto de um olhar reflexivo para a sua própria prática como professor-pesquisador.

A pesquisa foi desenvolvida em uma turma de **2º ano do Ensino Médio**, de uma escola pública da rede estadual, localizada na região de Casa Amarela, Recife-PE. Durante a intervenção, foram percebidas várias dificuldades pertinentes ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, como a distinção entre problemas de Arranjo Simples e de Combinação Simples, o que acarreta o fato de não se perceber, na compreensão do problema, por parte dos alunos, se a ordem dos elementos no agrupamento é pertinente ou não na contagem. Esse estudo é marcado por um intenso trabalho de sala de aula, no qual traz contribuições para o conteúdo de Análise Combinatória e para a melhor compreensão do uso da Resolução de Problemas, como metodologia de ensino-aprendizagem. Ademais, em uma abordagem em sala de via Resolução e Exploração de Problemas, o cotidiano requer a atenção do professor como elemento indispensável ao fazer pedagógico. Ele pontua que o surgimento de provas e reflexões quanto à pesquisa com o cotidiano da sala de aula implicam em um olhar crítico para

a mesma, no qual essa prática docente enseja uma oportunidade de mudança do *status quo* e a emancipação dos estudantes.

O trabalho de **Jefferson Dagmar Pessoa Brandão** (Brandão, 2014), intitulado “Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas”, apresenta um intenso mergulho em sala de aula, ao analisar as dificuldades e possibilidades da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, aliada ao trabalho com as representações múltiplas, visando à formação do **conceito de função** em sala de aula.

Em sua pesquisa, discute-se as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), a saber: o conceito de função; covariação e taxa de variação; família de funções; combinação e transformação de funções e representações de funções. A investigação foi desenvolvida em uma escola pública da cidade de Lagoa Seca - PB, com uma turma **1º ano do Ensino Médio**. Ele ressalta que, dentre os resultados detectados, o trabalho com as diferentes representações de funções fez com que os alunos conseguissem ver mais detalhes do conceito de função, permitindo uma compreensão mais consistente; observou-se que o uso da metodologia de Resolução de Problemas permitiu que os alunos se envolvessem com as atividades e se sentissem mais motivados a estudar o conteúdo.

O estudo de **Maurício Alves Nascimento** (Nascimento, 2014), denominado “Ensino-aprendizagem de trigonometria através da Resolução e Exploração de Problemas e cotidiano escolar”, também é marcado por um intenso trabalho de sala de aula, uma vez que traz uma discussão-reflexão sobre o Ensino-Aprendizagem da Trigonometria através da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula. O pesquisador investigou as potencialidades do ensino-aprendizagem da **Trigonometria** na perspectiva da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula, em que ele refletiu não apenas sobre os processos de ensino-aprendizagem do conteúdo de Trigonometria, mas também acerca do contexto social da sala de aula de Matemática no qual estamos mergulhados. A intervenção de sala de aula ocorreu em uma Escola Estadual da Paraíba, numa turma de **2º ano do Ensino Médio**, na qual realizou-se uma experiência didática com o conteúdo de Trigonometria, com foco na Resolução e Exploração de Problemas.

O pesquisador faz uma crítica a partir de uma prática em sala de aula, na qual, no ensino de Trigonometria, se enfatiza apenas técnicas e não a formação dos conceitos, e os docentes, quando formados, têm, em sua grande maioria, o livro didático como a única fonte de preparação, o que, de certa forma, limita o professor na superação dos obstáculos de ensino-

aprendizagem dos alunos. Ele entende que nenhuma metodologia dá conta de atender à complexidade e multicontextualidade do cotidiano da sala de aula, sendo necessário, portanto, um olhar de suspeição, de inquietude e invenção nesse cotidiano; e sugere a Resolução e Exploração de Problemas como uma possível metodologia de ensino, por acreditar na possibilidade que ela favorece, sobretudo, no trabalho de formação de conceitos e ideias matemáticas, visando-se refletir sobre a própria prática docente. Os resultados evidenciam que o engajamento mais intenso dos alunos nas explorações dos problemas, por meio do diálogo efetivo entre professor-aluno e entre aluno-aluno durante as aulas, tornou a sala de aula um ambiente onde se constroem e se divulgam os conceitos trigonométricos explorados.

O trabalho de **Veralúcia Severina da Silva** (Silva, 2015), intitulado “Proposição e exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de matemática”, teve como objetivo analisar e aperfeiçoar uma metodologia problematizadora baseada na Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, associada ao uso de um **software educacional (Wolfram Alpha)** para o desenvolvimento de estratégias de resolução e de proposição de problemas pelos alunos no **estudo de funções**. O estudo foi desenvolvido numa turma de alunos repetentes do **1º ano do Ensino Médio** numa escola pública estadual de Pernambuco, na qual a pesquisadora questionou: Como uma metodologia problematizadora para o ensino de Matemática associada à utilização de um *software* educacional colabora no desenvolvimento de estratégias de resolução e de proposição de problemas? E como a problematização das situações-problema, através da exploração e proposição, influencia a compreensão do aluno? Por meio das descrições e análises das aulas, ela notou diferentes estratégias adotadas pelos alunos ao trabalharem com proposição, resolução e exploração de problemas. Dentre os resultados detectados, a autora enfatiza o trabalho com diferentes formas de representações de uma mesma função e a criatividade apresentada na proposição de problemas.

A pesquisa de **Adriano Alves da Silveira** (Silveira, 2016), intitulada “Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas”, teve como objetivo analisar como uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode contribuir/potencializar com o **ensino-aprendizagem de Análise Combinatória**. Durante a sua intervenção, amparado por um longo e intenso trabalho em sala de aula, o pesquisador agiu como professor-pesquisador, trabalhando em uma turma do **2º ano do Ensino Médio** como professor regente, dando autonomia aos alunos na construção das ideias essenciais de Análise Combinatória, de modo que o autor agiu como mediador e incentivador. Os dados foram levantados durante as aulas através das observações e registros dos materiais utilizados pelos alunos, bem como por meio

de gravação sonora. A sala foi organizada em grupos de três alunos e, em alguns casos, em duplas, com o intuito de se realizar um trabalho cooperativo e colaborativo, no qual se considerou importante, nesse processo, o respeito mútuo entre os alunos, respeitando as ideias levantadas na busca da solução dos problemas. Foram realizados 21 encontros, totalizando 25 aulas, cada aula com duração de, no máximo, 45 minutos.

Os resultados da pesquisa evidenciaram que, através da abordagem via Resolução, Exploração e Proposição de problemas, foi possível acompanhar o crescimento dos alunos, que lançaram suas próprias ideias para explorar e resolver os problemas propostos tanto pelo professor-pesquisador quanto por eles mesmos, encontraram múltiplas estratégias e processos de exploração e resolução desenvolvidas por eles no diálogo aluno(s)-aluno(s) e professor-aluno(s), justificaram suas explorações, resoluções, soluções, *insights* e processos, propuseram novas explorações e novos problemas, indo além do processo de resolução, participando, assim, efetivamente, da construção do seu conhecimento em Análise Combinatória. Foi possível concluir, portanto, que tal metodologia permitiu ao aluno um aprendizado com mais compreensão e profundidade, potencializando-o para resolver problemas de Análise Combinatória com foco não apenas na busca da resolução e solução do problema, podendo ir muito além, com a realização de um trabalho de exploração e proposição de problemas em perspectivas múltiplas.

O estudo de **Adriana da SilvaVELOZO Bezerra** (Bezerra, 2017), intitulado “Conceito e representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas: um trabalho com alunos de graduação”, analisou as compreensões essenciais e dificuldades dos alunos de graduação no **ensino-aprendizagem de função** e, a partir daí, propôs atividades via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas que contribuíssem para que **alunos de um curso de Licenciatura em Matemática** pudessem desenvolver um melhor entendimento do conceito e das representações de função, tanto no que diz respeito à compreensão do conceito, como também visando despertar a reflexão sobre suas práticas como futuros professores de Matemática.

A pesquisadora toma como base as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que são: conceito de função, covariação e taxa de variação, famílias de funções, combinação e transformação de funções e representações de funções; e as dificuldades relatadas em algumas pesquisas, entre elas, encontram-se as pesquisas desenvolvidas por Silva, L. (2013) e Brandão (2014), a partir das quais ela dá continuidade a esses estudos. Para o desenvolvimento da pesquisa, foram aplicados questionários com o intuito de identificar que compreensões

essenciais e dificuldades os alunos apresentavam. Posteriormente, foi ministrada uma oficina sobre função para alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, em que atividades foram aplicadas a partir da metodologia de ensino via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas, procurando evidenciar as ideias essenciais trabalhadas em cada atividade.

Dentre os resultados, ela ressalta que os alunos se tornaram mais ativos, procuraram refletir sobre suas práticas como futuros professores de Matemática e demonstraram ter tido uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, pois conseguiram perceber o conceito de função no decorrer das resoluções e identificar as representações de função que contribuíam mais para a resolução das atividades. Ela ainda percebe que os alunos demonstraram uma mudança significativa na postura e na segurança, pois buscaram explorar, nas situações propostas, aspectos além dos que eram pedidos, e a partir daí, procuraram verificar seus resultados.

A pesquisa de mestrado de **Fabíola Cruz Martins** (Martins, 2019), intitulada “Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de Matemática via exploração, resolução e proposição de problemas”, analisou as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, aliadas às **Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistema Lineares**. A pesquisadora esclarece que a escolha deste tópico advém da necessidade de uma investigação no campo da Álgebra mediante um conteúdo que abrangesse a Educação Básica e a Educação Superior, sendo essa uma grande problemática percebida no ensino de Álgebra, revelada na literatura, na qual trata do possível distanciamento entre a Álgebra ensinada na Licenciatura e a Álgebra ensinada na Educação Básica. Ela desenvolveu sua investigação em uma **turma do 5º período do curso de Licenciatura** em Matemática de uma Universidade Federal da Paraíba, na qual fez uso da pesquisa pedagógica, com a finalidade de aprimorar sua prática pedagógica e, sobretudo, contribuir para formação dos licenciandos em Matemática a partir de novas ideias de Álgebra e por meio de vivências teóricas-práticas proporcionadas pela metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

O instrumento de levantamento de dados foi uma oficina, com atividades planejadas à luz de Friedlander e Tabach (2001) e desenvolvidas utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (Andrade, 1998; 2017). A pesquisadora explica que as descrições e análise dos encontros apontam que, embora os licenciandos apresentassem algumas concepções teóricas que correspondem às perspectivas atuais da Resolução de Problemas, a utilização da mesma como metodologia de ensino foi algo novo para eles, já que, mesmo tendo conhecimento de princípios

teóricos da Resolução de problemas no ensino de Matemática, eles não possuíam vivências práticas de uma abordagem em sala de aula nessa perspectiva.

Assim, de acordo com ela, os futuros professores compreenderam e incorporaram a Exploração e Proposição de Problemas ao trabalho com Resolução de Problemas. Os resultados da pesquisa evidenciaram que as Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas favorecem uma aprendizagem de Sistemas Lineares com mais compreensão. Ela conclui ressaltando que a metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de problemas contribui para a construção de uma nova postura dos futuros professores frente ao ensino de Sistemas Lineares.

No quadro 6, a seguir, apresentamos um resumo das pesquisas descritas, elencando autor e ano, objetivo geral e os participantes da pesquisa.

Quadro 6: Resumo das pesquisas

Autor – ano	Objetivo central	Aprofundamento da pesquisa
Ideias/significados da multiplicação e divisão: o processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do Ensino Fundam (Silva, 2016)	Investigar as potencialidades e o processo de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas com ideias/significados e propriedades da multiplicação e divisão por alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental.	A metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas potencializou a compreensão das ideias/significados da multiplicação e divisão , desenvolvendo nos estudantes: a autonomia; a criatividade; a criação de diferentes estratégias; a apreensão de novos conhecimentos e o aperfeiçoamento dos antigos; a concepção de que um mesmo problema pode ser resolvido por mais de uma operação, a competência para propor problemas e realizar problematizações etc.
Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental (Santos, E., 2019)	Investigar as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas (REP) ao processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tomando como base estudos relacionados à metodologia da Resolução de Problemas e à Educação Combinatória.	O estudo evidenciou que a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas potencializou a aprendizagem com compreensão de invariantes dos problemas combinatórios , que, por sua vez, impulsionou o desenvolvimento do raciocínio combinatório.
Ensino e aprendizagem de fração via exploração-resolução-proposição de problemas (Granjeiro, 2020)	Identificar como a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode potencializar o ensino e aprendizagem de fração.	A pesquisa evidenciou que a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas contribuiu para a compreensão dos significados de Fração , favorecendo a leitura e a escrita de frações e a identificação da configuração do número fracionário, indicando a diferença entre fração e razão; a identificação dos significados essenciais da fração.
Ensino-aprendizagem de álgebra através da resolução	Identificar como a metodologia de Ensino-Aprendizagem de	O uso da proposta de Exploração de Problemas promoveu uma maior

e exploração de problemas (Araujo, 2016)	Matemática através da Resolução e Exploração de Problemas possibilita o entendimento de ideias e conceitos que vão desde a generalização de padrões até a resolução de Equações Polinomiais do Primeiro Grau.	motivação por parte dos alunos ao questionarem e refletirem sobre as ideias matemáticas discutidas. Com isso, a metodologia adotada permitiu uma maior compreensão da Álgebra , de modo a minimizar ou até superar as dificuldades apresentadas constantemente pelos alunos.
Educação Fiscal nas aulas de matemática, cenários para investigação e exploração de problemas (Santos, R., 2019)	Analisar a influência da Educação Fiscal (EF) nas aulas de Matemática com vistas à formação da consciência cidadã do aluno, apoiando-se nos estudos da Educação Matemática (EM), da Exploração e Resolução de Problemas, Educação Matemática Crítica (EMC) e Educação Fiscal (EF).	A partir da metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, discutiu-se problemas matemáticos com um viés crítico que, associado à Educação Fiscal, possibilitou que os alunos tivessem mais fluência no pensar, no comunicar e no questionar, potencializando a compreensão do conteúdo de porcentagem , a partir das conexões com frações, razões e proporções, isto é, abordando o conhecimento matemático em seus aspectos cognitivos e sócio-político-culturais .
Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas (Silva, L., 2013)	Investigar compreensões de ideias essenciais de funções por alunos e analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas.	A investigação evidenciou que a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas favorecem possibilidades de desenvolver compreensões essenciais de funções e extensões contextuais mais abrangentes na promoção da cidadania, promovendo, assim, reflexões sobre a metodologia de Resolução de Problemas, enfocando múltiplos contextos: cognitivo e sócio-político-cultural .
Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas: um olhar para a sala de aula (Silva, A., 2013)	Traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, através da prática em sala de aula, utilizando como metodologia de ensino-aprendizagem a Resolução e Exploração de Problemas.	Este trabalho contribui para a discussão do ensino-aprendizagem de ideias essenciais de Análise Combinatória , com implicações na formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática , trazendo considerações e reflexões resultantes de um olhar voltado para a sala de aula de matemática via Exploração de Problemas.
Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas (Brandão, 2014)	Analisar as dificuldades e possibilidades da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, aliada ao trabalho com as representações múltiplas, visando à formação do conceito de função em sala de aula.	As discussões que enfocaram as diferentes representações de funções impulsionaram o ensino-aprendizagem do conceito de função , possibilitando uma aprendizagem com mais compreensão . Notou-se que o uso da metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas permitiu que os alunos se envolvessem com as atividades e se sentissem mais motivados a estudar o conteúdo de Função.
Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar (Nascimento, 2014)	Investigar as potencialidades do ensino-aprendizagem da Trigonometria na perspectiva da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula, na qual refletiu-se não apenas processos de ensino-aprendizagem do conteúdo de	O estudo contemplou a discussão-reflexão sobre o Ensino-Aprendizagem da Trigonometria com compreensão via Exploração de Problemas no cotidiano da sala de aula, não olhando apenas para o desenvolvimento do conteúdo, mas contemplando também a

	Trigonometria, mas também o contexto social da sala de aula de Matemática em que estamos mergulhados.	multicontextualidade da sala de aula de matemática.
Proposição e exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de matemática (Silva, 2015)	Analisar e aperfeiçoar uma metodologia problematizadora baseada na resolução, exploração e proposição de problemas, associada ao uso de um <i>software</i> educacional para o desenvolvimento de estratégias de resolução e de proposição de problemas pelos alunos no estudo de funções.	Esta pesquisa traz reflexões sobre como a proposta de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas aliada à utilização de um <i>software</i> educacional contribuiu para o desenvolvimento de processos/procedimentos de resolução de problemas, bem como na compreensão dos alunos acerca do conteúdo de Função .
Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas (Silveira, 2016)	Analisar como uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode contribuir/potencializar com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.	Discutiu à apresentação das ideias essenciais de Análise Combinatória com alunos do 2º ano do Ensino Médio por meio da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, dando uma atenção especial à Proposição de Problemas .
Conceito e representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas: um trabalho com alunos de graduação (Bezerra, 2017)	Analisar as compreensões essenciais e dificuldades dos alunos de graduação no ensino-aprendizagem de função, e a partir daí propõe atividades via resolução, proposição e exploração de problemas que contribuam para que alunos de um curso de Licenciatura em Matemática desenvolvam um melhor entendimento do conceito e das representações de função, tanto no que diz respeito à compreensão do conceito, como também despertar a reflexão sobre suas práticas como futuros professores de matemática.	Buscou minimizar as dificuldades encontradas nas pesquisas de Silva, L. (2013) e Brandão (2014), ambas desenvolvidas no 1º ano do Ensino Médio, com relação à compreensão do conceito de função e das representações de função via Resolução, Proposição e Exploração de problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática , focando tanto na dimensão conceitual quanto pedagógica.
Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de Matemática via exploração, resolução e proposição de problemas (Martins, 2019)	Analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de problemas, aliadas às Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistema Lineares.	Visou uma aprendizagem com compreensão das Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistema Lineares na Formação Inicial de Professores de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, enfocando na Proposição de Problemas .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

O GEPEP é um grupo cadastrado no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) que tem as seguintes linhas de pesquisa: Educação dentro da Pós-Modernidade, Educação Matemática e Ensino de Ciências dentro da Pós-Modernidade, Ensino-aprendizagem de Matemática e Ciências numa perspectiva crítica e pós-crítica de educação, Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, Formação do Professor de Matemática e Ensino de Ciências e Laboratório de Ensino de Matemática: práticas, discursos e saberes.

Contudo, ao nos debruçarmos nas investigações desenvolvidas pelos pesquisadores do GEPEP, observamos a imersão no cotidiano de sala de aula como uma característica marcante, bem como percebemos um olhar sensível para a multicontextualidade da sala de aula de matemática, com foco em **três eixos**, como é evidenciado no currículo *Lattes* do professor Silvanio de Andrade. Veja a seguir:

- I) Exploração, Proposição e Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Matemática;
- II) Educação Matemática Crítica e Pós-Crítica - para esse enfoque, o professor Silvanio de Andrade, tem usado o termo Exploração Multicontextual Crítica de Problemas (EMC) ou Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC), com a finalidade de não pensar no ensino de Matemática apenas numa concepção cognitiva ou internalista, mas também contemplar um olhar externalista para o conhecimento matemático e a Matemática, versando acerca da dimensão sócio-político-cultural. Por esse fato é que temas como Educação Inclusiva, Questões de Gênero, uso crítico-reflexivo das Tecnologias Digitais, Direitos Humanos, Educação Financeira, dentre outros, emergem como temas focais de forte preocupação do GEPEP, abordados numa perspectiva crítica e pós-crítica;
- III) Sala de Aula de Matemática e o Cotidiano Escolar.

Além do mais, outros temas são discutidos no âmbito dos eixos I, II) e III) tais como: Pesquisa com Cotidiano e a Multicontextualidade da Sala de Aula, Formação de Professores que ensinam Matemática, Educação Algébrica, Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Básico e Superior, Formação dos Conceitos Científicos, Teorias e Práticas em Educação Matemática, dentre outros.

Contudo, sob a ótica da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, bem como a partir do objetivo central do nosso estudo, elegemos, *a priori*, as seguintes categorias de análise: (i) Construção e compreensão de conceitos matemáticos, e indo além do processo de resolver e propor problemas; (ii) Dimensão sócio-político-cultural; (iii) A Proposição de Problemas em sala de aula; e (iv) Formação de professores que ensinam Matemática.

(I) Construção e compreensão de conceitos matemáticos, e indo além do processo de resolver e propor problemas

A Resolução de Problemas, enquanto metodologia de ensino, é defendida, principalmente, pelo fato de impulsionar o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos. Entretanto, notamos que abordagem via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas difere de outras encontradas na literatura de pesquisa devido o movimento didático, que consiste em ir cada vez mais além, isto é, não se contenta apenas com a busca da resolução e solução do problema, mas vai cada vez mais afundo com a realização de um trabalho de exploração e proposição de problemas, que, por sua vez, pode ampliar e consolidar a compreensão de conceitos matemáticos. Assim, as pesquisas do GEPEP se destacam, também, pela preocupação com o ensino-aprendizagem de Matemática com compreensão. Para aprofundar a compreensão do movimento didático de ir além do processo de resolver e propor problemas, realizamos, ainda neste capítulo, uma análise teórico-prático-reflexiva e didático-pedagógica de duas atividades trabalhadas pelo pesquisador Silvanio de Andrade com alunos de pós-graduação que evidenciam que o processo não se encerra no ato de resolver e propor problemas.

No quadro 7, a seguir, evidenciamos o nível de ensino, na qual as pesquisas foram desenvolvidas, bem como os conteúdos matemáticos trabalhados pelos pesquisadores do GEPEP:

Quadro 7: Nível de ensino e conteúdos trabalhados

Autor – ano	Nível de ensino – turma	Conteúdos matemáticos
Sheila Valéria Pereira da Silva (Silva, 2016)	Ensino fundamental I – 5º ano	Multiplicação e Divisão
Emily de Vasconcelos Santos (Santos, E., 2019)	Ensino fundamental I – 5º ano	Combinatória
Osilene Bezerra Grangeiro (Grangeiro, 2020)	Ensino fundamental I – 5º ano	Fração
Andriely Iris Silva de Araujo (Araujo, 2016)	Ensino fundamental II – 7º ano	Equações do 1º Grau
Robério de Oliveira Santos (Santos, R., 2019)	Ensino fundamental II – 7º ano	Porcentagem, Frações, Razões e Proporções
Ledevande Martins da Silva (Silva, L., 2013)	Ensino Médio – 1º ano	Funções
Adeilson Pereira da Silva (Silva, A., 2013)	Ensino Médio – 2º ano	Análise Combinatória
Jefferson Dagmar Pessoa Brandão (Brandão, 2014)	Ensino Médio – 1º ano	Funções
Maurício Alves Nascimento (Nascimento, 2014)	Ensino Médio – 2º ano	Trigonometria
Veralúcia Severina da Silva (Silva, 2015)	Ensino Médio – 1º ano	Funções

Adriano Alves da Silveira (Silveira, 2016)	Ensino Médio – 2º ano	Análise Combinatória
Adriana da Silva Velozo Bezerra (Bezerra, 2017)	Ensino superior	Funções
Fabíola Cruz Martins (Martins, 2019)	Ensino superior	Sistemas Lineares

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Nota-se que a Educação Algébrica emerge como um tema de forte interesse dos pesquisadores do GEPEP. Sobre isso, ressaltamos que foram realizadas pesquisas em sala de aula que trazem evidências acerca de como a metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas potencializou o desenvolvimento do **Pensamento Algébrico**, sendo abordados diferentes aspectos deste tipo de pensamento matemático.

Com relação ao estudo de Funções, ressaltamos as pesquisas de Silva, L. (2013), Brandão (2014) e Bezerra (2017), autores esses que trabalharam as cinco grandes ideias do conceito de função propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Já a pesquisa de Silva (2015) faz uso da metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas associada a um *software* educacional com foco no desenvolvimento de procedimentos de resolução dos problemas.

A pesquisa de Bezerra (2017), desenvolvida no âmbito de um curso de Licenciatura em Matemática, dá continuidade aos estudos de Silva, L. (2013) e Brandão (2014), ambos desenvolvidos com alunos do 1º ano do Ensino Médio, pois a autora se propôs a minimizar as principais dificuldades apresentadas pelos alunos em suas pesquisas, com relação ao conceito de função, tais como: compreensão do conceito de função e das representações de função. A pesquisadora viu na metodologia de Exploração, Proposição, Resolução de Problemas ferramentas necessárias para dar um melhor significado ao conceito de função, gerando para os professores em formação inicial oportunidades de serem mais ativos nesse processo de ensino-aprendizagem. De fato, ela observou que essa metodologia impulsionou a mobilização das representações múltiplas de funções (verbal, numérica, tabular, algébrica e gráfica), como também oportunizou aos futuros professores uma melhor compreensão do conceito de função.

Percebe-se que as atividades trabalhadas pelos pesquisadores do GEPEP com relação aos tópicos de Álgebra focam na construção dos conceitos matemáticos por meio de diferentes representações (verbal, tabular, algébrica e gráfica) (Silva, L., 2013; Brandão, 2014; Silva, 2015; Araújo, 2016; Bezerra, 2017; Martins, 2019), sendo esta uma característica importante do **Pensamento Algébrico**.

Ademais, outro aspecto marcante do **Pensamento Algébrico** é a capacidade de transitar entre estas diferentes representações. Nota-se que a proposta de Exploração-Proposição-

Resolução de Problemas viabilizou este processo em diferentes tópicos da Álgebra: Equações Polinomiais do 1º grau (Araujo, 2016), estudo de Funções (Silva, L., 2013; Brandão, 2014; Silva, 2015; Bezerra, 2017) e Sistema Lineares (Martins, 2019). Acrescentamos, ainda, que foram utilizados alguns *softwares* para auxiliar na exploração e resolução dos problemas, bem como na transição entre as representações múltiplas de funções: *Wolfram Alpha* (Silva, 2015) e o *GeoGebra* (Bezerra, 2017).

Observamos, também, o cuidado com a seleção dos problemas envolvendo tópicos de Álgebra, uma vez que era preciso estabelecer leis matemáticas que expressassem a relação de interdependência entre grandezas (Silva, L., 2013; Brandão, 2014; Silva, 2015; Bezerra, 2017), resolver problemas por meio de Equações Polinomiais do 1º grau (Araújo, 2016) e Sistemas Lineares (Martins, 2019); e identificar regularidades e padrões que levem a generalizações (Silva, L., 2013; Brandão, 2014).

No estudo de Equações Polinomiais do 1º grau, a Exploração de Problemas impulsionou uma dinâmica de sala de aula, possibilitando o envolvimento dos alunos, tornando, assim, a aula mais produtiva, motivando-os a sempre irem além dos problemas (Araujo, 2016). A pesquisadora explica, ainda, que as incógnitas surgiam de forma natural, dada a necessidade estabelecida pelo problema, uma vez que, durante a exploração dos problemas, a atenção se voltou aos alunos enquanto sujeitos da aprendizagem, de modo que buscou-se proporcionar uma aprendizagem com compreensão.

Andrade (2017) observou nas pesquisas de Silva, L. (2013), Brandão (2014), Araujo (2016) e Bezerra (2017) que a proposição de problemas, pensada a partir da Exploração de Problemas, ajudou a mobilizar diferentes representações múltiplas, como a verbal, a numérica e a algébrica.

Por sua vez, Martins (2019) trabalhou os Sistemas Lineares à luz dos estudos de Friedlander e Tabach (2001), mais especificamente, discutindo a ideia de Representações Múltiplas de Álgebra a partir de quatro representações, a saber: representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. Ao fim, ela ressalta que a metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas potencializou as Representações Múltiplas de Álgebra, de modo que a transição entre elas favorece uma aprendizagem de Sistemas Lineares com mais compreensão.

Silva, A. (2013) e Silveira (2016) desenvolveram uma abordagem em sala de aula no 2º ano do Ensino Médio, enquanto Santos (2019) trabalhou no 5º ano do Ensino Fundamental. Nota-se que esses pesquisadores avançaram em uma proposta de ensino-aprendizagem de

Análise Combinatória via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Percebemos, ainda, que, em ambas as pesquisas, os alunos foram desafiados a realizar diferentes trabalhos sobre os problemas propostos pelos pesquisadores e/ou alunos, sendo mobilizado um processo de reflexão e síntese, no qual o ponto de partida era sempre a partir do que os alunos fizeram (errado ou certo) para à apresentação das ideias essenciais de Análise Combinatória: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo Simples, Permutação Simples e com Repetição e Combinação Simples.

Nesse sentido, amparados nos pressupostos teóricos da proposta de Exploração de Problemas, que possibilitou a imersão no cotidiano de sala de aula, esses pesquisadores impulsionaram diferentes trabalhos dos alunos frente a um problema ou situação-problema de Análise Combinatória, tais como: explorar, propor, resolver e aprofundar, indo cada vez mais além, indo cada vez mais afundo na atividade proposta. Sendo assim, o discurso que esses pesquisadores conduziram em sala de aula evidenciavam aos alunos que eles não deviam se contentar em apenas obter a solução do problema, mas que deviam se debruçar em um trabalho de exploração e proposição de problemas.

A partir do trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas, as pesquisas de Silva, A. (2013), Silveira (2016) e Santos, E. (2019) evidenciaram que os problemas de Análise Combinatória que possuem uma quantidade pequena de agrupamentos possibilitaram a implementação de processos/procedimentos de resolução (listar/sistematizar as possibilidades, árvore de possibilidades, tabelas e desenhos), o que impulsionou o desenvolvimento do **Raciocínio Combinatório**.

Silveira (2016) observou, também, que o trabalho em sala de aula apoiado na metodologia de Exploração Resolução, Proposição de Problemas abriu possibilidades para que os alunos recorressem a um procedimento de resolução diferente daqueles que citam as pesquisas de Análise Combinatória – retomar o problema anterior para chegar à solução de um novo problema.

Em seu estudo, Silva (2016) elenca potencialidades observadas durante processo de ensino-aprendizagem da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas com ideias/significados da multiplicação e divisão (Comparação multiplicativa, Configuração retangular e Raciocínio combinatório), tais como: a autonomia; a confiança, a criatividade; a reflexão; a interpretação; a consciente tomada de decisão; a criação de diferentes estratégias; a compreensão do trabalho realizado; a apreensão de novos conhecimentos e a consolidação dos antigos; a habilidade para resolver diferentes tipos de problemas, a concepção de que um

mesmo problema pode ser resolvido por mais de uma operação, a competência para propor problemas e realizar problematizações.

Os alunos demonstraram facilidade para solucionar os problemas que faziam parte do cotidiano das suas aulas de matemática, como os com a ideia/significado de Comparação entre razões que envolvem a ideia de proporcionalidade e Grupos iguais. Por outro lado, problemas que se constituam em situações novas apresentaram-se de forma mais complexa, como, por exemplo, os de Configuração retangular e Raciocínio combinatório. Contudo, após abordar problemas envolvendo estas ideias/significados, foi observado que os alunos sinalizarem mais compreensão (Silva, 2016).

Ela notou que os alunos que mais sinalizam compreensão do algoritmo da multiplicação e da divisão foram os que menos aparentaram gostar de escrever e explicitar sobre os próprios processos de resolução. A autora sugere caminhos que possam contribuir didático-metodologicamente com o ensino-aprendizagem da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas com ideias/significados e propriedades da multiplicação e divisão, tais como: tomar como base os conhecimentos prévios dos alunos, para, posteriormente, planejar as próximas ações; selecionar e propor uma variedade de tipos de problemas que contemple diferentes ideias/significados da multiplicação e divisão, e que também abordem a realidade dos alunos; desenvolver um trabalho de forma individual e em grupos, alternando quando necessário; sempre estimular os alunos a irem mais adiante, aumentando o grau de complexidade dos problemas de acordo com o desempenho apresentado por eles; durante o processo de resolução, possibilitar ao aluno um ambiente de exploração das resoluções e de proposição de problemas; e, por fim, centrar a ação pedagógica do professor no diálogo e problematizações juntamente com os alunos.

A pesquisa de Santos, R. (2019) trabalhou com os conteúdos de porcentagem, buscando conexões com os tópicos de frações, razões, proporções e etc., de modo que contemplasse discussões sobre impostos a partir da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas aliada ao Cenário de Investigação de Ole Skovsmose. No primeiro momento, em que é proposto uma situação-problema, ele observou que a exploração e resolução de problemas sobre o conteúdo de porcentagem causou estranhamento nos alunos, visto que estavam habituados ao professor, inicialmente, apresentar a definição de porcentagem.

Com a operacionalização da proposta, o pesquisador notou que “[...] as concepções dos conceitos de porcentagem adquiridas pelos alunos foram construídas através da exploração e resolução de problemas, em que foram buscadas estratégias de resolução que iam de encontro com a teoria e não o contrário” (Santos, R., 2019, p. 160). Assim, a exploração e resolução de

problemas foi percebida pelo autor como potencializadora da aprendizagem de conceitos matemáticos pelo aluno.

Ao fim, o pesquisador constatou uma boa compreensão dos alunos quanto aos conceitos do conteúdo de porcentagem. Para tanto, o uso da calculadora se mostrou importante durante o momento de exploração dos problemas. Observa-se que, nos diferentes episódios de sala de aula, os alunos justificavam como o uso dessa ferramenta possibilitou desenvolver múltiplos processos/procedimentos de resolução dos problemas (resolvendo os problemas por meio de frações, proporções e razões). Com isso, “a calculadora tem que ser pensada como uma ferramenta auxiliar, mediadora, de um processo de ensino-aprendizagem que valoriza a compreensão crítica e o fazer matemático como um todo” (Andrade, 1998, p. 19).

Para isso, “as atividades propostas aos alunos têm que valorizar um fazer matemático vivo, dinâmico e os alunos devem usar a calculadora para a exploração de ideias, conceitos e processos matemáticos...” (*Ibid.*, 1998, p. 19). Desse modo, notamos que o autor selecionou problemas que possibilitaram investigar e explorar os problemas por meio deste recurso, levando, por sua vez, à compreensão e ao aprofundamento dos conceitos de porcentagem através da sua conexão com os conteúdos de frações, proporções e razões.

Granjeiro (2020) discutiu ideias conceituais relativas ao ensino-aprendizagem do tópico de Fração. A autora identificou vários aspectos que podem ser indicadores da complexidade no estudo de frações, tal como a falta de compreensão dos diferentes significados que a fração pode assumir, a saber: Parte-todo, Número, Medida, Quociente e Operador. A partir da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas aliada ao uso do Tangram como material manipulativo, ela desenvolveu uma abordagem em sala de aula numa turma do 5º ano, visando dar significado a essas ideias essenciais de frações. Com isso, sobre a compreensão dos diferentes significados, ela observou que:

- A exploração de um mesmo todo, objeto/referência, pode favorecer a compreensão de vários aspectos abordados, assim, a escolha do uso do Tangram se deve ao fato de ser utilizado para esse fim, como também sua viabilidade, para explorar fração de um todo, em partes diferentes;
- O uso do Tangram não foi viável para explorar a fração com significado de número, o que levou ela a utilizar a régua por ser um instrumento numerado. Com relação a este significado, os alunos apresentaram dificuldades para compreender, embora alguns localizassem a fração indicada na reta numérica. Durante a exploração do problema, poucos alunos passaram a compreender cada número natural na reta como um inteiro, o que possibilitou explorar as subdivisões entre um número e outro para fazer a

representação fracionária e, a partir deste, realizar a conversão em número decimal. Isso pode ter ocorrido pelo fato da dimensão abstrata do número requerer maior maturação cognitiva;

- A fração com significado de operador foi potencializada através da exploração coletiva a partir do material manipulativo, representada graficamente, descrevendo e registrando por extenso cada etapa realizada para chegar ao resultado final, em que os alunos apresentaram uma certa compreensão, embora ainda demonstraram insegurança. Isso ocorre porque este tipo de significado requer maior tempo de exploração;
- A proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas impulsionou a exploração dos demais significados (parte-todo, medida e quociente) da fração, fazendo conversões e reversões, representando-a de diversas maneiras, o que possibilitou uma melhor aprendizagem, uma vez que os alunos passaram a compreender e identificá-la em outros contextos;
- É importante a exploração de frações realizada a partir do número fracionário para ser representada graficamente, visto que os alunos têm a oportunidade de experienciar uma maior compreensão do que vem a ser a fração indicada em número fracionário ao fazer a representação do denominador e numerador;
- O uso de material manipulativo e da representação gráfica viabilizou encontrar equivalências de maneira mais perceptiva, favorecendo a compreensão de forma mais clara do que o número fracionário quantifica, contribuindo, assim, para associar a leitura e a escrita adequadas quanto ao sentido de palavras usuais para se referir a frações;
- A proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas potencializou a compreensão e a diferença que caracterizam uma fração contínua de uma fração discreta, assim como possibilitou uma maior compreensão quanto à representação das partes quantificadas indicadas no número fracionário.

Ao fim, Granjeiro (2020) constatou que a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas tornou bem mais significativo o processo de ensino-aprendizagem de fração, possibilitando condições de interação e socialização entre os participantes, de modo que todos os alunos externavam suas ideias, dúvidas e descobertas, promovendo inquietações que geravam novas explorações e, assim, oportunizavam a aprendizagem.

Com relação ao ensino-aprendizagem de Trigonometria, Nascimento (2014) enfatiza que abordagem de Resolução de Problemas trabalhada por ele atuou em vários momentos como catalizador das reflexões-explorações, tornando-se, assim, um ventre fecundo para a formação de conceitos científicos.

Durante a intervenção, o autor percebeu a predominância de uma relação professor-aluno mais dialógica, e ressaltou que, nesse processo dialógico, a formação de conceitos foi sendo construída através da dinâmica estabelecida, isto é, ora mediada pelo professor, ora pela exploração das atividades desenvolvidas.

Por fim, ele ressalta que a Resolução de Problemas enquanto metodologia de ensino possibilitou refletir, por meio de discussões-resoluções-explorações, o cotidiano da sala de aula; levar em consideração a necessidade do professor-pesquisador; florescer elementos como interação, construção do conhecimento diálogo etc (Nascimento, 2014).

(II) Dimensão sócio-político-cultural

Um debate que ainda vem sendo negligenciado nas pesquisas e práticas de Resolução de Problemas decorre de uma necessidade de contemplar um olhar para dimensão sócio-político-social. Contudo, as pesquisas de Silva, L. (2013), Silva, A. (2013) e Santos, R. (2019) abordam, de forma explícita, um olhar externalista para o conhecimento matemático, propondo discussões que são tratadas com a Matemática (um olhar com os números) e para além da Matemática (um olhar sem os números). Enquanto na pesquisa de Silveira (2016) o trabalho com a Proposição de Problemas impulsionou a compreensão de que a solução dada a um problema não deve ser encarada apenas como um valor numérico, mas que pode implicar no entendimento dos interesses e do funcionamento da sociedade (um olhar com os números).

Silva, L. (2013) observou, durante a sua experiência de sala de aula, que alunos sentiam dificuldades em aprender conceitos e fazer uso de representações matemáticas, como também ele tinha dificuldade de se ensinar com compreensão no contexto da Resolução de Problemas. Com isso, o pesquisador optou por um trabalho de ação/intervenção em sala de aula, fazendo uso da metodologia de ensino-aprendizagem via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas aliada ao uso das representações múltiplas. Nessa perspectiva, ele ressalta que o enunciado do problema traz sempre algo de novo a ser explorado no contexto de uma sala de aula, sendo que o planejamento do trabalho é flexível, podendo ganhar vários formatos e explorações, podendo se restringir aos aspectos puramente matemáticos, como também levando a discussões que abordem temáticas de cunho sócio-político-cultural.

As discussões geradas no âmbito de uma turma de 1º ano do Ensino Médio possibilitaram debates que surgiram nas explorações dos problemas, abordando temas, como: desperdício de água, obesidade, extinção de animais que habitam o mar, salário, imposto de renda, doenças sexualmente transmissíveis, fome, dentre outras temáticas que extrapolam os

muros das nossas escolas. Ele explica que o essencial é formar cidadãos críticos, as extensões de problemas matemáticos para questões fora da Matemática ampliam essa discussão, no entanto, sem a Matemática não poderiam ser levados adiante, uma vez que o problema matemático foi o protagonista que estimulou o surgimento dos temas políticos, sociais e culturais que foram levantados na sala de aula por meio da metodologia de ensino-aprendizagem via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas.

Considerando a complexidade e multicontextualidade do cotidiano da sala de aula, argumentamos que o tratamento de questões de cunho sócio-político-cultural, por meio da Matemática, pode oferecer um cenário rico que visa aprofundar a compreensão dos alunos sobre a sociedade e prepará-los para serem participantes críticos e ativos, possibilitando o engajamento e a transformação no meio social que vive.

Silva, A. (2013) percebeu, após a sua intervenção, que poderia ter trabalhado com problemas de Análise Combinatória que abordassem questões de natureza sócio-político-cultural. Ele ressalta que esses problemas deveriam envolver o jogo do bicho, bingo, loteria esportiva, problemas modelados do social etc., não deixando de lado a aprendizagem dos conceitos. “Tais problemas possibilitam adentrar em discussões de cunho social, tornando o aluno um cidadão ativo que questiona e critica o *status quo*” (*Ibid.*, 2013, p. 75).

Com isso, Silva, A. (2013) formulou um problema³⁶ de Análise Combinatória intitulado “política ou politicagem”, na qual ele analisa, a partir de uma visão cognitiva, processos/procedimentos de resolução, mantendo uma discussão dentro da própria Matemática. No entanto, ele percebe que as discussões podem extrapolar os limites desta perspectiva, ao perceber que mesmo a ordem das escolhas não sendo importante para o problema, no mundo real, poderíamos decidir o que deveria ser prioridades, consequentemente, a ordem deveria prevalecer. Sobre essa reflexão, ele exemplifica que, devido à época próxima às chuvas, há uma urgência de se efetivar a construção de barreiras nos morros para favorecer as famílias em área de risco de desabamento, sendo assim, o orçamento participativo das obras pode decidir por escolher: CONSTRUÇÃO DE BARREIRAS NOS MORROS, DRENAGEM E LIMPEZA DOS ESGOTOS REFORMA E MANUTENÇÃO NAS ESCOLAS DO BAIRRO DE CASA AMARELA, sendo cada obra efetivada nessa ordem. “Preocupa-nos uma abordagem da

³⁶ O novo prefeito eleito de Recife, ao assumir a prefeitura, tomou ciência do orçamento e percebeu que daria para fazer de imediato três destas quatro obras sugeridas pela população: CONSTRUÇÃO DE BARREIRAS NOS MORROS, DRENAGEM E LIMPEZA DOS ESGOTOS, REFORMA E MANUTENÇÃO NOS POSTOS DE SAÚDE DO BAIRRO DE CASA AMARELA, REFORMA E MANUTENÇÃO NAS ESCOLAS DO BAIRRO DE CASA AMARELA. Quais as possíveis escolhas para o prefeito? (p. 75).

Matemática que não possibilite compreender o aluno como um cidadão completo, com necessidades que vão além do que a Matemática pode explicar” (*Ibid.*, 2013, p. 77).

Idealizar uma aula de Matemática que verse sobre temas sociais, políticos e culturais decorre de uma tomada de consciência, oriunda da imersão do professor no cotidiano de sala de aula. Nessa concepção, a Matemática aparece como uma ferramenta para desvendar coisas do mundo, conseqüentemente, garante ao cidadão ser agente ativo e crítico de uma realidade que precisa ser transformada, devido à existência de injustiças e desigualdades que assolam a nossa sociedade.

Santos, R. (2019) observou que os alunos demonstraram interesse em trabalhar com a exploração e resolução de problemas com foco em problemas matemáticos a partir de um viés crítico, associado à Educação Fiscal, possibilitando-os uma maior fluência no pensar, no comunicar e no questionar, a partir do conhecimento adquirido sobre porcentagem, permitindo lhes, assim, perceber questões de ordem social, política, econômica e cultural, usando o conhecimento matemático que, a cada instante, lhes impulsionava a ver ou rever suas concepções quotidianas.

As discussões em sala de aula foram de suma importância, pois uma das pautas consistiu em mostrar aos alunos que o pagamento dos impostos é essencial para a sociedade, visto que gera distribuição de renda, serviços sociais e direitos fundamentais ao cidadão (Santos, R., 2019). “Atestamos que a relação que estabelecemos entre a Educação Fiscal nas aulas de Matemática, tendo como plano de fundo uma consciência cidadã, empodera o aluno quanto à consciência fiscal, bem como de sua participação social enquanto cidadão [...]” (*Ibid*, 2019, p. 159).

O pesquisador chama atenção para a importância da escolha do conteúdo a ser ensinado, precisa se relacionar com o contexto social dos alunos, quando se busca ensinar para a cidadania. Assim, ele explica que desenvolveu, em sala de aula, uma abordagem multicontextual, uma vez que não se limitou a ensinar apenas conceitos e procedimentos matemáticos, mas se dedicou a mostrar como esses conteúdos aparecem no nosso social e como interferem nas transformações sociais.

Embora algumas pesquisas do GEPEP tenham focado em discussões que contemplem a dimensão sócio-político-cultural, nota-se que poucos estudos trabalharam ou propuseram, de forma explícita, esse tipo de abordagem, carecendo, assim, de mais pesquisas que alcancem as salas de aula, visando dar conta de múltiplos contextos que abrangem uma sala de aula de matemática.

(III) A Proposição de Problemas em sala de aula

No artigo intitulado: “*Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions*” (Pesquisa de Proposição de Problemas em Educação Matemática: algumas questões, respostas e não respostas), os pesquisadores Cai *et al.* (2015) fazem uma síntese do conhecimento atual da temática Proposição de Problemas e apontam questões e orientações para estudos futuros. Os autores fazem uma discussão de dez questões que representam áreas ricas para pesquisa de Proposição de Problemas, sendo elas:

- Por que a proposição de problemas é importante na matemática escolar?
- Os professores e estudantes são capazes de propor problemas matemáticos importantes?
- Os estudantes e professores podem ser efetivamente treinados para formular problemas de alta qualidade?
- O que sabemos sobre os processos cognitivos da proposição de problemas?
- Como as habilidades de proposição de problemas estão relacionadas às habilidades de resolução de problemas?
- É possível usar a proposição de problemas como uma medida de criatividade e resultados de aprendizagem matemática?
- Como as atividades de proposição de problemas são incluídas nos currículos de matemática?
- Como é uma sala de aula quando os estudantes se envolvem em atividades de proposição de problemas?
- Como a tecnologia pode ser usada em atividades de proposição de problemas?
- O que sabemos sobre o impacto de se envolver em atividades de proposição de problemas sobre os resultados dos estudantes? (Cai *et al.*, 2015, p. 3, tradução nossa).³⁷

Para explorar essas questões, Cai *et al.* (2015) analisam o trabalho que foi feito e resumem o que se conhece no campo atual de pesquisa. Posteriormente, os pesquisadores tomam como ponto de partida cada questão em foco e sugerem algumas questões que estão relacionadas e que são merecedoras de mais atenção da comunidade de pesquisa e que, conseqüentemente, permanecem sem resposta.

Desse modo, eles ponderam que as respostas dadas às questões não são definitivas, visto que as evidências analisadas são insuficientes, havendo, assim, a necessidade de mais pesquisas que aprofundem e que nos convençam, de fato, sobre a plausibilidade das respostas. Com isso,

-
- ³⁷ Why is problem posing important in school mathematics?
 - Are teachers and students capable of posing important mathematical problems?
 - Can students and teachers be effectively trained to pose high-quality problems?
 - What do we know about the cognitive processes of problem posing?
 - How are problem- posing skills related to problem-solving skills?
 - Is it feasible to use problem posing as a measure of creativity and mathematical learning outcomes?
 - How are problem-posing activities included in mathematics curricula?
 - What does a classroom look like when students engage in problem-posing activities?
 - How can technology be used in problem-posing activities?
 - What do we know about the impact of engaging in problem-posing activities on student outcomes?

para a discussão da categoria “A Proposição de Problemas em sala de aula”, vamos nos debruçar nas pesquisas do GEPEP para ver como a Proposição de Problemas, pensada a partir da proposta de Exploração de Problemas, traz reflexões sobre algumas das questões propostas por Cai *et al.* (2015).

Ademais, estamos interessados em buscar um escopo de evidências que nos mostra, principalmente, como a Proposição de Problemas impulsiona e/ou potencializa uma aula de Matemática. Em função disso, das questões listadas acima, vamos selecionar aquelas que julgamos ser respondidas a partir das análises de práticas pedagógicas efetivas na sala de aula de matemática dos pesquisadores do GEPEP.

Os professores e estudantes são capazes de propor problemas matemáticos importantes?

“Se reconhecemos a proposição de problemas como uma atividade intelectual importante na matemática escolar, então precisamos determinar se professores e alunos são capazes de propor problemas matemáticos importantes e valiosos” (Cai *et al.*, 2015, p. 6, tradução nossa).³⁸

Os estudos de Silva, L. (2013), Brandão (2014), Silva (2015), Silva (2016), Silveira (2016), Santos, E. (2019) e Granjeiro (2020), desenvolvidos com alunos da Educação Básica, e a pesquisa de Martins (2019), realizada com alunos da Licenciatura em Matemática, isto é, futuros professores, sinalizaram que os alunos e os professores em formação inicial e continuada formularam problemas importantes que permitiu dar significado e aprofundar um conceito ou conteúdo matemático e as coisas do mundo vivido, além de aumentar sua predisposição para a Matemática que estava sendo aprendida em sala de aula.

As pesquisas de Silva, L. (2013), Brandão (2014), Silva (2016), Silveira (2016) e Santos, E. (2019) revelam que os alunos **problematizaram situações cotidianas** que tinham **conexão com o seu contexto social**, evidenciando indicativos sobre como os estudantes percebem o potencial da Matemática para explicar/desvendar coisas sobre o mundo.

Silva, L. (2013), Brandão (2014) e Silva (2015) evidenciaram que os alunos do 1º ano do Ensino Médio propuseram problemas que permitiram avançar as discussões sobre o conceito de função, as representações múltiplas de funções e a transição entre elas.

³⁸ If we recognize problem posing as an important intellectual activity in school mathematics, then we must determine if teachers and students are capable of posing important and worthwhile mathematical problems.

Silveira (2016) trabalhou uma atividade de proposição de problemas, em que ele sorteava uma palavra para cada grupo e, posteriormente, os alunos iriam propor problemas relacionando a palavra com as ideias essenciais de Análise Combinatória em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Um grupo ficou incumbido de propor um problema com a palavra LETRAS. A priori, o pesquisador ficou preocupado com a hipótese de os alunos recorrerem a proposições de problemas que apontam a necessidade de fazer a contagem dos anagramas da palavra sorteada. Para sua surpresa, o grupo a partir do movimento de problematização, propôs um conjunto de problemas, dentre eles, destacamos o problema inicial: *“Ana precisa ir ao banco fazer um saque. Sua senha é composta por 6 letras do alfabeto, sendo elas: LETRAS. Quantas senhas Ana pode obter com essas 6 letras?”*

Ao fazer a troca das letras da palavra LETRAS, obtêm-se todos os anagramas desta palavra, que consistem em todas as senhas possíveis que podemos obter, conseqüentemente, o esgotamento de todas as possibilidades garante que uma das senhas formadas possibilite o acesso à conta do banco. Assim, a proposição deste problema evidencia que o grupo utilizou a Análise Combinatória para fazer intervenções em seu cotidiano, percebendo relações entre ideias matemáticas e o contexto em que o problema foi escrito. Desse modo, o problema formulado pelo grupo sinaliza que a resposta dada a um determinado problema não deve ser vista apenas como um valor numérico, mas que as interpretações explicam os interesses e o funcionamento da sociedade (*Ibid.*, 2016).

As pesquisas do GEPEP também evidenciam que os professores-pesquisadores formularam problemas importantes que podem ser discutidos contemplando múltiplas perspectivas, de modo a abordar processos e conceitos matemáticos (visão cognitiva/internalista) quanto questões em âmbito social, político e cultural (visão externalista).

Sobre isso, Silva, A. (2013) formulou um problema de Análise Combinatória intitulado “política ou politicagem” (que vimos anteriormente), em que as reflexões em torno dele devem ir além de um olhar para processos/conceito matemáticos, isto é, propicia olhares em nível cognitivo e sócio-político-cultural.

Dentre os pesquisadores que se aventuraram em propor problemas para discutir em sua pesquisa de campo, ressaltamos, aqui, a autonomia do pesquisador Brandão (2014), que formulou um número importante de problemas matemáticos. Tais problemas possibilitaram aos alunos: abordar o conceito de funções; compreender as representações múltiplas de funções, nas quais os alunos identificaram com facilidade a representação verbal das situações e obtiveram os valores da variável dependente e independente usando esta representação; transitar entre as diferentes representações múltiplas de funções (verbal, numérica, tabular,

gráfica e algébrica); apresentar múltiplos processos/procedimentos de resolução e o desenvolver o processo metacognitivo. Ademais, os problemas formulados descreviam e atendiam à realidade local dos alunos. Notamos que o autor contextualizou aspectos inerentes ao entorno dos alunos, visando impulsionar a motivação e o interesse dos estudantes, sendo este um dos grandes benefícios do professor propor problemas nas suas aulas de Matemática.

Silveira (2016) formulou um problema intitulado “*Problemas dos Códigos*”³⁹ e trabalhou com os alunos do 2º ano do Ensino Médio. Ele observou que, durante o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas, o problema proposto desencadeou um trabalho de reflexão e sínteses que culminou no uso de materiais manipuláveis (moeda e fichas enumeradas), no desenvolvimento do processo metacognitivo, na observação de padrões na formação dos agrupamentos, retomar ao problema anterior e na apresentação do conceito do Princípio Fundamental da Contagem.

Por fim, destacamos que Martins (2019) observou que alunos da Licenciatura em Matemática (futuros professores) propuseram problemas envolvendo, principalmente, Sistemas Lineares, que potencializou o uso das Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas.

Os estudantes e professores podem, efetivamente, ser treinados para propor problemas de alta qualidade?

Incorporar a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas requer uma tomada de consciência que se amplia quando se compreende que as oportunidades de aprendizagem são maximizadas quando o professor envolve os alunos em um ambiente de proposição de problemas. Todavia, a prática de propor problemas não está presente na formação da maioria dos professores que ensinam Matemática e, conseqüentemente, não são ofertadas aos alunos oportunidades de propor seus próprios problemas. Desse modo, a prática de proposição de problemas vai ganhando significado à medida que são oportunizadas aos alunos

³⁹ Gerlane dispõe dos algarismos 1, 2, 3 e 4 e de uma moeda. Pretende fazer códigos compostos inicialmente por um número de dois algarismos, seguido por uma das faces da moeda. Quantos códigos diferentes ela pode criar?

- a) Se os códigos fossem criados com algarismos distintos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?
- b) Se os códigos fossem criados com números pares de dois algarismos seguidos de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?
- c) Se os códigos fossem criados com números de quatro algarismos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades? (p. 84-85)

atividades de proposição de problemas. Algumas pesquisas do GEPEP têm evidenciado que os alunos apresentaram, inicialmente, um certo nível de resistência, devido ao fato de estarem habituados a resolver problemas propostos pelos professores ou pelo livro didático (Silva, 2016; Martins, 2019; Granjeiro, 2020). Por sua vez, as pesquisas têm evidenciado que os alunos, ao serem tocados pela proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, ficam mais motivados e desenvolvem uma melhor capacidade de propor problemas (Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Martins, 2019), percebendo, ainda, o trabalho em grupo como um meio de ensinar os alunos a proporem problemas de alta qualidade (Silveira, 2016; Granjeiro, 2020).

Contudo, é possível melhorar a qualidade dos problemas que os alunos e os professores propõem. A literatura de pesquisa sugere algumas estratégias importantes que ajudam a preparar os alunos e professores para propor problemas. Todavia, ainda não está claro quais estratégias são mais eficazes para ensinar a proposição de problemas, como também quais delas são melhores para os propositores de problemas usarem em situações problemáticas específicas (Cai *et al.*, 2015).

Observamos que os pesquisadores do GEPEP adotaram diferentes estratégias como ponto de partida para a exploração e proposição dos problemas, tais como propor problemas a partir de: uma palavra, outro problema, um tema, uma ideia matemática, uma situação livre, um conteúdo e/ou conceito matemático, dentre outras.

Por exemplo, Silveira (2016) trabalhou com duas estratégias que serviam como ponto de partida para que os alunos propusessem problemas de Análise Combinatória. A primeira consistiu em sortear uma palavra entre os grupos, e os alunos tiveram que propor um problema de Análise Combinatória a partir dela. Na última, eles foram desafiados a propor problemas que envolvessem ideias essenciais de Análise Combinatória, como, por exemplo: $A_{6,2}$, P_7 , $C_{30,2}$ e $5 \cdot 4 \cdot 3$. O autor notou que propor problemas de Análise Combinatória a partir de palavras possibilitou aos alunos fazer conexão das palavras com o seu cotidiano. Enquanto tomar as ideias essenciais de Análise Combinatória como ponto de partida potencializou a distinção entre os diferentes agrupamentos de Análise Combinatória.

“Os pesquisadores notaram a importância das oportunidades para a exploração de situações matemáticas no desenvolvimento de habilidades de proposição de problemas dos alunos” (Cai *et al.*, 2015, p. 10).⁴⁰

⁴⁰ Researchers have noted the importance of opportunities for exploration of mathematical situations in developing students' problem posing abilities.

Em seus estudos, Silva, A. (2013), Brandão (2014) e Silveira (2016) formularam problemas de alta qualidade para discutir em sala de aula. Para isso, houve um certo grau de intencionalidade, em que os problemas deveriam ser pensados para serem trabalhados a partir da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Isso exigiu deles: antecipar problemas que seriam propostos pelos alunos; competências para lidar com os problemas propostos; habilidade para selecionar problemas que sinalizavam um novo caminho para exploração de problemas; propor problemas que viabilizem um olhar para além da Matemática; e perceber como os problemas davam conta do conceito que seria sistematizado no fim da aula.

Por fim, as pesquisas têm mostrado que a arte de propor problemas é a parte mais demorada (Martins, 2019) e que se adquire essa habilidade a partir de um mergulho em atividades de proposição de problemas. Para isso, o professor precisa proporcionar um ambiente de aprendizagem que torne uma experiência de Proposição de Problemas significativa para os alunos. Para tanto, é preciso reconhecer os seguintes pontos: é necessário tempo para desenvolver e melhorar suas habilidades de propor problemas; a importância de fornecer contextos que encorajem o desenvolvimento de competências de proposição de problemas e a promoção de um trabalho colaborativo, que propicie ao aluno aprender com e a partir dos outros.

O que sabemos sobre os processos cognitivos da proposição de problemas?

A notabilidade da Proposição de Problemas no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos merece destaque, já que ela traz uma compreensão para o problema, compreensão essa que a resolução de problemas não traz, visto que a proposição de problemas possibilita uma reorganização do pensamento, ao passo que a resolução de problemas está introduzida na proposição de problemas (Silveira, 2016).

Observamos que, em algumas pesquisas do GEPEP, os alunos monitoravam e regulavam seu próprio processo de pensamento (processo de metacognição), quando se envolviam em atividades de Proposição de Problemas (Silva, L., 2013; Brandão, 2014; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Martins, 2019), o que lhes propiciava antecipar resoluções e soluções para os problemas que estavam sendo formulados, controlar ideias matemáticas, tomar como referência algum problema conhecido do seu repertório, descrever o contexto social intrínseco da sua vivência cotidiana e a reformulação do problema a partir da reorganização do pensamento, resultante do movimento sínteses-resultado.

Brandão (2014) notou que, durante a proposição dos problemas, os alunos foram organizando os conhecimentos aprendidos; em seus problemas, encontrou os conceitos do tópico matemático que estava sendo pesquisado. Para o autor, a proposição de problemas permitiu perceber como os alunos estavam compreendendo o conceito em foco.

De acordo com Cai *et al.* (2015, p. 11, tradução nossa)⁴¹,

Existem muitos processos potenciais envolvidos na proposição de problemas, e eles podem variar dependendo do tipo de problema que está sendo considerado. Isso pode envolver técnicas para reformular problemas existentes, heurísticas ou estratégias para gerar problemas a partir de determinadas situações e processos para explorar um contexto matemático e testar seus limites para desenvolver uma “sensação” para os tipos de perguntas que podem ser feitas.

Ao experienciar a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, notamos que os alunos, de forma consciente, propuseram uma sequência de problemas, a partir de variações do problema inicial (Brandão, 2014; Silveira, 2016; Martins, 2019), como também os professores-pesquisadores formularam problemas antecipando novos problemas e refletiam como esses problemas poderiam dar conta do conceito que seria apresentado na aula (Brandão, 2014; Silveira, 2016).

Observamos que a proposição de problemas ocorreu antes, durante e depois do processo de exploração e resolução de problema. A proposição de problemas ocorreu **antes**, ou seja, como o ponto de partida, ao se exigir dos alunos *a priori*, conectar seu pensamento a situação-problema, buscando identificar ideias matemáticas, problemas já conhecidos e a descrição de um contexto real (Silva, L., 2013; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Martins, 2019); ocorreu **durante**, quando se percebeu que formulação de um novo problema ajudava a refletir sobre a estrutura conceitual ou ajudava a resolver o problema inicial (Silva, L., 2013; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Martins, 2019; Santos, E., 2019; Granjeiro, 2020); e ocorreu **depois**, pelo fato do caminhar de exploração de problemas está sinalizando novos problemas que propiciam pensar em um conceito matemático com profundidade (Silva, L., 2013; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Martins, 2019; Santos, E., 2019; Granjeiro, 2020).

⁴¹ There are many potential processes involved in posing problems, and they may vary depending on the type of problem posing under consideration. These can involve techniques for reformulating existing problems, heuristics, or strategies for generating problems from given situations, and processes for exploring a mathematical context and testing its boundaries to develop a “feel” for the kinds of questions that can be asked.

Como as habilidades de proposição de problemas estão relacionadas às habilidades de resolução de problemas?

“Uma direção importante para a pesquisa sobre a proposição de problemas é investigar as ligações entre a proposição de problemas e a resolução de problemas [...]” (Cai *et al.*, 2015, p. 14, tradução nossa).⁴²

Durante a abordagem em sala de aula com foco na Proposição de Problemas, Silva, L. (2013), Brandão (2014), Silva (2016) e Silveira (2016) notaram que os alunos se envolveram intensamente, de tal forma que fortaleceu a **motivação/autoestima** deles frente aos conhecimentos matemáticos, uma vez que os estudantes estavam se sentindo felizes por estarem sendo capazes de pensar matematicamente, como também **melhoraram sua capacidade de resolução de problemas**, já que, de modo geral, não apresentaram dificuldades para resolverem os problemas que eles mesmos formularam. Assim,

Na Resolução de problemas, o aluno deve pensar no conceito matemático, principalmente durante e depois do processo de resolução do problema. Isso difere na Proposição de problemas, sobretudo pelo fato de que a postura que pode/deve ser assumida pelo aluno requer uma tomada de consciência a qual exige pensar no conceito matemático antes mesmo da resolução e solução do problema (Silveira; Andrade, 2022, p. 18).

Com isso, percebe-se, que os alunos, durante o processo de proposição de problemas, controlavam e antecipavam a solução desejada (Silveira, 2016; Silva, 2016); e se sentiam felizes ao ver os colegas resolvendo os problemas que eles formularam (Silva, L. 2013; Silveira, 2016; Granjeiro, 2020).

Nesse sentido, Brandão (2014) diz que a proposição de problemas leva o aluno a se sentir como agente ativo do processo de aprendizagem, pois, quando o professor possibilita que o aluno proponha problemas, ele lhe está dando poder. O mesmo autor percebeu o entusiasmo dos alunos com a proposição de problemas, ao trabalhar em sala de aula alguns problemas que eles formularam.

No seu estudo, Silveira (2016) observou que alguns grupos apresentaram um desempenho bem-sucedido na resolução dos problemas, mantiveram a *performance* enquanto propositores problemas, não só formulando problemas, mas também resolvendo. Por outro lado, um dos grupos que, *a priori*, tiveram dificuldade com a metodologia adotada, se sobressaiu

⁴² One important direction for research on problem posing is probing the links between problem posing and problem solving [...]

durante o processo de proposição de problemas, propondo problemas criativos e importantes para abordar conceitos de Análise Combinatória, inclusive, apresentaram resoluções bem criativas, que acarretaram em novos momentos de exploração de problemas. Nessa direção,

Portanto, ao dar a oportunidade de os alunos serem escritores em sala de aula, notamos que eles ficaram felizes por estarem participando do fazer matemática. Por sua vez percebemos que os alunos tiveram facilidade em interpretar suas proposições de problemas, sendo capazes de relacionar uma ideia matemática com a sua vivência cotidiana. Com isso, de modo geral, não apresentaram dificuldades em resolver problemas que eles mesmos formularam, possibilitando assim um avanço nos diferentes tipos de agrupamentos (Silveira, 2016, p. 205).

Desse modo, a transição de solucionador para propositor de problemas, de modo geral, ocorre de forma lenta, uma vez que os alunos estão habituados apenas a resolver problemas. Contudo, a gama de problemas já conhecidos aliados aos seus conhecimentos conquistados no ambiente escolar e no cotidiano é de suma importância para os alunos darem os primeiros passos em uma experiência de proposição de problemas.

É possível usar a proposição de problemas como uma medida de criatividade e resultados de aprendizagem matemática?

Os estudos de Silva, L. (2013), Brandão (2014), Silva (2015), Silva (2016) e Silveira (2016) também mostram que os alunos apresentaram alto nível de criatividade, já que idealizaram contextos adequados aos seus afazeres cotidianos e os relacionaram com os conteúdos e conceitos matemáticos que estavam sendo trabalhados em sala de aula. Inclusive, Silveira (2016, p. 147) evidenciou que, no primeiro contato dos alunos com a Proposição de Problemas, o grupo G1 enfatizou que: “G1(Aluno 1): Professor, essa atividade trabalha com a nossa criatividade”.

Silva, L. (2013) notou que direcionar a responsabilidade dos alunos proporem seus próprios problemas matemáticos foi importante para ambas as partes (alunos e professor-pesquisador), visto que,

[...] os alunos puderam mostrar a sua **criatividade** e autonomia intelectual na criação de textos matemáticos e de estratégias de resolução dos problemas por eles formulados, e, nossa também, de termos realizado experiências, no contexto didático da resolução, proposição e exploração de problemas em um movimento de descoberta e de desafios ao aplicar essas ideias em sala de aula (Silva, L., 2013, p. 285, grifo nosso).

Brandão (2014) destaca que a atividade de proposição de problemas permitiu perceber como os alunos são criativos, haja vista que eles conseguiram propor problemas do conteúdo que estava sendo pesquisado, trazendo situações cotidianas. Sobre isso, Silva, L. (2013, p. 284, grifo nosso) acrescenta que,

[...] para exercitar a inventividade e a **criatividade**, o trabalho sob a perspectiva da proposição de problemas se mostrou uma ferramenta muito eficaz de trabalho em sala de aula, indicando os conteúdos matemáticos que os alunos já tinham domínio sobre seus objetos e seus conceitos e outros que melhor deverão ser trabalhados dentro da perspectiva da resolução e exploração de problemas.

Em sua pesquisa, Silveira (2016) constatou diversas evidências que comprovam que os alunos buscavam articular o texto escrito às ideias essenciais dos diferentes tipos de problemas de Análise Combinatória, participando, efetivamente, do fazer matemática. Ele ressalta que, para que as ideias fossem expressas com clareza, foi necessário conhecer o contexto real em que uma determinada situação estava inserida, a fim de que, posteriormente, pudesse ser formulado um problema, exigindo deles criatividade e aptidões matemáticas.

Entretanto, isso não é uma tarefa fácil, como observou a pesquisadora Silva (2016), em uma pesquisa realizada com uma turma do 5º ano. A autora notou que, a princípio, os alunos tiveram dificuldades para propor problemas que envolvessem algum contexto. No entanto, com o decorrer dos encontros, ela percebeu que os alunos começaram a sinalizar autonomia, segurança, criatividade e interesse na proposição de problemas.

Por fim, Silveira (2016) observou que o trabalho em grupo fomentou uma dose de imaginação e de criatividade nas proposições de problemas, uma vez que foi comum os alunos citarem, no enunciado do problema, o nome de pessoas que fazem parte de sua convivência social, criar contextos que são inerentes à sua realidade e comunicar ideias que permitiram fazer relações entre os afazeres cotidianos e a aplicação de conceitos matemáticos que são objetos de estudo da Análise Combinatória.

Como é uma sala de aula quando os estudantes se envolvem em atividades de proposição de problemas?

Quando ensinamos Matemática através/via Resolução de Problemas, nos deparamos com o estranhamento dos alunos sobre como eles vão aprender conceitos matemáticos sem ter uma apresentação formal dos conceitos. Com isso, há uma desconstrução de uma sala de aula de matemática que enfoca no domínio de regras e está centrada no professor, por sua vez, ao aluno é oportunizado um ambiente de aprendizagem que toma como ponto de partida seus conhecimentos, visando sistematizá-los em *prol* da aprendizagem de Matemática.

Contudo, a Proposição de Problemas também se configura como uma abordagem construtivista, em que os alunos precisam ser agentes ativos na construção de sua própria compreensão matemática, levando em consideração os conhecimentos conquistados no ambiente escolar e no seu cotidiano. Assim, a demanda cognitiva exigida durante as atividades

de proposição de problemas estimula, sobretudo, a autonomia dos alunos e dá significado ao fazer matemática.

Com isso, observa-se que a responsabilidade que os professores delegaram aos alunos durante as atividades de proposição de problemas em sala de aula intensificou momentos de aprendizagem e atribuiu significado à Matemática, uma vez que aos alunos foram incumbidos de explorar, propor, resolver, investigar, reformular, explicar, justificar e representar uma situação-problema, em que estes fazeres matemáticos foram desencadeados a partir do movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (Silva, L., 2013; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Martins, 2019; Santos, E., 2019; Granjeiro, 2020).

Ademais, uma aula de Matemática em que os alunos participam, efetivamente, de atividades de proposição de problemas viabilizou aos alunos manifestarem seus interesses e exporem suas experiências cotidianas (Silva, L., 2013; Brandão, 2014; Silva, 2016; Silveira, 2016), desenvolvendo um trabalho bem-sucedido em grupo (Silveira, 2016; Granjeiro, 2020), ao demonstrarem aptidões e competências matemáticas, como também propiciou desafiar o pensamento matemático deles (Silva, L., 2013; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Martins, 2019; Santos, E., 2019; Granjeiro, 2020).

Como a tecnologia pode ser usada em atividades de proposição de problemas?

Das pesquisas analisadas, observamos que apenas dois estudos fizeram uso de alguns *softwares* - *Wolfram Alpha* (Silva, 2015) e *GeoGebra* (Bezerra, 2017) como ferramentas potencializadoras do caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas, que resultava no surgimento de problemas/questionamentos que permitia aprofundar e ir cada vez mais além nas discussões geradas em sala de aula. Assim, no caso dessas pesquisas, foi observado que o uso desses *softwares* potencializa o surgimento de novos problemas que ajudaram na resolução do problema que estava sendo explorado (neste caso, a proposição de problemas ocorreu durante o processo de exploração e resolução do problema), fomentando, assim, um ambiente de investigação, mediado pelo uso de *softwares* que tiveram a função de motivar e dinamizar a construção do conhecimento matemático.

Na tentativa de trazer mais discussões em salas reais de matemática, que nos ajude a refletir sobre como as tecnologias podem ser usadas em atividades de proposição de problemas, sentimos a necessidade de discorrer sobre alguns estudos do GEPEP, que, *a priori*, não fazem parte das pesquisas que foram selecionadas por nós, isso porque não teve como tema focal a

abordagem de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas ou são investigações que ainda estão em andamento.

Na sua pesquisa de mestrado, Abreu (2018) trabalhou atividades no ensino fundamental e médio com o intuito de explorar os aplicativos: Math Flash Cards Free; Teorema de Tales; Protractor; Math Jump; Math Parking; Matemática Elementar Móvel; e o *Desmos*. Ele percebeu que o aplicativo *Desmos* apresentou maiores possibilidades ao se destacar entre os demais, o que levou a trabalhar o mesmo no ensino de Função Quadrática. Os/as problemas/questões propostos/as tanto pelo professor quanto pelos alunos exigiam dos alunos a capacidade de transitarem entre as representações múltiplas (numérica, algébrica, verbal e gráfica) no ensino de Álgebra, permitindo, assim, o desenvolvimento e a construção dos conceitos referentes ao conteúdo de Função Quadrática. Com relação ao aplicativo *Desmos*, ele ressalta que o modo como o mesmo potencializou a condução das aulas, através da sua mobilidade, interatividade e pluralismo de ferramentas, permitiu a construção de um espaço favorável à aquisição de conhecimentos, onde os alunos foram capazes de desenvolver ideias matemáticas, tornando-se, ainda, protagonistas de sua própria aprendizagem, ao explorar, propor e resolver problemas.

Nesse sentido, o uso do aplicativo *Desmos* sinalizou aspectos positivos que impulsionaram o ensino-aprendizagem de Matemática, provocando inquietação no autor, que o levou a propor e desenvolver uma pesquisa em nível de doutorado, buscando analisar as implicações do uso da calculadora gráfica *Desmos* na Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Abreu, 2024).

Ressaltamos, ainda, um estudo desenvolvido por alguns pesquisadores do GEPEP, inclusive por nós, em que Abreu *et al.* (2024) perceberam as Tecnologias Digitais, a exemplo da calculadora gráfica *Desmos*, como aliadas à proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, viabilizou a compreensão de processos e conceitos matemáticos, como também evidenciou seu potencial para a problematização e a exploração de novos problemas, demonstrando um pluralismo de possibilidades de avançar com a atividade por meio do trânsito entre as representações verbais, algébricas, aritméticas, tabular e gráfica. Com isso, aos autores enaltecem que o uso da calculadora gráfica *Desmos* possibilitou visualizar informações, identificar padrões, criar conjecturas e impulsionar a compreensão de ideias matemáticas, oportunizando aos participantes dinamicidade e interatividade que são limitadas em um ambiente de sala de aula comum, fazendo uso apenas de papel e lápis e/ou lousa e pincel. Diante disso, eles notaram que o uso de Tecnologias Digitais pode potencializar a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, fortalecendo, ainda mais, essa proposta metodológica.

O que sabemos acerca do impacto de se envolver em atividades de proposição de problemas sobre os resultados dos estudantes?

As atividades de proposição de problemas propiciam um impacto positivo na aprendizagem dos alunos, em virtude de serem atividades cognitivamente exigentes e que fornecem contextos intelectuais que impulsionam o desenvolvimento matemático dos alunos (Cai *et al.*, 2015).

O engajamento dos alunos em atividades de proposição de problemas intensificou a compreensão de conteúdos e/ou conceitos matemáticos, potencializou a capacidade de pensar matematicamente e fomentou o interesse e a motivação dos alunos, isto é, maximizou momentos de aprendizagem, oportunizando a apreensão: das representações múltiplas de funções (Silva, L. 2013; Brandão, 2014; Silva, 2015), das ideias essenciais de Análise Combinatória (Silveira, 2016; Santos, E., 2019), das ideias/significados da multiplicação e divisão (Silva, 2016), das Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistema Lineares (Martins, 2019) e dos significados essenciais de frações (Granjeiro, 2020).

Contudo, Cai *et al.* (2015) argumentam que incentivar os alunos a propor problemas não apenas promove a compreensão do aluno acerca de uma situação-problema, mas também impulsiona o desenvolvimento de estratégias mais avançadas de resolução de problemas.

As pesquisas de Brandão (2014), Silveira (2016) e Martins (2019) revelam que os alunos incorporaram a Proposição de Problemas a partir da proposta de Exploração de Problemas. E, por sua vez, não se contentaram em apenas propor um problema e resolvê-lo, mas propuseram novos problemas ao problematizarem os possíveis caminhos que possibilitam apreender a tarefa proposta com mais profundidade, melhorando sua *performance*, evidenciando múltiplos processos/procedimentos de resolução, chegando, assim, à solução dos problemas, à geração de novos problemas e novos conteúdos, a partir do processo desencadeado pelo movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado.

Além do mais, a proposição de problemas, principalmente como ponto de partida, desconstrói um tipo de prática enraizada nas salas de aulas de Matemática, que direciona a responsabilidade do problema para o professor ou para o livro didático. Nesse sentido, observa-se que algumas crenças dos alunos sobre como eles podem aprender Matemática acabam sendo ressignificadas, isto é, as oportunidades de aprendizagem são intensificadas quando eles são desafiados a propor seus próprios problemas. Em consequência disto, os estudantes são mais ativos na construção do seu conhecimento matemático, fortalecem sua autonomia e o

desenvolvimento de atitudes; e se sentem felizes por estarem sendo protagonistas em sala de aula.

(IV) Formação de professores que ensinam Matemática

Dentre as pesquisas selecionadas, duas delas, as de Bezerra (2017) e Martins (2019), tiveram como foco a formação do professor, mais especificamente, a formação inicial de professores no curso de Licenciatura em Matemática.

Bezerra (2017) buscou trabalhar o conceito de função e as representações de função com compreensão via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, sob duas perspectivas: compreensão do conceito em si e como forma de despertar a reflexão sobre suas práticas como futuros professores de Matemática.

Inicialmente, ela notou, que os futuros professores precisavam da confirmação do professor-pesquisador sobre a resolução bem-sucedida do problema. No entanto, durante o desenvolvimento da pesquisa, houve uma mudança significativa desta postura e na autonomia dos futuros professores, uma vez que passaram a buscar menos a confirmação, e eles mesmos verificavam e exploravam diferentes aspectos nas situações propostas indo além da resolução do problema.

A metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas muito contribuiu para que os professores em formação inicial se tornassem mais ativos e trabalhassem o conceito e as representações de função de forma mais compreensível, possibilitando a eles refletirem também sobre suas práticas como futuros professores de Matemática (Bezerra, 2017).

Martins (2019) buscou analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de problemas, aliadas às Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistema Lineares em uma turma do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática.

Sobre a abordagem de Resolução de Problemas trabalhada em aula de aula, Martins (2019) enaltece a importância da mediação-refutação do professor, uma vez que isso ficou evidente no desenvolvimento de oficinas, em especial, nos diálogos, quando os professores em formação inicial apontaram que essas interações os fazem refletir sobre o seu próprio processo de ensino-aprendizagem. Sobre isso, ela explica que esse tipo de reflexão está escasso nas salas de aulas, pois os alunos não utilizam suas habilidades metacognitivas para resolver problemas.

Martins (2019) compreende que o licenciando precisa ter contado direto, durante sua formação, com situações que o levem a refletir e compreender a Matemática como campo de

conhecimento, sobretudo, tendo em vista que o conhecimento construído nesse caminhar pode ampliar a visão dos futuros professores, estimulando o desenvolvimento de práticas em sala de aula que possibilitem uma matemática com mais compreensão, fazendo sentido para os alunos. Uma alternativa encontrada pela autora, que impulsionou a formação dos licenciandos, foi a metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, visto que contribuiu para a construção de uma nova postura dos futuros professores frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Com isso, percebendo que os estudantes, de forma superficial, conheciam princípios teóricos sobre a Resolução de Problemas no ensino de Matemática, mas que possuíam pouco contato com a Resolução de Problemas enquanto metodologia de ensino, ela sugere a necessidade da disciplina “Ensino da Matemática via/através da Resolução de Problemas” nos cursos de Licenciatura em Matemática e Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, visando aprimorar as concepções dos estudantes e proporcionar experiências dentro das perspectivas atuais de Resolução de Problemas, visando, sobretudo, tornar o trabalho com a resolução de problemas mais significativo no ensino de Matemática, especialmente para os futuros professores.

Por mais que as outras pesquisas não tenham sido desenvolvidas no âmbito da formação inicial ou continuada, observa-se que alguns pesquisadores do GEPEP trazem reflexões que têm implicações diretas da metodologia de Exploração, Proposição, Resolução de Problemas para a formação do professor que ensina Matemática.

Amparado à proposta “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas (EPRCDP)”, que propiciou um olhar multicontextual para sala de aula de Matemática, Santos, R. (2019, p. 162) argumenta que “[...] os cursos que formam professores precisam preparar profissionais que ensinem para além da sala de aula, para além de um trabalho, mas para a vida, para também formar um cidadão ativo”. Com isso, ele propõe que o seu trabalho pode ser discutido dentro da temática da formação de professores, justificando que “alunos conscientes e cidadãos ativos são um reflexo da formação de professores que tiveram” (*Ibid*, p. 162).

Nessa perspectiva, Araújo (2016) chama atenção para o que, de fato, ocorre em uma sala de aula via Exploração, Proposição, Resolução de Problemas, e partir de sua pesquisa e prática docente, ela explica que uma postura do professor frente à exploração de problemas consiste em sempre está aberto ao inesperado, com isso, não deve limitar sua aula ao que foi planejado, mas, sim, explorar as possibilidades de explorações que surgiram dos alunos e que não foi antecipado.

Granjeiro (2020) constatou que a referida metodologia oportuniza e sinaliza para o professor o que e como o aluno, possivelmente, está pensando e entendendo quanto ao conceito ou conteúdo que está sendo abordado, que conflitos cognitivos e sociais estão sendo expostos, elucidando, assim, uma mediação mais objetiva, levando à obtenção de maior êxito no ensino e na aprendizagem. Sobre o processo de mediação, ela ressalta que deve estar amparado à articulação e ao esclarecimento de dúvidas postas durante as explorações, sendo necessária no e para o processo de descoberta, criatividade e criticidade durante a implementação das atividades.

Silva, A. (2013), Silva, L. (2013), Brandão (2014), Silva (2016) e Silveira (2016) percebem a pesquisa desenvolvida no cotidiano em sala de aula como uma prática imprescindível para a formação profissional do professor que ensina Matemática.

Sobre isso, Silva, A. (2013) ressalta que o diálogo entre a experiência e a própria pesquisa ou a pesquisa de colegas promove reflexões sobre práticas bem-sucedidas que podem ser adaptadas para a nossa realidade. Assim, o autor sugere que, no desenvolvimento profissional do professor, deve haver a pesquisa e a formação continuada, possibilitando ao professor ter acesso a metodologias inovadoras e teorias educacionais. Desse modo, o pesquisador ressalta que sua pesquisa contribui para a discussão sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, tendo implicações na formação inicial e continuada de professores, possibilitando estudos referentes ao ensino e à aprendizagem desse tópico, apontando considerações e reflexões, resultado de um olhar voltado para a sua sala de aula, a partir de uma intervenção, e da existência de oficinas focadas na metodologia de Exploração de Problemas e de pesquisas referentes ao tema.

Silva, L. (2013) trabalhou no 1º ano do Ensino Médio com as cinco grandes ideias de funções, e notou limitações na sua pesquisa, pois não conseguiu explorar com profundidade todas elas, sugerindo que essa é uma tarefa que pode se estender até o chão da Universidade. Com isso, ele percebeu a necessidade de dar continuidade às investigações tendo em vista a formação de professores e de currículos, ao focar no desenvolvimento de uma compreensão de ideias essenciais de funções. O pesquisador aponta a necessidade de contribuir na elaboração de propostas curriculares de Matemática e na formação de professores que possam, além de se orientar pelas ideias essenciais de funções, sugerir um trabalho em sala de aula na perspectiva da metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

Brandão (2014) notou que a abordagem de Resolução de Problemas trabalhada por ele em sala de aula possibilitou aos alunos compreenderem melhor o conteúdo de função e, com isso, essa metodologia contribuiu significativamente para o ensino do professor e aprendizagem

do aluno. Ele explica que aprendeu muito durante todo o processo, uma vez que a pesquisa permitiu fazer reflexões sobre sua própria prática, de modo que desenvolveu a identidade profissional, pois o pesquisador observou que melhorou sua prática, já que a intervenção em sala de aula via Exploração, Proposição, Resolução de Problemas o propiciou: escutar mais os alunos; deixar que eles coloquem suas opiniões e os questionamos para que tentassem chegar a uma solução por si só; aceitar mais outras opiniões e não apenas aquela que já esperávamos.

Enquanto Silva (2016) ressalta que a pesquisa propiciou refletir sobre sua própria prática docente, possibilitando/instigando novos olhares, em que o leque de reflexões e análises contribuiu para a sua formação continuada enquanto Pedagoga, o que fomentou a curiosidade e o prazer por investigar o ensino-aprendizagem da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nessa direção, Silveira (2016) explica que as experiências vivenciadas em sala de aula proporcionaram um diálogo entre a teoria e a prática, trazendo reflexões sobre como os alunos mobilizam seus conhecimentos no estudo de Análise Combinatória, a partir de uma perspectiva inovadora do tema apoiada em uma abordagem de Resolução de Problemas. Assim, ele argumenta que a pesquisa e a prática de sala de aula em Educação Matemática têm causado impacto positivo na ressignificação das aulas de Matemática, pois trazem contribuições para a formação dos professores que ensinam Matemática, visto que os resultados de uma pesquisa que envolve cotidiano de sala de aula podem fazer com que os professores em formação inicial e continuada, bem como o próprio pesquisador, reflitam sobre suas práticas na medida em que é promovida uma substancial melhora no ensino-aprendizagem de Matemática.

Dentre os outros pontos, todas as pesquisas analisadas foram desenvolvidas no cotidiano de sala de aula, na modalidade de pesquisa pedagógica, isto é, o professor é o pesquisador em sua própria sala de aula, isto é, “[...] a pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula e o principal pesquisador em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica é o professor cuja sala de aula está sob investigação” (Lankshear; Knobel, 2008, p. 13).

Andrade (2008) explica que o professor como pesquisador e a crença de que o impacto da pesquisa na transformação da sala de aula acontece com maior possibilidade quando o pesquisador é o próprio professor.

Nesse sentido, na pesquisa pedagógica, o professor avalia os efeitos positivos dos seus métodos de ensino na aprendizagem dos alunos, buscando detectar o que pode mudar em sua prática docente, que, por sua vez, ele aprende com a sua própria prática pedagógica, promovendo impactos positivos em sua formação profissional.

Outrossim, a identidade profissional do professor é construída na busca do significado social da profissão, num processo reflexivo de si mesmo. Ela se consolida também a partir da reafirmação de práticas consagradas culturalmente e que permanecem significativas e dos confrontos entre teorias e práticas que permeiam a sala de aula (Pimenta, 2007).

É consensual que os professores, no processo de desenvolver-se profissionalmente, tomam inúmeras decisões (conscientes ou não) sobre o que aprender, como fazê-lo, o que alterar em sua prática (ou não), o que alterar e/ou ampliar em seus saberes (ou não) etc. A prática é o elemento central do desenvolvimento profissional, então torná-la mais significativa e eficiente é o principal objetivo do desenvolvimento profissional (Ferreira, 2003). Contudo, a pesquisadora percebe a metacognição no desenvolvimento profissional do professor como um processo amplo que envolve a ação de refletir sobre objetos específicos (sobre si mesmo, suas dificuldades e potencialidades sobre sua prática, etc.) e indo além, desencadeando ações de outra natureza (buscar formas de estar ciente de seus saberes e práticas, descobrir maneiras de autorregular, etc.) que podem levar a essas mudanças.

Refletindo sobre o processo da metacognição no nosso desenvolvimento profissional, indagamos: Quem éramos antes da pesquisa em sala de aula? Quem somos pós-pesquisa? Para dar conta destas questões, vamos listar fatos que, sob a nossa ótica, têm se revelado de suma importância para transformação/reinvenção da nossa sala de aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. A seguir, sintetizamos como víamos a nossa sala de aula matemática antes do contato com a respectiva abordagem de Resolução de Problemas:

- Acreditamos que não tínhamos a sensibilidade para perceber o momento aprendizagem dos alunos;
- Não valorizávamos os conhecimentos prévios dos alunos, conseqüentemente, não era criado um ambiente em que oportunizava os alunos a refletirem e compreenderem suas próprias descobertas;
- Tínhamos dificuldades de entender até onde vai o processo de mediação;
- As discussões em sala de aula se limitavam apenas à busca da solução do problema, nunca ia além da resolução e solução do problema;
- As discussões se limitavam às questões internas da própria Matemática (visão cognitiva/internalista);
- Era uma prática pedagógica centrada no professor e a Resolução de Problemas era trabalhada como aplicação do conteúdo.

Deste processo reflexivo, sintetizamos como a metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas transformou a nossa sala de aula de Matemática, impactando, assim, a nossa formação profissional. Vejamos os pontos a seguir:

- Pensar o problema como ponto de partida de uma aula de Matemática. Nesta perspectiva, o problema passa a ser percebido como um agente que pode desencadear o processo de construção de conceitos e conteúdos matemáticos;
- Com a realização de um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas, houve um descontentamento em parar na resolução e solução do problema, fruto de um caminhar que enfoca a exploração e proposição de problemas em perspectivas múltiplas (cognitiva e sócio-político-cultural);
- Compreender que uma aula de Matemática via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas é sempre inacabada, isto é, o professor pode retomar diferentes discussões para ampliar e aprofundar a compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos;
- Permitiu perceber que os alunos podem aprender Matemática não só resolvendo problemas, mas também propondo problemas – antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas;
- Possibilitou idealizar o ensino de Matemática não apenas numa concepção cognitiva/internalista, mas também contemplar um olhar externalista para o conhecimento matemático, versando sobre a dimensão sócio-político-cultural;
- Percebemos o momento da aprendizagem dos alunos propondo questões a partir das ideias levantadas por eles, por meio da mediação-refutação, de tal forma que ajudassem eles a refletirem e avançarem no processo de pensamento.

Embora estas reflexões sejam frutos de um olhar para nossa própria pesquisa e prática docente, percebe-se, nas pesquisas analisadas, que os pesquisadores do GEPEP foram tocados assim como nós, e esboçaram múltiplos olhares para uma sala de aula de Matemática com foco na metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, que parecem convergir com as transformações de uma sala de aula de Matemática elencadas acima. Além disso, alguns movimentos didáticos sobre como os professores podem aprender a ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas começam a tomar forma.

Por fim, argumentamos, ainda, que os estudos desenvolvidos pelos membros do GEPEP possibilitaram perceber melhor o cotidiano da sala de aula e a importância dele para a formação do professor, de modo que vivenciaram sua própria proposta didática, permitindo perceber como os alunos apreendem o que está sendo ensinado em sala de aula.

5.2 Elucidando movimentos didáticos no trabalho com Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

O mapeamento das pesquisas do GEPEP remeteu às reflexões que elucidaram a relevância da proposta de **“Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas”** no trabalho em sala de aula, uma vez que ajudou a perceber movimentos didáticos que nos auxiliou no desenvolvimento de um curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática por meio de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas de Matemáticas.

Assim, sintetizamos as principais descobertas oriundas das pesquisas do GEPEP. Para aprofundarmos, selecionamos e reformulamos algumas questões propostas por Lester e Cai (2016) com o intuito de entender como o professor pode ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Contudo, percebemos que essa empreitada carecia de mais atenção, por isso sentimos a necessidade de olhar/ver como o Prof. Dr. Silvanio de Andrade, pai da proposta de Exploração de Problemas, orquestrou-a no âmbito de uma disciplina e nos encontros do GEPEP.

5.2.1 Notas de aulas – uma experiência de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na pós-graduação

A seguir, realizaremos uma análise teórico-prático-reflexiva e didático-pedagógica de duas atividades trabalhadas pelo pesquisador Silvanio de Andrade, no semestre letivo 2022.1, no âmbito da disciplina **“Resolução, Proposição e Exploração de Problemas e Construtivismo Social”**, ofertada pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM-UEPB), com foco na proposta de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**. Os participantes foram mestrandos e doutorandos, com experiência no ensino-aprendizagem de Matemática, Física e Biologia.

Atividade 1 - “Na loja da esquina do meu quarto, cada quilo de batata custa 3 reais. No mercado atacadista, que fica longe de casa, cada quilo de batata custa 2 reais, mas tenho

que gastar 5 reais em passagens de ônibus para ir e voltar” (Traduzido, com adaptação da moeda em real).⁴³

A aula foi realizada de forma remota em decorrência da pandemia da COVID-19, via plataforma *Google Meet*. Durante a aplicação da atividade o pesquisador solicitou que os participantes proponham, explorem e resolvam problemas.

Depois de finalizar o tempo dado para a realização da tarefa, abre-se um espaço para que os propositores compartilhem suas descobertas em forma de problemas, problematizações e novos caminhos de explorações que se ampliam à medida que as discussões se aprofundam.

No total, foram propostos 15 problemas, entre os quais alguns problematizaram a situação-problema com base nas informações dadas, levantando questionamentos que, quando sanados, ajudavam a entender qual a melhor das opções e em que circunstâncias seria vantajoso comprar na loja da esquina ou no mercado atacadista. Veja, a seguir, alguns problemas propostos:

P1: Quantos quilos serão necessários comprar no mercado atacadista para que possa compensar o gasto do transporte?

P2: Com base nas informações apresentadas, a partir de quantos quilos é vantajoso comprar batatas no mercado atacadista?

Por outro lado, alguns participantes avançaram no trabalho de proposição de problemas ao adicionar novos elementos à situação-geradora de problemas, o que possibilitou ampliar a discussão, evidenciando a importância da exploração de problemas durante o processo de proposição de problemas. Ou seja, há sempre novos caminhos a serem explorados a partir de novos problemas e reformulações, como também a própria resolução do problema pode ser o ponto de partida para novos problemas. Vejamos algumas proposições:

P3: Preciso comprar 10kg de batatas e não quero ter que gastar com transporte até o mercado atacadista, mesmo sabendo que o preço é mais barato. Vou conversar com o gerente da loja da esquina do meu apartamento e pedir um desconto equivalente ao que gastaria indo comprar no mercado atacadista. De quanto deve ser esse desconto?

P10: Se o dono da vendinha me der um desconto de R\$ 0,25 a cada quilo que eu comprar a partir de 5kg, quantos quilos serão necessários comprar para que, no atacadista, compense o que gasto na feira?

⁴³ MALASPINA, U.; TORRES, C.; RUBIO, N. How to Stimulate In-Service Teachers' Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing. In: LILJEDAHN, P.; SANTOS-TRIGO, M. (eds.). **Mathematical Problem Solving**. ICME-13 Monographs. Switzerland: Springer, 2019, p. 133-151.

Notamos que, no momento em que o pesquisador percebeu que havia uma variedade de problemas para lidar e que possivelmente não daria conta de todos eles durante a aula, resolveu selecionar os problemas propostos por P4,

P4: Quais as motivações que te levarão a comprar na loja da esquina? Quais as motivações que te levarão a comprar no mercado atacadista? Existe hoje uma narrativa de valorização dos mercados locais. Você concorda com essa narrativa? Quais são as implicações sociais na valorização dos mercados de bairro? Qual a diferença nos gastos, caso faça a opção de comprar no mercado atacadista? Comprei 100kg no mercado atacadista para revender no meu quarteirão a R\$ 2,70. Valerá a pena?

Com isso, as reflexões durante a aula adquiriram um novo direcionamento, visto que questões de natureza sócio-político-cultural surgiram e foram enfatizadas pelos participantes como uma das justificativas pela opção de comprar batata no mercado da esquina ou no mercado atacadista. Assim, observa-se que este participante não se limitou apenas a uma abordagem com foco em aspectos cognitivos da atividade. Ele, como outros participantes, não se contentou em apenas propor um problema e resolvê-lo, mas promoveu um processo de problematização que culminou em novos problemas que ajudariam a interpretar a situação-problema em perspectivas múltiplas (visão internalista e externalista). Nesse caso, operacionalizaram a proposição de problemas a partir da proposta de Exploração de Problemas.

Observamos que a resolução dos problemas propostos, *a priori*, não era o mais importante. Entretanto, em um determinado momento da aula, a solução dos problemas ajudou a interpretar a situação-geradora de problemas, emergindo como foco durante o movimento de exploração de problemas. Assim também, os participantes explicitaram as funções correspondentes à loja da esquina e ao mercado atacadista, e posteriormente foram analisadas as vantagens e desvantagens. Vejamos a seguir:

Loja da esquina:

$$f(x) = 3x$$

Mercado atacadista:

$$g(x) = 2x + 5$$

Loja da esquina x Mercado atacadista:

$$f(x) = g(x)$$

$$3x = 2x + 5$$

$$3x - 2x = 5$$

$$x = 5$$

Dessa forma, os participantes perceberam, durante o processo de proposição, exploração e resolução de problemas, que até 5kg de batatas o gasto seria o mesmo, tanto na Loja da

esquina, como no Mercado atacadista. No entanto, a partir de 6kg seria mais vantajoso comprar no mercado atacadista. Tal percepção foi ratificada durante a resolução dos problemas (como explicitado acima) que problematizava este aspecto.

Com isso, as discussões começaram a se concentrar nos conteúdos e conceitos matemáticos que contemplavam os problemas propostos, quando o problema a seguir se tornou o foco da discussão:

P15: Qual a inclinação de cada uma das retas que modelam o problema? Em termos práticos e/ou matemáticos, qual a diferença entre o coeficiente angular e a taxa de variação numa situação gráfica? O que esses valores querem comunicar?

A partir do movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado**, foram propostos diferentes problemas e, para intensificar o processo de exploração de problemas, foram apresentados múltiplos processos/procedimentos de resolução dos problemas. Assim, o aprofundamento das discussões possibilitou abordar as representações múltiplas de funções e transitar entre elas: verbal, numérica, algébrica e gráfica.

Observamos que, nesta atividade, a proposição de problemas ocorreu, principalmente, **antes** do processo de resolução e exploração de problemas. A proposição de problemas pode ocorrer tanto **antes** como **durante** e **depois** do processo de resolução e exploração de problemas. Contudo, o ideal é que a proposição de problemas seja sempre o ponto de partida de todo o processo de resolução e exploração de problemas (Andrade, 2017).

Sobre isso, Silveira e Andrade (2022) explicam que a proposição de problemas ocorre **antes** do processo de resolução e exploração de problemas, quando o foco principal não é a solução, e sim a proposição de novos problemas, tomando como ponto de partida alguma situação que tenha ligação com a Matemática ou com alguma experiência vivenciada pelo aluno. Desse modo, em algum momento os problemas propostos serão resolvidos. De outra forma, a proposição de problemas ocorre **durante** o processo de resolução e exploração de problemas, quando, a partir de um problema, são formulados e explorados novos problemas, tanto pelo professor como pelos alunos. Ao fim, podem-se fornecer *insights* ao solucionador, possibilitando a solução do problema inicial, como também potencializam e aprofundam o conceito matemático que está sendo construído. Ressaltamos ainda que a proposição de problemas pode ocorrer **depois** do processo de resolução e exploração de problemas, quando a (re)solução de um problema impulsiona um processo de reflexões e sínteses, gerando novos conteúdos e problemas em nível mais avançado ou não e provocando, assim, uma aprendizagem com compreensão.

Então, percebe-se que a proposição de problemas também ocorreu **durante e depois** do processo de resolução e exploração de problemas. Essas fases foram intensificadas no segundo momento da aplicação da atividade, em que foi solicitado que se refinasse/temperasse (colocar em nova redação, num nível que se considera ainda melhor, mais adequado ou mais aprofundado) pelo menos dois dos problemas propostos. Ou seja, deveriam ser reformulados alguns dos problemas, tomando como base novas problematizações que pudessem emergir no processo de exploração de problemas.

Além do mais, na proposta de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, tal movimento, de idas e vindas, é amparado à orientação teórico-prática de retomar um/uma problema/atividade para seu aprofundamento e/ou refinamento, tomando como ponto de partida os trabalhos realizados em torno do problema ou situação-problema e novas discussões que possam vir a surgir durante contínuos processos de exploração de problemas (novos caminhos de problematizações que o processo de exploração de problemas estava assinalando).

Atividade 2: Episódio vivenciado por “Andrade”

A segunda atividade foi inspirada em uma situação real vivenciada pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade. Contextualizaremos essa situação-problema por meio de uma narrativa descrita de forma mais fidedigna possível ao episódio vivenciado por ele. Nela, o professor será chamado apenas de “Andrade”.

Andrade é um professor de Matemática, amplamente preocupado com questões de (in)justiça social. Por esse fato, sua abordagem em sala de aula se concentra em problemas sobre a Matemática em conexão com outros campos do conhecimento, os quais possibilitem refletir sobre questões de (in)justiça social, que se configuram e reconfiguram em nossa sociedade e carecem de um olhar humanístico, sensível e transformador.

Andrade ensina aos seus alunos que não devem silenciar diante de uma situação de injustiça social, e isso é um reflexo de suas atitudes diárias, uma vez que ele usa a Matemática para fazer intervenções em seu cotidiano. A seguir, apresentamos, em forma de uma **atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática**, um episódio real que Andrade vivenciou, interveio e transformou de forma astuta e brilhante.

Narrativa: Qual é o preço justo?

Chegando as festas de final de ano, é comum as lojas promoverem promoções para finalizar seus estoques. Andrade entrou em uma determinada loja, com filiais em todo o Brasil,

que estava com a seguinte promoção **leve 3 pague 2** (a peça que sairá de graça deve ser de igual ou menor valor. Promoção válida enquanto durarem os estoques).

Ele escolheu os produtos que iria levar, dirigiu-se ao caixa e disse:

— Boa tarde, moça.

— Olá, boa tarde, senhor!

Em seguida, Andrade solicitou que a moça do caixa registrasse suas compras. Ao ver o valor da compra, ele interveio:

— Há alguma coisa errada. De acordo com os meus cálculos, esse não é o valor real da compra.

A moça afirmou:

— Acho que o senhor se equivocou nas suas contas. O sistema está programado para realizar os cálculos de forma precisa.

Observe abaixo a nota fiscal contendo os produtos que seriam comprados, descontos e o valor final:

Quadro 8: Nota fiscal 1

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01- Cueca	15,90	4,71	15,90
02 - Cueca	15,90	4,71	15,90
03 - Cueca	15,90	4,71	15,90
04 - Cueca	19,90	5,89	19,90
05 - Cueca	19,90	5,89	19,90
06 - Cueca	19,90	5,89	19,90
07 - Meia	29,90	0,00	29,90
08 - Meia	9,90	0,00	9,90
09 - Meia	9,90	0,00	9,90
10 - Cueca	29,90	0,00	29,90
Valor Total dos Produtos R\$			187,00
Valor Pago R\$			155,20
Desconto			31,80

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Todos que estavam na fila do caixa direcionaram suas atenções para o diálogo entre Andrade e a moça do caixa. Ele, confiando nos seus conhecimentos matemáticos, falou:

— Eu não vou levar essa compra, pode desfazer! E todos atentos observavam como ele poderia provar a veracidade de suas reivindicações.

Depois de encerrar a compra, o astuto Andrade resolveu intervir, visando mostrar a injustiça que o levou ao inconformismo. Ele afirmou:

— Faça o seguinte, na primeira compra passe os três kits cueca (R\$ 15,90), dois kits de meias (R\$ 9,90) e os outros dois kits de meias (R\$ 29,90). Agora em outra compra, quero que você passe os três kits de cuecas (R\$ 19,90). Veja as notas fiscais das duas compras, abaixo:

Quadro 9: Nota fiscal 2

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01– Cueca	15,90	5,30	15,90
02 – Cueca	15,90	5,30	15,90
03 – Cueca	15,90	5,30	15,90
04 – Meia	9,90	0,00	9,90
05 – Meia	9,90	0,00	9,90
06 – Meia	29,90	0,00	29,90
07 – Cueca	29,90	0,00	29,90
Valor Total dos Produtos R\$			127,30
Valor Pago R\$			111,40
Desconto			15,90

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Quadro 10: Nota fiscal 3

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01– Cueca	19,90	6,63	19,90
02 – Cueca	19,90	6,63	19,90
03 – Cueca	19,90	6,64	19,90
Valor Total dos Produtos R\$			59,70
Valor Pago R\$			39,80
Desconto			19,90

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Ao fim, Andrade provou que, de fato, o valor inicial gerado no ato da compra não era condizente com a promoção vigente. Todos, a moça do caixa e os clientes presentes, ficaram impressionados com a forma como Andrade interveio em uma situação de injustiça social.

A seguir, descrevemos e analisamos como o Prof. Dr. Silvanio de Andrade trabalhou essa atividade na ótica da metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas. Nosso propósito é captar movimentos didáticos sobre como ele mediou essa atividade em sala de aula. No **primeiro momento**, o pesquisador solicitou que os participantes propusessem problemas a partir da nota fiscal abaixo:

Quadro 11: Nota fiscal 4

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01- Cueca	15,90	4,71	15,90
02 - Cueca	15,90	4,71	15,90
03 - Cueca	15,90	4,71	15,90
04 - Cueca	19,90	5,89	19,90
05 - Cueca	19,90	5,89	19,90
06 - Cueca	19,90	5,89	19,90
07 - Meia	29,90	0,00	29,90
08 - Meia	9,90	0,00	9,90
09 - Meia	9,90	0,00	9,90
10 - Cueca	29,90	0,00	29,90

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Após os participantes formularem e compartilharem os problemas que foram propostos, inicia-se o **segundo momento**, no qual o pesquisador acrescenta um novo elemento que possibilita ampliar o movimento de problematização, isto é, ele ressalta que os produtos acima estão sob a seguinte promoção: **leve 3 pague 2** (a peça que sairá de graça deve ser de igual ou menor valor. Promoção válida enquanto durarem os estoques). Com isso, os participantes formularam novos problemas.

No **terceiro momento**, o pesquisador forneceu aos participantes a “Nota fiscal 1”, apresentada acima, e eles ficaram incumbidos de propor problemas. Dentre os diferentes problemas propostos, observou-se a ligação entre as notas fiscais 1 e 2 e a promoção oferecida pela loja. Assim, a partir do processo de problematização, que culminou em diferentes problemas os quais ajudaram a desvendar o ocorrido, descobriu-se como, em algumas compras específicas, como no caso de Andrade, a promoção oferecida pela loja não é aplicada integralmente.

Com relação à operacionalização da atividade, observamos a criação de um movimento de problematização resultante da Exploração de Problemas que contemplou algumas **fases de**

proposição de problemas. Ademais, notamos ainda que a proposição de problemas ocorreu **antes** do processo de resolução e exploração de problemas. Sobre isso, percebe-se que os/as problemas/questões propostos/as, quando solucionados/resolvidas, trouxeram reflexões que desencadearam uma compreensão da realidade exposta na nota fiscal.

Ressaltamos, ainda, que, os/as problemas/questões propostos/as pelos participantes possibilitaram pensar sobre a proposta da atividade em diferentes perspectivas, pois não só contemplavam um olhar para a natureza dos conceitos matemáticos, mas ressaltavam algumas preocupações que possibilitam refletir sobre os interesses e o funcionamento da sociedade. Algumas delas são: **Ao perceber que a promoção “Leve três pague dois” não foi aplicada corretamente, um consumidor expôs sua indignação e, no primeiro momento, não realizou a compra. Qual foi a importância da atitude do consumidor? A loja foi “esperta” ou o sistema foi programado de forma errônea? Qual o valor justo a ser pago? Para chamar a atenção dos consumidores, a loja propõe uma promoção do tipo “Leve três pague dois”. Qual o desconto percentual dado nesse tipo de promoção?**

A Resolução de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas não se contenta apenas com a solução. O mesmo ocorre com a Proposição de Problemas. Ou seja, não basta apenas propor e resolver o problema, mas explorar os possíveis caminhos que possibilitem apreender a situação como um todo. Desse modo, em algum momento a resolução e a solução dos problemas possibilitam avançar, inclusive, com o surgimento de novos problemas que possibilitem avançar cada vez mais. O movimento pedagógico de ir além da proposição e a resolução de problemas, desencadeada no processo de exploração de problemas, ora leva a um problema, ora à resolução e à solução, ora a uma leitura de mundo a partir do surgimento de questões de cunho sócio-político-cultural, ora a um conceito matemático.

Sobre isso, nota-se que os/as problemas/questões propostos/as pelos participantes não foram pensados apenas em termos de processos e conceitos matemáticos (visão cognitiva/internalista), mas também contemplam a dimensão sócio-político-cultural para o conhecimento matemático (visão externalista).

Com isso, no desenvolvimento da atividade, a Matemática foi concebida como uma ferramenta que impulsiona e evidencia de que forma podemos agir como indivíduos críticos e ativos a partir do conhecimento matemático, possibilitando-nos refletir sobre como fazer intervenções em nosso cotidiano, diante de uma situação de injustiça social. Nesse caso específico, a Matemática influenciou diretamente na atitude do consumidor que identificou e solicitou o valor justo e, ao não ser atendido, não só cancelou a compra, mas fez uma nova compra, evidenciando a todos os presentes que sua alegação de injustiça no ato da primeira

compra era cabível e digna de atenção. O fato é que, ao fazer uso da Matemática para defender seus direitos, pode ter inspirado mais pessoas que estavam na loja a perceber que não se deve silenciar diante de uma situação de injustiça social.

Por fim, as reflexões e sínteses geradas em sala de aula levaram à compreensão da nota fiscal, a partir do surgimento de alguns conceitos e conteúdos matemáticos, a saber: as operações fundamentais de Adição e Subtração, Cálculo Percentual, Proporção, Descontos, Resolução de Equação do 1º grau, entre outros.

5.2.2 Orquestrando uma sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

No artigo intitulado “*Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research*” (A Resolução de Problema matemático pode ser ensinada? Respostas preliminares de 30 anos de pesquisa), Lester e Cai (2016) analisam, a partir dos achados de 30 anos de pesquisas em Resolução de Problemas, sobre como orquestrar uma sala de aula de Matemática via/através da Resolução de Problemas. Para isso, os autores buscam responder a alguns questionamentos que consistem em entender, a saber: se o ensino de matemática através de problemas requer mais tempo do que as abordagens mais tradicionais, bem como qual o tipo de comprometimento de tempo que é necessário para ensinar Matemática através da Resolução de Problemas; e elucidar como os professores podem orquestrar pedagogicamente a Resolução de Problemas em sala de aula. Inclusive, concordamos com as reflexões dos autores acerca destas questões.

Essas questões são pensadas a partir do ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. No entanto, ao percebermos que esses questionamentos são pertinentes na abordagem metodológica de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, buscamos refletir sobre elas a partir das pesquisas do GEPEP. Para isso, reformulamos essas questões e as analisamos com o propósito de compreender movimentos e facetas a respeito de como orquestrar uma sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas requer mais tempo que as abordagens tradicionais? Que tipo de compromisso é necessário para ensinar via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas?

De fato, uma aula pensada/idealizada via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas requer sensibilidade do professor sobre o seu papel em sala de aula, cuja responsabilidade de conduzir direcionamentos e orientações por meio da mediação-refutação

devem alocar o aluno como ator principal de sua própria aprendizagem. Nesse tipo de aula, a operacionalização demanda tempo e foge de qualquer planejamento, o qual muitas vezes é idealizado/cronometrado numa aula tradicional.

Por sua vez, as pesquisas do GEPEP evidenciam que, quando operacionalizamos uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, pretendemos promover uma aprendizagem com compreensão. Para isso, uma das **orientações teórico-práticas** nessa metodologia de ensino consiste em propor um problema ou uma situação-problema que potencialize um movimento de problematização, em que novos problemas são propostos tanto pelo professor como pelos alunos. Sendo assim, o limite de tempo para explorar, propor, resolver, refinar e aprofundar a atividade proposta, na maioria das vezes, não é controlado pelo professor, mas vivenciado, extrapolando o que ele imaginava/propunha para a condução da aula. Como numa viagem em que se sabe aonde quer chegar, mas não sabe o caminho, o ensino de Matemática nessa perspectiva é marcado por descobertas que extrapolam o que o professor tentou antecipar durante a aula. Nesse contexto, novos trabalhos, novas reflexões e novas sínteses possibilitam percorrer também novos horizontes, inclusive não pensar no problema apenas numa dimensão cognitiva, mas transpor essa perspectiva, ao tratar de questões de natureza sócio-político-cultural.

Desse modo, essa proposta se destaca por ser aberta, porém não solta, o que implica que um episódio de sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é inacabado. À vista disso, a qualquer momento podemos retornar ao problema anterior em busca de apresentar um novo conceito ou conteúdo em um nível mais avançado ou não.

Durante suas abordagens em sala de aula, os pesquisadores Brandão (2014) e Silveira (2016) retomaram a discussão de alguns problemas, discutidos anteriormente, com o intuito de aprofundar, refinar, relacionar ou sistematizar uma nova ideia matemática. Além disso, a pesquisa de Silveira (2016) revela que, quando os alunos recorrem aos problemas anteriores, apresentam uma compreensão conceitual mais profunda, visto que conseguem perceber relações matemáticas e procedimentos matemáticos inerentes à estrutura conceitual dos problemas.

Sobre isso, algumas pesquisas ressaltaram que os alunos, no decorrer das aulas, melhoraram seu rendimento, resolvendo problemas com muito mais autonomia, sem precisar frequentemente da confirmação do professor-pesquisador sobre o trabalho realizado. Isso ocorreu tanto com alunos da Educação Básica (Brandão, 2014; Silva, 2016; Silveira, 2016) como também alunos da Licenciatura em Matemática (Bezerra, 2017).

Os estudos do GEPEP demonstraram que os alunos passaram a ser agentes ativos do seu processo de aprendizagem, ao justificar e refletir sobre o que faziam, e evidenciaram múltiplos processos/procedimentos de resolução, podendo validar o trabalho realizado nos problemas propostos, assim como se engajando em discussões que lhes possibilitam pensar sobre sua posição na sociedade. Acerca disso, Silva, A. (2013, p. 11) assevera que “[...] a resolução de problema como metodologia de ensino possui implicações no cotidiano escolar”.

Por fim, observamos que todas as pesquisas analisadas são marcadas por uma intensa imersão no cotidiano de sala de aula. Nesse contexto, uma abordagem em sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas exige um número maior de aulas, entretanto, nota-se um retorno mais duradouro em relação à aquisição e à compreensão de ideias matemáticas (Silveira, 2016).

Como os professores podem orquestrar pedagogicamente uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas?

Por meio de um olhar crítico-reflexivo para nossa própria prática docente, como também de reflexões sobre as pesquisas dos membros do GEPEP, além da forma como o pesquisador Silvanio de Andrade operacionalizou a proposta no âmbito de uma disciplina de pós-graduação, argumentamos que **pensar/planejar** uma aula na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas exige uma desconstrução de um modelo de ensino que tem unicamente o professor como ponto de partida para uma aula de Matemática. Assim, a primeira responsabilidade atribuída ao professor é a **seleção/formulação de atividades ricas** (que possibilitem a exploração de conceitos e conteúdos matemáticos), interessantes e relevantes (que permitam ir além da exploração de conceitos matemáticos, ou seja, levantar-se e pensar sobre questões de nível social, político e cultural, diretamente conectadas ao cotidiano dos alunos ou da sociedade). Esse movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado** permite ao aluno enveredar por uma investigação matemática, partindo dos seus conhecimentos existentes, de modo a lhe propiciar uma efetiva participação na construção do seu conhecimento matemático.

Por outro lado, Lester e Cai (2016) pontuam que somente a seleção de tarefas matemáticas valiosas não garante a aprendizagem dos alunos. A esse respeito, eles explicam que há evidências consideráveis de que, mesmo quando os professores apresentam bons problemas, estes podem não ser implementados da forma pretendida.

Os autores defendem que os diferentes **discursos** que emergem durante a resolução dos problemas em sala de aula têm um papel relevante na aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, Lester e Cai (2016) explicam que,

O discurso refere-se às formas de representar, pensar, falar, concordar e discordar que professores e alunos usam para se envolverem no ensino de tarefas. Existem evidências teóricas e empíricas consideráveis que apoiam a conexão entre o discurso da sala de aula e a aprendizagem do aluno (Lester; Cai, 2016, p. 124, tradução nossa).⁴⁴

Dessa forma, eles se questionam sobre o discurso desejável no ensino de Matemática. Para dar conta dessa questão, discorrem sobre o estudo de Thompson *et al.* (1994), que descreve dois episódios de sala de aula, nos quais professores de duas turmas da sétima série tiveram a incumbência de trabalhar com a mesma tarefa. Thompson *et al.* (1994, apud Lester; Cai, 2016) explanam que as orientações dadas pelos professores aos alunos foram semelhantes, uma vez que solicitavam justificativas do que fizeram. Os autores ressaltam, ainda, que ambas as aulas se diferenciavam na forma como os professores conduziram a discussão em sala de aula. Por um lado, no primeiro episódio de sala de aula, os alunos começaram a dar explicações baseadas em suas concepções da situação (ou seja, davam sentido à situação apresentada no problema). Além disso, o professor insistia em impulsionar o pensamento dos alunos sempre que suas respostas foram expressas apenas em termos de cálculos. Já no segundo episódio, as explicações dadas pelos alunos permaneceram estritamente processuais, e o professor não insistiu no processo de reflexão dos alunos, aceitando as soluções que consistiam em uma sequência de cálculos. Eles explicam que as ações dos dois professores foram movidas por imagens diferentes das tarefas e dos objetivos pedagógicos. Em sua análise, Lester e Cai (2016) explicam que, para o primeiro professor, o objetivo era incentivar os alunos a raciocinar e a refletir sobre o seu raciocínio para demonstrar sua compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos na tarefa. Para o segundo professor, em contrapartida, o objetivo era somente resolver o problema proposto.

Nas pesquisas dos membros do GEPEP, há fortes evidências sobre como a condução dos diferentes discursos que emergiram durante a abordagem em sala de aula promoveram impactos relevantes com relação à predisposição dos alunos frente a um problema ou a uma situação-problema. Desse modo, amparados nos pressupostos teóricos que embasam a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, esses pesquisadores impulsionaram a

⁴⁴ Discourse refers to the ways of representing, thinking, talking, and agreeing and disagreeing that teachers and students use to engage in instructional tasks. Considerable theoretical and empirical evidence exists supporting the connection between classroom discourse and student learning.

realização de distintos trabalhos dos alunos frente a diferentes tópicos matemáticos, tais como: explorar, problematizar, propor, resolver, aprofundar e refinar, isto é, propiciou ir cada vez mais além, ir cada vez mais profundo na atividade proposta. Sendo assim, o discurso que esses pesquisadores conduziram evidenciou aos alunos que eles não deveriam se contentar em apenas obter a solução do problema, mas se debruçar em um trabalho de exploração e proposição de problemas, ou seja, ir além da resolução ao contemplar diferentes enfoques – cognitivo e sócio-político-cultural.

Por esse fato, a **mediação-refutação** professor-aluno(s) e professor-turma não estava exclusivamente interessada na resolução bem-sucedida do problema, mas em evidenciar aos alunos o quanto eles poderiam apreender ideias matemáticas ao investigar com profundidade uma situação-problema. De mesmo modo, a proposição de novos problemas poderia ajudar a solucionar ou a expandir a sua compreensão sobre o problema inicial e consolidar a aprendizagem de conceitos e conteúdos matemáticos. Assim, os discursos direcionados pelo professor-pesquisador, quando incorporados à proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, demonstraram aos alunos que resolver o problema era uma responsabilidade que competia a eles, mas não tão importante quanto os diferentes fazeres matemáticos, atitudes e crenças mobilizadas quando se propõe a ir além da resolução do problema.

Ademais, “outro fator influente é que às vezes os professores eliminam os desafios de uma tarefa matemática, assumindo o pensamento e o raciocínio, dizendo ou mostrando aos alunos como resolver o problema” (Lester; Cai, 2016, p. 125, tradução nossa).⁴⁵

Outrossim, “ao ensinar pela Resolução de Problemas, um dos dilemas mais desconcertantes é o quanto dizer aos alunos. Por um lado, dizer reduz a reflexão deles” (Van De Walle, 2009, p. 75). Os diferentes discursos que surgem em sala de aula, tendo o professor como mediador e estimulador dos conhecimentos dos alunos, têm como finalidade construir um novo conhecimento. Por isso, precisa ser dada a devida importância a esses discursos, pois, quando o professor expõe estritamente a sua forma de resolver o problema, impede que os estudantes elaborem suas próprias estratégias e, conseqüentemente, limita a sua criatividade (Silveira, 2016). Van de Walle (2009) destaca três tipos de informação que os professores devem fornecer aos alunos:

- Convenções matemáticas. As convenções sociais de simbolismo e de terminologia (nomenclatura) importantes em Matemática nunca serão desenvolvidas por pensamento reflexivo.

⁴⁵ Another influential factor is that sometimes teachers remove the challenges of a mathematical task by taking over the thinking and reasoning by telling or showing students how to solve the problem.

- Métodos alternativos. Você pode, com cuidado, sugerir aos alunos um método ou uma abordagem alternativa para reflexão.
- Esclarecimento dos métodos dos alunos. Você pode ajudá-los a esclarecer ou interpretar as suas ideias e, talvez, relacioná-las com outras (Van De Walle, 2009, p. 75).

Contudo, Van de Walle (2009, p. 75) destaca ainda que, “Por outro lado, dizer muito pouco algumas vezes pode resultar em tropeços e desperdiçar um tempo precioso das aulas”. Com isso, o professor deve ser capaz de entender até que ponto ele pode mediar, não auxiliando nem demais nem de menos, mas o suficiente para que o aluno possa pensar, planejar, criar e sistematizar diversos processos/procedimentos com autonomia, o que o levará a uma resolução bem-sucedida dos problemas (Silveira, 2016).

De modo geral, as pesquisas do GEPEP sugerem que, dado um problema ou uma situação-problema, é necessário fazer uma leitura detalhada a fim de compreender o que é posto e solicitado, para que, posteriormente, alguns processos/procedimentos possam ser elaborados e implementados na sua resolução. Em alguns casos, o professor deve fazer a leitura junto com os alunos, esclarecendo a necessidade de estarem atentos ao que é solicitado. Em virtude disso, ao perceber que há dificuldades para ler e interpretar o enunciado do problema ou situação-problema, como, por exemplo, quando falta o conhecimento do significado de palavras que possam influenciar na sua resolução, o professor pode intervir para o aluno avançar no trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

Com isso, amparados às pesquisas do GEPEP, notamos que a **mediação-refutação** professor-aluno(s) e professor-turma deve dar destaque ao aluno no trabalho em sala de aula, visto que ele é capaz de fazer intervenções de forma independente. Desse modo, em meio a questionamentos dos alunos sobre como resolver problemas, acerca do trabalho realizado ou da má interpretação do problema, demandam mediações que estimulam a criatividade ou possibilitam o avanço no raciocínio. Nesse viés, o **papel do professor** é coordenar as discussões por meio da mediação-refutação, levantando questões/sugestões/alternativas que possam esclarecer as ideias dos alunos a partir da compreensão exposta por eles sobre o problema ou situação-problema.

Por fim, percebemos, ainda, que discussões geradas antes, durante e depois do processo de exploração, proposição e resolução de problemas possibilitaram aos alunos refletir sobre seu processo de pensamento, validando suas soluções ao mesmo tempo em que evidenciam as dificuldades encontradas. Tais dificuldades precisam ser solucionadas mediante debates entre professor-aluno(s), aluno(s)-aluno(s) e professor-turma, para, ao fim, apresentar uma nova ideia matemática ou extrapolar os limites do problema ao fazer um tratamento de questões sócio-

político-culturais que potencializem uma nova compreensão de mundo.

5.2.3 A Proposição de Problemas (PP) e a Resolução de Problemas (RP) pensadas a partir da Exploração de Problemas (EP)

Um episódio de sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas possibilita abranger toda a **multicontextualidade** de uma sala de aula de matemática, já que enfoca o contexto do aluno, do professor, da escola, da sociedade e da própria Matemática. Nesse âmbito, em que esses múltiplos contextos naturalmente estão acoplados, o professor, consciente de sua responsabilidade, torna possível o desenrolar da trama, fazendo com que se evolua/progrida por meio de um movimento de problematização que desencadeia um caminhar de idas e vindas, cujo intérprete que vivencia o episódio é o aluno, responsável por todo o aprofundamento dado pelo professor à situação-problema.

Ressaltamos, ainda, que um episódio de sala aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é idealizado antes, durante e depois do processo de execução da situação-problema.

O temporal **antes** ocorre quando o professor procura antecipar diferentes trabalhos, reflexões e sínteses que possam emergir em torno do **problema, situação-problema** ou **situação-geradora de problemas**. Isto é, ele se prepara para uma aula com alguns níveis de intencionalidade, ao traçar metas que espera serem alcançadas, normalmente em torno dos conceitos e conteúdos matemáticos que pretende discutir durante a aula. Além disso, a discussão de questões de cunho social, político e cultural podem surgir a partir de uma tarefa com potencial para ser tratada em toda sua **multicontextualidade**, compreendendo que ela também foi proposta com essa finalidade. Todavia, por mais que ele antecipe, de fato, alguns problemas, sínteses-resultado e encaminhamentos dados pelos alunos na tarefa, os diferentes níveis de conhecimento e vivências deles podem desafiar o professor. Desse modo, as distintas reflexões e trabalhos em torno da tarefa, além das dificuldades encontradas e os novos problemas propostos, podem fugir completamente do que foi planejado para a condução da aula.

Sem dúvida, o **durante** é mais difícil para o professor. Primeiro, ele precisa operar os pressupostos teóricos que embasam a **proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, entendendo alguns **movimentos didáticos** que precisam ser assumidos, tais como: conceber o **problema ou a situação-geradora de problemas** como o **ponto de partida de uma aula de Matemática**; conduzir os diferentes **discursos dos alunos**, de tal modo que

possibilite avanços nos seus processos de pensamentos, decidindo o quanto dizer e mediando, principalmente, a partir da compreensão que os alunos expõem sobre os problemas; escolher qual dos problemas podem ser tratados em profundidade (isso porque, durante o movimento de problematização, novos problemas vão sendo propostos tanto pelo professor quanto pelos alunos), utilizando como critério o objetivo que foi traçado para a aula, como também a partir dos interesses e motivações externadas pelos alunos.

Assim, nessa fase, cabe ao professor a responsabilidade de **lidar com os problemas propostos pelos alunos**. De acordo com as reflexões geradas no âmbito da disciplina “Resolução, Proposição e Exploração de Problemas e Construtivismo Social”, as reuniões semanais e semestrais do GEPEP e o mapeamento das pesquisas do GEPEP, elencamos alguns **movimentos pedagógicos** que podem ajudar os professores a lidar com os problemas propostos pelos alunos, selecionando-os para serem explorados a partir:

- **Dos interesses e motivações externadas pelos alunos** – o professor abre espaço para os alunos compartilharem os problemas que eles formularam, em seguida, solicita que escolham, entre os problemas formulados, os que devem ser explorados (discutidos em profundidade e/ou refinados);
- **Dos objetivos de aprendizagem delineados para a aula** – o professor seleciona os problemas que devem ser explorados, identificando quais deles dão conta dos objetivos pré-estabelecidos, em termos de sistematização e compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos;
- **De um problema como fonte geradora de novos problemas** – ademais, o professor pode selecionar algum problema que foi mal formulado e sugerir que a turma o reescreva, sendo este um bom momento para discutir o “erro” na proposição de problemas como elemento propulsor para o surgimento de novos problemas, observando elementos que caracterizam um problema matemático, que tipo de redação é cabível, bem como conectar a escrita materna à linguagem matemática. Além do mais, o professor pode solicitar que os alunos troquem os problemas formulados, e dê uma nova reescrita com o propósito de refinar/aprofundar os problemas propostos.

À fase **depois**, denominamos de **Exploração-Reflexão-Sínteses-Exploração (ERSE)**. Nela, o professor planeja a aula, tomando como ponto de partida principalmente tudo o que foi debatido ou alguma possibilidade de exploração da situação-problema que não surgiu no decorrer da aula. Além disso, retoma a discussão com o intuito de aprofundar e/ou refinar um conceito ou conteúdo matemático ou debater através de um olhar crítico, pela/além da Matemática, um tema que está em evidência na nossa sociedade. As diferentes sínteses e

reflexões geradas em torno de uma situação-problema possibilitam selecionar novos caminhos em que o processo de problematização estava assinalando, mas que, em meio às diferentes discussões, além dele estar incumbido de contemplar os objetivos que foram idealizados para aquela aula, não foi possível, devido principalmente ao tempo disponível.

No **movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado**, a (re)solução do problema não pode ser admitida como o fim, já que, no caso do problema proposto pelo aluno, pode haver uma lacuna entre a solução e o enunciado do problema, carecendo, assim, de uma reescrita/reformulação. Dessa forma, a resolução do problema pode ser o ponto de partida para a geração de novos problemas, desencadeados pelo processo de exploração de problemas, que se intensifica à medida que os alunos tomam a situação-problema para si, culminando em novas sínteses-resultado e mantendo o **movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado** vivo e possível de operacionalizar. Desse modo, cabe ao professor perceber o momento em que os alunos estão satisfeitos, de modo que as sínteses e reflexões geradas por meio dos trabalhos realizados em torno da situação-problema possibilitam apresentar um novo conceito matemático, para finalizar, em alguns casos, parcialmente, a discussão.

O que, de fato, ocorre é que uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é desenvolvida por meio de um movimento consciente de idas e vindas e/ou começos e recomeços, com a **proposição de problemas** ora fazendo parte do **processo de problematização**, ora **qualificando o caminhar de exploração de problemas**.

Com isso, na sua proposta, Andrade (2017) destaca que a proposição de problemas, na sala de aula, é percebida como uma ferramenta de problematização consciente que impulsiona e avança tanto o processo da resolução quanto o da exploração do problema.

A **Proposição de Problemas** aparece como um dos avanços das pesquisas e práticas de Resolução de Problemas e, aqui, é **pensada a partir da Exploração de Problemas**, ou seja, não se contenta em apenas propor e resolver o problema, mas é potencializado um movimento de problematização que permite ir cada vez mais longe, ir cada vez mais profundo. O limite é não ter limite, e sempre ir para onde as discussões nos levam, a partir de uma prática aberta e intencionalizada.

No âmbito da proposta, temos utilizado o hífen conscientemente, compreendendo que há conexões entre a **Exploração de Problemas (EP)**, a **Proposição de Problemas (PP)** e a **Resolução de Problemas (RP)**, o que as promove a serem operadas como uma unidade, isto é, ao passo que a Exploração de Problemas potencializa o caminhar de proposição de problema, a Proposição de Problemas impulsiona e avança o processo de exploração de problemas, e ambas ampliam e auxiliam no processo de resolução de problemas, bem como no

aprofundamento da situação-problema. Com isso, é importante ressaltar que, no âmbito da proposta, a **Exploração de Problemas** é percebida como o carro-chefe, visto que agrega ao trabalho de proposição e resolução de problemas, possibilitando que o **movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado** se mantenha sempre possível de ser operacionalizado.

Uma sala de aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é marcada por um descontentamento resultante de uma prática que não se limita à busca da solução do problema. Esse descontentamento abrange o professor, quando ele intervém e fomenta as discussões, propiciando ao aluno ir cada vez mais além, durante o **processo de codificação e decodificação do problema**. Além disso, esse descontentamento toca o aluno, que se sente desafiado e motivado a mergulhar cada vez mais profundo, a ir em busca do desconhecido que o leve a descobertas, fruto de um olhar amplo para um caminhar de resolução de problemas, o que pode contemplar diferentes momentos/fases de exploração e proposições de problemas.

Com relação à **dimensão sócio-político-cultural**, advogamos que, em um episódio de sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o professor precisa assumir uma postura que perpassa a compreensão de que os processos e conceitos matemáticos não devem ser vistos como parte final de uma aula de Matemática, mas, aliados a diferentes questões que surgem a partir de um olhar multicontextual para a própria sala de aula de matemática, podem promover uma compreensão com significado sobre o papel da Matemática na nossa sociedade, bem como perceber que uma aula não pode se reduzir a apenas discussões internas à própria Matemática.

Nesse âmbito, as pesquisas do GEPEP evidenciaram que diversos recursos tecnológicos (calculadoras, *softwares* e aplicativos digitais) foram utilizados como ferramentas investigativas que ajudaram a avançar no processo de exploração, proposição e resolução de problemas. Ademais, os encontros do GEPEP e a disciplina de Resolução de Problemas ministrada pelo Dr. Prof. Silvanio de Andrade têm sinalizado que as **Tecnologias Digitais (TD)**, tais como as tecnologias móveis/portáteis, como *smartphones* e *laptops*, também se mostraram de grande potencial, principalmente, no processo de proposição e exploração de problemas.

Assim, observamos que essas **Tecnologias Digitais (TD)** emergem como ferramentas de pesquisas de informação que podem ser incrementadas para a redação de um novo problema, seja em nível cognitivo ou sócio-político-cultural. Com isso, em um episódio de sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o professor pode e/ou precisa tirar

proveito desses recursos, uma vez que, abrangendo o contexto de uma sala de aula real, é comum os alunos estarem em posse de *smartphones* com pleno acesso à *Internet*. Cabe, portanto, ao professor incentivá-los a fazer uso desse recurso tecnológico digital para fins de busca de novos elementos que levem à proposição e à exploração de novos problemas. Desse modo, os professores ajudariam os alunos a perceberem que sempre podem ir além da resolução e da solução dos problemas. Entretanto, a atividade proposta pelo professor precisa ser planejada e intencionalizada, visando explorar as possibilidades que esses recursos podem oferecer no processo de exploração, proposição e resolução de problemas.

Por fim, ressaltamos que uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é marcada por um forte movimento de investigação que só se contenta quando esmiúça, sintetiza e aprofunda o problema, a situação-problema ou a situação-geradora de problemas proposta. Nesse contexto, não se limita apenas à busca de múltiplos processos/procedimentos de resoluções de um problema, mas também a novas reflexões, provenientes de novos problemas e conteúdos que vão emergindo e carecendo de novos trabalhos, reflexões e sínteses. Por sua vez, todo o desenrolar do processo exige do professor habilidades para conduzir diferentes movimentos didáticos que permitam ao aluno ir cada vez mais além e, inclusive, desenvolver uma postura investigativa quando estiver diante de uma situação-problema desafiadora.

6 CONSTRUÇÃO INICIAL DO NOSSO PRODUTO EDUCACIONAL: ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO FORMATO DE NARRATIVAS MATEMÁTICAS

Neste capítulo, será apresentado nosso **Produto Educacional – atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas**, nas qual iremos discorrer, *a priori*, como orquestramos a abordagem com os Professores que ensinam Matemática em um curso de Formação Continuada. No entanto, queremos deixar claro que é apenas uma proposta de aplicação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas elaborada por nós, que contemplou diferentes movimentos, em que percebemos que impulsionou o processo de exploração, proposição e resolução de problemas. Contudo, somos conscientes de que os direcionamentos tomados no âmbito das discussões e reflexões podem desencadear a necessidade de novos movimentos de exploração, proposição e resolução de problemas, tal processo é possível, uma vez que a proposta de “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**” se destaca por ser aberta, embora não solta, sendo assim, possível de ser operacionalizada durante os vários desdobramentos de um episódio de sala de aula.

6.1. Produto Educacional: motivações, objetivo, abordagens e o público-alvo

Inicialmente, justificamos que o uso de Narrativas Matemáticas na prática pedagógica via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas foi inspirado a partir de algumas **pesquisas** realizadas pelo pesquisador Silvanio de Andrade, como, por exemplo, seu trabalho de mestrado (Andrade, 1998), que apresenta, no início do capítulo 2, uma sequência de problemas. Na ocasião, o autor narra a defesa de diferentes trabalhos realizados pelos alunos em torno dos problemas em uma sala de aula idealizada. Destacamos, ainda, o artigo intitulado “*Análise Combinatória via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e Justiça Social*” (Silveira; Nascimento; Andrade, 2023), que apresenta diálogos entre estudantes da Licenciatura em Matemática e o professor formador, de modo a defender diferentes trabalhos realizados em torno do problema dos casais (encontrar a quantidade de casais formados com 4 meninas e 3 meninos), a partir de vinhetas de sala de aulas que são percorridas como uma sucessão de acontecimentos narrados.

Ademais, destaca-se **práticas de sala de aula** desenvolvidas pelo professor Silvanio de Andrade na pós-graduação (PPGECM/UEPB), o qual trabalhou algumas narrativas/contos de Malba Tahan (o problema dos 35 camelos e o problema dos quatro quatros), bem como

apresentou algumas atividades em **palestras e conferências** no formato de narrativas (por exemplo, cf. I Ciclo [...], 2020; cf. Esquenta [...], 2020; cf. Mesa [...], 2021).

Das **pesquisas dos participantes do GEPEP**, enfatizamos os **episódios reais de sala de aula (narrativas de sala de aula)**, uma vez que narram a descrição de diálogos entre aluno(s)-aluno(s) e professor-aluno(s), com ênfase na busca de múltiplos processos de resolução de problema e na exploração, problematização e proposição dos problemas.

Diante do exposto, percebemos que o uso de narrativas poderia potencializar um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas e, com isso, desenvolvemos uma Formação Continuada com Professores que ensinam Matemática via Narrativas Matemáticas.

Ademais, quando nos deparamos com a empreitada de escrever Narrativas Matemáticas com o propósito de discuti-las a partir da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, sentimos a necessidade de nos ampararmos às vivências da nossa adolescência. Assim, visando que a escrita flua naturalmente, descrevemos um cenário real que vivenciamos por muitos anos, trazendo, também, personagens reais que fizeram parte deste ambiente, e juntos, servem como inspiração para a escrita destas narrativas.

Com isso, o que denominamos de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas foram escritas em primeira pessoa, isto é, ao mesmo tempo em que narramos os fatos, também participamos ativamente dos acontecimentos.

Ressaltamos, ainda, que, *a priori*, a maioria dos conteúdos matemáticos selecionados para discutir com a implementação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas foram amplamente trabalhados pelos membros do GEPEP. Entretanto, somos conscientes que durante o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas podem emergir novos conteúdos, os quais, até então, não tínhamos antecipados, como de fato aconteceu durante a aplicação dessas atividades.

Assim, o nosso Produto Educacional intitulado “**Narrativas Matemáticas: um caminhar de exploração, proposição, e resolução de problemas**” têm como objetivo analisar como Narrativas Matemáticas podem impulsionar o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas na Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática.

Amparados à proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Andrade, 1998, 2017), elencamos duas abordagens que contemplam diferentes olhares para as pesquisas e práticas em Resolução de Problemas e emergem como pontos marcantes da nossa pesquisa e, conseqüentemente, são vinculadas ao nosso Produto Educacional, bem como foram os focos de discussão durante a implementação com os professores que ensinam Matemática.

- O nosso enfoque consiste em sugerir a **Proposição de Problemas** (estado atual das pesquisas e práticas em Resolução de Problemas) como ponto de partida de uma aula de Matemática por meio de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.
- As atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas promoverão discussões que contemplem a **dimensão sócio-político-cultural** (direção futura das pesquisas), visto que este enfoque continua sendo negligenciado nas pesquisas e práticas em Resolução de Problemas.

O público-alvo foram professores que ensinam Matemática em um curso de Formação Continuada, intitulado “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social**”. O curso teve a duração de 40 horas, distribuídas em 13 encontros. As atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas foram discutidas contemplando diferentes movimentos de exploração, proposição e resolução de problemas, que serão descritos logo a seguir.

6.2 Movimentos didáticos para a sala de aula de matemática

Aqui, apresentaremos alguns encaminhamentos que foram adotados por nós durante a aplicação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas. Entretanto, queremos deixar claro que não se trata de um passo a passo ou um roteiro prescritivo que deve ser fielmente seguido quando se propõe a ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, e sim alguns movimentos didáticos que percebemos a partir do mapeamento das pesquisas, dos encontros do GEPEP, bem como da disciplina ministrada pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade, que podem impulsionar o ensino-aprendizagem de Matemática por meio desta metodologia.

Movimento α : Coloque suas curiosidades e reflexões em forma de problemas, explore-os e os resolva

Após a leitura das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, os professores tiveram a incumbência de propor, explorar e resolver problemas. Para isso, foi necessário identificar como os diferentes fatos narrados podem ser o ponto de partida para desencadear o processo de problematização que pode impulsionar e avançar no processo de resolução e exploração de problemas. Posteriormente, ao

perceber que os professores formularam problemas, abrimos espaço para que eles compartilhassem os seus problemas, bem como explicar e justificar o processo de pensamento que os levaram à proposição dos problemas.

Movimento β : Selecione um problema para ser explorado e reescreva o problema do colega – refinamento/aprofundamento dos problemas

Com o propósito de refinar/aprofundar as discussões, selecionamos um problema para ser explorado, tomando como critérios os interesses externados pelos participantes, os objetivos delineados com relação à sistematização e compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos ou um problema que estava assinalando um grande potencial para desenvolver um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

Ademais, com o foco de ir cada vez mais além, solicitamos que os participantes troquem os problemas formulados entre si, e cada um ficou incumbido de reescrever o problema do colega, dando uma nova redação, ao trazer novos elementos que possibilitam refinar/aprofundar a discussão ou, até mesmo, perceber, ao tentar solucionar o problema proposto pelo colega, que, de fato, o problema precisava de uma reescrita, devido à redação apresentar informações dúbias ou ainda tendo em vista a falta de mais dados, bem como apresentar equívocos com relação a conceitos matemáticos ou apresentar um contexto incompatível com a realidade.

Movimento γ : Acrescente ou modifique uma “fala” dos personagens das Narrativas Matemáticas – refinando/aprofundando as Narrativas Matemáticas

Para este momento, temos como objetivo a participação mais engajada dos professores na co-construção das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, modificando algum fato que compõe o enredo ou com o acréscimo de novos fatos, que possibilitem ampliar a trama, de tal modo que a nova redação seja um ambiente fértil para a exploração, proposição e resolução de problemas em nível cognitivo como também sócio-político-cultural.

Com isso, esperamos que as reflexões apresentadas pelos professores que ensinam Matemática contribuam para a reformulação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, devido aos apontamentos de novos elementos que podem desencadear um processo de problematização. Além do mais, o processo de reescrita dessas atividades pode nos ajudar a perceber suas limitações e

possibilidades, bem como sua replicabilidade no curso de Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática, como também no chão da escola da Educação Básica.

6.3 Atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas

As **atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas** que serão apresentadas a seguir tem o potencial para abordar diferentes conteúdos e conceitos matemáticos. Contudo, iremos elencar, *a priori*, as principais ideias matemáticas que podem ser discutidas com profundidade no âmbito de cursos de Licenciatura em Matemática, como também na Formação Continuada de Professores de Matemática.

6.3.1 Jogo de Sueca⁴⁶

Eu (Lola) e os meus amigos Nêm, Perobinha, PC, Cesinha e Sr. Dedá nos encontramos de segunda a sexta, durante a noite, para jogar algumas partidas de baralho e dominó. Na ocasião, conversamos sobre os mais variados assuntos do nosso cotidiano.

Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si.

Em um certo dia, Cesinha chegou atrasado e exclamou:

— Vixe! Lola vai jogar cartas para mim, ô homem da “mão ruim”.

Em seguida, eu disse:

— Quem mandou tu chegar atrasado!

— Ontem, sentei próximo de Nêm, deitei e rolei no jogo, disse Cesinha.

Perobinha falou com muita serenidade:

— Para o jogo ficar justo, acho que toda noite nós deveríamos trocar de lugar na mesa.

Essa é uma situação que a gente precisa conversar.

⁴⁶Disponível em: <https://www.megajogos.com.br/sueca-online/regras>. Acesso: 13 jan. 2025.

Figura 1: Mesa circular com seis pessoas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em tom de indignação, falei:

— Eu concordo, mas hoje Cesinha vai sentar no lugar que sobrou.

Sr. Deda chegou por último e, percebendo que não entrávamos em consenso sobre onde cada uma iria sentar, falou:

— Eu tenho a solução, vamos jogar Sueca ao invés de jogar baralho.

— Boa ideia! Afirmou Nêm. Agora a arenga vai ser para formar as duplas.

Na primeira partida, Sr. Deda afirmou, com muita convicção, que a dupla de PC obteve 56 pontos. E continuou:

— Ganhamos, me dá o baralho para eu traçar! Exclamou Sr. Deda, com muita serenidade: — sou ágil, com os cálculos, passo o dia fazendo contas na minha vendinha.

Sr. Deda é comerciante há anos e sempre lida com situações envolvendo cálculo mental.

Durante a partida, Perobinha se mostrou indignado com uma aposta que ele tinha realizado no *site* de apostas esportivas “Só ganha quem aposta”:

— Rapaz, fiz uma aposta em quatros jogos: São Paulo x Flamengo, Vasco x Fluminense, Fortaleza x Bahia e Atlético Paranaense x Palmeiras e perdi porque apostei na vitória do Palmeiras e quem venceu o jogo foi Atlético Paranaense, explicou Perobinha.

— Não sabe apostar, o Atlético Paranaense jogando em casa é muito forte, explicou PC.

— Eu não gosto de fazer esses tipos de apostas, porque acredito que esse jogo não é justo, pois, na teoria, a casa de jogos tem mais chance de ganhar - afirmou Nêm

Na segunda partida, Cesinha interrompeu o jogo faltando três rodadas de cartas, afirmando que já tinha vencido o jogo, visto que já tinha obtido 61 pontos.

— Não acredito! Está roubando! Conte para a gente ver! Falei, de forma incrédula. Cesinha fez a contagem dos pontos e provou que tinha vencido a partida.

Nessa noite, jogamos 32 partidas, a dupla de Sr. Deda venceu 2 partidas a mais que a dupla de Perobinha e 4 partidas a menos que a dupla de PC.

Conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Sistematizar o conceito de Combinação Simples a partir de um fato que compõem a Narrativa Matemática, tal como: “Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si”. Ademais, aprofundar a discussão resolvendo problemas utilizando o conceito da Soma dos termos de Progressão Aritmética (P.A) e Equação do 2º grau;
- Apresentar o conceito de Permutação Circular a partir da figura que representa uma mesa circular, contendo 6 pessoas;
- Abordar o conceito do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) a partir das apostas de jogos esportivos;
- Discutir a resolução de Sistemas Lineares (último parágrafo da narrativa), abordando Representações Múltiplas de Álgebra e transição entre elas, tal como fazer conexões com a Geometria associando a posição das retas no plano cartesiano com a classificação dos Sistemas Lineares.

Em síntese, *a priori*, esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática pode levar a geração de problemas que permitam discutir alguns conteúdos matemáticos, tais como: Análise Combinatória (problemas envolvendo Combinação Simples, Permutação Circular e o Princípio Fundamental da Contagem), Soma dos termos de Progressão Aritmética (P.A), as Operações de Adição, Subtração e Multiplicação, Sistemas Lineares. Contudo, compreendemos que também podem surgir outros conceitos e conteúdos matemáticos, a exemplo da Probabilidade devido à sua aproximação com o tópico de Análise Combinatória, dentre outros.

6.3.2 Um “exame de problemas”

— Rapaz, que perrengue passamos ontem viu. Deu até polícia — afirmou Nê. E ainda acrescentou: — Lola, você sumiu. A gente pensou que a polícia tinha te prendido.

Respondi:

— Mas, homem, eu corri pela estrada perto do riacho até a casa de Joquinha. Fiquei escondido lá. Acho que percorri 1,5 km em 5 min. O que medo não faz né!?

Cesinha logo indagou:

— Mas o que vocês fizeram?

— Rapaz, a gente ia “tirar uma abelha” em um cajueiro no terreno do Sr. José Henrique. Quando chegamos lá, os caras já tinham tirado a abelha, e ainda derrubaram o cajueiro. Foi tenso. Quando a gente olhou para estrada, ia passando uma viatura da polícia, aí só ouvi quando a filha dele gritou lá da casa — eita, pai, eles vieram de novo. Pense numa carreira - explicou Nêm.

— Os caras cortaram do lado errado, por isso o pé de caju caiu - explicou Perobinha.

— Mas e aí? Vocês têm muitos litros de mel? Questionou PC.

— Que nada! Até agora, encontrei poucos enxames. A cada ano que passa, percebo que as abelhas estão sumindo- explicou Nêm.

— Eu li em um *blog*⁴⁷ que cientistas no mundo todo estão preocupados, porque as abelhas estão sumindo - disse Cesinha.

— Preocupados por que iremos ficar sem mel, se caso elas desaparecerem? Indagou Perobinha!

Explicou Cesinha:

— Eu não sei exatamente. Mas lembro que a repórter explicou que a redução das abelhas aumentou em 43% o preço das amêndoas no mundo, pois sua reprodução depende 100% da polinização das abelhas; e que 52% dos alimentos vendidos no mercado, como alface, banana e maçã desaparecerão das prateleiras, caso o número de abelhas continue a diminuir.

— Mas porque será que as abelhas estão morrendo? Questionou Nêm!

Eu respondi:

- Eu li em um livro⁴⁸ que destacava o tempo necessário para termos uma nova colmeia, lá se falava sobre o processo de nascimento e morte das abelhas, dizendo que o número de abelhas numa família nova são 10.000 abelhas; a postura média da rainha são 2.000 ovos/dia; a longevidade das operárias/taxa de mortalidade corresponde a 40 dias; e o período entre a postura e o nascimento são de 21 dias. Ressaltava ainda, a hipótese desta família de abelhas possuírem idades equidistribuídas, isto é, idades entre 0 e 40 dias.

⁴⁷Disponível em: <https://novainter.net/blog/abelhas-em-extincao-devido-uso-do-celular/>. Acesso: 13 jan. 2025.

⁴⁸ BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2003.

Figura 2: Mosaico formado pela repetição de hexágonos regulares



Fonte: Disponível em: <https://stock.adobe.com/br/images/bees-on-honeycomb/221175945>.
Acesso em: 13 de jan. 2025.

— Será que é por causa disso? Ou seja, está morrendo mais abelhas do que nascendo?

Indagou Nêm!

— E todos ficaram curiosos sobre o que está ocasionando o desaparecimento das abelhas.

Conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Abordar o conceito de Razão entre duas grandezas a partir da ideia de Velocidade Média;
- Discutir o mosaico formado pela a repetição de polígonos regulares (hexágonos);
- Trabalhar os conceitos de Taxa Percentual, Aumentos e Descontos Sucessivos a partir do enredo da narrativa: “a redução das abelhas aumentou em 43% o preço das amêndoas no mundo, pois sua reprodução depende 100% da polinização das abelhas; e que 52% dos alimentos vendidos no mercado, como alface, banana e maçã desaparecerão das prateleiras”;
- Discutir ideias essenciais de Função (a partir do fato que explica o processo de nascimento e morte das abelhas), abordando: lei da Função Afim, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio e a imagem da função, Função definida por várias sentenças e o esboço do seu gráfico. Para aprofundar, vamos buscar o entrelaçamento entre os tópicos de Função Polinomial do 1º Grau e Progressão Aritmética (P.A).

6.3.3 Mercado de problemas

— Boa noite, pessoal! Vamos jogar o que hoje? Questionou Perobinha!

— Vamos jogar dominó, afirmou PC.

— Ei, Nêm, eu passei e vi tu lá no mercado “Preço Imbatível”. Que tumulto era aquele que tinha até polícia? Questionou Perobinha!

— Rapaz, parece que houve um caso de racismo por parte do segurança do mercado “Preço Imbatível” com uma pessoa que estava fazendo compras, afirmou Nêm.

Infelizmente, esse tipo de coisa ainda é muito presente em nossa sociedade, afirmei, com tom de indignação. E acrescentei: — Eu li na *internet*⁴⁹ que 7 a cada 10 negros sofrem preconceitos em lojas, restaurantes ou mercados. E li ainda que um levantamento feito por um instituto sobre o racismo nas corporações evidenciou que apenas 4% dos brasileiros se consideram racistas, apesar de a maioria achar que o país é racista.

— Mas o que tu foi comprar no mercado, hein, Nêm? Questionou Cesinha!

— Fui comprar batata, explicou Nêm!

Sr. Deda se mostrou inconformado, afirmando: — Mas, Nêm por que você não comprou na minha vendinha? Não precisava ir para a cidade.

— Qual o valor do quilo de batata no mercado “Preço Imbatível”? Questionou PC!

— O quilo custa R\$ 4,00, respondeu Nêm!

Visando convencer a todos que estavam presentes, Sr. Deda explicou: — Na minha vendinha, é R\$ 5,00 o quilo, mas você não vai gastar com transporte.

— Quanto você gastou de gasolina na sua moto? Indagou Perobinha,

— Eu gastei R\$ 6,00 no total, ida e volta, explicou Nêm!

— Acho que a gente precisa analisar onde é vantajoso comprar batata, afirmou Cesinha!

— Sr. Deda, amanhã estou indo comprar batata lá, mas com uma condição - vou dar uma nota de R\$ 20,00 na compra de 1 quilo de batata, e quero o meu troco em moedas de R\$ 0,50 e notas de R\$ 2,00, explicou PC.

— Pode passar lá, PC, que eu dou um jeito, afirmou Sr. Deda!

⁴⁹ Disponível em: <https://exame.com/bussola/7-em-cada-10-negros-sofreram-preconceito-em-loja-restaurant-ou-mercado/>. Acesso: 13 jan. 2025.

— Com esse negócio de ser vantajoso ou não, eu lembrei de uma publicação que vi no *Facebook*⁵⁰, com milhares de comentários e compartilhamentos, que fazia uma comparação do preço da barra de chocolate e do ovo de páscoa do mesmo sabor. Lá mostrava que o ovo de 500 gramas custava R\$ 49,99 e uma barra de 170 gramas do mesmo chocolate custava R\$ 2,50, explicou Cesinha!

— Eita, eu gosto de chocolate e, agora, fiquei pensando o que é mais vantajoso, apesar de que, em época de páscoa, fica difícil deixar de comprar ovos de páscoa, afirmou Perobinha!

Conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Trabalhar o significado de Fração como uma Razão, a partir do fato: “7 a cada 10 negros sofrem preconceitos”.
- Transitar entre as diferentes Representações de um Número Racional;
- Discutir ideias essenciais de Função (a partir da situação que envolve a compra das batatas), abordando: lei da função, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio, a imagem e o contradomínio da função, o esboço do gráfico, o significado dos coeficientes angular e linear no contexto dos problemas;
- Abordar o conteúdo de Equação do 1º grau com duas incógnitas a partir do troco das moedas de R\$ 0,50 e notas de R\$ 2,00. Para aprofundar, deve-se discutir as Representações Múltiplas de Álgebra e transição entre elas, tal como fazer conexões com a Geometria associando a posição das retas no plano cartesiano, que possibilite analisar a existência ou não de solução do sistema.

6.3.4 A crise hídrica – um problema mundial

— Boa noite, pessoal! Cheguei atrasado porque aproveitei que tinha chegado água, para encher as vasilhas e os baldes, explicou PC.

— A situação de água doce no nosso município está cada vez mais difícil, principalmente, com o aumento das residências devido à abertura de alguns loteamentos, explicou Cesinha.

⁵⁰ Disponível em:

<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=503972449707775&set=a.315172431921112.62796.100002850746678&type=1&theater>. Acesso: 13 jan. 2025.

— Eu e meus colegas de escola fizemos uma entrevista com um funcionário da empresa autônoma que presta serviço de abastecimento de água potável no nosso município, afirmou Perobinha. Ele explicou que a empresa abastece 5.050 residências. E ainda falou das tarifas pagas pelo consumo mensal de água em m^3 : Faixa 1 - para o consumo de até $10 m^3$, valor fixo de R\$ 29,00; Faixa 2: para o consumo maior que $10 m^3$ e até $15 m^3$, paga-se uma tarifa de R\$ 2,50 por m^3 que ultrapasse $10 m^3$; Faixa 3: para o consumo maior que $15 m^3$ e até $20 m^3$, paga-se uma tarifa de R\$ 2,70 por m^3 que ultrapasse $15 m^3$.

— O funcionário falou, também, que cada residência não pode exceder no mês o consumo de $20 m^3$ de água, finalizou Perobinha.

— A nossa situação é complicada porque dependemos de uma barragem pequena para dar conta das necessidades de todo o município, acrescentou Cesinha.

Acrescentei que: — Eu li⁵¹ que, no Brasil, cada pessoa consome, em média, 154 litros de água por dia. No entanto, a Organização das Nações Unidas (ONU) considera que cada pessoa necessita de 110 litros de água ao dia.

— E o que explica essa diferença de 44 litros? Questionou PC.

— Provavelmente, deve ser devido ao desperdício diário de água, explicou Sr. Deda.

— Muitos produtos que estão presentes no nosso dia a dia levam uma quantidade considerável de água, explanou Cesinha.

— Eu lembro que, na aula de Ciências, a professora Filomena explicou que mais de 70% do corpo humano é composto por água. Ela falou, ainda, que cada quilograma de massa corporal corresponde a 35 ml de água que devemos ingerir diariamente, falou Perobinha.

— Eu li⁵² que a Terra possui 1,386 bilhões de metros cúbicos de água, sendo que apenas 2,5% desse total é água doce, e ainda que o Brasil possui a maior reserva de água doce da Terra, sendo aproximadamente 12% do total mundial. Além do mais, $\frac{1}{6}$ da população mundial não tem acesso à água potável, acrescentou PC.

Conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

⁵¹ Disponível em: <https://ufscsustentavel.ufsc.br/2019/03/22/dia-mundial-da-agua-e-o-desperdicio-que-nao-se-ve/>. Acesso em: 13 jan. 2025.

⁵² Disponível em: <http://brasildasaguas.com.br/educacional/a-importancia-da-agua/>. Acesso em: 13 jan. 2025.

- Aprofundar ideias essenciais de Função partir do enredo da narrativa que destaca “as tarifas pagas pelo consumo mensal de água”, discutindo: lei da Função Afim, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio e a imagem da função, Função definida por várias sentenças e o esboço do seu gráfico;

- Discutir o significado de Fração como Operador Multiplicativo, a partir do fato: “ $\frac{1}{6}$ da população mundial não tem acesso à água potável”, como também outros significados que possa vir a surgir do movimento de exploração, proposição e resolução de problemas.

- Conversão de m^3 para litros (vice-versa);

- Regra de Três Simples;

- Abordar o conceito de Taxa Percentual a partir de alguns enredos da Narrativa Matemática.

6.3.5 Qual é o preço justo?

Andrade é um professor de Matemática, amplamente preocupado com questões de (in)justiça social. Chegando as festas de final de ano, é comum as lojas promoverem promoções para finalizar seus estoques. Andrade entrou em uma determinada loja, com filiais em todo o Brasil, que estava com a seguinte promoção **leve 3 pague 2** (a peça que sairá de graça deve ser de igual ou menor valor. Promoção válida enquanto durarem os estoques).

Ele escolheu os produtos que iria levar, dirigiu-se ao caixa e disse:

— Boa tarde, moça”.

— Olá, boa tarde, senhor!

Em seguida, Andrade solicitou que a moça do caixa registrasse suas compras. Ao ver o valor da compra, ele interveio:

— Há alguma coisa errada. De acordo com os meus cálculos, esse não é o valor real da compra.

A moça que estava no caixa afirmou:

— Acho que o senhor se equivocou nas suas contas. O sistema está programado para realizar os cálculos de forma precisa.

Observe abaixo a nota fiscal contendo os produtos que seriam comprados, descontos e o valor final:

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01- Cueca	15,90	4,71	15,90
02 - Cueca	15,90	4,71	15,90
03 - Cueca	15,90	4,71	15,90
04 - Cueca	19,90	5,89	19,90
05 - Cueca	19,90	5,89	19,90
06 - Cueca	19,90	5,89	19,90
07 - Meia	29,90	0,00	29,90
08 - Meia	9,90	0,00	9,90
09 - Meia	9,90	0,00	9,90
10 - Cueca	29,90	0,00	29,90
Valor Total dos Produtos R\$			187,00
Valor Pago R\$			155,20
Desconto			31,80

Todos que estavam na fila do caixa direcionaram suas atenções para o diálogo entre Andrade e a moça do caixa. Ele, confiando nos seus conhecimentos matemáticos, falou:

— Eu não vou levar essa compra, pode desfazer! E todos atentos observavam como ele poderia provar a veracidade de suas reivindicações.

Depois de encerrar a compra, o astuto Andrade resolveu intervir, visando mostrar a injustiça que o levou ao inconformismo. Ele afirmou:

— Faça o seguinte, na primeira compra passe os três kits cueca (R\$ 15,90), dois kits de meias (R\$ 9,90) e os outros dois kits de meias (R\$ 29,90). Agora em outra compra, quero que você passe os três kits de cuecas (R\$ 19,90). Veja as notas fiscais das duas compras, abaixo:

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01– Cueca	15,90	5,30	15,90
02 – Cueca	15,90	5,30	15,90
03 – Cueca	15,90	5,30	15,90
04 – Meia	9,90	0,00	9,90
05 – Meia	9,90	0,00	9,90

06 – Meia	29,90	0,00	29,90
07 – Cueca	29,90	0,00	29,90
Valor Total dos Produtos R\$			127,30
Valor Pago R\$			111,40
Desconto			15,90

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01– Cueca	19,90	6,63	19,90
02 – Cueca	19,90	6,63	19,90
03 – Cueca	19,90	6,64	19,90
Valor Total dos Produtos R\$			59,70
Valor Pago R\$			39,80
Desconto			19,90

Andrade provou que, de fato, o valor inicial gerado no ato da compra não era condizente com a promoção vigente. Todos, a moça do caixa e os clientes presentes, ficaram impressionados com a forma como Andrade interveio em uma situação de injustiça social.

Conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Discutir os conteúdos de Taxa Percentual, Descontos e Proporção, a partir das tabelas e do enredo da narrativa “promoção leve 3 pague 2”;
- Transitar entre as diferentes Representações de um Número Racional.

Conscientes que os participantes da pesquisa precisam ser atores na elaboração do nosso Produto Educacional, enfatizamos que selecionamos alguns trabalhos realizados pelos professores que ampliam o debate acerca das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas, no formato de Narrativas Matemáticas, devido o acréscimo de novos fatos/acontecimentos que levam a novas problematizações, novos problemas, novos conteúdos, novas reflexões e sínteses. Ademais, tentamos sanar algumas lacunas descobertas pelos professores. Vale ressaltar que as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas com os novos fragmentos são conferidas na produção final do nosso Produto Educacional.

7 NARRATIVAS MATEMÁTICAS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR VIA EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, descrevemos e analisamos episódios de sala de aula que foram vivenciados em um curso de Formação de Professores que ensinam Matemática. Ao todo, participaram 14 professores, sendo duas do gênero feminino. Assim, visando preservar a identidade dos participantes da pesquisa, optou-se por denotar os professores por: P1, P2, P3,...,P14; utilizamos a palavra “Professores” para nos referimos à fala de mais de um professor; já o professor-pesquisador é denominado de PP. Ao longo dos encontros foram feitos comentários (análises) sobre o que captamos durante o desenvolvimento do curso.

7.1 Primeiro episódio de sala de aula (26/06/2023): uma introdução a metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas via Narrativa Matemática “Jogo de Sueca”

No **primeiro momento**, nos apresentamos aos professores e enfatizamos que o curso “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social**” consistia em uma das etapas da nossa pesquisa de doutorado. No **segundo momento**, sentimos a necessidade de situar a nossa pesquisa no campo da Educação Matemática (EM). Assim, apoiados em alguns pesquisadores em EM, destacamos motivações do surgimento deste campo, o principal papel da EM, a busca de identidade para a comunidade de educadores matemáticos e o objeto de estudo.

É importante destacar que há um consenso entre educadores matemáticos que assinala, de um lado, **o fracasso escolar dos alunos em Matemática** e, de outro lado, **a importância desta disciplina nos currículos escolares** em todas as nações do mundo como as principais razões que originaram o campo de EM – área de estudo que, de forma direta ou indireta, sempre esteve envolvida com a sala de aula de Matemática (Andrade, 2008); a **formação de professores** continua sendo a função maior da EM paralelamente à busca do conhecimento sólido para ser aplicado (Kilpatrick, 1996); a EM se caracteriza como uma práxis que envolve o **domínio do conteúdo matemático** e o **domínio de ideias e processos pedagógicos** relacionados à transmissão/assimilação e/ou à apropriação do saber matemático escolar (Fiorentini; Lorenzato, 2009); e que, embora ainda exista a necessidade de delimitar com mais clareza as relações existentes entre a EM e outros campos do conhecimento (a exemplo da Matemática, Psicologia, Pedagogia, Sociologia, Filosofia, dentre outros), o que está bem delineado é o objeto de pesquisa da EM, que consiste nas múltiplas relações entre a tríade

ensino, aprendizagem e conhecimento matemático, levando em consideração as dimensões social, política, cultural e econômica, ou seja, numa perspectiva de Educação Crítica (*Ibid*, 2009).

Enfatizamos, ainda, que, no decorrer dos anos, foram sendo sistematizadas algumas formas de trabalho em sala de aula, apoiadas nas mais diversas teorias, tendo como foco principal a melhoria no ensino-aprendizagem de Matemática. Posteriormente, destacamos que, dentre as diferentes formas de ensinar e aprender Matemática, elegemos uma abordagem metodológica de Resolução de Problemas, intitulada “*Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas*”.

Assim, no **último momento**, foi entregue a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “**Jogo de Sueca**” para cada professor, como material impresso, e também encaminhamos para o grupo do *WhatsApp* o documento no formato *Portable Document Format* (PDF). Assim, solicitamos que eles fizessem uma leitura detalhada e, posteriormente, colocassem suas impressões, curiosidades e reflexões em forma de problemas e os resolvessem.

Jogo de Sueca⁵³

Eu (Lola) e os meus amigos Nêm, Perobinha, PC, Cesinha e Sr. Dedá nos encontramos de segunda a sexta, durante a noite, para jogar algumas partidas de baralho e dominó. Na ocasião, conversamos sobre os mais variados assuntos do nosso cotidiano.

Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si.

Em um certo dia, Cesinha chegou atrasado e exclamou:

— Vixe! Lola vai jogar cartas para mim, ô homem da “mão ruim”.

Em seguida, eu disse:

— Quem mandou tu chegar atrasado!

— Ontem, sentei próximo de Nêm, deitei e rolei no jogo, disse Cesinha.

Perobinha falou com muita serenidade:

— Para o jogo ficar justo, acho que toda noite nós deveríamos trocar de lugar na mesa.

Essa é uma situação que a gente precisa conversar.

⁵³Disponível em: <https://www.megajogos.com.br/sueca-online/regras> . Acesso em: 13 jan. 2025.



Em tom de indignação, falei:

— Eu concordo, mas hoje Cesinha vai sentar no lugar que sobrou.

Sr. Deda chegou por último e, percebendo que não entrávamos em consenso sobre onde cada uma iria sentar, falou:

— Eu tenho a solução, vamos jogar Sueca ao invés de jogar baralho.

— Boa ideia! Afirmou Nêm. Agora a arenga vai ser para formar as duplas.

Na primeira partida, Sr. Deda afirmou, com muita convicção, que a dupla de PC obteve 56 pontos. E continuou:

— Ganhamos, me dá o baralho para eu traçar! Exclamou Sr. Deda, com muita serenidade: — sou ágil, com os cálculos, passo o dia fazendo contas na minha vendinha.

Sr. Deda é comerciante há anos e sempre lida com situações envolvendo cálculo mental.

Durante a partida, Perobinha se mostrou indignado com uma aposta que ele tinha realizado no *site* de apostas esportivas “Só ganha quem aposta”:

— Rapaz, fiz uma aposta em quatro jogos: São Paulo x Flamengo, Vasco x Fluminense, Fortaleza x Bahia e Atlético Paranaense x Palmeiras e perdi porque apostei na vitória do Palmeiras e quem venceu o jogo foi Atlético Paranaense, explicou Perobinha.

— Não sabe apostar, o Atlético Paranaense jogando em casa é muito forte, explicou PC.

— Eu não gosto de fazer esses tipos de apostas, porque acredito que esse jogo não é justo, pois, na teoria, a casa de jogos tem mais chance de ganhar - afirmou Nêm

Na segunda partida, Cesinha interrompeu o jogo faltando três rodadas de cartas, afirmando que já tinha vencido o jogo, visto que já tinha obtido 61 pontos.

— Não acredito! Está roubando! Conte para a gente ver! Falei, de forma incrédula. Cesinha fez a contagem dos pontos e provou que tinha vencido a partida.

Nessa noite, jogamos 32 partidas, a dupla de Sr. Deda venceu 2 partidas a mais que a dupla de Perobinha e 4 partidas a menos que a dupla de PC.

Neste encontro estavam presentes 12 professores. Esta **atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática** foi discutida no decorrer de **três episódios de sala de aula (1º, 2º e 3º)**, visando abordar os seguintes conceitos e conteúdos matemáticos:

- Sistematizar o conceito de Combinação Simples a partir de um fato que compõem a narrativa, tal como: “Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si”. Ademais, aprofundar a discussão resolvendo problemas utilizando o conceito da Soma dos termos de Progressão Aritmética (P.A) e Equação do 2º grau;
- Apresentar o conceito de Permutação Circular a partir da figura que representa uma mesa circular, contendo 6 pessoas;
- Abordar o conceito do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) a partir das apostas de jogos esportivos;
- Discutir a resolução de Sistemas Lineares (último parágrafo da narrativa), abordando Representações Múltiplas de Álgebra e transição entre elas, tal como fazer conexões com a Geometria, associando a posição das retas no plano cartesiano com a classificação dos Sistemas Lineares.

A primeira discussão surgiu da necessidade de conhecer as regras do jogo de Sueca para ser bem-sucedido no trabalho de proposição de problemas. Veja o diálogo abaixo:

P9: Como se joga Sueca? Eu sei jogar baralho, mas nunca joguei Sueca.
 P12: Se fosse dominó ou dama eu saberia, mas é importante saber para propor o problema.
 PP: Isso!
 P5: Eu lembro das algumas regras, mas, se você explicar, aí eu vou lembrando.
 PP: Em um jogo de Sueca, são quantas cartas?
 P12: Cinquenta e duas cartas.
 PP: Não, 52 cartas é um baralho comum.
 PP: São quantos naipes?
 P5: 4 naipes.

Para tanto, solicitamos que buscassem essas informações via *link*. Contudo, sintetizamos algumas regras, explicando que cada naipe possui 10 cartas e, com isso eles deduziram que um jogo de Sueca contém 40 cartas. Posteriormente, ressaltamos aos professores, que são atribuídas a algumas cartas uma certa quantidade de pontos. Sobre isso, P5 destacou: “*O ás vale mais né!?*” Nesse momento fomos na lousa, e fizemos uma tabela com as cartas e seus respectivos quantitativo de pontos. Observe a seguir:

Quadro 12 - Valores atribuídos às cartas em um jogo de Sueca

Cartas	Pontos
Ás de qualquer naipe	11
Sete de qualquer naipe	10
Rei de qualquer naipe	4
Valete de qualquer naipe	3
Dama de qualquer naipe	2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Com o propósito de compreender as regras do jogo a partir da sua exploração-problematização-proposição de problemas, questionamos os professores: “*PP: Observando a tabela, qual a quantidade máxima de pontos no jogo de Sueca?*” Os professores P5 e P12, de imediato, ressaltaram que são 120 pontos. E ainda propomos o seguinte problema, que gerou o debate:

PP: Qual a quantidade máxima de pontos obtidos numa rodada?

P12: 44 pontos.

P9: Quantos ás tem num baralho?

PP: São 4.

P9: E são duplas que jogam uma contra a outra?

PP: Isso!

Ressaltamos, para os professores, que na prática, com jogadores experientes, jamais ocorreria uma rodada em que uma das duas duplas obtivesse 44 pontos, pois um dos jogadores da dupla adversária, na sua vez, não iria jogar o ás, ao perceber que a outra dupla estava garantindo a pontuação da rodada. Destacamos, ainda, o papel do trunfo no jogo de Sueca, enfatizando que, quando um dos jogadores da dupla adversária não possuir a carta do naipe durante a rodada de referência, ele pode fazer uso do trunfo para vencer a rodada, sendo que, se tiver sido jogado mais de um trunfo pelos jogadores adversários, vence a carta mais alta do trunfo. Sobre isso, P5 explicou:

P5: Se o meu adversário joga o ás de espada que vale 11 pontos e eu não tenho o naipe de espadas, mas tenho o trunfo que é copas, aí eu jogo o trunfo e corto o ás dele, daí, já estou ganhando dele, mas, se o parceiro dele também não tiver o naipe de espadas, ele pode vencer jogando uma carta de copas com o valor maior.

PP: Exatamente!

O professor P12 questionou o professor-pesquisador: “*P12: E se eu formular um problema e não saber resolver?*”. Sobre isso, destacamos que, em uma sala de aula real, isso pode acontecer – o aluno pode propor um problema e, *a priori*, o professor não se sentir seguro para resolvê-lo, bem como para analisar as resoluções apresentadas pelos alunos, como também não conseguir avaliar, se de fato, o problema está bem formulado, carecendo, assim, de uma solução.

Comentário: Um cenário de sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas requer a sensibilidade do professor que precisa planejar uma aula com alguns níveis de intencionalidade, como, por exemplo, antecipar problemas.

Contudo, os problemas propostos podem sair do planejamento do professor, em termos das suas dimensões matemática, pedagógica e social.

Acerca da responsabilidade do professor ao planejar uma aula de Matemática via de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP), Abreu (2024) defende que, o professor precisa se preparar por meio do planejamento de práticas que consigam extrair potencialidades dessa metodologia, e que de forma intencional possa impulsionar a exploração de conceitos matemáticos junto aos contextos sociais também são necessários e fazem parte do currículo escolar.

Assim, percebendo, *a priori*, as dificuldades dos professores em propor problemas, ressaltamos para eles a necessidade de tomar como ponto de partida problemas que eles já conhecem como parâmetro para novos problemas. Ademais, enfatizamos que bastava problematizar alguns fatos que compõem o enredo da Narrativa Matemática, chegando, possivelmente, à formulação bem-sucedida dos problemas, como também novos elementos ou variáveis podem ser acrescentadas, de tal forma que levem a novas problematizações.

O P11, ao ver o trabalho realizado por P5, externou para os professores: “*Eu formulei só dois problemas. Vi que P5 formulou vários problemas*”. Com isso, entrevistamos e destacamos que os problemas propostos por ele podem ser o ponto de partida para novos problemas.

Comentário: Uma prática de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é marcada por ser inacabada, sendo assim, a proposição de um problema, resoluções, soluções e reformulações podem culminar em novas viagens, impulsionadas pelo caminhar da exploração-problematização-proposição de problemas, que se intensifica quando o professor tira proveito de todo trabalho realizado pelo aluno (errado ou certo) em torno de uma situação-problema.

O P9 solicita o professor-pesquisador e destaca: “*P9: Eu não consigo formular um problema sem criar um contexto*”. Assim, explanamos para os professores que, normalmente, os alunos propõem problemas tomando como base o seu contexto real, que aborda a sua vivência, atividades diárias e personagens reais (Mendonça, 1993; Silva, L. 2013; Brandão, 2014; Silva, 2016; Silveira, 2016; Santos, E., 2019; Silveira, Andrade, 2022). Com isso, questionamos aos professores se era possível propor problemas referentes ao jogo de Sueca sem conhecer as regras:

P8: De acordo com o jogo, não. É necessário saber jogar.

P9: Eu preciso conhecer o contexto do jogo para propor os problemas.

PP: Perfeito!

O P11 argumentou que P5, por conhecer as regras do jogo, não terá dificuldades em propor problemas.

Comentário: Embora tenhamos apresentado e esclarecido as regras do jogo de Sueca, notamos que, de modo geral, isso não foi o bastante para propor problemas. Percebemos que, para que os professores pudessem formular

problemas conscientemente, deveriam vivenciar o jogo, visando se familiarizar para aprimorar jogadas e ampliar sua compreensão, colocando suas impressões, descobertas e decisões em forma de problemas.

Pensando em avançar, P12 questiona: *“Podemos acrescentar mais um dado ao texto para propor os problemas?”* A partir da indagação de P12, entrevistamos e explicamos que ficassem à vontade para propor seus problemas, inclusive, podendo incorporar novos elementos que pudessem qualificar a redação dos problemas.

Percebendo que os professores realizaram o trabalho de proposição de problemas, solicitamos que eles os compartilhassem, fazendo uma leitura dos problemas, explicando e justificando o processo de pensamento que os levaram à proposição dos problemas. Durante a descrição e análise do trabalho realizado pelos professores, adotamos algumas categorias dos problemas propostos a partir da problematização de cada acontecimento/evento da Narrativa Matemática, isto é, antecipamos alguns problemas que podem ser formulados tomando como ponto de partida alguns fatos/acontecimentos que compõem a Narrativa Matemática, como, por exemplo: **“Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si”**; a partir da figura que representa uma mesa circular; problematizar a quantidade de partidas vencidas por cada dupla, dentre outros.

O P3 iniciou fazendo a leitura do seu trabalho realizado. Observamos que o professor tentou problematizar o jogo de Sueca, no entanto, não foi bem-sucedido na proposição de problemas matemáticos. Contudo, P3 levantou uma reflexão, que, a nosso ver, tem um caráter sócio-político-cultural, ao afirmar que: *“Eu não conheço as regras do jogo, mas algo que me chamou atenção foi a questão do às valer mais pontos, deveria ser o rei, que dá a ideia de algo supremo”*.

Assim, ressaltamos que a nossa preocupação não é só adentrar questões que enfocam a Matemática, mas observar, também, questões que implicam no entendimento do funcionamento da sociedade (Silva, L. 2013; Santos, R. 2019; Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Silveira, Nascimento, 2023; Sousa *et al.*, 2024). Destacamos, assim, que P3 trouxe uma questão política e histórica que evidencia relações de poder relativa à figura de um “Rei”, como sendo a pessoa que detém o poder soberano em um reino. Veja o registro do trabalho realizado por P3 a seguir:

Figura 3 - Trabalho de proposição de problemas realizado por P3

- I) Inicialmente o jogo estava planejado para jogar baralho. Visto que um dos jogadores chegou atrasado. Um dos jogadores SM. Dida propondo uma solução de jogar suruca.
- II) Sabendo que o baralho contém 52 cartas analisando a imagem com 6 jogadores. Então 52 cartas mais 4 totalizando 56 pontos.
- III) Uma das propostas é que deveria ser em vez do Ás ser o maior número de pontos o Rei pela lógica de ser o supremo.
- Ás → 11
 Sete → 10
 Rei → 4
 Dama → 2
 Valete → 3

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, recomendamos que o P11 fizesse a leitura dos problemas formulados. Ele propôs dois problemas. Em um deles, foi problematizada a quantidade de cumprimentos trocados entre Lola e seus amigos. Veja a seguir:

Figura 4 - Problema proposto por P11

(I) - QUAL FOI A QUANTIDADE DE CUMPRIMENTOS QUE ELAS FIZERAM ENTÃO SI PAULA COMEÇA O JOGO.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Notamos que esse problema chamou a atenção dos professores e que, embora seja um problema bem presente nos livros didáticos para abordar diferentes conceitos matemáticos, os professores, de modo geral, não tinham conhecimento sobre quais ideias matemáticas dariam conta deste problema. Assim, observamos que eles se sentiram desafiados a resolver esse problema, bem como já tínhamos antecipado seu potencial para abordar múltiplos processos/procedimentos de resolução, inclusive, a partir de uma prática internacionalizada, almejávamos sistematizar o conceito de Combinação Simples a partir deste problema.

Desse modo, questionamos aos professores: “PP: Que conceitos matemáticos podem ser utilizados para resolver este problema?” Fomos à lousa e ficamos atentos às reflexões dos professores acerca deste problema.

P2: Tendo em vista que eles se cumprimentem só uma vez?

PP: Isso!

P12: Parece com aqueles problemas que envolvem a quantidade de vezes que se pode vestir com uma certa quantidade de bermudas e camisetas.

P2: É sempre uma relação entre pares. É sempre um cumprimento entre duas pessoas. São duas vagas. Por exemplo, são seis pessoas, então, são $6 \cdot 5$, porque um não pode se cumprimentar consigo mesmo. A primeira pessoa pode ser qualquer uma das seis. A segunda tem que tirar a primeira que ela já cumprimentou, então, seria $6 \cdot 5 = 30$ apertos de mãos. Eu pensei assim.

PP: Você resolveu como se fosse um problema de Arranjo Simples?

P2: Isso!

PP: Quais conteúdos matemáticos podem ser abordados com este problema?

P12: Análise Combinatória.

PP: Isso! Este é um problema de Arranjo Simples ou Combinação Simples? O que é um problema de arranjo?

P8: É quando a ordem na formação dos grupos é importante.

PP: Nesse caso, a ordem é importante?

P8: Não. Entre duas pessoas, contamos só um aperto de mãos.

P13: Seria o mesmo aperto de mãos.

A partir do diálogo, chamamos atenção para a resolução apresentada por P2, e questionamos que, quando fazemos $6 \cdot 5 = 30$, estaria entrando na contagem as possibilidades de duas pessoas se cumprimentarem entre si, e resultar em dois cumprimentos. Para aprofundar a discussão, propomos problemas mais simples que ajudaram os professores a refletirem sobre o problema em foco. Veja o diálogo a seguir:

PP: É possível eliminar os apertos mãos que foram acrescentados nesta resolução?

Professores: Sim!

PP: São seis pessoas. Quantos apertos de mãos recebeu a primeira pessoa?

P14: 5.

PP: E a segunda pessoa recebeu quantos apertos de mãos?

P12: 4. Ela já apertou a da primeira.

PP: E a terceira pessoa?

P12: 3.

PP: E a quarta pessoa?

Professores: 2.

PP: E a quinta pessoa recebe quando apertos de mãos?

Professores: 1.

PP: A última aperta as mãos de quantas pessoas?

P12: Nenhuma. Ela já apertou de todas.

PP: Isso. E qual o total?

Professores: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ apertos.

PP: E o que esta solução pode nos ajudar em relação à resolução apresentada por P2?

P2: É como se pegasse o 30 e dividisse por 2. Seria $\frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$

PP: E o que isso significa no contexto do problema?

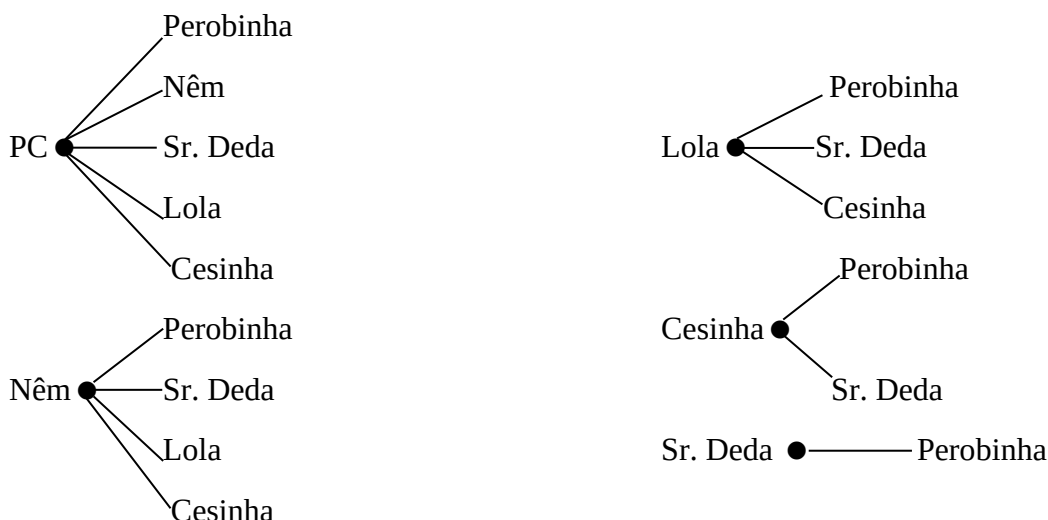
P14: É porque os apertos de mãos estão sendo contados duas vezes. Dividir por dois para eliminar a quantidade de apertos de mãos repetidos.

P13: É como aquele problema dos times em um campeonato. Se são 10 times, cada time joga 9 vezes.

PP: Isso. Essa situação dos times pode apresentar um problema de mesma natureza conceitual. Seria um novo problema.

Comentário: Notamos que o diálogo com os professores conduzido pelo professor-pesquisador, por meio da mediação-refutação, culminou na obtenção de múltiplos processos/procedimentos de resolução do problema, o que ampliou a compreensão acerca de ideias matemáticas inerentes ao problema.

Outro procedimento de resolução que surgiu no âmbito da discussão foi uso da árvore de possibilidades. Veja a seguir:



As reflexões geradas possibilitaram aos professores atribuírem significados para os processos/procedimentos de resolução que foram apresentados. Assim, partimos do trabalho realizado por eles para apresentar um novo conceito. Explanamos que Lola cumprimentar PC e PC cumprimentar Lola não gera um novo cumprimento. Fomos na lousa e expomos as resoluções apresentadas de forma colaborativa pelos professores, e ressaltamos que, no primeiro momento, P2 tinha exposto que estávamos diante de um problema de Arranjo Simples $A_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$, e que, no âmbito da discussão, foi notado que total de apertos de mãos foi contado duas vezes, sendo necessário retirar a quantidade de apertos de mãos repetidos, ou seja,

$$15 = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{A_{6,2}}{p!}$$

Desse modo, destacamos que, se tivéssemos n elementos distintos para organizar em agrupamento de p elementos, tomados p a p ($p \leq n$), bastaria dividir o número total de agrupamentos formados (Arranjo Simples) pela permutação do número de elementos destes agrupamentos (duas pessoas se cumprimentando). Assim, com as contribuições dos professores, partimos do $\frac{A_{n,p}}{p!}$ e chegamos na fórmula de Combinação Simples. Veja o diálogo entre o professor-pesquisador e os professores:

PP: Qual a fórmula para resolver problemas envolvendo Arranjo Simples?

P8: $\frac{n!}{n-p!}$

PP: Isso. E como resolvemos uma divisão envolvendo frações?

Professores: Repete a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda. Multiplicamos as frações e chegamos na fórmula de Combinação Simples

Observe o trabalho realizado na lousa, junto com os professores:

$$\frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{n-p!}}{p!} = \frac{n!}{n-p!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,p}$$

$$\therefore C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Posteriormente, destacamos, para os professores, que esse é um problema de Análise Combinatória cuja ordem na formação dos agrupamentos não é importante, isto é, a mudança na ordem dos elementos não gera um novo agrupamento, e os agrupamentos diferem pela natureza dos elementos. Além disso, o Princípio Fundamental da Contagem não é aplicável a este tipo de problema.

Comentário: A nossa abordagem com os professores buscou evidenciar a importância da Proposição de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas, como o ponto de partida de uma aula de Matemática. Nela, entendemos o que os problemas propostos podem desencadear o processo de construção e formalização de conceitos e conteúdos matemáticos. Assim, ao prever alguns problemas que poderiam ser propostos, e quando isso aconteceu, fomos à lousa para discutir como abordar um conceito matemático antes de sua apresentação formal, buscando inverter o modelo de uma aula tradicional, que consiste em apresentar uma ideia matemática, em seguida, são discutidos exemplos e, por fim, tem-se exercícios de aplicação.

O P2 questiona sobre a dimensão conceitual do problema dos cumprimentos: “*Voltando ao problema dos cumprimentos. De imediato, a gente conseguiria fazer relação direta com um problema de combinação? Essa é uma dificuldade que sinto em Análise Combinatória*”. Respondemos que, inicialmente, o professor possui um repertório de problemas que foram incorporados a suas aulas de Matemática advindos de sua formação inicial e/ou continuada e prática docente. Ademais, durante os diferentes processos/procedimentos adotados, tal como listagem das possibilidades, poderia ser o caminho para perceber que a ordem não era relevante durante a formação dos agrupamentos (Silva, A., 2013; Silveira, 2016; Silveira; Andrade, 2020), podendo fazer relação com um problema de Combinação Simples, sendo confirmado com a aplicação da fórmula.

Comentário: Notamos que os professores buscavam identificar os fatos da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática que podiam ser problematizados, reconhecendo conexões com conceitos matemáticos. No entanto, essa não foi uma tarefa fácil, exigindo do professor, sobretudo, o conhecimento do conteúdo matemático (saber matemática) articulado com o conhecimento pedagógico (saber propor problemas).

O P2 continua seu processo de pensamento e propõe um novo problema:

P2: Muda, por exemplo, se não fosse um cumprimento entre duas pessoas, porque o cumprimento seria um par. E se fosse um abraço coletivo entre três pessoas?

PP: Em termos de conceito matemático, não. Teríamos um problema de Combinação Simples. O que mudaria é que os agrupamentos seriam formados por três elementos.

Os professores P2, P5, P11 e P14 problematizaram a forma que PC, Cesinha, Sr. Deda, Lola, Nêm e Perobinha se organizavam na mesa para jogar baralho ou dominó. Solicitamos que P14 fizesse a leitura do problema que foi formulado, e P2, P5 e P11 participaram do diálogo, expondo os problemas que eles formularam. Veja todos os problemas a seguir:

Figura 5 - Problema proposto por P14

De acordo com a fala de Perobinha "Para o jogo ficar justo, acho que toda noite nós deveríamos trocar de lugar na mesa". De quantas maneiras possíveis os jogadores podem sentar, levando em consideração que os encontros acontecem de segunda a sexta?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 6 - Problema proposto por P11

(II) - ENTÃO TODOS PARTICIPANTES DO JOGO
QUANTAS VEZES OS PARTICIPANTES TROCAM
DE LUGAR PARA TODA VEZ EM QUE
FOSS E SÓBÃO.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 7 - Problema proposto por P5

5) Dado Todos os jogadores, de quantas maneiras diferentes eles poderiam sentar-se de modo que não possa ficar 2 vezes ao lado do mesmo jogador?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 8 - Problema proposto por P2

I) Em uma mesa circular, com seis cadeiras, temos quatro jogadores de suca para se posicionarem a mesa, em dupla, de certa forma que os integrantes de cada dupla se sentem sempre de frente para o outro. Quantas seriam as diferentes formas de organização desta mesa?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Um outro problema envolvendo Análise Combinatória que estávamos antecipando que poderia surgir no processo de problematização seria a quantidade de duplas que poderia ser formada com o Lola e seus amigos, emergindo, assim, nos trabalhos realizados por P5, P6, P9, P10 e P11. Além do mais, entendíamos que a aproximação da Análise Combinatória com o tópico de Probabilidade, e ainda com alguns contextos, como o jogo de baralho e dominó, e apostas esportivas propiciaria um ambiente fértil para a geração de problemas envolvendo a ideia de Probabilidade (por exemplo, Silveira, 2016). De fato, P9 questiona: "Qual a probabilidade de se retirar aleatoriamente, dentre as 40 cartas, uma carta de ás?" Já P5 e P6,

por sua vez, formulam problemas envolvendo o conceito de Probabilidade e ideias essenciais de Análise Combinatória: “P6: *Qual a probabilidade de Nêm formar duplas com Perobinha*”? Observe o problema formulado por P5:

Figura 9 - Problema proposto por P5

3) Qual a probabilidade de Perobinha ter ganho a aposta dos jogos de futebol?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Fomos à lousa para discutir este problema com os professores. Ressaltamos, inicialmente, que a Análise Combinatória não pode ser vista apenas como uma ferramenta para o estudo da Probabilidade, já que, “a Combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias” (Brasil, 2006, p. 79). Com isso, quando temos um espaço amostral com um grande número de possibilidades, são utilizados alguns conceitos de Análise Combinatória, já que não é recomendável enumerar/listar todas as possibilidades (Silva, A., 2013; Silveira, 2016). Com o propósito de obter a generalização de um modelo matemático por meio do Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo, iniciamos a discussão com os professores:

PP: Quais são as possibilidades de resultados em jogo de futebol?

P5: São 3 possibilidades para cada jogo: vitória, derrota ou empate.

PP: Certo! E se tivermos que fazer uma aposta com a combinação de dois jogos, como, por exemplo, São Paulo x Flamengo e Vasco x Fluminense?

A partir dessa mediação-refutação, os professores apresentavam, oralmente, os possíveis resultados e fomos registrando na lousa:

Quadro 13 - Organização das possibilidades para aposta de dois jogos de futebol

São Paulo x Flamengo	Vasco x Fluminense
São Paulo (vence)	Vasco (vence)
São Paulo (vence)	Fluminense (vence)
São Paulo (vence)	Empate
Flamengo (vence)	Vasco (vence)
Flamengo (vence)	Fluminense (vence)
Flamengo (vence)	Empate
Empate	Vasco (vence)
Empate	Fluminense (vence)
Empate	Empate

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Assim, os professores observaram que a combinação de dois jogos gera 9 combinações de apostas. Em seguida, indagamos: “PP: *E se for uma combinação de 3 jogos*?” Observamos que esse questionamento causou um certo silêncio, o que acarretou na mobilização dos

professores em *prol* da solução deste problema. Após um certo tempo, alguns professores explicitaram suas descobertas:

P14: São 3 resultados diferentes em um jogo, 9 resultados diferentes na combinação de dois jogos e 27 resultados diferentes na combinação de três jogos.

PP: E como você pensou matematicamente para obter 27 possibilidades na combinação de três jogos?

P14: Três possibilidades para cada jogo, ou seja: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

PP: E no caso do problema que são 4 jogos?

Professores: 81 possibilidades.

Para aprofundar a discussão, questionamos: “PP: *E qual seria o modelo matemático que vale para n jogos?*” Registramos o trabalho realizado pelos professores na lousa, determinando o número de resultados para cada combinação de jogo, fazendo uso do Princípio Multiplicativo, e questionamos qual o padrão existente entre o número de jogos e o número de resultados (1 jogo – 3 resultados, 2 jogos – 9 resultados, 3 jogos – 27 resultados e 4 jogos – 81 resultados). Assim, observamos que, de modo geral, os professores notaram que o número de resultados é representado por uma potência de base 3, o que ajudou a perceber que 3^n é o modelo matemático, que, nestas condições, vale para determinar o número de apostas geradas para n jogos. O debate gerou a construção do seguinte quadro:

Quadro 14 - Modelo válido para n jogos

Número de jogos	Número de resultados
1	$3 = 3^1$
2	$3 \cdot 3 = 9 = 3^2$
3	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 = 3^3$
4	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 = 3^4$
$\vdots$	$\vdots$
n	3^n

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Portanto, a probabilidade de Perobinha ter vencido a aposta de jogos de futebol é $1/81$. Visando discutir o Princípio Multiplicativo como uma combinação de elementos de um conjunto X com elementos dos conjuntos Y , explanamos que, para descobrir o número de resultados para 3 jogos, bastava combinar o número de resultados para dois jogos - 9 possibilidades (conjunto X) com o número de resultados de um jogo – 3 possibilidades (conjunto Y).

Ainda com relação ao tema “aposta”, P13 propôs um problema em nível sócio-político-cultural acerca dos mecanismos de sedução implementados pelas casas de apostas. Veja a seguir:

Figura 10 - Problema proposto por P13

Em um universo que todos gostam de jogar,
pois as probabilidades apresentam até 98% de
pessoas que já fizeram algum tipo de aposta.
O jogo é extremamente intuitivo e mexe
com o ego das pessoas. Assim como, é
influência para vencer ou ser desafiado.
O que leva as pessoas fazer algum tipo
de aposta?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Este problema gerou o seguinte debate:

P2: Existe uma probabilidade imaginária que banca cria considerando todo contexto do jogo. Por exemplo, se ela tá pagando mais para o Goiás ganhar do Flamengo, então, ela tá considerando que a probabilidade do Goiás ganhar é baixa.

P13: Recentemente, a banca fez um jogo diferente. Foi na época de eleição para presidente. No segundo turno, estava pagando R\$ 2,50 para o candidato que venceu o primeiro turno, mas faltando 5 dias inverteu e passou a pagar mais para o candidato que perdeu o primeiro turno.

PP: Mas o que faria as pessoas apostarem no candidato que perdeu no primeiro turno, mesmo sabendo, por exemplo, que as pesquisas apontam a sua derrota novamente?

P13: É porque o jogo é o fanatismo não veem o óbvio. A atração pelo jogo faz com que você mude de opinião. O jogo é uma atração humana, como a busca de amor e carinho. Ou seja, aposta cegamente, independente se vai perder ou não.

P2: Isso também envolve alimentação do ego.

O problema formulado por P12, bem como um dos problemas propostos por P5 e P6 problematizam a quantidade de partidas vencidas pelas duplas de Sr. Deda, Perobinha e PC. No entanto, P12 acrescenta uma informação importante, que passou despercebida por nós durante o processo de escrita desta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática: “P12: Considere que em cada partida houve uma dupla vencedora”, além de ter acrescentado um novo dado – a dupla de Perobinha venceu 8 partidas. Com isso, enfatizamos, para os professores, que no contexto do jogo, há a possibilidade de empate (cada dupla obter 60 pontos), principalmente, se houver uma quantidade significativa de partidas. Sendo assim, deveríamos ter deixado claro que não houve empate durante as 32 partidas jogadas ou a situação mais provável seria considerar uma quantidade de empates dentre essas 32 partidas.

Questionamos os professores sobre quais conteúdos que estão sendo discutidos nesse problema. Observe o diálogo a seguir:

Professores: Sistemas de equações ... Sistemas Lineares.

P12: Só que eu fiz para resolver usando aritmética. Como a dupla de Perobinha ganhou 8, então eu consigo descobrir quantas partidas a dupla de Sr. Deda ganhou,

como ganhou 2 a mais, então, ganhou 10, com isso, eu sei que a última ganhou 14. Eu elaborei pensando já para resolver aritmeticamente, sem usar Álgebra.

Figura 11 - Problema proposto por P12

↳ EM UMA NOITE DE JOGATINA, TRÊS DUPLAS ESTÃO JOGANDO ^{CARTAS} ~~DE~~, NO TOTAL JOGARAM 32 PARTIDAS. A DUPLA DE SR. DEDA VENCEU 2 PARTIDAS A MAIS QUE A DUPLA DE PEROBINHA E 4 PARTIDAS A MENOS QUE A DUPLA DE PC. SABENDO QUE A DUPLA DE PEROBINHA VENCEU 8 PARTIDAS, DETERMINE QUANTAS PARTIDAS VENCEU CADA UMA DAS OUTRAS DUPLAS. CONSIDERE QUE EM CADA PARTIDA HOUVE UMA DUPLA VENCEDORA.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: O trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas desempenhado por P12 evidenciou: preocupação com conceitos matemáticos; repensar sobre o seu próprio processo de pensamento - antecipando e controlando a solução do problema (processo de metacognição); não se limitou às informações da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, mas acrescentou novos elementos que sinalizavam novos caminhos de exploração-problematização-proposição de problemas.

Com relação a problematizar o jogo de Sueca, surgiram algumas proposições de problemas, no entanto, observamos que os professores sentiram dificuldades em propor problemas pelo fato de não estarem familiarizados com o jogo.

P9: Eu quis fazer alguma coisa sobre o jogo em si. Aí contextualizei que – De acordo com o texto o jogo de Sueca se utiliza 40 cartas, onde dessas 40 cartas apenas 20 delas valem pontos. Segue a tabela abaixo, mas não consegui propor problemas sobre o jogo.

Contudo, P1, P5, P6 e P8 formularam alguns problemas:

Figura 12 - Problema proposto por P1

Se a Primeira Partida de sueca, Sr. Deda afirmou que a dupla de PC obteve 56 Pontos. Quantos Pontos as outras duplas fizeram?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 13 - Problema proposto por P5

- 1) Viro que Cesinha interrompeu a partida de sueca faltando 3 rodadas, alegando ter ganho a partida com um total de 61 pontos, responda?
- a) Qual a pontuação Total da partida?
- b) Na primeira partida dupla de P5 obteve 56 pontos. Qual a pontuação da dupla adversária?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 14 - Problema proposto por P6

3) SABENDO QUE A CARTA "ÁS", REPRESENTADA NO CENTRO DA MESA, EQUIVALE A 11 PONTOS; QUANTOS PONTOS, AO TOTAL, 4 CARTAS REPRESENTAM?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 15 - Problema proposto por P8 e resolução

NO JOGO DE SUECA, NEM TODAS AS CARTAS VALEM PONTOS. SABE-SE QUE O ÁS VALE 11 PONTOS, O SETE VALE 10 PONTOS, O REI VALE 4 PONTOS, O VALETE VALE 3 PONTOS, A DAMA VALE 2 PONTOS E QUE AS CARTAS RESTANTES NÃO VALEM PONTOS. SABE-SE AINDA QUE O JOGO DE SUECA É JOGADO EM DUAS DUPLAS, SENDO A DUPLA VENCEDORA AQUELA QUE OBTIVER MAIS PONTOS DOS 120 PONTOS POSSÍVEIS. AO FAZER A DISTRIBUIÇÃO DAS CARTAS, CADA PARTICIPANTE RECEBE 10 CARTAS. SUPONDO QUE UM DOS JOGADORES RECEBA 2 DAMAS, 2 VALETES, 2 REIS, 1 SETE, 1 ÁS, 1 DOIS E 1 TRÊS, QUANTOS PONTOS ELE TERÁ EM MÃOS?

$$2 \text{ DAMAS} = 2 \times 2 = 4 \text{ PONTOS}$$

$$2 \text{ VALETES} = 2 \times 3 = 6 \text{ PONTOS}$$

$$2 \text{ REIS} = 2 \times 4 = 8 \text{ PONTOS}$$

$$1 \text{ SETE} = 1 \times 10 = 10 \text{ PONTOS}$$

$$1 \text{ ÁS} = 1 \times 11 = 11 \text{ PONTOS}$$

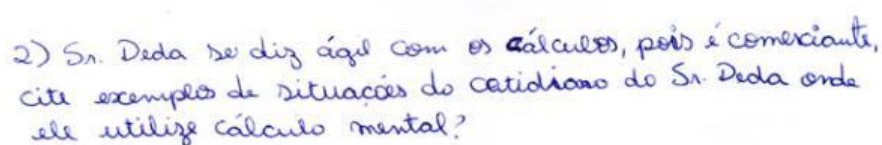
$$\text{TOTAL: } 4 + 6 + 8 + 10 + 11 = 39$$

$$\text{ELE TERÁ } 39 \text{ PONTOS.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Notamos que P5 se debruçou, de forma efetiva, no trabalho de proposição de problemas, ao problematizar diferentes fatos que compõem a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática. Inclusive, P5 formulou um problema que contextualiza o saber e fazer cotidiano do Sr. Deda, isto é, o conhecimento matemático utilizado por ele no âmbito de sua profissão (comerciante). Destacamos, para os professores, que não tínhamos antecipado problemas/questões que buscassem olhar para o fazer matemático desenvolvido por algum grupo social, ou seja, práticas de natureza etnomatemática. Veja o problema a seguir:

Figura 16 - Problema proposto por P5



2) Sr. Deda se diz ágil com os cálculos, pois é comerciante, cite exemplos de situações do cotidiano do Sr. Deda onde ele utilize cálculo mental?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Durante todas as propostas de proposições de problemas apresentadas pelos professores, questionamos quais conteúdos inerentes aos problemas e em que turmas poderiam ser trabalhadas, como, por exemplo, o problema dos cumprimentos que foi dedicado um tempo discutindo-o. Os professores argumentaram que esse problema pode ser trabalhado no Ensino Fundamental, ao trabalhar com Sequências Numéricas, bem como introduzir a natureza dos problemas de Combinação Simples no 9º ano. Já no Ensino Médio também pode ser utilizado para discutir os conteúdos a partir da formalização do conceito de Combinação Simples e da Soma dos termos de uma Progressão Aritmética.

Assim, argumentamos que, numa aula intencionalizada, um problema pode ser trabalhado em diferentes turmas abrangendo diferentes níveis de dificuldades e aprofundamento. Destacamos, ainda, para os professores, que as discussões em torno do problema dos cumprimentos e do problema da aposta de jogos esportivos promoveram múltiplos processos/procedimentos de resolução, que resultaram na apresentação do conceito de Combinação Simples, no levantamento de uma conjectura e generalização de um modelo matemático, a partir do conceito do Princípio Fundamental da Contagem.

Explicamos que uma prática mais comum em uma aula de Matemática segue o *design*: definição-exemplos-exercício de aplicação, isto é, o conceito matemático é apresentado de forma direta, posteriormente, são discutidos exemplos análogos, finalizando com exercícios de aplicação. Assim, ressaltamos, para os professores, que a nossa abordagem buscou inverter esse modelo, assumindo que a situação-problema precisa ser o ponto de partida de uma aula de matemática, e que os alunos podem compreender uma ideia matemática explorando, propondo

e resolvendo problemas (Andrade, 1998, 2017; Silva, L., 2013; Brandão, 2014; Nascimento, 2014; Silveira; 2016; Silveira, Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2019, 2024; Abreu, 2024).

Com relação ao primeiro contato dos alunos com a Proposição de Problemas, recomendamos aos professores que, numa sala de aula real numerosa, eles podem solicitar que os alunos formem duplas ou grupos. Com isso, alguns professores expuseram alguns encaminhamentos que podem ser tomados sala de aula:

P9: Podemos formar grupos e cada grupo formula dois problemas.

P11: Os grupos podem trocar os problemas entre si, e resolverem os problemas dos colegas. Acho que, assim, ficaria mais interessante.

P12: Assim, seria bom, porque os alunos iriam avaliar erros na questão, ao tentar resolvê-la.

Comentário: Percebemos que os professores anteciparam alguns encaminhamentos que conduzirão as discussões das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, uma vez que, com o propósito de aprofundar as discussões, enfatizaram a necessidade de acrescentar novos elementos, avaliar se o problema precisa ser reescrito e trocar os problemas (Silveira, 2016; Martins, 2024; Abreu; 2024).

Sugerimos aos professores que uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, tendo a proposição de problemas como ponto de partida, pode ser idealizada a partir de: um texto que leve a problematizações em âmbito cognitivo e social, a exemplo da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática em discussão; elementos que expressam ideias matemáticas, como tabelas, gráficos e figuras; um conceito ou conteúdo matemático; e um problema como fonte geradora de novos problemas (por exemplo, Silva, L., 2013; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Granjeiro, 2020; Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Andrade, 2022; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2019, 2024; Abreu, 2024).

Comentário: Notamos que, neste primeiro encontro, de modo geral, os professores apresentaram dificuldades para propor problemas, sendo necessário um tempo maior para alguns deles desenvolverem o trabalho de proposição de problemas, além disso, alguns problemas formulados cabiam uma redação melhor, precisando, assim, ser reformulado ou melhor escrito para se caracterizasse como um problema que carecia de uma solução. Por outro lado, tivemos alguns professores que mostraram competências no trabalho de proposição de problemas, formulando diferentes problemas, estabelecendo relações entre os acontecimentos da Narrativa Matemática e ideias matemáticas, enquanto outros não se limitaram ao espaço-tempo que compõe a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, e incorporaram novos fatos que ampliaram o movimento de problematização.

Por fim, solicitamos que, em casa, os professores fizessem a leitura dos textos: “*Developing understanding in mathematics via problem solving*” (Desenvolvendo a compreensão em matemática via resolução de problemas), escrito pelos autores Thomas Schroeder e Frank Lester (Schroeder, Lester, 1989) e “*Commentary on Problem Solving*

Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion” (Comentários sobre a Heurística de Resolução de Problemas, Afeto e a Matemática Discreta: Uma Discussão Representacional), escrito pelo pesquisador Jinfa Cai (Cai, 2010).

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- A Proposição de Problemas foi desenvolvida como ponto de partida para a construção de conceitos matemáticos, a partir da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas;
- O encaminhamento didático que orienta que o problema deve ser ponto de partida para a aprendizagem matemática ocorreu a partir dos problemas propostos pelos professores, o que levou à sistematização do conceito de Combinação Simples e à generalização de um modelo matemático por meio do Princípio Fundamental da Contagem;
- O refinamento da resolução de um problema (problema dos apertos de mãos) proposto por um dos professores desencadeou múltiplos processos de resolução, sendo discutido abrangendo diferentes níveis de dificuldades, o que levou a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses;
- Os professores sinalizaram competências no trabalho de proposição de problemas, propondo problemas antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas;
- Os professores analisaram os problemas que por eles propostos, explicitando que conceito dava conta do problema (conhecimento pedagógico do conteúdo) e em qual(is) turma(s) o problema poderia ser trabalhado (conhecimento curricular).

7.2 Segundo episódio de sala de aula (27/06/2023): refinando/aprofundando a Narrativa Matemática “Jogo de Sueca”

Neste encontro, retomamos o problema proposto por P14: *“De acordo com a fala de Perobinha – Para o jogo ficar justo, acho que toda noite nós deveríamos trocar de lugar na mesa, de quantas maneiras possíveis os jogadores podem sentar, levando em consideração que os encontros acontecem de segunda a sexta?”*, com o propósito de apresentar o conceito de Permutação Circular. Neste encontro, estavam presentes 11 professores.

Iniciamos o encontro fazendo a leitura deste problema e questionando os professores acerca do conceito matemático que dava conta dele. Veja a seguir:

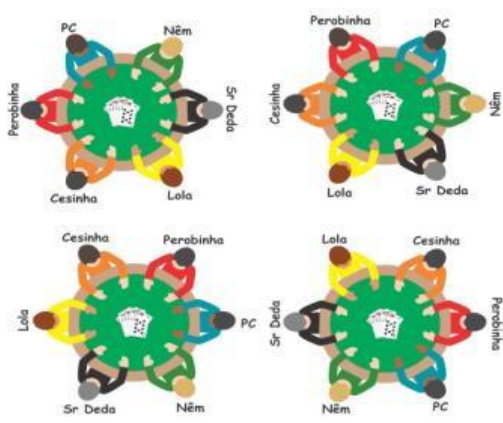
PP: Qual o conceito matemático utilizado para resolver este problema?

P14: Permutação Circular.

PP: Isso!

Posteriormente, solicitamos que os professores resolvessem este problema. Após um certo tempo, pedimos que eles compartilhassem suas resoluções, e observamos que, em todos os trabalhos apresentados, eles recorreram à fórmula de Permutação Circular. Sobre esse problema, P2 ressaltou que, “*Nesse caso, o posicionamento em linha reta e circular muda bastante*”. A partir da reflexão de P2, desafiamos os professores a apresentarem algumas configurações da mesa, fomos para a lousa e surgiram as seguintes possibilidades:

Figura 17 - Alguns modos de se organizar na mesa



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Ao listar quatro modos de os amigos se posicionaram na mesa, os professores notaram que as configurações se mantiveram as mesmas. O que, de fato, ocorreu foi que todas as pessoas se deslocaram em uma posição no sentido horário. Observe o debate a seguir:

Professores: Essas 4 possibilidades são iguais.

PP: Quantas possibilidades iguais a estas teriam?

P13: 6.

P12: Sr. Deda estará em 6 posições próximo de Lola e PC.

PP: Se fosse um problema de Permutação Simples, seria a permutação de quantos elementos?

P5: Seis, trocando de posição, 6!.

PP: Será que encontraríamos o total de possibilidades?

P13: Não, 6!, é igual a 720.

Professores: A resposta é 120.

PP: Isso. E o que podemos fazer?

P14: Acho que temos que tirar as possibilidades iguais.

PP: E como fazer isso?

P2: Dividir por 2, igual o problema dos apertos de mãos?

P14: É, mas só aí já temos 4 possibilidades iguais.

PP: E, no total, são quantas possibilidades iguais a estas?

P12: São 6 formas de representar a mesma mesa.

Professores: Dividir por 6.

Comentário: Observamos que os professores adotaram alguns elementos de referência para listar as possibilidades e perceber padrões na formação dos agrupamentos (Silva, A., 2013; Silveira, 2016; Silveira, Andrade, 2020, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023), de tal forma que os ajudou a perceber algumas configurações da mesa que são iguais e como retirá-las da contagem.

Desse modo, reforçamos que devemos dividir por 6, para eliminar as configurações da mesa que são iguais. Veja abaixo:

$$\frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ maneiras}$$

Aprofundando a discussão, questionamos:

PP: E se fosse n pessoas distintas trocando de posição na mesa?

P2: Seria $\frac{n!}{n}$

PP: E o que podemos fazer agora?

P2: $n! = n(n-1)$.

As reflexões geradas possibilitaram a construção da fórmula de Permutação Circular a partir de todo trabalho realizado pelos professores. Observe a seguir:

$$\frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

$$\therefore P_c = (n-1)!$$

Sugerimos que esse problema, *a priori*, pode ser trabalhado com os alunos contendo uma quantidade pequena de agrupamentos, para que eles possam listar algumas maneiras distintas de se organizar na mesa, possibilitando, assim, observar padrões na organização da mesa e, com isso, potencializar a sistematização do conceito de Permutação Circular a partir de todo trabalho realizado pelos alunos, podendo promover, desse modo, uma aprendizagem com compreensão.

Visando intensificar o movimento exploração-problematização-proposição de problemas, solicitamos que cada professor trocasse o/os problema/s formulado/s com um colega. Assim, eles ficaram incumbidos de reescrever os problemas, adotando os critérios que conceberiam como convenientes. Explanamos sobre a importância de resolver o problema do colega para ratificar o quanto o problema está bem formulado.

No primeiro momento, percebemos que a maioria dos professores precisaram da confirmação do professor-pesquisador com relação ao trabalho bem-sucedido de reformulação dos problemas. A seguir, iremos discorrer sobre o trabalho realizado pelos professores.

O P11 ficou encarregado de reescrever o problema: “*Em uma mesa circular com 6 cadeiras, temos 4 jogadores de sueca para se posicionarem na mesa, em dupla, de certa forma que os integrantes de cada dupla se sentem sempre de frente para o outro. Quantas seriam as*

diferentes formas de organização desta mesa?”, proposto por P2. O P11 justifica sua tomada de decisão:

P11: No lugar de 6 cadeiras, eu coloquei 4 cadeiras e 4 participantes, porque, no contexto do jogo, a quantidade de cadeiras não é importante.

PP: Isso! Porque, na prática, mesmo que tenha uma cadeira entre os participantes, não vai interferir no contexto do jogo, pois eu vou estar sempre jogando cartas para P3, mesmo que haja uma cadeira entre nós.

P11: Essas duas cadeiras sobrando, talvez, podem causar confusão no que se pede a questão.

Figura 18 - Reescrita de P11 ao problema proposto por P2

*U(J) EM UMA MESA CIRCULAR, COM ~~6~~ 4
CADEIRAS TEMOS 4 JOGADORES DE SUECA PARA
SE POSICIONAREM A MESA, EM DUPLA, DE
CERTA FORMA QUE OS INTEGRANTES DE
CADA DUPLA SE SENTEM SEMPRE DE
FRENTE PARA O OUTRO. QUANTAS SERIAM AS
DIFERENTES FORMAS DE ORGANIZAÇÃO
DESTA MESA?*

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Esse problema desencadeou uma discussão que enfocou na quantidade de duplas que poderia ser formada com quatro pessoas. Os professores notaram que, neste caso, se tratava de um problema de Combinação Simples, isto é, $C_{4,2} = 6$. Para ampliar a discussão, fomos à lousa e listamos, com a ajuda dos professores, todas as possíveis maneiras, tendo como jogadores: PC, Lola, Perobinha e Nêm. Veja o quadro seguir:

Quadro 15 - Listagem das possíveis duplas

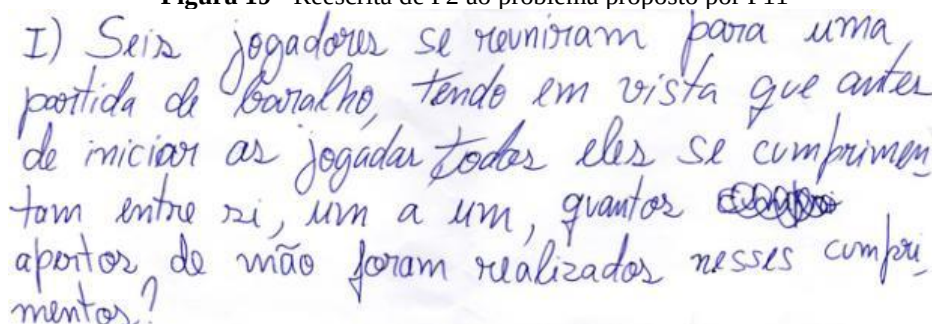
Duplas
PC e Lola
PC e Perobinha
PC e Nêm
Lola e Perobinha
Lola e Nêm
Perobinha e Nêm

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Contudo, o debate gerado em torno desta resolução desencadeou a seguinte reflexão: na prática, o contexto da matemática e o contexto do jogo diferem no momento da formação efetiva das duas duplas que irão jogar entre si, pois, se por um lado com 4 pessoas podemos formar 6 duplas distintas para jogar Sueca, por outro lado, no contexto do jogo, não podemos considerar, por exemplo, uma partida entre PC e Perobinha x PC e Lola, ou seja, PC não pode jogar em duas duplas simultaneamente.

Em seguida, P2 fez a leitura do problema: “Qual foi à quantidade de cumprimentos que eles fizeram, entre si, para começar o jogo?”, formulado por P11 e explicou: “Inclusive, já resolvemos este problema na lousa, mas eu tentei contextualizar para não deixar brechas para outros entendimentos”. Veja a reescrita dada por P2 ao problema proposto por P11.

Figura 19 - Reescrita de P2 ao problema proposto por P11



I) Seis jogadores se reuniram para uma partida de baralho, tendo em vista que antes de iniciar as jogadas todos eles se cumprimentam entre si, um a um, quantos ~~cumprimentos~~ cumprimentos de mão foram realizados nesses cumprimentos?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Percebendo que ainda poderíamos aprofundar o problema dos cumprimentos, questionamos:

PP: Que outros problemas podemos propor tomando como ponto de partida o problema dos cumprimentos?

P9: Aumentar a quantidade de pessoas se cumprimentado. Colocar algumas restrições em que o participante 1 não cumprimenta o participante 2.

P2: É, fulano não se entende com ciclano, com isso, não se cumprimenta. Poderia ser um abraço entre três integrantes. Poderia já afirmar que eles se cumprimentaram.

P4: Descobrir a quantidade de pessoas que se cumprimentaram.

P2: Aí eu começaria o problema dizendo que um grupo de pessoas se encontraram e deram x apertos de mãos. Quantas pessoas se encontraram? Então, por exemplo, um total de pessoas se encontram e dão 15 apertos de mãos. Qual o total de pessoas?

Comentário: A Proposição de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas amplia o nível de discussão de uma atividade matemática, pois permite que ela seja retomada a partir de uma intencionalidade, buscando atingir outro nível de compreensão que, no primeiro momento, não foi possível, mas, após as primeiras reflexões e sínteses geradas em torno da atividade, o estudante pode estar apto para dar um novo aprofundamento às discussões, podendo levar a uma aprendizagem com significado de conceitos e conteúdos matemáticos (Silva, L., 2013; Nascimento, 2014; Silveira, 2016; Silveira, Andrade, 2020, 2022; Martins, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Martins, 2019, 2024; Abreu et al., 2024; Abreu, 2024).

Esse problema despertou o interesse dos professores e eles se sentiram desafiados a solucioná-lo. Alguns deles (P9, P11 e P13) enfatizaram que não tínhamos informações suficientes para resolvê-lo. Fomos à lousa e os professores expuseram suas descobertas:

P12: A gente tinha achado 30 apertos e, para tirar a multiplicidade, dividimos por 2. Agora, deve multiplicar por 2, já que invertemos o problema.

P2: Mas aí já sabemos que são 15 apertos.

P12: Verdade!

P2: E aí como eu faço para iniciar a resolução deste tipo de questão? Pelo Princípio Fundamental da Contagem. Um aperto de mão ocorre entre duas pessoas, então, eu coloco dois tracinhos um do lado do outro, assim, dois números multiplicados entre si dá 15.

P4: Eu acho que aí a gente cai numa situação de Equação do 2º grau. Colocamos **n** como a incógnita, porque não sabemos a quantidade de pessoas. Como cada pessoa tem que eliminar ela própria, então ela vai cumprimentar **n-1** e divide por 2 para eliminar as repetições.

PP: Exatamente.

Assim, o debate acima promoveu o registro da seguinte resolução na lousa:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 15$$

$$\frac{n^2 - n}{2} = 15$$

$$n^2 - n = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

Desse modo, juntos, o professor-pesquisador e os professores, resolveram a Equação do 2º grau acima, obtendo $n = 6$ e $n = -5$ (não serve), ou seja, seis pessoas se encontraram, e se cumprimentaram entre si, resultando em 15 cumprimentos.

Comentário: O movimento de exploração-problematização-proposição de problemas pode culminar no surgimento de novos elementos que resultam na geração de novos problemas, exigindo a realização de novos trabalhos que, impulsiona o processo de reflexões e sínteses, de modo a resultar na discussão de novas resoluções e soluções, novos conteúdos e/ou novos resultados.

Dando continuidade à discussão, P3 fez a leitura do problema, “*Se a primeira partida de sueca, Sr. Deda afirmou que a dupla de PC obteve 56 pontos, quantos pontos as outras duplas fizeram?*”, formulado por P1. Posteriormente, P3 explica sua reescrita:

P3: Mudei a escrita do problema. Coloquei - **Quantos pontos a outra dupla fez?** Porque, no caso, o jogo ocorre entre duas duplas. E, no caso do problema dela, deu a entender que são mais de duas duplas.

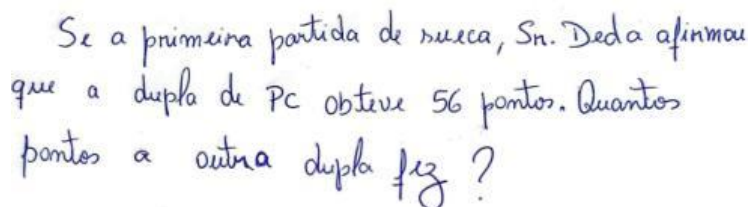
PP: E qual foi o total de pontos que a outra dupla obteve?

P3: Como o total é 120 pontos, e então, para saber a quantidade de pontos que a outra dupla fez, basta fazer: $120 - 56 = 64$.

PP: Perfeito!

P2: Mas está errado, porque Sr. Deda, antes de terminar a partida, afirmou que ganhou?

Figura 20 - Reescrita de P3 ao problema proposto por P1



Se a primeira partida de sueca, Sr. Deda afirmou que a dupla de PC obteve 56 pontos. Quantos pontos a outra dupla fez?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Notamos que um dos critérios adotados por alguns professores para a reescrita dos problemas foi o refinamento na escrita dos problemas, buscando uma melhor articulação entre a língua materna, a linguagem matemática e o contexto em que o problema estava sendo descrito.

A partir da afirmação de P2, explicamos para os professores que, possivelmente, Sr. Deda estava fazendo a contagem dos pontos a cada rodada e, ao obter uma pontuação acima de 60 pontos, concluiu que tinha vencido a partida. Explanamos, ainda, que a dupla ganha o jogo quando atinge quatro vitórias seguidas ou vence uma partida obtendo os 120 pontos totais. O P3 se propôs a contextualizar algo inerente ao contexto do jogo, no entanto, apresentou alguns dados e não conseguiu formular um problema a partir da redação apresentada por ele.

Desse modo, em sua proposta de reformulação, P1 reescreveu o enunciado apresentado por P3, mantendo parte da redação e acrescentando novas informações. Além disso, apresentou uma problematização cabível ao enunciado exposto, chegando, assim, de forma bem-sucedida, ao problema matemático.

Figura 21 - Reescrita de P1 ao problema proposto por P3

Sabendo que um baralho contém 52 cartas e analisando a imagem que contém 6 jogadores, mata-se que serão necessários dois baralhos totalizando 104 cartas, para a realização de algumas partidas. Qual a probabilidade de sair a carta sete de qualquer naipe?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Este problema desencadeou o interesse dos professores e houve a necessidade de saber quantas “cartas 7” há em um baralho comum, sendo este composto por 52 cartas. Veja o diálogo a seguir:

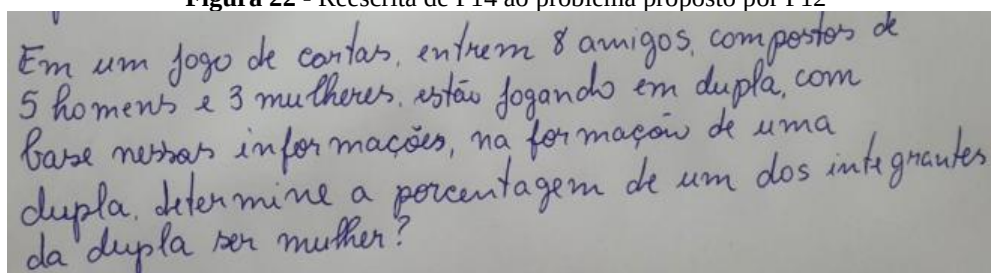
P2: São quatro naipes, e no caso “4 setes”. Se são dois baralhos, são “8 setes”.

P13: $\frac{8}{104} = \frac{1}{13}$

PP: Isso!

Na sua vez, P14 reformulou o problema: “Em uma noite de jogatina, três duplas estão jogando cartas, no total, jogaram 32 partidas. A dupla de Sr. Deda venceu duas partidas a mais do que a dupla de Perobinha e 4 partidas a menos do que a dupla de PC. Sabendo que a dupla de Perobinha venceu 8 partidas, determine quantas partidas venceu cada uma das outras duplas. Considere que, em cada partida, houve uma dupla vencedora”, proposto por P12. Observe a explicação de P14 sobre o trabalho realizado: “Eu acho que modifiquei o problema totalmente. Peguei a ideia que ele trouxe sobre uma noite de jogatina, e coloquei os jogadores, sendo homens e mulheres, para trabalhar porcentagem e Análise Combinatória”

Figura 22 - Reescrita de P14 ao problema proposto por P12



Em um jogo de cartas, entrem 8 amigos, compostos de 5 homens e 3 mulheres, estão jogando em dupla, com base nessas informações, na formação de uma dupla, determine a porcentagem de um dos integrantes da dupla ser mulher?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Notamos competências de P14 na reescrita do problema, tomando como ponto de partida a mudança do ambiente matemático, isto é, propor um problema que aborde os conceitos de Análise Combinatória, bem como a ideia de Probabilidade. Para tanto, outros elementos do espaço do problema foram modificados, como a informação e o requisito. A mudança de um dos elementos do espaço do problema gera um novo problema (Jurado, 2013a, 2013b; 2017; Milinković, 2015; Abreu *et al.*, 2024), no entanto, a mudança de mais de um elemento sinaliza o quão foi habilidoso o propositor de problemas.

Os professores solicitaram que o professor-pesquisador fosse à lousa para discutir este problema.

PP: Como podemos dar início à resolução deste problema, pessoal?

P2: Para resolver, temos que encontrar o total de duplas.

P14: É uma combinação com 2 elementos.

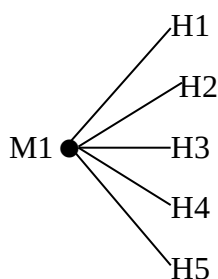
PP: Isso!

Assim, realizamos $C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2!} = \frac{56}{2} = 28$ duplas distintas. Para dar

continuidade à resolução do problema, os professores chamaram atenção a respeito da importância da língua materna, ao enfatizar que “*um dos integrantes da dupla ser mulher*”. Sobre isso, P12 propõe uma condição que levaria a um novo problema: “P12: Se fosse **pelo menos** uma mulher, teríamos um novo problema”. Assim, finalizamos outra etapa referente à solução do problema:

$$\frac{5}{\text{homem}} \cdot \frac{3}{\text{mulher}} = 15$$

O participante P2 não ficou convencido desta etapa e sugerimos que os professores buscassem outro procedimento de resolução, surgindo a partir de P14 a árvore de possibilidades (H = Homem e M = Mulher):

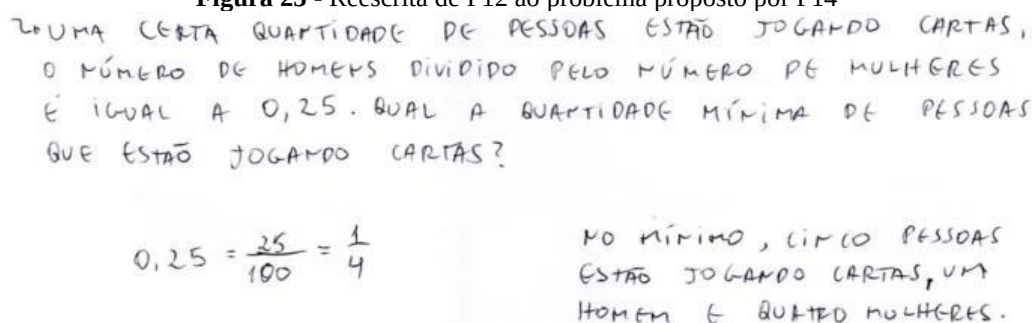


Com isso, P14 explicou que teremos mais duas árvores de possibilidades com cinco ramificações, resultando em $5 \cdot 3 = 15$ possibilidades, e explanou, ainda, que a porcentagem de um dos integrantes das duplas ser mulher é: $\frac{15}{28} \approx 53,57\%$.

Comentário: A árvore de possibilidades emerge como um processo de resolução que impulsiona a capacidade de abstração dos alunos em diferentes níveis de ensino, isto é, ao listar de alguns agrupamentos, pode-se observar padrões que promovem o levantamento de estruturas multiplicativas ou aditivas que possibilita dar significado ao Princípio Fundamental da Contagem (Silva, A., 2013; Silveira, 2016; Santos, E., 2019).

Na sua vez, P12 reescreveu o problema: “De acordo com a fala de Perobinha ‘Para o jogo ficar justo, acho que toda noite nós deveríamos trocar de lugar na mesa’, de quantas maneiras possíveis os jogadores podem sentar, levando em consideração que os encontros acontecem de segunda a sexta?”, formulado por P14. O P12 explicou que, na sua reformulação, buscou modificar o conteúdo matemático, e ainda notamos que se atentou para conceitos matemáticos que dariam conta do problema. Veja a reescrita defendida por P12 e a defesa do trabalho realizado:

Figura 23 - Reescrita de P12 ao problema proposto por P14



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

P12: Não é só saber a quantidade de pessoas que tem ali, mas a quantidade mínima, pois podemos ter frações equivalentes. Se eu não colocasse o número mínimo, não teria como saber a quantidade exata de pessoas. A ideia é pegar esse número, transformar em fração e simplificar até o máximo possível. No caso, $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, ou seja, o número mínimo é 5.

A partir da explicação de P12, chamamos atenção para o cuidado que ele teve em resolver o problema e confirmar o quanto ele foi bem sucedido no processo de proposição de problemas. Ademais, enfatizamos a importância de resolver problemas transitando entre as diferentes Representações de um Número Racional.

Comentário: Observamos que houve o controle de ideias matemáticas, possibilitando que a solução esteja coerente com o problema, bem como deixando claro que seria a quantidade mínima de pessoas, em que tal informação é relevante para compreensão do problema, uma vez que temos frações equivalentes que poderiam, durante o processo de resolução do problema, acarretar em novas soluções, evidenciando, neste caso, atenção para os conceitos matemáticos.

O P9 ficou incumbido de reescrever um dos problemas que foi proposto por P5 e escolheu o seguinte problema: “*Dados todos os jogadores, de quantas maneiras diferentes eles poderiam sentar-se, de modo que não possam ficar duas vezes ao lado do mesmo jogador?*”. O P9 explica sua reescrita: “*No problema elaborado por P5, a restrição foi que os jogadores não podem ficar duas vezes ao lado do mesmo jogador. Já a minha condição foi que Lola e PC não podem sentar lado a lado*”. Observe o problema reformulado por P9:

Figura 24: Reescrita de P9 ao problema proposto por P5

Dados todos os jogadores sentados em uma mesa circular com 6 cadeiras, de quantas maneiras distintas cada jogador poderá se sentar sabendo que Lola e PC não podem sentar lado a lado.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Sobre a resolução deste problema, P2 e P9 expõem que basta calcular quantas vezes PC e Lola ficam juntos e subtrair das 120 maneiras distintas de seis pessoas se organizarem na mesa. No primeiro momento, P9 buscou propor problemas envolvendo o jogo de Sueca, sendo que não obteve sucesso por não está familiarizado com as regras do jogo. Observe o enunciado e os problemas formulados por P9:

Figura 25 - Problemas propostos por P9 no primeiro episódio de sala de aula

① De acordo com o texto jogo de Sueca proposto. Sabendo que no jogo de Sueca se utiliza 40 cartas, onde dessas 40 cartas apenas 20 delas valem pontos. Segue abaixo uma tabela.

Quantidade de cartas	nome da carta	valor pontuação por carta
4	As	11
4	Sete	10
4	Rei	4
4	Dama	2
4	Valete	3

a) Sabendo que o jogo é realizado por dupla. De quantas maneiras distintas os participantes podem se organizar?

b) Qual a probabilidade de se retirar aleatoriamente dentre as 40 cartas um carta de As?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

No entanto, P5, dentre os professores, se destacou por ter o maior conhecimento sobre o jogo de Sueca. Com isso, a sua reescrita consistiu em problematizar, principalmente, particularidades do jogo de Sueca, dando continuidade ao trabalho realizado por P9. Veja a seguir:

Figura 26 - Reescrita de P5 ao problema proposto por P9

- c) Qual a maior soma de pontes possíveis ~~por~~ em uma rodada?
- d) Qual a probabilidade de um mesmo jogador receber as 10 cartas de um mesmo naipe?
- e) Qual o maior número de pontes que um jogador pode receber inicialmente?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Entendemos que o trabalho realizado por P5 consistiu em aproveitar de informações/dados referentes ao problema proposto por P9, promovendo um ambiente de problematização, de tal forma que evoluiu para problemas matemáticos, isto é, não foram modificados os elementos do espaço do problema, mas, sim, traduzidas as informações em forma de problemas matemáticos.

Os professores P6 e P13 trocaram os problemas entre si, visando reformulá-los. Durante o trabalho de proposição de problemas, P13 levanta uma questão de cunho sócio-político-cultural. Na sua reformulação, P6 formula um problema abrangendo um contexto que contempla apostas em jogos esportivos, no entanto, abrangendo um olhar para conceitos matemáticos. Assim, o P6 realizou a leitura do seguinte problema:

Figura 27 - Reescrita de P6 ao problema proposto por P13

• AGORA, SUPONDO QUE O FLAMENGO TERÁ MANDO DE CAMPO, E QUE VENCEU 50%, EMPATOU 30% E PERDEU 20% DOS ÚLTIMOS JOGOS. E QUE O PALMEIRAS VENCEU, FORA DE CASA, 30%, EMPATOU 50% E PERDEU 20%. QUAL A PROBABILIDADE DE O FLAMENGO VENCER A PARTIDA?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Este problema gerou o seguinte debate:

P2: Jogar em casa é importante.

P12: A pergunta fica mais objetiva se trás o retrospecto. Mexe um pouco com o emocional.

PP: Na prática, jogar em casa é importante?

P2: Desde que apresente o retrospecto. Na verdade, nos jogos de futebol, os times apresentam um melhor desempenho quando jogam em casa.

P11: Essas estatísticas ajudam a apostar, mas não garante ganhar.

PP: Exatamente.

Por fim, P13 reescreveu o problema: “Sabendo que a carta de ‘ás’, representada no centro da mesa, equivale a 11 pontos, quantos pontos ao total 4 cartas representam?”, formulado por P6. A reescrita de P13 abordava o conceito de Probabilidade, veja a seguir:

Figura 28 - Reescrita de P13 ao problema proposto por P6

Num jogo de baralho, levando em consideração que há 4 naipes, cada naipe contém 13 cartas. Qual a probabilidade de um jogador tirar duas cartas de ouro?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Em cada problema reescrito, questionamos aos professores sobre qual o conceito matemático daria conta do novo problema (conhecimento pedagógico do conteúdo), buscando discutir se o/a reformulador/a conseguiu modificar o ambiente matemático, bem como a turma que o problema poderia ser trabalhado (conhecimento curricular), compreendendo se o novo problema apresenta um maior grau de complexidade.

Com a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “Jogo de Sueca”, pretendíamos abordar o conteúdo de Sistema Lineares. Assim, selecionamos o problema: “Em uma noite de jogatina, três duplas estão jogando cartas, no total, jogaram 32 partidas. A dupla de Sr. Deda venceu duas partidas a mais do que a dupla de Perobinha e 4 partidas a menos do que a dupla de PC. Sabendo que a dupla de Perobinha venceu 8 partidas, determine quantas partidas venceu cada uma das outras duplas. Considere que, em cada partida, houve uma dupla vencedora”, formulado por P12 no primeiro encontro. Portanto, solicitamos que, em casa, os professores reescrevessem esse problema, para que, no próximo encontro, pudéssemos discutir acerca das diferentes reformulações e resoluções que possam surgir durante o refinamento do problema proposto por P12.

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Através de uma prática intencional, retoma-se um problema proposto no encontro anterior para apresentar o conceito de Permutação Circular a partir de todo o trabalho realizado pelos professores em torno do problema;
- Discute-se a importância da resolução do problema para validar o problema proposto;

- Os professores trocaram os problemas propostos no encontro anterior e os rescreveram, adotando critérios particulares que levaram ao refinamento dos problemas, inicialmente, propostos;
- Retoma-se um problema que foi discutido no encontro anterior (problema dos apertos de mãos) e aprofunda-se com geração de novos problemas, o que levou a novos conteúdos, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses;
- Do movimento didático que consiste em retomar um problema para aprofundar um conceito ou conteúdo matemático, aprende-se que a discussão em torno de um problema ou situação-problema na perspectiva da Exploração de Problema é sempre inacabada e que, ao fim, pode levar a uma aprendizagem com compreensão.

7.3 Terceiro episódio de sala de aula (30/06/2023): explorando e problematizando a Narrativa Matemática “Jogo de Sueca”

Iniciamos o encontro solicitando que os professores compartilhassem o trabalho realizado em torno da atividade de reformulação do problema proposto por P12. Neste encontro, participaram 10 professores.

Inicialmente, chamamos atenção sobre a importância de resolver o problema antes de reformulá-lo, para perceber o quão o problema está ou não bem formulado. Enfatizamos, ainda, que, durante a escrita desta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, deveríamos ter destacado o quantitativo de partidas de Sueca que resultaram em empate ou que não houve empates, como foi ressaltado por P12.

O P4 intervém e explica: *“Na reformulação que eu fiz, destaquei exatamente isso, que em cada partida sempre teria uma dupla vencedora”*. Assim, argumentamos que, quando consideramos a possibilidade de ter havido empates durante as 32 partidas jogadas, estamos diante de um novo cenário de problematização que a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática estava sinalizando. Em seguida, recomendamos que P5 explanasse a reescrita dada ao problema:

P5: Na narrativa, eles dizem que jogam baralho e dominó. Então, eu reformulei o problema usando dominó. Mantive a característica que não houve empate. O dominó tem como trancar o jogo.

PP: Isso! E, no caso, pode empatar na contagem dos pontos.

P5: Fiquei atento ao contexto de um jogo de dominó.

O P5 fez a leitura do problema reescrito e explanou a resolução dada ao problema. Veja a seguir:

Figura 29 - Reescrita de P5 ao problema proposto por P12

1) Em uma noite de jogos de dominó, três duplas Perselinha, Sr. Deda e Pc, estão competindo. Ao todo, eles jogaram 40 partidas de dominó. A dupla de Perselinha venceu 4 partidas a mais do que a dupla de Sr. Deda e 2 partidas a menos do que a dupla de Pc. Sabendo que a dupla de Sr. Deda venceu 10 partidas e considerando que em todas as partidas houve uma dupla vencedora, determine quantas partidas cada dupla venceu?

$$\text{Dupla Sr. Deda} = x \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

$$\text{Dupla Pc} = y$$

$$\text{Dupla Perselinha} = z$$

$$y = z + 2 \Rightarrow \boxed{y = 16}$$

$$z = x + 4$$

$$\boxed{z = 14}$$

Logo, a dupla do Sr. Deda venceu 10 partidas,
a dupla de Perselinha venceu 14 partidas.
a dupla de Pc venceu 16 partidas.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Destacamos que, *a priori*, P5 modificou apenas os dados do problema proposto por P12, no entanto, P5 avança quando problematiza um fato da narrativa (jogo de dominó) que possui um potencial para a exploração e geração de novos problemas matemáticos, mas que ainda não tinha surgido no âmbito da discussão.

Comentário: A discussão de uma atividade na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode levar a novos caminhos de exploração de problemas que estavam nas entrelinhas, e que, durante o processo de refinamento da atividade, emerge como elemento desencadeador de novos problemas, reflexões e sínteses.

Na sua vez, P4 explana seu processo de pensamento que culminou na reescrita do problema: “Formulei um problema que trabalha com sistema de equações e porcentagem e considerei que, em cada partida, sempre haveria uma dupla vencedora”. Em seguida, ele realizou a leitura do problema e comentou sobre a resolução dada ao problema. Veja a seguir:

Figura 30 - Reescrita de P4 ao problema proposto por P12

EM UMA DETERMINADA NOITE ANDRÉ, BRUNO, CARLOS, DANIEL, EDSON E FÁBIO REUNIRAM-SE PARA JOGAR SUECA. FORAM FORMADAS DUPLAS DA SEGUINTE FORMA:

- D₁ (DUPLA 1): ANDRÉ E BRUNO
- D₂ (DUPLA 2): CARLOS E DANIEL
- D₃ (DUPLA 3): EDSON E FÁBIO.

D₁ E D₃ TOTALIZARAM 14 PARTIDAS VENCIDAS E D₂ VENCEU TRÊS PARTIDAS A MENOS QUE O TOTAL VENCIDAS POR D₁ E D₃.

CONSIDERANDO QUE A CADA PARTIDA SEMPRE HAVIA UM VENCEDOR, QUAL O PERCENTUAL DE PARTIDAS VENCIDAS POR D₂?

RESOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} D_1 + D_3 &= 14 \\ D_2 &= (D_1 + D_3) - 3 \\ D_2 &= 14 - 3 \\ D_2 &= 11 \\ \text{TOTAL: } (D_1 + D_3) + D_2 &= 14 + 11 = 25 \end{aligned}$$

PERCENTUAL DE PARTIDAS VENCIDAS POR D₂

$$\frac{D_2(\text{VENCIDAS})}{\text{TOTAL VENCIDAS}} = \frac{11}{25} = \frac{44}{100} = 44\%$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Percebendo o potencial deste problema para a geração de novos problemas, desafiamos os professores a proporem de imediato outros problemas. Observe o diálogo a seguir:

PP: Que outros problemas podemos propor a partir deste problema?

P4: Quantas partidas foram vencidas por D₁? E quantas partidas foram vencidas por D₃?

P12: Qual o percentual de partidas vencidas por D₁? E por D₃?

Comentário: Munido do conhecimento matemático, o professor precisa perceber o potencial de um problema para a geração de novos problemas, e intervir, provocando nos estudantes a investigação de novos problemas, possibilitando, assim, tratar de uma ideia matemática com profundidade.

Na atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, mantivemos a pontuação convencional para cada carta no jogo de Sueca. No entanto, em sua reescrita, o P13, compreendendo que são partidas de Sueca, atribuiu outra pontuação para a dama e o valete. O P13 fez a leitura do seguinte problema:

Figura 31 - Reescrita de P13 ao problema proposto por P12

considere os valores diferentes para os
 valetes e a dama, se uma pessoa "A"
 tem dois valetes e três damas que é
 igual a 35 pontos e uma pessoa "B"
 tem um valete três damas que é
 igual a 25. Quanto vale o valete e o
 valete?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Posteriormente, P13 foi à lousa e resolveu o problema envolvendo Sistemas Lineares utilizando o método da adição. Observe, a seguir, a resolução defendida por P3, em que v = valete e d = dama:

$$\begin{cases} 2v + 3d = 35 \\ v + 3d = 25 \end{cases} \times (-1) + \begin{cases} -2v - 3d = -35 \\ v + 3d = 25 \end{cases}$$

$$-v = -10 \quad \times (-1)$$

$$v = 10$$

Substituindo $v = 10$ na equação $v + 3d = 25$, temos:

$$10 + 3d = 25$$

$$3d = 25 - 10$$

$$3d = 15$$

$$d = \frac{15}{3}$$

$$d = 5$$

Durante a resolução, P13 defendeu que utilizou o método da adição por ser mais adequado para o sistema de equações acima, já que, a partir de uma técnica para trocar os sinais dos membros de uma das equações, obteve o coeficiente da *incógnita* d simétrico nas duas equações e, com isso, facilitou o processo de resolução do sistema. E, ainda, concluiu que, de acordo com o contexto do problema que ele formulou, o valete corresponde a 10 pontos, já a dama vale 5 pontos.

O P12 ficou encarregado de reescrever o seu próprio problema. Assim, ele realizou a leitura do seguinte problema:

Figura 32 - Reescrita de P12 ao seu próprio problema

2 → LOLA, NÊM, PEROBINHA, PC, CESINHA E DEDA SE REUNEM DUAS VEZES
 NA SEMANA PARA JOGAR SUECA. NESTA SEMANA ELAS DECIDIRAM QUE
 APÓS JOGAR SUECA, IRÃO FAZER A SEGUINTE BRINCADEIRA: NO PRIMEIRO
 DIA, IRÃO DETERMINAR O NÚMERO DE ANAGRAMAS DISTINTOS QUE PODERÃO
 SER FORMADOS COM A LETRA INICIAL DO NOME DE CADA UM DELES.
 SUPONDO QUE NO SEGUNDO DIA, REALIZEM A MESMA BRINCADEIRA
 QUE FOI DESCRITA PARA O PRIMEIRO DIA, PORÉM, OS ANAGRAMAS
 TERIAM QUE COMEÇAR COM A LETRA C E TERMINAR COM A
 LETRA D. ~~DESCUBRA A RESPOSTA CORRETA DA BRINCADEIRA PARA OS DOIS DIAS.~~
 DESCUBRA A RESPOSTA CORRETA DA BRINCADEIRA PARA OS DOIS DIAS.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, P12 explicou que procurou modificar no problema, principalmente, o conteúdo matemático. No entanto, o novo problema proposto por P12 difere do problema, inicialmente, proposto por ele, pelo fato de ter modificado diferentes elementos do espaço do problema, tais como: dados/informações, o que é solicitado e o ambiente matemático. No primeiro momento, os professores não compreenderam o que se pede no problema, com isso, fomos à lousa, e P12 explanou qual a sua compreensão acerca do problema, de modo a buscarmos, juntos, uma resolução para o problema. Veja o diálogo:

PP: Como você está pensando sobre a resolução deste problema?

P12: No primeiro dia, vamos pegar a letra inicial de cada nome deles, ou seja, L de Lola, P de Perobinha, N de Nêm, D de Sr. Deda, C de Cesinha e P de PC. Seria: LPNDPC.

PP: Qual o conceito matemático irá dar conta deste problema?

P12: Permutação com repetição. A letra P se repete duas vezes. Já no segundo dia, tem que começar com a letra C e terminar com a letra D.

PP: Já condicionou, então.

P12: E ainda tem que considerar a repetição.

PP: Exatamente!

Com este diálogo, registramos, na lousa, com a contribuição dos professores, a seguinte resolução para o problema proposto por P12:

- Primeiro dia:

$$P_2^6 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ maneiras distintas}$$

- Segundo dia:

C ____ ____ ____ ____ D

$$P_2^4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ maneiras distintas}$$

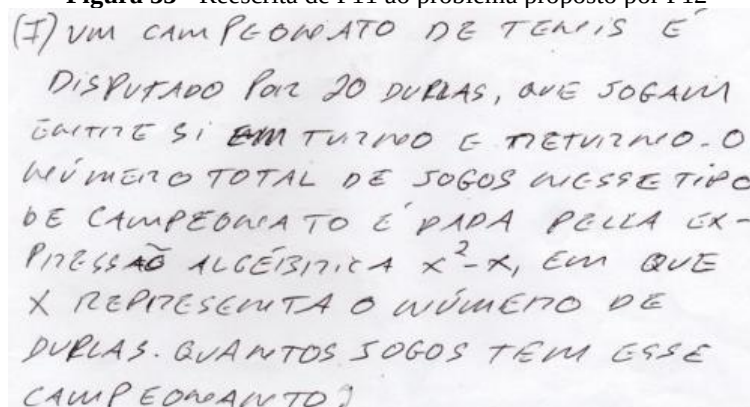
Inicialmente, os professores não compreenderam o que se solicitava neste problema, assim, iniciou-se uma discussão sobre como o professor pode avaliar os alunos em uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, uma vez que os professores

podem formular um problema com informações dúbias, o que leva a não caracterização de um problema matemático ou à apresentação de uma solução que não condiz com enunciado do problema. Nesse contexto, argumentamos que devemos olhar para todo trabalho efetivo dos alunos, identificando nível de engajamento e esforço, e não reduzindo todo trabalho realizado por eles a um mero diagnóstico que conduz à valorização apenas dos alunos que tiveram um desempenho dito positivo durante todo o trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

Comentário: A avaliação durante o processo de proposição de problemas pensada a partir da Exploração de Problemas precisa levar em consideração todo trabalho realizado pelos estudantes (certo ou errado), ou seja, analisa-se a escrita do problema, a articulação entre a redação apresentada e as ideias matemáticas, bem como as resoluções e soluções apresentadas e, sobretudo, deve-se valorizar todo trabalho efetivo e esforço protagonizado ao longo de todos os fazeres matemáticos mobilizados: explorar, problematizar, propor, reescrever/reformular e resolver problemas.

Dando continuidade, P11 realizou a leitura da reescrita dada ao problema. Veja a seguir:

Figura 33 - Reescrita de P11 ao problema proposto por P12



(I) UM CAMPEONATO DE TÊNIS É DISPUTADO POR 20 DUPLAS, QUE JOGAM ENTRE SI EM TURNO E RETURNO. O NÚMERO TOTAL DE JOGOS NESSE TIPO DE CAMPEONATO É DADA PELA EXPRESSÃO ALGÉBRICA $x^2 - x$, EM QUE x REPRESENTA O NÚMERO DE DUPLAS. QUANTOS JOGOS TEM ESSE CAMPEONATO?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Chamamos atenção para o fato de que o novo problema difere totalmente do problema proposto P12, tal como o conteúdo matemático que dará conta do problema, e ainda o contexto descrito, isto é, inicialmente, tratava-se de um jogo de Sueca e, agora, de um jogo de Tênis. Posteriormente, houve uma discussão sobre o quanto o problema estava bem reformulado ou não, exigindo, para isso, sua resolução.

PP: Será que o problema foi bem reformulado?

P2: No caso, seria $20^2 - 20 = 380$.

PP: De fato, com essas condições, serão 380 partidas?

P2: Sim, 20 duplas com jogos de idas e voltas são 380 partidas.

P12: Esse problema parece com o problema dos apertos de mãos.

PP: Isso.

Com isso, advogamos que, dependendo do que é dado e pedido no problema, podemos ter problemas que abordem o mesmo conceito matemático e admitam o raciocínio matemático

análogo durante o processo de resolução, embora apresentem um contexto real distinto (Milinković, 2015).

Na sua vez, o P6 explicou que, na sua reescrita, buscou manter o mesmo conteúdo matemático, mas modificou o contexto, enfatizando um campeonato de futebol. Além disso, ele defende, oralmente, sua resolução e explica que, durante o processo de reescrita do problema, antecipou o conjunto solução do sistema de equações, para que os dados estivessem em consonância com o que foi solicitado no problema.

Figura 34 - Reescrita de P6 ao problema proposto por P12

EM UM CAMPEONATO DE FUTEBOL, TRÊS TIMES ESTÃO PARTICIPANDO: PALMEIRAS, VASCO E ~~PALMEIRAS~~ FLAMENGO. AO TODO, A SOMA DOS PONTOS DESSES TRÊS TIMES DÁ SOMA 114 PONTOS. SABENDO QUE O PALMEIRAS POSSUI 4 PONTOS A MAIS QUE O VASCO, E 10 PONTOS A MENOS QUE O FLAMENGO. QUANTOS PONTOS CADA TIME POSSUI ATÉ O MOMENTO?

$P = \text{PALMEIRAS}$
 $V = \text{VASCO}$
 $F = \text{FLAMENGO}$

$$\begin{cases} P + V + F = 114 \\ P + P - 4 + P + 10 = 114 \\ 3P + 6 = 114 \rightarrow 3P = 108 \rightarrow \frac{108}{3} = 36 = P \end{cases}$$

$P = 36$
 $V = P - 4 \rightarrow 36 - 4 = 32$
 $F = P + 10 \rightarrow 36 + 10 = 46$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Após P6 explicitar o trabalho realizado, P12 intervêm e argumenta: “Hoje em dia, os alunos encontram todas as questões do livro na internet. Então, essa é uma vantagem da *Proposição de Problemas*. O professor vai propor um problema para os seus alunos que não terá a resposta na internet”. Em seguida, concordamos com P12, e ainda sublinhamos que este é um dos inúmeros benefícios de uma aula de Matemática que atribui ao professor a responsabilidade de formular problemas. Além disso, também afirmamos que o professor pode propor problemas que: envolvam a vivência cotidiana dos alunos, buscando despertar o interesse e a motivação deles para aprender Matemática; visem superar dificuldades conceituais identificadas ao longo do processo educativo; e que tenham um potencial para a discussão de ideias matemáticas importantes (Brandão, 2014; Silveira, 2016; Jurado, 2013a; Silveira, Andrade, 2022; Crespo, 2015).

O P14 reescreveu o problema proposto por P12 e explanou que contextualizou um jogo que é do seu interesse. Veja o trabalho realizado por P12 e o diálogo que o professor-pesquisador conduziu a partir deste trabalho:

Figura 35 - Reescrita de P14 ao problema proposto por P12

1. Em um certa noite, três amigos: Maria, João e Ana decidiram jogar Black Jack, durante o jogo, jogaram 44 partidas. ~~Ana~~ Maria havia muito do jogo, por isso obteve o maior número de partidas vencidas, Ana venceu metade das partidas de Maria e João venceu um quarto das partidas de Maria, sabendo que durante o jogo 9 partidas tiveram empate. Com base nessas informações, determine:

a) Quantas partidas teve vencedor.

b) Quantas partidas vencidas obteve cada um dos amigos.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: Black Jack é um jogo, né!? No caso, você joga ele?

P14: Sim. O famoso 21. Para ganhar, tem que fazer 21 pontos ou se aproximar de 21.

PP: São cartas de baralho, então?

P14: Sim. Cada carta possui um valor específico de pontos.

Notamos que P14 avançou com relação aos problemas propostos que envolviam o conteúdo de Sistemas Lineares, com isso, questionamos aos professores:

PP: Vocês observaram que P14 foi mais além com relação a problemas envolvendo Sistemas Lineares? Por quê?

P2: Nos outros problemas, os coeficientes eram Números Inteiros.

PP: Isso. No caso, P14 trouxe os coeficientes correspondentes a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, ou seja, números racionais. Então, teremos um Sistema de Equações Lineares com alguns coeficientes que são Números Racionais.

Comentário: Em uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o/a professor(a) deve apresentar um conhecimento profundo de conceitos e conteúdos matemáticos, para que possa gerir o discurso matemático em sala de aula por meio da mediação-refutação, bem como atender ao nível de aprofundamento conceitual que a atividade vai tomando, sem deixar perder no caminho as oportunidades de ampliação da aprendizagem de aspectos chaves de um conceito matemático.

Chegando a vez de P10, ele enfatiza que, ao invés do jogo de baralho, contextualizou o jogo de xadrez. Veja o problema abaixo:

Figura 36 - Reescrita de P10 ao problema proposto por P12

Roberto e Joaquim sempre se encontraram para jogar xadrez. Em certo dia jogaram 17 partidas. Sabe-se que Roberto venceu duas partidas a mais do que o dobro das partidas que Joaquim venceu. Quantas partidas foram vencidas por cada um?

$$\begin{cases} r + j = 17 \\ r = 2j + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2j + 2 + j = 17 \\ 3j = 15 \rightarrow j = 5 \end{cases} \quad \text{Então, Roberto venceu 12} \\ \text{e Joaquim, 5 partidas.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Após ter feito a leitura do problema reformulado, P10 pediu para ir resolvê-lo na lousa. Observe a resolução apresentada por P10, utilizando o método da substituição para resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} r + j = 17 \\ r = 2j + 2 \end{cases}$$

$$2j + 2 + j = 17$$

$$3j + 2 = 17$$

$$3j = 17 - 2$$

$$3j = 15$$

$$j = \frac{15}{3}$$

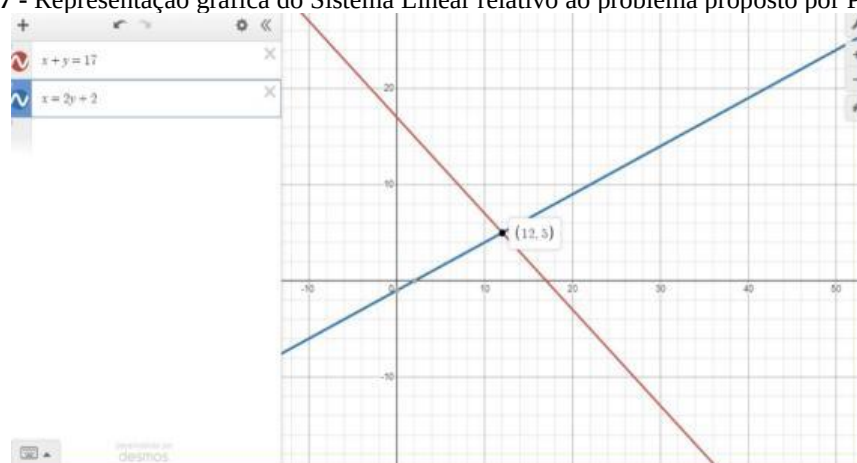
$$j = 5$$

$$r = 2 \cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12$$

Com o intuito de apresentar a ideia de Representações Múltiplas de Álgebra, ressaltamos os trabalhos realizados pelos professores, nos quais emergiram a representação verbal e a representação algébrica. Para aprofundar, indagamos: “*Que outra representação do Sistema de Equação Lineares resultante do problema reformulado por P10 pode surgir?*” Este questionamento, *a priori*, gerou um silêncio, depois de um certo tempo, alguns professores apontaram que o sistema poderia ser representado na sua forma gráfica.

Com esta resposta, chamamos atenção para outro aspecto marcante do **Pensamento Algébrico**, isto é, a capacidade de transitar entre as diferentes Representações Múltiplas de Álgebra. Neste caso, no primeiro momento, transitamos da representação verbal para a representação algébrica e, posteriormente, percebeu-se a viabilidade de transitar entre a representação algébrica e a representação gráfica. Assim, com o auxílio da calculadora gráfica *Desmos*, esboçamos a representação gráfica do Sistema Linear, como veremos a seguir:

Figura 37 - Representação gráfica do Sistema Linear relativo ao problema proposto por P10



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Na utilização da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática, Martins (2024, p. 161) percebeu que, “o incentivo à transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra na Resolução de Problemas é fundamental para os alunos compreenderem conceitos com maior profundidade e desenvolverem os diversos elementos do pensamento algébrico”.

Entendemos, ainda, que a calculadora gráfica *Desmos* pode ser utilizada como uma ferramenta que potencializa o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas. No entanto, vale salientar que, devido ao tempo, a calculadora foi utilizada de forma ilustrativa para evidenciar a transição entre estas diferentes representações e, a partir do movimento de exploração, entendíamos que deveríamos restringir uma parte da representação gráfica, pelo fato de não estar de acordo com o contexto do problema. Assim, vale ressaltar que, em outro momento, aprofundamos este tipo de discussão. Contudo, o dinamismo e interatividade do *Desmos* possibilitou fazer conexões da Álgebra com o campo da Geometria. Observe o diálogo:

PP: Observemos que foram geradas duas retas. Se o Sistema Linear com duas equações possuir solução, o que vai acontecer com as retas no plano cartesiano?

P10: Nesse caso, foram retas concorrentes, que é quando o Sistema é Possível e Determinado.

PP: E se, no caso, não tiver solução?

P12: Aí serão paralelas.

PP: Isso. E como será classificado este tipo de sistema?

Professores: Sistema Impossível.

PP: E se o sistema for possível e indeterminado, o que ocorrerá com as retas?

Professores: Serão coincidentes.

PP: Isso!

Em síntese, advogamos que a representação geométrica facilita a apreensão da classificação do sistema e, como foi refletido, os Sistemas Lineares podem ser classificados em Sistema Possível e Determinado (SPD), Sistema Possível e Indeterminado (SPI) e Sistema Impossível (SI). Além disso,

A resolução de um sistema 2×2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas (Brasil, 2006, p.77-78).

Ressaltamos, ainda, para os professores, que os problemas propostos envolvendo Sistemas Lineares foram resolvidos por meio dos métodos da adição e substituição. Posteriormente, fizemos um resumo conciso das reescritas dadas ao problema proposto por P12, com relação à mudança do ambiente matemático. Destacamos que o problema proposto por P12 trabalhava com a ideia de Sistemas Lineares, e que uma quantidade significativa dos professores reescreveu o problema mantendo este mesmo conteúdo matemático, outros envolveram ideias essenciais de Análise Combinatória, Porcentagem e as operações fundamentais de Adição e Subtração. Destacamos, ainda, que tivemos uma quantidade relevante de problemas para lidar. Em alguns deles, os professores explanavam oralmente sua resolução, outros defendiam sua resolução na lousa e, em algumas ocasiões, juntos, professor-pesquisador e professores, discutiam o problema na lousa. No entanto, selecionamos um problema para discutir em profundidade uma ideia matemática.

Comentário: Dedicamos um tempo para que os professores ratificassem o quanto foram bem-sucedidos ou não em suas produções de problemas, abrindo espaço para que eles defendessem todo trabalho realizado. Contudo, embora tivéssemos com uma quantidade importante de problemas para lidar, estávamos atentos para não perder a intencionalidade da atividade, selecionando um ou mais problemas que promovessem a discussão de ideias importantes de um conteúdo matemático.

Intensificando o refinamento/aprofundamento da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, solicitamos que os professores acrescentassem ou modificassem alguns fatos/acontecimentos que considerassem convenientes na atividade, de modo que gerasse um novo ambiente de problematização e, posteriormente, propusessem e resolvessem problemas.

Nesse contexto, P5 compartilhou o seu trabalho realizado e os professores contribuíram com dados que julgaram importantes deixar claros na escrita do problema, bem como com novas reformulações para o problema. Observe a seguir:

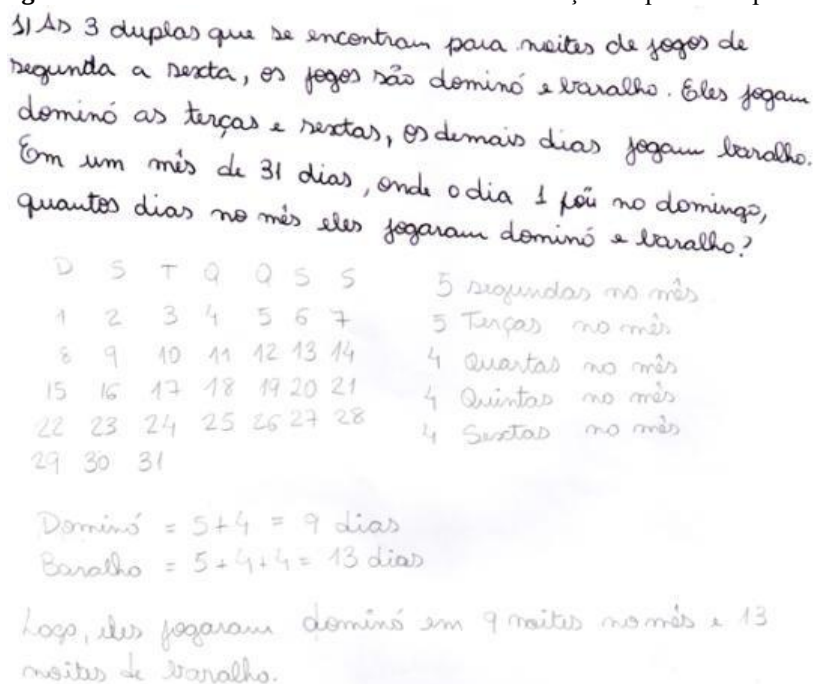
P5: Eu acrescentei uma fala logo no início que mencionava que eles jogavam baralho e dominó. O acréscimo foi os dias da semana que eles jogavam dominó e baralho, então, eu coloquei: **“Eles jogam dominó nas terças-feiras e sextas-feiras; e baralho nas segundas-feiras, quartas-feiras e quintas-feiras.”** E propus um problema que destacava que o primeiro dia do mês era no domingo e que, ao final do mês, buscava-se descobrir quantos dias eles tinham jogado baralho e quantos dias eles tinham jogado dominó.

PP: Você especificou o mês?

P5: Não. Todo mês vai ser uma resolução diferente. Por isso, especifiquei que o dia primeiro foi no domingo, pois, se fosse na segunda-feira, já mudava tudo.

P13: E quantos dias tem esse mês?
 P5: Aí muda também. Eu coloquei um mês de 31 dias.
 P10: Para não confundir os alunos, é necessário especificar tudo.
 P5: Na minha resolução, eu enumerei até o dia 31, sendo o dia 1 no domingo e fiz a contagem. Quando eu reformulei o problema, fui verificar se o *chat GPT* sabe resolver o problema que reformulei. No entanto, eu tive que treinar ele para resolver o problema. Ele estava calculando como se o mês tivesse três segundas-feiras e cinco terças-feiras.
 PP: É necessário fazer o *chat GPT* pensar junto com você.
 P10: Para o aluno resolver, seria interessante ter um calendário, pois ele iria verificar qual mês iniciaria no domingo.
 P13: Seria importante também saber o ano.
 P12: E, em um ano, quantas vezes eles jogariam dominó e quantas vezes jogariam baralho?
 P2: Teria que acrescentar também que eles jogaram nos feriados.
 P13: Sabe como ficaria mais exato? Se jogasse dominó nos dias ímpares e baralho nos dias pares.
 P5: Poderia ser também, jogar dominó nos dias primos e, nos outros dias, baralho.
 PP: São novos elementos que culminam em novos problemas.

Figura 38 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P5



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Por meio de um trabalho colaborativo, os professores foram sugerindo novos elementos que poderiam melhorar a redação que compõe o problema proposto por P5. Nesse processo de refinamento do problema, foram surgindo problemas alternativos que qualificaram todo caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas. Ademais, os professores questionaram, de forma respeitosa, o trabalho realizado por P5, enquanto ele defendia e justificava seu processo de pensamento.

O P4 acrescenta novos fatos a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, de modo a ser um ambiente fértil para novos problemas. Ele explica seu processo de pensamento: “Acréscitei que: eles se cumprimentavam entre si com apertos de mãos e abraços; e que o número de apertos de mãos

dados foi o dobro do número de abraços". Em seguida, P4 faz a leitura de todo trabalho realizado, isto é, enfatizando o acréscimo e modificação de fatos que compõem a Narrativa Matemática, como também o problema formulado: "Qual foi o número de aperto de mãos dados?"

Figura 39 - Acréscimo de uma nova "fala", formulação e resolução do problema por P4

EU (LOLA) E OS MEUS AMIGOS NEM, PEROBINHA, PC, CESINHA E Sr. DEDA NOS ENCONTRAMOS DE SEGUNDA A SEXTA, DURANTE A NOITE, PARA JOGAR AS CUNHAS PARTIDAS DE BARALHO E DOMINÓ. NA OCASIÃO, CONVERSAMOS SOBRE OS MAIS VARIADOS ASSUNTOS DO NOSSO COTIDIANO.

DURANTE A CHEGADA, TODOS SE CUMPRIMENTARAM ENTRE SI COM APERTOS DE MÃO E ABRACOS.

LOLA FOI O PRIMEIRO CHEGAR E SEU DEDA O ÚLTIMO.

COMO BOM ~~OBSERVADOR~~ CALCULISTA E OBSERVADOR LOLA FEZ A SEGUINTE AFIRMAÇÃO:

— O NÚMERO DE APERTOS DE MÃO DADOS FOI O DOBRO DO NÚMERO DE ABRACOS.

Qual FOI O NÚMERO DE APERTOS DE MÃOS DADOS?

Resolução:

TOTAL DE CUMPRIMENTOS REALIZADOS

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{30}{2} = 15 \text{ CUMPRIMENTOS}$$

DETALHAMENTO DOS CUMPRIMENTOS

ABRACOS: X

APERTOS DE MÃO: 2X

$$x + 2x = 15$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

→ APERTOS DE MÃO = 2X = 2 · 5 = 10 APERTOS DE MÃO.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Esse problema despertou o interesse dos professores, com isso, fomos à lousa para resolvê-lo. Para tanto, P4 expôs seu raciocínio que levou à resolução do problema: "Primeiro, fiz o cálculo de combinação de seis elementos, escolhendo dois para encontrar o total de cumprimentos. Com o resultado, utilizei uma equação para saber a quantidade de apertos de mãos e abraços". Observe a resolução defendida por P5:

- **Cumprimentos realizados:**

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cumprimentos}$$

- **Total de apertos de mãos e abraços:**

abraços: x

aperto de mãos: 2x

$$x + 2x = 15$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3}$$

$x = 5$ abraços

$$2x = 2 \cdot 5 = 10 \text{ apertos de mãos}$$

Em seguida, P4 questionou o professor-pesquisador:

P5: Isso, numa situação real, dificilmente vai acontecer. Quem, em sua consciência, vai calcular a quantidade de cumprimentos? Mas isso, na Resolução de Problemas, é mais aceitável ou a Resolução de Problemas é restringida a problemas da vida real e que sejam práticos, ou seja, pode acontecer, de fato, e faz sentido?

P12: Eu também tenho essa dúvida, porque eu vejo que essa situação cai numa falsa contextualização, porque não faz sentido.

Questionamos que algo a se pensar é o que qualifica um problema, isto é, o que torna um problema matemático bom? Sobre isso, elegemos e defendemos o problema dos cumprimentos como um bom problema, já que possibilitou adotar múltiplos processos/procedimentos de resolução, isto é, há diferentes formas de resolvê-lo; é um problema prático, no qual os alunos podem fazer a testagem se cumprimentando entre si e, normalmente, desperta o interesse deles; aborda diferentes conteúdos matemáticos, como Análise Combinatória, Soma dos termos de uma Progressão Aritmética e Equação do 2º grau; ademais, é um problema que possibilita sistematizar conceitos matemáticos importantes, podendo levar o aluno a uma compreensão com significado; e que, ao fim, possibilita ao professor avaliar todo o trabalho realizado pelos alunos.

No entanto, enfatizamos que, com efeito, uma defesa dada à Resolução de Problema em sala de aula é o fato do professor trabalhar com problemas que envolvam o cotidiano do aluno, como uma forma de motivar seu interesse e discurso em sala de aula (Mendonça, 1993), ou seja, assegurando o valor utilitário da Matemática.

Chamamos atenção, ainda, para o fato de que um problema matemático, no contexto da nossa pesquisa, é entendido como uma tarefa que: *a priori*, o aluno não dispõe ou não conhece nenhum processo que o ajude a encontrar de imediato a solução; no entanto, há um interesse em resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo (Andrade, 1998; 2017).

Comentário: Compreendemos que o problema não precisa ter ligação com o cotidiano do aluno, mas é necessário que ele se sinta desafiado e motivado a resolvê-lo, exigindo, assim, algum trabalho efetivo, que não necessariamente resulte na resolução bem-sucedida do problema, e, sim, no envolvimento efetivo dele, que o leve a descobertas e desperte o interesse de ir cada vez mais além, ou seja, é preciso que o processo de exploração de problemas esteja presente em todo desenrolar da trama.

Durante a reescrita do problema proposto por P12, o P14 colocou em evidência o jogo nomeado como *Brack Jack*. No desafio, que consistiu em acrescentar novos fatos/acontecimentos na atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no

formato de Narrativa Matemática e, em seguida, propor um novo problema, P14 dá continuidade à contextualização deste jogo, impulsionando o movimento de exploração-problematização-proposição de problemas. Veja a seguir:

Figura 40 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P14

- L16 - Sr. Deda chegou por último e, percebendo que não entrávamos em consenso sobre onde cada um iria sentar, falou.
- L18 - Eu tenho a solução, vamos jogar black jack ao invés de jogar baralho.
- L23 Na primeira partida, Sr. Deda afirmou, com muita convicção, que ele teria pelo menos o empate ou vencido a partida.
- No jogo Black Jack, cada jogador recebe duas cartas inicialmente, com o objetivo de alcançar 21 pontos, onde conforme o andamento da partida o jogador pode pedir mais cartas, no black jack as cartas de 2 a 10 têm o valor conforme o indicado; damas, valetes e reis valem 10; ases podem valer 1 ou 11 pontos (o que mais beneficiar o jogador). Com base nessas informações, determine:
- a) Qual foram as possíveis cartas que Sr. Deda recebeu, para ter afirmado sua fala?
- b) Em um baralho com 52 cartas, quantas maneiras tem de conseguir um black jack nas duas primeiras cartas recebidas, levando em consideração que seja o primeiro jogador a receber as cartas. E qual seria a probabilidade para isto acontecer?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O problema proposto a partir do novo elemento que foi introduzido a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática promoveu o interesse dos professores, observe o diálogo a seguir referente à solução para o item (a):

PP: No caso terá mais de uma combinação?

P14: Ele teria que pegar um ás e uma dama, um valete ou um rei.

P2: Porque um ás vale 1 ou 11.

PP: No caso para obter 21 pontos e garantir pelo menos um empate?

P14: É.

P2: Esse jogo seria muito bom para trabalhar com problemas em sala de aula.

Após a última reflexão apontada por P2, destacamos que os jogos matemáticos podem ser um excelente recurso que é capaz de impulsionar o trabalho em sala de aula via exploração, proposição e resolução de problemas, já que, “os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e na busca de soluções” (Brasil, 1998, p. 46).

Dando continuidade, P2 faz a leitura do acréscimo de um novo elemento na atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática e explica a ideia da geração do problema:

P2: “Boa ideia! Afirmou Nê. Agora, a arenga vai ser para formar duplas, **já que Sr. Deda não se junta com Perobinha e nem com Cesinha**”. Aí elaborei um problema considerando que eles não podem ficar juntos.

PP: Faça a leitura do problema!

Figura 41 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P2

Acréscimo da fala:

Sempre sentado na cadeira ao lado direito da poltrona do dia anterior.

Problema:

Seis jogadores de baralho se juntaram para realizar partidas, são eles: Lola, Nê, Perobinha, Pê, Cesinha e Sr. Deda. Sabendo que a mesa é composta sempre por duas duplas, desconsiderando as suas posições nas cadeiras, quanto são as diferentes formas de organizar a mesa, tendo em vista de Sr. Deda, por motivos pessoais, não forma dupla com Perobinha e nem com Cesinha?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, foi a vez de P12, em que ele destaca que, devido ao fato de terem sido propostos uma quantidade relevante de problemas de Análise Combinatória e que não tínhamos trabalhado problemas envolvendo o comércio, então, acrescentou, na linha 33, um novo fato que cabe problematização, isto é, se foi justa a proposta feita pelo cliente ao Sr. Deda. Veja o trabalho realizado por P12:

Figura 42 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P12

Linha 33 - Apesar do Sr. Deda ser bom em fazer cálculos mentais, esses dias lhe bateu uma dúvida na seguinte situação: vendeu um produto que custava R\$ 23,50, e o cliente lhe pagou com uma nota de R\$ 50,00, visando facilitar o troco que Sr. Deda iria lhe devolver, o ~~cliente~~ ^{cliente} falou que poderia lhe passar mais R\$ 3,50 para que Sr. Deda devolvesse R\$ 30,00. Sr. Deda aceitou a sugestão, porém, ficou em dúvida se realmente teria ficado tudo correto.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Este problema gerou o seguinte debate:

P12: A ideia é facilitar o troco. Os atendentes dos caixas de supermercado normalmente fazem isso.

P5: Na maioria das vezes o cliente não entende esse tipo de coisa.

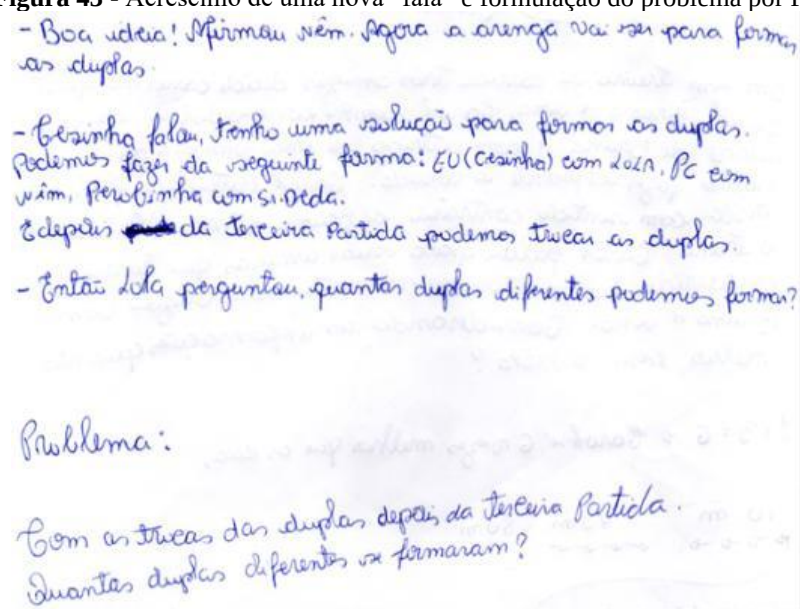
P12: No caso aí ficaria $50 - 23,50 + 3,50 = 30$. No caso está correto.

P5: Se for compras pequenas, talvez Sr. Deda faça os cálculos mentalmente mais rápido do que a gente.

Chamamos atenção para o problema proposto por P5 no primeiro encontro, uma vez que buscou refletir sobre práticas de natureza Matemática executadas por Sr. Deda durante sua profissão, e que essa discussão adentra ao campo da Etnomatemática.

Na sua vez, P1 faz a leitura do acréscimo de novas “falas” para a Narrativa Matemática e do problema matemático formulado. Veja a seguir:

Figura 43 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P1



- Boa ideia! Confirmou nê. Agora a arenga vai ser para formar as duplas.

- Cesinha falou, temo uma solução para formar as duplas. Podemos fazer da seguinte forma: EU (Cesinha) com Lola, PC com Nêm, Perobinha com Sr. Deda.

E depois ~~da~~ da terceira partida podemos ter as duplas.

- Então Lola perguntou, quantas duplas diferentes podemos formar?

Problema:

Com as dicas das duplas depois da terceira partida. Quantas duplas diferentes se formaram?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Com relação ao problema proposto por P1, os professores ressaltaram que, inicialmente, deveríamos calcular a quantidade de duplas que poderíamos formar com seis pessoas e, posteriormente, retirar as duplas: Cesinha e Lola, PC e Nêm, Perobinha e Sr. Deda, isto é, $C_{6,2} - 3$.

Em seguida, foi a vez de P10. Ele ressaltou que, no primeiro momento, buscou contextualizar o jogo de dominó que foi destacado no início da Narrativa Matemática. Veja a modificação da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática sugerida por P10 e o problema proposto:

Figura 44 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P10

O Sr. Deda joga dominó com seus amigos na calçada da sua casa. Em um desses dias ele separou todas as peças do dominó que continham pelo menos uma das duas partes da peça com cinco marcações. Ele dispôs as peças embarcadas e misturou-as para retirar uma delas. Qual a probabilidade de retirar 1 peça cuja soma das marcas seja par?

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou 50% ← Resp.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Observamos que algo que chamou atenção dos professores foi que uma condição do problema proposto por P10 é que “a soma das marcas seja par”. Nesse sentido, P2 questionou: “Na Matemática, como é escrito um número par?” Assim, iniciamos o debate:

PP: Como a soma de dois números resulta num par?

P12: Um ímpar mais um ímpar.

P10: Ou um par mais um par.

PP: Ímpar mais par ou par mais ímpar?

Professores: Ímpar.

PP: De que forma eu posso escrever qualquer número par?

P10: Dividir por 2.

P12: $2n$,

PP: E de que forma eu posso escrever qualquer número ímpar?

P4: $2n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$.

PP: E como podemos provar essas conjecturas, ou seja, que a soma de dois números pares resulta em um número par? E que a soma de dois números ímpares resulta em número par?

A partir do diálogo acima, registramos, na lousa, as descobertas realizadas pelos professores, em que eles expuseram suas compreensões acerca das conjecturas levantadas. Veja as resoluções que surgiram a partir consenso dos professores:

- **Soma de dois números pares é par:**

$$2n + 2m = 2(n+m) = 2q, \text{ com } q = n+m \text{ e } n, m, q \in \mathbb{N}$$

- **Soma de dois ímpares é par:**

$$2n + 1 + 2m + 1 = 2(n+m+1) = 2q, \text{ com } q = n+m+1 \text{ e } n, m, q \in \mathbb{N}$$

Sentimos a necessidade de investigar o problema proposto por P2 em decorrência do problema formulado por P10. Assim, enfatizamos, para os professores, que embora seja um problema que esteja claro acerca do que é pedido, nota-se que, em sua essência, podem-se emergir, como de fato ocorreu, subproblemas, isto é, problemas que estavam contidos de forma implícita no problema proposto por P10, e que exigiram um tratamento matemático mais formal.

Comentário: Embora não objetivamos, com esta atividade, a discussão das ideias matemáticas que surgiram a partir do problema proposto por P2, entendemos

que, pedagogicamente, o encaminhamento levantado por P2 poderia ajudar os professores a ampliarem suas visões sobre um problema matemático, ou seja, perceber que, em um problema, pode estar contido outros problemas que ajudam a solucionar o problema inicial e/ou levar a uma nova investigação matemática. E, ainda, que todo esse processo de engajamento na atividade matemática foi impulsionado no e com o caminhar exploração, proposição e resolução de problemas.

Argumentamos, também, que essa abordagem de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é pensada numa perspectiva construtivista de educação, ou seja, valoriza o conhecimento prévio do aluno, tendo ele como o ponto de partida de uma aula de matemática, cabendo ao professor mediar e orientar todo o processo de aprendizagem dos alunos, bem como sua primeira atribuição é a seleção ou a formulação de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas que dê conta do conceito matemático que se pretende sistematizar na aula (por exemplo, Silva, L., 2013; Silva, A., 2013; Brandão, 2014; Nascimento, 2014; Silva, 2015; Araujo, 2016; Silveira, 2016; Silva, 2016; Bezerra, 2017; Santos, E., 2019; Santos, R., 2019; Martins, 2019; Granjeiro, 2020).

Nesse contexto, chamamos atenção dos professores para o último encaminhamento solicitado a eles em relação atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “Jogo de Sueca”, que buscou, sobretudo, desenvolver habilidades para elaborar uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas. Sobre isso, observamos que os professores apresentaram dificuldades, inclusive, alguns que estavam presentes não realizaram esta tarefa, que consistiu em aprofundar a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática com o acréscimo de um novo acontecimento que impulsionasse a geração de novos problemas.

Comentário: As primeiras atribuições direcionadas aos professores foram explorar, propor, reformular e resolver problemas. No entanto, os desafiamos a serem elaboradores de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, isto é, acrescentar ou modificar algum fato da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, de modo a promover a geração de novos problemas. Entendemos que essa é uma atividade com uma demanda cognitiva maior, isso porque, no processo de problematização, os professores deveriam propor problemas antecipando resoluções e/ou soluções, já na elaboração de uma atividade exploração, proposição e resolução de problemas, o professor deve antecipar problemas, caminhos de explorações e possíveis resoluções e/ou soluções para os problemas que possam vir a ser gerados.

Ao fim, discutimos os textos: *Developing understanding in mathematics via problem solving*” (Schroeder, Lester, 1989) e *“Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion”* (Cai, 2010), que foram sugeridos para a leitura no final do primeiro encontro.

Com relação ao primeiro estudo, discutiu-se, principalmente, as abordagens para o ensino de Resolução de Problemas, isto é, ensinar *sobre* Resolução de Problemas, ensinar *para* resolver problemas e ensinar *através da* Resolução de Problemas. Já no último estudo, houve um debate acerca de movimentos pedagógicos que precisam ser assumidos pelos professores para operacionalizarem uma aula de Matemática através Resolução de Problemas, tais como: a situação-problema precisa ser o ponto de partida da aprendizagem matemática, em que os alunos compreendem um conceito chave explorando o problema; é atribuído ao aluno a participação engajada frente a um problema matemático; incentiva-se o trabalho colaborativo e cooperativo entre os alunos; investiga-se múltiplos processos de resolução e solução de um problema; o professor tem o papel de mediar todo o processo e fazer uma síntese de todo o trabalho realizado, de forma a apresentar um conceito matemático a partir das soluções defendidas pelos alunos etc.

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Ao antecipar problemas que poderiam ser propostos, seleciona-se um problema que aborda a resolução de Sistemas Lineares para ser explorado, o refinando a partir da reescrita feita pelos professores, contribuindo para a discussão de Representações Múltiplas de Álgebra e da transição entre elas, bem como da associação da posição das retas no plano cartesiano com a classificação dos Sistemas Lineares;
- Dentre as oportunidades de aprendizagem geradas para os professores, evidencia-se que é necessário antecipar problemas que podem ser propostos para atingir objetivos instrucionais;
- A metodologia de Exploração de Problemas contribuiu para pensar um processo de avaliação que contemple todo o esforço e trabalho realizado pelos alunos, como: problematizações levantadas, a proposição do problema, a reescrita do problema, a (re)solução dada ao problema etc;
- A defesa do trabalho realizado de proposição de problemas pelos professores evidencia benefícios que eles percebem quando o professor formula problemas para as suas aulas de Matemática;

- Para gerir o discurso em sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução por meio de mediação-refutação, o professor precisa apresentar um conhecimento profundo de conceitos e conteúdos matemáticos;
- Discutiu-se o que caracteriza um bom problema matemático, destacando-se que, além do problema levar a uma aplicação prática no cotidiano ou contribuir para sistematizar conceitos matemáticos importantes, é necessário que o problema desperte o interesse do aluno para realizar algum trabalho efetivo;
- Os professores são incentivados a elaborar uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, antecipando problematizações, problemas e (re)soluções, de modo que tal prática pode ampliar as oportunidades de aprendizagem que esses professores podem oferecer aos seus alunos.

7.4 Quarto episódio de sala de aula (03/07/2023): explorando, propondo e resolvendo problemas a partir da Narrativa Matemática Um “exame de problemas”

Iniciamos o encontro entregando a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, a seguir, para cada professor como material impresso, encaminhamos, também, para o grupo do *WhatsApp* o documento no formato PDF. Solicitamos que eles fizessem uma leitura detalhada e, em seguida, apresentassem suas impressões, curiosidades e reflexões em forma de problemas e os resolvessem.

Um “exame de problemas”

— Rapaz, que perrengue passamos ontem viu. Deu até polícia — afirmou Nê. E ainda acrescentou: — Lola, você sumiu. A gente pensou que a polícia tinha te prendido.

Respondi:

— Mas, homem, eu corri pela estrada perto do riacho até a casa de Joquinha. Fiquei escondido lá. Acho que percorri 1,5 km em 5 min. O que medo não faz né!?

Cesinha logo indagou:

— Mas o que vocês fizeram?

— Rapaz, a gente ia “tirar uma abelha” em um cajueiro no terreno do Sr. José Henrique. Quando chegamos lá, os caras já tinham tirado a abelha, e ainda derrubaram o cajueiro. Foi tenso. Quando a gente olhou para estrada, ia passando uma viatura da polícia, aí só ouvi quando a filha dele gritou lá da casa — eita, pai, eles vieram de novo. Pense numa carreira - explicou Nê.

— Os caras cortaram do lado errado, por isso o pé de caju caiu - explicou Perobinha.

— Mas e aí? Vocês têm muitos litros de mel? Questionou PC.

— Que nada! Até agora, encontrei poucos enxames. A cada ano que passa, percebo que as abelhas estão sumindo- explicou Nêm.

— Eu li em um *blog*⁵⁴ que cientistas no mundo todo estão preocupados, porque as abelhas estão sumindo - disse Cesinha.

— Preocupados por que iremos ficar sem mel, se caso elas desaparecerem? Indagou Perobinha!

Explicou Cesinha:

— Eu não sei exatamente. Mas lembro que a repórter explicou que a redução das abelhas aumentou em 43% o preço das amêndoas no mundo, pois sua reprodução depende 100% da polinização das abelhas; e que 52% dos alimentos vendidos no mercado, como alface, banana e maçã desaparecerão das prateleiras, caso o número de abelhas continue a diminuir.

— Mas porque será que as abelhas estão morrendo? Questionou Nêm!

Eu respondi:

- Eu li em um livro⁵⁵ que destacava o tempo necessário para termos uma nova colmeia, lá se falava sobre o processo de nascimento e morte das abelhas, dizendo que o número de abelhas numa família nova são 10.000 abelhas; a postura média da rainha são 2.000 ovos/dia; a longevidade das operárias/taxa de mortalidade corresponde a 40 dias; e o período entre a postura e o nascimento são de 21 dias. Ressaltava ainda, a hipótese desta família de abelhas possuírem idades equidistribuídas, isto é, idades entre 0 e 40 dias.

⁵⁴Disponível em: <https://novainter.net/blog/abelhas-em-extincao-devido-uso-do-celular/>. Acesso em: 13 jan. 2025.

⁵⁵ BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2003.



— Será que é por causa disso? Ou seja, está morrendo mais abelhas do que nascendo?
Indagou Nêm!

— E todos ficaram curiosos sobre o que está ocasionando o desaparecimento das abelhas.

Neste encontro, estavam presentes 9 professores. Vale ressaltar que esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática foi discutida no decorrer de **três episódios de sala de aula (4º, 5º e 6º)**, visando abordar os seguintes conceitos e conteúdos matemáticos:

- Abordar o conceito de Razão entre duas grandezas a partir da ideia de Velocidade Média;
- Discutir o mosaico formado pela a repetição de polígonos regulares (hexágonos);
- Trabalhar os conceitos de Taxa Percentual, Aumentos e Descontos Sucessivos a partir do enredo da narrativa: “a redução das abelhas aumentou em 43% o preço das amêndoas no mundo, pois sua reprodução depende 100% da polinização das abelhas; e que 52% dos alimentos vendidos no mercado, como alface, banana e maçã desaparecerão das prateleiras”;
- Discutir ideias essenciais de Função (a partir do fato que explica o processo de nascimento e morte das abelhas), abordando: lei da Função Afim, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio e a imagem da função, Função definida por várias sentenças e o esboço do seu gráfico. Para aprofundar, vamos buscar o entrelaçamento entre os tópicos de Função Polinomial do 1º Grau e Progressão Aritmética (P.A).

A *a priori*, quando comparada a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática *Jogo de Sueca*, notamos que os professores sentiram mais dificuldades para propor problemas a partir da narrativa *Um “enxame de problemas”*. Com isso, sentimos a necessidade de intervir, sendo assim, destacamos que a primeira atividade trabalhada por nós, em sua essência, apresentava diferentes fatos/acontecimentos que podiam ser traduzidos em forma de problemas. Evidenciamos, ainda, que, na maioria das vezes, os problemas matemáticos são propostos a partir de dados numéricos, isto é, quando se detêm a uma visão cognitiva do conhecimento matemático. Defendemos que não devíamos nos limitar apenas a questões internas da própria Matemática, e exemplificamos os trabalhos realizados por P3 e P13 na narrativa *Jogo de Sueca* que foram além, com a proposição de problemas em nível sócio-político-cultural.

Em seguida, P2 intervém e questiona ao professor-pesquisador: “*É verdade mesmo que as abelhas estão sumindo?*” Respondemos que sim, e que os professores poderiam fazer uso dos *smartphones* para investigar informações que poderiam ajudar no processo de problematização, como, por exemplo, verificar o questionamento levantado por P2.

Comentário: Defendemos o uso *smartphones* com pleno acesso à *internet* como elemento mediador que favorece a busca de informações que possam qualificar os problemas propostos, impulsionando, por conseguinte, os movimentos Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses.

Alguns professores questionaram o que significa nessa atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “*a hipótese desta família de abelhas possuírem idades equidistribuídas, isto é, idade entre 0 e 40 dias*”. Desse modo, entrevistamos e esclarecemos que, na colmeia, existiam abelhas operárias dentro desta faixa etária, o que significa que, diariamente, morreriam aquelas que atingiam os 40 dias de existência. Entendíamos que essa explicação seria importante para que os professores avançassem no processo de exploração, proposição e resolução de problemas.

Para P12, os problemas formulados podem ser influenciados pela gama de problemas que o professor já conhece, refletindo que: “*Eu tento fazer algo que não lembre as questões que já resolvi, mas chega na mente questões que já resolvi e a gente tende a fazer uma questão semelhante, mesmo mudando o contexto ou outra coisa, que podemos aplicar em questões semelhantes.*”

Comentário: Entendemos que é natural os professores partirem do conhecimento que foi conquistado ao longo de sua formação inicial e profissional para desenvolver um trabalho de proposição de problemas. No entanto, buscamos fomentar suas habilidades e competências para perceber movimentos e facetas da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, como, por exemplo, perceber que a proposição de um problema é apenas o começo de uma

viagem que deve culminar em um processo de investigação matemática impulsionado pelo caminhar da exploração de problemas.

Percebendo que a maioria dos professores tinham realizado o trabalho de problematização referente a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, solicitamos que eles compartilhassem com os colegas os problemas formulados, bem como descrevessem o que pensaram durante o processo de problematização. Devido à quantidade de problemas que tínhamos que lidar, vamos adotar algumas categorias de problemas tomando como referência fatos que compõem a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, como, por exemplo, os problemas que buscavam identificar a velocidade atingida por Lola durante a corrida na estrada próximo do riacho.

Assim, P2 inicia o processo de compartilhamento dos problemas, destacando que formulou um problema que contextualiza a corrida que Lola realizou, abordando o conceito de Razão atrelado a conhecimentos da Física. Com isso, convidamos os professores que propuseram problemas envolvendo este fato da Narrativa Matemática para fazer uma leitura dos problemas. O P11 defende que o problema que ele formulou difere do problema formulado por P2 pelo fato de requerer apenas a velocidade em km/h. Por outro lado, P5 e P7 destacam que, no problema que eles formularam, solicita-se a velocidade em m/s. Já P10 ressalta que formulou um problema envolvendo a corrida de Lola, mas com a intenção de resolver por meio da Regra de Três Simples, já que a distância e o tempo são grandezas diretamente proporcionais, sendo que o percurso foi realizado em 7 min. Na sua vez, P6 explica que sua proposição de problemas modificou o tempo, a velocidade e o personagem que realizou a corrida. Observe os problemas propostos por P2, P11, P5, P7, P10 e P6, respectivamente:

Figura 45 - Problema proposto por P2

I) Na situação, Lola afirma ter percorrido 1,5 Km correndo da estrada perto do riacho até a casa de Joquinha, levando 5 minutos. Determine a velocidade média, em m/s e em Km/h, adquirida por Lola nesse percurso:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1,5 \text{ Km}}{5 \text{ min}} = \frac{1500 \text{ m}}{300 \text{ s}} = 5 \text{ m/s} \quad \text{18 Km/h}$$

36

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 46 - Problema proposto por P11

(I) ATRAVÉS DA COARVETSA DE NÊM E LOLA, EM QUE LOLA PERCORREU 1,5 KM EM 5 MINUTOS. QUAL A VELOCIDADE EM KM/H ATINGIDA ATÉ A CASA DE JOQUINHA.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 47 - Problema proposto por P5

1) Lola percorreu 1,5 km em 5 minutos, calcule a velocidade em m/s.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 48 - Problema proposto por P7

(I) Analizando o texto acima, temos que "Lola" ao fugir percorreu 1,5 km em 5 min. calcule a velocidade média de Lola em m/s durante esse percurso.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 49 - Problema proposto por P10

PROBLEMA: EXPLORANDO REGRA DE TRÊS SIMPLES.

CORRENDO POR UMA ESTRADA, "LOLA" PERCORREU 1,5 KM EM 5 MINUTOS. SE ESSE TEMPO FOR AUMENTADO PARA 7 MINUTOS, MANTENDO A MESMA VELOCIDADE, QUAL SERIA A DISTÂNCIA PERCORRIDA?

$$\begin{array}{r|l} D & T \\ 1,5 & 5 \\ x & 7 \end{array} \quad \left| \quad x = \frac{10,5}{5} \Rightarrow x = 2,1 \text{ km} \leftarrow \text{RESP.} \right.$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 50 - Problema proposto por P6

CONSIDERANDO QUE NÊM PERCORREU 1 km EM 10 MIN, QUAL A VELOCIDADE MÉDIA?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Após o compartilhamento dos problemas, P11 formula e expõe um problema mais simples (proposição de problemas durante o processo de resolução e exploração de problemas), que ajuda a resolver o problema, buscando calcular a velocidade média atingida num percurso de 1,5 km em 5 min. Veja a seguir:

P11: Se o percurso fosse de 300 m, qual seria a velocidade média de Lola?

PP: Este seria um problema mais simples que ajudaria a resolver o problema proposto por P2. Vocês enxergam isso? A partir deste problema, como encontro a velocidade atingida por Lola nos 1.500 m?

P14: Encontra a velocidade em 300 metros e multiplica por 5, já que $5 \cdot 300 \text{ m} = 1.500 \text{ m}$.

PP: Exatamente.

Os professores P2 e P10 pediram a nossa autorização para defender suas resoluções na lousa. A partir da resolução apresentada por P2, surgiu o debate que buscou dar significado ao 3,6 que é utilizado na Física para converter km/h em m/s e vice-versa. De forma colaborativa, P2 e P14 explanaram que essa relação surge da compreensão de que $1\text{km} = 1.000\text{m}$ e $1\text{h} = 60\text{min} = 3.600\text{s}$ e, com isso, P2 registrou na lousa:

$$\frac{1.000\text{m}}{3.600\text{s}} = \frac{1\text{m}}{3,6\text{s}}$$

O P2 concluiu que, para converter km/h em m/s, basta $\div 3,6$; já para converter m/s em km/h, deve-se $\times 3,6$. Com a solução do problema, P2 afirma que Lola estava rápido, e daí surge um novo debate: é possível Lola ter realizado esse percurso em 5min? A partir desse questionamento, P10 explica que pensou neste fato durante o processo de proposição de problemas, por isso, aumentou o tempo de Lola para 7 min, ao invés de 5min. De forma descontraída, P14 afirmou que, nessa situação, ou seja, o ser humano com medo, de fato, pode conseguir essa façanha. Com isso, P5 entrevistou e comentou: *“Eu pesquisei e vi que seria bem difícil Nêm percorrer, pois a velocidade média de Nêm teria que ser de 18km/h. Teria que ter um porte atlético, para percorrer 1,5km em 5 min. Uma média humana, sem ter porte atlético, é de 10km/h”*.

Nesse sentido, explicamos que, possivelmente, um profissional em corrida realize tal atividade ou, talvez, de fato, não seja humanamente possível conseguir essa façanha. Além do mais, advogamos que essas informações (tempo e o espaço percorrido por Lola) foram colocadas de forma consciente, entendendo que foi no sentido de apresentar o acontecimento de modo exagerado, podendo, assim, causar estranheza sobre o quanto tal acontecimento era possível ou verídico. Dessa forma, finalizamos ressaltando que estávamos atentos ao contexto real, isto é, à plausibilidade de Lola realizar tal tarefa.

Como entendemos que a Proposição de Problemas operacionalizada a partir da Exploração de Problemas não deve se limitar apenas ao processo de propor e resolver o problema, convidamos os professores a se envolverem na formulação de novos problemas. Observe o diálogo a seguir:

PP: A partir dos problemas formulados por P2, P5, P7, P6, P10 e P11, e das resoluções, que novos problemas podem ser formulados?

P2: A gente viu que a velocidade dele num percurso de 1,5 km foi de 5m/s, sendo este o primeiro trecho. Considerando o problema de P10, com a trajetória total de 2,1 km, significa que restam ainda 0,6 km. Se ele dobrar a velocidade, em quanto tempo realizará o restante do percurso? Pensei assim, na hora, esse problema.

P4: Acho que, para que o aluno perceba que é um problema real, a velocidade deveria se reduzir à metade, já que ele realizou um trecho da corrida, vem a parte física, ele vai estar cansado. O aluno vai começar a se interessar quando ver que é um problema real.

Comentário: A proposição de problemas, antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problema, amplia a compreensão do problema inicial, podendo surgir novas alternativas de resolução, bem como discutir uma ideia matemática com mais profundidade e significado (Silva, L., 2013; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Santos, E., 2019; Granjeiro, 2020; Silveira, Andrade, 2022; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2019, 2024; Abreu, 2024).

Percebemos que os professores P2, P11, P5, P7, P10 e P6 mantiveram o ambiente matemático referente ao fato da Narrativa Matemática que descreveu o tempo e a distância percorrida por Lola. Contudo, P12 avança, ao formular um problema que aborda outros conteúdos matemáticos, tendo que controlar a solução, para que o problema apresentasse coerência, conforme as informações e o que se pede. Veja o problema e o diálogo que conduzimos com P12:

Figura 51 - Problema proposto por P12

6. LOLA TEM UMA CERTA DISTÂNCIA PRA CAMINHAR,
A CADA DIA ELA CAMINHA 2,2km A MAIS QUE NO
DIA ANTERIOR. SABENDO QUE LOLA PERCORREU
2km NO PRIMEIRO DIA, E QUE NO ÚLTIMO DIA CONSEGUIU
28,4 km, DETERMINE A QUANTIDADE DE DIAS QUE
LOLA CAMINHOU E O TEMPO QUE PUSEU SUA CAMINHADA
NO ÚLTIMO DIA. CONSIDERE QUE LOLA PERCORRE 2km
EM 10 min, E QUE MANTENHA SEMPRE O MESMO RITMO.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: Você tentou solucionar esse problema?

P12: Resolve por progressão e regra de três para descobrir o último dia. Ele percorre 2 km no primeiro dia e 2,2 km a mais com relação ao dia anterior, ou seja, uma progressão. Eu pensei, para descobrir o tempo que ele parou a caminhada no último dia, utilizar regra de três: já que 2km ele percorre em 10 min, 28,4km vai percorrer em quantos minutos? Só que quer saber também a quantidade que ela percorreu.

PP: Ok!

Dando continuidade ao trabalho realizado por P2, o segundo problema formulado por ele questiona o fazer saber de Lola e seus amigos: “*A que se refere à expressão ‘tirar uma abelha’, citada pelo personagem Lola, tendo em vista o contexto até o momento?*”. Assim, entrevistamos, explicando que esse termo surge do contexto cultural deste grupo social, que denominamos de “tiradores de abelhas”, que se comunicam com expressões ou palavras que possuem significados, e estão atrelados ao saber fazer de cada indivíduo, ou seja, novamente, nos deparamos com um debate que envolve o campo de pesquisa da Etnomatemática. Neste caso em especial, “tirar uma abelha” significa o ato de retirar o mel da colmeia.

O último problema proposto por P2 coloca em foco o processo de nascimento das abelhas, o que leva à constituição de uma nova família. Desse modo, solicitamos que os

professores que propuseram problemas envolvendo esse contexto da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática realizassem a leitura destes problemas. Assim, P5 inicia enfatizando que problematizou “...o número de abelhas no dia 45”, já P3: “Qual a taxa de mortalidade em 60 dias?”

Figura 52 - Problema proposto por P2

III) Quantos dias são necessários para formação de uma nova família de abelhas?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 53 - Problema proposto por P5

5) Uma colmeia em seu primeiro dia tem 10.000 abelhas, a rainha põe em média 2.000 novos ovos por dia, que nascem em 21 dias, as abelhas tem 40 dias de vida. Calcule o número de abelhas no dia 45.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 54 - Problema proposto por P3

A postura média da rainha são 2.000 ovos/dia e a taxa de mortalidade corresponde a 40 dias. Qual a taxa de mortalidade em 60 dias?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Na sua vez, P14 faz a leitura de um dos problemas que ele formulou, de tal forma que impulsionou um debate sobre o formato dos favos feito de cera. “A cera é um produto derivado da secreção das glândulas das abelhas entre 18 e 24 dias” (Biembengut; Hein, 2003, p. 107). Veja a seguir:

P14: O meu problema está relacionado à organização dos favos das abelhas. É aquela questão: por que ela faz os favos de mel na forma hexagonal? Porque é uma forma organizada em que cabe um volume maior de mel.

P10: Outro problema seria: por que as abelhas escolhem a forma hexagonal e não circular?

P14: Mas, se você for pesquisar, a forma que ela faz é circular...só que a cera que ela faz, de acordo com a temperatura do ambiente, derrete e encaixa de forma hexagonal, essa é uma das hipóteses.

Figura 55 - Problema proposto por P14

A organização dos favos das abelhas fascina pela complexidade e perfeição de sua geometria. Levando em consideração a essa complexidade geométrica, pesquise ~~algumas~~ alguma(s) hipótese(s) para que isto aconteça?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

A partir deste diálogo, concordamos com P14, ratificando que o formato hexagonal, de fato, possibilita que as abelhas obtenham o volume máximo de mel, e acrescentamos que outra vantagem com relação a outros possíveis formatos (triangular, quadrangular...) decorre da quantidade mínima de cera que é utilizada na produção dos favos ou “casas”.

Dando continuidade, P14 propõe um problema que promove a discussão de questões de natureza sócio-político-cultural, tal como identificar que fatores sociais e políticos que estão impulsionando o desaparecimento das abelhas. Veja a seguir:

Figura 56 - Problema proposto por P14

Em relação a fala de Cerinha “Eu li em um blog que cientistas no mundo todo estão preocupados, porque as abelhas estão ~~sumindo~~ sumindo”. Com base nessa fala, perquire algum(ns) fator(es) desse(s) acontecimento(s)?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Essa questão gerou um novo debate: quais as causas do desaparecimento das abelhas? Observe alguns fatores levantados pelos professores:

P14: As antenas de transmissão.

P13: As ondas dos celulares atrapalham a comunicação entre as abelhas e muitas delas se perdem da colmeia.

P10: O desmatamento.

P2: Os inseticidas... tivemos uma liberação de vários agrotóxicos no governo anterior.

P11: Quando tem muito barulho, elas vão para outro lugar.

P10: Eu estava olhando aqui que o desaparecimento das abelhas afeta a economia. Os produtos estão aumentando, como, por exemplo, a produção das amêndoas depende 100% da polinização das abelhas. Aí a diminuição vai fazer com que o produto aumente por conta da demanda.

P2: Vai entrar numa escassez.

P12: As abelhas são as principais polinizadoras.

PP: Isso.

Nesse contexto, ressaltamos, para os professores, que P14 formulou um problema que buscou ir além da Matemática, ou seja, munido de uma visão externalista, promoveu a discussão de um problema ambiental (mortes das abelhas), que vem inquietando cientistas do mundo inteiro.

Sobre a questão de desmatamento levantada por P10, o P7 entrevistou e explanou que formulou um problema envolvendo a derrubada do cajueiro, isto é, novamente, emergiu uma preocupação de caráter social e político. Veja a seguir:

Figura 57 - Problema proposto por P7

Ⓘ No trecho: “Quando chegaram lá, as cascas tinham tirado a casca, e ainda derrubaram o cajueiro.” Quais os impactos ambientais que as práticas citadas anteriormente podem causar?”

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em relação ao problema proposto por P7, P13 intervém e explica: “Uma vez que se derruba uma árvore, você diminui o oxigênio da Terra, você diminui o lençol freático, que é água. Então, isso faz muita diferença na natureza...a natureza viveria melhor sem o homem”.

Acerca do diálogo em que surgem ponderações sobre a produção e o preço das amêndoas, P5 formulou um problema que, quando resolvido, evidencia o impacto da alta dos preços do quilograma de amêndoas ocasionado pelo eventual desaparecimento das abelhas, compreendendo, pois, a importância da coerência contextual, iniciamos o diálogo com P5. Veja a seguir:

PP: Porque você colocou o preço das amêndoas por 60 reais?

P5: Eu pesquisei e vi que o valor médio do quilo de amêndoa é 60 reais aqui no Brasil.

PP: Ok!

Figura 58 - Problema proposto por P5

2) Supondo que 1 kg de amêndoas custa R\$ 60,00. Qual seu valor após um aumento de 43%?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Nesse sentido, advogamos, junto aos professores, que, durante o processo de proposição de problemas, os dados numéricos podem ter um caráter informativo, isto é, são informações reais que expressam o contexto em que está sendo escrito.

Com a finalidade de abordar ideias essenciais de Função, retomamos os problemas propostos por P2, P3 e P5 sobre o comportamento da dinâmica populacional de uma colmeia de abelhas. Fomos à lousa e juntos, professor-pesquisador e professores, iniciamos o processo de resolução dos problemas propostos. Observe o diálogo a seguir:

PP: Precisamos analisar diferentes momentos que compõem o processo de nascimento das abelhas. Vamos ter que levar em consideração que uma família nova é composta por 10.000 abelhas; a postura média da rainha são 2.000 ovos/dia; a taxa de mortalidade das operárias corresponde a 40 dias; e o período entre a postura e o nascimento são de 21 dias. Além disso, como destacamos antes, as abelhas encontram-se com idades equidistribuídas entre 0 e 40 dias, ou seja, estão morrendo aquelas que possuem 40 dias. Como a gente descobre quantas abelhas morrem em média por dia?

P14: É um problema de função. Era bom um gráfico para ver o comportamento de nascimentos e mortes.

P10: É, isso acontece em função disso, porque, ao mesmo tempo que tem abelhas velhas morrendo, tem outras nascendo, para manter a colmeia.

P2: Será $\frac{10.000}{40} = 250$ abelhas.

PP: Isso. Assim, no momento inicial, que vamos chamar de $F(0)$...o início da constituição da nova família, temos quantas abelhas?

P14: 10.000 abelhas.

PP: Após o primeiro dia?

Professores: $10.000 - 250 = 9.750$ abelhas

PP: E após o segundo dia, temos quantas abelhas?

P14: $9.750 - 250 = 9.500$

PP: E quantas abelhas restaram no vigésimo dia?

Com estes questionamentos, na lousa, organizamos didaticamente as descobertas realizadas pelos professores, com a finalidade de perceber uma lei da função correspondente aos 20 primeiros dias de diminuição da população de abelhas, com **P** representando a população de abelhas e **t** o tempo em dias. Veja, a seguir, o registro do processo de resolução realizado na lousa com a participação efetiva dos professores:

$$P(0) = 10.000$$

$$P(1) = 10.000 - 250 = 9.750$$

$$P(2) = 10.000 - 2 \cdot 250 = 10.000 - 500 = 9.500$$

$$P(3) = 10.000 - 3 \cdot 250 = 10.000 - 750 = 9.250$$

A partir deste procedimento de resolução, os professores retomam o nosso último questionamento, e defendem que, no vigésimo dia, teremos:

$$P(20) = 10.000 - 20 \cdot 250 = 10.000 - 5000 = 5000$$

Para aprofundar, indagamos:

PP: Qual seria a lei de formação da função para os primeiros 20 dias? Quem está se repetindo?

Professores: 10.000.

P2: É o termo constante da função afim.

Professores: E - 250.

PP: É o que podemos chamar de taxa de crescimento ou variação. Então, qual é a lei da função?

Professores: $P(t) = -250t + 10.000$.

Após este trabalho realizado, destacamos que, nos 20 primeiros dias, a população de abelhas decresceu em 5.000 com relação à família inicial e, ainda, que a lei da Função Afim encontrada é válida para o período de 0 a 20 dias, isto é, considerando **t** o tempo em dias, o domínio desta função pode ser representado pelo intervalo real: $0 \leq t < 21$, ou seja, $P(t) = 10.000 - 250t$, para $0 \leq t < 21$.

Refinando a discussão, desafiamos os professores a fazerem conexão com outro conteúdo matemático. Veja o diálogo:

PP: Podemos fazer conexão da Função Afim com que outro conteúdo?

P2: Com P.A.

PP: Quem seria o primeiro termo para essa situação?

P2: 10.000.

PP: E a razão?

P2: -250.

PP: Em termos de grandeza, o que seria o $n-1$?

P2: O tempo.

Deste diálogo, sintetizamos que na população inicial, isto é, $a_1 = 10.000$, a taxa de mortalidade corresponde à razão, ou seja, $r = -250$ e $n - 1$ é o tempo que denotamos por **t**. Concluimos, assim, na lousa, que, substituindo esses termos na Função Polinomial de 1º grau,

$P(t) = 10.000 - 250t$, que representa o primeiro estágio do processo de nascimento das abelhas, obtemos, assim, $a_n = a_1 + (n-1)r$, ou seja, o termo geral de uma Progressão Aritmética (PA).

Depois desta intervenção, iniciamos o segundo estágio, que consistiu em analisar o processo de formação da família de abelhas até o 40º dia. Veja o diálogo abaixo:

PP: O que irá acontecer após o vigésimo dia?
 P14: Vai continuar morrendo, e vai nascer agora.
 PP: Então, quantas abelhas teremos no vigésimo primeiro dia?
 Tínhamos quantas em $P(20)$?
 Professores: 5.000 abelhas.
 PP: Tá morrendo quantas abelhas? E nascendo quantas abelhas?
 Professores: 250 abelhas.
 P2: E nascendo 2.000 abelhas.
 PP: E, agora, como podemos calcular?
 P14: A razão agora é 1.750.
 Professores: $5.000 - 250 + 2.000 = 6.750$.
 PP: Exatamente! A população anterior, subtraída das abelhas que morrem diariamente, e ainda adicionada com quantidade de abelhas que estão nascendo. E para $P(22)$?
 P12: $6.750 - 250 + 2.000 = 8.500$.
 PP: E no vigésimo terceiro dia?
 Professores: $8.500 - 250 + 2.000 = 10.250$.

Manipulando didaticamente, com a intencionalidade de identificar padrões que nos levassem à lei da função, ao partir do auxílio dos professores, registramos o seguinte processo de resolução na lousa:

$$\begin{aligned} P(20) &= 5.000 \\ P(21) &= 5.000 - 250 + 2.000 = 5.000 + (1)1.750 = 6.750 \\ P(22) &= 6.750 - 250 + 2.000 = 5.000 + 2(1.750) = 8.500 \\ P(23) &= 8.500 - 250 + 2.000 = 5.000 + 3(1.750) = 10.250 \end{aligned}$$

A priori, os professores tiveram dificuldades em identificar a lei da função referente ao segundo estágio de constituição da nova família de abelhas, pois o processo de morte e nascimento não era linear. Veja o diálogo:

PP: Quem é que está sempre aparecendo?
 Professores: 5.000 e a razão que é 1.750.
 PP: E o termo que representa o tempo?

Observamos que este questionamento gerou um silêncio, contudo, o professor-pesquisador persistiu com o processo de mediação-refutação:

PP: É bom lembrar que já calculamos $P(20)$ no primeiro estágio.
 P14: É $(t-20)$.
 PP: Por quê?
 P14: Isso, porque 5.000 já representa a população de abelhas no 20º dia.
 PP: Exatamente.

A partir desta mediação, obtemos a lei da Função Afim, que serve para o segundo estágio (21 a 40 dias) do processo de constituição da população de abelhas. Veja, a seguir, o registro realizado na lousa a partir das descobertas feitas pelos professores:

$$P(t) = 5.000 + (t - 20)1.750 \text{ ou } P(t) = 1.750t - 30.000, \text{ para } 21 \leq t < 41$$

Logo, para $P(40)$, registramos:

$$P(40) = 5.000 + (40 - 20)1.750$$

$$P(40) = 5.000 + 20 \cdot 1.750$$

$$P(40) = 5.000 + 35.000$$

$$P(40) = 40.000$$

Iniciamos o terceiro estágio do processo de formação da população de abelhas, enfocando o problema proposto por P5, isto é, “*Calcule o número de abelhas no dia 45*”. Observe o diálogo:

PP: Será que esta lei da função que encontramos para 40º dia pode ser utilizada para resolver o problema por P5?

Professores: Não.

PP: O que vai acontecer a partir dos 40 dias?

P2: As 5.000 abelhas vão ter morrido.

P14: E, agora, não vão morrer mais abelhas. Vai ficar nascendo 2.000.

PP: Exatamente. E como podemos matematizar isso?

Notamos que os professores estavam percebendo como estava sendo estabelecida a dinâmica populacional da constituição do enxame de abelhas. Assim, com um novo questionamento levantado, fomos para a lousa e registramos o processo de pensamento suscitado pelos professores até 45º dia. Observe abaixo:

$$P(40) = 40.000$$

$$P(41) = 40.000 + (1)2.000 = 42.000$$

$$P(42) = 40.000 + (2)2.000 = 44.000$$

$$P(43) = 40.000 + (3)2.000 = 46.000$$

$$P(44) = 40.000 + (4) 2.000 = 48.000$$

$$P(45) = 40.000 + (5) 2.000 = 50.000$$

Dessa forma, destacamos que, no 45º dia, haveria 50.000 abelhas. Observamos que os professores não apresentaram dificuldades para perceber a lei da função que representa o terceiro estágio, bem como o domínio da função, pois ressaltaram que razão corresponde ao nascimento médio diário de 2.000 operárias e, com relação ao tempo, deve-se retirar os dias equivalentes aos dois estágios já calculados, ou seja, $(t - 40)$. Tais reflexões geraram o seguinte registro na lousa:

$$P(x) = 40.000 + (t - 40)2.000 \text{ ou } P(x) = 2.000t - 40.000, \text{ para } 40 \leq t \leq 60$$

Assim, para $P(60)$, registramos:

$$P(t) = 2.000t - 40.000$$

$$P(60) = 2.000 \cdot 60 - 40.000$$

$$P(60) = 120.000 - 40.000$$

$$P(60) = 80.000$$

Nesse contexto, trazemos para discussão o problema proposto por P3, ou seja, “*Qual a taxa de mortalidade em 60 dias?*”, a partir do qual os professores expuseram que, nesse período, todas as abelhas do enxame inicial, isto é, 10.000 abelhas, terão desaparecido da colmeia, sendo essa a taxa de mortalidade. E explanamos que isso ocorreu exatamente no 40º dia.

Para continuar avançando no processo de exploração de problemas, propomos um novo problema. Veja o diálogo a seguir:

PP: O que vai acontecer a partir do 61º dia?

P10: Volta ao ciclo.

P14: Vai começar a morrer e nascer.

PP: Como encontramos, agora, a taxa de mortalidade dessa nova família de abelhas?

Professores: $\frac{80.000}{40} = 2.000$ abelhas.

P2: No caso, vai permanecer 80.000 abelhas.

PP: Sim. Vai nascer 2.000 abelhas, mas morrer diariamente a mesma quantidade. Então, qual a lei da função para esse novo ciclo que inicia?

Comentário: No trabalho em sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o professor tem o papel de não deixar que o processo de exploração de problemas se finde de forma prematura, especialmente se tiver assinalando novos caminhos de exploração-problematização-proposição de problemas que promovam uma melhor compreensão da situação-problema e ampliem a significação de ideias matemáticas.

Por meio deste diálogo, registramos, na lousa, as descobertas realizadas pelos professores:

$$P(60) = 80.000$$

$$P(61) = 80.000 - 2.000 + 2.000 = 80.000$$

$$P(62) = 80.000 - 2.000 + 2.000 = 80.000$$

$$P(t) = 80.000, \text{ para } t \geq 60$$

Posteriormente, P2 faz um comentário relacionado ao debate de cunho sócio-político-cultural: “*É aí que entra a interferência humana, que é que faz que aconteçam mortes não naturais. Dá um descompasso no ciclo*”. Desse modo, ressaltamos, para os professores, que os modelos matemáticos encontrados não consideram os impactos causados pelas ações do ser humano no que diz respeito à sobrevivência das abelhas no planeta Terra.

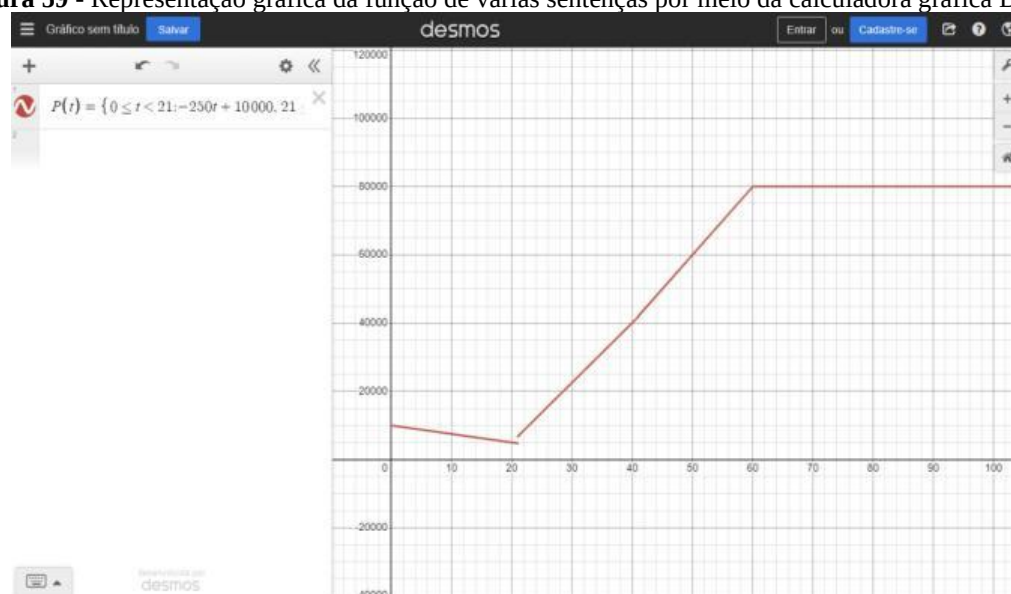
Ainda aprofundando as ideias matemáticas inerentes a estes problemas propostos por P2, P3 e P5, P2 e P4 comentam que podemos representar os problemas por meio de uma função

de várias sentenças. Assim, retornamos à lousa e registramos cada uma das sentenças que correspondem à dinâmica populacional de um enxame de uma família de abelhas. Veja a seguir:

$$P(t) = \begin{cases} -250t + 10.000, & 0 \leq t < 21 \\ 1.750t - 30.000, & 21 \leq t < 41 \\ 2.000t - 40.000, & 41 \leq t \leq 60 \\ 80.000, & t \geq 60 \end{cases}$$

Com essa representação, surgiu a necessidade de representar a função de várias sentenças graficamente. Para isso, utilizamos a calculadora gráfica *Desmos* com o propósito de visualizar o comportamento de cada função conforme os estágios que elucidam a dinâmica populacional de uma família de abelhas. Veja o gráfico, a seguir, e o diálogo gerado:

Figura 59 - Representação gráfica da função de várias sentenças por meio da calculadora gráfica Desmos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: De acordo com o gráfico, os estágios que discutimos refletem o ciclo de nascimento das abelhas. Nos primeiros 20 dias, temos uma função crescente ou decrescente?

Professores: Decrescente.

PP: Isso. Morrem 250 abelhas diariamente. E entre o 21º dia e o 41º dia?

Professores: Crescente. A cada dia, temos 1.750 abelhas a mais.

PP: No período do 41º dia e do 60º dia?

Professores: Também é crescente.

PP: E do 61º dia em diante?

P2: É constante. É exatamente 80.000 abelhas.

Comentário: Destacamos que, com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, esperávamos que fossem propostos, principalmente, problemas envolvendo o conceito de razão entre duas grandezas a partir da ideia de Velocidade Média, o mosaico hexagonal formado pela repetição de polígonos regulares, ideias essenciais de Função, bem como os conceitos de Taxa Percentual, Aumentos e Descontos Sucessivos; o que, de fato, aconteceu, bem como foram gerados problemas que contemplavam outros conteúdos matemáticos.

Sintetizamos, para os professores, que os problemas envolvendo a dinâmica populacional de uma colmeia de abelhas possibilitaram a abordagem de modelos matemáticos na forma de Função Afim, conforme cada estágio de constituição de uma nova família, isto é, função do tipo $y = F(x) = ax + b$, na qual x corresponde à variável independente e y à variável dependente, enquanto a e b são coeficientes, em que o coeficiente angular a corresponde à taxa de crescimento diário (nascimento) do enxame de abelhas, já o coeficiente linear b expressa a quantidade inicial de abelhas na colmeia, antes do processo de nascimento. Assim, adentramos reflexões acerca de ideias essenciais de Função (Cooney; Beckmann; Lloyd, 2010), que foram amplamente discutidas nas pesquisas de Silva, L. (2013), Brandão (2014) e Bezerra (2017).

Nessa direção, Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) apresentam cinco grandes ideias essenciais de Função: 1. conceito de função; 2. covariação e taxa de variação; 3. famílias de funções; 4. combinação e transformação de funções; e 5. representações de funções, sendo subdivididas em entendimentos essenciais, que podem impulsionar o ensino de Função e, com isso, ressaltamos, para os professores, que, dentre essas ideias, foram promovidas ao longo do trabalho de exploração de problemas, principalmente:

Compreensão Essencial 1a. Funções são associações de valor único de um conjunto do domínio da função para outra sua imagem.

Compreensão Essencial 1b. As funções se aplicam para uma vasta gama de situações. Elas não precisam ser descritas por expressões específicas ou seguir um padrão de regularidade. Elas podem se aplicar a casos que não são de "variação contínua". Por exemplo: sequências são funções (Cooney; Beckmann; Lloyd, 2010, p.8, tradução nossa, grifo nosso).⁵⁶

Entendimento essencial 2a. Para as funções que associam números reais em números reais, certos padrões de covariação, ou padrões de como duas variáveis mudam em conjunto, indicam a associação de determinada família de funções e determinam o tipo de fórmula que a função tem (Cooney; Beckmann; Lloyd, 2010, p. 8, tradução nossa, grifo nosso).⁵⁷

Entendimento essencial 3b. Função Afim é caracterizada por uma taxa constante de variação. O raciocínio sobre a semelhança de triângulos retângulos permite deduzir que a função afim tem uma taxa constante de variação e uma fórmula do tipo $f(x) = mx + b$ para constantes m e b (Cooney; Beckmann; Lloyd, 2010, p. 9, tradução nossa, grifo nosso).⁵⁸

⁵⁶ **Essential Understanding 1a.** Functions are single-valued map-pings from one set-the domain of the function-to another-its *range*.

Essential Understanding 1b. Functions apply to a wide range of situations. They do not have to be described by any specific ex-pressions or follow a regular pattern. They apply to cases other than those of "continuous variation." For example, sequences are functions.

⁵⁷ **Essential Understanding 2a.** For functions that map real num-bers to real numbers, certain patterns of covariation, or pat-terns in how two variables change together, indicate member-ship in a particular family of functions and determine the type of formula that the function has.

⁵⁸ **Essential Understanding 3b.** Linear functions are characterized by a constant rate of change. Reasoning about the similarity of "slope triangles" allows deducing that linear functions have a constant rate of change and a formula of the type $f(x) = mx+b$ for constants m and b .

Entendimento essencial 5a. As funções podem ser representadas de várias maneiras incluindo, através de meios algébricos (por exemplo: equações), gráficos, descrições verbais e tabelas.

Entendimento essencial 5b. Mudar a maneira como a função é representada (por exemplo, algebricamente, com um gráfico, em palavras ou com uma tabela) não muda a função, apesar de representações diferentes destacarem diferentes características e algumas podem mostrar apenas uma parte da função.

Entendimento essencial 5c. Algumas representações de uma função podem ser mais úteis do que outras, dependendo do contexto.

Entendimento essencial 5d. As conexões entre representações algébricas e gráficas de funções são especialmente importantes em estudar as relações e as mudanças (Cooney; Beckmann; Lloyd, 2010, p. 10, tradução nossa, grifo nosso).⁵⁹

Com o intuito de motivar os professores na elaboração de atividades matemáticas para as suas salas de aulas, destacamos que esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática foi elaborada por nós e a sua escrita foi motivada a partir de uma situação que vivenciamos em nossa adolescência.

Comentário: Esperamos que a experiência vivenciada no curso de Formação de Continuada Professores que ensinam Matemática possa inspirar os professores a transformarem alguma situação que eles vivenciaram ou inerentes aos contextos sociais nos quais os alunos e escola estão inseridos em uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas. As atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas são um exemplo de como fazer isso. No entanto, o professor pode, a partir de sua experiência profissional, adequá-las à sua sala de aula de matemática.

Nesse contexto, P10 entrevistou e relatou que formulou um problema para discutir em sua aula de Matemática envolvendo porcentagem baseado em uma compra de um sapato que estava com determinado desconto à vista, mas que, no ato da compra, o valor da venda não correspondia ao preço do sapato com o desconto oferecido pela loja e, conseqüentemente, ele teve que intervir para evitar uma situação de injustiça social. O P10 percebeu que houve um engajamento dos alunos, que se mostraram interessados em resolver um problema que refletia uma história real, o que lhe favoreceu para mostrar a importância do conceito de porcentagem para resolver problemas do cotidiano dos alunos.

Comentário: A nossa intenção foi promover um ensino de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas que adentrasse a questões de (in)justiça social, tendo a Matemática como a nossa “advogada”, que cuida dos

⁵⁹ **Essential Understanding 5a.** Functions can be represented in various ways, including through algebraic means (e.g., equations), graphs, word descriptions, and tables.

Essential Understanding 5b. Changing the way that a function is represented (e.g., algebraically, with a graph, in words, or with a table) does not change the function, although different representations highlight different characteristics, and some may show only part of the function.

Essential Understanding 5c. Some representations of a function may be more useful than others, depending on the context.

Essential Understanding 5d. Links between algebraic and graphical representations of functions are especially important in studying relationships and change.

nossos interesses, ao nos munirmos do conhecimento matemático fazendo intervenções em situações de injustiça social, potencializando, assim, a promoção da criticidade dos professores.

Recomendamos, para casa, a leitura dos artigos: “*La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores*” (A criação de problemas de matemática na formação de professores), de autoria de Uldarico Malaspina Jurado (Jurado, 2013a) e “*Conceptualizing Problem Posing via Transformation*” (Conceituando a Proposição de Problemas via Transformação), escrito por Jasmina Milinković (Milinković, 2015).

Finalizamos o encontro e fomos para o *coffee break*. Em meio a diferentes conversas paralelas entre os professores, o P2 direciona a palavra ao professor-pesquisador, momento em que os professores fazem silêncio e ouvem atentamente as ponderações de P2. Veja o diálogo a seguir:

P2: Quando tu ia aprofundando, eu pensei em um novo problema: – Daqui há quantos dias o número de abelhas mortas será igual ao número de abelhas vivas no enxame?
PP: Excelente problema! A gente teria que investigar para ver se, durante o ciclo populacional das abelhas, isso aconteceria.

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Na Proposição de Problemas, antes do processo de resolução e exploração de problemas a partir de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, os professores colocaram suas impressões, curiosidades e reflexões em forma de problemas e os resolveram;
- A metodologia de Exploração de Problemas potencializa o debate de um tema de urgência social (o desaparecimento das abelhas) a partir da geração de problemas que enfocam conceitos matemáticos (olhar com os números) e questões que vão além da matemática (olhar sem os números);
- A abordagem com os professores evidencia que eles podem tirar proveito das Tecnologias Digitais, a exemplo do *smartphones* com pleno acesso à *internet*, como elemento mediador de um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas;
- Seleciona-se alguns problemas propostos pelos professores para sistematizar ideias matemáticas que foram antecipadas (razão entre duas grandezas a partir da ideia de velocidade média e ideias essenciais de Função), em decorrência dos objetivos de

aprendizagem da atividade de exploração, proposição e resolução no formato de Narrativa Matemática;

- A proposta de Exploração de Problemas contribuiu para os professores pensarem a Matemática como um instrumento para conscientizar os alunos acerca de suas responsabilidades enquanto cidadãos.

7.5 Quinto episódio de sala de aula (04/07/2023): refinando/aprofundando a Narrativa Matemática Um “exame de problemas”

No último encontro, houve um debate que carecia de aprofundamento acerca do mosaico hexagonal construído pelas abelhas. Assim, iniciamos este encontro retomando o problema: “*A organização dos favos das abelhas fascina pela sua complexidade e perfeição de sua geometria. Levando em consideração essa complexidade geométrica, pesquise algumas hipóteses para que isso aconteça*”, proposto por P14. Vale destacar que, neste encontro, estavam presentes 10 professores.

Inicialmente, destacamos que, “o favo é composto de alvéolos de base hexagonal” (Biembengut; Hein, 2003, p. 107) e, conseqüentemente, os alvéolos “[...] têm a forma de um prisma hexagonal regular (faces laterais iguais e ângulos entre as faces iguais) aberto numa extremidade e formando um ápice triédrico na outra face” (Bassanezi, 2013, p. 215). E, ainda, que “se quisermos um mosaico formado pela propagação de um só tipo de polígono regular (lados iguais e ângulos internos iguais), devemos escolher tal polígono de modo que seu ângulo interno seja um divisor de 360° (para que haja um encaixe entre os polígonos)” (*Ibid*, 2013, p. 215-216).

Nesse contexto, tomamos como ponto de partida as reflexões tecidas por Biembengut e Hein (2003), bem como por Bassanezi (2013), para discutir o problema proposto por P14, levantando a seguinte hipótese: “*o polígono utilizado pelas abelhas garante maior área com o mesmo perímetro*”. A partir daí, iniciamos o diálogo:

PP: Quais serão os possíveis polígonos regulares cujo o ângulo interno é divisível por 360° ?

P2: Pode ser quadrados.

P14: Triângulos.

PP: Que tipo de triângulo?

Professores: Equilátero.

PP: Há mais possibilidades?

P2: O próprio hexágono.

PP: Se considerarmos que o quadrado, o triângulo equilátero e o hexágono regular possuem mesmo perímetro l , qual o lado do quadrado?

Professores: $\frac{l}{4}$

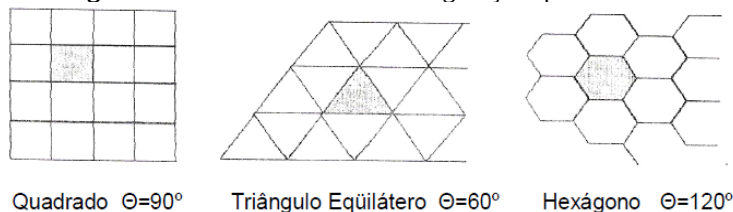
PP: E como se calcula a área de um quadrado?

Professores: $A_Q = l^2$.

PP: Isso!

Veja, a seguir, algumas possíveis configurações para os favos:

Figura 60 - Possibilidades de configurações para os favos



Quadrado $\Theta=90^\circ$

Triângulo Equilátero $\Theta=60^\circ$

Hexágono $\Theta=120^\circ$

Fonte: Bassanezi (2013, p. 216).

Assim, explanamos que, considerando que os polígonos regulares citados acima possuem o mesmo perímetro l , como o quadrado é formado por quatro lados iguais, então, nessa circunstância, o lado do quadrado, de fato, é $\frac{l}{4}$. Ademais, da Geometria Plana temos que a área do quadrado é dada por $A_Q = l^2$. Assim, a partir das descobertas dos professores, fomos à lousa e registramos:

➤ Área do quadrado (A_Q):

$$A_Q = l^2 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{16} \Rightarrow A_Q = \frac{l^2}{16}$$

Dando continuidade ao processo de resolução deste problema, questionamos:

PP: E como se calcular a área de um triângulo equilátero?

P4: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

PP: Considerando a mesma hipótese...Se eu digo que o perímetro vai ser l , então, quanto vale o lado do triângulo?

P2: Cada lado é $\frac{l}{3}$

Deste diálogo, ratificamos que a área de um triângulo equilátero é calculada por meio da fórmula: $A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ e, como o perímetro do triângulo equilátero é l e ele possui três lados iguais, então, o seu lado mede $\frac{l}{3}$. Assim, na lousa, a partir das reflexões tecidas pelos professores, registramos:

➤ Área do triângulo equilátero (A_T):

$$A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{l}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{l^2}{9}\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{36}$$

PP: De forma análoga, qual será a medida do lado do hexágono regular?

P14: $\frac{l}{6}$

PP: Isso! Já que o hexágono regular possui 6 lados iguais. E qual a fórmula para a área do hexágono regular?

P4: Seis vezes a área do triângulo equilátero.

PP: Isso!

Assim, fomos à lousa e registramos as descobertas realizadas pelos professores. Utilizando o raciocínio análogo, consideramos que o perímetro do hexágono regular é l e, como ele possui seis lados iguais, o lado é $\frac{l}{6}$. Consideramos, ainda, que a área de um hexágono regular é 6 vezes a área de um triângulo equilátero. Temos, então:

➤ Área do hexágono regular (A_H):

$$A_H = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \left(\frac{l}{6}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{3\left(\frac{l^2}{36}\right)\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{3l^2\sqrt{3}}{36}}{2} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A_H = \frac{l^2\sqrt{3}}{24}$$

Assim, obtemos modelos matemáticos para calcular a área dos diferentes formatos alvéolos, com isso, na lousa, tomamos um valor arbitrário para percebermos o que acontece para $l = 1$. Veja a seguir:

$$A_Q = \frac{l^2}{16} = \frac{1^2}{16} \Rightarrow A_Q = \frac{1}{16}$$

$$A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{36} = \frac{1^2\sqrt{3}}{36} \Rightarrow A_T = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

$$A_H = \frac{l^2\sqrt{3}}{24} = \frac{1^2\sqrt{3}}{24} \Rightarrow A_H = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

Comparando as áreas, temos: $\frac{\sqrt{3}}{36} < \frac{1}{16} < \frac{\sqrt{3}}{24}$. Desse modo, destacamos que, se atribuirmos qualquer valor natural para l , teremos: $A_T < A_Q < A_H$. Ressaltamos, para os professores, que as abelhas, intuitivamente, conseguem fazer os alvéolos na forma de prisma de base hexagonal, maximizando o volume, porém, gastando uma quantidade mínima de cera, com relação a outros possíveis formatos para a sua “casa”. Enaltecemos, também, o trabalho em comunidade realizado pelas abelhas, no qual cada uma delas (operárias, zangões e a rainha) é responsável por desenvolver funções em prol do bem-estar de todas na colmeia.

Em seguida, para intensificar o processo de exploração de problemas, recomendamos que os professores escolhessem um dos problemas que foi proposto no último encontro para que aprofundássemos, reformulando-o. Nesse contexto, eles selecionaram o problema proposto por P5: “Supondo que 1 kg de amêndoas custa R\$ 60,00. Qual o seu valor após um aumento de 43%?”. A justificativa apresentada por alguns professores foi a de que o problema envolvia a ideia de porcentagem, como também promovia a discussão social acerca do papel das abelhas na produção de diversos alimentos naturais.

Desse modo, após um certo tempo, notando que os professores realizaram o trabalho de reformulação do problema, pedimos que eles compartilhassem os problemas e resoluções, bem como defendesse todo o trabalho realizado. O P11 iniciou essa tarefa fazendo a leitura da reescrita dada ao problema proposto por P5. Notamos que o novo problema formulado por P11 carecia de uma reescrita, com isso, entrevistamos:

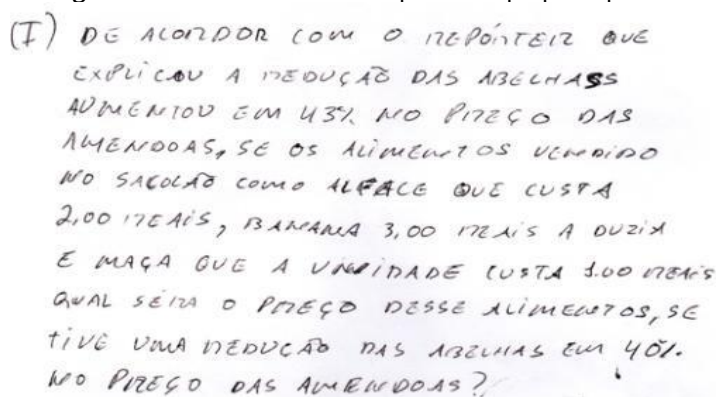
PP: Acho que esse problema precisa melhorar a escrita para compreender o que se pede, por favor, P11, você pode explicar para nós!

P11: Se o preço desses alimentos sofresse um aumento de 40%.

PP: Então, precisa ficar claro na escrita do problema.

P2: Precisa modificar no início ou no final. Poderia ficar assim: “Após o aumento de 40% desses alimentos devido à redução das abelhas, qual será o novo preço da alface, da dúzia de banana e da unidade de maçã?”

Figura 61 - Reescrita de P11 ao problema proposto por P5



(F) DE ACORDO COM O REPÓRTEIR QUE EXPLICOU A REDUÇÃO DAS ABELHAS AUMENTOU EM 43% NO PREÇO DAS AMENDOAS, SE OS ALIMENTOS VENDIDOS NO SACOLÃO COMO ALFACE QUE CUSTA 2,00 REAIS, BANANA 3,00 REAIS A DUZIA E MAÇA QUE A UNIDADE CUSTA 3,00 REAIS QUAL SERIA O PREÇO DESSE ALIMENTOS, SE TIVE UMA REDUÇÃO DAS ABELHAS EM 40% NO PREÇO DAS AMENDOAS?

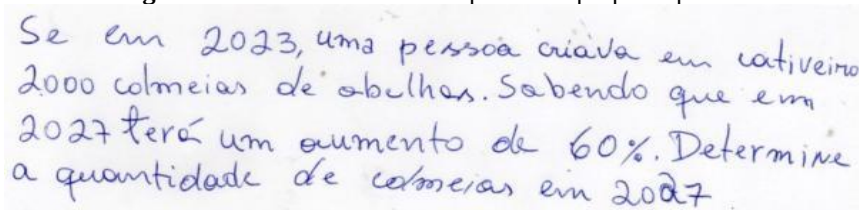
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: De forma intencional, em alguns casos, mobilizamos os professores a experienciar uma reflexão colaborativa, bem como um trabalho cooperativo que impulsionasse o trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

Do trabalho realizado por P11, destacamos, para os professores, a importância do contexto, especialmente, tendo em vista o cuidado que ele teve com a forma como alguns produtos são comercializados (unidade e dúzia) e, também, levando em consideração a atribuição de preços para a maçã, a alface e a banana, condizentes com a realidade local.

Posteriormente, foi a vez de P13. Assim, ele realizou a leitura da sua reescrita ao problema proposto por P5:

Figura 62 - Reescrita de P13 ao problema proposto por P5



Se em 2023, uma pessoa criava em cativeiro 2000 colmeias de abelhas. Sabendo que em 2027 terá um aumento de 60%. Determine a quantidade de colmeias em 2027.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Com este problema, iniciamos o debate que buscou elucidar medidas que devem ser tomadas para combater o desaparecimento das abelhas. Observe o diálogo a seguir:

PP: Já discutimos sobre as causas das mortes das abelhas. Surgiram, também, alguns impactos sociais com esse desaparecimento. Outra questão importante é: como combater o desaparecimento das abelhas?

Professores: Diminuir o uso de inseticidas e combater o desmatamento.

PP: Principalmente, diminuir a dosagem que é prejudicial à sobrevivência das abelhas.

P13: As espécies vão atrás do pólen e morrem por causa dos inseticidas.

PP: Isso! Muito delas não conseguem retornar à colmeia e, quando retornam, acabam infectando outras abelhas da colmeia.

P13: Uma alternativa seria utilizar inseticidas à base de produto natural.

PP: Os apicultores têm um papel importante de criar enxames e podem aumentar, anualmente, a quantidade de enxames.

P13: As abelhas estão sumindo, e o que os professores de Matemática estão fazendo para mudar este quadro? A mentalidade ecológica cabe muito bem nas aulas de Matemática, para conscientizar os alunos de forma Eco-Matemática.

Comentário: As questões de natureza sócio-político-cultural revelam a necessidade de cada cidadão refletir com/sem Matemática acerca de soluções e alternativas que visam combater desafios advindos da interferência do homem em diferentes aspectos da sociedade. Nesse contexto, quando nos propomos ir além do olhar internalista para o conhecimento matemático, assumimos um movimento didático que tenciona a importância do papel ativo dos estudantes na construção de uma sociedade com equidade social.

Percebemos que os professores, além tirarem proveito das informações destacadas por P5 em sua proposição de problemas, acrescentaram, em alguns casos, dados referentes ao trecho da Narrativa Matemática que discorre acerca do desaparecimento das abelhas e alguns impactos para a nossa sociedade, como, por exemplo, P2, na sua reformulação do problema proposto por P5, modifica informações da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, destacando que “o aumento dos preços dos alimentos destacados em 52%”, sendo que, na narrativa, os 52% representa a quantidade de alimentos vendidos no mercado que podem desaparecer com a redução das abelhas. A seguir, P2 defende todo o trabalho realizado:

Figura 63 - Reescrita de P2 ao problema proposto por P5

I) tendo em vista que o aumento dos preços dos alimentos destacados em 52%, devido a redução do número de abelhas, se deu num período de 13 anos, ~~quanto~~ quanto tempo faltou para que esses produtos dobrem de valor? (considere que a taxa de mortalidade das abelhas permaneça constante durante todo o período).

$$\begin{aligned}
 13 &\rightarrow 52\% \Rightarrow 52x = 48.13 \\
 x &\rightarrow 48\% \quad x = \frac{624}{52} \\
 &\quad x = 12 \text{ anos}
 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

A seguir, P2 defende todo o trabalho realizado:

P2: Tendo em vista que, durante 13 anos, as abelhas foram se reduzindo e, no final destes 13 anos, o preço desses produtos aumentaram 52% e dobraram de valor, claro que com relação ao valor inicial.

PP: Esse aumento é proporcional ao desaparecimento das abelhas?

P2: Aí eu coloquei: considere que a taxa de mortalidade das abelhas permaneça constante durante todo o período.

PP: Você resolveu?

P2: Fiz por regra de três. Basta calcular quanto tempo falta para atingir 100%, ou seja, dobrar de valor. Calcular os 48% restantes, então: 52% equivale a 13 anos e 48% equivale a quanto?

PP: No caso, 4% por ano.

P2: Isso! Traz a ideia de razão.

Professores: São doze anos.

O trabalho de reescrita realizado por P1 consistiu em modificar o preço do quilograma de amêndoa apontado por P5, gerando, assim, um novo problema, embora seja necessário o mesmo procedimento de resolução para dar conta de ambos os problemas. Sobre isso, o P12 argumenta como resolver esse tipo de problema: “O bom é que o aluno pode calcular o valor correspondente a essa porcentagem e somar com o valor inicial ou ele pode aumentar na própria porcentagem e calcular de uma vez, já vai achar o valor direto”.

Figura 64 - Reescrita de P1 ao problema proposto por P5

Com a redução das abelhas, aumentou 43% no preço das amêndoas, pois sua produção depende 100% da polinização das abelhas. Um kilo de amêndoas custa R\$ 80,00. Quanto passará a custar depois do aumento?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Observa-se que as reescritas dadas ao problema proposto por P5 contemplavam, até o momento, o conteúdo de porcentagem. No entanto, o P10 destaca que formulou um problema envolvendo Progressão Aritmética (P.A) e procurou apresentar dados reais acerca da situação de desmatamento no mundo. Veja a seguir:

Figura 65 - Reescrita de P10 ao problema proposto por P5

CONSIDERE QUE ATÉ MAIO/2023, A REDUÇÃO DAS FLORESTAS, EM MÉDIA, ERA DE 25% NO MUNDO. SABENDO QUE ESSA REDUÇÃO INTERFERE NA POPULAÇÃO DAS ABELHAS E QUE SUA SOBREVIVÊNCIA DEPENDE DO PERCENTUAL DE FLORESTA EXISTENTE, RESPONDA: EM QUE ANO AS ABELHAS SERIAM EXTINTAS SE SUA SOBREVIVÊNCIA FOR CONDICIONADA A, NO MÁXIMO, 65% DE DESMATAMENTO, SABENDO QUE A TAXA ANUAL DE DESMATAMENTO, EM MÉDIA, É DE 5% AO ANO?

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO: P.A.

CONHECEMOS:	$65 = 25 + (n-1) \cdot 5$
$a_n = 65$	$65 = 25 + 5n - 5$
$a_1 = 25$	$65 - 25 + 5 = 5n$
$r = 5$	$45 = 5n \Rightarrow n = 9$ (Nº DE TERMOS DA P.A.)
$n = ?$	

TEMOS: $2023 + 9 = 2032$ ← RESPOSTA.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Destacamos, para os professores, que o problema pode ser discutido em nível de processos e conceitos matemáticos, como também possibilita refletir sobre o tema “Desmatamento”, que, de fato, contribui para a redução das abelhas, e ainda tem emergido como um problema ambiental que tem sido discutido no mundo inteiro, sendo necessário refletir, junto aos alunos, medidas que devem ser tomadas para evitar tal prática em *prol* do bem-estar das gerações futuras. Sobre isso, o P10 entrevistou. Observe, a seguir, o diálogo:

P10: Pegando o gancho dessa narrativa, eu discuti hoje com os meus alunos o perigo da extinção das abelhas. É muito boa essa discussão. A gente leva para outro campo. No caso, quando fui trabalhar com questões do meio ambiente...dá para trabalhar a interdisciplinaridade.

PP: Discutir o impacto ambiental com a extinção das abelhas e, consequentemente, o impacto econômico, como você tinha colocado no último encontro.

P10: Exatamente!

Comentário: Defendemos que as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas escritas por nós possuem um potencial para serem replicadas no âmbito da Educação Básica, como também nos cursos de Licenciaturas em Matemática e Pedagogia, cabendo ao professor ou ao professor-formador realizar as devidas adaptações, se necessárias, bem como refletir e antecipar debates em âmbito de ideias matemáticas e sócio-político-cultural que possam emergir do processo reflexivo.

Os professores solicitaram que o professor-pesquisador fosse à lousa para resolver este problema. Contudo, P10 tinha solucionado o problema por ele reescrito, com isso, conduzimos um diálogo, e ele explicou como pensou na solução do problema:

PP: Vamos pensar como se fosse uma P.A. Qual o primeiro termo?

P10: 25 e a razão será 5.

PP: E o número de termos?

P10: É o que a gente quer saber, e 65 é o último termo.

Veja, a seguir, o registro da resolução na lousa:

$$65 = 25 + (n - 1) \cdot 5$$

$$65 = 25 + 5n - 5$$

$$65 - 25 + 5 = 5n$$

$$45 = 5n$$

$$n = \frac{45}{5}$$

$$n = 9$$

Na sua vez, P7 justifica a reescrita dada ao problema proposto por P5, ressaltando que os alunos apresentam dificuldades para resolver este tipo de problema. Observe o trabalho realizado e diálogo a seguir:

Figura 66 - Reescrita de P7 ao problema proposto por P5

III) Considerando que os valores dos produtos aumentam seu valor de acordo com ~~(o aumento da taxa de moeda)~~ a diminuição da população de abelhas, se o preço do alface custa R\$ 1,50 e a banana R\$ 3,50 e que houve uma diminuição da população por dois trimestres consecutivos e com isso o aumento nos valores dos produtos de 10% e 12% respectivamente, qual o valor final dos produtos após os aumentos?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

P7: Coloquei dois aumentos sucessivos em dois trimestres. Os alunos teriam que fazer primeiro os 10% e, do resultado, aumentar mais 12%.

P12: Poderiam também multiplicar as porcentagens.

P7: Eles têm dificuldades...eles somam os dois aumentos: $10\% + 12\% = 22\%$, aí vão calcular 22%. Se a gasolina aumenta 5% hoje e amanhã mais 5%, o aumento será sobre o valor depois do primeiro aumento de 5%, não é a mesma coisa que aumentar 10%.

Comentário: O professor de Matemática formula problemas para as suas aulas com diferentes propósitos. Um deles é formular problemas que permitam dar significado a uma ideia matemática, visando, assim, a superação de dificuldades, de modo que ajude o estudante a aumentar sua compreensão sobre conteúdos matemáticos (Jurado, 2013a, Crespo, 2015; Milinkovic, 2015).

Em seguida, P4 realiza a leitura da sua reescrita do problema. Chamamos atenção para o cuidado que este professor teve com relação à organização das informações, a ideia matemática enfocada no problema e o contexto descrito, ao destacar que “[...] a redução na quantidade de colmeias e o aumento no preço das amêndoas está na razão de $\frac{2\%}{3\%}$ [...]”, pois a redução das abelhas acarreta no impacto direto com o preço do quilograma das amêndoas. Veja o problema a seguir:

Figura 67 - Reescrita de P4 ao problema proposto por P5

SABE-SE QUE A PRODUÇÃO DE AMÊNDOAS DEPENDE 100% DA POLINIZAÇÃO DAS ABEIHAS. IMAGINE QUE SEJA POSSÍVEL DETERMINAR A QUANTIDADE DE COLMEIAS NUMA CERTA REGIÃO, CONSIDERANDO QUE, EM PERCENTUAL, ANUALMENTE, A REDUÇÃO NA QUANTIDADE DE COLMEIAS E O AUMENTO NO PREÇO DAS AMÊNDOAS ESTÁ NA RAZÃO DE $\frac{2\%}{3\%}$, DETERMINE O PREÇO DO QUILOGRAMA DAS AMÊNDOAS EM 2024 SABENDO QUE EM 2023 ESTE MESMO QUILOGRAMA CUSTA R\$ 40,00 E QUE HÁ UMA PROJEÇÃO DE REDUÇÃO DE 30% NA QUANTIDADE DE COLMEIAS EM 2024 NESTA REGIÃO.

Resolução

$$\frac{\text{Redução de Colmeias}}{\text{Aumento no Preço das Amêndoas}} = \frac{2\%}{3\%} = \frac{30\%}{x} \Rightarrow 2x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{2} \Rightarrow x = 30\%$$

* PROJEÇÃO DO PREÇO DAS AMÊNDOAS EM 2024

130% de 40,00

$$1,3 \cdot 40 = 52,00$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Os professores solicitaram que P4 fosse à lousa resolver esse problema. Na ocasião, P4 defendeu a resolução apresentada na figura acima.

Na sua reescrita do problema, P6 formulou alguns problemas, em que, em síntese, um deles consistiu em 1kg da amêndoa que custava R\$ 80,00 e, com o desaparecimento, sofreu um aumento de 43%. Com isso, o professor problematizou: qual deveria ser a redução percentual para que o 1kg da amêndoa volte ao preço anterior? Veja todo o trabalho realizado por P6:

Figura 68 - Reescrita de P6 ao problema proposto por P5

COM O DESAPARECIMENTO DAS ABEIHAS, O PREÇO DAS AMÊNDOAS NO MUNDO AUMENTOU 43%, POIS SUA REPRODUÇÃO DEPENDE 100% DA POLINIZAÇÃO DELAS. CONSIDERANDO QUE O PREÇO MÉDIO DESSE PRODUTO É R\$ 80,00, QUAL SERÁ O VALOR DO AUMENTO EM REAIS? E QUAL SERÁ O NOVO PREÇO MÉDIO? POR FIM, SE, POSTERIORMENTE, HOUVER O DESEJO DE RETORNAR AO PREÇO ANTERIOR, QUANTOS PORCENTOS DE REDUÇÃO SERIA?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Compreendemos que esse problema precisa ser refletido sob duas perspectivas, a saber: a promoção de um olhar com os números (visão internalista) e o aprofundamento com um olhar sem os números (visão externalista), assim iniciamos o debate:

PP: O que deve acontecer para ter a redução dos preços?

P12: Aumentar a quantidade de abelhas.

PP: E que medidas já foram levantadas aqui para combater a redução das abelhas?

Professores: Diminuir o uso de agrotóxicos, diminuir a dosagem de inseticidas, combater o desmatamento e utilizar inseticidas naturais.

P7: Hoje em dia, a produção dos cajueiros diminuiu muito.

PP: As abelhas são uma das principais polinizadoras dos cajueiros.

A reescrita realizada por P14 expõe um dos fatores negativos com a redução das abelhas, “[...] diminuição da reprodução das vegetações frutíferas [...]”. Veja o problema a seguir:

Figura 69 - Reescrita de P14 ao problema proposto por P5

com os diversos fatores que levaram o desaparecimento da população de abelhas, que influenciou na diminuição da reprodução das vegetações frutíferas, entre outras. Um dos exemplos é o caso das amêndoas, onde a sua reprodução depende 100% das abelhas, que com a diminuição das abelhas houve um aumento de 43% do preço das amêndoas em todo o mundo, explicou Cristina. De acordo com as informações relatadas, com base no aumento considere que o preço do quilo das amêndoas seja em média de R\$ 84,00. Determine o valor inicial do quilo das amêndoas antes do aumento.

aproximadamente

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O P14 justifica que o preço atribuído para o quilograma de amêndoa se deu a partir de uma pesquisa, em que ele observou que custa, em média, R\$ 84,00. Em seguida, ressaltamos que P14 reescreveu o problema proposto por P5, modificando o que é desconhecido, ou seja, no problema formulado por P5, solicita-se calcular o valor do quilograma das amêndoas tendo o aumento de 43%, já no problema proposto por P14, ressalta-se o preço atual do quilograma de amêndoa, após ter sofrido um aumento de 43%, requerendo, assim, calcular o preço do quilograma de amêndoa antes de sofrido o aumento percentual.

Os professores se mobilizaram para resolver o problema proposto por P14 e o uso da calculadora do *Smartphone* possibilitou agilidade no processo de investigação, chegando a uma solução aproximada para o problema, carecendo, assim, de arredondamento. Com isso, sugeriram um acréscimo na redação do problema, isto é, enfatizar que está requerendo “o preço inicial aproximado”.

A partir destas reflexões, P12 intervém destacando que a reformulação dada ao problema de P5 é semelhante à reformulação apresentada por P14, em termos de processos e conceitos matemáticos. Veja a seguir:

Figura 70 - Reescrita de P12 ao problema proposto por P5

2. A QUANTIDADE DE ABELHAS REPRESENTA NO MUNDO 65% DA DIVERSIDADE LIGADA A PRODUÇÃO DE VÁRIOS ALIMENTOS VERGADOS NO MERCADO. COM O DESAPARECIMENTO DAS ABELHAS, CONSIDERE QUE O PREÇO DO QUILOGRAMA DA AMÊNDOA SOFREU UM AUMENTO DE 43%. E PASSOU A CUSTAR R\$ 100,10. QUAL O VALOR QUE A GRA VERGADA O QUILOGRAMA DA AMÊNDOA ANTES DO AUMENTO?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Os professores se sentiram convidados a refletir sobre esse problema e, como tínhamos o interesse de discutir com profundidade as ideias matemáticas inerentes a problemas dessa natureza, iniciamos o diálogo:

PP: Como resolvemos este problema?

P2: Pode ser por regra de três.

P12: Fiz por equação: 143% de $x = 100,10$... $143\% = 1,43$.

PP: Mas você verificou se dá certo de acordo com os dados do problema?

P12: Dá, porque 43% de 70 é igual a 30,10 e $70 + 30,10 = 100,10$.

Assim, registramos na lousa duas resoluções a partir das reflexões de P12:

Resolução 1:

$$\frac{143}{100}x = 100,10$$

$$1,43x = 100,10$$

$$x = \frac{100,10}{1,43}$$

$$x = 70$$

Resolução 2:

$$0,43 \cdot 70 + 70 = 30,10 + 70 = 100,10$$

Comentário: Notamos que uma característica marcante de grande parte dos problemas propostos por P12 consiste no controle e na antecipação da solução do problema. Esse processo de regulação no processo de proposição de problemas requer sobretudo, atenção e o domínio de ideias matemáticas.

Com a intencionalidade de chegar a uma generalização de um modelo matemático que dê conta de problemas envolvendo o valor final de uma mercadoria que sofre um acréscimo ou desconto de uma taxa percentual, tomamos como ponto de partida as resoluções apresentadas por P12, e indagamos aos professores:

PP: Qual o valor final da mercadoria?

Professores: 100,10.

PP: E qual o valor antes do acréscimo percentual?

Professores: 70.

PP: E qual a taxa percentual de acréscimo?

Professores: 43%.

Desse modo, registramos na lousa:

$$0,43 \cdot 70 + 70 = 100,10$$

$$i \cdot v_i + v_i = V_f$$

$$V_f = v_i (1 + i)$$

Nesse contexto, chamamos V_f de valor final após o acréscimo ou desconto, v_i de valor inicial antes do acréscimo ou desconto e i de taxa percentual sofrida. Assim, ressaltamos, para os professores, que um determinado produto pode sofrer um acréscimo ou desconto, ampliando a fórmula, ou seja:

$$V_f = v_i (1 \pm i)$$

Enaltecemos que as diferentes formas de resolver um mesmo problema podem promover uma melhor compreensão de conceitos matemáticos, bem como ampliar e avançar o nível de discussão, com a apresentação e formalização de ideias matemáticas, tomando como ponto partida todo o trabalho realizado pelos alunos em torno de uma situação-problema.

O P12 deu outra reescrita ao problema proposto por P5, na qual os professores se mobilizaram, de forma colaborativa, na busca da solução do problema. Veja o problema e o diálogo:

Figura 71 - Segunda reescrita de P12 ao problema proposto por P5

2. PEROBINHA E NÊM ESTÃO COLHEENDO ~~AMENDOAS~~ ^{AMENDOAS} ELES PERDERAM, CADA UM, 10%. DA ~~AMENDOAS~~ ^{AMENDOAS} COLHIDA. SE A ~~SOMA DAS~~ ^{SOMA DAS} ~~PERDAS~~ ^{PERDAS} É DE 1,6 KG, E SE, INICIALMENTE PEROBINHA HAVIA COLHIDO 4,2 KG ~~DE~~ ^{AMENDOAS} ENTÃO NO TOTAL, NÊM ~~COLHEU~~ ^{COLHEU} QUANTOS ~~KG~~ ^{KG} DE ~~AMENDOAS~~ ^{AMENDOAS}?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: Você resolveu este problema?

P12: Como eles perderam 10% das amêndoas e a soma das perdas é de 1,6kg, e eu também digo que Perobinha colheu, no início 4,2kg, e então, Perobinha perdeu 10% de 4,2kg e vejo o que faltou para chegar a 1,6kg. Perobinha perdeu 0,42kg.

PP: Então, quanto Nêm perdeu?

Professores: 1,18kg.

P12: Agora, precisamos saber quanto ele perdeu no início. Se ele perdeu 1,18kg, então, ele colheu quantos quilos? Se ele tivesse colhido 11,8kg, quando ele perdesse 10%, daria exatamente 1,18kg.

P4: $10 \cdot 1,18\text{kg} = 11,8\text{kg}$.

P12: E $0,42 + 1,18$ dá 1,6, é igual à soma das perdas.

A partir deste diálogo, registramos, na lousa, a seguinte resolução:

I. 10% de 4,2:

$$\frac{10}{100} \cdot 4,2 = 0,42$$

II. $1,6 - 0,42 = 1,18$

$$10 \cdot 1,18 = 11,8$$

Assim, confirmamos que Nêm colheu 11,8kg de amêndoas. Sublinhamos, para os professores, que esse problema poderia ser solucionado a partir de diferentes procedimentos de resolução, que poderiam intensificar o movimento de exploração-problematização-proposição de problemas, culminando, assim, em novos problemas (Silveira, 2016; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2024; Abreu, 2024).

Ao fim, fizemos uma síntese do que foi discutido, ressaltando que iniciamos o encontro refletindo sobre o problema proposto por P14 no encontro anterior, em que tínhamos o propósito de abordar ideias matemáticas a partir do mosaico hexagonal construído pelas abelhas, bem como enfatizar que o formato hexagonal de sua casa promove a obtenção do volume máximo de mel com a quantidade mínima de cera.

Chamamos atenção dos professores para o debate em nível sócio-político-cultural que foi iniciado no encontro anterior, mas que foi se aprofundando a partir da exploração, proposição e resolução de novos problemas. Destacamos três questões que despertaram o interesse dos professores: O que pode acontecer, de modo geral, com a extinção das abelhas? O que está ocasionando a redução das abelhas? O que podemos fazer para combater a redução das abelhas?

Por fim, sob uma perspectiva cognitiva, esclarecemos o movimento que teve como intencionalidade apresentar uma nova ideia matemática (acrécimo ou desconto de uma taxa percentual) a partir do trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas realizado pelos professores. Na ocasião, de forma intencional, selecionamos a reescrita dada por P12 ao problema proposto por P5, bem como as diferentes resoluções defendidas por ele, para apresentar a fórmula envolvendo o cálculo de taxa percentual com acréscimos ou descontos.

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Retoma-se um problema que foi proposto e discutido no encontro anterior (mosaico hexagonal construído pelas abelhas), para aprofundá-lo, a partir da sistematização de ideias matemáticas;
- Os professores escolheram um problema que foi proposto no encontro anterior, para ser explorado, refinando-o através da sua reescrita. A justificativa da escolha do problema foi a ideia matemática trabalhada (Taxa Percentual) e o fato de promover um debate em âmbito sócio-político-cultural;
- Elucidou-se os critérios de reescrita do problema que foi explorado, chegando a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses;
- Com o desenvolvimento da Exploração de Problemas, pensada numa perspectiva de Educação Crítica, aprende-se a ir além da concepção internalista do conhecimento matemático, podendo, assim, oportunizar ao aluno ser um agente ativo que pode causar transformação no seu entorno, por meio de intervenções, como, por exemplo, combater causas que afetam a extinção das abelhas;
- Operacionaliza-se a Proposição de Problemas como ponto de partida da aprendizagem matemática, a partir do trabalho de proposição e resolução do problema realizado por um professor, para construir a fórmula que calcula o valor final de um produto após ter sofrido um acréscimo ou desconto;
- A proposta de Exploração de Problema oportuniza aprender que a busca de múltiplos processos/procedimentos de resolução permitem aprofundar o problema, o que, por sua vez, leva a uma compreensão com significados das ideias matemáticas inerentes ao problema.

7.6 Sexto episódio de sala de aula (07/07/2023): explorando e problematizando a Narrativa Matemática Um “exame de problemas”

Iniciamos o encontro retomando o problema, *“Considerando que os valores dos produtos aumentam seu valor de acordo com a diminuição da população de abelhas, se o preço da alface custava R\$ 1,50 e a banana R\$ 3,50 e que houve a diminuição da população por dois semestres consecutivos e com isso o aumento dos valores dos produtos de 10% e 12% respectivamente, qual o valor final dos produtos após os aumentos?”*, formulado por P7. Neste encontro participaram 8 professores. É importante ressaltar que P11 participou até o quinto encontro.

Durante a exposição do seu processo de pensamento, P7 explicou que a ideia da formulação do problema se justifica pelo fato de os alunos apresentarem dificuldades em resolver problemas envolvendo aumentos ou descontos sucessivos. Na ocasião, tanto P7 quanto P12 sugerem alternativas para resolver esse problema. Assim, com a intencionalidade de apresentar a fórmula envolvendo os aumentos ou descontos sucessivos de taxas percentuais, discutimos acerca do comentário tecido por P12: “*Poderia, também, multiplicar as porcentagens.*” Assim, iniciamos o diálogo. Veja a seguir:

PP: O que você quis dizer com multiplicar as porcentagens?

P12: No caso, aí, para a alface, por exemplo, seria $1,10 \cdot 1,12$ e multiplicava o resultado pelo preço da alface.

PP: Por que $1,10$?

Professores: Porque seria a soma do aumento de 10% ao todo... 100%...transformando para números decimais dá $1,10$.

PP: Isso!

Comentário: Na Proposição de Problemas, o propositor precisa ser encorajado a dar sentido ao trabalho de proposição realizado. Para isso, o professor precisa instigar os estudantes a refletir sobre o que e como pensaram na articulação das informações que compõem o espaço do problema; discorrer se houve um controle de conceitos matemáticos e da solução do problema; e incentivar a validação da formulação bem-sucedida do problema, por meio da apresentação e defesa de resolução(ões) para o problema.

A partir das descobertas apresentadas pelos professores, na lousa, registramos a resolução para o problema formulado por P7. Observe a seguir:

- Preço da alface com dois aumentos sucessivos: 10% e 12%

$$(1 + 0,10) \cdot (1 + 0,12) \cdot 1,50 = 1,10 \cdot 1,12 \cdot 1,50 \approx 1,84$$

- Preço da banana com dois aumentos sucessivos: 10% e 12%

$$(1 + 0,10) \cdot (1 + 0,12) \cdot 3,50 = 1,10 \cdot 1,12 \cdot 3,50 \approx 4,31$$

Nesse contexto, explanamos que o valor inicial (v_i) de um determinado produto pode sofrer sucessivos aumentos ou descontos, e que podemos sintetizar uma fórmula a partir do trabalho realizado por eles em torno do problema formulado por P7. Para isso, consideramos que um produto sofre variações sucessivas de taxas, em que denominamos de $i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_n$ e o valor final de v_f . Com isso, iniciamos um novo diálogo com os professores. Observe a seguir:

PP: O que seria 10% e 12%?

Professores: São as taxas de aumentos.

PP: E R\$ 1,50 e R\$ 3,50?

Professores: O preço inicial da alface e da banana.

Desse modo, a partir das reflexões geradas em torno do problema proposto por P7, chegamos à construção da seguinte fórmula:

$$v_f = v_i(1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot (1 \pm i_4) \cdot \dots \cdot (1 \pm i_n)$$

Posteriormente, solicitamos que os professores acrescentassem ou modificassem alguns fatos/acontecimentos da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, de modo a gerar um novo ambiente de problematização e, em seguida, deveriam propor e resolver problemas.

Notamos que os professores fizeram uso do *Smartphone* com pleno acesso à *internet* para buscar informações/dados que pudessem ser incorporados a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, ampliando o movimento de problematização, de forma a desencadear novas discussões.

Ao notarmos que os professores tinham finalizado a atividade, convidamo-los a compartilharem todo trabalho realizado. O P14 inicia fazendo a leitura do acréscimo de um novo fato a Narrativa Matemática e ao problema que foi gerado. Observe o diálogo:

P14: Eu acrescentei com relação à explicação de Cesinha na reportagem, e acrescentei que: “Outro caso seria a produção de café que, sem a polinização feita pelas abelhas, teria uma redução de 30% na sua produção”.

PP: Você pesquisou sobre isso?

P14: As abelhas são uma das principais polinizadoras de café. E o Brasil é um dos maiores produtores de café do mundo. E o café arábica e café robusta são os dois mais produzidos no Brasil.

P5: E os brasileiros são os mais que bebem café também. Se não me engano, o segundo maior produtor do mundo.

Figura 72 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P14

“Outro caso seria a produção do café que sem a polinização feita pela as abelhas, teria uma redução de 30% na sua produção”

• A produção de cafés total do Brasil na safra de 2022/23, chegou a uma produção média de 62 milhões de sacas de 60 quilos, onde 67% corresponde ao café arábica e 33% ao café robusta. Suponha que para a safra de 2023/24, a safra não seja polinizada pelas as abelhas, no qual terá um redução de 30% na sua produção, mantendo a mesma proporção na produção dos cafés que a da safra 2022/23. Qual seria o impacto econômico para o Brasil na safra 2023/24 em relação ao café arábica, sabendo que o valor médio da saca de 60 quilos é de R\$ 829,00, sem alterações no valor médio da saca do café. (utilize um valor aproximado)

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, iniciamos um novo diálogo:

PP: Você resolveu este problema?

P14: Primeiro, tem que calcular das 62 milhões de sacas de café, quantas sacas temos de café arábica. Aí, depois, você multiplica por 829 para saber a produção do café arábica na safra 2022/2023...aí, na safra 2023/2024, aplica 30% de 62 milhões e como foi na mesma proporção da safra passada... calcula 67% do resultado que corresponde ao café arábica... depois, vê a diferença de um e outro e multiplica o total de sacas por 829. Vai dar mais de 10 bilhões de reais de impacto.

PP: E como isso pode afetar a vida dos brasileiros?

P14: Vai diminuir a quantidade de funcionários que trabalham com café. Vai aumentar o preço do café nos supermercados. A bolsa trabalha com dólar, a saca era 120 dólares quando pesquisei, aí converti para reais...aí deu 829 reais.

Nesse contexto, a partir do processo de pensamento suscitado por P14, na lousa, registramos a seguinte resolução:

Resolução:

- Produção do café arábica na safra 2022/2023 - 67% de 62.000.000 sacas:

$$\frac{67}{100} \cdot 62.000.000 \text{ sacas} = 41.540.000 \text{ sacas}$$

- A safra 2023/2024 sofre uma redução de 30% ($100\% - 30\% = 70\%$) com relação à safra 2022/2023:

$$\frac{70}{100} \cdot 62.000.000 \text{ sacas} = 43.400.000 \text{ sacas}$$

- Deste total, 67% corresponde ao café arábica:

$$\frac{67}{100} \cdot 43.400.000 \text{ sacas} = 29.078.000 \text{ sacas}$$

- Diferença das safras 2022/2023 e 2023/2024 com relação ao café arábica:

$$41.540.000 \text{ sacas} - 29.078.000 \text{ sacas} = 12.462.000 \text{ sacas}$$

- Perda em reais, com a redução de 30% na produção no café arábica na safra 2023/2024:

$$12.462.000 \cdot 829 \text{ reais} = 10.330.998.000 \text{ reais}$$

Comentário: O interesse do professor-pesquisador em incentivar P14 a pensar e defender uma resolução para o problema que ele mesmo formulou vai além de uma preocupação com processos e conceitos matemáticos. Isso porque a solução encontrada para o problema proposto por P14 precisa ser interpretada em termos de compreensão de questões de natureza sócio-político-cultural, e que emergiram a partir de uma prática que exigiu o posicionamento crítico dos professores.

Chamamos atenção para o trabalho de contextualização desenvolvido por P14, em que, por meio de pesquisas, buscou articular dados reais de forma criativa, como alguns tipos de cafés produzidos no Brasil; a média de preço em reais da saca de café; e a média de produção anual dos tipos de café, sendo mantida a mesma proporção do ano anterior. Ademais, a solução do problema adentra não só ao debate que privilegia aspectos cognitivos, mas, a partir de um olhar com números, expanda-se o nível da discussão, com o tratamento de questões que buscam elucidar o impacto da redução das abelhas na produção do café no Brasil, sobretudo, levando em consideração o quanto tal redução pode afetar a economia brasileira, aumentar o desemprego, a diminuição das exportações de café para outros países e provocar,

consequentemente, o aumento dos preços de café no país. Nesse cenário, ressaltamos, para os professores, que o novo fato acrescentado a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática amplia o movimento de problematização em nível sócio-político-cultural.

Comentário: Notamos que os professores estão incorporando aspectos teóricos que embasam a abordagem de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Em especial, neste caso, entendendo que não devem apenas se limitar a discussões sob a ótica de conceitos matemáticos, mas devem ir mais além, adotando uma postura crítica, como o levantamento, análise e reflexões de questões de cunho sócio-político-cultural.

O desafio de modificar ou acrescentar novos fatos a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática exigiu dos professores criatividade para perceber como dar continuidade aos discursos dos personagens ou modificá-los, de modo a não perder o sentido do espaço-tempo que compõe a trama. Por exemplo, o P5 dá continuidade a uma “fala” de Perobinha, fazendo a leitura do trabalho realizado:

P5: Depois da fala de Perobinha que os meninos derrubaram o pé de caju...eu coloquei aqui:

- Verdade, ele já é bastante inclinado, cortando errado ou muito, independente do lado, ele iria cair – falou Nê.
- Dias atrás, passando nesse cajueiro, percebi que ele deve ter, aproximadamente, 6 metros de altura, porém, sabemos que é maior, pois está muito inclinado – disse Lola.
- Eu acho que a sua sombra deve ter uns 8 metros, observando ao sol do meio dia – disse Perobinha.

Observe todo o trabalho realizado por P5:

Figura 73 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P5

- Verdade, ele já é bastante inclinado, cortando errado ou muito, independente do lado, ele iria cair - falou Nê.

- Dias atrás passando nesse cajueiro percebi que ele deve ter aproximadamente 6 metros de altura, porém sabemos que é maior, pois está muito inclinado - disse Lola.

- Eu acho que a sua sombra deve ter uns 8 metros, observando ao sol de meio dia - disse Perobinha.

O cajueiro, que está inclinado, tem 6 metros de altura do seu ponto mais alto até o chão, e que forma uma sombra de 8 metros. Qual o tamanho do cajueiro?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Posteriormente, o professor-pesquisador comentou que os novos fatos acrescentados por P5 estavam em consonância com a sequência dos diálogos entre os personagens da Narrativa Matemática.

Comentário: Vale ressaltar que não tínhamos antecipado este tipo de direcionamento para esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática. Nesse contexto, destacamos que este momento de refinamento/aprofundamento da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, por ser aberto, porém, com certo nível de intencionalidade, amplia o repertório dos fatos/acontecimentos que levam a diferentes problematizações.

Na sua vez, P3 faz a leitura do acréscimo do novo elemento a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, destacando que: “Para trabalhar com problemas envolvendo capacidade, acrescentei na parte que fala sobre a quantidade litros que Nêm tem” e apresentou a problematização resultante do trabalho realizado. Veja a seguir:

Figura 74 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P3

Sabendo que Nêm só conseguiu netinar 1 litro de mel e distribuirá em copos cuja a capacidade é de 200 mililitros cada um. Quantos copos ele conseguirá encher?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

De imediato, os professores destacaram que serão necessários 5 copos para encher o litro de mel. Em seguida, ressaltamos para eles que tínhamos antecipado a geração de problemas, a partir desta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, envolvendo unidades de capacidade.

Dando continuidade, o P1 acrescenta um novo elemento, buscando contextualizar a quantidade de miligramas de mel produzido por um enxame de abelhas, enfatizando: “Ei, galera, quantas gramas de mel são produzidas em uma colmeia? Questionou Nêm”. Observe todo o trabalho realizado por P1:

Figura 75 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P1

- Ei galera quantas gramas sera que é produzido de mel em uma colmeia? Questionou Nêm!

Problema:

J Em uma colmeia 1000 abelhas produzem 500 miligramas de mel em 5 horas. Quantas miligramas de mel sera produzido em 20 horas?

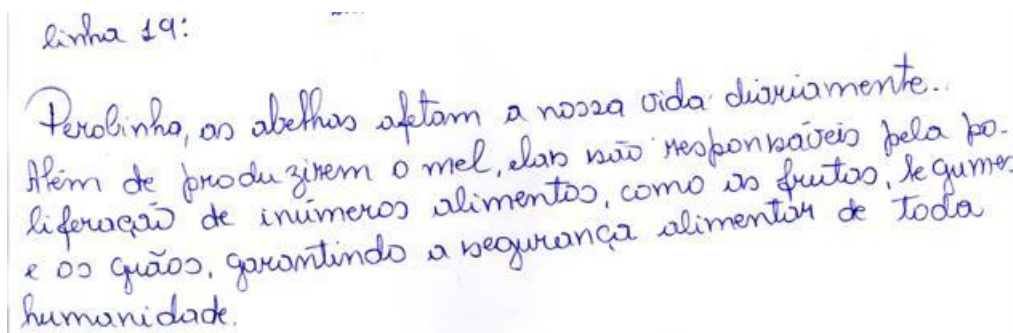
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, questionamos os professores acerca dos conteúdos matemáticos que davam conta deste problema e destacamos a quantidade de miligramas de mel (0,5 mg) que as abelhas operárias necessitam diariamente para percorrer um determinado trajeto em quilômetros (aproximadamente, 24 km por hora) em busca de ingredientes para a produção do mel (Biembengut; Hein, 2003). Acrescentamos, ainda, que os trabalhos realizados por P2 e P3 colocam em foco a obra-prima que é produzida pelas abelhas, isto é, o mel.

Nesse contexto, destacamos, para os professores, que a redução das abelhas acarretará, também, na escassez do mel, afetando, diretamente, a produção de alimentos, bebidas e remédios que adotam o mel em sua composição, sendo este outro debate em âmbito sócio-político-cultural que pode ser discutido com os alunos a partir desta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática.

Diante deste comentário, P9 interveio e ressaltou que o acréscimo do novo acontecimento contextualiza o fato de as abelhas produzirem o mel, bem como outros benefícios que as práticas diárias desenvolvidas pelas abelhas promovem para a vida do ser humano. Assim, P9 explana o trabalho realizado: “Coloquei na fala de Perobinha que questiona: “Preocupados porque iremos ficar sem mel, se caso elas desaparecerem?”, na linha 19”. Veja o trabalho realizado por P9:

Figura 76 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P9



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Após a leitura, questionamos P9:

PP: E qual foi o problema que você formulou?

P9: Qual o impacto, para humanidade, que pode ser ocasionado com o desaparecimento das abelhas?

PP: Ok!

Dando continuidade ao trabalho de acréscimo ou modificação de novos fatos a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, P10 explica seu processo de pensamento:

P10: Na fala de Cesinha, os alimentos vão sumir das prateleiras se as abelhas se acabarem, como no caso da alface, banana e maçã. Eu acrescentei uma fala partindo do pressuposto que ocorreu a redução das abelhas. Em seguida, formulei um problema buscando a lei de formação da função e esbocei o gráfico.

P12: O conteúdo de Função é bom para propor problemas.

P10: Vamos chegar em uma Função Linear. Vai existir uma proporcionalidade que apresentei no gráfico...e, por isso, o problema poderia ser resolvido por regra de três.

PP: Qual o domínio da função?

P10: Os reais positivos.

P9: Não, porque é a quantidade de abelhas...são os inteiros.

P10: Verdade. São os inteiros positivos.

P12: Se o domínio não for infinito, acho que você não pode nem traçar essa reta.

P10: Esse ano eu não sei se consigo devido ao tempo que a gente tem que dedicar à Prova Brasil, mas eu pretendo repensar a minha prática e mobilizar os meus colegas de Matemática para a gente envolver questões ambientais nas aulas de Matemática, criando problemas.

Em seguida, o P10 realizou a leitura de todo o trabalho realizado e os professores solicitaram que ele fosse à lousa apresentar uma solução do seu problema matemático. Veja, a seguir, o acréscimo de novos elementos, o problema proposto e a resolução defendida por ele:

Figura 77 - Acréscimo de uma nova "fala" por P10

PESQUISAS AFIRMAM QUE A REDUÇÃO DAS ABELHAS INTERFERE DIRETAMENTE NA PRODUÇÃO DE ALIMENTOS. CONSIDERANDO QUE A PRODUÇÃO DE ALFACE, BANANA E MAÇÃ (ABM) DEPENDE DA EXISTÊNCIA DAS ABELHAS E QUE UMA POPULAÇÃO DE 10.000 ABELHAS CONTRIBUI PARA A PRODUÇÃO DE 30 KG DE "ABM", DETERMINE:

a) A LEI DE FORMAÇÃO QUE INDICA A QUANTIDADE DE "ABM" EM FUNÇÃO DA POPULAÇÃO DE ABELHAS.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 78 - Problema proposto por P10 com o acréscimo de uma nova "fala" e resolução do item a)

a) A LEI DE FORMAÇÃO QUE INDICA A QUANTIDADE DE "ABM" EM FUNÇÃO DA POPULAÇÃO DE ABELHAS.

RESOLUÇÃO: CONSIDEREMOS QUE A PROPORÇÃO DA QUANTIDADE DE ALIMENTOS EM RELAÇÃO A POPULAÇÃO DE ABELHAS ESTÁ EM $\frac{30}{10.000}$ E QUE $30 = \frac{3}{1000}$ DE 10.000. SENDO ASSIM, $y = \frac{3}{1000}x$

• PROVANDO O QUE FOI AFIRMADO:

$y = ax + b$ FUNÇÃO AFIM

PELO EXPOSTO PODEMOS CONSIDERAR OS PONTOS: A (10.000, 30) e B (5.000, 15)

→ DO PUNTO A, TEMOS: $30 = 10000a + b$ (I) → DO PUNTO B, TEMOS: $15 = 5000a + b$ (II)

• SISTEMA: $\begin{cases} 10000a + b = 30 \\ 5000a + b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10000a + b = 30 \\ -5000a - b = -15 \end{cases}$

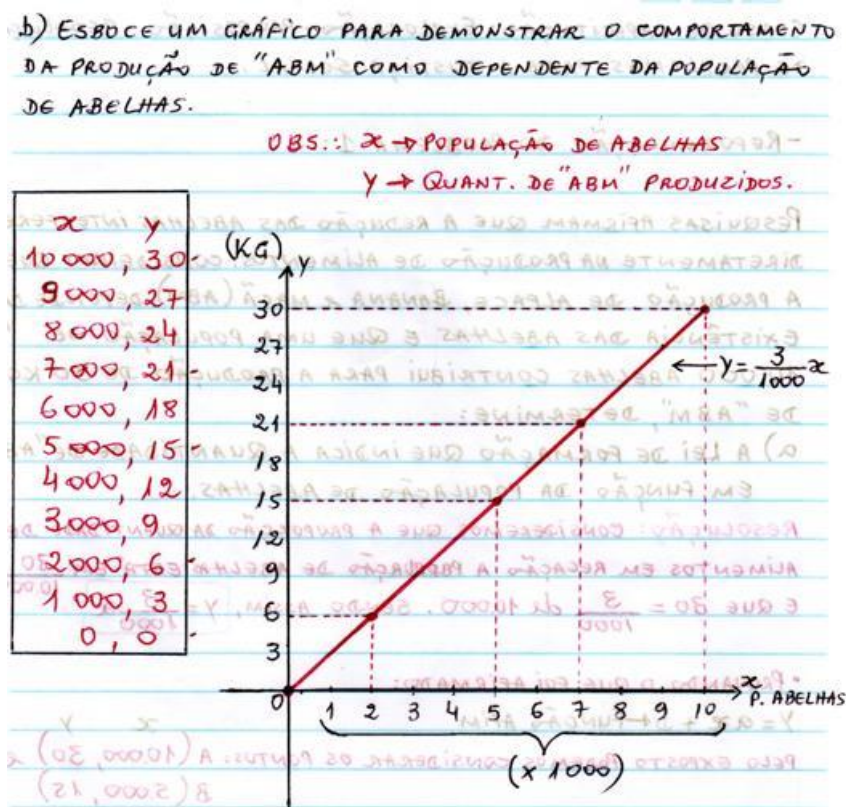
$5000a = 15 \Rightarrow a = \frac{3}{1000}$

• CALCULANDO "b": $5000 \cdot \frac{3}{1000} + b = 15 \Rightarrow 15 + b = 15 \Rightarrow b = 0$

→ PROVOU-SE QUE $y = ax + b$, IDENTIFICA: $y = \frac{3}{1000}x$ (F. LINEAR)

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 79 - Problema proposto por P10 com o acréscimo de uma nova “fala” e resolução do item b)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Com isso, a partir da explicação dada por P10, enfatizamos, para os professores, que este problema poderia ser trabalhado no 1º ano do Ensino Médio, abordando o conceito de Função Linear como um tipo de Função Afim. Além disso, devido à existência de proporcionalidade, seria possível discutir no 7º ano do Ensino Fundamental a ideia de Grandezas Diretamente Proporcionais por meio do cálculo de Regra de Três Simples, isto é, um mesmo problema pode ser trabalhado adotando diferentes níveis de dificuldades.

Ademais, considerando o contexto do problema, não poderíamos considerar o domínio da função sendo os Números Reais, uma vez que a quantidade de abelhas é expressa, essencialmente, por meio de Números Inteiros Positivos. E, ainda, explanamos que a mobilização de diferentes representações múltiplas de funções, tais como: verbal, algébrica, gráfica e a tabular, apresentadas por P10, bem como a transição entre elas, impulsionou uma melhor compreensão do problema, ao promover significados às ideias matemáticas. A implementação da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas “possibilita a compreensão de que mediação do professor é indispensável para facilitar a expressão do pensamento algébrico pelos alunos, seja por meio da oralidade ou da escrita (numérica, algébrica, gráfica, dentre outras)” (Martins, 2024, p. 161).

Posteriormente, foi a vez de P13. Na ocasião, ele explica que acrescentou uma “fala” na atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática que dá continuidade à parte do texto que ressalta que alimentos como alface, banana e maçã desaparecerão das prateleiras com a redução das abelhas, destacando, assim, o trabalho de polinização desenvolvido por elas. Veja o trabalho realizado por P13:

Figura 80 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P13

Assim, se não houver polinização pela falta de abelhas, logicamente haverá diminuição de alimentos.

Se uma colmeia de 5.000 abelhas faz 2km de área no trabalho de polinização dos alimentos. A queda de 200m de área corresponde à redução de quantas abelhas?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Nesse contexto, P12 interveio e destacou que o seu trabalho de exploração da Narrativa Matemática também ressaltou o processo de polinização desenvolvido pelas abelhas, dizendo que: “No parágrafo que falava de polinização...aí não falava muita coisa. Aí, eu pesquisei na internet mais coisas que falavam de polinização para adicionar. Aí, eu peguei essa parte que adicionei e já coloquei como produção da questão”. Veja o trabalho realizado por P12:

Figura 81 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P12

2. A POLINIZAÇÃO É UM PROCESSO FUNDAMENTAL TANTO NOS ECOSISTEMAS TERRESTRES ORGANIZADOS PELA HOMEM QUANTO NO NATURAIS, É NECESSÁRIA PARA A PRODUÇÃO DE ALIMENTOS PARA OS ANIMAIS E PARA AS PESSOAS. SUPONHA QUE DUAS ABEILHAS ESTÃO EQUIDISTANTES DE UMA CERTA FLOR, UMA DAS ABEILHAS ESTÁ NO PONTO $A(-1, 5)$, E A OUTRA NO PONTO $B(-3, 2)$. CONSIDERANDO QUE A FLOR ESTÁ NO PONTO $C(x, 0)$, DETERMINE O VALOR DE x .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Sob essa ótica, o professor-pesquisador explanou que, na busca do néctar, quando as abelhas têm o contato direto com as flores, os pelos do seu corpo ficam repletos de pólen, sendo

este o gameta masculino das flores e, com isso, elas transportam o pólen para o estigma (estrutura reprodutiva feminina das plantas) de outras flores, se dando, assim, o processo de polinização.

Explanamos como se deu o movimento, em que retomamos um problema formulado por P7, visando apresentar a fórmula matemática que calcula Aumentos e Descontos Sucessivos, tomando como ponto de partida algumas alternativas de resoluções defendidas por P7 e P12.

Nesse contexto, por fim, ressaltamos para os professores, que esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática promoveu um debate que contemplou a discussão de conceitos e conteúdos matemáticos. Assim, por meio de uma prática intencionalizada, abordamos: o conceito de razão entre duas grandezas a partir da ideia de Velocidade Média; um pouco da Geometria envolvida no mosaico formado pela repetição de polígonos regulares (hexágonos); ideias essenciais de Função; os conceitos de Taxa Percentual; Aumentos e Descontos Sucessivos e também foram propostos problemas envolvendo conteúdos matemáticos que não tínhamos antecipado: Teorema de Pitágoras e Distância entre dois Pontos.

Ademais, enalteçemos que os professores “embarcaram numa viagem” que teve como prerrogativa a imersão em questões de cunho sócio-político-cultural, em especial, tendo em vista o impacto da extinção das abelhas para o planeta Terra. Nesse sentido, enfatizamos que o nosso interesse com o curso é que os professores se sintam tocados a ir além da Matemática.

Comentário: Observamos que essa forma de conceber uma aula de Matemática desmitificava algumas concepções dos professores sobre o ensino de Matemática, em especial, que uma aula precisa ser reduzida a questões internas a própria Matemática, ou seja, discussões em níveis de processos e conceitos matemáticos. Contudo, notamos que as reflexões geradas com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática levaram os professores a repensarem a sua própria prática, impulsionando, assim, o desenvolvimento profissional destes professores, com a vivência de uma prática de ensino que enfocou não só a dimensão cognitiva do conhecimento matemático, mas extrapolou essa concepção, enfocando a dimensão sócio-político-cultural. Percebemos, ainda, que o nível de interesse e engajamento dos professores em questões cognitivas ou sociais se manteve praticamente o mesmo.

Por fim, debatemos sobre os textos: “*La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores*” (Jurado, 2013a) e “Conceptualizing Problem Posing via Transformation” (Milinković, 2015), que foram solicitados no quarto encontro.

Assim, com relação ao primeiro estudo, discorreu-se sobre os elementos que compõem um problema matemático: informação, requisitos, contexto e ambiente matemático; a variação de um do problema e a elaboração de um problema, como estratégias que podem ajudar a

desenvolver competências para o professor propor problemas para as suas aulas de Matemática, como também para os alunos proporem seus próprios problemas; e razões didáticas promovidas no ato de propor problemas, contribuindo, dessa forma, tanto para os alunos que aprendem quanto para os professores que ensinam Matemática.

Com relação ao artigo de Milinković (2015), discutiram-se as aproximações com o texto de Jurado (2013), uma vez que a pesquisadora defende que, para transformar um problema em um novo problema, basta modificar algum elemento do espaço do problema (o que é dado, dados desconhecidos e contexto). Refletiu-se acerca dos exemplos propostos pela autora, que mostram como essa abordagem pode desenvolver as competências dos professores. Ademais, foi destacado que o texto de Milinković (2015) defende o trabalho de proposição de problemas via transformação de representação, na qual a pesquisadora discorre acerca de distintas representações (gráfica, tabular, verbal, dentre outras), visando impulsionar a geração de problemas matemáticos.

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Unidos de uma prática intencional, retoma-se um problema que foi uma reescrita de P7 diante do problema proposto por P5 no quinto encontro, para evidenciar aos professores como construir a fórmula de aumentos ou descontos sucessivos, a partir das resoluções defendidas por eles;
- Os professores são desafiados a elaborarem uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, mantendo o espaço-tempo que compõe a Narrativa Matemática;
- O uso do *Smartphone* com pleno acesso à *internet* possibilitou a busca de informações/dados que pudessem ser incorporados, de modo a gerar um novo ambiente de problematização na Narrativa Matemática e, com isso, a elaboração de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas;
- A metodologia de Exploração de Problema contribuiu para a análise e a interpretação da solução do problema com foco não apenas em processos e conceitos matemáticos, pois a solução do problema pode refletir o funcionamento de aspectos sociais, políticos e culturais;

- Os professores tiveram a oportunidade de repensar sua própria prática, em especial, refletindo sobre o fato de que uma aula de Matemática não deve se limitar apenas à discussão de processos e conceitos matemáticos, mas deve extrapolar esta concepção com o tratamento de questões de cunho sócio-político-cultural.

7.7 Sétimo episódio de sala de aula (15/07/2023): explorando, propondo e resolvendo problemas a partir da Narrativa Matemática “Mercado de problemas”

Iniciamos o encontro entregando a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, intitulada “**Mercado de problemas**” para cada professor, como material impresso, além de encaminharmos para o grupo do *WhatsApp* o documento no formato PDF. Posteriormente, solicitamos que eles fizessem a leitura e apresentassem suas impressões, curiosidades e reflexões em forma de problemas e os resolvessem.

Mercado de problemas

— Boa noite, pessoal! Vamos jogar o que hoje? Questionou Perobinha!

— Vamos jogar dominó, afirmou PC.

— Ei, Nê, eu passei e vi tu lá no mercado “Preço Imbatível”. Que tumulto era aquele que tinha até polícia? Questionou Perobinha!

— Rapaz, parece que houve um caso de racismo por parte do segurança do mercado “Preço Imbatível” com uma pessoa que estava fazendo compras, afirmou Nê.

Infelizmente, esse tipo de coisa ainda é muito presente em nossa sociedade, afirmei, com tom de indignação. E acrescentei: — Eu li na *internet*⁶⁰ que 7 a cada 10 negros sofrem preconceitos em lojas, restaurantes ou mercados. E li ainda que um levantamento feito por um instituto sobre o racismo nas corporações evidenciou que apenas 4% dos brasileiros se consideram racistas, apesar de a maioria achar que o país é racista.

— Mas o que tu foi comprar no mercado, hein, Nê? Questionou Cesinha!

— Fui comprar batata, explicou Nê!

Sr. Deda se mostrou inconformado, afirmando: — Mas, Nê por que você não comprou na minha vendinha? Não precisava ir para a cidade.

— Qual o valor do quilo de batata no mercado “Preço Imbatível”? Questionou PC!

⁶⁰ Disponível em: <https://exame.com/bussola/7-em-cada-10-negros-sofreram-preconceito-em-loja-restaurant-ou-mercado/>. Acesso em: 13 jan. 2025.

— O quilo custa R\$ 4,00, respondeu Nêm!

Visando convencer a todos que estavam presentes, Sr. Deda explicou: — Na minha vendinha, é R\$ 5,00 o quilo, mas você não vai gastar com transporte.

— Quanto você gastou de gasolina na sua moto? Indagou Perobinha,

— Eu gastei R\$ 6,00 no total, ida e volta, explicou Nêm!

— Acho que a gente precisa analisar onde é vantajoso comprar batata, afirmou Cesinha!

— Sr. Deda, amanhã estou indo comprar batata lá, mas com uma condição - vou dar uma nota de R\$ 20,00 na compra de 1 quilo de batata, e quero o meu troco em moedas de R\$ 0,50 e notas de R\$ 2,00, explicou PC.

— Pode passar lá, PC, que eu dou um jeito, afirmou Sr. Deda!

— Com esse negócio de ser vantajoso ou não, eu lembrei de uma publicação que vi no *Facebook*⁶¹, com milhares de comentários e compartilhamentos, que fazia uma comparação do preço da barra de chocolate e do ovo de páscoa do mesmo sabor. Lá mostrava que o ovo de 500 gramas custava R\$ 49,99 e uma barra de 170 gramas do mesmo chocolate custava R\$ 2,50, explicou Cesinha!

— Eita, eu gosto de chocolate e, agora, fiquei pensando o que é mais vantajoso, apesar de que, em época de páscoa, fica difícil deixar de comprar ovos de páscoa, afirmou Perobinha!

Neste encontro, estavam presentes 12 professores. É importante destacar que esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática foi discutida no decorrer de **três episódios de sala de aula (7º, 8º e 9º)**, com o propósito de abordar os seguintes conceitos e conteúdos matemáticos:

- Trabalhar o significado de Fração como uma Razão, a partir do fato: “7 a cada 10 negros sofrem preconceitos”.
- Transitar entre as diferentes Representações de um Número Racional;
- Discutir ideias essenciais de Função (a partir da situação que envolve a compra das batatas), abordando: lei da função, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio, a imagem e o contradomínio da função, o esboço do gráfico, o significado dos coeficientes angular e linear no contexto dos problemas;

⁶¹ Disponível em:

<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=503972449707775&set=a.315172431921112.62796.100002850746678&type=1&theater>. Acesso em: 13 jan. 2025.

- Abordar o conteúdo de Equação do 1º grau com duas incógnitas a partir do troco das moedas de R\$ 0,50 e notas de R\$ 2,00. Para aprofundar, deve-se discutir as Representações Múltiplas de Álgebra e transição entre elas, tal como fazer conexões com a Geometria associando a posição das retas no plano cartesiano, que possibilite analisar a existência ou não de solução do sistema.

Notamos que os encontros anteriores qualificaram os professores para desenvolverem essa atividade sem precisar tanto da confirmação do professor-pesquisador, assinalando, assim, a autonomia durante o trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas. Desse modo, ao finalizarem a atividade, solicitamos que os professores apresentassem e defendessem todo o trabalho realizado.

O P10 inicia compartilhando para os colegas o trabalho realizado, enaltecendo que a inspiração para a proposição do problema se deu a partir do trecho da Narrativa Matemática que discorre acerca do preço da barra de chocolate e do ovo de páscoa, no entanto, ele explicou que contextualizou sobre o preço do sabão em pó, e que o problema poderia ser resolvido utilizando regra de Três Simples.

Figura 82 - Problema proposto por P10

- O PREÇO DO SABÃO EM PÓ NO MERCADINHO "PREÇO LEGAL", MESMO SENDO DA MESMA MARCA, VARIA DE ACORDO COM O PESO. SABE-SE QUE O SABÃO DE 750g DE PESO CUSTA R\$ 15,00 E O SABÃO DE 500g CUSTA R\$ 10,50. QUE SERÁ MAIS VANTAJOSO COMPRAR, O DE 750g OU O DE 500g?

PROPOSTA: SOLUCIONAR O PROBLEMA POR COMPARAÇÃO.

PERGUNTA-SE: QUANTO CUSTA CADA GRAMA DE SABÃO NAS DUAS EMBALAGENS?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Após a leitura do problema, P10 continua expondo seu processo de pensamento:

P10: Por regra de três, a gente resolve o problema... pelo que analisei aqui, se o preço do sabão de 500g custasse R\$10,00, aí, tanto faz, então, é mais vantajoso comprar o de 750g. Outra forma de resolver seria por razão... Me questionei: **"Quanto custa cada grama de sabão nas duas embalagens?"** No caso, eu fiz aqui a razão entre o preço do sabão e a quantidade de gramas e vi que, para 750g, fica $\frac{15}{750} = 0,02$ (dois centavos) e, para o preço de R\$10,00, vai dar $\frac{10,50}{500} = 0,021$, é mais de dois centavos.

P8: Espera-se ganhar mais na compra de um produto que tem uma quantidade maior de gramas.

P10: Esse problema foi um caso real. A minha esposa pediu para comprar sabão em pó ontem. Aí encontrei duas embalagens que não lembro exatamente os valores e percebi que a gente perdia quando comprava a embalagem de sabão maior. Isso leva a uma discussão social.

P12: É, a gente vê em mercadinhos um pacote de leite de 200g por R\$6,00, aí coloca o de 600g por R\$20,00. Se eu pegar três do pequeno, dá R\$18,00.

P8: Aconteceu isso comigo na compra de água sanitária. Eu fui na intenção de comprar a de dois litros...aí o rapaz que estava na prateleira falou que era melhor levar duas de dois litros, mas eu não olhei o preço, eu só queria pegar a de dois litros porque era maior, mas, quando eu multipliquei o preço de um litro de água sanitária por dois, vi que ele tinha razão. Aí eu fiquei sem entender o porquê, mas depois eu vou perguntar por que está acontecendo isso.

P10: Talvez, a menor estava na promoção.

P12: As empresas lucram muito com isso, porque o povo já vai na embalagem grande por achar que sai mais barato. Às vezes, é mais barato e, às vezes, não.

P9: Uma pessoa que não entende de matemática, não analisa o preço em relação à quantidade.

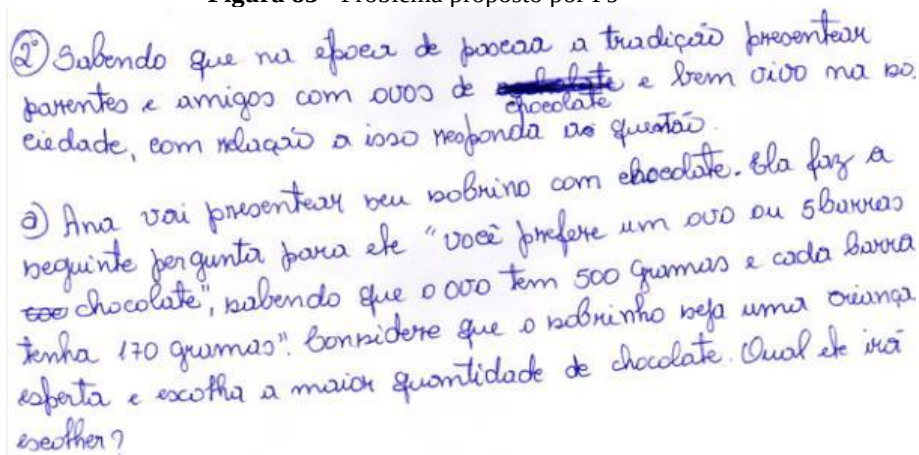
P12: Isso é uma jogada de *marketing*. O povo é que se deixa ser enganado.

Enaltecemos a síntese-trabalho realizada por P10, que propõe um problema mais simples (*Quanto custa cada grama de sabão nas duas embalagens?*), para dar conta do problema inicial, isto é, adota a proposição de problemas durante o processo de resolução e exploração de problemas.

Comentário: Notamos que o problema proposto por P10 promoveu o engajamento dos professores, em que alguns narraram episódios vividos acerca do quanto seria vantajoso (ou não) comprar um determinado produto adotando como critério o tamanho da embalagem, que, por sua vez, promete um melhor custo benefício. Para isso, os docentes se apoiaram na Matemática a fim de analisar o que seria mais vantajoso, sendo esta utilizada como uma ferramenta de combate a injustiças sociais.

Com essa mesma perspectiva, P9 intervém e compartilha o seu trabalho realizado, ressaltando que formulou alguns problemas, e um deles contextualizava a compra da barra de chocolate ou do ovo de Páscoa. Veja a seguir:

Figura 83 - Problema proposto por P9



2) Sabendo que na época de páscoa a tradição presentear parentes e amigos com ovos de ~~chocolate~~ e bem oivo na sociedade, com relação a isso responda as questões.

3) Ana vai presentear seu sobrinho com chocolate. Ela faz a seguinte pergunta para ele "você prefere um ovo ou 5 barras de chocolate", sabendo que o ovo tem 500 gramas e cada barra tenha 170 gramas". Considere que o sobrinho seja uma criança esperta e escolha a maior quantidade de chocolate. Qual ele irá escolher?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, explanamos que, como eles puderam observar via *link*, estas informações referentes à compra da barra de chocolate ou do ovo de páscoa decorrem de uma publicação de um usuário do *Facebook* que teve como finalidade promover uma campanha que influenciasse os demais membros da rede social a pensar criticamente contra os altos preços dos ovos de

Páscoa. Nesse contexto, o problema promoveu um debate de cunho sócio-político-cultural. Observe a seguir:

- PP: O que faz o ovo ser mais caro, com relação à quantidade de barras de mesma marca que você poderia comprar?
 P9: A tradição é dar um ovo em época da Páscoa.
 PP: Vocês acham que ele vai escolher o ovo ou as barras?
 P9: Ele teria que escolher pela quantidade de chocolate no problema.
 P8: Em tempo de Páscoa, é difícil ele escolher a barra.
 P12: Como ele teria que escolher o que tem maior quantidade, então, ele precisa só calcular para ver isso.
 P9: Coloquei dessa forma para o problema ficar fechado, porque, se considerar época de Páscoa, a criança quer o ovo.
 P12: Essa questão da Páscoa, o formato do ovo, chama atenção deles.
 P9: A embalagem colorida também chama atenção. Isso tudo para as empresas ganharem mais.
 P10: Essas datas comemorativas são incentivadas pelo consumismo e pelo capitalismo, por isso, as pessoas compram.

Frisamos que esses são mecanismos de sedução implementados tanto pelo consumismo quanto pelo capitalismo, que buscam cativar e incentivar pessoas a comprarem cada vez mais. Sobre isso, citamos Bauman (2001), que explica que,

Os consumidores podem estar correndo atrás de sensações – **táteis, visuais** ou olfativas – agradáveis, ou atrás de **delícias do paladar** prometidas pelos **objetos coloridos e brilhantes expostos nas prateleiras** dos supermercados, ou atrás das sensações mais profundas e reconfortantes prometidas por um conselheiro especializado (Bauman, 2011, p. 95-96, grifos nosso).

Enaltecemos, ainda, que a ferramenta de pesquisa *Google* serve como um instrumento de vigilância, ajudando a traçar o perfil do consumidor e, por sua vez, as redes sociais (*Facebook, Instagram*, dentre outras) têm um papel relevante nesse processo, uma vez que dispõe dos dados referentes às suas pesquisas recentes, e oferecem, por meio de propagandas, produtos que, aparentemente, são do seu interesse. Esse comentário deu origem a um novo debate:

- P9: Isso acontece comigo direto no *Instagram*. Eu pesquiso algo e aparece.
 P8: No *Hotmail* mesmo, aparecem propagandas. Ele sabe praticamente das conversas da pessoa e o que você pesquisa.
 P9: Porque tudo que você pesquisa no *Google* você quer, né!? E as propagandas que aparecem já facilitam você a consumir.
 P14: Os algoritmos da programação, principalmente quando você dá permissão naqueles aplicativos, aí ele pega seus dados, pois está vendo o que você acessa, com isso, ele sabe o que você pesquisa e seu interesse, então, por isso, vai ficar sempre aparecendo para você propagandas e produtos que você demonstrou interesse. Por isso, hoje em dia, a maioria das empresas estão focando mais nas redes sociais e *internet* do que nos programas de TV.

Após o diálogo, destacamos Bauman (2013, p. 113) que diz que “[...] embora o consumo exija a prazerosa sedução dos consumidores, essa sedução é também resultado de vigilância sistemática numa escala enorme”. Nesse sentido, ressaltamos, para os professores, que as redes sociais aparecem como um dos “trunfos” para que a sociedade de consumo proporcione

oportunidades de as pessoas consumirem, resultando, momentaneamente, em resquícios de felicidades e satisfação que geram a necessidade de satisfazer novos desejos através do ato de consumir.

Por outro lado, argumentamos que a vigilância sobre a satisfação do consumo de ovos oferecidos aos consumidores por diferentes empresas também seleciona as pessoas que estavam insatisfeitas, visto que elas podem contribuir para a má divulgação do produto, disseminando incertezas que atrapalham os mecanismos de motivação ao consumo. Assim, citamos Bauman (2013) que ressalta,

O cenário mais amplo, porém, é este: os efeitos gerais da vigilância do consumidor, em especial por todos os tipos de utilização da internet, não se resumem a selecionar positivamente os consumidores satisfeitos e prometer-lhes futuros benefícios e recompensas, mas incluem selecionar negativamente os que não se conformam às expectativas (Bauman, 2013, p. 115).

Nesse caso, os consumidores podem buscar alternativas que possam ajudar a economizar e atender às expectativas das crianças com relação às comemorações de Páscoa. Nessa direção, P2 e P5 formularam problemas com essa intenção. Observe os diálogos e os problemas propostos:

P2: Achei muito barato 170g por R\$ 2,50. Por isso, modifiquei o preço no meu problema.

PP: De fato, a empresa publicou uma nota, enfatizando que a barra custava R\$ 4,69.

P5: Depois que fiz esse problema, foi que vi que faltou especificar que os ovos que eu ia fazer era de 500g e a barra de 170g.

PP: Por que você cogitou a possibilidade de fazer o ovo em casa?

P5: A ideia é que ele iria economizar, considerando esses preços que foram destacados no texto. Com três barras, já dá o ovo.

P14: No caso, no problema de P2, tem o gasto com a confeitadeira. E, mesmo assim, ainda é mais vantajoso comprar a barra.

PP: Você resolveu o problema P2? De fato, é melhor comprar as barras do que fazer os ovos com a confeitadeira?

P2: Resolvi mentalmente e, para facilitar, eu coloquei a barra de 125g. Assim, 4 barras correspondem a um ovo de 500g. Se fosse usar barras de 170g, iria complicar. Com R\$ 1.000,00, ele só conseguiria comprar 20 ovos de 500g no mercado. Já mandando a confeitadeira fazer, ele vai gastar R\$ 350,00 com ela, e sobra R\$ 650,00 para gastar com as barras. O ovo feito com chocolate das barras custa R\$ 10,00, porque são 4 barras e cada barra custa R\$ 2,50 e $650 \div 10 = 65$ ovos, ou seja, 45 ovos a mais.

P13: Mas só compra o ovo em tempo de páscoa?

P14: Necessariamente, não, mas nesse período é muito comum você encontrar ovos nos supermercados e coelhinhos de Páscoa.

P2: A cultura é de presentear as pessoas com ovo durante a época de Páscoa.

P5: Virou um comércio.

P14: Isso é mecanismo do capitalismo.

P13: O capitalismo foca na época e no tempo de determinada festa para vender. O preço pode estar ligado a marca...às vezes, ligado aonde você comprou. É diferente se você comprar no *shopping* ou no “no meio da rua”. As promoções são algo do consumismo e fazem com que você seja atraído...é uma espécie e imã.

Figura 84 - Problema proposto por P5

4- Carolina vizando economizar comprou uma forma para fazer seus ovos de páscoa, para presentear seus 6 familiares. A forma custou R\$ 9,00. Quantas barras de chocolate ele precisará comprar para fazer os 6 ovos e quanto ele economizou?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 85 - Problema proposto por P2

I) Uma ONG está prestes a distribuir ovos de páscoa a crianças carentes, onde, no mercado, a unidade de um ovo de 500g é de R\$ 49,99. Ela considerou o valor muito alto e buscou outra alternativa que era comprar barras de chocolate de ~~100g~~^{125g} no valor de R\$ 2,50 cada, porém, para isso uma confeitaria cobrava R\$ 350,00 pelo serviço ~~de~~^{de} ~~at~~. Supondo que a ONG deseje gastar R\$ 1000,00 com ovos de páscoa, de 500g cada, ~~quantas~~^{quantas} barras de ~~100g~~^{125g}, quantos ovos ela utilizando conseguirá obter a mais do que se fossem comprados ~~se~~^{se} prontos no mercado?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Contudo, argumentamos que os pais têm dificuldades de mostrar às crianças que os ovos “não valem o que pesam”, pois a sedução advinda da embalagem, do formato do ovo e da “magia da Páscoa” implica na necessidade de consumir, como foi destacado pelos professores. Nesse contexto, expusemos a necessidade de conscientizarmos as crianças, por meio da Matemática, enfatizando que o sabor da barra (plano) e do ovo (côncavo) é exatamente mesmo, independentemente do formato, e que a escolha pelo ovo pode acarretar em um custo de 300% ou até 400% mais caro, como mostraremos na nota publicada pela empresa a seguir.

Comentário: A Matemática utilizada como um meio de identificar e combater injustiças sociais promove, no estudante, a ascensão à cidadania, uma vez que seu engajamento crítico resulta na transformação do contexto social, político e cultural que ele está inserido.

Destacamos, para os professores, que a dimensão tomada pela campanha feita no Facebook foi significativa, de tal forma que chamou a atenção de uma grande empresa, e esta sentiu a necessidade de dar explicações sobre o preço dos ovos aos seus consumidores, isto é,

a empresa esclareceu, por meio de uma nota⁶², que os preços corretos seriam R\$ 46,19 pelo ovo de 500g e R\$ 4,69 pela barra de 170g, e que os ovos de Páscoa são mais caros pelos seguintes motivos:

- I. São feitos para presentear e encantar;
- II. Sua produção e distribuição depende de contratação de mão de obra temporária;
- III. Embalagens especiais e processo manual de embalagem;
- IV. Armazenamento e transportes especiais.

Com relação ao trecho da atividade de exploração, proposição, resolução e proposição de problemas no formato de Narrativa Matemática que expressa duas opções para compra de batatas, observamos que se propôs uma quantidade importante de problemas. Alguns dos professores tomaram como ponto de partida os dados referentes a Narrativa Matemática, já outros acrescentaram novos elementos durante o movimento de exploração-problematização-proposição de problemas.

Nesse contexto, P4, P5, P6, P7, P8 e P14 requerem, de modo geral, que seja calculado até quantos quilogramas de batatas se torna vantajoso comprar na vendinha do Sr. Deda; até quantos quilogramas de batatas as duas opções se equivalem; e a partir de quantos quilogramas de batatas, a melhor opção é o mercado “Preço Imbatível”. Sobre isso, P4 justifica que usou o termo “*desvantagem financeira*” e a ideia matemática que pode ser utilizada para resolver o problema, ao explicar que: “*podemos determinar intervalos e utilizar uma inequação e como eu estou querendo saber a quantidade máxima que ele pode comprar na vendinha do Sr. Deda, então, até 6kg, não seria desvantagem comprar na vendinha do Sr. Deda*”, e ainda P4 recomenda fazer “*uma representação gráfica relacionando o custo para a compra de batatas em ambos estabelecimentos*”, já P5 também problematiza: “*onde seria mais vantajoso comprar 2kg de batatas*”, P7, por sua vez, indaga em quais das duas opções seria mais vantajoso comprar 1kg de batatas.

⁶² Disponível em: <<https://epocanegocios.globo.com/Informacao/Acao/noticia/2014/04/nestle-explica-por-que-ovo-de-pascoa-e-mais-carro-que-barra-de-chocolate.html>>. Acesso em: 13 jan. 2025.

Figura 86 - Problema proposto por P4

NEM COSTUMA FAZER COMPRAS NA VENDINHA DO SR DEDA. PORÉM, ESTE MÊS, ELE TOMOU CONHECIMENTO DE QUE NO MERCADO "PREÇO IMBATÍVEL" ESTÁ HAVENDO UMA PROMOÇÃO NO QUILOGRAMA DA BATATA QUE ESTÁ ^{sendo} OFERTADO A R\$ 4,00 O QUILO, UM REAL A MENOS QUE NA VENDINHA DO SR DEDA ONDE O PREÇO ESTÁ R\$ 5,00 O QUILO.

SABENDO-SE QUE NEM TERÁ UMA DESPESA DE R\$ 6,00 COM TRANSPORTE CASO OPTE PELA COMPRA NO MERCADO "PREÇO IMBATÍVEL", QUAL SERÁ A QUANTIDADE MÁXIMA DE BATATA, EM QUILOGRAMA, QUE NEM PODERÁ COMPRAR NA VENDINHA DO SR DEDA DE TAL MODO QUE NÃO HAJA DESVANTAGEM FINANCEIRA EM RELAÇÃO AO MERCADO "PREÇO IMBATÍVEL"? FAÇA UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA RELACIONANDO O CUSTO PARA COMPRA DE BATATAS EM AMBOS ESTABELECIMENTOS.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 87 - Problema proposto por P5

2- A batata no mercado "Preço Imbatível" é R\$ 4,00, na vendinha do Sr. Deda custa R\$ 5,00. Levando em consideração o custo fixo de R\$ 6,00 do deslocamento até a cidade, onde seria mais vantajoso comprar 2kg de batatas? Quantos quilos de batata seria mais vantajoso se deslocar até a cidade?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 88 - Problema proposto por P6

② NEM, COLEGA DO SR DEDA, ESTÁ INTERESSADO EM COMPRAR BATATAS, E POSSUI DOIS POSSÍVEIS LUGARES PARA COMPRAR

OPÇÕES	VALOR DO KG EM R\$	CUSTO ADICIONAL
SR DEDA	5,00	-
SUPERMERCADO	4,00	6,00

* A PARTIR DE QUANTOS QUILOGRAMAS DE BATATA SERÁ BENEFÍCIO NEM COMPRAR NO SUPERMERCADO?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 89 - Problema proposto por P7

III) CONSIDERANDO OS VALORES DOS PRODUTOS CITADOS NO TEXTO, BATATA R\$ 4,00 (SUPERMERCADO PREÇO IMBATÍVEL), BATATA R\$ 5,00 (VENDINHA DE SEU DEDA) E GASOLINA R\$ 6,00. QUANTOS QUILOS DE BATATA SERIAM NECESSÁRIO COMPRAR PARA QUE OS CUSTOS DAS COMPRAS SEJAM EQUIVALENTES? NO CENÁRIO DE PREÇOS CITADO ANTERIOR-
MENTE É MAIS VANTAJOSO COMPRAR UM QUILOGRAMA DE BATATA NO "MERCADO" OU NA "VENDINHA"? NAS DUAS SITUAÇÕES CONSIDERE O TRANSPORTE FEITO DE MOTO DO SÍTIO AO MERCADO "PREÇO IMBATÍVEL".

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 90 - Problema proposto por P8

NEM FOI ATÉ O MERCADO PREÇO IMBATÍVEL COMPRAR BATATAS QUE CUSTAM R\$ 4,00 O QUILO. COMO ELE FOI DE MOTO, TEVE GASTOS COM GASOLINA, OU SEJA, R\$ 6,00 PARA IR E VOLTAR. SENHOR DEDA VENDE BATATAS NA SUA VENDINHA POR R\$ 5,00 O QUILO, E SUA VENDA FICA LOCALIZADA NO MESMO SÍTIO QUE NÊM MORA. PARTINDO DESSAS INFORMAÇÕES, DETERMINE QUANTOS QUILOS DE BATATAS NÊM VAZER QUE COMPRAR NO MERCADO PREÇO IMBATÍVEL PARA QUE SEJA MAIS VANTAJOSO PARA ELE COM RELAÇÃO À VENDINHA DO SENHOR DEDA.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x + 6 & g(x) &< f(x) \\ g(x) &= 5x & 5x &< 4x + 6 \\ & & 5x - 4x &< 6 \\ & & x &< 6 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 91 - Problema proposto por P14

Em um certo dia o jovem "Nim", que mora na zona rural, foi a cidade comprar batatas no mercado "Preço Imbatível", ele comprou um quilo de batata que custa R\$ 4,00 e o custo do transporte para ir e vir a cidade custa R\$ 6,00. Enquanto na vendinha de Sr. Deda, que está localizada na mesma região que Nim mora, o custo do quilo da batata custa R\$ 5,00 o quilo. De acordo com essas informações, com quantos quilos de batata seria mais vantajoso comprar no mercado do que na vendinha.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Os trabalhos de proposição de problemas realizados pelos professores em torno da situação envolvendo as opções para a compra de batatas podem ganhar diferentes formatos, uma vez que entendemos que as sínteses-trabalhos tendem a ampliar o debate, tanto em nível de processos e conceitos matemáticos quanto em âmbito sócio-político-cultural.

A seguir, apresentaremos os diálogos que explicitam como se deu o processo de pensamento e descobertas dos professores durante todo o trabalho realizado:

PP: O que é mais vantajoso: comprar na vendinha do Sr. Deda ou no mercado “Preço Imbatível”?

P8: Ele precisa ver a quantidade que ele deve comprar para ser vantajoso sair do sítio para comprar na cidade.

P9: No caso, é a quantidade mínima.

PP: Onde é mais vantajoso comprar 2kg de batatas?

P14: Ele iria gastar R\$10,00 na vendinha de Sr. Deda e R\$14,00 no mercado da cidade. Neste caso, é melhor a vendinha de Sr. Deda.

PP: Qual a ideia matemática que utilizamos para resolver este problema?

P8: Eu coloquei duas funções: $f(x) = 5x$ e $g(x) = 4x + 6$ e fiz uma maior ou menor do que a outra, ou seja, uma inequação.

P14: Seria interessante representar graficamente.

Assim, fomos à lousa e registramos a resolução de forma algébrica defendida por P8 diante do problema proposto, veja a seguir:

$$g(x) < f(x)$$

$$5x < 4x + 6$$

$$5x - 4x < 6$$

$$x < 6$$

Posteriormente, P8 interpreta a resolução dada ao problema:

P8: Se ele comprar 6 quilos, ele vai pagar a mesma coisa. Ele tem que comprar mais de 6 quilos para ser mais vantajoso ir para cidade, porque, se ele comprar 6 quilos, vai pagar R\$ 30,00 tanto no sítio como na cidade. Já se ele comprar 7 quilos, vai pagar R\$ 35,00 no sítio e R\$ 34,00 na cidade.

Professores: Acima de 6 quilos, é mais vantajoso comprar no mercado na cidade.

Em seguida, P12 interveio, destacando que formulou um problema referente à compra de batatas, mas acrescentou novos elementos. Veja a seguir:

Figura 92 - Problema proposto por P12

o Sr. Deda possui uma quintanda, ele vende 3kg de batata por R\$ 11,40 e 5kg de macaxeira por R\$ 21,00, ele precisa comprar os produtos para revender, o mesmo compra 4kg de batata por R\$ 9,20 e 6kg de macaxeira por R\$ 18,60. Suponha que o Sr. Deda tenha comprado 80kg de batata e 50kg de macaxeira, qual o lucro total que ele irá obter com a venda de todo o produto?

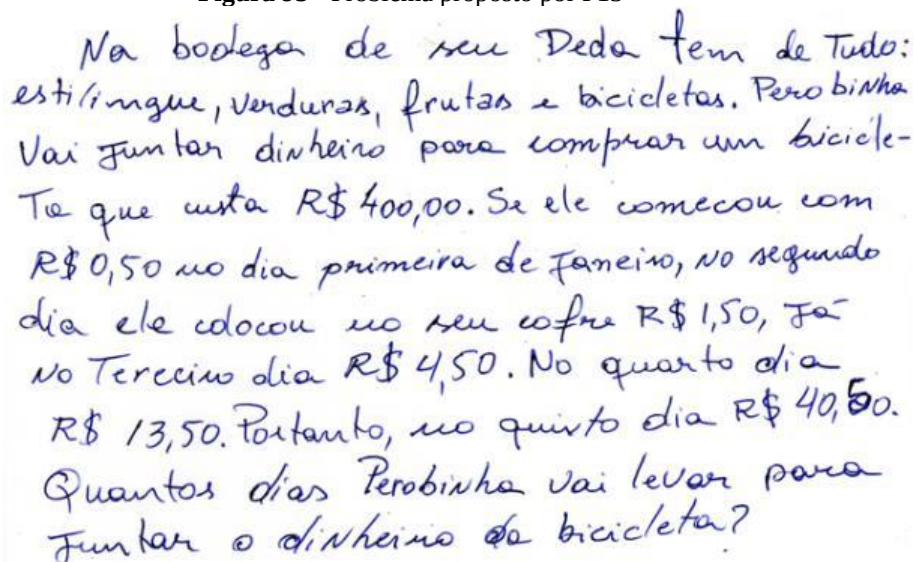
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Percebe-se, que P12 avançou ao trazer novas informações, não se limitando aos dados da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática e, consequentemente, modificou o ambiente matemático, oportunizando, assim, a discussão de novas ideias

matemáticas. Além do mais, foi criativo na articulação de alguns elementos que compõem a redação de um problema matemático, como informação e o requisito (Jurado, 2013a, 2013b, 2017).

Por sua vez, P13 formulou um problema contextualizando a vendinha do Sr. Deda, enfatizando diferentes produtos que são oferecidos na vendinha. Veja o problema proposto por P13 a seguir:

Figura 93 - Problema proposto por P13



Na bodega de seu Deda tem de Tudo: estilingue, verduras, frutas e bicicletas. Perobinha vai juntar dinheiro para comprar um bicicleta que custa R\$ 400,00. Se ele começou com R\$ 0,50 no dia primeira de Janeiro, no segundo dia ele colocou no seu cofre R\$ 1,50, já no Terceiro dia R\$ 4,50. No quarto dia R\$ 13,50. Portanto, no quinto dia R\$ 40,50. Quantos dias Perobinha vai levar para juntar o dinheiro da bicicleta?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O professor-pesquisador sentiu a necessidade de intervir, questionando os professores acerca da formulação bem-sucedida do problema. Observe o diálogo a seguir:

PP: O que vocês percebem sobre a formulação deste problema?

P12: É um problema de P.G, com razão 3.

PP: Mas vocês acham que são necessárias mais informações?

P14: Talvez, deixar claro que a razão vai se manter, porque do jeito que está aí não dá para garantir isso.

Com a intenção de discutir acerca do significado de Fração como uma Razão e ainda propiciar um debate sobre o tema Racismo, solicitamos que os professores propuseram problemas envolvendo este fato de Narrativa Matemática e os compartilhassem com os colegas. Observe os diálogos que surgiram sobre o processo de proposição de problemas, bem como reflexões que enfocam o Racismo, com os problemas propostos por P5, P6, P7 e P9.

P5: Eu fiz uma pesquisa primeiro para saber o total de habitantes no Brasil.

P9: Eu criei outro problema. Esse foi sobre o racismo.

P7: No meu primeiro problema, eu considerei uma cidade com 10.000 habitantes. Como 7 em 10 é mesma coisa que 70%, então, basta calcular 70% de 10.000. No segundo, eu quero saber quantos habitantes brasileiros se consideram racistas, sabendo que 4% da população brasileira se considera racista.

P8: Esse problema é interessante porque você vai ver que a porcentagem de pessoas que são racistas é muito menor do que a quantidade de pessoas que sofrem racismo, ou seja, tem gente que propaga o racismo, e não se considera racista.

Figura 94 - Problema proposto por P5

1- Segundo o IBGE (2021) a população brasileira é de 214 milhões de habitantes, e que 54,1 são negros. Baseado no texto onde 7 em cada 10 pessoas negras já sofreram racismo. Qual a quantidade de brasileiros que já sofreram racismo?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 95 - Problema proposto por P7

① VAMOS NO TEXTO QUE UM DOS PERSONAGENS DESTACA: "LI NA INTERNET QUE 7 A CADA 10 NEGROS SOFREM PRECONCEITOS EM LOJAS, RESTAURANTES E MERCADOS.". CONSIDERANDO UMA CIDADE COM 10 MIL HABITANTES NEGROS E QUE ESSES HABITANTES FREQUENTAM LOJAS, RESTAURANTES E MERCADOS. CALCULE A QUANTIDADE DE HABITANTES NEGROS QUE SOFREM ALGUM TIPO DE PRECONCEITO TOMANDO COMO BASE A REFERÊNCIA PERCENTUAL DO TRECHO DO TEXTO.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 96 - Problema proposto por P9

① De acordo com o texto a cada 10 pessoas negras 7 delas sofrem preconceitos em lojas, restaurantes ou mercado. Dado que no Brasil temos um total de 214,3 milhões de habitantes e apenas 4% dos brasileiros se consideram racistas.

- a) Qual a quantidade de pessoas que se considera racista?
- b) A partir dos dados é correto afirmar que o Brasil é racista?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Com interesse de abordar o significado de Fração como uma Razão, questionamos aos professores:

PP: O que significa, matematicamente, 7 a cada 10?

Professores: $\frac{7}{10}$

P10: Se pensarmos em porcentagem, será 70%.

Professores: Tá tendo uma conexão com a ideia de razão e proporção.

PP: E que outras conexões que vocês percebem?

Professores: Com a ideia de Fração.

Nesse contexto, entrevistamos e ressaltamos que essa compreensão decorre de um raciocínio proporcional, isto é, para cada 10 habitantes brasileiros, 7 sofrem algum tipo de racismo ($\frac{7}{10}$), bem como ocorreu uma comparação entre as medidas de duas grandezas de mesma natureza, o que implica que, neste caso, a representação $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ está associada à concepção de razão. Ademais, frisamos que essa apreensão com relação aos problemas envolvendo frações culmina no significado de Fração como uma Razão. Sobre isso, citamos Silva (2005, p.125),

As tarefas que associam a concepção de razão podem comparar grandezas de mesma natureza ou não, em contextos contínuos e ou discretos, podendo ainda estar associadas a situações do tipo: todo-todo – quando compara as quantidades de dois inteiros; parte-parte – quando compara as quantidades de duas partes de um inteiro ou partes de dois inteiros, ou ainda, parte-todo.

Destacamos, ainda, para os professores, que o debate em nível cognitivo resultou em diferentes representações de um Racional (fracionária, decimal e percentual), bem como da transição entre estas representações, impulsionando a resolução dos problemas propostos, de modo a relevar *insights* acerca da geração de novos problemas que qualificam o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas.

O trecho da Narrativa Matemática que enfocava o troco que Sr. Deda deveria repassar no ato da compra em sua vendinha é entendido por nós como uma excelente oportunidade para os professores proporem problemas.

Sobre isso, P1 formulou um problema que consistiu na problematização referente ao troco que PC iria receber com a compra de 1kg de batatas, considerando todas as informações da Narrativa Matemática.

Figura 97 - Problema proposto por P1

PC foi a vendinha do Sr. Deda comprar 1 quilo de batata que custava R\$ 5,00, e no pagamento ele deu uma nota de R\$ 20,00 e pediu o seu troco em moedas de R\$ 0,50 e em notas de R\$ 2,00. Quantas moedas e moedas ele irá receber?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Ressaltamos, ainda, o trabalho de exploração-problematização-proposição de problemas desenvolvido por P5, que levantou uma sequência de problemas possibilitando a abordagem de uma ideia matemática com profundidade. Veja, a seguir, o registro do trabalho de proposição de problemas realizado por P5:

Figura 98 - Problema proposto por P5

3- PC vai comprar batatas ao Sr. Deda, que custa R\$ 5,00 o quilo, ele vai comprar apenas um quilo e pagar com cédula de R\$ 20,00 e quer receber o troco em moedas de R\$ 0,50 e cédulas de R\$ 2,00. Qual a quantidade mínima de moedas e cédulas que ele irá receber? Se PC recebeu R\$ 5,00 em moedas e o restante em cédulas. Quantas moedas e cédulas ele recebeu? PC quer receber apenas R\$ 4,00 em moedas e o restante em cédulas. Isso é possível? Explique

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: A prática de um professor explorador-problematizador consiste em procurar caminhos e possibilidades que tornem a situação-problema sempre possível de ser aprofundada, tanto com a implementação de diferentes processos/procedimentos de resolução dos problemas, bem como com a geração de novos problemas que qualificam o processo de exploração de problemas.

Após a leitura da sequência de problemas, notamos que o primeiro problema não estava bem claro e questionamos o que estava sendo solicitado no problema, isto é, se requeria a quantidade mínima de moedas e o restante em cédulas, e se também solicitava-se a quantidade máxima de moedas e a quantidade mínima de cédulas. Assim, recomendamos que P5 defendesse o trabalho realizado:

PP: Como você pensou esse primeiro problema?

P5: Primeiro, vai ser a quantidade mínima de moedas, e a outra situação é quantidade mínima de cédulas.

PP: Qual será a quantidade mínima de moedas e máxima de cédulas?

P5: No caso, será um real de moedas, ou seja, duas moedas de R\$ 0,50 e sete cédulas de R\$ 2,00.

PP: E a quantidade máxima de moedas e mínima de notas?

Professores: Vinte seis moedas de R\$ 0,50 e uma cédula de R\$ 2,00.

PP: Isso!

Em seguida, iniciamos o debate sobre o último problema proposto por P5: *“PC quer receber apenas R\$ 4,00 em moedas e o restante em cédulas. Isso é possível? Explique!”* Veja o diálogo a seguir:

PP: Nesse caso, é possível, pessoal?

P14: Não, porque ficaria R\$ 11,00 para receber em cédulas de R\$ 2,00.

PP: Se fôssemos propor um novo problema para que o troco fosse possível, como ficaria?

P8: Dava certo se o troco fosse R\$ 3,00.

P7: Poderia ser R\$ 3,00 ou R\$ 5,00.

PP: Que conjectura podemos levantar, ou seja, quando a soma entre moedas e cédulas vai resultar em R\$ 15,00. A gente notou que é impossível receber o troco de R\$ 4,00 em moedas?

P5: O valor do troco em moedas tem que ser um número ímpar, como, por exemplo, R\$ 3,00 e R\$ 5,00.

P12: Para a soma dar 15, tem que ser um número ímpar somado com um número par.

PP: Isso funciona mesmo? E se ele recebesse R\$ 7,00 em moedas, é possível receber o restante em notas de R\$ 2,00?

Professores: Seriam quatro notas de R\$ 2,00.

PP: Qual conteúdo matemático estamos trabalhando com estes problemas?

P14: Pensando no Ensino Fundamental, Equações do 1º grau.

PP: Como podemos representar algebricamente, ou seja, por meio de uma equação o problema proposto por P1?

P14: $0,5x + 2y = 15$.

PP: E como podemos representar o segundo problema proposto por P5 e o problema proposto por P4?

Professores: $2y + 5 = 15$ e $0,5x + y = 15$.

Enfatizamos, para os professores, que a situação envolvendo o troco das moedas pode despertar o interesse dos alunos ao envolvê-los com algo do seu cotidiano (dinheiro) e propiciar ao professor um ambiente fértil para a geração de uma gama de problemas.

Diante das diferentes sínteses-reflexões em torno dos problemas propostos, enalteçamos o debate em âmbito sócio-político-cultural que emergiu a partir de problemas que trouxeram à tona alguns mecanismos de motivação ao consumo, como: embalagens coloridas, o formato do ovo e a “magia da Páscoa”, que são amplamente difundidos pelo consumismo e pelo capitalismo, para incentivarem, neste caso, as pessoas a comprarem ovos de Páscoa, sendo temáticas que estão diretamente relacionadas à transição da modernidade sólida para a modernidade líquida (Bauman, 2001, 2014).

Destacamos, também, que alguns dos professores propuseram diferentes problemas referentes aos distintos diálogos a partir da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, isto é, conseguiram fazer conexões do enredo com conceitos e conteúdos matemáticos e com questões de cunho sócio-político-cultural. Ressaltamos que, por meio de uma prática intencionalizada, percebendo o potencial de alguns problemas, retomariamos alguns deles para aprofundar o debate em nível cognitivo.

Finalizamos o encontro, solicitando que os professores realizassem a leitura do artigo “*A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference*” (Uma coleção de experiências de Proposição de Problemas para futuros professores de matemática que fazem a diferença), escrito por Sandra Crespo (Crespo, 2015).

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- A partir de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, os professores operacionalizam a Proposição de Problemas antes do processo de resolução e exploração de problemas, colocando suas impressões, curiosidades e reflexões em forma de problemas e os resolvendo;
- Os professores demonstram competências no processo de proposição de problemas, de modo a não precisarem tanto da confirmação do professor-pesquisador diante do trabalho realizado;
- A discussão da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas contribuiu para os professores perceberem que podem elaborar uma atividade a partir de experiência real vivida, que sinaliza (in)justiça social e promove a Matemática como uma ferramenta para combater injustiças;

- A proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas viabiliza a discussão de ideias essenciais de Função a partir dos problemas propostos pelos professores envolvendo a compra de batatas e as Representações Múltiplas de Álgebra a partir dos problemas relacionados ao troco no ato da compra das batatas;
- Por meio de um problema proposto por um professor, discute-se o significado de Fração como uma Razão, bem como diferentes Representações de um Número Racional (fracionária, decimal e percentual);
- A metodologia de Exploração de Problemas potencializa o debate de questões que envolvem temas diretamente relacionados à transição da modernidade sólida para a modernidade líquida: o capitalismo e o consumismo.

7.8 Oitavo episódio de sala de aula (22/07/2023): refinando/aprofundando a Narrativa Matemática “Mercado de problemas”

No último encontro, foram propostos diferentes problemas, nos quais tínhamos a intenção de aprofundar alguns deles em nível de processos e conceitos matemáticos. Na ocasião, observamos que os problemas referentes à compra de batatas poderiam ser discutidos com profundidade. Embora tenha havido avanços significativos, uma vez que sugeriram algumas Representações Múltiplas de Função (verbal, numérica e algébrica), bem como foi promovido o trânsito entre elas, entendíamos que poderíamos intensificar o movimento de exploração, proposição e resolução de problemas.

Comentário: Compreendemos o processo de retomada de um problema ou situação-problema como um elemento que amplia e aprofunda o significado de ideias matemáticas durante o caminhar de exploração de problemas. Além do mais, potencializa o processo da metacognição, ao trazer à tona todo o trabalho já realizado, se monitorando sobre como e por que foram promovidos diferentes trabalhos-sínteses-reflexões; e autorregulando o processo de pensamento, escolhendo alternativas ou mudanças que ajudam a continuar avançando, seja com a apresentação de uma resolução alternativa para o problema em foco ou com a geração de novos problemas.

Notamos que alguns professores (P4 e P14) sugeriram uma representação e análise gráfica dos problemas que envolviam a compra de batatas na vendinha do Sr. Deda ou no mercado “Preço Imbatível”. Nesse contexto, para este encontro, fizemos uso da calculadora gráfica *Desmos*. Embora tenhamos utilizado essa ferramenta em alguns dos encontros anteriores, ressaltamos aos professores que, na ocasião, o foco não foi ver como a calculadora gráfica *Desmos* poderia potencializar o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas, sendo este o nosso interesse vigente. Vale destacar que, neste encontro, estavam presentes 10 professores.

Diante do que foi exposto acima, selecionamos o problema: “*Nêm costuma fazer compras na vendinha do Sr. Deda. Porém este mês, ele tomou conhecimento de que o no mercado “Preço Imbatível” está havendo uma promoção no quilograma de batata que está sendo ofertada a R\$ 4,00 o quilo, um real a menos que na vendinha do Sr. Deda onde o preço está R\$ 5,00 o quilo. Sabendo que Nêm terá uma despesa de R\$ 6,00 com transporte caso opte pela compra no mercado “Preço Imbatível”, qual será a quantidade máxima de batata, em quilograma, que Nêm poderá comprar na vendinha do Sr. Deda, de tal modo que não haja desvantagem financeira em relação ao mercado “Preço Imbatível”? Faça uma representação gráfica relacionando o custo para compra de batatas em ambos estabelecimentos*”, formulado por P4.

Retomamos as descobertas realizadas pelos professores no último encontro, que denotaram a Função Afim $f(x) = 5x$, como uma representação algébrica da situação que envolve a compra de batatas na vendinha do Sr. Deda, e a Função Afim $g(x) = 4x + 6$, correspondendo à compra de batatas no mercado “Preço Imbatível”. Ademais, manipulando algebricamente, por meio de uma inequação, os professores defenderam que $x < 6$, isto é, na compra acima de 6kg de batatas, seria mais vantajoso comprar batatas no mercado “Preço Imbatível”; e até 6kg as opções de compra de batatas se equivalem em termos de preço em reais.

Desse modo, iniciamos o processo de exploração do problema, sugerindo a construção de uma tabela (representação tabular). Assim, na lousa, com a ajuda dos professores, atribuímos os seguintes valores para as variáveis x e y :

Quadro 16 - Representação tabular referente aos valores do quilograma de batatas

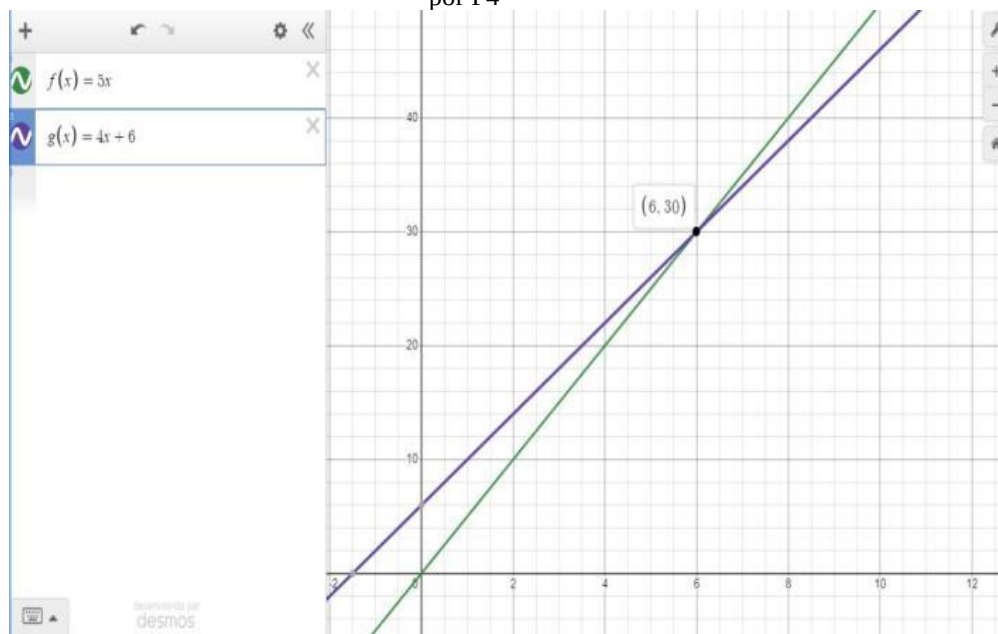
X	$y = f(x) = 5x$	$y = g(x) = 4x + 6$
0	$f(0) = 5 \cdot 0 = 0$	$g(0) = 4 \cdot 0 + 6 = 6$
1	$f(1) = 5 \cdot 1 = 5$	$g(1) = 4 \cdot 1 + 6 = 10$
2	$f(2) = 5 \cdot 2 = 10$	$g(2) = 4 \cdot 2 + 6 = 14$
3	$f(3) = 5 \cdot 3 = 15$	$g(3) = 4 \cdot 3 + 6 = 18$
4	$f(4) = 5 \cdot 4 = 20$	$g(4) = 4 \cdot 4 + 6 = 22$
5	$f(5) = 5 \cdot 5 = 25$	$g(5) = 4 \cdot 5 + 6 = 26$
6	$f(6) = 5 \cdot 6 = 30$	$g(6) = 4 \cdot 6 + 6 = 30$
7	$f(7) = 5 \cdot 7 = 35$	$g(7) = 4 \cdot 7 + 6 = 34$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Com a representação tabular, confirmamos as descobertas realizadas pelos professores sobre até que ponto seria vantajoso comprar na vendinha do Sr. Deda ou no mercado “Preço Imbatível”. Ademais, P4 solicitou, no problema, a representação gráfica referente às duas

situações, assim, intensificamos a discussão com o esboço do gráfico correspondente às duas funções.

Figura 99 - Utilizando a calculadora gráfica Desmos para explorar a representação gráfica do problema proposto por P4



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, conduzimos o seguinte diálogo,

PP: No plano cartesiano, o que significa o par ordenado $(6, 30)$?

Professores: A variável x corresponde à quantidade de quilos de batatas e a variável y o valor em dinheiro a ser pago.

P4: E esse 30 é exatamente onde o preço será igual em ambos os estabelecimentos.

PP: Vocês concordam com essa representação gráfica?

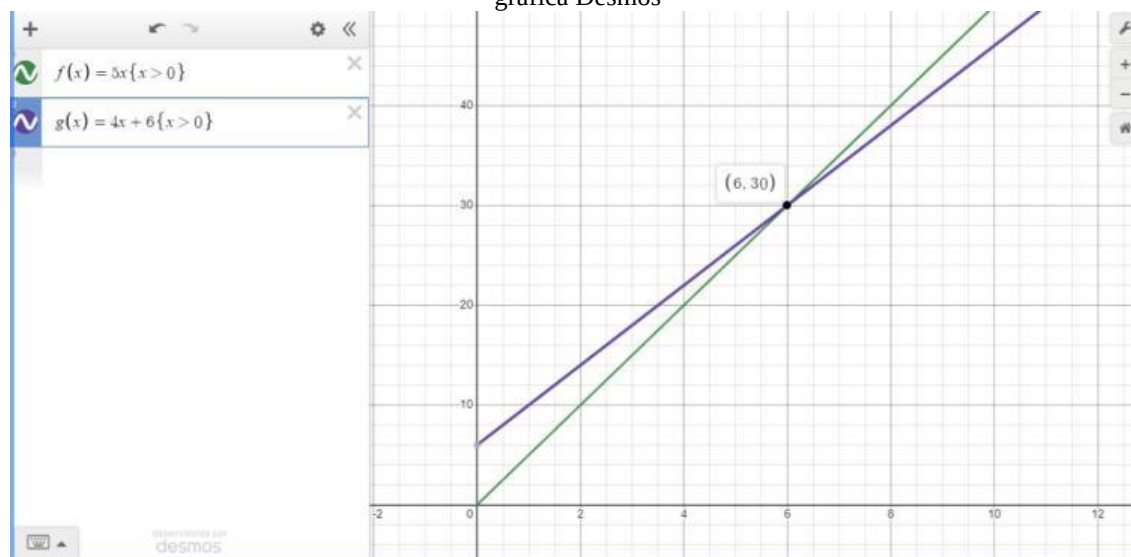
P14: Nesse caso aí, só não está correta a parte negativa.

PP: E como tiramos essa parte negativa?

P12: O $x \geq 0$.

Com esta descoberta, destacamos, para os professores, que ao restringirmos o domínio das funções encontradas e ao considerarmos que $x \geq 0$, estamos compreendendo que estas funções não estão definidas para $x < 0$, isto é, no contexto real do problema, é impossível, matematicamente, haver uma compra de batatas de quantidade negativa ou valor negativo. Considerando a descoberta de P12, veja, a seguir, a nova representação gráfica:

Figura 100 - Aprofundando a exploração da representação gráfica do problema proposto por P4 na calculadora gráfica Desmos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Além disso, tais reflexões e representação gráfica potencializaram um novo diálogo:

PP: Neste caso, qual será o domínio e a imagem da função $f(x) = 5x$?

Professores: O domínio $x \geq 0$ e a imagem é $y \geq 0$.

P14: No caso, os reais positivos.

PP: Mas são todos os Números Reais, considerando o contexto do problema?

P14: Não pode ser os Números Irracionais.

P12: Toda medida tem erro. A gente tem só uma aproximação em quilos.

P4: Eu acho que são os Números Reais. Por mais que eu não possa afirmar que seria possível, que x poderia assumir exatamente todos os valores reais. Eu também não posso afirmar que não seria possível, porque, talvez, eu poderia conseguir uma $\sqrt{2}$ numa pesagem qualquer.

P14: Quem está comprando, vai querer a pesagem exata.

Com as descobertas realizadas pelos professores, defendemos a relevância de levar em consideração o contexto real do problema e registramos na lousa o domínio e imagem que modelam ambas as situações: $f(x) = 5x$, em que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ e $g(x) = 4x + 6$, em que $D(g) = \{x \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ e $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 6\}$. Para continuar aprofundando, geramos um novo debate:

PP: Considerando a função $g(x) = 4x + 6$, como chamamos os coeficientes 4 e 6?

P12: São os coeficientes angular e linear.

PP: E o que significa esses coeficientes no contexto do problema?

P4: O coeficiente linear 4 é a inclinação da reta tangente. Quanto maior o coeficiente, maior será a inclinação da reta.

PP: Isso!

Com isso, enfatizamos, para os professores, que no contexto do problema, o coeficiente angular é o termo que corresponde à taxa de variação, isso quer dizer que, a cada quilograma de batatas, gera-se um novo preço a ser pago. Ademais, mostramos, com o auxílio da Calculadora Gráfica *Desmos*, que o comportamento das retas das funções $f(x) = 5x$ e $g(x) =$

$4x + 6$ é influenciado pelos valores correspondentes ao coeficiente angular de cada função em relação ao eixo x , isso implica dizer que, quanto maior for o valor do coeficiente angular da reta - o ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo x vai se aproximando de 90° . E ainda que o coeficiente linear, que sempre permanece constante, não influencia, diretamente, na inclinação da reta, porém, altera a posição da reta no plano.

Retomamos, ainda, a discussão sobre os problemas envolvendo o troco que Nêem iria receber ao comprar batatas. Nesse contexto, fizemos uso da Calculadora Gráfica *Desmos* para representar graficamente o problema que surgiu da problematização de P1 a partir do fato da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática que busca elucidar as diferentes formas de troco que Nêem pode receber na compra de um quilograma de batatas. Para tanto, fizemos a leitura do problema proposto por P1: “*PC foi a vendinha do Sr. Deda comprar 1 quilo de batata que custava R\$ 5,00, e no pagamento ele deu uma nota de R\$ 20,00, e pediu o seu troco em moedas de R\$ 0,50 e em notas de R\$ 2,00. Quantas notas e moedas ele irá receber?*”, e questionamos:

PP: Como podemos passar um troco de R\$ 15,00 com moedas de R\$ 0,50 e cédulas de R\$ 2,00?

Professores: Duas moedas de R\$ 0,50 e sete notas de R\$ 2,00; seis moedas de R\$ 0,50 e seis notas de R\$ 2,00; dez moedas de R\$ 0,50 e cinco notas de R\$ 2,00.

PP: E como podemos representar algebricamente este problema?

Professores: $0,5x + 2y = 15$.

A partir do raciocínio exposto pelos professores, fomos à lousa e registramos as possibilidades para o recebimento do troco. Veja a seguir:

$$2(0,50) + 7(2) = 15$$

$$6(0,50) + 6(2) = 15$$

$$10(0,50) + 5(2) = 15$$

$$14(0,50) + 4(2) = 15$$

$$18(0,50) + 3(2) = 15$$

$$22(0,50) + 2(2) = 15$$

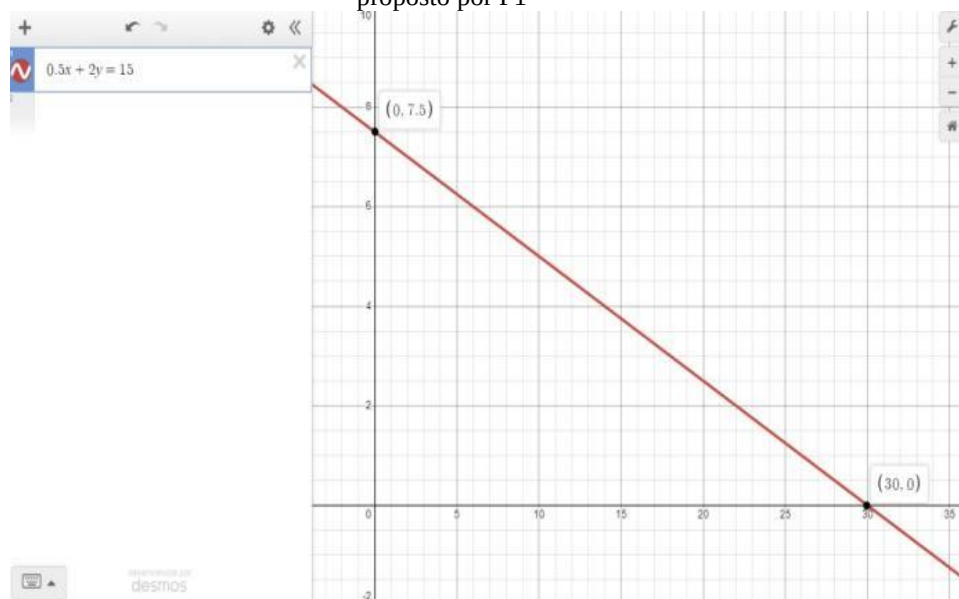
$$26(0,50) + 1(2) = 15$$

$$30(0,50) + 0(2) = 15$$

$$0,5x + 2y = 15$$

Desse modo, iniciamos um novo diálogo visando analisar uma representação gráfica para o problema proposto por P1. Observe o gráfico e o debate gerado:

Figura 101 - Fazendo uso da calculadora gráfica Desmos para explorar a representação gráfica do problema proposto por P1



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: O que significa esse par ordenado (30,0)?

P5: São 30 moedas de R\$ 0,50 e nenhuma cédula de R\$ 2,00.

PP: Que problemas poderíamos propor olhando para o gráfico? O eixo x corresponde à quantidade de moedas de R\$ 0,50 e o eixo y corresponde à quantidade de notas de R\$ 2,00.

P5: Se ele quisesse o troco em moedas de R\$ 0,50, quantas moedas ele receberia?

PP: E, se solicitasse o troco só em notas, seria possível?

P5: Seria esse par (0, 7,5). No caso, não dá certo.

P12: No caso, ele está dividindo o 15 por 2 e, no contexto do problema, seria impossível somar uma quantidade de notas de R\$ 2,00 e resultar em R\$ 15,00. Considerando o contexto do problema, esse gráfico está correto?

P4: O gráfico está pegando a parte decimal.

P14: E também a parte negativa.

PP: Como eu posso restringir, no gráfico, essa parte que não representa o contexto do problema? Qual seria o domínio, considerando o contexto do problema, ou seja, os valores que x pode assumir?

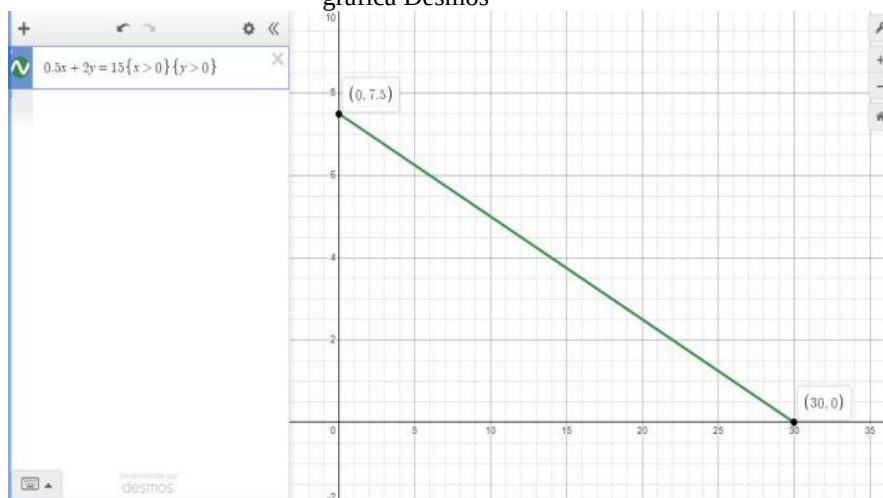
P4: Os valores da variável x são os naturais pares.

PP: E o que isso significa?

P14: Eu acho que $x \geq 0$.

Nesse sentido, as descobertas enfatizadas pelos professores promoveram a seguinte representação gráfica:

Figura 102 - Aprofundando a exploração da representação gráfica do problema proposto por P1 na calculadora gráfica Desmos



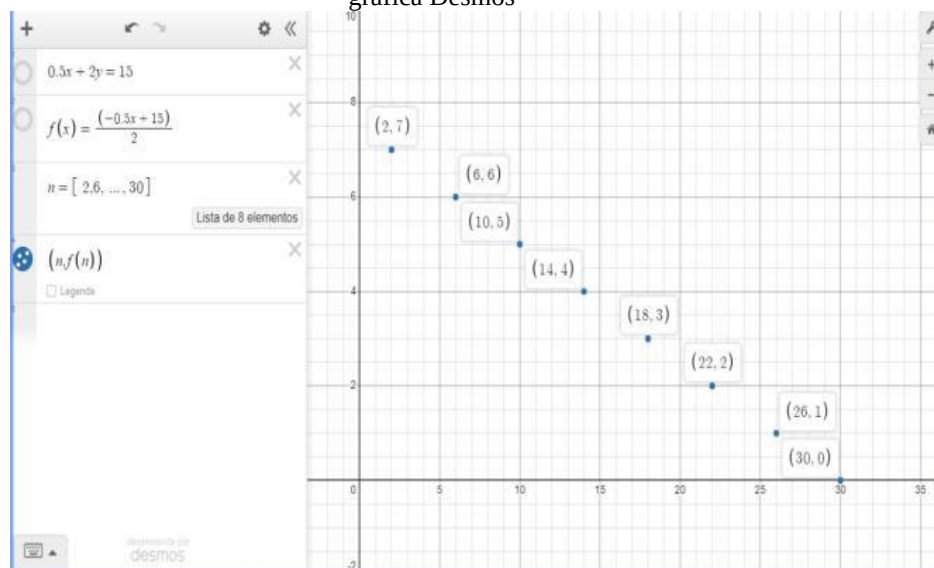
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Com esta representação gráfica, P12 interveio e argumentou: “*Não pode nem ter essa reta, porque aí está assumindo valores decimais*”. Assim, advogamos que, quando consideramos a reta, ainda estamos considerando que o domínio é uma grande parte do conjunto dos Números Reais, como, por exemplo, os Números Racionais não inteiros, e que, de fato, é necessária uma representação gráfica que restrinja o domínio, de tal forma que representasse coerentemente o problema em foco.

Desse modo, Abreu (2024) percebe que o uso da Calculadora Gráfica Desmos (CGD) pode ampliar a exploração e interpretação de dados numéricos em situações reais, que nem sempre estão condicionados dentro do conjunto dos números inteiros, na qual a representação gráfica desses dados proporciona uma visão do geral para o específico e vice-versa, além do reconhecimento de padrões, generalizações e formulação de conjecturas matemáticas.

Com isso, destacamos, para os professores, que para esboçar o gráfico, sendo fiel ao contexto do problema, será necessário restringir o domínio da função $0,5x + 2y = 15$, tomando como ponto de partida a sua forma reduzida, isto é, $y = f(x) = \frac{-0,5x + 15}{2}$. Posteriormente, com a Calculadora Gráfica *Desmos*, criamos uma lista de elementos, colocando o primeiro e o último elemento de sua lista separados por vírgulas e com reticências no meio, ficando: $n = [0, \dots, 50]$. Por fim, cria-se um ponto de coordenadas utilizando a letra que se usou para nomear a lista de elementos $(n, f(n))$. Veja a representação gráfica a seguir:

Figura 103 - Refinando a exploração da representação gráfica do problema proposto por P1 na calculadora gráfica Desmos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: As Representações Múltiplas de Álgebra (verbal, numérica, algébrica e gráfica) (por exemplo, Martins, Andrade, 2022; Martins, 2019, 2024; Abreu et al., 2024; Abreu, 2024) e as representações múltiplas de funções (verbal, numérica, tabular, algébrica e gráfica) (por exemplo, Silva, L. 2013; Brandão, 2014; Martins, 2024; Abreu et al., 2024; Abreu, 2024) podem ser o ponto de partida para envolver os estudantes em uma prática de proposição de problema, na qual o professor, durante o movimento de exploração-problematização-proposição de problemas, pode incentivar eles a transitarem entre essas representações com a geração de novos problemas, culminando em distintas sínteses-trabalhos que potencializam a discussão em nível de processos matemáticos.

Com o propósito de refinar/aprofundar o trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas realizado pelos professores no último encontro, solicitamos que cada professor trocasse o/os problema/s formulado/s com um colega. Enfatizamos que eles ficassem à vontade para reescrever os problemas, adotando os critérios que considerassem necessários. Ao percebermos que os professores tinham realizado o trabalho que foi solicitado, sugerimos que eles compartilhassem com todos os presentes.

Assim, P4 iniciou destacando que reescreveu o problema: “PC foi a vendinha do Sr. Deda comprar 1 quilo de batata que custava R\$ 5,00, e no pagamento ele deu uma nota de R\$ 20,00, e pediu o seu troco em moedas de R\$ 0,50 e em notas de R\$ 2,00. Quantas notas e moedas ele irá receber?”, proposto por P1, incrementando novos dados, em especial, que o troco deveria ser repassado em moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00 e apresenta por meio de uma tabela todos os possíveis modos de se fazer isso. Veja a seguir a reescrita dada ao problema proposto por P1 e descobertas realizadas por P4 e os professores:

Figura 104 - Reescrita de P4 ao problema proposto por P1

DE ACORDO COM A COMPRA DE BATATA DO SR TEDA QUE DÁ UM DAR
 UMA NOTA DE R\$ 20,00 NA COMPRA DE UM QUILOGRAMA DE BATATA QUE
 CUSTA R\$ 6,00 REINS E QUER O TROCO EM MOEDAS. QUANTAS MOEDAS DE
 R\$ 0,50 E R\$ 1,00 ELE PODE RECEBER NESSE TROCO.

Resolução

Valor da compra: R\$ 6,00

Valor do pagamento: R\$ 20,00

Troco: $20,00 - 6,00 = 14,00$

Quantidade de moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00

Quantidade R\$ 0,50	Quantidade R\$ 1,00
0	14
2	13
4	12
6	11
8	10
10	9
12	8
14	7
16	6
18	5
20	4
22	3
24	2
26	1
28	0

Há 15 modos diferentes de
 se obter a quantidade de
 moedas de 50 centavos e um real.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

P4: O troco que ele iria receber era de R\$ 14,00, com moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00.

Aí fiz uma tabela e notei que são 15 possibilidades diferentes dele passar o troco.

PP: No problema proposto por P5, que requeria receber o troco de R\$ 15,00 em notas de R\$ 2,00 e moedas de R\$ 0,50, sendo que uma parte do troco (R\$ 4,00) deveria ser em moedas de R\$ 0,50 e o restante em notas de R\$ 2,00, vimos que isso não seria possível. E a conjectura que foi levantada é que um número ímpar somado com um número par pode resultar em 15. E, neste caso com moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00 para resultar em numerar par (14), que conjecturas podemos levantar?

P4: A quantidade de moedas de R\$ 0,50 tem de ser par.

PP: E a quantidade de moedas de R\$ 1,00?

Professores: Pode ser par ou ímpar.

PP: Por quê?

Professores: Porque a soma de um número par com um número ímpar e vice-versa é par. E a soma de um par com outro par também é par.

PP: Isso. Como podemos representar algebricamente este problema?

Professores: $0,5x + y = 14$

Enfatizamos, para os professores, que devido à atividade ter sido desenvolvida âmbito de um curso de Formação de Professores que ensinam Matemática, não foi difícil perceber que, no problema proposto por P5, não seria possível receber R\$ 4,00 em moedas e o restante do troco em cédulas de R\$ 2,00, ou seja, o problema não tinha solução. Tal fato exigiu deles a elaboração e implementação de um pensamento mais formal, buscando apreender em que

condições o troco se tornava possível. Neste caso, entendeu-se que o troco de R\$ 15,00 em cédulas de R\$ 2,00 e moedas R\$ 0,50 é possível, quando a parte do troco referente a moedas resultar em valor ímpar (R\$ 1,00; R\$ 3,00; R\$ 5,00; R\$ 7,00; R\$ 9,00; R\$ 11,00; R\$ 13,00).

Na sua vez, P1 reescreveu o problema proposto por P4, explorado no início deste encontro, que enfocou na compra de batatas na vendinha de Sr. Deda e/ou no mercado “Preço Imbatível”. O P1 enfatiza que: “Eu busquei modificar o problema criado por P4, analisando o gasto que Nêm iria ter ao comprar 4kg na cidade. E quantos quilos de batatas ele poderia comprar com dinheiro gasto na cidade, comprando na vendinha da zona rural”. Veja o trabalho de reescrita realizado por P1:

Figura 105 - Reescrita de P1 ao problema proposto por P4

- II) Nêm foi no mercado “Preço Imbatível” comprar 4 quilos de batata que custava R\$ 4,00 cada quilo e gastou R\$ 6,00 de transporte. Mas na vendinha na zona rural onde ele mora um quilo de batata custava R\$ 5,00.
- a) De acordo com as informações qual foi o gasto total que Nêm teve na cidade?
- b) Com o valor total que Nêm gastou na cidade, dava pra comprar quantos quilos de batata na vendinha na zona rural?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O P7 e P5 trocaram os problemas matemáticos. Dentre os diferentes problemas propostos por P5, P7 reescreveu o seguinte problema: “Segundo o IBGE (2021) a população brasileira é de 214 milhões de habitantes, e que 54% são negros. Baseado no texto onde 7 a cada 10 pessoas negras já sofreram racismo. Qual a quantidade de brasileiros que já sofreram racismo?” Veja o problema proposto por P7:

Figura 106 - Reescrita de P7 ao problema proposto por P5

- I) CONSIDERANDO OS VALORES PERCENTUAIS NO TEXTO, ONDE 70% DOS NEGROS SOFREM RACISMO EM LOJAS, RESTAURANTES E MERCADOS, E SABENDO QUE EM UMA CIDADE DE 130 MIL HABITANTES, 35% SÃO NEGROS E FREQUENTAM OS LOCAIS CITADOS ANTERIORMENTE, CALCULE A QUANTIDADE DE NEGROS QUE SOFREM RACISMO E O PERCENTUAL DA POPULAÇÃO TOTAL QUE ESSE PERCENTUAL REPRESENTA?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O P7 esclareceu o critério utilizado para reformulação dada ao problema proposto por P5, de tal forma que gerou o seguinte diálogo:

P7: Os alunos, normalmente, têm dificuldades de representar um número tão grande, por isso pensei em uma cidade e reduzi a quantidade de habitantes, para que eles pudessem identificar, no caso do meu problema, a quantidade de zeros que tem 130 mil.

P4: Esse problema é importante, porque, dependendo da turma que você estiver trabalhando, pode revisar a ideia de classes e ordem de número, para suprir essa necessidade.

P4: Se fosse 214 milhões, eles se confundiriam na hora de representar esse número.

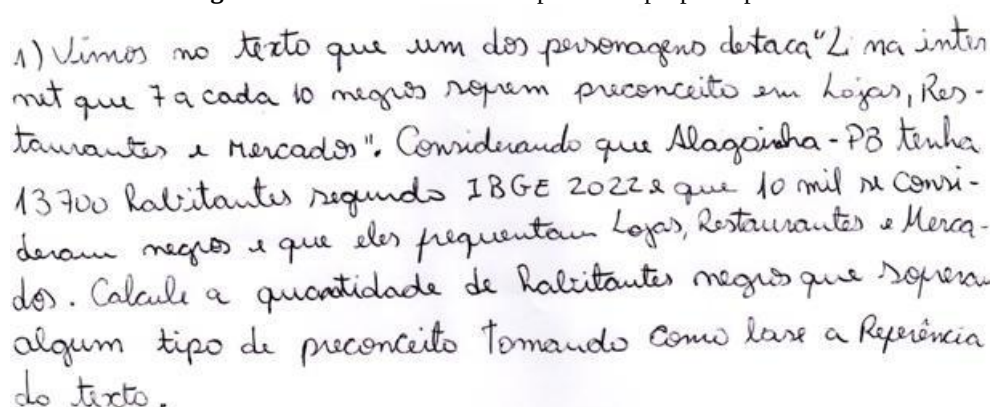
P10: Se colocasse 214,3 milhões, poderia complicar mais ainda.

Nesse contexto, o professor-pesquisador comentou que a reescrita do problema defendida por P7 teve como finalidade não só promover a discussão de taxa percentual como foco primário deste problema matemático, mas, também, revisar uma ideia matemática (escrever um número, identificando suas classes) e superar dificuldades encontradas pelos alunos com relação a este conceito matemático.

Ademais, P7 explica que o problema por ele formulado difere do problema proposto por P5, por requerer o percentual de negros que sofreram racismo com relação à população total.

Por sua vez, P5 formulou o problema: *“Vimos no texto que um dos personagens destaca: “Li na internet que 7 a cada 10 negros sofrem preconceito em lojas, restaurantes e mercados”. Considerando uma cidade com 10 mil habitantes negros e que esses habitantes frequentam lojas, restaurantes e mercados. Calcule a quantidade de habitantes negros que sofrem algum tipo de preconceito tomando como base a referência percentual do trecho do texto”*, proposto por P7. Com relação ao trabalho realizado, P5 explicou que fez uma pesquisa na *internet* com o interesse de identificar a quantidade de habitantes do município de Alagoinha-PB via Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), acrescentando, assim, durante o processo de reescrita, os dados encontrados, gerando um novo problema.

Figura 107 - Reescrita de P5 ao problema proposto por P7



1) Vimos no texto que um dos personagens destaca “Li na internet que 7 a cada 10 negros sofrem preconceito em lojas, Restaurantes e mercados”. Considerando que Alagoinha-PB tenha 13700 habitantes segundo IBGE 2022 e que 10 mil se consideram negros e que eles frequentam Lojas, Restaurantes e Mercados. Calcule a quantidade de habitantes negros que sofrem algum tipo de preconceito tomando como base a Referência do texto.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Assim, sublinhamos que, embora P5, de fato, tenha modificado um pouco da redação que compõe o problema formulado por P7, em termos de conceito matemático e

processos/procedimentos de resolução de problema, ambos os problemas se equivalem, pois, de modo geral, requerem que se calcule 70% de 10.000 habitantes.

O P14 ficou incumbido de reescrever um dos problemas proposto por P6. Na ocasião, ele reformulou o problema referente às duas opções para compra de batatas. O P14 explicou que se inspirou no trecho da Narrativa Matemática que destaca o troco que Nêm iria receber no ato da compra de 1kg de batatas, e acrescentou, também, a venda de verduras, para reformular o problema proposto por P6. Ademais, ele defendeu que o problema difere, igualmente, do problema proposto por P6, devido à mudança de conteúdo matemático para resolver ambos os problemas, pelo fato de requerer: “De quantas maneiras Sr. Deda poderia passar o troco?” (Equação do 1º grau), sendo que, no problema formulado por P6, abordava-se a ideia de Função Afim.

Figura 108 - Reescrita de P14 ao problema proposto por P6

Reformulação

• Pc foi na vendinha de Sr. Deda e comprou 2 quilos de batatas que custa R\$ 5,00 o quilo e 1 quilo e meio em verduras que custa R\$ 7,00 o quilo, no pagamento ele deu uma nota de R\$ 100,00. Sabendo que Sr. Deda, na hora só tinha para o troco moedas de 25 centavos, 50 centavos e 1 real, e notas de 5, 10, 20 e 50 reais de quantas maneiras Sr. Deda poderia passar o troco

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Enquanto isso, P6 reescreveu o problema, “Em um certo dia o jovem “Nê”, que mora na zona rural foi a cidade comprar batatas, no mercado “Preço Imbatível”, ele comprou um quilo de batata que custa R\$ 4,00 e o custo do transporte para ir e vir a cidade custa R\$ 6,00. Enquanto na vendinha do Sr. Deda que está localizada na mesma região que Nê mora, o custo do quilo de batata custa R\$ 5,00 o quilo. De acordo com essas informações, com quantos quilos de batata sairá mais vantajoso comprar no mercado do que na vendinha?”, proposto por P14. Na ocasião, o P6 comentou que, durante o processo de reformulação, pensou em criar um problema que envolvesse o campo da Matemática Financeira. Veja todo o trabalho realizado por P6:

Figura 109 - Reescrita de P6 ao problema proposto por P14

① PC QUER COMPRAR MEIO SACO DE BATATA QUE CUSTA R\$ 85,00 À VISTA. COMO PC NÃO TINHA ESSA QUANTIDADE NO MOMENTO E NÃO QUERIA PERDER A OPORTUNIDADE, ACEITOU A OFERTA DO VENDEDOUR DE PAGAR EM DUAS PRESTAÇÕES DE 45,00 REAIS, UMA NO ATO DA COMPRA, E OUTRA NO ~~ATO~~ MÊS POSTERIOR. CONSIDERANDO, RESPONDA:

A) A TAXA DE JUROS MENSAL QUE O VENDEDOUR ESTAVA COBRANDO NESTA OPERAÇÃO ERA DE QUANTOS POR CENTOS?

B) CONSIDERANDO QUE O PREÇO DO SACO INTEIRO DA BATATA É R\$ 150,00 À VISTA, QUANTOS POR CENTO DE DESCONTO É OBTIDO NESSE CASO SE COMPARADO AO COMPRAR MEIO SACO?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Nesse contexto, destacamos que esta atividade de reformular a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, por ser aberta, embora com um certo grau de intencionalidade, possibilita aos professores, durante o acréscimo ou modificação de fatos, controlar que conceitos e conteúdos matemáticos que podem vir a ser discutidos.

O P9 reescreveu o problema: “O preço do sabão em pó no mercadinho “Preço Legal”, mesmo sendo de mesma marca, varia de acordo com o peso. Sabe-se que o sabão de 750g de peso custa R\$ 15,00 e o sabão de 500g custa R\$ 10,50. Que será mais vantajoso comprar, o de 750g ou de 500g?”, formulado por P10. Veja a reescrita apresentada por P9:

Figura 110 - Reescrita de P9 ao problema proposto por P10

① preço do sabão em pó no mercadinho “preço legal” ~~mesma~~ varia de preço de acordo com a marca. O sabão da marca A custa R\$ 15,00 com 750g de peso e o sabão da marca B custa R\$ 10,50 com 500g de peso. Qual será a marca mais vantajosa para os clientes, sabendo que a cada 1kg da marca B tem 5% de desconto. Considere que o cliente irá comprar 3kg de sabão?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O P9 faz a leitura do trabalho realizado, e os professores se mobilizaram na resolução deste problema, de modo a gerar um debate:

P9: No problema formulado por P10, a gente viu que seria melhor comprar 750g. Daí, eu defini duas marcas e que o sabão seria vendido em quilos, para que, ao fim, fosse mais vantajoso comprar da marca B.

Professores: A diferença das duas marcas são só alguns centavos.

PP: Então, o que faria uma pessoa escolher a marca um pouco mais cara que a outra?

P9: Poderia ser escolhida pela qualidade da marca. Por uma marca render mais do que a outra.

PP: Isso!

P9: Só se você for olhar para esse contexto, mas, se você for olhar para o mais barato, vai escolher a marca A.

PP: O que difere da situação envolvendo a compra de barras de chocolate e do ovo de Páscoa, por ambos serem de mesma marca.

Por sua vez, P10 reescreveu o problema: “De acordo com o texto a cada 10 pessoas negras 7 delas sofrem preconceitos em lojas, restaurantes ou mercado. Dado que no Brasil temos um total de 214,3 milhões de habitantes e apenas 4% dos brasileiros se consideram racistas. Qual a quantidade de pessoas que se consideram racistas? A partir dos dados é correto afirmar que o Brasil é racista?”, formulado por P9. O P10 explanou que reescreveu o problema com a intenção de trabalhar o conteúdo de Função Quadrática, e discutir o problema em âmbito social, em especial, promover uma campanha de conscientização com relação à intolerância racial, e ainda declarou, “eu elaborei quatro problemas e ainda caberia mais”. Vale ressaltar que P10 foi na lousa e apresentou soluções para os problemas, por ele formulado. Veja todo o trabalho realizado por P10:

Figura 111 - Reescrita de P10 ao problema proposto por P9 e resolução (primeira parte)

“LOLA LEU EM UMA PÁGINA DA INTERNET QUE EM CERTO MOMENTO NUM INTERVALO DE 16 ANOS, A CADA 10 PESSOAS NEGRAS, 7 DELAS SOFIAM PRECONCEITO EM ALGUNS SETORES DE UMA DETERMINADA COMUNIDADE COM TENDÊNCIA PARA AUMENTAR ESSES DADOS, POIS AS AUTORIDADES LOCAIS NÃO INTERFERIAM PARA CONTER ESSE PRECONCEITO. $y = -\frac{25}{8}x^2 + 100x$ -- y PREOCUPADO COM O ALTO ÍNDICE DE INTOLERÂNCIA RACIAL, O GOVERNO LOCAL RESOLVEU PROMOVER UMA CAMPANHA DE CONSCIENTIZAÇÃO COM O OBJETIVO DE MUDAR O QUADRO ATUAL INICIANDO EM JANEIRO DE 2017 (17). SABE-SE QUE O PRECONCEITO RACIAL É FRUTO DA FALTA DE CONSCIENTIZAÇÃO E É DETERMINADO PELA EXPRESSÃO: $y = -\frac{25}{8}x^2 + 100x$, ONDE “x” É O ANO DETERMINADO PELO INTERVALO [2000, 2032], (CONSIDERAR: [00, 32], E “y”, A POPULAÇÃO AFETADA PELO RACISMO). ENTENDE-SE QUE SEM A CITADA CAMPANHA, OS DADOS SÓ AUMENTAVAM; APÓS O INÍCIO DA CAMPANHA NOTOU-SE UM DECLÍNIO DO PRECONCEITO. OBS.: CONSIDERE QUE NESSA COMUNIDADE EXISTE UMA POPULAÇÃO DE 4700 HABITANTES E QUE 17% DELA DECLARA-SE NEGRA. PARTINDO DO PRESSUPOSTO QUE NO ANO 2000 (00) NÃO EXISTIA RACISMO NESSA SOCIEDADE, PERGUNTA-SE:

a) SE NO ANO DE 2008 (08) AINDA NÃO EXISTIA A CAMPANHA PARA A CITADA CONSCIENTIZAÇÃO QUANTOS HABITANTES NEGROS SOFIAM PRECONCEITO? $y = -\frac{25}{8} \cdot 8^2 + 100 \cdot 8$
 $y = -\frac{25}{8} \cdot 64 + 800 \Rightarrow y = 600$ HABITANTES

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 112 - Reescrita de P10 ao problema proposto por P9 e resolução (segunda parte)

b) EM QUE ANO O PRECONCEITO RACIAL CHEGOU A SEU ÁPICE?

- CALCULANDO O "x" DO VÉRTICE, VEM:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \rightarrow \frac{-100}{2 \cdot (-\frac{25}{8})} \rightarrow \frac{-100}{-\frac{25}{4}} \rightarrow \frac{-100 \cdot 4}{-25} \Rightarrow x_v = 16$$

RESP.: NO ANO DE 2016.

c) SABENDO QUE APÓS O ANO DE 2016 (16) A CAMPANHA SOBRE O RACISMO FOI INICIADA, PERGUNTA-SE: QUANTOS NEGROS SOFRERÃO RACISMO EM 2028 (28)?

$$y = -\frac{25}{8} \cdot 28^2 + 100 \cdot 28 \Rightarrow y = 350$$

RESP.: 350 NEGROS.

d) CONSIDERANDO QUE A CAMPANHA DE CONSCIENTIZAÇÃO IRÁ CONVENCER TODOS A BANIR O RACISMO, EM QUE ANO ESSE PRECONCEITO SERÁ ZERADO?

$$0 = -\frac{25}{8} \cdot x^2 + 100 \cdot x \Rightarrow \Delta = 100^2 - 4 \cdot (-\frac{25}{8}) \cdot 0$$

$$\Delta = 10000$$

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{10000}}{2 \cdot (-\frac{25}{8})}$$

$$x_1 = 0 \text{ (NÃO SERVE)}$$

$$x_2 = \frac{-200}{-\frac{25}{4}} \Rightarrow x_2 = -200 \cdot (-\frac{4}{25})$$

$$x_2 = 32$$

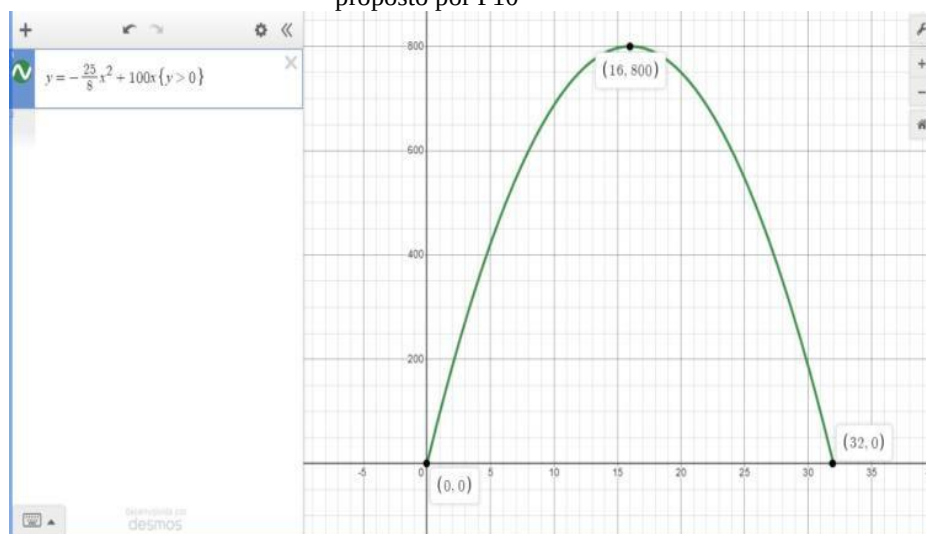
RESP.: NO ANO 2032 (32)

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Quando o propositor de problemas começa a incorporar a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, há uma consciência que sempre pode ir mais além. E, no caso do professor enquanto propositor de problemas, observa-se que ele tem o papel de impulsionar a discussão de uma situação-problema, tendo como alternativa, para isso, a proposição de alguns problemas, que podem aguçar a imaginação e a criatividade dos estudantes na geração de novos problemas; e sempre optando por tomar o rumo da discussão sem perder a intencionalidade da aula em termos de conceitos matemáticos e/ou no tratamento de questões em nível sócio-político-cultural.

De acordo com Martins (2024, p. 232), “essa metodologia não apenas os beneficia na compreensão sobre a estrutura matemática dos problemas, mas estimula a criatividade e a capacidade de pensar criticamente”. Durante a leitura do trabalho realizado, P10 defendeu a relevância da representação gráfica, para que os professores presentes visualizassem o momento em que houve o aumento ou o declínio do preconceito racial. Como estávamos fazendo uso da calculadora gráfica *Desmos*, aproveitamos para ratificar o quanto P10 foi bem-sucedido no processo de reescrita e solução dos problemas gerados, transitando da representação algébrica para a gráfica.

Figura 113 - Fazendo uso da calculadora gráfica Desmos para explorar a representação gráfica do problema proposto por P10



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Diante das soluções defendidas por P10 e com auxílio da Calculadora Gráfica *Desmos*, enfatizamos que os problemas “*Em que ano o preconceito racial chegou a seu ápice?*” e “*Considerando que a campanha de conscientização irá convencer todos a banir o racismo, em que ano esse preconceito será zerado?*”, em termos de ideia matemática, correspondem ao mesmo que solicitar que se calcule as coordenadas do vértice de uma Função Quadrática, como ficou evidenciado na representação gráfica. Ademais, destacamos, para os professores, que este conceito matemático discutido por P10, por meio de problemas (ao invés de exercícios que pedem para calcular as coordenadas do vértice), refletem uma questão social e, sendo assim, o debate acerca destes problemas pode ir além da Matemática.

No entanto, ressaltamos aos professores que, não tinha ficado claro se a Função Quadrática $y = -\frac{25}{8}x^2 + 100x$, de fato, expressava uma situação real, ou seja, a redação que compõe o problema foi organizada a partir de dados reais ou foram utilizadas informações fictícias. Assim, P10 esclareceu que a função foi modelada a partir de uma situação real e que realizou o trânsito da representação gráfica para a algébrica. Nesse contexto, iniciamos o diálogo:

PP: Essa função foi você que criou?

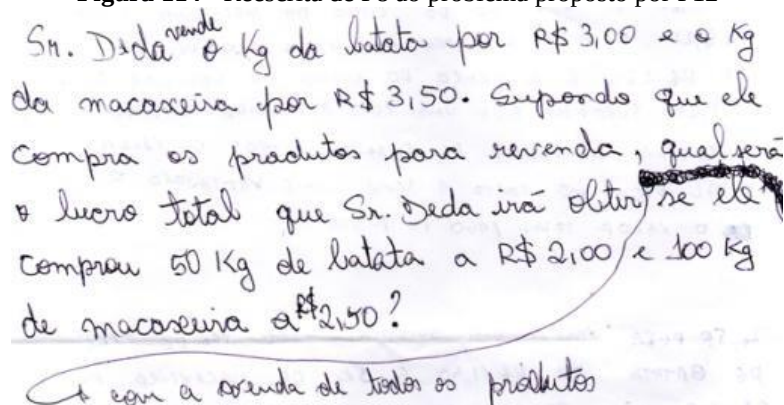
P10: Eu criei a partir de um sistema de equações, pegando dois pontos de um gráfico que achei na internet sobre intolerância racial, aí formei um sistema que levou à lei de formação da função. Foram dados que tentei aproximar ao máximo dos dados reais. Eu vi, durante a minha pesquisa na *internet*, que 52% da população brasileira é parda ou negra. Eu, por exemplo, me considero pardo. Então, eu fiz uma proporção da seguinte maneira, considerando que 52% são pardos ou negros, então, eu coloquei que 35% são pardos e 17% são negros.

PP: Ótimo!

Destacamos, para os professores, que o trabalho realizado por P10 evidencia que uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas pode ser elaborada a partir da transição de diferentes representações e pode abordar um tema social de forte impacto na sociedade atualmente.

Na sua vez, P8 ficou responsável para reescrever o problema: “Sr. Deda possui uma quitanda, ele vende 3kg de batatas por R\$ 11,40 e 5kg de macaxeira por R\$ 21,00, ele precisa comprar os produtos para revender, o mesmo compra 4kg de batatas por R\$ 9,20 e 6kg de macaxeira por R\$ 18,60. Suponha que o Sr. Deda tenha comprado 80kg de batata e 50kg de macaxeira, qual o lucro total que ele irá obter com a venda de todo o produto?”, formulado por P12. Com relação ao trabalho realizado por P8, ele ressalta que manteve a estrutura do problema, modificou apenas os dados e, com isso, gerou um novo problema. Veja o trabalho de reescrita realizado por P8:

Figura 114 - Reescrita de P8 ao problema proposto por P12



Sr. Deda vende 3 kg de batatas por R\$ 3,00 e 5 kg de macaxeira por R\$ 3,50. Supondo que ele compra os produtos para revenda, qual será o lucro total que Sr. Deda irá obter se ele comprou 50 kg de batata a R\$ 2,00 e 100 kg de macaxeira a R\$ 2,50?

Com a venda de todos os produtos

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Ademais, P8 argumentou que o critério utilizado para o seu trabalho de reformulação do problema decorreu da necessidade de gerar um problema que pudesse trabalhar com as operações de Multiplicação e Subtração no 6º ano do Ensino Fundamental.

Em seguida, P12 que, conseqüentemente, ficou incumbido de reformular o problema: “Nêm foi até o mercado preço imbatível comprar batatas que custa R\$ 4,00 o quilo. Como ele foi de moto teve gastos com gasolina, ou seja, R\$ 6,00 para ir e voltar. Sr. Deda vende batatas na sua vendinha por R\$ 5,00 o quilo, e fica localizada no mesmo sítio que Nêm mora. Partindo dessas informações, determine quantos quilos de batatas, Nêm vai ter que comprar no mercado preço imbatível para que seja mais vantajoso para ele com relação à vendinha do Sr. Deda”, formulado por P8. Ele iniciou destacando que modificou totalmente as informações e o conteúdo matemático, ao abordar, com o problema, Sistema de Equações e Produtos Notáveis.

Figura 115 - Reescrita de P12 ao problema proposto por P8

SR. DEDA TEM UM CERTO VALOR EM DINHEIRO, SABE-SE QUE A QUANTIDADE DE NOTAS DE R\$ 2,00 QUE ELE POSSUI ELEVADO AO QUADRADO MAIS A QUANTIDADE DE MOEDAS DE R\$ 0,50 ELEVADO AO QUADRADO É IGUAL A 58. SABE-SE TAMBÉM QUE O QUADRADO DA SOMA DAS QUANTIDADES DE NOTAS DE R\$ 2,00 E MOEDAS DE R\$ 0,50 É IGUAL A 100. SABENDO QUE O VALOR QUE SR. DEDA POSSUI É MAIOR QUE R\$ 10,00, DETERMINE ESSE VALOR.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Esse problema despertou o interesse dos professores e, com isso, fomos à lousa registrar a resolução que foi antecipada por P12 durante o processo de reescrita do problema:

Resolução:

x = quantidades de notas de R\$ 2,00

y = quantidades de moedas de R\$ 0,50

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ (x + y)^2 = 100 \end{cases}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 100$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 100$$

$$58 + 2xy = 100$$

$$2xy = 100 - 58$$

$$2xy = 42$$

$$xy = \frac{42}{2}$$

$$xy = 21$$

Com relação à interpretação da solução, P12 explanou que $xy = 21$, dadas as condições apresentadas no problema, quando $x = 7$ e $y = 3$, pois o valor que Sr. Deda possui é maior do que R\$ 10,00. Neste caso, 7 notas de R\$ 2,00 correspondem a R\$ 14,00. Se fossem 7 moedas de R\$ 0,50 e 3 notas de R\$ 2,00, resultaria em R\$ 9,50.

Comentário: O trabalho de reescrita dos problemas, realizado por P12, sinaliza alto teor de criatividade, antecipando possíveis soluções para o problema, e articulando-as com os dados e com o que se pede no problema, de modo a selecionar a solução mais adequada, por meio do pensamento criativo e crítico acerca de um conceito matemático.

Por fim, destacamos, para os professores, que as representações gráficas que foram discutidas durante o encontro, por meio da calculadora gráfica *Desmos*, expressavam problemas reais e, com isso, tivemos que restringir o domínio das funções $f(x) = 5x$ e $g(x) = 4x + 6$ no problema da compra das batatas e na representação gráfica do problema referente ao troco que Nêm iria receber no ato da compra de batatas na vendinha do Sr. Deda. Isso porque, de acordo com contexto real que modela os problemas, haviam elementos do contradomínio que não eram imagem de nenhum x do domínio, por sua vez, nem todo elemento x do domínio tinha uma imagem y no contradomínio.

Reforçamos, ainda, que o trabalho de reescrita dos problemas realizado pelos professores e o envolvimento em atividades de exploração, proposição e resolução de problemas foram muito importantes, além de sua experiência com a docência em Matemática, uma vez que apresentaram e defenderam a reescrita dada ao problema solicitado, de modo a aprofundar os problemas reescritos tanto em âmbito de processo e conceitos matemáticos, como também numa perspectiva sócio-político-cultural.

Comentário: Percebemos que o trabalho de reescrita desenvolvido pelos professores evidencia algumas das suas concepções acerca de critérios que podem ser utilizados para reescrever um problema, de modo a melhorar a redação, adotando aspectos cognitivos, pedagógicos e sociais que podem qualificar o novo problema gerado.

No último encontro, solicitamos que os professores realizassem a leitura do artigo “*A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference*” (Crespo, 2015). O debate sobre este texto buscou elucidar como as abordagens de Proposição de Problemas apresentadas por Crespo (2015), a saber: a) propor, conscientemente, problemas aos alunos; (b) envolver-se em propor problemas com os alunos; e (c) propor problemas matemáticos pessoais e socialmente relevantes, podem ajudar os professores a desenvolverem competências para gerir uma sala de aula de matemática via Proposição de Problemas. Ademais, o professor-pesquisador incentivou os professores a fazerem relação da implementação de cada abordagem de Proposição de Problemas com as experiências de proposição de problemas vivenciadas por eles ao longo do curso de Formação de Professores que ensinam Matemática.

Por fim, o professor-pesquisador recomendou a leitura do artigo “*What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems*” (O que torna um problema matematicamente interessante? Convidar futuros professores a propor problemas melhores) da autoria de Sandra Crespo e Nathalie Sinclair (Crespo; Sinclair, 2008).

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Retoma-se um problema (problema das batatas) que foi proposto e discutido no encontro anterior, para refinar a discussão de ideias essenciais de Função;
- A metodologia de Exploração de Problemas contribuiu com a mobilização de Representações Múltiplas de Álgebra (numérica, verbal, algébrica e gráfica), e a transição entre elas;
- O uso da Calculadora gráfica *Desmos* impulsionou a transição entre diferentes Representações Múltiplas de Álgebra, o que, por sua vez, ajudou a refinar a (re)solução dos problemas das batatas e do troco. Esse aprofundamento dado aos problemas buscou relacionar a representação gráfica com o contexto real que modela os problemas, exigindo, assim, a restrição do domínio, para que tal representação faça sentido;
- Os professores trocaram os problemas entre pares e deram uma nova reescrita, sendo incentivados, inicialmente, a desenvolverem a resolução do problema que seria reformulado, para perceberem se o problema estava bem formulado;
- A abordagem com professores sinalizou que eles estão incorporando pressupostos teóricos da proposta de Exploração de Problemas, em especial, ir além da resolução de problemas, a partir de um trabalho de exploração, proposição e resolução em perspectivas múltiplas, isto é, de modo a envolver a construção de conceitos matemáticos e a imersão no debate de questões sociais, políticas e culturais.

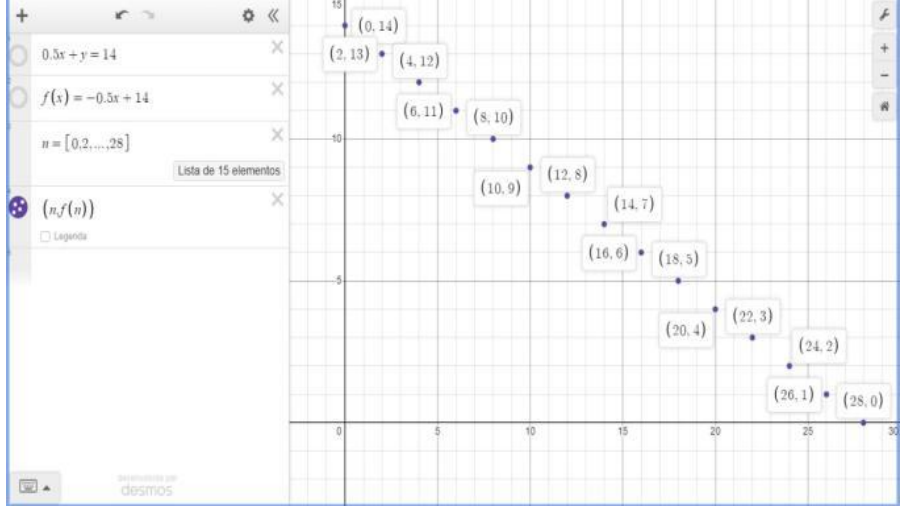
7.9 Nono episódio de sala de aula (29/07/2023): explorando e problematizando a Narrativa Matemática “Mercado de problemas”

Iniciamos a discussão retomando o problema, “*De acordo com a compra de batata do Sr. Deda que ele vai dar uma nota de R\$ 20,00 na compra de um quilograma de batata que custa R\$ 6,00 reais e quer o troco em moedas. Quantas moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00 ele pode receber nesse troco?*”, proposto por P4 no último encontro. É importante destacar, que neste encontro, estavam presentes 12 professores.

Com o objetivo de recordar as descobertas realizadas pelos professores, fomos na lousa e registramos a representação algébrica inerente a este problema ($0,5x + y = 14$), bem como

apresentamos o quadro construído por P4 para solucionar o problema. Em seguida, com o auxílio da Calculadora Gráfica *Desmos*, transitamos da representação algébrica para a gráfica, já limitando o domínio, por meio forma reduzida: $f(x) = -0,5x + 14$, e criando-se a lista de elementos $n = [0, 2, \dots, 28]$. Veja a seguir:

Figura 116 - Utilizando a calculadora gráfica Desmos para explorar a representação gráfica do problema proposto por P4



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: Que problemas podemos propor a partir da representação gráfica?
P4: Quantas moedas de R\$ 0,50 ele iria receber se quisesse receber o troco só em moedas de R\$ 0,50?
Professores: Quantas moedas de R\$ 1,50 ele iria receber se quisesse receber o troco só em moedas de R\$ 1,50?

Nesse sentido, com a intencionalidade de refinar o movimento de exploração-problematização-proposição de problemas, desafiamos os professores a proporem problemas a partir da seguinte representação tabular, registrada na lousa:

Quadro 17 - Representação tabular referente ao troco de moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00

Quantidade de moedas - R\$ 0,50	Quantidade de moedas - R\$ 1,00
0	14
2	13
4	12
6	11
8	10
10	9
12	8
14	7

16	6
18	5
20	4
22	3
24	2
26	1
28	0

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Vale ressaltar que P4 observou um padrão que o ajudou a listar todas as possibilidades de organização do troco. Veja o diálogo a seguir:

P4: Com a tabela, eu observei um padrão: que as moedas de R\$ 0,50 aumentam (ou diminuem) de 2 em 2 e as moedas de R\$ 1,00 diminuem de 1 em 1 (ou aumentam).

PP: Que problemas podemos propor a partir do quadro?

P4: A quantidade de moedas de R\$ 1,00 é o triplo da quantidade de moedas de R\$ 0,50. Qual a quantidade de moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00?

PP: E qual equação representa este problema?

P14: $y = 3x$. Serão 4 moedas de R\$ 0,50 e 12 moedas de R\$ 1,00.

PP: Que outros problemas podemos propor a partir do quadro?

P4: Justifique porque seria impossível receber a mesma quantidade de moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00.

P14: Como as moedas de R\$ 0,50 aumentam de 2 em 2 e moedas de R\$ 1,00 diminuem de 1 em 1. Acho que essa seria uma justificativa.

PP: Podemos propor mais problemas?

P14: A quantidade de moedas R\$ 1,00 é a metade da quantidade de moedas de R\$ 0,50. Determine a quantidade de moedas de R\$ 1,00 e R\$ 0,50. Pode ser o inverso também. Se a quantidade de moedas R\$ 0,50 for o dobro da quantidade de moedas de R\$ 1,00, determine a quantidade de moedas de R\$ 0,50 e R\$ 1,00.

PP: E como podemos representar esses problemas algebricamente?

Professores: No primeiro problema: $x = \frac{y}{2}$ e, no segundo, problema $x = 2y$.

Enfatizamos, para os professores, sobre a importância de desenvolver a proposição de problemas na sala de aula de matemática antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas, destacando que a resolução defendida por P4 serviu como trampolim para a geração de novos problemas (proposição de problemas depois do processo de resolução e exploração de problemas).

Comentário: Notamos que P14 observou padrões na proposição dos problemas envolvendo o troco que Nêm iria receber no ato da compra de batatas, já que ele propõe problemas matemáticos que mantêm a mesma estrutura conceitual, pois, quando representados algebricamente, adotando x como o número de moedas de R\$ 0,50 e y como o número de moedas R\$ 1,00, temos que: $x = \frac{y}{2} \rightarrow y = 2x$, e $x = 2y \rightarrow y = \frac{x}{2}$, ou seja, os problemas têm em comum o fato de um dos números desconhecidos ser igual a metade ou o dobro do outro.

Conforme Milinkovic (2015), é nossa atribuição, enquanto professores e educadores matemáticos, reconhecer padrões existentes no mundo dos problemas matemáticos.

Destacamos, para os professores, que já tínhamos desenvolvido essa atividade do troco das moedas e cédulas no ato de uma compra com alunos de pós-graduação (mestrandos) da Universidade Estadual da Paraíba (Abreu *et al.*, 2024) e, na ocasião, não tinham surgido problemas em que uma das variáveis possuía um coeficiente fracionário (metade), promovendo, assim, um avanço no processo de exploração desta situação-problema.

Comentário: Uma mesma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas desenvolvida tanto em nível de Educação Básica quanto em nível de Formação Inicial e Continuada de Professores que ensinam Matemática é marcada por ser uma viagem sempre nova, é um mergulho no desconhecido, exigindo do professor a consciência de estar aberto ao debate de ideias matemáticas, como também de questões de cunho sócio-político-cultural, que não tinha sido antecipado durante o planejamento, por mais que esta atividade tenha sido aplicada com diferentes públicos de níveis escolares distintos, percebe-se que pode-se chegar a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

Com a intencionalidade de refinar/aprofundar as discussões em torno desta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, desafiamos os professores a acrescentarem ou modificarem alguns fatos/acontecimentos na Narrativa Matemática, que resultassem em novo espaço de problematização e, em seguida, solicitamos que eles propusessem e resolvessem problemas.

Entendemos que esse movimento de aprofundamento da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática exigiu dos professores uma demanda cognitiva maior, uma vez que o foco principal foi perceber como os professores elaboram uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, bem como formulam e resolvem problemas.

Ao notar que os professores realizaram a tarefa solicitada, o professor-pesquisador pediu que os professores compartilhassem o trabalho realizado. Com isso, P14 inicia explicando que fez uma pesquisa na *internet* e acrescentou novos elementos entre as linhas 22 e 23, dando continuidade à fala de Cesinha. Veja todo trabalho realizado por P14:

Figura 117 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P14

- Acrescentar texto:
Entre as linha 22 e 23 = Continuação da fala de Cristina
- Outra coisa que vale analisar, é o preço da cesta básica que em uma pesquisa realizada pelo PROCON-PB em julho/23, em João Pessoa a cesta básica custa em média R\$ 289,00, mas o ponto que vale analisar é a variação entre o menor valor que custa R\$ 186,00 e o maior valor que custa R\$ 405,00.
- De acordo com a pesquisa realizada pelo o PROCON-PB em julho/23, que em João Pessoa o custo médio da cesta básica sai a R\$ 289,00, e a variação entre o menor e maior valor da cesta básica, é de R\$ 186,00 a R\$ 405,00, respectivamente. Determine:
- a) A taxa do menor e maior valor da cesta básica em relação a média.
- b) A taxa do menor e maior valor da cesta básica em relação ao salário mínimo. Sabendo que o salário mínimo é de R\$ 1 320,00.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Chamamos atenção para o fato de que o trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas realizado por P14, sempre que possível, está apoiado em buscas na *internet* com o propósito de coletar dados/informações reais, que o ajudem na escrita dos problemas e na elaboração de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas.

Em seguida, foi a vez de P9. Neste momento, ele explica que: “após a linha 7, senti a necessidade de colocar no texto o total da população do Brasil, para calcular a quantidade de pessoas que sofreram algum tipo de racismo, aí pesquisei na internet”. Veja o trabalho realizado por P9:

Figura 118 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P9

linha 7.

Eu li na internet que no último ~~censo~~ ^{censo} realizado pelo IBGE no Brasil, mostrou que existem 214,3 milhões de habitantes e que 7 a cada 10 negros sofrem preconceitos.....

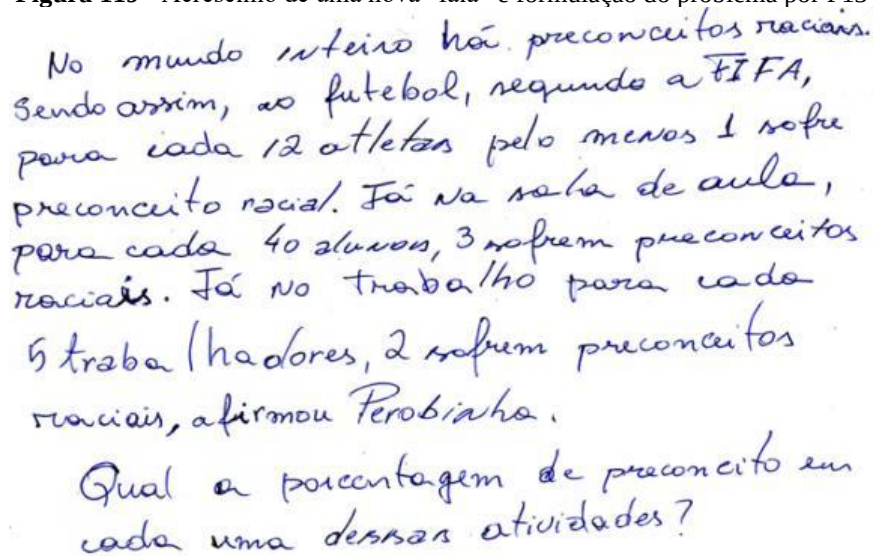
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Na ocasião, P9 destacou o seguinte problema: “De acordo com as informações, quantas pessoas negras, no Brasil, sofrem preconceitos em lojas, restaurantes ou mercados? Diante da estratégia utilizada por P9 para acrescentar um novo fato a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, advogamos que a ausência deste

dado (quantidade de pessoas que sofrem racismo) ocorreu de forma intencional, uma vez que esperávamos que os professores, visando ter sucesso no processo de proposição de problema, se sentissem provocados a realizarem pesquisas que qualificassem todo o trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

O P13 acrescentou novos fatos a Narrativa Matemática, enunciando o preconceito racial sofrido por pessoas em diferentes setores da sociedade. Veja todo o trabalho realizado por P13:

Figura 119 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P13



No mundo inteiro há preconceitos raciais. Sendo assim, no futebol, segundo a FIFA, para cada 12 atletas pelo menos 1 sofre preconceito racial. Já na sala de aula, para cada 40 alunos, 3 sofrem preconceitos raciais. Já no trabalho para cada 5 trabalhadores, 2 sofrem preconceitos raciais, afirmou Peróbiaha.

Qual a porcentagem de preconceito em cada uma dessas atividades?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, questionamos P13 se, de fato, esses dados são reais. Na ocasião, ele afirmou que esses dados são fruto de sua imaginação. Com isso, sublinhamos, para os professores, que é importante que uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, com a intencionalidade de provocar um debate com enfoque sócio-político-cultural, deve ter como característica marcante informações mais próximas da realidade, para que, assim, o aluno possa analisar, refletir e intervir de forma crítica em questões de (in)justiça social.

Por exemplo, com relação ao mesmo enredo da Narrativa Matemática (questões envolvendo Racismo), ressaltamos aos professores que, P6 acrescentou um novo diálogo, partindo de um contexto real, em que, por meio da busca na *Internet*, levantou dados reais que podem mobilizar os alunos numa discussão na ótica da Matemática (visão internalista), como também promover uma discussão em âmbito social, podendo despertar o interesse dos alunos acerca de questões culturais e políticas que explicam o porquê do Irã ser um país estruturalmente racista. Veja todo o trabalho realizado por P6:

Figura 120 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P6

ACRÉSCIMO DE FALA:

RACISTA MESMO É O IRAN. EU VI UMA PESQUISA FEITA POR UMA ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DE CIENTISTAS QUE SE DEDICAM A PESQUISAS DE VALORES E COSTUMES. ESSA PESQUISA APONTOU QUE 42% DA POPULAÇÃO ADMITIA RESTRICÕES RACISTAS. É UM ABSURDO, AFIRMOU NEM.

PROBLEMA:

EM 2021, SEGUNDO O BANCO MUNDIAL, A POPULAÇÃO DO IRÃ ERA 88 MILHÕES DE PESSOAS. CONSIDERANDO ESSE DADO E O RESULTADO DA PESQUISA COMENTADO POR NEM, CALCULE QUANTOS HABITANTES EM MÉDIA, ADMITIA RESTRICÕES RACISTAS?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O acréscimo de um novo fato a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, defendido por P8, consistiu em definir a quantidade exata do quilograma de batatas a ser comprado, dando continuidade, a partir da fala de Cesinha. Assim, P8 destacou: “Acho que a gente precisa analisar onde é vantajoso comprar batata”, incrementando um novo diálogo entre Cesinha e Nê, e problematizando onde seria mais vantajoso comprar 3kg de batatas. Veja todo o trabalho realizado por P8:

Figura 121: Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P8

- Acho que a gente precisa analisar onde é vantajoso comprar batata, afirma Cesinha!

Então, Cesinha pergunta a Nê: - Quantos quilogramas de batata você vai comprar?

Nê responde: - Só vou comprar 3 quilogramas, que é suficiente para a semana toda.

- Sr. Deda, amanhã estou indo comprar batata lá,...

Sabendo que o quilo da batata custa R\$ 4,00 no mercado “Povo Imbatível”, R\$ 5,00 na Vendinha do Sr. Deda e que se gasta R\$ 6,00 de gasolina para ir fazer a compra no mercado “Povo Imbatível”, determine onde é mais vantajoso para Nê comprar os 3 quilogramas de batata.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O P1 reescreveu a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática lançando uma proposta que consistiu no desconto de 15% por cada quilograma de batatas. Ademais, P1 destacou que buscou tornar mais vantajoso comprar na vendinha do Sr. Deda, 6kg de batatas, já que na situação inicial, o gasto pela compra de 6kg de batatas se manteria o mesmo nos dois estabelecimentos. Veja todo o trabalho realizado por P1:

Figura 122 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P1

Fala:
- Amanhã na minha vendinha, cada quilo de batata vai estar com 15% de desconto, afirmou Sr. Deda.

Problema:
PC foi na vendinha de Sr. Deda comprar batata, cada quilograma de batata custava R\$ 5,00. Chegando lá, PC viu que a vendinha estava com 15% de desconto na compra de cada quilograma de batata, e decidiu comprar 6 quilos de batatas que sairia R\$ 30,00. ~~Quantos quilos de batatas ele comprou?~~ Quanto PC pagou pelos 6 quilos de batatas?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Destacamos, para os professores, que uma forma de Sr. Deda seduzir as pessoas a comprarem batatas em sua vendinha decorre a partir do lançamento de promoções que, até certo ponto, pode tornar mais vantajoso para os clientes optar pela sua vendinha. Ademais, enfatizamos que esse problema pode ser aprofundado, inclusive, com a geração de novos problemas que busquem delimitar até quantos quilogramas de batatas será vantajoso comprar na vendinha de Sr. Deda.

O cenário que explicita que Nêm foi à vendinha de Sr. Deda comprar batatas foi uma fonte de inspiração para os professores apresentarem diferentes reformulações para a Narrativa Matemática. Por exemplo, P10 enfatiza que Nêm, aproveitando a ida na vendinha de Sr. Deda, resolveu aproveitar a promoção da semana e comprou bananas, cajus e abacaxis. Ademais, modificou o ambiente matemático, propondo um problema envolvendo Sistemas Lineares, bem como destacou que antecipou e controlou uma solução do problema que envolvia a ideia de Sistema Possível e Indeterminado (SPI). O problema proposto por P10 despertou o interesse dos professores e ele foi à lousa para defender sua resolução, como mostra o registro de todo o trabalho realizado por P10 a seguir:

Figura 123 - Acréscimo de uma nova “fala”, formulação e resolução do problema por P10 (primeira parte)

(ACRESCENTANDO O DIÁLOGO: SEU DEDA X NÊM)

→ NA VENDINHA DO SEU DEDA ENCONTRAMOS BATATAS A ~~AV~~ R\$ 5,00 O QUILO, MAS ALÉM DA BATATA ENCONTRA-SE ~~DE~~ TAMBÉM, ABACAXI, BANANA, CAJU E OUTROS ITENS. A-PROVEITANDO A PROMOÇÃO DA SEMANA, NÊM RESOLVEU ~~AV~~ COMPRAR 4 ABACAXIS, 5 DÚZIAS DE BANANA E 3 BANDEJAS DE CAJU, TOTALIZANDO R\$ 41,00. COMO NÃO TINHA O DINHEIRO COMPLETO E TAMBÉM NÃO QUERIA FICAR ~~DE~~ VENDENDO, RESOLVEU TIRAR DE SUA COMPRA, (2 ABACAXIS, 1 DÚZIA DE BANANA E 1 BANDEJA DE CAJU, PAGANDO R\$ 28,00. DIANTE SITUÇÃO PROPOSTA, PERGUNTA-SE: QUANTO NÊM PAGOU POR CADA PRODUTO COMPRADO? $(2.5) + (1.4) + (1.3)$)

PROCURANDO A SOLUÇÃO:

SPI:
$$\begin{cases} 4a + 5b + 3c = 41 \\ 2a + 4b + 2c = 28 \quad [x(-2)] \\ \hline 4a + 5b + 3c = 41 \\ -4a - 8b - 4c = -56 \\ \hline -3b - c = -15 \end{cases}$$

OBS.: DETERMINAR OS VALORES DE a, b e c em função de $c = k$
 $\uparrow c = k$

• CALCULANDO “b”:
 $-3b - k = -15$
 $-3b = -15 + k \Rightarrow b = 5 - \frac{k}{3}$

• CALCULANDO “a”:
 $4a + 5 \cdot (5 - \frac{k}{3}) + 3 \cdot k = 41$

$$4a + 25 - \frac{5k}{3} + 3k = 41$$

$$4a + \frac{4k}{3} = 16$$

$$4a = 16 - \frac{4k}{3}$$

$$a = \frac{16 - \frac{4k}{3}}{4} \Rightarrow a = 4 - \frac{k}{3}$$

OBS.: Para “k” um número natural qualquer diferente de zero ($k \in \mathbb{N}^*$), temos infinitas soluções.

(VIRE)

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 124 - Continuação do acréscimo de uma nova “fala”, formulação e resolução do problema por P10 (segunda parte)

CONT.:

PARA $k=3$, TEMOS:

• VALOR DO ABACAXI:
 $a = 4 - \frac{3}{3} \Rightarrow a = 3$ ou R\$ 3,00

• VALOR DA DÚZIA DE BANANA:
 $b = 5 - \frac{3}{3} \Rightarrow b = 4$ ou R\$ 4,00

• VALOR DA BANDEJA DE CAJU:
 $c = k \Rightarrow c = 3$ ou R\$ 3,00

→ VERIFICANDO ESSES VALORES NA 1ª EQUAÇÃO:
 $(4.3) + (5.4) + (3.3) = 41 \quad (V)$

→ VERIFICANDO ESSES VALORES NA 2ª EQUAÇÃO:
 $(2.3) + (4.4) + (2.3) = 28 \quad (V)$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Desse modo, destacamos, para os professores, que devemos analisar os problemas propostos ficando atentos para aspectos importantes de um conteúdo matemático. Após esse comentário, iniciamos um debate envolvendo a resolução apresentada por P10. Observe a seguir:

P2: Após esse comentário de Adriano, eu fiquei pensando: se a gente fosse explicar ao aluno, ele iria perguntar quem é k nessa situação? É banana? É abacaxi? Pelo que eu entendi, o k seria o preço.

P10: Faltou colocar só uma coisa ali – que k é um número qualquer que pertence aos reais. Quer dizer, os reais não, nem poderia ser os racionais, nem os números negativos. Então, seriam os naturais, excluindo o zero.

Destacamos aos professores que, se o aluno não dispõe de algum método para resolver um Sistema Possível e Indeterminado, uma alternativa que pode ser implementada para solucionar o problema é por meio de tentativa e erro. Enfatizamos, ainda, que, no ato da organização dos dados para a proposição do problema, P10, de alguma forma, utilizou esse método para controlar a solução.

Nessa mesma direção, P7 ressalta que o seu trabalho realizado também consistiu em acrescentar novos produtos para que Nêm analisasse, a partir das suas necessidades, até que ponto seria mais vantajoso realizar a compra na vendinha do Sr. Deda. O P7 destaca que o acréscimo dos novos elementos ocorreu a partir da seguinte fala de Cesinha: *“Acho que a gente precisa analisar onde é mais vantajoso comprar batata”*, nomeando outros produtos que deveriam ser comprados, como, *“feijão, que custa R\$ 0,30 a mais que no mercado”*, *“macaxeira, que custa R\$ 0,50 a mais barato que no mercado”* e *“ovos, que custam R\$ 0,05 a menos que no mercado”*. Veja todo o trabalho realizado por P7:

Figura 125 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P7

APÓS A FALA DE CÉSINHA: ACHO QUE AGENTE ~~VA~~ PRECISA ANALISAR ONDE É VANTAJOSO COMPRAR BATATA.

Sr. DEDA: E SE CONSIDERARMOS OUTROS PRODUTOS, FEIJÃO QUE CUSTA R\$ 0,30 (A MAIS QUE NO ^{MERCADO} ~~GADE~~), MACAXEIRA R\$ 0,50 (MAIS BARATO QUE NO MERCADO) E OVOS QUE CUSTA R\$ 0,05 A MENOS QUE NO MERCADO, COMO SERIA ESSA ANÁLISE?

PC: VAMOS MONTAR UM PROBLEMA, COMPRANDO 1kg DE BATATA 2kg DE FEIJÃO, 4kg DE MACAXEIRA E UMA DÚZIA DE OVOS, ONDE SERIA VANTAJOSO FAZER AS COMPRAS? (SABENDO QUE O kg DE FEIJÃO E MACAXEIRA CUSTAM RESPECTIVAMENTE R\$ 3,50 E R\$ 2,00 E A UNIDADE DO OVO É R\$ 0,50 NO MERCADO.)

① APÓS A FALA DO Sr. DEDA ACRESCENTAMOS NOVOS PRODUTOS, PC, PEROBINHA E NÊM FORAM FAZER AS COMPRAS DOS PRODUTOS NO MERCADO. PC COMPROU 2kg DE FEIJÃO, 4kg DE MACAXEIRA E 12 OVOS GASTANDO R\$ 35,80, PEROBINHA COMPROU 1kg DE FEIJÃO, 5kg DE MACAXEIRA E 10 OVOS GASTANDO R\$ 32,50 E NÊM COMPROU 3kg DE FEIJÃO, 3kg DE MACAXEIRA E 20 OVOS GASTANDO R\$ 44,50. SABENDO QUE O VALOR DO kg DE FEIJÃO É DE R\$ 3,50, QUAL O VALOR DOS DE MAIS PRODUTOS?

$$\begin{cases} 2x + 4y + 12z = 35,80 \\ x + 5y + 10z = 32,50 \\ 3x + 3y + 20z = 44,50 \end{cases}$$

x → FEIJÃO
y → MACAXEIRA
z → OVOS

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Destacamos, para os professores, que P7 apresentou outra proposta para seduzir Nêm a comprar na vendinha de Sr. Deda, ao ofertar outros produtos que estão com preços menores com relação ao mercado “Preço Imbatível”.

O P7 explicou que formulou dois problemas e um deles surge no próprio diálogo em que PC propõe um problema e convida os outros personagens a refletirem sobre qual seria a melhor opção para comprar os produtos. Continuando seu processo de pensamento, P7 explana que adotou o preço da macaxeira e dos ovos mais baratos do que no mercado, justificando que: “*aí vocês poderiam pensar: mas por que a macaxeira é mais barata do que no mercado? Ele poderia ser um produtor. Poderia plantar em casa e ovos também ter em casa. Inclusive, o pessoal do mercado poderia comprar macaxeira a ele para revender*”.

Para continuar refletindo, defendemos a importância, levando em consideração as nossas necessidades, de valorizar e fortalecer os pequenos comércios do local que nós residimos, ao invés de contribuir para o desenvolvimento e enriquecimento de grandes redes de

supermercados. Na direção deste mesmo debate, P4 levanta outra proposta que pode ajudar NêM a decidir comprar batatas na vendinha do Sr. Deda, propiciando um novo aprofundamento da Narrativa Matemática. Na ocasião, P4 justifica que o trabalho realizado decorreu de alguns movimentos didáticos que ele tem observado durante a operacionalização da abordagem de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, ao dizer que:

P4: Eu tentei atender a duas coisas que estão sendo bastante discutidas aqui, que uma delas é trabalhar dentro do contexto social. Estou achando muito importante. Eu não conhecia essa prática, mas, a partir destes encontros, despertou esse olhar em mim, pois achei bem interessante. E outra é tentar trazer dados que se aproxime o máximo de dados oficiais e reais. Por isso, fiz uma pesquisa na *internet*.

PP: Ótimo!

Desse modo, P4 fez a leitura do trabalho realizado, acrescentando um novo fato a Narrativa Matemática, que amplia o número de propostas levantadas para convencer NêM ao comprar batatas na vendinha de Sr. Deda, ao dizer que Sr. Deda cultiva batatas no seu sítio e faz uso de agrotóxicos biológicos, já no mercado da cidade não há garantias de que não se utilizou agrotóxicos químicos. Veja todo o trabalho realizado por P4:

Figura 126 - Acréscimo de uma nova “fala”, formulação e resolução do problema por P4

— EU GASTEI R\$ 6,00 NO TOTAL, IDA E VOLTAR, EXPLICA NÊM!

AINDA COM O OBJETIVO DE CONVENCER NÊM A CONSUMIR EM SUA VENDINHA, SR DEDA FEZ A SEGUINTE AFIRMAÇÃO:

— NÊM, CASO OPTE POR COMPRAR A BATATA EM MINHA VENDINHA VOCÊ TEM A GARANTIA DE QUE É UM PRODUTO SEM QUALQUER USO DE AGROTÓXICOS QUÍMICOS, POIS É CULTIVADA NO MEU PRÓPRIO SÍTIO E SÓ UTILIZAMOS AGROTÓXICOS BIOLÓGICOS, QUANDO NECESSÁRIO.

— ISSO É UM PUNTO MUITO IMPORTANTE, DISSE NÊM, E CONTINUOU,

— VI EM UM ^{SÍTIO} ~~DEBATE~~ ^{ARTIGO} QUE DE 2000 A 2022 O BRASIL AUMENTOU DE 82 PARA 652 O NÚMERO DE AGROTÓXICOS LIBERADOS.

1 DISPONÍVEL EM: <https://g1.globo.com/economia/agrotoxicos...>

PROBLEMA PROPOSTO:

COM BASE NAS FALAS DO SR DEDA E NÊM, QUAL A VARIAÇÃO PERCENTUAL DO NÚMERO DE AGROTÓXICOS LIBERADOS NO BRASIL DO ANO 2000 A 2022?

RESOLUÇÃO

$$\text{VARIAÇÃO} = \frac{\text{VALOR FINAL} - \text{VALOR INICIAL}}{\text{VALOR INICIAL}} \cdot 100 = \frac{652 - 82}{82} \cdot 100 =$$

$$= \frac{570}{82} \cdot 100 \approx 6,95 \cdot 100 \approx 695 \%$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Enfatizamos, ainda, que o trabalho realizado por P4 possibilita a promoção do debate acerca do uso exagerado de agrotóxicos no ano de 2022 no Brasil, buscando entender, principalmente, quais os impactos negativos gerados para o meio ambiente e para a população

brasileira. Dando continuidade ao refinamento da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, solicitamos que P12 compartilhasse o seu trabalho realizado para os professores. Por sua vez, P12 destacou que não tinha finalizado a atividade, e enfatizou que fez o caminho inverso – primeiro, formulou o problema e que precisava de mais tempo para acrescentar uma nova “fala” que esteja em consonância com o problema proposto, de modo a estar relacionada aos fatos que compõem a Narrativa Matemática.

Comentário: Durante o processo de proposição de problemas, o propositor pode antecipar a solução do problema, ou seja, há um controle sobre a resolução do problema. No caso do trabalho realizado por P12, o problema precedeu às informações que compõem a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, tendo, assim, um controle sobre que dados deveriam estar presentes na redação que tem como finalidade ser o ponto de partida para a geração de problemas. Nota-se que houve um monitoramento e autorregulação sobre o seu próprio fazer ou sobre o seu pensar.

Ao finalizar, P12 solicitou ao professor-pesquisador o espaço para fazer a leitura do trabalho realizado. Veja a seguir:

Figura 127 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P12

PEROBIMHA DESEJA COMPRAR A MOTO DE FÊM, PORÉM, AINDA NÃO CONSEGUIU JUNTAR TODO O DINHEIRO NECESSÁRIO PARA COMPRÁ-LA À VISTA. FÊM LHE INFORMOU QUE NO DIA 03/08/2023, O VALOR DA MOTO IRÁ SOFRER UM AUMENTO DE 5% EM RELAÇÃO AO VALOR DO DIA 02/08/2023. SABENDO QUE O VALOR DA MOTO NO DIA 02/08/2023 ESTAVA EM R\$ 12.000,00, E QUE ESSE AUMENTO IRÁ ACONTECER DIARIAMENTE, DETERMINE O VALOR QUE PEROBIMHA PAGOU, SABENDO QUE ELE COMPREU A MOTO NO DIA 05/08/2023.

“NOVA FALA”

PEROBIMHA PERCEBEU QUE A MOTO DE FÊM CONSUMIA MUITA GASOLINA, E DICOU ENTÃO PORIS MODELOS DE MOTO QUE POSSUAM UM CONSUMO DE COMBUSTÍVEL MELHOR DO QUE A DELA.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Enfatizamos, para os professores, que o modelo da moto pode ser uma variável importante por estar relacionada à viagem até a cidade para comprar batatas e, diante disso, iniciamos um diálogo com P12:

PP: Por que você pensou em modelos diferentes?

P12: Porque o consumo da moto vai depender do modelo. E, se consome mais, a viagem até a cidade pode ser mais cara.

PP: Ok!

Na sua vez P2, explica que elaborou um diálogo em que Sr. Deda tenta convencer Nêm de que a melhor opção será comprar batatas em sua vendinha, pois “Do sítio para cidade são oito quilômetros”, a moto realiza “24km/l” e que o litro “custa R\$ 5,40”. Ademais, com os novos fatos acrescentados, P2 explica que, “Inclusive, com esse acréscimo que coloquei, eu retiraria que Nêm gastou R\$ 6,00 de ida e volta. Porque agora será necessário calcular o gasto com a viagem a partir das informações dadas”. Veja, a seguir, o trabalho realizado por P2:

Figura 128 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P2

Por Diego Matias do Oliveira Cunha

- Na minha vendinha, é R\$ 5,00 o quilo, mas você não vai gastar com transporte, pois do sítio para cidade, são oito quilômetros.
- Sua moto faz quantos Km com um litro de gasolina?
- 24 Km/l, afirmou Nêm.
- Eu abarrego no posto da cidade que custa R\$ 5,40 cada litro.

Proposta de problema:

I) De acordo com o texto, imaginando que Nêm esteja disposto a comprar 5kg de batata, onde seria mais vantajoso financeiramente comprar? E de quanto seria essa economia?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Destacamos, para os professores, que tanto o acréscimo defendido por P12 quanto por P2 possibilita mergulhar em novos horizontes, ampliando a discussão em nível matemático, no caso de P12, temos um problema envolvendo taxa percentual, já P2 delimita diversas variáveis que estão relacionadas e permitem aprofundar o debate sobre a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativa Matemática. Destacamos, ainda, que ambas as propostas de reformulação da Narrativa Matemática estão conectadas, uma vez que, se P12 ressalta que o modelo de moto influencia no consumo de gasolina, P2 aponta o valor do litro da gasolina e o consumo médio em litro por quilômetros rodados.

Comentário: Ao perceber que sempre pode ir mais além, com a proposição de problemas que auxilia na leitura de mundo, os professores vão expondo diferentes olhares para uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, de modo a ampliar o repertório de problemas que eles podem explorar no chão da escola da Educação Básica, a fim de promover impacto

positivo na aprendizagem dos alunos e, com isso, potencializar seu desenvolvimento profissional.

Na sua vez, a leitura do trabalho realizado por P5 promoveu o debate entre os professores com relação à formulação e resolução do problema. Veja o trabalho realizado por P5 e o diálogo:

Figura 129 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P5

- Sr. Deda, amanhã estou indo comprar batatas lá, mas com uma condição - vou dar uma nota de R\$ 20,00 na compra de 1 quilo de batata, e quero o meu troco em moedas para colocar no porquinho, que só abrirei no final de Novembro para comprar roupas novas para as festas de Natal.

Problema

- Pc estima que para comprar blusa, calça e tênis, ele deve juntar R\$ 240,00. Estamos no mês de Abril e ele abrirá o porquinho final de Novembro. Qual é o valor médio que Pc tem como meta mensal?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: No caso, o troco vai ser sempre R\$ 15,00?

P5: Nessa venda, ele vai receber R\$ 15,00 de troco em moedas. Aí, ele precisa voltar à venda, fazer uma nova compra e receber o troco em moedas. Eu quero saber quanto ele tem que juntar de moedas para que, em novembro, ele tenha R\$ 240,00.

P13: Se ele recebeu R\$ 15,00 e precisa juntar R\$ 240,00, então, falta R\$ 225,00. E precisa de quantos meses?

P5: De abril a novembro.

P13: Vai ter que tirar abril, porque já sabemos que foi R\$ 15,00.

P5: Isso! E, no caso, eu quero saber quanto ele vai ter que juntar em média por mês para ter R\$ 240,00 em novembro.

P13: Então, a gente tira abril e divide pelo número de meses que há até novembro.

P5: Eu pensei em outros problemas a partir deste. Por exemplo, ele poderia fazer outras compras no mês de abril e passar três meses sem comprar, por ter atingido a média. Pensei num problema bem aberto. Não é obrigado ele fazer a média no mês. Ele pode compensar no outro mês o que faltou para atingir a meta.

P3: No caso aí, para ver a média mensal que ele precisaria atingir, é só dividir por 7.

Salientamos que, embora P5 tenha problematizado a meta mensal que deve ser atingida por PC, para que ao fim novembro atinja R\$ 240,00, ele ainda levanta possibilidades de novos problemas, entendendo que o problema inicial é um problema aberto, e que possui o potencial para geração de outros problemas matemáticos.

Durante o compartilhamento dos trabalhos realizados pelos professores, buscamos fazê-los refletir sobre em que turmas poderiam ser discutidas as situações geradoras de problemas elaboradas por eles a partir da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas

no formato Narrativa Matemática, bem como que conceitos ou conteúdos matemáticos poderiam emergir com os novos fatos/acontecimentos acrescentados ou modificados. Sobre isso, chamamos atenção para a importância do contexto, uma vez que entendemos que seria inviável solicitar que alunos de determinado nível escolar proponham problemas, tomando como ponto de partida uma situação que demanda um conhecimento em âmbito matemático e/ou social que o aluno ainda não possui e que, potencialmente, não estão aptos para trabalhar um problema em nível de processos e conceitos matemáticos.

Argumentamos que as diferentes propostas de reformulação da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, elaboradas pelos professores que enfocaram na tentativa de Sr. Deda competir com o mercado da cidade, são elucidadas e legitimadas por meio da Matemática, sendo que, em cada uma delas, há a garantia de ser vantajoso, em algum momento, comprar na vendinha de Sr. Deda, e o que vai determinar a escolha são as condições admitidas nos problemas. Ou ainda pela qualidade do produto oferecido, como, por exemplo, a proposta defendida por P4, que garantiu que as batatas vendidas no mercadinho do Sr. Deda são cultivadas fazendo uso de agrotóxicos naturais.

Acrescentamos, ainda, que uma situação-problema envolvendo o troco no ato de um compra, quando discutida em nível de Educação Básica, na ótica da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, poderia ser explorada servindo como trampolim para a proposição de novos problemas, em que se toma alguns casos análogos que permitem buscar padrões que ajudem na geração de outros problemas matemáticos, visando ampliar para uma situação geral por meio da análise de diferentes conjecturas, compreendendo, assim, o motivo de um problema proposto nas condições dadas na atividade não possuir solução, e até aprofundando/refinando o debate, podendo partir não só do professor, mas, também, dos alunos a necessidade de modificar os dados da atividade para dar conta dessa “limitação” e continuar avançando (a proposição de problemas durante o processo de exploração e resolução de problemas).

Comentário: Nesse contexto, a Proposição de Problemas desenvolvida a partir da Exploração de Problemas sinaliza que pode impulsionar a escrita de problemas matemáticos, ancorada no processo de problematização. Assim, o(a) estudante pode observar padrões e conexões entre os diferentes elementos de um problema: dados/informações, requisito, contexto e ambiente matemático. Isso porque o movimento didático de sempre “ir além” pode culminar na proposição de problemas que convergem em termos de processos e conceitos/conteúdos matemáticos e, conseqüentemente, mantém uma estrutura conceitual semelhante, facilitando, assim, a geração de novos problemas.

No encontro passado, o professor-pesquisador sugeriu a leitura do artigo “*What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems*”

(Crespo; Sinclair, 2008). Em síntese, acerca deste texto, foi debatido sobre a análise de duas intervenções que focaram em atividades de proposição de problemas, com futuros professores de Matemática. Foi discutida a hipótese de que a falta de exploração antes e durante o processo de proposição de problemas matemáticos pode culminar em problemas mal formulados. Assim, com as intervenções, debateu-se o papel da exploração de problemas no processo de proposição de problemas e como os futuros professores julgam a qualidade dos problemas que foram propostos, adotando critérios estéticos, sendo destacado que a responsabilidade do professor é maior do que a do aluno, pois o docente precisa contemplar um olhar para os aspectos matemáticos e pedagógicos, como, por exemplo, o professor-pesquisador sempre questionava os professores acerca das ideias que os problemas formulados trabalhavam, as turmas que os problemas poderiam ser discutidos, as resoluções e soluções alternativas para os problemas, dentre outras questões matemáticas e pedagógicas.

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Retoma-se um problema que foi reescrito no encontro anterior para aprofundar a discussão que envolve as Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas;
- A metodologia de Exploração de Problemas contribuiu para a geração de problemas a partir da transição entre as Representações Múltiplas de Álgebra;
- Com a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, os professores podem aprender que devem estar abertos para discussões em nível de conceitos matemáticos e sociais, que não tinham sido antecipadas durante o planejamento da atividade;
- Solicita-se que os professores acrescentem ou modifiquem alguns fatos/acontecimentos da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, em seguida, deve-se propor e resolver problemas;
- Na elaboração de uma atividade para trabalhar via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas que vise discutir temas sociais, políticos e culturais, aprende-se que é importante que os dados/informações que vão ser o ponto de partida para a proposição dos problemas se aproximem, o máximo possível, do contexto real.

7.10 Décimo episódio de sala de aula (05/08/2023): explorando, propondo e resolvendo problemas a partir da Narrativa Matemática “A crise hídrica – um problema mundial”

Iniciamos o encontro entregando a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, a seguir, para cada professor, como material impresso, e também enviamos para o grupo do *WhatsApp* o documento no formato PDF. Posteriormente, solicitamos que eles fizessem uma leitura detalhada e, em seguida, apresentassem suas impressões, curiosidades e reflexões em forma de problemas e os resolvessem.

A crise hídrica – um problema mundial

— Boa noite, pessoal! Cheguei atrasado porque aproveitei que tinha chegado água, para encher as vasilhas e os baldes, explicou PC.

— A situação de água doce no nosso município está cada vez mais difícil, principalmente, com o aumento das residências devido à abertura de alguns loteamentos, explicou Cesinha.

— Eu e meus colegas de escola fizemos uma entrevista com um funcionário da empresa autônoma que presta serviço de abastecimento de água potável no nosso município, afirmou Perobinha. Ele explicou que a empresa abastece 5.050 residências. E ainda falou das tarifas pagas pelo consumo mensal de água em m^3 : Faixa 1 - para o consumo de até $10 m^3$, valor fixo de R\$ 29,00; Faixa 2: para o consumo maior que $10 m^3$ e até $15 m^3$, paga-se uma tarifa de R\$ 2,50 por m^3 que ultrapasse $10 m^3$; Faixa 3: para o consumo maior que $15 m^3$ e até $20 m^3$, paga-se uma tarifa de R\$ 2,70 por m^3 que ultrapasse $15 m^3$.

— O funcionário falou, também, que cada residência não pode exceder no mês o consumo de $20 m^3$ de água, finalizou Perobinha.

— A nossa situação é complicada porque dependemos de uma barragem pequena para dar conta das necessidades de todo o município, acrescentou Cesinha.

Acrescentei que: — Eu li⁶³ que, no Brasil, cada pessoa consome, em média, 154 litros de água por dia. No entanto, a Organização das Nações Unidas (ONU) considera que cada pessoa necessita de 110 litros de água ao dia.

— E o que explica essa diferença de 44 litros? Questionou PC.

— Provavelmente, deve ser devido ao desperdício diário de água, explicou Sr. Deda.

⁶³ Disponível em: <https://ufscsustentavel.ufsc.br/2019/03/22/dia-mundial-da-agua-e-o-desperdicio-que-nao-se-ve/>. Acesso em: 13 jan. 2025.

— Muitos produtos que estão presentes no nosso dia a dia levam uma quantidade considerável de água, explicou Cesinha.

— Eu lembro que, na aula de Ciências, a professora Filomena explicou que mais de 70% do corpo humano é composto por água. Ela falou, ainda, que cada quilograma de massa corporal corresponde a 35 ml de água que devemos ingerir diariamente, falou Perobinha.

— Eu li⁶⁴ que a Terra possui 1,386 bilhões de metros cúbicos de água, sendo que apenas 2,5% desse total é água doce, e ainda que o Brasil possui a maior reserva de água doce da Terra, sendo aproximadamente 12% do total mundial. Além do mais, $\frac{1}{6}$ da população mundial não tem acesso à água potável, acrescentou PC.

Vale ressaltar que, neste encontro, estavam presentes 13 professores. Esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática foi trabalhada no decorrer de **três episódios de sala de aula (10º, 11º e 12º)**, visando abordar os seguintes conceitos e conteúdos matemáticos:

- Aprofundar ideias essenciais de Função partir do enredo da narrativa que destaca “as tarifas pagas pelo consumo mensal de água”, discutindo: lei da Função Afim, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio e a imagem da função, Função definida por várias sentenças e o esboço do seu gráfico;

- Discutir o significado de Fração como Operador Multiplicativo, a partir do fato: “ $\frac{1}{6}$ da população mundial não tem acesso à água potável”, como também outros significados que possa vir a surgir do movimento de exploração, proposição e resolução de problemas.

- Conversão de m^3 para litros (vice-versa);

- Regra de Três Simples;

- Abordar o conceito de Taxa Percentual a partir de alguns enredos da narrativa.

A escrita da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativa de Matemática “*A crise hídrica – um problema mundial*” teve como propósito potencializar o interesse dos professores, abordando uma temática de forte preocupação da população de Alagoinha-PB: a crise hídrica no município, estendendo em nível nacional e internacional. Por esse fato, percebemos um grande potencial desta Narrativa Matemática para

⁶⁴ Disponível em: <http://brasildasaguas.com.br/educacional/a-importancia-da-agua/>. Acesso em: 13 jan. 2025.

adentrar nas salas de aulas de matemática destes professores que ministram aulas no município de Alagoinha-PB, como também em qualquer lugar do Brasil, uma vez que a crise hídrica é um problema mundial emergente.

Para tanto, esclarecemos para os professores que fizemos uma pesquisa junto ao Serviço Autônomo de Água e Esgoto (SAAE) do município de Alagoinha-PB, a fim de saber quantas casas são abastecidas no município, as tarifas pagas pelo consumo mensal de água, como também apontamos que a criação de loteamentos urbanos intensificou a crise hídrica no respectivo município. Ressaltamos, ainda, que não há um limite de consumo mensal para cada residência. Esta informação foi acrescentada visando dar conta do conceito matemático (função definida por várias sentenças) que pretendemos discutir com os professores.

Comentário: Percebemos que a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática *Um “exame de problemas”* promoveu o engajamento dos professores tanto em nível cognitivo, quanto, também, em nível sócio-político-cultural, uma vez que eles externaram a necessidade de práticas de ensino de matemática que contextualizem questões sociais e políticas vinculadas ao entorno dos alunos, tal como o município em que eles habitam, o estado, o país ou o planeta Terra. Tal abordagem visa potencializar o interesse dos alunos na disciplina de Matemática e prepará-los para serem agentes ativos em prol da construção de uma sociedade digna e igualitária.

Citamos Gutstein e Peterson (2013), uma vez que, para os autores, repensar o ensino de Matemática também significa usar práticas que se baseiam no conhecimento e experiências dos alunos e de suas comunidades, promovendo, assim, experiências significativas em termos da vida diária e da cultura dos alunos.

Ademais, à medida que os alunos desenvolvem uma compreensão mais profunda de problemas sociais e ecológicos que assolam a nossa sociedade, eles ampliam seu olhar para o reconhecimento da importância de agir sobre suas crenças (Gutstein; Peterson, 2013).

O P12 inicia compartilhando todo o trabalho realizado. A partir disso, os professores solicitaram que ele fosse à lousa solucionar o problema formulado. Veja, a seguir, o problema proposto e a resolução defendida por P12 na lousa:

Figura 130 - Problema proposto por P12

UMA EMPRESA PRESTA SERVIÇO DE ABASTECIMENTO DE ÁGUA POTÁVEL PARA UM DETERMINADO MUNICÍPIO. PARA ABASTECER ESSE MUNICÍPIO POR UM DIA ESSA EMPRESA CONTA COM UMA CAIXA EM FORMATO DE UM CILINDRO RETO, COM 12m DE DIÂMETRO. SABENDO QUE ESSA CIDADE CONSUME EXATAMENTE 2 826 000 L DE ÁGUA POR DIA, DETERMINE A ALTURA QUE ESSA CAIXA DEVE TER PARA ARMAZENAR A ÁGUA NECESSÁRIA PARA ABASTECER ESSE MUNICÍPIO POR UM DIA. CONSIDERE $\pi = 3,14$.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Resolução:

$$d = 12\text{m}$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{m}$$

$$1\text{ m}^3 = 1000\text{L}$$

$$v = 2.826.000\text{L} \div 1000$$

$$v = 2.826\text{ m}^3$$

$$\pi = 3,14$$

$$h = ?$$

$$v = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$2.826 = 3,14 \cdot 6^2 \cdot h$$

$$2.826 = 113,04h$$

$$h = \frac{2.826}{113,04}$$

$$h = 25\text{ m}$$

Após o término da resolução, iniciou-se o debate. Veja a seguir:

P2: Essa divisão deu exato, no caso, 25?

P12: Sim.

P2: No caso, você se preparou para que a resposta fosse 25?

P12: Exatamente!

P7: Tem que combinar os valores para dar exato.

P12: Isso! Eu testei esse valor aqui, para multiplicar por uma altura, para se aproximar do valor do gasto de água por dia... Eu pesquisei também que, em média, uma pessoa consome 200 litros de água por dia. Como Alagoinha tem mais ou menos 13.500 habitantes, ou seja, aqui consumiria, na média, 2.700.000 litros por dia. Aqui, eu coloquei 2.826.000 de litros, que está na média. E, para o aluno resolver, não deveria esquecer de transformar para m^3 , pois estava sendo dado em litros.

Em seguida, enaltecemos todo o trabalho realizado por P12, em especial, algo que vem sendo marcante durante o processo de exploração, proposição e resolução de problemas apresentado por ele: o controle da solução do problema e de ideias matemáticas. Neste caso, 2.826.000 de litros derivou de um contexto real, pensando-se, especificamente, no produto, entre a quantidade de habitantes do município de Alagoinha-PB (13.500) e a quantidade média de água que uma pessoa consome durante um dia (200 litros), de modo que essa aproximação decorreu da necessidade de obter uma solução exata para o problema matemático. Sendo assim, os dados enfatizados no problema são reais, e estabelecem conexões com um dos focos de discussão desta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática (crise hídrica no município de Alagoinha-PB).

Chamamos atenção, ainda, para o fato de que, no problema proposto por P12, a altura foi a variável que ficou desconhecida e que, pensando a proposição de problemas matemáticos

depois do processo de resolução e exploração de problemas, outros problemas poderiam ser gerados, deixando uma outra variável desconhecida na fórmula $v = \pi \cdot r^2 \cdot h$, provocando, assim, uma mudança no processo de resolução do problema, uma vez que poderíamos solicitar que fosse encontrado o volume (v), podendo ser obtido por um produto direto dos valores: $\pi \cdot r^2 \cdot h$ ou encontrar o raio (r), por meio da operação de radiciação.

Na sua vez, P10 compartilhou os problemas que foram formulados, explanando que tomou como ponto de partida as tarifas pagas pela população de Alagoinha-PB, junto à empresa que presta serviço de abastecimento de água potável neste município, com a intenção de perceber como os problemas propostos pelos professores envolvendo este fragmento da Narrativa Matemática diferem um do outro, pôde-se, assim, discutir como uma sequência de problemas viabiliza a apresentação de um conceito matemático com mais profundidade. Desse modo, solicitamos que os professores que propuseram problemas envolvendo esse trecho da narrativa, compartilhassem o trabalho realizado. Veja as explicações dos professores que evidenciam descobertas e os pensamentos suscitados durante o processo de proposição de problemas:

P10: Elaborei alguns problemas para resolver por meio de Função Afim, que buscava calcular o consumo no mês de maio e junho.

P2: No meu caso, eu peço para descobrir a lei da função com mais de uma sentença, com relação às três formas de cobranças.

P1: Eu procurei saber quanto seria gasto no consumo máximo de $20m^3$.

Figura 131 - Problemas propostos por P10 e resoluções

PEROBINHA MORA COM SEUS PAIS E MAIS DUAS IRMÃS. NO MÊS DE JUNHO/23 A FATURA DE ÁGUA DA SUA CASA APRESENTOU UM TOTAL DE R\$ 49,60. EM TON DE DESCONFIANÇA, INDAGA SEU PAI: ACHO QUE FIZERAM ESSE CÁLCULO ERRADO. NO MÊS PASSADO CONSUMIMOS $15m^3$ DE ÁGUA E PAGAMOS BEM MENOS. PORQUE NESSE MÊS AUMENTOU TANTO? AJUDE PEROBINHA A TIRAR AS DÚVIDAS DO SEU PAI. - SABENDO QUE O CONSUMO DO MÊS DE JUNHO FOI MAIOR QUE O DE MAIO, RESPONDA:

a) QUAL FOI O VALOR DA FATURA EM MAIO?

$$y = 29 + 2,5x \quad (\text{TARIFA NA FAIXA 2}) \rightarrow \text{ATÉ } 15m^3.$$

$$y = 29 + 2,5 \cdot 5 \quad \leftarrow \text{EXCEDENTE: } 5m^3.$$

$$y = 29 + 12,5 \rightarrow y = 41,5 \text{ ou R\$ } 41,50 \leftarrow \text{RESP.}$$

b) QUANTOS METROS CÚBICOS DE ÁGUA A FAMÍLIA DE PEROBINHA CONSUMIU EM JUNHO?

$$y = 41,5 + 2,7x \quad (x: \text{Litros excedente dos } 15m^3).$$

$$49,6 = 41,5 + 2,7x$$

$$8,1 = 2,7x$$

$$x = \frac{8,1}{2,7} \rightarrow x = 3$$

RESUMO: $10m^3 \leftarrow$ Taxa fixa até $10m^3$.
 $5m^3 \leftarrow$ Excedente em maio
 $3m^3 \leftarrow$ " " junho
 RESP $\rightarrow 18m^3$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 132 - Problema proposto por P2

I) Considerando as três faixas, determine: a) ~~qual~~ a função, com mais de uma sentença, que estabelece relação com as três formas de cobrança:

b) Qual o valor a ser ^{cobrado} pago por uma residência que consumiu ~~20 m³~~ $13,6 \text{ m}^3$ de água?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 133 - Problema proposto por P1

Para o consumo de até 10 m^3 o valor ~~fixo~~ é R\$ 29,00, sabendo que se esse consumo ultrapassar de 15 m^3 o consumidor pagará, uma tarifa de R\$ 2,70 por m^3 . Quanto o consumidor pagará, se ele consumir 20 m^3 ?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Com a proposição destes problemas, tínhamos o interesse em discutir ideias essenciais de Função, bem como Função definida por várias sentenças. No entanto, para este momento, provocamos o debate acerca da água potável que é fornecida para a população do município de Alagoinha-PB. Observe a seguir:

PP: Quantos litros possui o depósito de água que abastece o município de Alagoinha?

P10: São 60 m^3 .

PP: Na opinião de vocês, por que as pessoas vêm sofrendo, nos últimos anos, com a escassez de água no nosso município?

P13: Durante o meu trabalho de especialização em Geografia, eu analisei e vi que eram 9 nascentes, hoje, só restam 5. Isso ocorreu porque as matas ciliares protegem a água de sujeiras...e elas foram desmatadas próximo à barragem, para plantar capim para os bois. Eu já vi lá restos de animais mortos e pessoas lavando roupa dentro, ou seja, sujando a água que a gente bebe. A água que é distribuída hoje em Alagoinha diminuiu com relação há anos atrás. A população naquela época era por volta de 6 mil habitantes, hoje, possui quase 14 mil, a população mais que dobrou.

P10: Eu quero fazer uma ressalva aí – só para lembrar que, até 1985, aproximadamente, o rio Tauá era uma ou é outra porque o rio é temporário.

P13: Isso! É bom diferenciar o que é rio temporário e rio perene. O rio temporário é aquele que, em determinado período, seca completamente. Já o rio perene é aquele que é contínuo. O que eu percebo que está acontecendo próximo da barragem de Tauá é que o desmatamento das árvores que seguram uma parte da água quando chove está tendo impactos negativos. Aí, quando chove muito, a água desce para cidade. Por exemplo, naquela época que Alagoinha foi invadida por água, e muitos comerciantes perderam mercadorias, se tivesse as árvores, elas iam retendo parte da água. Então, quando a barragem fica rasa, ou seja, onde tinha água, encheu de areia, isso é chamado de assoreamento. A barragem da gente está assoreada.

PP: Que outros fatores contribuem para a crise hídrica em Alagoinha?

P2: O desperdício de água é uma das causas que ocorre em qualquer lugar.

P12: Os loteamentos que estão aparecendo na cidade.

PP: Os loteamentos levaram a um aumento significativo de domicílios e, conseqüentemente, carecem de água para diferentes atividades.

P13: Isso! Alagoinha, hoje, possui mais de 5 mil casas. Isso tudo abastecida pelo Sistema de Água e Esgoto, e diminui a quantidade de água, mas, com o aumento de casas que devem ser abastecidas. Esse problema dos recursos hídricos aqui em Alagoinha precisa ser sanado, pois sofremos muito em tempos de seca.

PP: Verdade!

P13: Algo que estou percebendo é que as nossas discussões estão indo além de uma aula de Matemática, no caso aqui, usamos muitos conhecimentos de Geografia.

PP: Isso!

Com esse debate, inspirado em famílias que residem no município de Alagoinha-PB, P5 interveio e fez a leitura de uma sequência de problemas que visa conscientizar as pessoas sobre um modo de economizar água e impulsionar a produção de hortaliças e frutas por meio do Sistema de Produção Hidropônico. Observe a explicação defendida por P5 com relação ao trabalho de proposição de problemas realizado:

P5: Esse problema é sobre a economia de água no cultivo hidropônico...eu prestei atenção na realidade da nossa região. E como surgiu neste curso formação a temática água, eu fui pesquisar e vi que, além da economia de água, há vários benefícios que esse sistema traz para as plantas...por exemplo, se a gente quisesse algo fresco, deveríamos ir cedo na feira onde os pequenos produtores colhiam cedo da plantação original na terra e depois de um certo tempo estaria murcho. Já a hortaliça plantada no Sistema Hidropônico dura muito mais tempo verde nas prateleiras de supermercados. Baseado numa família real que eu conheço que usa esse sistema, eu fiquei imaginando a economia de água. O ponto negativo deste sistema é o valor que será gasto para iniciar a produção, pois é um pouco mais caro.

PP: Perfeito!

Figura 134 - Problemas propostos por P5

3) No sistema de produção hidropônico as plantas não utilizam o solo, elas ficam suspensas, e suas raízes ficam submersas em uma mistura de água com outros nutrientes. O ciclo de plantação do alface no solo é de 35 dias, na hidroponia média média de 40 dias, porém no solo a planta necessita de 25 litros de água por dia enquanto na hidroponia apenas 4 litros. Uma pequena família produtora de hortaliças tem uma pequena produção de alfaces semanal para vender na feira livre da cidade, sua produção de alface é de 250 plantas por semana. Virando a economia de água a família pretende mudar para o sistema hidropônico. Qual a quantidade de água que a família vai economizar? Qual seria a economia na conta de água da família? Concretizada a mudança eles mudariam de faixa de consumo?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: A Proposição de Problemas, assumida a partir da proposta de Exploração de Problemas, pode ser utilizada para descrever uma situação do cotidiano dos alunos e ajudar a interpretá-la, pois a geração de problemas

matemáticos ou de cunho sócio-político-cultural pode promover o engajamento dos alunos em debates em nível cognitivo e social que faz sentido para eles e, com isso, pode oferecer oportunidades de intervir de forma consciente sobre aspectos que os rodeiam.

Na sua vez, P7 fez a leitura do problema formulado, a partir do qual destacamos que ele avançou no processo de exploração de problemas ao implementar uma nova discussão em âmbito de conceitos matemáticos, em que, para resolver o problema, deveríamos considerar a quantidade de residências do município de Alagoinha-PB (5.050 casa) e, ainda, calcularmos, utilizando o significado de fração como operador multiplicativo, a quantidade de residências que encontra-se em determinada faixa de consumo de água em m^3 . Veja o problema proposto por P7:

Figura 135 - Problema proposto por P7

- Ⓘ CONSIDERANDO OS DADOS APRESENTADOS NO TEXTO, EM QUE A REFERIDA CIDADE TEM 5050 RESIDÊNCIAS E SUPONDO QUE O CONSUMO MÉDIO DIÁRIO POR PESSOA É DE 154 L DE ÁGUA. CALCULE O CONSUMO DIÁRIO E MENSAL, COM A MÉDIA DE PESSOAS POR RESIDÊNCIA SENDO IGUAL A 3.
- Ⓜ QUAL SERIA A APROVEITADAÇÃO MENSAL DA EMPRESA QUE FORNECE O ABASTECIMENTO DE ÁGUA, SABENDO QUE A CIDADE TEM 5050 RESIDÊNCIAS, QUE $\frac{1}{5}$ DAS RESIDÊNCIAS CONSUMEM $10 m^3$, $\frac{3}{5}$ CONSUMEM $12 m^3$ E $\frac{1}{5}$ CONSUMEM $18 m^3$.
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{ATÉ } 10 m^3 = 29,00 \\ < 10 \text{ ATÉ } 15 m^3 = 2,50 \text{ POR } m^3 \text{ EXCEDIDO DE } 10 m^3 \\ < 15 \text{ ATÉ } 20 m^3 = 2,70 \text{ POR } m^3 \text{ EXCEDIDO DE } 20 m^3 \end{array} \right.$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Ademais, questionamos P7 acerca dos dados correspondentes às frações de cada faixa de consumo, e ele explicou que: “porque $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 1$, que corresponde ao todo, no caso, o número exato de residências”. Desse modo, enaltecemos o cuidado que P7 teve na formulação do problema, ao controlar as informações numéricas, de tal forma que houvesse uma coerência matemática, apoiado na ideia do que significa “um todo” em problemas envolvendo frações.

Comentário: É de suma importância que os professores, durante o processo de proposição de problema, se atentem para aspectos chaves de um conceito matemático, de modo que os levem ao trabalho bem-sucedido de proposição de problemas, sinalizando competências acerca do domínio do conteúdo matemático.

Nessa mesma direção, P5 e P14 fizeram a leitura dos problemas formulados, e notamos que eles aprofundam em termos de processos e conceitos matemáticos, ao contextualizarem o

fato da Narrativa Matemática que expressa a quantidade de residências abastecidas no município de Alagoinha-PB por meio de uma análise através de números percentuais, ou seja, propondo outro tipo de representação de um Número Racional. Veja os problemas propostos por P5 e P14:

Figura 136 - Problema proposto por P5

2) Considerando que 70% dos domicílios abastecidos está na faixa 1 de consumo, 20% está na faixa 2 e 10% na faixa 3. Sempre considerando o máximo de consumo de cada faixa. Qual a soma do consumo de água mensal de todos os domicílios e o total arrecadado pela empresa de abastecimento.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 137 - Problema proposto por P14

De acordo com a entrevista feita por Perolinha e seus colegas, com um funcionário da empresa autônoma que presta serviço de abastecimento de água para o município. Que afirmou que a empresa abastece 5.050 residências, dividida em três faixas de consumo. Com essa informação e sabendo que 46% das residências estão na faixa 1 no consumo de água, 38% das residências estão na faixa 2 de consumo e 16% das residências estão na faixa 3 de consumo. Com as informações apresentadas acima, determine a quantidade de residências que a empresa de abastecimento de água presta serviço.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Sobre os trabalhos de proposição de problemas realizados por P5 e P14, enalteçamos para os professores, a preocupação com o conceito de Porcentagem, compreendendo que o todo representa 100% e, com isso, distribuíram as faixas de consumo em números percentuais (70%, 20% e 10%; 46%, 38% e 16%), cuja soma resulta em 100%. Ademais, houve o controle da solução do problema, ao propor taxas percentuais que, quando calculadas em torno da quantidade de residências, resultava em quantidade inteiras de residências, pois, no problema proposto por P14, calcula-se 46% de 5.050, que resulta em 2.323; 38% de 5.050, que resulta em 1.919; e 16% de 5.050, que resulta em 808. Destacamos, ainda, que o problema proposto por P5 possui semelhança com o problema proposto por P7, porque calcular 70% de 5.050 (resulta em 3.535), 20% de 5.050 (resulta em 1.010) e 10% de 5.050 (resulta em 505), de modo a fazer parte da primeira etapa do processo de resolução deste problema.

Embora com o problema proposto por P7 pudéssemos discutir a ideia de Fração com significado de Operador Multiplicativo, apontamos que um enunciado alternativo para este problema pode partir da transição da forma fracionária para percentual. Isso sinaliza que um

solucionador de problemas perspicaz pode recorrer a este processo para resolver o problema. E, por último, na segunda etapa, se faz uso desses resultados, em que ambos requerem o total arrecadado pela empresa, considerando as três faixas, sendo que P5 ressalta que houve o consumo máximo nas três faixas (10 m^3 , 15 m^3 e 20 m^3).

Os professores P4 e P9 compartilharam os problemas propostos, enfatizando que o trabalho realizado teve como ponto de partida o fragmento da Narrativa Matemática que informa a quantidade média de água consumida diariamente pelo brasileiro, bem como a quantidade necessária de água que uma pessoa necessita ao dia. Já P8, além de contextualizar esse enredo da narrativa, acrescenta, também, a quantidade de casas que são abastecidas no município de Alagoinha-PB. Veja os problemas propostos:

Figura 138 - Problema proposto por P4

USANDO COMO REFERÊNCIA OS DADOS DA ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS (ONU), ONDE AFIRMA QUE NO BRASIL CADA PESSOA CONSUME EM MÉDIA 154 LITROS DE ÁGUA POR DIA, CALCULE O VALOR DA CONTA DE ÁGUA, EM UM MÊS (30 DIAS), DE UMA FAMÍLIA FORMADA POR UM CASAL E DOIS FILHOS QUE MORAM NO MESMO MUNICÍPIO EM QUE MORA PEROBINHA CONSIDERANDO EXCLUSIVAMENTE AS TARIFAS DE CONSUMO.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 139 - Problema proposto por P9

De acordo com o texto "A crise hídrica", vimos que no Brasil cada pessoa consome em média 154 litros de água por dia e que a Organização das Nações Unidas (ONU) considera que cada pessoa necessita de 110 litros de água ao dia. Considere que na casa de PC reside com ele, sua mãe, seu pai e um irmão. Considerando a média de consumo de água e os dados sobre as tarifas de consumo, responda:

a) Qual o valor a ser pago na conta de água neste mês na casa de PC?

b) Levando em conta os dados da ONU, quantos litros de água a família de PC desperdiçou no decorrer do mês?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 140 - Problema proposto por P8 e resolução do problema

DE ACORDO COM A NARRATIVA "A CRISE HÍDICA - UM PROBLEMA MUNDIAL", UMA EMPRESA DE SERVIÇO AUTÔNOMO DE ÁGUA DE UM MUNICÍPIO, ABASTECE 5050 RESIDÊNCIAS COM ÁGUA POTÁVEL. CONSIDERANDO QUE CADA PESSOA CONSUME, EM MÉDIA, 154 LITROS DE ÁGUA POR DIA, DETERMINE O CONSUMO TOTAL DE LITROS DIÁRIOS, SABENDO QUE EM CADA RESIDÊNCIA POSSUI, EM MÉDIA, 2 PESSOAS.

$$154 \times 2 = 308 \text{ LITROS}$$

$$5050 \times 308 = 1545400 \text{ LITROS}$$

O CONSUMO TOTAL DE ÁGUA NO MUNICÍPIO É DE 1545400 LITROS

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Contudo, enfatizamos para os professores, que embora os problemas buscassem problematizar estes fatos da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativa Matemática, percebe-se que contemplaram, também, as tarifas pagas pelo consumo mensal de água em m^3 , levando em consideração cada faixa de consumo. Evidenciamos isso no trabalho realizado por P4, ao destacar na redação que compõe o problema por ele proposto que: "... considerando, exclusivamente, as tarifas de consumo". Com relação à formulação deste problema desenvolvido por P4, enalteçemos o cuidado que ele teve com a organização e a articulação das informações inerentes ao problema, em especial por ter esclarecido a quantidade de dias (30) referente ao mês do consumo de água pela família de Perobinha.

Na sua vez, P9 também solicita que, para resolver o problema, deve-se considerar os dados sobre as tarifas de consumo de água. No entanto, na escrita do problema, P9 não deixa claro o mês correspondente ao consumo de água na casa de PC, entretanto, no ato da leitura do problema proposto, P9 explica que, para resolver o problema, é necessário considerar o mês referente ao dia do encontro (agosto – 31 dias). Desse modo, ressaltamos que essa informação deveria ter feito parte da redação do problema, para que, assim, o solucionador não apresentasse dúvidas com relação ao processo de resolução do problema.

Por outro lado, sublinhamos, para os professores, que o problema proposto por P9 poderia ser um problema aberto, em que o aluno escolheria o mês com 28, 29 (ano bissexto),

30 ou 31 dias, obtendo soluções distintas para os problemas, embora a diferença de, no máximo, 3 dias (28 a 31) não ser suficiente para mudar de faixa de consumo.

Ainda sobre esse trecho da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativa Matemática, P6 formulou uma sequência de problemas, estimulando em um deles o debate de cunho sócio-político-cultural, explanando que buscou identificar “*fatores que causam o desperdício de água*”, de modo a levantar o seguinte problema: “*Quais medidas podem ser adotadas a fim dessa média ser reduzida?*”, e ainda ressaltou que: “*A ideia não é trabalhar só os números em si, mas ver o quanto ele pode economizar com essas medidas*”. Veja todo o trabalho de proposição de problemas realizado por P6 a seguir:

Figura 141 - Problema proposto por P6

- ② SEGUNDO O TEXTO, ~~PERCEBE-SE~~ PERCEBE-SE QUE HÁ UM DESPERDÍCIO DIÁRIO DE ÁGUA. O CONSUMO DIÁRIO POR PESSOA, NO BRASIL, É 154 LITROS. POR OUTRO LADO, A ONU CONSIDERA QUE É NECESSÁRIO 110 LITROS. SABENDO DISSO, RESPONDA:
- A) QUAIS MEDIDAS PODEM SER ADOTADAS A FIM DESSA MÉDIA SER REDUZIDA?
- B) QUANTOS POR CÉNTOS SÃO NECESSÁRIOS PARA A MÉDIA SER 110L?
- C) CONSIDERANDO QUE UMA PESSOA CONSIGA Atingir a Média O CONSUMO DIÁRIO PARA 110L, DURANTE 1 MÊS, QUANTOS LITROS DE ÁGUA ELA TERÁ ECONOMIZADO?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Os problemas em nível sócio-político-cultural propostos por P6 engajou os professores no debate que envolveu a delimitação de medidas que podem combater desperdício de água potável no dia a dia. Dessa discussão, surgiram algumas recomendações, a saber: diminuir o tempo do banho, fechar bem as torneiras, desligar a torneira ao escovar os dentes, o uso moderado de água nas atividades domésticas e, sempre que possível, reaproveitar a água já utilizada para realização de outros serviços.

Comentário: Para que um professor desenvolva uma aula de matemática numa perspectiva da Educação Matemática Crítica, que tem como encaminhamento didático a geração de problemas, em que, muitas vezes, foge do que o professor tentou antecipar para a aula, é preciso que o docente se prepare e aumente sua compreensão acerca da temática em foco, para que, assim, consiga manter e gerir as discussões, de modo que os alunos possam participar efetivamente, contribuindo com a resignificação de suas concepções acerca de aspectos importantes da sociedade, que os levem à conscientização sobre seu papel enquanto cidadão, engajando-se, sempre que possível, na transformação de questões de urgência social.

Com a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, esperávamos que fossem propostos problemas envolvendo a conversão

de unidades de capacidades, devido a algumas relações importantes, como: $1\text{ m}^3 = 1000$ litros e $1\text{ dm}^3 = 1$ litro. Sobre isso, P3 compartilhou o trabalho realizado em que formulou um problema envolvendo a relação $1\text{ dm}^3 = 1$ litro. Veja o problema proposto por P3:

Figura 142 - Problema proposto por P3

Com 10 m^3 do volume de água chegando para cada residência é possível encher um tanque com garrafa de 1 dm^3 . Quantos litros seria necessário para encher o tanque?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O P13 incorporou o trabalho com atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas e, ao invés de propor problemas a partir da Narrativa Matemática “A crise hídrica – um problema mundial”, resolveu escrever uma narrativa para abordar questões relacionadas à crise hídrica no Brasil. Veja a Narrativa Matemática elaborada por P13:

Figura 143 - Narrativa Matemática elaborada por P13

Eu, prestei a atenção na conversa de PC, Cezinha e Perobinha, sobre água potável. Eles falaram da entrevista ao órgão municipal responsável pelo abastecimento de água do município. Afirmou Lukkar.

— Realmente o assunto de água está presente em todos os lugares e tem sido tema dos debates, pois é de suma importância para a sobrevivência de Todos. Disse Val.

— Na escola o professor falou: O Brasil perdeu, nos últimos 30 anos, 15,7% de sua superfície de água, o que representa 3,1 milhões de hectares. Falou Lukkar.

— Agora Val, temos como resolver o problema do Nordeste em relação a água, além da Transposição do rio São Francisco que já existe, poderíamos também a água do Rio Amazonas para nossa região nordestina. Explorou Lukkar.

— Como assim? Perguntou Val.

— Colocando mangueiras de 1m de diâmetro com 1,2m de comprimento canalizando a água do rio Amazonas até o Nordeste. O rio Amazonas fica por volta de 4600km de distância da cidade de Cabaceira na Paraíba, que seria uma linha onde encontraria

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 144 - Continuação da Narrativa Matemática elaborada por P13

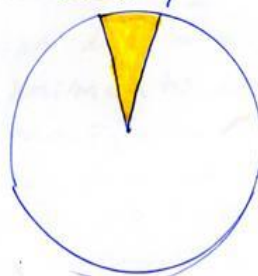
O maior número de cidades que necessitam de água nesse trecho do Polígono da Seca e a cidade de Cabaceira o ponto final. Falou Lúcio.

— Mas, a distância iria levar quantas manilhas? Perguntou Val.

— Isso não é nosso "Problema", mas dos matemáticos, que estão estudando com Adriano. Disse Lúcio.

— Veja bem! Quem pensa que tanta água está disponível para o consumo humano, está enganado, pois somente uma pequeníssima quantidade é de água doce e a grande parte está congelada ou embaixo da superfície do solo. De acordo com o gráfico a água doce é representada por 3,75%, que é a parte amarela, e a qual a porcentagem de água doce disponível no mundo? Os matemáticos que estudam com Adriano podem responder. Perguntou Lúcio.

□ Água Salgada
■ Água Doce



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Com a promoção de diferentes debates em âmbito cognitivo e social e depoimentos dos professores acerca do curso e das suas salas de aula de matemática, notamos que o uso de Narrativas Matemáticas para ensinar Matemática via Exploração-Proposição e Resolução de Problemas vem promovendo uma mudança da prática docente e das concepções dos professores acerca da aprendizagem matemática.

Em seguida, enaltece o trabalho realizado por P13, e enfatizamos para os professores, que as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas escritas por nós, em sua essência, possuem um caráter informativo e, com isso, os fatos que compõem as narrativas devem ser interpretados e decodificados por

meio da geração de problemas que expressam um contexto real. Desse modo, é de suma importância que dados em evidências estejam condizentes com a realidade que está sendo descrita. Nesse contexto, percebemos que a informação: “*O Brasil perdeu, nos últimos 30 anos, 15,7% de sua superfície de água, o que representa 3,1 milhões de hectares*”⁶⁵ foi levantada por meio de uma pesquisa na *internet*.

A atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática elaborada por P13 expõe alguns problemas matemáticos. Desse modo, ele foi à lousa para resolver o seguinte problema: “*De acordo com o gráfico, a água doce é representada por 9,75° que é a parte amarela. Qual a porcentagem de água doce disponível no mundo?*” Veja, a seguir, a resolução apresentada por P13:

$$360^\circ \qquad 100\%$$

$$9,75^\circ \qquad x$$

$$360x = 9,75 \cdot 100$$

$$360x = 975$$

$$x = \frac{975}{360}$$

$$x \cong 2,7\%$$

O P13 comenta sobre a solução do problema, enfatizando que o planeta Terra possui, aproximadamente, 2,7% de água potável, e que grande parte da água doce que existe está congelada. Além disso, também critica a construção desordenada de poços artesianos que estão impactando os lençóis freáticos. Explica, ainda, que as calotas polares estão derretendo, e está aumentando o nível da água do mar.

Destacamos, para os professores, durante a elaboração desta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativa Matemática, P13 controlou ideias matemáticas ao enfatizar o ângulo corresponde ao percentual médio de água potável no planeta Terra, de modo que a solução expressasse um dado próximo da realidade (há, aproximadamente, 2,7% de água potável no mundo).

Para aprofundar o trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas, enfatizamos, ainda, que, neste caso, a proposição de problemas ocorreu a partir de um gráfico de setores, e desafiamos os professores a proporem novos problemas. Observe os novos

⁶⁵Disponível em: <https://gife.org.br/crise-hidrica-brasil-ja-perdeu-um-nordeste-e-meio-de-agua/>. Acesso em: 13 jan. 2025.

problemas que culminaram no levantamento de uma síntese realizada por P4 com relação ao trabalho de proposição de problemas desenvolvido por P2:

P2: Considerando que 2,7% de toda água do mundo é doce, determine qual o ângulo que esse valor representa no gráfico?

P4: Dar o percentual e solicita-se o ângulo.

P13: Qual o ângulo com relação à quantidade de água salgada? No caso, é fazer ao contrário, agora, pedir ao contrário. Querer saber o ângulo com relação à água salgada.

Do trabalho realizado por P13, sublinhamos que nós, enquanto professores de Matemática, temos a atribuição de selecionar e elaborar atividades matemáticas que potencializem a aprendizagem dos alunos. Nesse contexto, o curso pode ajudar os professores a formularem seus próprios problemas ou situação-problema, visando dar conta de diferentes dificuldades dos alunos com relação ao saber matemático, bem como para atingir variadas finalidades para o ensino de Matemática numa perspectiva construtivista, em especial, promover competências dos professores para gerir uma sala de aula de matemática que direciona a participação engajada do aluno para explorar, propor e resolver problemas.

Finalizamos o encontro, solicitando que os professores trocassem os problemas entre si e, em casa, reescrevessem o/os problema/s do colega, e os resolvessem. E, ainda, sugerimos a leitura do artigo “*Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula*”, de autoria de Silvanio de Andrade (Andrade, 2017).

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- A atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática é o ponto de partida para os professores desenvolverem um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas, dando uma atenção especial à proposição de problemas;
- A elaboração da Narrativa Matemática “*A crise hídrica – um problema mundial*” sinalizou aos professores que podem despertar o interesse dos alunos ao elaborar e trabalhar uma atividade exploração, proposição e resolução de problemas, de modo a abordarem conceitos matemáticos que ajudam a compreender questões sociais, culturais e políticas vinculadas ao entorno deles;

- O controle da solução do problema emerge com uma estratégia eficaz dos professores para a proposição bem-sucedida do problema;
- O trabalho de proposição de problemas em nível sócio-político-cultural pode contribuir com a motivação dos alunos para aprender Matemática, uma vez que podem ser problematizadas questões/problemas do ambiente que os rodeiam, fazendo, consequentemente, sentido para eles;
- A metodologia de Exploração de Problemas contribuiu para o desenvolvimento de competências dos professores com relação ao domínio de aspectos-chaves inerentes aos conceitos matemáticos, quando estavam explorando, propondo e resolvendo problemas;
- A partir da abordagem com os professores, aprende-se que, para gerir as discussões em sala de aula **via Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas**, o professor precisa ter o domínio tanto das ideias matemáticas quanto de questões de cunho sócio-político-cultural, que foram antecipadas durante o planejamento da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas.

7.11 Décimo primeiro episódio de sala de aula (12/08/2023): refinando/aprofundando a Narrativa Matemática “A crise hídrica – um problema mundial”

Ao longo dos encontros, temos assumido um movimento da ação didática em torno dos problemas propostos, que entendemos como um encaminhamento teórico-prática importante no ensino-aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Nesse contexto, estamos enaltecendo a retomada de problemas (mesmo que o problema já tenha sido discutido com profundidade ou não, há sempre uma nova viagem a se fazer que pode culminar em novos problemas, novos conteúdos, novas resoluções e soluções, novas sínteses e reflexões) com a intencionalidade de apresentar e/ou aprofundar conceitos e conteúdos matemáticos. Para isso, é importante, durante o planejamento da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, antecipar problemas que podem vir a ser propostos e, no momento oportuno, promover um debate que leve à construção de ideias matemáticas com significado.

Diante do que foi exposto, iniciamos o encontro retomando os problemas: *“Perobinha mora com os seus pais e mais duas irmãs. No mês de junho de/23 a fatura de água da sua casa apresentou um total de R\$ 49,60. Em tom de desconfiança, indaga-se ao seu pai: acho que fizeram esse cálculo errado. No mês passado consumimos 15 m³ de água e pagamos bem menos. Porque esse mês aumentou tanto? Ajude a Perobinha a tirar as dúvidas do seu pai –*

sabendo que o consumo do mês de junho foi maior do que o de maio, responda: a) Qual foi o valor da fatura em maio?; b) Quantos metros cúbicos de água a família de Perobinha consumiu em junho?”, propostos por P10 e “Considerando as três faixas, determine: a) A lei da função, com mais de uma sentença, que estabelece relação com as três formas de cobrança”, proposto por P2. É importante destacar que, neste encontro, estavam presentes 8 professores.

Desse modo, solicitamos que P10 fosse à lousa apresentar e defender uma resolução para os problemas propostos. O P10 explicou aspectos importantes que o levaram a solucionar o item a), destacando que: “No caso de maio, ele gastou 15 m^3 e, no caso, esse valor vai estar na faixa 2, sendo $y = 29 + 2,5x$, ou seja, o x é quantidade de m^3 de água que ele gastou a mais e, até 10 m^3 , ele paga R\$ 29,00. Como ele gastou 15 m^3 , então, gastou 5 m^3 a mais.” Veja a resolução defendida por P10:

Figura 145 - Resolução apresentada por P10 ao item a)

$$\begin{aligned} y &= 29 + 2,5x \quad (\text{TARIFA NA FAIXA 2}) \rightarrow \text{ATÉ } 15 \text{ m}^3 \\ y &= 29 + 2,5 \cdot 5 \quad \leftarrow \text{EXCEDENTE: } 5 \text{ m}^3 \\ y &= 29 + 12,5 \rightarrow y = 41,5 \text{ ou R\$ } 41,50 \leftarrow \text{RESP.} \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Assim, P10 ressaltou que, em maio, a fatura a ser paga será de R\$ 41,50. Com relação ao item b), ele explica que: “Se ele gastou, em junho, R\$ 49,60, então, ela já está na faixa 3. E, na faixa 3, a lei de formação vai ser o valor de até 15 m^3 , no caso, R\$ 41,50, e a partir 15 m^3 , cada m^3 que passar vai ser pago R\$ 2,70, e aí a função será $y = 41,50 + 2,7x$ ”. Veja a resolução apresentada por P10 na lousa:

Figura 146 - Resolução apresentada por P10 ao item b)

$$\begin{aligned} &\text{PEROBINHA CONSUMIU EM JUNHO?} \\ y &= 41,5 + 2,7x \quad (x: \text{Litros excedente dos } 15 \text{ m}^3) \\ 49,6 &= 41,5 + 2,7x \\ 8,1 &= 2,7x \\ x &= \frac{8,1}{2,7} \rightarrow x = 3 \\ \text{RESUMO: } 10 \text{ m}^3 &\leftarrow \text{Taxa fixa até } 10 \text{ m}^3 \\ 5 \text{ m}^3 &\leftarrow \text{EXCEDENTE EM MAIO} \\ 3 \text{ m}^3 &\leftarrow \text{ " " JUNHO} \\ \text{RESP} \rightarrow &18 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Ao finalizar a resolução do item b), P10 expõe a sua interpretação sobre a solução do problema, explanando que $x = 3 \text{ m}^3$ expressa a quantidade excedente ao mês de maio, isto é, no mês de junho, foram consumidos: $15 \text{ m}^3 + 3 \text{ m}^3 = 18 \text{ m}^3$ de água.

Chamamos atenção dos professores acerca de todo o trabalho realizado por P10, sendo este o ponto de partida que adotamos para a apresentação das principais ideias inerentes aos problemas por ele resolvidos. Neste caso especial, tomamos como referência as resoluções defendidas por P10, para que pudéssemos encontrar a lei de formação da Função Afim que modela cada faixa de consumo de água no município de Alagoinha-PB. Veja, a seguir, os diálogos com os professores que expressam as descobertas acerca destes problemas, em que registramos na lousa:

➤ Faixa 1 (até 10 m^3):

PP: Qual o consumo e o valor a ser pago na faixa 1?

Professores: Vai pagar R\$ 29,00 até 10 m^3 .

PP: Então, qual seria a função que representa a faixa 1?

P2: Uma função constante, $f(x) = 29$, se $0 \leq x \leq 10$.

➤ Faixa 2 (10 m^3 até 15 m^3):

PP: E com relação à faixa 2?

P2: Para o consumo maior que 10 m^3 e até 15 m^3 , ele paga uma tarifa de R\$ 2,50 por m^3 que ultrapasse 10 m^3 .

PP: Quanto ele gastou na faixa 1?

P10: R\$ 29,00.

PP: Para descobrirmos a lei da função que corresponde à faixa 2, precisamos retirar os 10 m^3 consumidos na faixa 1. Como podemos fazer isso?

P2: Seria $x-10$.

PP: Isso! Porque, agora, a quantidade consumida de água que exceder 10 m^3 , paga uma taxa de R\$ 2,50 por m^3 . E qual será o intervalo que representa a faixa 2?

P2: $10 < x \leq 15$.

O diálogo acima promoveu a seguinte síntese-trabalho:

$$f(x) = 2,5(x-10) + 29$$

$$f(x) = 2,5x - 25 + 29$$

$$f(x) = 2,5x + 4, \text{ se } 10 < x \leq 15$$

Desse modo, para o consumo de 15 m^3 de água, ratificamos a solução apresentada por P10, ao defendermos, na lousa, com a colaboração dos professores, a seguinte resolução:

$$f(15) = 2,5 \cdot 15 + 4$$

$$f(15) = 37,5 + 4$$

$$f(15) = 41,5$$

➤ Faixa 3 (15 m^3 até 20 m^3):

PP: Para encontrarmos a lei da função que corresponde à faixa 3, precisamos levar em consideração o máximo que ele pode consumir na faixa 2, e ver quanto ele vai gastar se exceder a faixa 2. Quanto ele gastou no máximo na faixa 2?

P2: Ele pode consumir até 15 m^3 , e vai gastar R\$ 41,50.

PP: Qual a taxa que ele vai pagar na faixa 3?

P2: Acima de 15 m^3 e até 20 m^3 , ele vai pagar uma tarifa de R\$ 2,70.

PP: E qual seria a função que representa essa situação?

No primeiro momento, os professores não tinham notado que, para determinar a lei da função que modela a faixa 3, deve-se perceber que o consumo que corresponde à faixa anterior precisa ser adicionado na faixa posterior. Contudo, P2 explica sua descoberta e o diálogo se aprofunda:

P2: Por isso foi calculado o $f(15)$, porque, se ele chegou na faixa 3, é porque, com certeza, ele já gastou 15 m^3 de água.

PP: Então, qual será a lei da função?

P2: $f(x) = 2,7(x-15) + 41,5$.

O debate impulsionou a seguinte síntese-trabalho:

$$f(x) = 2,7(x-15) + 41,5$$

$$f(x) = 2,7x - 40,5 + 41,5$$

$$f(x) = 2,7x + 1, \text{ se } 15 < x \leq 20$$

Em seguida, confirmamos a solução defendida por P10 ao item b), fazendo uso da lei de formação da Função Afim correspondente à faixa 3, e considerando R\$ 49,60 o valor a ser pago pelo consumo de água no mês de junho. Observe a seguir:

$$f(x) = 2,7x + 1$$

$$49,60 = 2,7x + 1$$

$$49,60 - 1 = 2,7x$$

$$48,60 = 2,7x$$

$$x = \frac{48,60}{2,7}$$

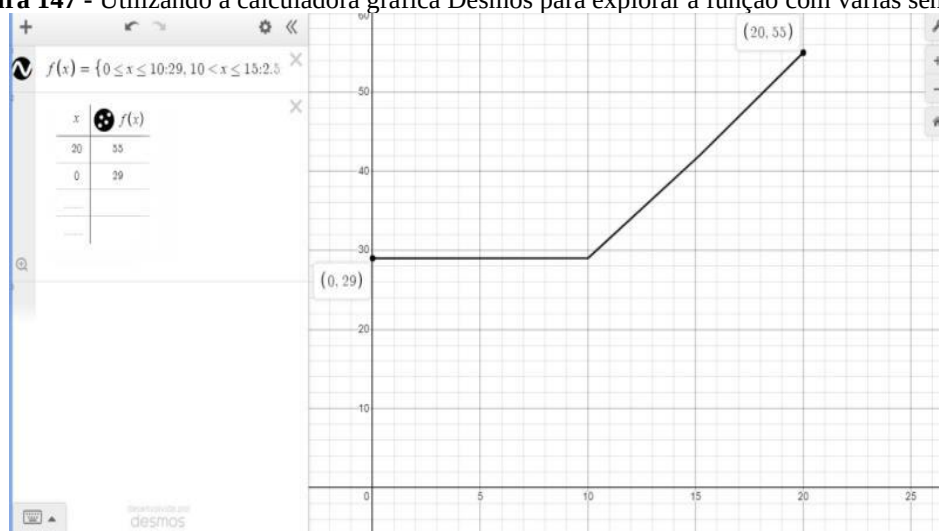
$$x = 18$$

Após expressarmos, por meio de funções, cada faixa que corresponde ao consumo mensal de água no município de Alagoinha-PB, P2 entrevistado destacando que: *“Inclusive, no meu problema, eu peço a lei da função em cada forma de cobrança, e percebo que é um problema que envolve mais de uma sentença”*. Diante do comentário realizado por P2, representamos, algebricamente, cada faixa de consumo de água, na lousa, por meio da ideia de Função definida por várias sentenças. Observe a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} 29, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 2,5x + 4, & \text{se } 10 < x \leq 15 \\ 2,7x + 1, & \text{se } 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

Para continuar avançando, fizemos uso da calculadora gráfica *Desmos* para transitar da representação algébrica para a gráfica, e intensificamos o movimento de exploração-problematização-proposição de problemas, com o surgimento de novos problemas. Veja a representação gráfica e o diálogo gerado:

Figura 147 - Utilizando a calculadora gráfica Desmos para explorar a função com várias sentenças



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: De acordo com o gráfico, qual seria o valor a ser pago no consumo de 20 m^3 de água?

P2: 55.

PP: O que significa a parte do gráfico que é uma reta que está na horizontal com relação ao eixo x?

P9: Até 10 m^3 , ele vai pagar R\$ 29,00.

P2: É onde até a função é constante.

PP: Que problemas podem propor a partir do gráfico?

P2: Até quantos m^3 o cliente estaria isento de pagar taxa?

PP: Uma característica importante de funções de várias sentenças é que não há um padrão, ou seja, cada parte do gráfico representa uma função diferente. No caso aí, até 10 m^3 temos um gráfico de uma função constante.

P9: Como encontrar todas as funções a partir do gráfico?

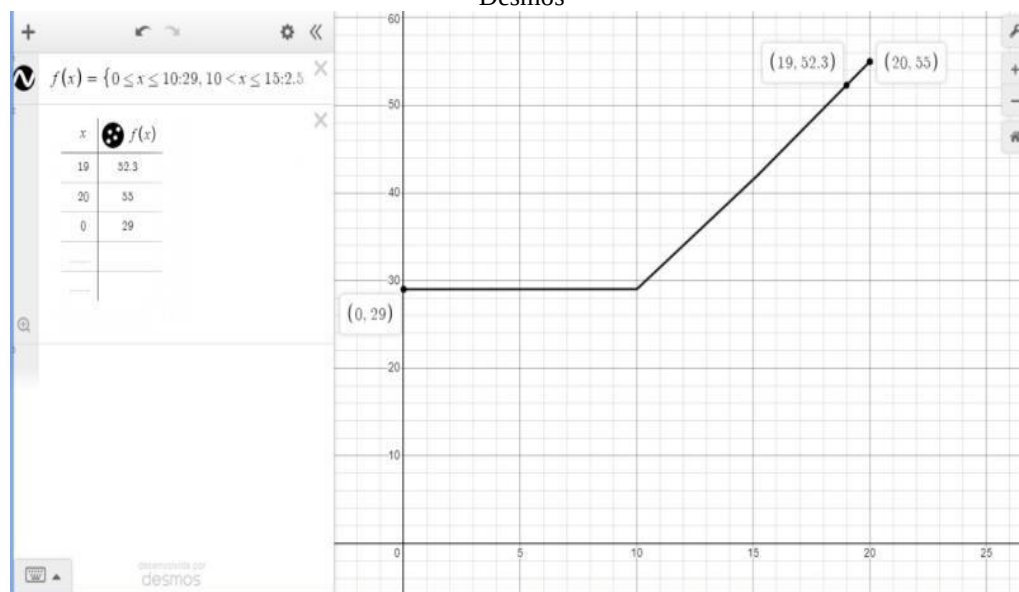
P2: A primeira de cara dá para perceber que é $f(x) = 29$.

PP: E como podemos encontrar as outras funções a partir da representação gráfica?

Esse questionamento ocasionou o silêncio dos professores e, com isso, buscamos sugerir um encaminhamento que ajudasse a resolver o problema proposto, em especial, realizar o trânsito da representação gráfica para a algébrica. Destacamos que, da representação gráfica, identificamos que $f(20) = 55$, isto é, o consumo máximo de água e o valor a ser pago. A partir dessa mediação, os professores argumentaram que bastava encontrar o valor de $f(19)$, pois toda Função Afim pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$ e, partindo dessa ideia, ao substituir $f(19)$ e $f(20)$ e resolver um Sistema de Equações do 1º grau, encontra-se os termos a e b, que são, respectivamente, os coeficientes angular e linear. Ademais, conscientemente, esperava-se que tais processos matemáticos os levassem à Função Afim, $f(x) = 2,7x + 1$, pois $f(19)$ e $f(20)$ correspondem ao consumo de água que está dentro da faixa 3.

Desse modo, o desafio direcionado ao professor-pesquisador foi localizar, na representação gráfica, o valor de $f(19)$. Devido à dinamicidade e interatividade proporcionada pela calculadora gráfica *Desmos*, encontramos que $f(19) = 52,3$.

Figura 148 - Aprofundando a exploração da função com várias sentenças por meio da calculadora gráfica Desmos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Nesse sentido, diante das descobertas realizadas pelos professores, fomos à lousa e registramos a seguinte resolução:

$$\begin{cases} 20a + b = 55 \\ 19a + b = 52,3 \end{cases} \cdot (-1) + \begin{cases} -20a - b = -55 \\ 19a + b = 52,3 \end{cases}$$

$$-a = -2,7 \cdot (-1)$$

$$a = 2,7$$

Substituindo $a = 2,7$ na equação $20a + b = 55$, temos:

$$20 \cdot 2,7 + b = 55$$

$$54 + b = 55$$

$$b = 55 - 54$$

$$b = 1$$

De fato, substituindo $a = 2,7$ e $b = 1$ em $f(x) = ax + b$, encontramos a função que modela a faixa 3: $f(x) = 2,7x + 1$. O P9 ainda não estava satisfeito e indagou: “E, agora, para encontrar a outra função?” Argumentamos que a outra função corresponde à faixa 2, em que $10 < x \leq 15$. Assim, bastava localizar, durante a exploração da representação gráfica, por exemplo, os valores de $f(11)$ e $f(12)$, e repetir todo o processo anterior.

Para continuar avançando no processo de exploração, proposição e resolução de problemas, solicitamos, no encontro anterior, que os professores trocassem os problemas entre si e, em seguida, reescrevessem o/os problema/s do colega. Para isso, deveriam adotar os critérios que julgassem ser convenientes.

O P9 inicia destacando que reescreveu o problema: “Para o consumo de até 10 m^3 de água é pago o valor fixo de R\$ 29,00. Sabendo que se esse consumo ultrapassar 10 m^3 até 15 m^3 de água, o consumidor pagará uma tarifa de R\$ 2,50 por m^3 , e se ultrapassar 15 m^3 até 20 m^3 de água, ele pagará uma tarifa de R\$ 2,70 por m^3 . Quanto o consumidor pagará, se ele consumir 20 m^3 de água?”, formulado por P1. O P9 explica que a reescrita dada ao problema proposto por P1 buscou investigar as leis e o domínio das funções que correspondem a cada faixa de consumo de água.

Figura 149 - Reescrita de P9 ao problema proposto por P1

Para o consumo de até 10 m^3 o valor fixo é R\$ 29,00, sabendo que se esse consumo ultrapassar de 15 m^3 o consumidor pagará, uma tarifa de 2,70 R\$ por m^3 . Qual a lei da função desse consumo e identifique o domínio da função caso ele consuma 15 m^3 .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Por sua vez, P1 reescreveu o problema: “De acordo com o texto “A crise Hídrica”, vimos que no Brasil cada pessoa consome em média 154 litros de água por dia e que a Organização das Nações Unidas (ONU) considera que cada pessoa necessita de 110 litros de água ao dia. Considere que na casa de PC reside com ele sua mãe, o seu pai e um irmão. Considerando a média de consumo de água e os dados sobre as tarifas de consumo, responda. a) Qual o valor a ser pago na conta de água nesse mês na casa de PC? b) Levando em conta os dados da ONU. Quantos litros de água a família desperdiçou no decorrer do mês?”, proposto por P9. O P1 explanou que a reformulação dada ao problema formulado por P9 consistiu em acrescentar um número maior de pessoas que deveriam consumir água e, com isso, calcular o gasto durante três dias. Veja o trabalho realizado por P1:

Figura 150 - Reescrita de P1 ao problema proposto por P9

A Organização das Nações Unidas (ONU), considera que cada pessoa necessita de 110 litros de água ao dia. Considerando que em uma casa que reside 7 pessoas, qual vai ser o gasto de consumo de água durante 3 dias?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Ressaltamos aos professores que, no problema proposto por P1, o solucionador poderia buscar identificar ou não a lei de formação de cada função que representa as faixas de consumo de água, uma vez que esse processo não seria necessário para resolver o problema. Por outro lado, a reescrita apresentada por P9 requer, diretamente, a discussão de ideias essenciais de Função (lei de formação e o domínio da função).

Dando continuidade ao processo de troca dos problemas, P14 ficou encarregado de reescrever o problema: “Uma empresa presta serviços de abastecimento de água potável para

um determinado município. Para abastecer esse município por um dia essa empresa conta com uma caixa num formato de um cilindro reto, com 12 m de diâmetro. Sabendo que essa cidade consome exatamente 2.826.000 L de água por dia, determine a altura que essa caixa deve ter para armazenar a água necessária para abastecer esse município por um dia. Considere $\pi = 3,14$ ", proposto por P12. Após a leitura do trabalho realizado, P14 explanou que a inspiração para a reformulação dada ao problema decorreu do fato de ter ministrado, recentemente, aulas envolvendo sólidos geométricos. Assim, ele buscou adaptar o problema proposto por P12, modificando o formato do reservatório de água e, com isso, P12 destacou: "Como não colocou no formato cúbico, ele colocou no formato hexaedro...os alunos, no primeiro momento, podem não perceber que o hexaedro regular é um cubo".

Figura 151 - Reescrita de P14 ao problema proposto por P12

O município que seu Luiz mora passa por uma crise hídrica, onde são 14 dias consecutivos sem água e no décimo quinto dia a água é liberada para as residências. Para atender à demanda do consumo de água em seu prédio durante esse período, ele decidiu construir um reservatório na forma de um hexaedro, sabendo que no prédio de seu Luiz, mora 100 pessoas e ele determinou que o consumo médio por pessoa é de 120 litros de água. Nas condições apresentadas, determine as dimensões do reservatório, em metros. Use 1 m³ equivale a 1.000 litros de água.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Esse problema despertou o interesse dos professores, assim, solicitamos que P14 fosse à lousa resolver o problema reformulado. Veja a resolução apresentada por P14 na lousa:

Resolução:

- Consumo diário

$$100 \cdot 120 \text{ L} = 12.000 \text{ L}$$

- Consumo durante 14 dias

$$14 \cdot 12.000 \text{ L} = 168.000 \text{ L}$$

- Volume do reservatório

m ³	litros
1	1.000
x	168.000

$$1.000x = 168.000$$

$$x = \frac{168.000}{1.000}$$

$$x = 168 \text{ m}^3$$

- Volume do cubo

$$V = a^3$$

$$168 = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{168}$$

$$a = 2\sqrt[3]{21} \text{ m}^3$$

Posteriormente, foi a vez de P12 que reescreveu o seguinte problema proposto por P14: “De acordo com a entrevista feita por Perobinha e seus colegas, com um funcionário da empresa autônoma que presta serviços de abastecimento de água para o município, que afirmou que a empresa abastece 5.050 residências, dividida em três faixas de consumo. Com essas informações e sabendo que 46% das residências estão na faixa 1 no consumo de água, 38% das residências estão na faixa 2 de consumo, 16% das residências estão na faixa 3 de consumo. Com as informações apresentadas acima, determine a quantidade de residências que a empresa de abastecimento de água presta serviços”. Veja a reescrita apresentada por P12:

Figura 152 - Reescrita de P12 ao problema proposto por P14

UMA EMPRESA DE ABASTECIMENTO DE ÁGUA ABASTECE UMA CERTA QUANTIDADE DE RESIDÊNCIAS EM UM MUNICÍPIO. ESSE ABASTECIMENTO É DIVIDIDO EM TRÊS ETAPAS, NA PRIMEIRA ETAPA A EMPRESA CONSEGUE ABASTECER $\frac{2}{5}$ DO TOTAL DE RESIDÊNCIAS, NA SEGUNDA ETAPA CONSEGUE ABASTECER $\frac{3}{4}$ DO RESTANTE DE RESIDÊNCIAS. SABENDO QUE NA TERCEIRA ETAPA A EMPRESA ABASTECU AS 720 RESIDÊNCIAS RESTANTES, DETERMINE A QUANTIDADE DE RESIDÊNCIAS TOTAL QUE ESSA EMPRESA ABASTECU.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Do trabalho realizado, P12 explica seu processo de pensamento, destacando que o problema formulado trabalha com frações e que poderia ser resolvido por meio da Álgebra, embora ele tenha pensado no problema para ser solucionado através da Aritmética. Os professores se mobilizaram para resolver este problema e, com isso, P12 foi à lousa defender sua resolução. Veja a seguir:

Resolução 1:

- 1º Etapa: $\frac{2}{5}$ do total

Restante: $\frac{3}{5}$

- 2º Etapa: $\frac{3}{4}$ do restante

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$$

- Soma das duas primeiras etapas:

$$\frac{2}{5} + \frac{9}{20} = \frac{8+9}{20} = \frac{17}{20}$$

- Terceira etapa: 720 residências restantes

Durante o processo de resolução do problema, P12 explicou que buscou encontrar a fração que corresponde à soma total das casas abastecidas nas duas primeiras etapas, para perceber qual a fração que representa a quantidade casas abastecidas na terceira etapa, sendo, nesse caso, $\frac{3}{20}$. Com essa descoberta, P12 argumentou que o todo foi dividido em 20 partes iguais, sendo que 3 delas correspondem a 720 casas abastecidas, logo, uma parte representa 240 casas abastecidas, assim, P12 calculou o total de casas abastecidas, fazendo: $20 \cdot 240 = 4.800$.

Posteriormente, incentivamos os professores a buscarem uma resolução alternativa para o problema e, como P12 tinha sugerido no ato do compartilhamento do problema que este poderia ser resolvido adotando os conhecimentos de Álgebra, fomos à lousa e registramos os procedimentos encaminhados pelos professores para resolver o problema em discussão.

Resolução 2:

$$\left(\frac{2}{5}x\right) + \left(\frac{3}{4}x\right)\frac{3}{5} + 720 = x$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{9}{20}x + 720 = x$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{9}{20}x - x = -720$$

$$\frac{8x+9x-20x}{20} = -720$$

$$\frac{-3x}{20} = -720$$

$$-3x = -14.400$$

$$x = \frac{-14.400}{-3}$$

$$x = 4.800$$

Resolução 3:

O P2 argumentou que o mesmo problema poderia ser resolvido transitando da representação fracionária para a decimal. Veja, a seguir, a síntese-trabalho defendido por P2:

$$\left(\frac{2}{5}x\right) + \left(\frac{3}{4}x\right)\frac{3}{5} + 720 = x$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{9}{20}x + 720 = x$$

$$0,4x + 0,45x + 720 = x$$

$$0,4x + 0,45x - x = -720$$

$$-0,85x = -720$$

$$x = \frac{-720}{-0,85}$$

$$x = 4.800$$

Resolução 4:

A resolução apresentada acima desencadeou um novo processo de resolução de problema sugerido novamente por P2, a partir da transição dos dados fracionários para números percentuais. Veja, a seguir, a resolução do problema que registramos na lousa a partir das descobertas de P2:

- 1º Etapa: $\frac{2}{5}$ do total

$$\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

- 2º Etapa: $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{5}$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20} = 45\%$$

- Terceira etapa: 720 residências

Como o total de residências das duas primeiras etapas representam $40\% + 45\% = 85\%$, então, as 720 residências restantes correspondem a 15%. Logo, por meio de Regra de Três Simples, calculou-se:

$$\begin{array}{cc} 15\% & 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 100 & x \end{array}$$

$$15x = 72.000$$

$$x = \frac{72.000}{15}$$

$$x = 4.800$$

Comentário: Das sínteses-trabalhos realizadas pelos professores, destacamos que os múltiplos processos/procedimentos de resolução adotados para resolver o problema qualificam o problema proposto por P12, além de ratificar a solução do problema, possibilitando ampliar e aprofundar a compreensão do problema, ao resolvê-lo, apoiados em diferentes campos da Matemática (Álgebra e Aritmética) e a partir do levantamento de Representações Múltiplas de um Número Racional (Santos, R., 2019; Granjeiro, 2020) e de Álgebra (Araujo, 2016; Martins, 2019; Martins, Andrade, 2022; Abreu *et al.*, 2024; Abreu, 2024).

Ademais, enaltece o cuidado de P14 durante a reescrita do problema, organizando os dados do problema, de tal forma que a soma das partes-todo resultasse exatamente em um todo.

Comentário: Abrimos espaço para debater esse problema, porque percebemos seu potencial para discutir fundamentos teóricos da abordagem metodológica de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas: discutir ideias matemáticas importantes a partir do problema proposto, incentivar a busca de múltiplos processos de resolução dos problemas, mobilizar Representações Múltiplas de um Número Racional e de Álgebra, buscar diferentes olhares para um mesmo problema, neste caso, do ponto de vista aritmético e algébrico, que sinaliza que este problema pode ser trabalhado em turmas distintas adotando diferentes níveis de dificuldades.

O P5 reescreveu o problema que exploramos no início deste encontro, que foi formulado por P10. Ao compartilhar o trabalho realizado, o P5 buscou elencar algum motivo que influenciou no aumento do consumo de água no mês de junho na residência de Perobinha. Desse modo, P5 explica:

P5: Modifiquei o problema acrescentando uma variável a mais...que o pai de Perobinha estava desconfiado, porque a conta aumentou e não sabia o porquê, sendo que, na cabeça dele, foi menor, porém, teve um vazamento na caixa d'água que desperdiçou bastante água, e Perobinha resolveu o problema, sem ter comunicado ao seu pai, comprou uma peça nova, ou qualquer coisa que quebrou para colocar no local, utilizando a tabela de cobrança da empresa para calcular o gasto. No final, eu pergunto qual o prejuízo total com o vazamento já que gastou R\$ 18,00 para repor as peças.

Veja todo o trabalho de reescrita realizado por P5:

Figura 153 - Reescrita de P5 ao problema proposto por P10

- Perolzinha mora com seus pais e duas irmãs. No mês de junho/23 a fatura de água da sua residência apresentou um total de R\$ 49,60. Em tom de desconfiança, indaga seu pai: acho que fizeram esse cálculo errado. No mês passado consumimos 15m³ de água e pagamos bem menos. Porque neste mês aumentou tanto? Ajude Perolzinha a tirar as dúvidas do seu pai. Sabendo que o consumo do mês de junho foi maior que o de maio, devido um vazamento na caixa d'água que Perolzinha resolveu sem que seu pai soubesse, responda:

a) Qual foi o valor da fatura em maio?
 b) Quantos m³ de água a família de Perolzinha consumiu em junho?
 c) Qual foi a média de gastos por pessoa nos meses de maio e junho, respectivamente?
 d) Perolzinha gastou R\$ 18,00 para reparar as peças com defeito do vazamento, considerando que eles quase sempre mantêm a média de consumo igual a do mês de maio, qual foi o prejuízo total do vazamento?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, P10 compartilhou a reescrita dada ao problema: “Segundo IBGE (2022) a cidade de Alagoinha tem 13.725 habitantes. Levando em consideração a média de consumo de água pelos brasileiros de 154 litros e o recomendado pela ONU de 110 litros. Qual o desperdício de água na cidade?”, proposto por P5. Na ocasião, P10 explicou que acrescentou ao problema formulado por P5 que 68% do total (13.725 habitantes) mora na zona urbana e que 40% da zona rural não dispõe de água potável e falou, ainda, que formulou três problemas. O P10 explanou que fez uma pesquisa em busca de encontrar dados oficiais acerca do percentual da população rural e urbana do município de Alagoinha-PB, no entanto, encontrou apenas dados de 2010. Em especial, na época, a população da Zona Urbana era 66,5% e, com isso, resolveu colocar um percentual aproximado, com um leve aumento da população urbana. Veja o trabalho de reescrita realizado por P10:

Figura 154 - Reescrita de P10 ao problema proposto por P5 e resolução dos problemas

SEGUNDO O IBGE (2022), O MUNICÍPIO DE ALAGOINHA - PB TEM 13.725 HABITANTES. CONSIDERE QUE 68% DESTA POPULAÇÃO MORA NA ZONA URBANA E QUE 40% DOS HABITANTES DA ZONA RURAL NÃO DISPÕE DE ÁGUA POTÁVEL EM SUAS REGIÕES. SABE-SE AINDA, DE ACORDO COM O IBGE, QUE O CONSUMO MÉDIO DIÁRIO, NO BRASIL É DE 154 LITROS DE ÁGUA POR PESSOA. DE ACORDO COM ESSAS INFORMAÇÕES, RESPONDA:

a) QUANTOS METROS CÚBICOS DE ÁGUA CADA BRASILEIRO CONSUME EM UM MÊS?

$$154 \times 30 = 4.620 \text{ Litros} = 4,62 \text{ m}^3 \leftarrow \text{RESPOSTA}$$

b) SE O CONSUMO DE ÁGUA NECESSÁRIO PARA CADA PESSOA É DE 110 LITROS DIÁRIOS (ONU), QUANTOS LITROS SERIAM ECONOMIZADOS EM UM ANO PELOS BRASILEIROS?

$$4.620 \times 12 = 55.440 \text{ Litros anual (com excesso)}$$

$$110 \times 360 = 39.600 \text{ Litros anual (RECOMENDADO)}$$

$$\rightarrow 55.440 - 39.600 = 15.840 \text{ Litros} \leftarrow \text{RESPOSTA}$$

c) QUANTOS HABITANTES DO MUNICÍPIO DE ALAGOINHA NÃO DISPÕEM DE ÁGUA POTÁVEL?

$$100\% - 68\% = 32\%$$

$$\rightarrow 40\% \text{ de } 32\% \text{ NÃO DISPÕEM DE ÁGUA POTÁVEL}$$

$$\frac{40}{100} \text{ de } \frac{32}{100} \rightarrow 0,4 \times 0,32 = 0,128$$

$$0,128 = \frac{128}{1000} = \frac{12,8}{100} = 12,8\%$$

$$\text{VEJAMOS: } 32\% \text{ DE } 13.725 = 0,32 \times 13.725 = 4.392 \text{ (HABITANTES DA ZONA RURAL)}$$

$$\rightarrow 12,8\% \text{ DE } 4.392 = 0,128 \times 4.392 = 562,176 \text{ PESSOAS}$$

TEMOS QUE, APROXIMADAMENTE, 562 PESSOAS NÃO DISPÕEM DE ÁGUA POTÁVEL NO MUNICÍPIO DE ALAGOINHA - PB.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Acerca do trabalho de reescrita realizado por P10, enfatizamos que, além do acréscimo de novos dados que oportunizou a geração de um novo problema, P10 ainda gerou problemas tomando como ponto de partida a média de água consumida pelo brasileiro, ou seja, problematizou um dado que compõe a redação do problema proposto por P5.

A partir do item b), que busca calcular a quantidade de água potável que poderia ser economizada caso o brasileiro consiga atingir a média ideal considerada pela ONU, iniciamos o debate:

PP: O que poderia ser feito para que seja fornecida água potável para a população rural?

P10: Aqui no município, a forma encontrada é abastecer as casas da Zona Rural com carros-pipa.

P14: O Brasil é um dos países que mais desperdiça água.

P10: É, a água desperdiçada pelo brasileiro poderia ir para outra região, que está sem água.

PP: Mas para que região?

P10: Eu acredito que o Nordeste está bem abaixo dessa média, a água desperdiçada poderia vir para cá...temos a transposição do Rio São Francisco que vem para cá.

Ao refletir e interpretar a solução encontrada em relação ao item c), P10 defende que encontrou o valor aproximado, isso porque se tratava da quantidade de habitantes e, com isso, deve-se considerar um número exato de pessoas, ou seja, é de suma importância considerar o contexto real que o problema expressa.

Com a intencionalidade de abordar a ideia de Fração com significado de Operador Multiplicativo, descrevemos um fato da Narrativa Matemática: “ $\frac{1}{6}$ da população mundial não tem acesso à água potável”, que pode ser problematizado com esse propósito. No entanto, dentre os problemas propostos, percebemos que apenas o problema proposto por P7: “Qual seria a arrecadação mensal da empresa que fornece o abastecimento de água, sabendo que a cidade tem 5.050 residências, que $\frac{1}{5}$ das residências consomem 10 m^3 , $\frac{3}{5}$ consomem 12 m^3 e $\frac{1}{5}$ consomem 18 m^3 . Até $10\text{ m}^3 = 29,00$; < 10 até $15\text{ m}^3 = 2,50$ por m^3 excedido de 10 m^3 ; < 15 até $20\text{ m}^3 = 2,70$ por m^3 excedido de 15 m^3 ”, que contextualizou outro fato da narrativa, podendo promover o debate acerca deste significado de fração.

Diante deste cenário, o professor-pesquisador selecionou este problema e solicitou que os professores o reescrevessem, acrescentando ou modificando o que considerassem necessário à redação do problema, de modo a gerar um novo problema.

Notamos que os professores apresentaram diferentes reformulações para o problema formulado por P7, em que alguns deles modificaram apenas alguns dados, outros acrescentaram novas variáveis à redação dos problemas, outros mostraram criatividade na organização das informações, e um fato em comum na maioria dos problemas é que houve um controle e autorregulação das soluções dos problemas.

Ressaltamos, para os professores, acerca da importância do controle da solução como um elemento imprescindível para lograr o sucesso no trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas. Sobre isso, P2 iniciou defendendo sua reformulação do problema proposto por P7, explicando seu processo de pensamento: “Na minha reformulação, eu

modifiquei alguns dados, usando frações e porcentagem”. Observe o trabalho de reformulação desenvolvido por P2:

Figura 155 - Reescrita de P2 ao problema proposto por P7

I') Sabendo que em todo o município existem 5050 residências, e, sobre o consumo de água tratada, $\frac{1}{5}$ das residências consomem 10m^3 , 62,5% delas consomem 12m^3 e $\frac{1}{8}$ das residências consomem 15m^3 . Sabendo que as $\frac{8}{8}$ residências que não consomem se dá pelo fato delas não possuírem água encanada, ~~por~~ determine quantas casas exatamente ~~não possuem água encanada~~ se encontram nessa situação:

→ Após o debate, foi necessário ~~alterar~~ o valor de 62,5% para 63,5%.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Sobre o trabalho realizado por P2, chamamos atenção para o olhar que ele teve para o conceito matemático, ao dizer que: “[...] as residências que não consomem água se dá pelo fato delas não possuírem água encanadas [...]”, isso porque o número de casas que são abastecidas corresponde a 95% do total. Por outro lado, P2 foi à lousa defender uma solução para o problema, e percebeu a importância do contexto durante a interpretação da solução do problema. Veja a síntese-trabalho realizada por P2 na lousa:

Resolução:

- I. $\frac{1}{5}$ das residências consomem 10 m^3

$$\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

- II. 62,5% das residências consomem 12 m^3

- III. $\frac{1}{8}$ das residências consomem 15 m^3

$$\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$$

- IV. Percentual de residências abastecidas e total de casas abastecidas

$$20\% + 62,5\% + 12,5\% = 95\%$$

$$95\% \text{ de } 5.050 \text{ casas}$$

$$\frac{95}{100} \cdot 5.050 = \frac{479.750}{100} = 4.797,5$$

Com a solução do problema, P2 destaca que: “*Eu não tinha pensado nisso: é a quantidade de residências, é preciso dar exato, porque eu não posso dizer que metade de uma residência foi abastecida*”. De imediato, P12 apresentou um caminho alternativo que pode superar essa limitação identificada no problema proposto por P2, com relação ao contexto real, ao advogar que: “*a divisão será exata se valores das porcentagens terminarem em 0*”.

Comentário: Durante o processo de exploração, proposição e resolução de problemas, é preciso se atentar não só para o conceito matemático, mas, também, para o contexto real, fazendo uma análise crítica da solução do problema com o propósito de identificar se ela faz sentido (ou não).

Sobre o trabalho realizado, P2 questionou ao professor-pesquisador se seria necessário modificar os dados dos problemas para entregar material por escrito, respondemos que não, mas que precisa ficar atento com relação à coerência conceitual e contextual dos problemas formulados para ser trabalhar no chão da escola.

Durante o caminhar de refinamento do problema formulado por P7, o P1 realizou a leitura do trabalho desenvolvido, ressaltando uma nova variável à redação do problema, ao apontar que: “[...] o abastecimento de água terá um aumento de 15% nos valores correspondentes ao consumo de água [...]”. Veja o problema proposto por P1:

Figura 156 - Reescrita de P1 ao problema proposto por P7

Uma empresa que fornece o abastecimento de água, terá um aumento de 15% nos valores correspondente ao consumo de água do próximo mês.
Uma residência que consumia 10m³ pagava R\$ 29,00. Quanto essa residência passará a pagar no próximo mês?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Nessa direção, ancorado também em um olhar com foco na Matemática Financeira, P6 acrescenta um nova variável ao problema proposto por P7, ressaltando que: “[...] há uma taxa de juros de 15% [...]” e que uma residência está com atraso de 2 meses do consumo de 12 m³. Veja o trabalho de reescrita realizado por P6:

Figura 157 - Reescrita de P6 ao problema proposto por P7

① ACERCA DO TEXTO, RESPONDA:

A) QUAL SERIA A ARRECADACÃO MENSAL DA EMPRESA QUE FORNECE O ABASTECIMENTO DE ÁGUA, SABENDO QUE A CIDADE TEM 5.050 RESIDÊNCIAS, QUE $\frac{1}{5}$ DAS RESIDÊNCIAS CONSUMEM 10 m^3 , $\frac{3}{5}$ CONSUMEM 12 m^3 E $\frac{1}{5}$ CONSUMEM 18 m^3 ?

Até $10\text{ m}^3 = \text{R\$ } 20,00$
 $< 10 \text{ ATÉ } 15\text{ m}^3 = \text{R\$ } 2,50 \text{ POR } \text{m}^3 \text{ EXCEDIDO DE } 10\text{ m}^3$
 $< 15 \text{ ATÉ } 20\text{ m}^3 = \text{R\$ } 2,40 \text{ POR } \text{m}^3 \text{ EXCEDIDO DE } 10\text{ m}^3$

B) CONSIDERANDO QUE UMA TAXA DE JUROS DE 15% DO VALOR POR MÊS, CALCULE QUAL O VALOR FINAL A SER PAGO POR UMA RESIDÊNCIA QUE CONSUMIU 12 m^3 E ESTÁ ATRASADA 2 MESES?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, P10 faz a leitura do trabalho de reescrita do problema, elucidando uma política de abastecimento de água implantada pela empresa que abastece o município de Alagoinha-PB. Desse modo, iniciamos um diálogo. Veja a seguir:

PP: Como funciona essa questão de ser abastecida em dias pares e ímpares?

P10: Aqui em Alagoinha, tem esse tipo de racionamento de água – lado A é abastecido nos dias pares e lado B nos dias ímpares.

PP: Como são organizados os lados A e B?

P10: É formado por um conjunto de ruas. Quando a crise era maior, tinha três setores, lados A, B e C, agora, são dois.

P14: Quando chega a estiagem, aí muda para três setores.

Veja os problemas propostos por P10, nos quais ele destacou que propôs três problemas e que ainda poderia gerar mais problemas matemáticos. Ademais, ele foi à lousa e apresentou soluções para os problemas análogas ao registro a seguir:

Figura 158 - Reescrita de P10 ao problema proposto por P7 e resolução dos problemas

O TOTAL DE RESIDÊNCIAS ABASTECIDAS PELA EMPRESA DE ABASTECIMENTO DE ÁGUA NO MUNICÍPIO DE ALAGOINHA É DE 5050. ATUALMENTE, $\frac{1}{2}$ DESSAS RESIDÊNCIAS SÃO ABASTECIDAS EM DIAS PARES E $\frac{1}{2}$ EM DIAS ÍMPARES. NESTA FORMA DE RACIONAR A ÁGUA, A ESTAÇÃO DE TRATAMENTO PRECISA ARMAZENAR ESSE LÍQUIDO PARA NÃO DEIXAR PARTE DA POPULAÇÃO DESABASTECIDA. SABE-SE QUE $\frac{1}{5}$ DAS RESIDÊNCIAS CONSUMEM, MENSALMENTE, 10 m^3 , $\frac{3}{5}$ CONSUMEM 12 m^3 E $\frac{1}{5}$ CONSUMEM 18 m^3 .

RESPONDA:

a) PARA NÃO FALTAR ÁGUA NESSE REVEZAMENTO, QUANTOS METROS CÚBICOS SERÃO NECESSÁRIOS PARA ABASTECER AS RESIDÊNCIAS, DIARIAMENTE:

$$\text{SOLUÇÃO: } \frac{1}{5} \text{ DE } 5050 = 1010$$

$$\frac{3}{5} \text{ DE } 5050 = 3030$$

- CONSUMO MENSAL (m^3)

$$[(1010 \times 10) + (3030 \times 12) + (1010 \times 18)] \text{ m}^3 \rightarrow$$

$$(10100 + 36360 + 18180) \text{ m}^3 = 64640 \text{ m}^3$$

$$\rightarrow 64640 : 30 = 2154,7 \text{ m}^3 \leftarrow \text{RESP.}$$

b) QUANTOS METROS CÚBICOS, EM MÉDIA, SÃO DISTRIBUÍDOS PARA CADA RESIDÊNCIA, MENSALMENTE?

$$\text{SOLUÇÃO: } 64640 : 5050 = 12,8 \text{ m}^3 \leftarrow \text{RESP.}$$

c) DE ACORDO COM O REVEZAMENTO, DURANTE 15 DIAS METADE DAS RESIDÊNCIAS NÃO DISPÕE DE ÁGUA NAS TORNEIRAS. QUANTOS METROS CÚBICOS DE ÁGUA A MAIS SERIAM NECESSÁRIOS PARA QUE AS 5050 RESIDÊNCIAS UTILISSEM DE ÁGUA EM TODOS OS DIAS?

$$\text{SOLUÇÃO: DOBRAR A OFERTA, OU SEJA, } 64.640 \text{ m}^3 \text{ A MAIS DE ÁGUA.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Do trabalho de reescrita dos problemas realizado por P10, enaltecemos o fato de ele ter contextualizado um acontecimento real que explica algumas medidas tomadas pela empresa que fornece água ao município de Alagoinha. De um ponto de vista de processos matemáticos, sublinhamos, ainda, a preocupação de apresentar uma solução para cada problema, como uma forma de confirmar o trabalho bem-sucedido de proposição de problemas.

O P9 apresenta uma proposta de reescrita do problema, em que destacamos que ele aprofunda o caminhar de exploração de problemas, ao acrescentar novos elementos à redação do problema, em especial, que o valor arrecadado pela empresa precisa ser dividido

proporcionalmente, de modo que João e Matheus devem receber, respectivamente, $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$ do faturamento. Veja a reescrita dada ao problema formulado por P7:

Figura 159 - Reescrita de P9 ao problema proposto por P7

Em uma cidade no interior do Paraíba João e Matheus são sócios de uma empresa de abastecimento de água, sendo a divisão do faturamento ~~dividido~~ feita de forma diretamente proporcional ao valor arrecadado no final de cada mês. João recebe $\frac{3}{5}$ do faturamento e Matheus $\frac{2}{5}$. Sabendo que a cidade tem 5050 ~~hab~~ residências que $\frac{1}{5}$ das residências consomem 10 m^3 , $\frac{3}{5}$ consomem 12 m^3 e $\frac{1}{5}$ consomem 18 m^3 por mês.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Até } 10\text{ m}^3 = 29,00 \\ < 10 \text{ até } 15\text{ m}^3 = 9,50 \text{ por m}^3 \text{ excedido de } 10\text{ m}^3 \\ < 15 \text{ até } 20\text{ m}^3 = 2,70 \text{ por m}^3 \text{ excedido de } 10\text{ m}^3 \end{array} \right.$

Apartir dessas informações qual o valor que os sócios arrecadam no final de um ano?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, P5 compartilhou a reescrita dada ao problema formulado por P7, explicando o seu processo de pensamento: “A mudança que eu fiz, foi que ele colocou as frações com denominador igual a 5. Aí eu mudei para denominadores diferentes, para dificultar o problema...para que o aluno some as frações e perceba que a soma delas equivalem a 100% ou a um todo”. Veja o trabalho realizado por P5:

Figura 160 - Reescrita de P5 ao problema proposto por P7

1) Qual seria a arrecadação mensal da empresa que fornece o abastecimento de água, sabendo que a cidade tem 5050 Residências, que $\frac{1}{5}$ das Residência consomem 10 m^3 , $\frac{1}{2}$ consomem 12 m^3 e $\frac{3}{10}$ consomem 18 m^3 .

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Até } 10\text{ m}^3, \text{ R\$ } 29,00 \\ < 10\text{ m}^3 \text{ até } 15\text{ m}^3, \text{ R\$ } 9,50 \text{ por m}^3 \text{ excedido de } 10\text{ m}^3 \\ < 15\text{ m}^3 \text{ até } 20\text{ m}^3, \text{ R\$ } 2,70 \text{ por m}^3 \text{ excedido de } 10\text{ m}^3 \end{array} \right.$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Na sua vez, P14 apresentou a reescrita dada ao problema proposto por P7, enfatizando um reservatório com capacidade total de 336 m^3 que deve abastecer três povoados por 7 dias e que cada pessoa precisa consumir, em média, 100 litros de água diariamente. Veja, a seguir, o problema proposto e o diálogo entre o professor-pesquisador e P14 acerca do trabalho realizado:

Figura 161: Reescrita de P14 ao problema proposto por P7

Um reservatório de água abastece três povoados. O reservatório tem um volume total de 336 m^3 , e é distribuída para os três povoados da seguinte forma: $\frac{1}{3}$ da capacidade é destinado para o povoado 1, $\frac{1}{2}$ da capacidade é destinado para o povoado 2 e $\frac{1}{6}$ é destinado para o povoado 3. A capacidade do reservatório consegue abastecer os três povoados durante 4 dias consecutivos, e é abastecido por completo no oitavo dia. Sabendo que o consumo médio por pessoa para os três povoados tem que ser de 100 litros por pessoa. Determine a quantidade total de pessoas em cada povoado, mantendo a mesma proporção da distribuição da água. Use 1 m^3 equivale a 1000 litros.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

PP: Você resolveu o problema?

P14: Sim. Eu fiz $\frac{1}{2}$ de 336 que é igual a 168, $\frac{1}{3}$ de 336 é igual a 112 e $\frac{1}{6}$ de 336 é igual a 56. No caso, sabemos quantos m^3 são consumidos em cada povoado... aí multiplica por 1.000 para saber a quantidade de litros. Depois, divide por 7 e 100 para saber a quantidade de pessoas em cada povoado.

PP: Estas divisões resultam num valor exato, já que estamos falando de uma quantidade de pessoas?

P14: Sim, eu fiz e deu exato.

PP: Você verificou se a soma de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$ resulta no todo?

P14: Sim.

PP: Perfeito!

Finalizamos essa discussão, analisando e enaltecendo o trabalho de reescrita de problemas relativo ao problema proposto por P7, realizado pelos professores e a reescrita dos problemas que foram trocadas entre eles, impulsionando o debate cognitivo que promoveu o trânsito entre diferentes Representações de um Número Racional, a mobilização de múltiplas resoluções de um problema, o significado de Fração como Operador Multiplicativo, a compreensão da concepção parte-todo no estudo de Frações e a articulação da solução do problema com o contexto real, bem como o controle da solução do problema, percebido nos trabalhos realizados pelos professores.

Comentário: Notamos que os professores tiveram que ficar vigilantes sobre aspectos conceituais, para que lograssem o sucesso no trabalho de proposição de problemas, principalmente, porque os problemas envolvendo ideias de frações, por natureza, exigem uma atenção particular, com relação aos dados fracionários, visando manter uma coerência conceitual. A Proposição de Problemas possibilitou que os professores pensassem e se autorregulassem acerca de que números fracionários, decimais e percentuais que devem ser incluídos na redação do problema, para que o ele esteja bem formulado com relação ao saber matemático em foco.

Ademais, ao término do encontro anterior, sugerimos a leitura do artigo “Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula”, de autoria de Silvanio de Andrade (Andrade, 2017). Assim, neste encontro, discutimos alguns movimentos da proposta metodológica de Resolução de

Problemas, intitulada **“Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Proposição, Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP)”**, que possibilita correlacionar a teoria com prática que foi desenvolvida ao longo dos encontros.

Destacamos, inicialmente, que o pressuposto teórico primordial desta perspectiva de Resolução de Problemas consiste em iniciar a aula com um problema ou situação-problema e, por meio de um processo de codificação e decodificação, aprender e entender aspectos importantes de um conceito ou ideia matemática ao explorar, resolver e propor problemas. Nesse contexto, a aplicação prática desta proposta consiste em dar ou propor um problema ou situação-problema que pode partir tanto do professor quanto dos próprios alunos. Esses mesmos alunos realizarão um trabalho sobre ele e, juntos, professor e alunos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e sínteses, chegando, desse modo, possivelmente, à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses (Andrade, 1998; 2017).

Foi refletido que a proposta é uma resposta de Andrade (1998, 2017) às práticas e pesquisas de Resolução de Problemas da década de 1980, que se limitavam apenas à busca da resolução e solução do problema. Nesse sentido, o pesquisador elaborou uma proposta pedagógica amparada em uma árdua investigação em sala de aula, que sugere como orientação teórico-prática ir além da resolução do problema, com a realização de um trabalho de exploração e proposição de problemas.

Realçamos que trabalhamos, ao longo dos encontros, com a proposição de problemas como ponto de partida de uma aula de Matemática, e que, a partir do movimento didático que assume que uma aula via Exploração-Proposição-resolução de Problemas é sempre inacabada, retomamos alguns problemas para sistematizar e aprofundar a discussão de processos e conceitos matemáticos.

Ademais, a proposição de problemas, pensada a partir da Exploração de Problemas, vai além de propor e resolver o problema, pois é criado um ambiente de problematização que leva a novos problemas e, em algum momento, o processo de resolução e solução do problema passa ser o foco da discussão. Desse modo, nos diferentes debates, a proposição de problemas foi implementada antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas, com a intencionalidade de ir sempre mais além e além, priorizando uma aprendizagem com significado.

Discutimos, ainda, que a proposta é pensada numa perspectiva sócio-político-cultural, à luz de uma educação progressista, crítica e libertadora e, por isso, o ir mais além contempla toda multicontextualidade de uma sala de aula de matemática, isto é, abrange tanto aspectos

cognitivos/internalistas quanto externalistas. Por esse motivo, debatemos temas emergenciais com/sem Matemática numa perspectiva de Educação Crítica, como o impacto do desaparecimento das abelhas, a crise hídrica no planeta Terra, bem como outras temáticas envolvendo questões de (in)justiça sociais.

Por fim, solicitamos que, em casa, os professores fizessem a leitura da introdução da obra *“Rethinking Mathematics: Teaching Social Justice by the Numbers”* - Repensando a Matemática: Ensinando Justiça Social pelos Números, organizada por Eric Gutstein e Bob Peterson (Gutstein; Peterson, 2013).

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Seleciona-se alguns problemas que foram propostos pelos professores e, a partir da resolução defendida por um dos professores na lousa, apresenta-se ideias essenciais de Função;
- A proposta de Exploração de Problemas aliada à Calculadora Gráfica *Desmos* impulsiona a geração de novos problemas por meio da transição entre diferentes Representações Múltiplas de Álgebra;
- A troca dos problemas entre os pares de professores gera a oportunidade de eles analisarem o problema ao qual se atribuirá uma nova escrita, adotando como parâmetro as dimensões conceituais, pedagógicas e sociais que compõem o espaço do problema;
- A aplicação prática da proposta de Exploração de Problemas evidencia que é dada a autonomia aos alunos, de modo que a eles competem explorar, problematizar, propor, reescrever e resolver problemas, bem como compartilhar para os colegas, oralmente, e, na lousa, todo o trabalho realizado;
- Com a busca de múltiplos processos/procedimentos de resolução, aprende-se que o problema pode ser trabalhado em turmas distintas, adotando diferentes níveis de dificuldades, levando, assim, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e a novas sínteses;
- Um problema é selecionado para ser explorado, buscando refiná-lo a partir de sua reescrita. O critério de escolha do problema selecionado decorre do conceito matemático que pretendia ser desenvolvido: ideia de Fração com significado de Operador Multiplicativo;

- A metodologia de Exploração de Problemas sinalizou que as Representações Múltiplas de Álgebra e as diferentes Representações de um Número Racional podem ser o ponto de partida para a proposição de problemas;
- Durante a abordagem com os professores, nota-se que, no decorrer do processo de proposição de problema, deve-se atentar não só para o conceito matemático, mas, também, é preciso observar se a solução faz sentido, quando relacionada ao contexto real.

7.12 Décimo segundo episódio de sala de aula (19/08/2023): explorando e problematizando a Narrativa Matemática “A crise hídrica – um problema mundial”

Iniciamos o encontro retomando o problema proposto por P7: “Qual seria a arrecadação mensal da empresa que fornece o abastecimento de água, sabendo que a cidade tem 5.050 residências, que $\frac{1}{5}$ das residências consomem 10 m^3 , $\frac{3}{5}$ consomem 12 m^3 e $\frac{1}{5}$ consomem 18 m^3 ?. Até $10 \text{ m}^3 = 29,00$; < 10 até $15 \text{ m}^3 = 2,50$ por m^3 excedido de 10 m^3 ; < 15 até $20 \text{ m}^3 = 2,70$ por m^3 excedido de 15 m^3 ”, selecionado para os professores o reescrevessem. Para continuar aprofundando o processo de exploração, proposição e resolução de problemas, fomos à lousa, para juntos, professor-pesquisador e professores, apresentarem uma solução para o problema. A seguir, apresentaremos a síntese-trabalho realizada na lousa. Neste encontro, participaram 10 professores.

- Faixa 1 ($\frac{1}{5}$ das residências que consumiram 10 m^3): $\frac{1}{5}$ de 5.050

$$\frac{1}{5} \cdot 5.050 = \frac{5.050}{5} = 1.010 \text{ residências}$$

Total pago na faixa 1: $1.010 \cdot 29 = 29.290$

- Faixa 2 ($\frac{3}{5}$ das residências que consumiram 12 m^3): $\frac{3}{5}$ de 5.050

$$\frac{3}{5} \cdot 5.050 = \frac{15.150}{5} = 3.030 \text{ residências}$$

Adotando a Função Afim que modela faixa 2, temos:

$$f(x) = 2,5x + 4$$

$$f(12) = 2,5 \cdot 12 + 4$$

$$f(12) = 2,5 \cdot 12 + 4$$

$$f(12) = 30 + 4$$

$$f(12) = 34$$

Total pago na faixa 2: $3.030 \cdot 34 = 103.020$

- Faixa 3 ($\frac{1}{5}$ das residências que consumiram 18 m^3): $\frac{1}{5}$ de 5.050

$$\frac{1}{5} \cdot 5.050 = \frac{5.050}{5} = 1.010 \text{ residências}$$

Tomando a Função Afim que modela faixa 3, obtemos:

$$f(x) = 2,7x + 1$$

$$f(18) = 2,7 \cdot 18 + 1$$

$$f(18) = 48,6 + 1$$

$$f(18) = 49,60$$

Total pago na faixa 3: $1.010 \cdot 49,60 = 50.096$

Portanto, o valor mensal arrecadado pela empresa foi: $\text{R\$ } 29.290 + \text{R\$ } 103.020 + \text{R\$ } 50.096 = \text{R\$ } 182.406$. Com o problema, tínhamos a intenção de apresentar o significado de Fração como Operador Multiplicativo. Na ocasião, tomando como ponto de partida a síntese-trabalho realizada, citamos Silva (2005, p. 134), que compreende que, na concepção de operador, “o fracionário $\frac{a}{b}$ é manipulado como algo que atua sobre uma quantidade e a modifica produzindo uma nova quantidade”. Explanamos que, neste caso, em especial, o fracionário correspondente à cada faixa atuou modificando a quantidade total de casas, de modo a produzir o quantitativo exato de casas que se concentraram em cada faixa de consumo.

Para aprofundar o processo de exploração do problema, desafiamos os professores a, oralmente, reformularem o problema proposto por P7, modificando apenas a estrutura conceitual que dá conta do problema, e mantendo a mesma solução para o problema. Assim, P2 explanou que apresentaria os dados em forma de taxas percentuais. Veja a seguir:

P2: 20% das residências consomem 10 m^3 , 60% das residências consomem 12 m^3 , e 20% das residências consomem 18 m^3 . Qual seria a arrecadação mensal da empresa? Isso para trabalhar com Porcentagem.
PP: Perfeito!

Uma alternativa que o professor-pesquisador levantou para o surgimento de novos problemas consistiu em não deixar clara a quantidade de metros cúbicos consumidos nas faixas 2 e 3, podendo haver diferentes combinações, como: 11 m^3 (faixa 2) e 16 m^3 (faixa 3) ou 12 m^3 (faixa 2) e 17 m^3 (faixa 3), dentre outras. Portanto, as diferentes combinações que poderiam ser geradas nas faixas 2 e 3 culminavam em um novo valor de arrecadação pela empresa de abastecimento de água, pois, a cada m^3 excedido, em ambas as faixas, era cobrada uma taxa de

R\$ 2,50 (faixa 2) e R\$ 2,70 (faixa 3), isto é, obtinha-se distintas soluções para o problema. Ou seja, estávamos diante de um problema aberto, no qual o solucionador poderia encontrar múltiplas soluções corretas.

Sugerimos, ainda, uma situação para que eles analisassem para além da Matemática, isto é, o que poderia explicar que $\frac{1}{5}$ das residências consome 10 m^3 , $\frac{1}{2}$ consome 12 m^3 e $\frac{1}{5}$ consome 18 m^3 , ou seja, a soma das frações não resulta em um todo ($\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = 0,2 + 0,5 + 0,2 = 0,9$), o que, interpretando na linguagem do mundo real, implica dizer que há residências que, por algum motivo, não estão recebendo abastecimento de água. Sobre isso, surgiram algumas possíveis explicações. Veja a seguir:

P2: Porque haveria residências que não teria o abastecimento de água tratada, e sobrevivia com água da chuva que juntava num reservatório...principalmente, o pessoal da Zona Rural, onde, normalmente, a água chega com pouca frequência ou nem chega.

P10: Deveria deixar claro se essas 5.050 residências são de todo o município ou só da Zona Urbana, porque, se considerar todo o município de Alagoinha, sabemos que uma parte não é abastecida, como a Zona Rural.

Nesse contexto, explicamos que essas 5.050 residências contemplam, de fato, parte da população do Município de Alagoinha-PB que são abastecidas, em especial, da Zona Urbana, ficando de fora grande parte da população situada na Zona Rural, pois a barragem que se apresenta como a única fonte hídrica do município não possui estrutura para beneficiar toda a população do município de Alagoinha-PB. Desse modo, a escassez hídrica que tem afetado, principalmente, a população da Zona Rural deste município levou a prefeitura municipal, sob diferentes administrações, a buscar soluções para minimizar uma parte da população que sofre com a falta de água, e a alternativa encontrada foi a compra de água que é transportada por caminhão-pipa, como resposta à pouca água que dispõe a barragem que abastece o município ao longo de todo o ano.

Desse modo, enfatizamos que, na escrita da redação de um possível problema, deveria vir explícito que nem todas as residências estavam recebendo os serviços de abastecimentos de água com eficácia (a empresa tem a responsabilidade de realizar o abastecimento), para que, assim, não houvesse uma falta de sentido acerca da ideia matemática que seria discutida com o problema matemático.

De modo a intensificar o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas, solicitamos o aprofundamento da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática. Nesse sentido, os professores ficaram encarregados de acrescentar ou modificar alguns fatos/acontecimentos que considerassem convenientes na

Narrativa Matemática, de forma a gerar um novo ambiente de problematização, de modo a, posteriormente, propor e resolver problemas. Ao perceber que os professores finalizaram a tarefa, o professor-pesquisador concedeu o espaço para que eles compartilhassem todo o trabalho realizado.

Assim, P4 inicia compartilhando o acréscimo do novo fato a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, destacando que tomou como ponto de partida a pesquisa que explica que o brasileiro consome, em média, 154 litros de água diariamente, enquanto a ONU afirma que seriam necessários 110 litros, dando continuidade, desse modo, ao seguinte diálogo: “— *E o que explica essa diferença de 44 litros?* Questionou PC. — *Provavelmente, deve ser devido ao desperdício diário de água, explicou Sr. Deda*”. Veja o trabalho realizado por P4:

Figura 162 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P4

- PROVAVELMENTE, DEVE SER DIVIDIDO AO DESPERDÍCIO DIÁRIO DE ÁGUA, EXPLICOU SR. DEDA.
- AINDA SR. DEDA:
- ALÉM DA QUANTIDADE LIMITADA DE ÁGUA POTÁVEL QUE POSSUÍMOS, ESSE PROVÁVEL DESPERDÍCIO NOS PREJUDICA FINANCEIRAMENTE, POIS, QUANTO MAIOR O CONSUMO MAIS CARA A TARIFA, ALÉM DE UM VALOR MAIOR EM TRIBUTOS.
- VERDADE, AFIRMOU PC,..., CERTO DIA AO RECEBER A CONTA DE ÁGUA FIZ UMA ANÁLISE COM A MINHA ESPOSA E OBSERVAMOS QUE CERCA DE 30 % DO VALOR DA CONTA CORRESPONDIA A TRIBUTOS COMO PIS E COFINS. TRATAMOS LOGO DE VERIFICAR SE TODAS AS TORNEIRAS ESTAVAM FECHADAS.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Destacamos, para os professores, que situação proposta por P4 emerge como um novo ambiente de problematização em âmbito de problemas matemáticos, como também levanta o debate social acerca da escassez de água potável e de algumas consequências que pode gerar o desperdício de água, como o aumento das tarifas e tributos, além de fazer um alerta que serve como medida para combater uma das causas que gera desperdício de água, ao dizer que: “*Tratamos logo de verificar se todas as torneiras estavam fechadas*”. Esse comentário impulsionou uma discussão acerca do desperdício de água. Veja a seguir:

P13: Hoje, quando acordei, eu vi na minha rua uma quantidade de água que, claramente, estava sendo desperdiçada. Aí a questão é: o que podemos fazer para melhorar essa situação? Devemos levar essa discussão para a sala de aula para conscientizar os alunos.

P4: Eu observei, por exemplo, que, aqui na escola, o vaso sanitário está com problemas...você dá a descarga e água passa um tempo escorrendo.

P13: Algo que pode fazer a diferença para economizar água é que há duas descargas de vaso sanitário, uma com 5 litros e outra de 8 litros, então, dá para economizar água. E ainda há descargas que pegam as duas. Isso também faz diferença dentro de casa, é claro que nem toda família pode tá trocando o vaso para economizar água.

P10: Essa situação daria para propor problemas – Qual economia poderia ser feita com relação a esses dois tipos de descargas, realizando x descargas por dia?

Os dois últimos encontros foram dedicados ao trabalho com a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “**A crise hídrica – um problema mundial**”. Notamos que diferentes fatos foram problematizados, no entanto, tínhamos, como intenção, a geração de problemas, a partir enredo da narrativa que enfatiza a quantidade de água que o ser humano precisa ingerir, adotando a massa corporal como referência, que, até então, tinha passado despercebido pelos professores. Contudo, com a intensificação do processo de exploração de problemas, esse fato é problematizado.

Sobre isso, ressaltamos que P2 e P9 explicaram que o acréscimo do novo acontecimento a Narrativa Matemática dá continuidade à fala de Perobinha que ressalta que sua professora de Ciências, Filomena, buscou conscientizar seus alunos acerca da quantidade de água que o ser humano precisa ingerir diariamente, tomando como referência a massa corporal. Observe todo o trabalho realizado por P2 e P9:

Figura 163 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P2

- Ela falou, ainda, que cada quilograma de massa corporal corresponde a 35ml de água que devemos ingerir diariamente, inclusive ~~meu~~ ~~para~~ ~~ver~~ se estou tomando uma quantidade de água adequada, falou Perobinha.

Problema: Tendo em vista que Perobinha tem 86kg de massa corporal e que o mesmo consome uma média de quatro garrafinhas de 500ml de água por dia, determine se ele está consumindo-a de forma adequada e, se não, ~~de~~ utilizando-se das garrafas, quantas a mais ou a menos ~~de~~ seria melhor para Perobinha?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Figura 164 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P9

Cesinha fala a Perobinha, eu ~~tomo~~ ^{tomo} 3 litros de água por dia peso 65kg, será que estou tomando a quantidade de água necessária?

③ O questionamento de Cesinha em relação a quantidade de água que ele bebe diariamente, falando que ele bebe 3 litros por dia e pesa 65kg. De acordo com as informações apresentadas no texto sobre a quantidade necessária por dia, Cesinha está bebendo a quantidade necessária?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Enfatizamos que este enredo da Narrativa Matemática teve como propósito gerar um ambiente de problematização que enfocasse no debate que reforça a necessidade de criar hábitos diários, neste caso, ingerir, regularmente, a quantidade de água recomendável durante o dia a dia, como uma forma de prevenir alguns problemas de saúde.

Comentário: Observamos que os problemas propostos por P2 e P9 evidenciam a promoção da Matemática como um instrumento de intervenção com e/ou sem os números, tendo a finalidade de promover o bem-estar de todos. Ademais, a Proposição de Problemas, neste processo, surge como mola propulsora que impulsiona e potencializa diferentes debates, tanto numa concepção cognitiva/internalista quanto numa visão sócio-político-cultural/externalista.

Dando prosseguimento à modificação da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, P8 destacou que o seu trabalho realizado deu continuidade à fala de Cesinha, o qual explana que a dependência de uma barragem pequena para dar conta das necessidades de todo o município torna a situação complicada. Desse modo, P8 explicou que: “É uma questão mais social. Ou ele vai buscar recurso para ampliar ou vai passar a administração da água para a Cagepa”. Veja todo o trabalho realizado por P8:

Figura 165 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P8

- A NOSSA SITUAÇÃO É COMPLICADA...

- ALÉM DISSO, A ESTAÇÃO DE TRATAMENTO DE ÁGUA (ETA) DO MUNICÍPIO É INSUFICIENTE PARA TRATAR A ÁGUA PARA AS RESIDÊNCIAS, DEVIDO AO RÁPIDO CRESCIMENTO DO MUNICÍPIO, CONCLUIU CESINHA.

PROBLEMA: O QUE AS AUTORIDADES COMPETENTES DEVEM FAZER PARA BUSCAR A SOLUÇÃO PARA ESSE PROBLEMA?

AMPLIAÇÃO DA ESTAÇÃO DE TRATAMENTO DE ÁGUA, PASSAR A RESPONSABILIDADE DA ÁGUA PARA A CAGEPA, ETC.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Nesse contexto, destacamos, para os professores, que P8 pensou num problema de cunho sócio-político-cultural, a partir de um olhar sem os números que ajude a refletir sobre medidas para melhorar serviços de abastecimento de água no município de Alagoinha-PB. O problema formulado por P8 promoveu o seguinte debate:

P13: O cara que ganha um salário mínimo, ele paga, em média, no SAAE, R\$ 29,00. Com a Cagepa, ele pode passar a pagar R\$ 43,00, que acrescenta muito. Será que ele vai conseguir pagar essa diferença com um salário mínimo, sendo que esse gasto estava fora do seu orçamento? Algumas famílias podem até não reclamar, mas as famílias carentes pode ser que sim.

PP: Isso! Esses novos serviços podem acarretar no aumento dos custos de fornecimento de água.

P13: Quando a situação estava complicada aqui no período de seca, o SAAE estava comprando água a Cagepa e repassava para a população por um valor mais caro, e a sociedade carente sofre muito.

PP: Isso ocorreu aqui em Alagoinha?

PP: O SAAE compra água na Cagepa gerando um acréscimo de acordo com a medida de água que é comprada, e isso sobra para o consumidor.

P4: Eu acho que, na Cagepa, até 10 m³ custa R\$ 46,00.

P13: Mas devemos considerar que são mais de cinco mil casas.

P4: Mas, às vezes, é melhor pagar R\$ 46,00 e ter uma garantia de água por 30 dias, do que pagar R\$ 29,00, e não ter água todos os dias.

P13: Eu concordo, mas estou falando com relação ao cara que é carente, que está fora do orçamento dele.

P4: Mas pensa o seguinte...mesmo ele sendo carente, ele vai ter que comprar água. Não vai entrar no orçamento de toda a forma?

P13: Sim.

Na sua vez, P12 explanou que acrescentou o seguinte fato: “Essa empresa possui o controle do consumo médio de litros de água de cada quarteirão desse município”. Após a fala

de Perobinha, ele e seus colegas de escola realizaram uma entrevista com um funcionário da empresa autônoma que presta serviço de abastecimento de água potável no município de Alagoinha-PB. O professor explica que esse acréscimo levou à geração do seguinte problema:

Figura 166 - Problema formulado com o acréscimo de uma nova “fala” por P12

UM QUARTEIRÃO SITUADO EM UMA CERTA CIDADE É COMPOSTA POR 8 CASAS, O CONSUMO MÉDIO DE LITROS DE ÁGUA DIÁRIOS DESSE QUARTEIRÃO É DE 247,5 LITROS. SABENDO QUE AS SEIS PRIMEIRAS CASAS, CONSUMIRAM RESPECTIVAMENTE, 270 L, 230 L, 320 L, 280 L, 250 L E 220 L E QUE A SÉTIMA CASA CONSUMIU 70 LITROS A MAIS QUE A OITAVA CASA, DETERMINE QUANTO CONSUMIU A SÉTIMA E A OITAVA CASA.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O professor-pesquisador solicitou que P12 explicasse o processo de pensamento que o levou à formulação do problema. Na ocasião, P12 explicou que o problema pode ser resolvido por meio das ideias de Média Aritmética e Equação do 1º grau, percebendo, principalmente, que a sétima casa consumiu $x+70$ e, conseqüentemente, a oitava casa consumiu x .

Chamamos atenção para o controle da solução do problema que exigiu, sobretudo, a organização dos dados e a realização da testagem da quantidade de água que a sétima e oitava casas consumiam, de modo que a água consumida pelas outras casas resultasse no consumo médio de 247,5 litros.

Posteriormente, foi a vez de P14, que explicou que o acréscimo de um novo elemento à atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática ocorreu a partir da fala de Sr. Deda: “Provavelmente, deve ser devido ao desperdício diário de água”, e que pesquisou algumas informações reais para que pudessem ser o ponto de partida para a proposição de problemas, e ainda exemplificou os vazamentos e as torneiras abertas como algumas das causas do desperdício de água tanto no Brasil quanto no município de Alagoinha-PB. Veja, a seguir, todo o trabalho realizado por P14:

Figura 167 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P14

“Outra coisa que li, é o desperdício da água no Brasil, que em relação a água tratada constrói que a cada 100 litros de água tratada somente 63 litros são consumidos e os restantes são perdidos.”

De acordo com a fala de Sr. Deda em relação ao desperdício de água no Brasil, que a cada 100 litros de água tratada somente 63 litros são consumidos e os restantes são perdidos. Sabendo que no município de Sr. Deda a empresa distribui 420m^3 de água por dia. Nas condições apresentadas, determine a quantidade de água, em litros, desperdiçada pela empresa em um dia, segundo a fala de Sr. Deda. Use 1m^3 equivale 1000 l.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, elaborada por P12, possibilita abordar tanto aspectos cognitivos (conceitos e processo matemáticos) quanto sócio-político-culturais, uma vez que podemos incentivar os alunos a investigarem o que está ocorrendo com os 37 litros de água desperdiçados e conscientizá-los acerca de que medidas podem ser tomadas para minimizar este desperdício.

No acréscimo de um novo fato a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, P1 compartilha um novo diálogo entre Perobinha e PC acerca da quantidade de água transportada por um caminhão-pipa. Veja todo o trabalho realizado por P1:

Figura 168 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P1

Fala:

-Quantos litros de água um caminhão Pipa pode transportar?
Questionou Perobinha

-Uma vez eu vi em uma Pesquisa que um caminhão Pipa pode transportar 5.000 litros de água. Explicou PC.

Problema:

Considerando que um caminhão Pipa transporta 5.000 litros de água. Quantas viagens esse caminhão Pipa deve fazer para encher um reservatório de 20.000 litros?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O professor-pesquisador questionou P1 com relação à capacidade de um caminhão-pipa. Ele, por sua vez, explicou que realizou uma pesquisa e que, de fato, há um caminhão-pipa que transporta 5.000 litros. Desse modo, enfatizamos a importância de trazer informações reais, para que o conhecimento matemático seja produzido por meio de uma situação-problema que possa fazer sentido para o aluno.

Na sua vez, P13 acrescenta um novo fato a Narrativa Matemática, enfatizando que a empresa que fornece água ao município Alagoinha promoveu um determinado aumento com relação ao abastecimento de água, mas que, devido à reivindicação da população, foi necessário dar um desconto sobre os serviços de abastecimento de água.

Figura 169 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P13

Fala: O SAAE (Serviço Autônomo de Água), resolveu dar um aumento de 15% com relação ao abastecimento de água, porém com a revolta da população o SAAE, sentiu a necessidade de apenas 10% sobre o gasto mensal de água.

Problema: Uma família que iria pagar R\$ 29,00, pelo custo o consumo de água, irá pagar quanto depois do aumento e desconto dado pelo o SAAE acerca do consumo mensal de água?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

O P5 levanta uma nova variável para a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, modificando a quantidade máxima em m^3 de água para as empresas, em que as regras de consumo inicial serão válidas apenas para os domicílios que utilizam água para as suas necessidades diárias. Durante o compartilhamento do trabalho realizado, ele explicou que, possivelmente, grandes empresas do ramo alimentício e pequenos produtores rurais da cidade necessitam de uma quantidade maior de água para o funcionamento do seu negócio, quando comparados a uma família comum. Veja todo o trabalho realizado por P4:

Figura 170 - Acréscimo de uma nova “fala” e formulação do problema por P5

- Esta

- O funcionário falou, também, que cada residência não pode exceder no mês o consumo de 20 m^3 de água, finalizou Perleirinha

- Muda Para:

- O funcionário falou, também, que cada residência não pode exceder no mês o consumo de 20 m^3 de água, porém para empresas da cidade abastecidas pela empresa, não há um limite com a condição de que irá pagar R\$ 3,00 a mais por cada m^3 excedido dos 20 m^3 .

Problema:

1) Uma família comercializa hortaliças na feira livre da cidade como: cenoura, alface, hortelã, couve e raízes como: batata e macaxeira. Para irrigação das plantações eles gastam em média 80 m^3 de água mensalmente. Qual o valor da conta de água mensal da família?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Após o compartilhamento de todo o trabalho realizado, iniciamos o debate sobre a introdução da obra “*Rethinking Mathematics: Teaching Social Justice by the Numbers*” (Gutstein; Peterson, 2013). Da discussão, defendeu-se a ideia da matemática como uma ferramenta para combater injustiças sociais; foram elencados os benefícios de uma aula de Matemática na perspectiva da Matemática para Justiça Social; descritos alguns exemplos que podem ajudar o professor a trabalhar com este enfoque; como também ocorreu a sistematização de alguns encaminhamentos para promover uma aula de Matemática nessa perspectiva.

Sobre isso, amparados em estudos desenvolvidos por Gutstein e Peterson (2013), destacamos aos professores que eles podem orquestrar uma aula de Matemática via Exploração-Proposição e Resolução de Problemas com enfoque na Justiça Social, adotando os seguintes movimentos pedagógicos:

- Identificar um conceito/habilidade que será ensinado, e selecionar, da respectiva obra, uma atividade, posteriormente, o professor precisa avaliar o quão foi bem-sucedido o aluno, em termos da motivação, compreensão de conceitos/processos matemáticos e o aprofundamento do conhecimento sobre a questão social em foco;

- Abrir espaço para conversar com os alunos sobre suas vidas em comunidade, visando ajuda-los a identificarem questões de justiça social que emergem da sua vida diária, impulsionando a criação de projetos sociais com foco na Justiça Social;
- Acompanhar, na mídia, os problemas atuais que afetam a vida dos alunos e possuem conexão com conceitos matemáticos, levando o professor a desenvolver um projeto de Matemática para Justiça Social (Gutstein; Peterson, 2013).

Desse modo, enfatizamos que trabalhamos atividades de exploração, proposição e resolução de problemas na perspectiva de Justiça Social (Gutstein; Peterson, 2013) e, com isso, ao longo do curso, surgiram diferentes debates em nível sócio-político-cultural, como: a (in)justiça e o processo de sedução de apostas de jogos esportivos (ou outro tipo de aposta); temáticas voltadas para a modernidade líquida – consumismo e o capitalismo; temas de urgência social – a extinção das abelhas e a escassez de água no mundo, dentre outros. Argumentamos que as diferentes intervenções em sala de aula exemplificam como podemos ir além de conceitos matemáticos, por meio de reflexões críticas com/sem os números, visando a promoção e o engajamento em questões de (in)justiça social, de modo a desenvolver a criticidade e fazer intervenções em situações que permeiam seu entorno.

Com isso, destacamos que, os autores percebem uma abordagem de Matemática para Justiça Social, com o potencial de motivar os alunos, aprender uma matemática rica e viva, questionar/criticar resultados e o seu entorno, sendo, pois, o tipo de Matemática apropriada para tempos injustos que vivemos.

Comentário: A escrita da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “A crise hídrica – um problema mundial” é fruto de um olhar para a sala de aula de matemática que toma como ponto de partida aspectos do contexto sociocultural, em que os alunos, a escola e o professor estão inseridos, que, na nossa visão, podem motivar a aprendizagem de uma matemática importante ao atribuir significado a diferentes fazeres e aspectos da sociedade que moldam o cotidiano do aluno.

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Com a antecipação dos problemas que podem ser propostos em uma atividade de exploração, proposição, resolução de problemas, aprende-se que há sempre uma nova viagem a se fazer e, por isso, retoma-se um problema e busca-se refiná-lo, com a sua reescrita, através da geração de novos problemas e da busca de resoluções alternativas;

- A partir de uma prática intencional, retoma-se um problema proposto por um professor para trabalhar o significado de Fração como Operador Multiplicativo;
- Incentiva-se que os professores proponham novos problemas a partir de um problema inicial e sugere-se um problema alternativo que pode promover o debate de conceitos matemáticos, como também de questões sociais. Desse caminhar, aprende-se que o professor precisa incentivar o trabalho de proposição durante e depois da exploração e resolução do problema;
- A proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas sinalizou que o processo de problematização antecipou a geração dos problemas;
- A metodologia de Exploração de Problemas contribui para a conscientização do saber matemático como instrumento de intervenção que visa melhorar a vida de todos.

7.13 Décimo terceiro episódio de sala de aula (26/08/2023): explorando, propondo e resolvendo problemas a partir da Narrativa Matemática “Qual o preço justo?”

Iniciamos o encontro entregando a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “Qual é o preço justo?”, para cada professor, como material impresso, e também enviamos para o grupo do *WhatsApp* o documento no formato PDF. Em seguida, solicitamos que os professores fizessem uma leitura detalhada e, posteriormente, apresentassem suas impressões, curiosidades e reflexões em forma de problemas e os resolvessem. Após a entrega da Narrativa Matemática, ponderamos para os professores que a escrita desta foi inspirada a partir de uma situação real.

Narrativa: Qual é o preço justo?

Andrade é um professor de Matemática, amplamente preocupado com questões de (in)justiça social. Chegando as festas de final de ano, é comum as lojas promoverem promoções para finalizar seus estoques. Andrade entrou em uma determinada loja, com filiais em todo o Brasil, que estava com a seguinte promoção **leve 3 pague 2** (a peça que sairá de graça deve ser de igual ou menor valor. Promoção válida enquanto durarem os estoques).

Ele escolheu os produtos que iria levar, dirigiu-se ao caixa e disse: “Boa tarde, moça”.

— Olá, boa tarde, senhor!

Em seguida, Andrade solicitou que a moça do caixa registrasse suas compras. Ao ver o valor da compra, ele interveio:

— Há alguma coisa errada. De acordo com os meus cálculos, esse não é o valor real da compra.

A moça que estava no caixa afirmou:

— Acho que o senhor se equivocou nas suas contas. O sistema está programado para realizar os cálculos de forma precisa.

Observe abaixo a nota fiscal contendo os produtos que seriam comprados, descontos e o valor final:

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01- Cueca	15,90	4,71	15,90
02 - Cueca	15,90	4,71	15,90
03 - Cueca	15,90	4,71	15,90
04 - Cueca	19,90	5,89	19,90
05 - Cueca	19,90	5,89	19,90
06 - Cueca	19,90	5,89	19,90
07 - Meia	29,90	0,00	29,90
08 - Meia	9,90	0,00	9,90
09 - Meia	9,90	0,00	9,90
10 - Cueca	29,90	0,00	29,90
Valor Total dos Produtos R\$			187,00
Valor Pago R\$			155,20
Desconto			31,80

Todos que estavam na fila do caixa direcionaram suas atenções para o diálogo entre Andrade e a moça do caixa. Ele, confiando nos seus conhecimentos matemáticos, falou:

— Eu não vou levar essa compra, pode desfazer! E todos atentos observavam como ele poderia provar a veracidade de suas reivindicações.

Depois de encerrar a compra, o astuto Andrade resolveu intervir, visando mostrar a injustiça que o levou ao inconformismo. Ele afirmou:

— Faça o seguinte, na primeira compra passe os três kits cueca (R\$ 15,90), dois kits de meias (R\$ 9,90) e os outros dois kits de meias (R\$ 29,90). Agora em outra compra, quero que você passe os três kits de cuecas (R\$ 19,90). Veja as notas fiscais das duas compras, abaixo:

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01– Cueca	15,90	5,30	15,90
02 – Cueca	15,90	5,30	15,90
03 – Cueca	15,90	5,30	15,90
04 – Meia	9,90	0,00	9,90
05 – Meia	9,90	0,00	9,90
06 – Meia	29,90	0,00	29,90
07 – Cueca	29,90	0,00	29,90
Valor Total dos Produtos R\$			127,30
Valor Pago R\$			111,40
Desconto			15,90

Nota fiscal do consumidor			
Kit	V. Unit. (R\$)	V. Desc.(R\$)	V. Total (R\$)
01– Cueca	19,90	6,63	19,90
02 – Cueca	19,90	6,63	19,90
03 – Cueca	19,90	6,64	19,90
Valor Total dos Produtos R\$			59,70
Valor Pago R\$			39,80
Desconto			19,90

Andrade provou que, de fato, o valor inicial gerado no ato da compra não era condizente com a promoção vigente. Todos, a moça do caixa e os clientes presentes, ficaram impressionados com a forma como Andrade interveio em uma situação de injustiça social.

É importante ressaltar que, neste encontro, estavam presentes 13 professores. Esta Narrativa Matemática foi trabalhada apenas em um encontro, visando abordar os seguintes conceitos e conteúdos matemáticos:

- Discutir os conteúdos de Taxa Percentual, Descontos e Proporção, a partir das tabelas e do enredo da narrativa “promoção leve 3 pague 2”;
- Transitar entre as diferentes Representações de um Número Racional.

Embora o professor-pesquisador tivesse solicitado que os professores desenvolvessem o trabalho de proposição de problemas, notamos que a resolução de problemas ocorreu durante o processo de proposição dos problemas. Acreditamos que isso justifica-se devido ao fato de esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática descrever um episódio real em que Andrade interveio e transformou uma situação de injustiça social fazendo uso da Matemática, de modo que os professores buscaram elucidar como Andrade conseguiu tal proeza.

Comentário: Esta Narrativa Matemática, *a priori*, pode ser considerada uma atividade de resolução de problemas, contudo, os encaminhamentos dados pelo professor-pesquisador, de modo geral, abrangeram um olhar mais amplo que exigiu dos professores a realização um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

Durante o processo de investigação acerca do mistério em torno da compra realizada por Andrade, os professores fizeram uso da calculadora do *smartphone* para fazer a testagem das possíveis explicações matemáticas que justificam a tomada de decisão de Andrade, ao perceber que estava diante de uma situação de injustiça social. Veja os diálogos a seguir:

PP: Alguém percebeu se, de fato, Andrade estava correto em suas reivindicações?

P2: A promoção só será válida quando ele levar três *kits*... Ele pagará dois *kits*?

PP: Isso!

P10: Eu percebi que, nesse de R\$15,90, não tem preço de dois só, tem preço de três. Se, de fato, ele teve desconto de R\$ 5,30 de cada pacote, aí tudo bem. Aí esse desconto se refere à promoção, aí, quando junta esse desconto, dá um pacote.

PP: Quanto Andrade iria pagar na primeira nota antes de ele questionar se o valor estava correto?

P8: Iria pagar R\$155,20. Aí ele pediu para passar duas vezes. Na primeira, passar os três *kits* de cuecas e dois *kits* de meia e, na segunda, os outros três *kits* de cueca.

P14: Se somar as duas notas, R\$ 111,40 e R\$ 39,80, dá R\$ 151,20.

Professores: Uma diferença de R\$ 4,00.

P2: Tem uma coisa que percebi na primeira nota é... Nas três primeiras cuecas, o desconto é R\$ 4,71 de cada. Se a gente multiplicar por 3, o desconto será de R\$ 14,13 e, na verdade, deveria ser R\$ 15,90. O desconto deveria ser de R\$ 5,30.

PP: Então, como se explica esse R\$ 4,71?

P9: Eu acho que o sistema é que está errado. Quando ele passou três unidades, o sistema não identificou que era na promoção, porque, geralmente, quando eles colocam na promoção, é um código só para aquela promoção. Ele passou a unidade da cueca e não o valor do *kit*. Então, deve ter sido com relação aos *kits* na hora de passar.

P8: Se tivesse passado uma cueca de R\$ 15,90 e uma de R\$ 19,90 de forma aleatória, pode ser que o sistema não tenha identificado que são da promoção leve 3 pague 2.

P14: Pode ter sido a vendedora que cometeu algum erro na hora de passar os *kits*, porque, se passar separado, como ocorreu na segunda parte, o desconto aconteceu.

P9: Se tiver errado e você fizer uma feira grande, você não percebe, mas, se você comprar por unidade, você percebe. Foi igual uma vez que comprei no mercado uma caixa de cerveja estava R\$ 42,00. Quando passei no caixa, estava R\$ 46,00. Aí eu questionei que o preço que estava na prateleira era R\$ 42,00. Aí, quando atualizou o sistema, vi que estava no código errado.

P2: Na parte da narrativa que diz leve 3 pague 2, diz que a peça que sairá de graça deve ser de igual ou menor valor.

PP: Quais foram os *kits* que ele levou 3 e pagou 2?

P14: Três cuecas de R\$ 15,90 e três cuecas de R\$ 19,90.

P8: No primeiro quadro, o desconto de R\$ 4,71 e R\$ 5,89 deveria ser de R\$ 5,30 e R\$ 6,63, como mostra quando ele fez passou os *kits* separados. E, quando fizer a diferença, vai dá os R\$ 4,00.

P14: Só se o sistema pegou as seis.

P9: Mas como pegou as seis, se deu um desconto para um *kit* e um valor diferente de desconto para o outro? Deveria ter sido o mesmo desconto.

P2: Eu acho que encontrei, mexendo na calculadora. O sistema pegou e somou os seis *kits* de cuecas: R\$ 15,90 + R\$ 15,90 + R\$ 15,90 + R\$ 19,90 + R\$ 19,90 + R\$ 19,90 = R\$ 107,40. Esse resultado ele dividiu por 6, como se fosse uma média, que vai dar R\$ 17,90 para cada cueca, ficando duas de graça, R\$ 17,90 + R\$ 17,90 = R\$ 35,80, e não R\$ 31,80.

P8: No caso, seria: leve 6, pague 4.

P2: Para isso acontecer, as cuecas de R\$ 15,90 e R\$ 19,90 teriam que ter o mesmo código. Esse código é um código criado pelo ser humano. Não seria código de barra. Código de barra é outra coisa da empresa distribuidora do produto, ele é único de cada produto. Agora, o código de alimento é do sistema. Eu sei porque eu fazia isso no mercado do meu avô, você pode criar um código de cada peça, e você pode até criar um código com valor igual. Agora, é um erro fazer isso.

P9: Acho que também tá voltado para a ideia de que a peça que sairá de graça deve ser de igual ou de menor valor. Será que, na compra dos *kits* de R\$ 19,90, ele pode ter reconhecido que a peça que saiu de graça foi a de menor valor, no caso, a de R\$ 15,90, do outro *kit*, como a que sairia de graça.

P7: O sistema considerou todas iguais. No caso, a mais barata, de R\$ 15,90. E descontou duas de R\$ 15,90.

P14: Então, o erro foi do sistema.

P7: Talvez, tenha colocado um código igual para os mesmos *kits*.

P14: O erro foi de quem elaborou o sistema.

P12: Tem loja que tem o mesmo código...o sistema não está programado para dar o desconto, então, tem que fazer pela calculadora. E, se ele fizer errado pela calculadora, então, vai colocar o valor errado no sistema.

P4: Mas será que o sistema está errado mesmo, já que fala que a peça que sairá de graça deve ser de igual ou de menor valor? Esse “pode ser de menor valor” não dá uma brecha para que não tenha sido um erro?

P2: Então, o sistema pode escolher o de menor valor.

PP: E qual alternativa para se livrar da sabedoria da loja?

Professores: Passar os produtos separados.

P4: Dá a entender que o sistema estava programado para fazer uma leitura não com relação ao código, mas uma leitura nominal. Nesse caso, cuecas. A cada três cuecas que passasse, iria gerar uma. No caso, se passasse mais um *kit* de cuecas de R\$ 29,90, o sistema iria escolher a mais barata para dar o desconto.

PP: O que acharam da atitude de Andrade?

P14: Ele estava atento à situação e usou o conhecimento matemático. Se não tem o conhecimento matemático, passa despercebido.

P8: A loja, talvez, estava querendo dar um golpe.

P9: Deu certo porque ele fez as contas antes de ir para o caixa pagar, porque, se ele não tivesse feito, R\$ 4,00 a mais iria passar despercebido. Se o valor é alto, é mais fácil perceber, como só eram R\$ 4,00, numa compra dessa é difícil perceber.

PP: Vocês acham que Andrade provocou essa zoada toda apenas por causa de R\$ 4,00?

P10: Ele questionou a atendente porque estava se sentindo injustiçado.

P14: Dependendo da situação, se fosse outra pessoa que comprasse uma quantidade maior de cuecas, teria tido um prejuízo maior.

PP: Essa intervenção de Andrade possibilitou a todos os presentes se questionarem se também estavam pagando mais do que deviam. Em considerando o que P14 falou, se fez uma compra maior, pagou muito mais do que devia ter pagado.

P14: Se fossem dez pessoas que fizessem a mesma compra, a loja já ganharia R\$ 40,00. Imagina quanto não ganharia com uma quantidade maior de pessoas.

P9: Eu acho que foi intencional, para ter um lucro maior.

Comentário: Notamos que houve um intenso trabalho cooperativo e colaborativo, em que, juntos, os professores se mobilizaram e sistematizaram possíveis soluções de cunho matemático, como também sócio-político-cultural, que ajudaram a desvendar ou sinalizar como Andrade conseguiu intervir e transformar uma situação de injustiça social.

Após o intenso debate que culminou em possíveis explicações para a intervenção realizada por Andrade, por meio do raciocínio matemático, destacamos que foram defendidas soluções para o problema, e enalteceamos o trabalho realizado por P2, P4, P8 e P9, em especial os dois últimos que argumentam que, possivelmente, o sistema fez a leitura do *kit* de cueca mais barato, no caso, R\$ 15,90 e, ao comprar os *kits*, levou dois de menor valor, ou seja, R\$ 15,90. Ressaltamos, para os professores, que foi debatido que, provavelmente, ocorreu um erro humano, no qual o sistema foi programado para este fim ou, ainda, que a nota da promoção, a qual expressa que a peça que sairá de graça deve ser de igual ou menor valor, como destacado por P4, pode sustentar o fato de ter levado dois *kits* de cuecas no valor de R\$ 15,90, ao invés de um *kit* de R\$ 19,90 e o outro de R\$ 15,90.

Destacamos aos professores sobre a forma como Andrade utilizou a Matemática como um instrumento para combater injustiças sociais, defendendo seus direitos, por meio de uma atitude transformadora e, sobretudo, comprometida com o bem-estar de todos, ao “gritar” para todos que estavam presentes acerca da ocorrência de uma situação de injustiça social, levando as pessoas a se questionarem se, de alguma forma, também estavam sendo injustiçados.

Refletimos, ainda, a respeito de como esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas promoveu o engajamento dos professores, destacando que, possivelmente, um dos motivos que explica isso decorre do fato de ser uma atividade que expressa uma situação real, descrita por nós, por meio de uma Narrativa Matemática, de modo a sinalizar o potencial da Matemática para fazer intervenções no nosso cotidiano.

Comentário: O professor pode contextualizar situações por ele vividas e elaborar uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, potencializando a Matemática como um instrumento para resolver problemas que estão amplamente conectados com a sua vida cotidiana, percebendo, sobretudo, o valor social da Matemática na interpretação e compreensão de diferentes aspectos da nossa sociedade.

Em seguida, iniciamos o processo de compartilhamento dos problemas propostos. Diante da discussão acerca da intervenção realizada por Andrade, P5 formulou e resolveu um problema mostrando como Andrade poderia usufruir o máximo da promoção, pagando o mesmo valor que deveria ser pago depois de recomendar que a compra fosse realizada por meio de duas notas fiscais (R\$ 151,20). Sobre isso, P5 explica sua descoberta:

P5: Mesmo Andrade estando certo nas contas, ele ainda poderia ganhar mais, porque ele comprou dois *kits* de meia de R\$ 9,90 e um *kit* ou peça de cueca e de meia de R\$

29,90. Como a promoção é leve 3 e pague 2, desde que seja do mesmo preço, se ele tivesse adicionado mais uma meia de R\$ 9,90 e mais uma cueca ou meia de R\$ 29,90, somando os descontos que ele teria direito, de acordo com a anúncio da promoção, ele teria levado duas peças a mais pagando o mesmo valor em relação ao que ele pagou na última conta com a correção feita no caixa.

Figura 171 - Problema proposto por P5 e resolução do problema

1- Caso o professor Andrade tivesse comprado 12 Peças ao invés de 10, acrescentando assim mais uma meia de R\$ 9,90 e outra meia ou cueca no valor de R\$ 29,90. O que aconteceria? Explique

Kit		
Cueca	15,90	Cueca 19,90 Meia 9,90
Cueca	15,90	Cueca 19,90 Meia 9,90
Cueca	+15,90	Cueca +19,90 Meia +9,90
	47,70	59,70 29,70
	-15,90	-19,90 - 9,90
Cueca	31,80	39,80 19,80
Meia		
Meia	29,90	
Cueca	29,90	
Meia ou Cueca	+29,90	
	89,70	
	-29,90	
	59,80	

Andrade pagaria R\$ 151,2 pelos produtos, obtendo desconto de R\$ 75,6. Sendo assim o professor Andrade teria comprado 2 peças a mais pagando o mesmo valor que a última compra.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: A proposição do problema, seguida do processo de resolução, pode confirmar descobertas que revelam a criatividade do propositos de problemas e, sobretudo, mostra sua capacidade de detectar diferentes aspectos chaves de uma situação que foi problematizada matematicamente.

Posteriormente, P6 compartilhou três problemas por ele formulados, em que, no primeiro, foi problematizado qual seria o desconto unitário da cueca cujo valor é R\$ 15,90, considerando a promoção **leve 3 pague 2**. No segundo, P6 enfatiza que acrescentou três camisas nas compras realizadas por Andrade, e solicita o novo valor de desconto. Por fim, ele ressalta que propôs um problema em que a loja lança uma proposta de desconto para Andrade, com o objetivo de minimizar o constrangimento diante de uma situação de injustiça social. Veja todo o trabalho realizado por P6:

Figura 172 - Problemas propostos por P6

- ① SABE-SE QUE O VALOR DAS TRÊS PRIMEIRAS CUECAS, SEM O DESCONTO, UNITÁRIO, É DE R\$ 15,90. CALCULE O VALOR UNITÁRIO DESSE PRODUTO COM O DESCONTO.
- ② CONSIDERANDO QUE ANDRADE ACRESCENTOU EM SUA COMPRA 3 CAMISAS NO VALOR DE R\$ 89,90 REAIS CADA, CALCULE O NOVO VALOR TOTAL DO DESCONTO OBTIDO.
- ③ O GERENTE DA LOJA, AO NOTAR ANDRADE ENFURECIDO, OFERECEU 30% DE DESCONTO COMO FORMA DE PEDIDO DE DESCULPA SOBRE O VALOR TOTAL DA COMPRA (489,00). CALCULE O NOVO VALOR A SER PAGO.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Nessa direção, P3 propõe uma questão social acerca de como a loja pode se responsabilizar, tomando alguma providência, no mínimo, corrigindo o erro, ou mesmo explicando com clareza, já que a atendente do caixa não teve o mesmo entendimento de Andrade, quando este realizou a compra por meio de duas notas fiscais, haja vista que obteve-se um desconto diferente, quando feita toda a compra por meio de uma única nota fiscal.

Figura 173 - Problemas propostos por P3

Como a loja se responsabiliza para suprir essa necessidade diante dessa situação de injustiça social com os consumidores.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Aprofundando o caminhar de exploração de problemas, P13 enfatizou a possibilidade de erros humanos, a exemplo do esquecimento ou negligência pessoal, como justificativas para que um determinado produto seja vendido acima do preço em um estabelecimento comercial específico. Veja todo o trabalho de proposição de problemas desenvolvido por P13:

Figura 174 - Problema proposto por P13

Nas compras que sempre realizamos, confiamos nos caixas dos comércios, sobretudo nos que usam as tecnologias nos caixas. Os cálculos são realizados por tecnologias, logo não há quase possibilidades de erros. Porém, há erros humanos, nos caixas.

Em um certo dia, uma caixa de leite estava na promoção, custando apenas R\$ 5,83, e resolvi comprar 140 caixas desse leite. Assim, paguei R\$ 838,00. A compra foi justa? Por quanto saiu o preço de cada caixa de leite?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Do trabalho realizado por P13, ressaltamos que, embora o consumidor não sinta muita diferença no acréscimo, o valor cobrado a mais, por mais que seja mínimo, pode fazer uma diferença significativa para a loja, quando vendida uma grande quantidade do mesmo produto.

Dando continuidade à atividade que foi solicitada aos professores, P12 faz a leitura do trabalho realizado explicando o seu processo de pensamento, ao dizer que: “O problema envolve a ideia de calcular o desconto em cima de um valor, aí a próxima porcentagem correspondia ao mesmo valor em dinheiro do desconto dado na primeira camisa”. Veja, a seguir, o problema proposto por P12:

Figura 175 - Problema proposto por P12

ANDRÁDE DESEJA COMPRAR UMA CAMISA NA LOJA X, A CAMISA ESTAVA CUSTANDO R\$ 140,00 NO MÊS DE JANEIRO, E IRÁ SER VENDIDA COM 15% DE DESCONTO. NO MÊS DE FEVEREIRO ESSA MESMA CAMISA ESTAVA COM UM DESCONTO DE 14%, PORÉM, O VALOR EM REAIS DE DESCONTO É O MESMO DO VALOR DADO NO MÊS DE JANEIRO. POR QUANTO ESSA CAMISA SERIA VENDIDA EM FEVEREIRO SEM O DESCONTO?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Os professores recomendaram que P12 fosse à lousa a fim de apresentar uma solução para o problema por ele proposto. Veja a solução defendida por P12:

Resolução:

15% de R\$ 140,00

$$\frac{15}{100} \cdot 140 = \frac{2100}{100} = 21$$

Sobre a interpretação do problema, P12 explicou que R\$ 21,00 corresponde a 14% de desconto no mês de fevereiro e, para descobrir o valor da camisa neste mesmo mês sem o desconto, bastava utilizar uma Regra de Três Simples. Observe a seguir:

%	R\$
14	21
100	x

$$14x = 2.100$$

$$x = \frac{2100}{14}$$

$$x = 150$$

Acerca da compreensão da solução do problema, P12 explanou que, considerando que a camisa custará R\$ 150,00 no mês de fevereiro sem o desconto, a taxa percentual de desconto que deveria incidir sobre o valor deveria ser menor do que no mês de janeiro, nesse caso, 14%.

Enfatizamos que o trabalho de proposição de problemas realizado por P12 foi ratificado, bem como enfatizamos o quanto o ele foi bem-sucedido com a resolução do problema, o que sinaliza como P12 percebeu os procedimentos de resolução e antecipou a solução do problema.

Em seguida, P2 e P14 analisam como esse problema pode ajudar a refletir acerca de mecanismos de sedução utilizados pelas lojas para atrair os consumidores, por meio de descontos que, na prática, são enganosos. Veja, a seguir, o diálogo:

P2: A gente pensando em propaganda... isso é bom para a loja, ela mostra quando custava R\$ 140,00 e teve um desconto de 15%. Aí, no outro mês, ela custava R\$ 150,00 e teve um desconto de 14%. Em ambas, o desconto é de R\$ 21,00.

P12: Ou seja, ele dar um aumento de R\$ 10,00, e diminuir a porcentagem de desconto.

P2: Realmente, chama mais atenção em fevereiro.

P14: Para o bolso do cliente, o desconto será o mesmo... de R\$ 21,00. Só que, ao pegar R\$ 150,00 e tirar R\$ 21,00, ele iria pagar R\$ 129,00 em fevereiro, com o desconto de 14%. Já em janeiro, com o desconto de 14%, seria $140,00 - R\$ 21,00 = R\$ 119,00$. Então, seria melhor comprar a camisa do mês de janeiro.

Dando continuidade à tarefa de proposição de problemas, P14 fez a leitura do trabalho realizado, explanando que se inspirou nas tabelas que trazem os preços das cuecas e meias, e acrescentou alguns tipos de vestes e calçados, formulando um problema envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem. Veja, a seguir, o problema proposto por P14:

Figura 176 - Problema proposto por P14

Para ir ao aniversário de um amigo, Luiz decidiu comprar um novo conjunto de roupa, composto por uma blusa, calça e sapato. A loja estava disponível para a compra dois tipos de blusa; blusa social nas cores: amarela, verde, preta e azul, blusa polo nas cores: azul, preta e branca, para calça tem calça social nas cores azul e preta, calça jeans nas cores azul, preta e vermelha e para sapatos tem o social e tênis. Nas condições apresentadas, determine de quantas maneiras Luiz pode fazer a compra de seu conjunto.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

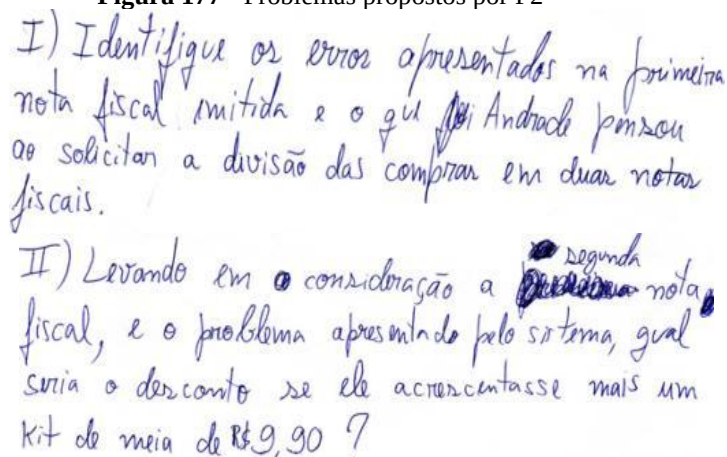
Destacamos, para os professores, que embora tenhamos escrito esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática para trabalhar outros conceitos matemáticos, imaginávamos que poderiam ser propostos problemas envolvendo ideias essenciais de Análise Combinatória.

Comentário: No trabalho de proposição de problemas desenvolvido na perspectiva da Exploração de Problemas, o professor terá sempre uma quantidade importante de problemas para lidar. No entanto, munido de uma intencionalidade, ele vai se questionar qual, por que, quando e como um determinado problema precisa ser selecionado para discutir ideias matemáticas, bem como questões de natureza sócio-político-cultural.

O P12 ainda sugeriu um novo problema a partir do trabalho por ele realizado, destacando: “*Outro problema seria escolher duas blusas entre as sete*”, a partir do qual enfatizamos que este problema abordaria o conceito de Combinação Simples.

A discussão acerca da intervenção de Andrade inspirou P2, explanando que o seu trabalho realizado consistiria em desafiar os alunos a investigarem possíveis erros gerados nas notas fiscais correspondentes à compra realizada por Andrade. Para intensificar o processo de exploração da atividade, P2 questiona: “[...] *o que Andrade pensou ao solicitar a divisão de compras em duas notas fiscais?*”. Enfatizamos que, para ir mais além, P2 propõe outro problema, levando em consideração todo o contexto descrito na narrativa, e acrescenta um novo elemento: “[...] *acrescentar mais um kit de meia de R\$ 9,90*”. Veja todo o trabalho realizado por P2:

Figura 177 - Problemas propostos por P2



I) Identifique os erros apresentados na primeira nota fiscal emitida e o que ~~foi~~ Andrade pensou ao solicitar a divisão das compras em duas notas fiscais.

II) Levando em ~~a~~ consideração a ~~primeira~~ ^{segunda} nota fiscal, e o problema apresentado pelo sistema, qual seria o desconto se ele acrescentasse mais um kit de meia de R\$ 9,90?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Na mesma direção, P4 propõe um problema contextualizando a compra realizada por Andrade, enfatizando a astúcia dele, uma vez que, a partir de uma possível falha do sistema, Andrade pôde sistematizar uma estratégia que o ajudou a tirar proveito da promoção, e ao fim, o professor questiona: “*Que outras estratégias [...] poderiam ser aplicadas [...] a fim de beneficiar ainda mais da promoção?*”. Veja todo o trabalho realizado por P4:

Figura 178 - Problema proposto por P4

COM BASE NA SITUAÇÃO APRESENTADA ONDE ANDRADE COM O SEU CONHECIMENTO MATEMÁTICO CONSEGUIU IDENTIFICAR UMA POSSÍVEL FALHA NO SISTEMA NO QUE SE REFERIA AO CÁLCULO DO DESCONTO DA PROMOÇÃO APRESENTADA E DE FORMA ESTRATÉGICA CONSEGUIU JUNTO AO CAIXA TIRAR O MÁXIMO PROVEITO DA PROMOÇÃO.

QUE OUTRAS ESTRATÉGIAS VOCÊ IDENTIFICA QUE PODERIA SER APLICADA NA COMPRA REALIZADA POR ANDRADE A FIM DE SE BENEFICIAR AINDA MAIS DA PROMOÇÃO.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Em seguida, para explicar uma possível estratégia a fim de se beneficiar com a promoção, P4 toma como exemplo o segundo problema proposto por P2, gerando o seguinte diálogo:

P4: Eu acredito que, se acrescentasse um *kit* de meia de R\$ 9,90, o desconto já passaria a ser de R\$ 9,90, justamente por conta da fala...de igual ou menor valor. A loja não estava ferindo a promoção. Ela deixou claro que seria de igual ou menor valor, então, de alguma forma, ela estava cumprindo.

P14: Foi uma forma de ela se livrar de questionamentos.

P12: Seria uma boa justificativa...se apegar a esse fato de igual ou menor valor.

P2: Então, a estratégia seria comprar outro *kit* de meia de R\$ 9,90, mas dividir as compras em três notas fiscais.

Em seguida, P8 intervém e destaca que, recentemente, vivenciou uma situação parecida com a promoção proposta por Andrade, o que o inspirou a formular uma sequência de problemas, considerando que, na compra de três peças, o cliente levaria de graça a peça de menor valor. Veja todo o trabalho de proposição de problemas realizado por P8:

Figura 179 - Problema propostos por P8

ANDRADE FOI A UMA LOJA DE ROUPAS FAZER SUAS COMPRAS PARA AS FESTAS DE FINAL DE ANO. CHEGANDO LA, SE DEPAROU COM PROMOÇÕES ERA DA SEGUINTE MANEIRA: NA COMPRA DE TRÊS PEÇAS, A PEÇA DE MENOR VALOR SAIRÁ DE GRÁTIA, OU SEJA, SERÃO PAGAS APENAS DUAS PEÇAS. ANDRADE COMPROU UMA CALÇA POR R\$ 200,00, UMA CAMISA POLO POR R\$ 150,00 E UMA CAMISA BÁSICA POR R\$ 100,00. A PARTIR DESTAS INFORMAÇÕES, RESPONDA AS QUESTÕES ABAIXO:

a) QUAL O VALOR, EM REAIS, DO DESCONTO QUE ANDRADE CONSEGUIU?

R\$ 100,00 DE DESCONTO.

b) QUAL O VALOR, EM REAIS, QUE ANDRADE PAGOU PELA COMPRA? R\$ 350,00 EM COMPRAS.

c) QUAL O VALOR, EM REAIS, QUE ANDRADE PAGARIA SE NÃO TIVESSE ~~AP~~ EM PROMOÇÃO?

R\$ 450,00 EM COMPRAS.

d) QUAL O VALOR DA PARCELA, EM REAIS, QUE ANDRADE PAGARIA SE DIVIDIR AS COMPRAS EM DUAS VEZES SEM JUROS NO CARTÃO?

$R\$ 350,00 \div 2 = R\$ 175,00$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Destacamos que a proposta de desconto promovida pela loja a P8 segue o modelo **leve 3 pague 2**, no entanto, considerando-se a ressalva de ser a peça com menor valor. Acerca da sequência de problemas formulado por P8, P2 contribui sugerindo um novo problema e destacando a solução: “Quanto foi o percentual de desconto concedido pela loja com relação ao valor total? Que seria $100 \div 450$, no caso, 22,22%”.

Na sua vez, P7 formulou um problema que sugere uma proposta de desconto para ser confrontada com a promoção, inicialmente, proposta pela loja: **leve 3 pague 2**, ao enfatizar que: “E se a promoção fosse de 15% de desconto no valor de cada produto para as compras de 2

ou mais unidades”, de modo a questionar: “E qual seria a melhor situação para o cliente?”, com o propósito de que os alunos investiguem quais das propostas é a mais vantajosa. Sobre o trabalho realizado, P7 explicou que o desconto deverá incidir no valor unitário do produto, e não no valor total da compra. Veja o problema proposto por P7:

Figura 180 - Problema proposto por P7

(I) VAMOS SUPOR QUE ANDRADE EM SUAS COMPRAS LEVOU 6 CUECAS E 4 MEIAS. QUAL O VALOR PAGO POR ANDRADE EM SUA COMPRA? ANDRADE PENSOU NA SEGUINTE SITUAÇÃO: “E SE A PROMOÇÃO FOSSE DE 15% DE DESCONTO NO VALOR DE CADA PRODUTO PARA AS COMPRAS DE 2 OU MAIS UNIDADES”. QUAL SERIA O VALOR PAGO NA COMPRA DE 6 CUECAS E 4 MEIAS? E QUAL SERIA A MELHOR SITUAÇÃO PARA O CLIENTE?

3 CUECAS → R\$ 29,90
 3 CUECAS → R\$ 15,90
 4 MEIA → R\$ 29,90
 3 MEIAS → R\$ 9,90

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Observe o diálogo que evidencia o pensamento suscitado por P7 acerca da compreensão do problema:

P7: O aluno vai analisar qual das opções é mais vantajosa. O desconto deve ser em cada produto na compra de 2 ou mais.

P2: Ele só terá o desconto se levar 2 ou mais unidades?

P7: Isso!

PP: O que seria mais vantajoso: levar 3 e pagar 2? Ou ter 15% de desconto no valor de cada produto para as compras de 2 ou mais unidades? Na prática, qual é o desconto da promoção: leve 3 pague 2?

P7: Por exemplo, na situação de Andrade, ele iria ter um desconto de 15% em duas cuecas de R\$ 15,90 e em duas de R\$ 19,90. Ia ter um desconto na mais cara, também de R\$ 29,90 e da de R\$ 9,90.

PP: No caso, a promoção deve considerar os mesmos produtos? Então, 2 ou mais unidades do mesmo produto.

P7: Sim, deve ser o mesmo produto.

Nesse contexto, para a apreensão do problema, enfatizamos que deveria ser destacado que a promoção só será válida para os mesmos produtos, pois, na prática, o consumidor astuto pode combinar dois produtos entre si, sempre compondo essa formação com um produto mais caro, visando maximizar o desconto gerado.

Acerca da promoção **leve 3 pague 2**, o professor-pesquisador foi à lousa, a partir do questionamento a respeito do **significado da promoção leve 3 pague 2**. Veja o diálogo a seguir:

PP: Na prática, o que significa a promoção leve 3 pague 2?

P14: Com relação ao problema proposto por P7, a porcentagem leve 3 pague 2 é um pouco maior. Nesse caso, é 33,33%.

PP: E como você resolveu o problema?

P9: É só dividir 100% por 3.

P14: Isso!

PP: Como podemos chegar a essa solução?

P8: Os três correspondem a 100%.

P2: Em três produtos, ele ganha um, então é $1/3$, ou seja, $1 \div 3$. Trabalha a ideia de proporção e razão.

P9: Só atribuir valores.

PP: Mas pode ser quaisquer valores?

P14: Normalmente, utilizamos 100.

PP: Vamos partir R\$ 15,00, e depois quero vocês descubram o porquê. Se partimos de R\$ 15,00 como o valor de um produto, qual será o valor de três produtos?

Professores: R\$ 45,00.

Tomando como ponto de partida as descobertas realizadas pelos professores, junto com eles, apresentamos e defendemos na lousa algumas resoluções para este problema. Veja a seguir:

Resolução 1:

1 produto $\rightarrow$ R\$ 15,00

3 produtos $\rightarrow$ R\$ 45,00

Desconto: R\$ 45,00 - R\$ 15,00 = R\$ 30,00

Logo, na prática, explicamos que cada produto será vendido por $30 \div 3 = 10$, ou seja, cada um deles teve o desconto de $15 - 10 = 5$. Daí, temos:

R\$	%
15	100
5	x

$$15x = 500$$

$$x = \frac{500\%}{15}$$

$$x \cong 33,33\%$$

Resolução 2:

Produtos	%
3	100
2	x

$$3x = 200\%$$

$$x = \frac{200\%}{3}$$

Desconto:

$$100\% - \frac{200\%}{3} = \frac{300\% - 200\%}{3} = \frac{100\%}{3} \cong 33,33\%$$

Resolução 3:

1 produto: x

2 produtos: 2x

3 produtos: 3x

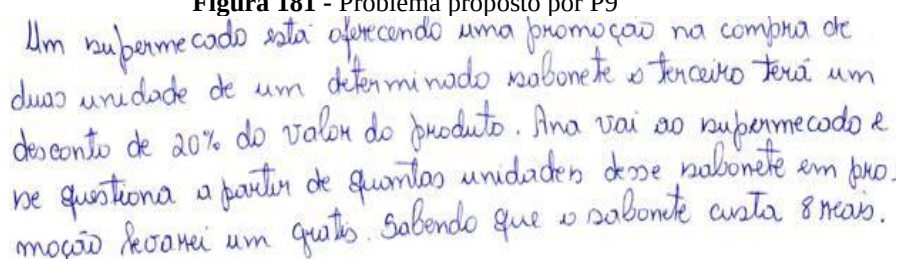
Na prática, com a aplicação da promoção, algebricamente, teremos: $3x - 2x = x$, em que o valor para o desconto unitário de cada produto será:

$$\frac{x}{3} = \frac{100\%}{3} \cong 33,33\%$$

Ao fim, questionamos por que adotamos R\$ 15,00 como ponto de partida, ao invés de R\$ 100,00. Nesse sentido, P14 explicou que: “A divisão não iria ficar exata, e 15 e 45 são múltiplos de 3”. Enfatizamos, ainda, que a discussão em torno deste problema possibilitou transitar em diferentes Representações de um Número Racional, e debateu-se múltiplos processos/procedimentos de resolução de problemas, de modo a ratificar a solução encontrada para o problema matemático.

Na mesma direção, P9 fez a leitura do trabalho de proposição de problemas realizado, destacando uma nova proposta que visava incentivar os consumidores a comprarem, neste caso, na compra de três sabonetes, o terceiro terá um desconto de 20%. Dessa forma, há um questionamento: a partir de quantas unidades de sabonetes em promoção, levará um grátis? Veja todo o trabalho de proposição de problemas realizado por P9:

Figura 181 - Problema proposto por P9



Um supermercado está oferecendo uma promoção na compra de duas unidades de um determinado sabonete o terceiro terá um desconto de 20% do valor do produto. Ana vai ao supermercado e se questiona a partir de quantas unidades desse sabonete em promoção levará um grátis. Sabendo que o sabonete custa 8 reais.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

A partir do trabalho cooperativo, os professores refletiram acerca do problema formulado por P9, o que culminou na solução do problema, ao defenderem, que a cada três sabonetes, o consumidor terá o desconto de 20% na terceira unidade, o que totaliza a compra de quinze sabonetes para gerar um crédito de R\$ 8,00 (acumulou 100% do valor de uma unidade do sabonete) de acordo com a promoção vigente. Assim, em termos práticos, ressaltamos que se pode nomear esta promoção seguindo o modelo: **leve 15 pague 14**.

Na mesma direção, P1 compartilha o trabalho realizado, ressaltando que manteve o valor do kit de cueca (R\$ 15,90), e acrescentou uma nova promoção para chamar a atenção dos consumidores. Veja todo o trabalho realizado por P1:

Figura 182 - Problema proposto por P1

Andrade foi a uma loja decidido comprar um kit de cueca que custava R\$ 15,90. Chegando lá, se interessou por uma promoção que anunciava que na compra de mais de um kit de cueca, ganharia um desconto de 10% por unidade que ultrapassar a um kit de cueca. Sabendo que ele levou quatro kits de cueca, quando ele pagou pela compra?

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Aprofundando o processo de exploração de problemas, P10 compartilha a leitura do trabalho realizado, anunciando o desconto por meio de um número fracionário. Na ocasião, P14 explana que, diante do contexto do problema, “O erro aqui é humano, e não o sistema. E quem sabe não seria de propósito. Se pegar uma pessoa que não saiba Matemática, paga R\$ 120,00, e vai embora”. Veja o problema proposto e a resolução defendida por P10 na lousa:

Figura 183 - Problema proposto por P10

ANDRADE É ESPERTO E SEMPRE CONFERE A CONTA EMITIDA PELO CAIXA DA LOJA. APROVEITOU A PROMOÇÃO DO DIA DOS PAIS PARA COMPRAR UM CINTO E UMA CARTEIRA PARA PRESENTEAR SEU PAI. NA COMPRA DO CINTO À VISTA ELE TERIA UM DESCONTO DE $\frac{1}{9}$ DO SEU PREÇO QUE É DE R\$ 36,00 SEM DESCONTO. O PREÇO DA CARTEIRA, TAMBÉM SEM DESCONTO, É DE R\$ 96,00, MAS SE FIZER O PAGAMENTO À VISTA TERÁ UM DESCONTO DE $\frac{1}{8}$ DO SEU PREÇO. ANDRADE COMPROU OS DOIS ITENS À VISTA E RECEBEU A NOTA DE BALCÃO COM UM TOTAL DE R\$ 120,00. AO CONFERIR OS CÁLCULOS, NOTOU ALGO ERRADO. O ERRO SERÁ PARA MAIS OU PARA MENOS, EM RELAÇÃO AO VALOR DA NOTA?

SOLUÇÃO:

- PREÇO DO CINTO: $36 - (\frac{1}{9} \text{ DE } 36) = 36 - 4 = 32$
- PREÇO DA CARTEIRA: $96 - (\frac{1}{8} \text{ DE } 96) = 96 - 12 = 84$

TOTAL DA COMPRA À VISTA: $32,00 + 84,00 = 116,00$

TEMOS QUE $120 - 116 = 4$ → TEMOS UM ERRO A MAIS, DE R\$ 4,00

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Comentário: Munido do conhecimento matemático, o estudante e/ou professor pode intensificar o movimento de exploração, proposição e resolução de problemas, implementando novas olhares para uma situação-problema que, até então, outros exploradores de problemas não tinham percebido, ampliando a discussão em nível matemático, e gerando novas oportunidades de aprendizagem.

Ao fim, abrimos espaço para que os professores compartilhassem suas impressões, ideais, aprendizagens e dificuldades, possibilitadas pelo curso de Formação de Professores que ensinam Matemática, acerca da metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e do uso de Narrativas Matemáticas. A seguir, vamos descrever alguns discursos dos professores sobre o curso, adotando a ordem de fala de cada professor:

P12: O que eu achei interessante foi que, nessa metodologia, a gente tira o foco do professor...deixa o aluno como protagonista no processo de ensino e aprendizagem. Cada aluno se comporta como um professor. Aí ele se sente bem mais à vontade para resolver problemas. Voltando o foco para o aluno, damos ênfase às suas potencialidades para propor e reformular problemas e serem resolvidos em sala de aula. A aplicação das narrativas nas aulas de Matemática se mostra como uma ferramenta de suma importância, pois enriquece a formulação de problemas. As Narrativas Matemáticas aproximam o aluno de diversas situações que nos rodeiam, aprimorando seu conhecimento acerca do mundo que vivemos.

P14: Em relação às narrativas e à Resolução de Problemas, mostrou-se um ensino de Matemática diferente do tradicional e um jeito diferente de trabalhar com problemas do cotidiano. Nessa metodologia, o papel do professor será de mediador. O conhecimento é construído a partir do aluno. Poderíamos, por exemplo, pedir aos alunos que escrevessem uma história...tipo, como passou as férias? Ele poderia trazer uma situação do dia a dia dele para trabalhar conteúdos matemáticos a partir disso. Ao propor um problema aos alunos, podemos conhecer os processos que levaram eles a resolverem o problema, com o conhecimento que possuem e, com esse conhecimento, eles podem elaborar outros problemas, podendo relacioná-los ao seu dia a dia, ficando, assim, uma visão dos conceitos matemáticos e do seu uso no dia a dia. Esse curso de formação continuada serviu para aprofundar os conceitos preexistentes, o compartilhamento durante o curso e o conhecimento de uma nova metodologia para trabalhar com os alunos.

P2: Na nossa profissão como professores de Matemática, um dos principais desafios é tentar levar para aqueles estudantes...dar sentido aquilo que eles estão estudando. Com as narrativas, a gente conseguiu trazer questões até sociais... problemas sociais. Citamos, aqui, preconceitos, como o racismo. Citamos, aqui, problemas que levam a outros problemas econômicos, como foi a questão das abelhas, que afetava a economia. E tudo isso pode despertar o interesse dos alunos. Isso ajuda a criar e propor problemas, com a responsabilidade de trazer números adequados da realidade.

P8: Me chamou atenção a questão das narrativas, pois traz situações reais e que a gente viveu no sítio, e a gente percebe que isso não existe mais, os adolescentes de hoje, dificilmente, se reúnem para jogar baralho e dominó, ou tirar abelhas. Na nossa vivência de sala de aula, a gente percebe que, muitas vezes, a gente se acomoda em sempre estar fazendo a mesma coisa, a mesma prova e a mesma atividade. O curso nos incentivou a propor problemas em sala de aula para os nossos alunos, como também eles podem propor seus próprios problemas, nem sempre levar para eles o problema pronto ou sempre o mesmo problema, além de trabalhar com eles problemas da sua vivência do dia a dia.

P9: Eu sempre gostei de trabalhar com questões voltadas para o dia a dia, sempre buscando o cotidiano do aluno, e contextualizando, usando o nome do aluno no problema, mas eu nunca tive o olhar de trazer uma narrativa para propor problemas. Foi uma ideia que você trouxe e que eu posso utilizar para ensinar algum conteúdo. Estou pensando em trabalhar na turma do 8º ano no quarto bimestre, para ver o desempenho dos alunos. As Narrativas Matemáticas trazem muitas contribuições para o âmbito social, uma vez que discutimos questões enfrentadas no cotidiano da sociedade, fazendo com que possamos refletir acerca dos nossos atos perante o mundo. Algo interessante foi que sempre buscou trazer dados reais e situações verdadeiras, para que não venha a fugir da realidade. Eu nunca tive a ideia de mandar os alunos, por exemplo, proporem um problema em dupla e resolverem no quadro. Eu acho que hoje eu faria isso. Percebi a importância da abordagem de resolução, exploração e proposição de problemas, pois, nas leituras e nos debates, pude perceber

como essa metodologia pode ajudar a tornar os alunos seres ativos no processo de ensino, permitindo que os alunos se envolvam ainda mais com as atividades, podendo os mesmos trazerem um pouco do seu cotidiano para propor problemas, fugindo um pouco da metodologia tradicional em que o professor traz o problema pronto para os alunos resolverem, tirando do aluno a possibilidade de propor seus próprios problemas. Com isso, eles se sentem mais motivados e protagonistas de sua aprendizagem, fazendo com que o conteúdo estudado seja mais agradável e motivador, levando a compreensões essenciais de conteúdos.

P7: As discussões foram importantes porque ajudaram a trabalhar com problemas que refletem a realidade dos alunos. Gostei da ideia do professor não levar o problema pronto para os alunos, mas eles que devem elaborar os problemas. A gente percebe que os alunos não sabem ler e interpretar os problemas para depois o problema.

P3: A gente se depara com alunos desmotivados, então, é importante trazer algo diferente, e não ficar só limitado ao livro didático, mas dar oportunidades de eles mesmos formularem problemas. O curso foi importante para perceber como explorar a realidade e o contexto social do aluno e como lidar com uma situação de injustiça social usando a matemática, além de perceber o papel de incentivador e mediador do professor entre o saber matemático e o aluno.

P6: O curso mostrou como trazer a realidade do aluno. Normalmente, eles perguntam: para quê estudar isso? Percebi que a metodologia de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas modifica a ordem tradicional utilizada em sala de aula: definição, exemplo e resolução de problemas. Essa metodologia explora mais o raciocínio e o pensamento crítico. As narrativas incentivaram a leitura, e ir além com as possibilidades de problemas que podem ser propostos. As narrativas foram trabalhadas de forma interdisciplinar, envolvendo Matemática, problemas sociais e ambientais. Discutimos, também, que um problema pode ser resolvido de diferentes formas.

P4: Dois pontos que chamaram a atenção: eu sempre achei a Resolução de Problemas um ponto chave para a sala de aula, mas eu nunca tive esse olhar para a Resolução de Problemas, pois sempre fui muito dependente do livro didático. Eu nunca tive a ideia ou a criatividade...por que eu não posso propor também? Porque a partir do momento que eu proponho, eu conheço meu aluno, então, vou propor um problema bem mais perto da realidade do aluno do que do próprio livro. A partir das narrativas, podemos criar uma conversa ou um bate-papo que pode ajudar a atrair a atenção dos alunos para a matemática, e essa abordagem... essa forma de propor os problemas torna algo muito comum para eles, pois aqui estamos conversando e debatendo, como uma conversa comum, isso traz uma possibilidade maior de atrair a atenção dos alunos. E, por fim, uma das coisas que me interessou foi a questão social, que depois deste curso me permitiu dedicar um olhar para este aspecto que eu não tinha antes, porque sempre fui muito na linha de só olhar para a Matemática, e nunca indo para parte social, sem ver a importância disso. Às vezes, o aluno pode nem gostar da Matemática, mas, se a gente propor uma questão social, o aluno entra naquela conversa, e começa ter interesse, e isso pode ser o ponto de entrada para trazer a atenção dele para a Matemática. Com o curso, consegui perceber a Matemática não somente como uma ferramenta que nos auxilia a solucionar problemas do dia a dia, mas, também, como um instrumento que nos possibilita a promoção da Justiça Social. A formação me ofereceu argumentos ainda mais consistentes para aquela tão famosa pergunta do aluno: onde irei utilizar isso na minha vida? Com as narrativas, exploramos situações matemáticas que, comumente, são trabalhadas de forma mecanizadas. As narrativas trabalharam a inserção da Matemática no dia a dia, em especial, as situações mais corriqueiras, as quais, todos, em especial os alunos, vivenciam diariamente. As narrativas permitiram trabalhar definições, fórmulas e aplicações de forma conectada com a realidade dos alunos, trabalhando a Matemática como uma ferramenta para compreender o mundo a nossa volta. Sem dúvidas, vou adicioná-las às minhas aulas de Matemática. Esse curso me fez evoluir muito profissionalmente e me abriu o desejo de cursar um mestrado.

P10: A metodologia aplicada neste curso me levou a repensar a prática de sala de aula, pois hoje percebo que a discussão de um problema pode ser melhorada, com a proposição e reformulação dos problemas. As Narrativas Matemáticas trabalhadas no curso possibilitaram a contextualização de problemas, ressignificando como modelos

para propor problemas. Os temas baseados em fatos reais proporcionaram um melhor envolvimento com os conteúdos, visto que, muitas das vezes, podem ser vivenciados pelos próprios atores do processo.

P13: O curso destacou a importância de o professor estar sempre pesquisando, a partir da leitura das narrativas, dos textos e na internet, buscando dados verídicos para propor problemas contextualizados corretamente, de modo a informar ao aluno sobre a sua realidade. O curso mexeu com nós, professores, pois debatemos sobre fatos políticos, sociais, ecológicos e econômicos do nosso país, como na região que a gente mora, por meio da Matemática. A ideia de discutir, por meio da Matemática, a preservação ambiental e a conscientização dos direitos humanos pode promover o interesse do aluno em solucionar problemas, bem como desenvolver ações humanas em prol da sua comunidade. O curso objetivou a promoção do conhecimento matemático...de ações que podem ajudar o aluno a ser protagonista em sala de aula.

P1: As atividades de resolução de problemas trabalhadas ajudaram com o desenvolvimento da nossa capacidade de pensar. A metodologia utilizada em sala de aula nos possibilitou desenvolver o pensamento crítico e reflexivo sobre temas sociais. As Narrativas Matemáticas nos possibilitam trabalhar a Matemática de forma inovadora. Com o curso, todos nós professores tivemos a oportunidade de vivenciar novas aprendizagens que contribuíram para a gente ensinar Matemática aos nossos alunos.

P5: Acredito que, através da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, podemos fazer com que os alunos explorem conceitos matemáticos de forma significativa, e trabalhar também com temas sociais, que discutam o contexto vivido por eles. Essa metodologia permite ensinar Matemática de forma nova, nos permitindo ficar mais confiantes para levar o conhecimento para o aluno. As Narrativas Matemáticas trabalharam questões importantes...com vasta possibilidades de serem exploradas, o que ocasionou discussões muito boas. A cada discussão, ficávamos surpresos com os resultados obtidos nas discussões.

Finalizamos o encontro sintetizando alguns dos discursos dos professores acerca do que foi vivenciado ao longo do curso, enfatizando que, de fato, numa aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, há uma inversão do modelo tradicional de uma aula que segue: definição-exemplos-exercícios de aplicação, uma vez que, nesta metodologia, a aula começa com um problema ou uma situação-geradora de problemas, atribuindo ao aluno a participação engajada, que, por sua vez, desenvolve o papel ativo durante todo o seu processo de aprendizagem. Nesse sentido, o professor tem o papel de orientador e mediador de toda a discussão, ao gerir diferentes discursos dos alunos, por meio da mediação-refutação, os possibilitando organizar e repensar sobre seu próprio processo de pensamento. Cabe ao professor, ainda, desafiar os alunos a investigarem múltiplos processos de resolução, o que pode levar a uma compreensão mais profunda sobre o problema.

Por fim, ressaltamos que, de fato, as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas tiveram o propósito não apenas de discutir ideias matemáticas, mas, também, de promover o debate sobre questões em nível sócio-político-cultural. Além do mais, algo muito forte durante todo o curso foi a relevância do contexto que perfazia os problemas e da necessidade de informações reais, para que o aluno pudesse relacionar uma situação real com conceitos matemáticos.

Nesse encontro, a discussão de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática evidenciou como ocorreu a operacionalização de encaminhamentos didáticos no desenvolvimento da proposta de Exploração de Problemas, contribuições e oportunidades de aprendizagem para a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, tais como:

- Embora tivesse sido solicitado que os professores desenvolvessem, inicialmente, um trabalho de proposição de problemas, emergiu, primeiro, a resolução de problemas, pois a atividade consistia em uma atividade de resolução de problemas, que despertou o interesse e engajou os professores em um trabalho efetivo de resolução de problemas, buscando elucidar, a partir da Matemática, a intervenção de Andrade em uma situação de injustiça social;
- Utilizou-se a calculadora do *smartphone* como uma ferramenta mediadora que amplia e acelera o processo de investigação, podendo fazer a testagem das possíveis explicações matemáticas que ratificam a posição tomada por Andrade no ato de sua compra;
- Esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas contribuiu para os professores desenvolverem a consciência de que os problemas matemáticos trabalhados em sala de aula podem evidenciar o valor social da Matemática na intervenção de situações que são contextualizadas a partir de uma situação real, seja do cotidiano do aluno, do professor, da escola ou da sociedade;
- A Narrativa Matemática “Qual o preço justo?” inspirou alguns professores, de modo que estes propuseram problemas, tomando como ponto de partida situações de (in)justiça social por eles vivenciadas que devem ser interpretadas por meio de Matemática;
- Seleciona-se um problema proposto por um professor, para trabalhar ideias matemáticas, em especial: Taxa Percentual, Descontos e Proporção, bem como transitar entre as diferentes Representações de um Número Racional;
- A metodologia de Exploração de Problemas contribuiu para os professores perceberem de que modo a Matemática pode ser utilizada como instrumento de combate a questões de injustiça social;
- Com a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, aprende-se que os alunos podem aprender Matemática explorando, problematizando, propondo e resolvendo problemas em perspectivas múltiplas.

7.14 Reflexões acerca de uma prática de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na formação do professor via Narrativas Matemáticas

Nesta descrição e análise dos dados, levantados no curso de Formação de Professores que ensinam Matemática, buscamos identificar elementos que nos ajudassem a refletir acerca dos seguintes temas: A Proposição de Problemas (PP) e a Resolução de Problemas (RP), operacionalizadas a partir da abordagem de Exploração de Problemas (EP); A construção e compreensão de conceitos matemáticos via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas; A dimensão sócio-político-cultural no ensino-aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas; O impacto da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na Formação Continuada do professor que ensina Matemática; e Atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas: implicações para a sala de aula de matemática. Desta feita, com a finalidade de aprofundar a análise, sintetizamos algumas reflexões que ampliam nossa compreensão acerca do que nos pode dizer uma sala de aula de matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

7.14.1 A Proposição de Problemas (PP) e a Resolução de Problemas (RP) operacionalizadas a partir da abordagem de Exploração de Problemas (EP)

É sabido que o ato de propor problemas matemáticos não é comum nem mesmo entre os professores que se amparam nos problemas dos livros didáticos e de materiais encontrados na *internet*. Assim sendo, no primeiro momento, mesmo estando lidando com professores que ensinam Matemática cuja maioria a graduação que possuem é a Licenciatura em Matemática, ou seja, com o pleno domínio acerca de conteúdos matemáticos, notamos que os mesmos precisavam de uma confirmação do professor-pesquisador no que concerne ao trabalho de proposição de problemas realizado durante a oferta do curso. Contudo, “à medida que os participantes adquirem experiência na Proposição de Problemas, eles tornam-se mais eficientes ao propor problemas e mais criativos ao reformulá-los” (Martins, 2024, p. 185). Para Abreu (2024),

Estamos tão acostumados a apenas resolver problemas que, quando nos deparamos com a necessidade de propor um problema, como um novo momento em meio à RP ou propor um problema como ponto de partida para a EPRP, é possível perceber uma dificuldade que expõe fragilidade no domínio matemático, contextual e pedagógico (Abreu, 2024, p. 32).

Contudo, com a vivência do curso, os professores foram refletindo sobre sua própria prática de sala de aula e, com isso, foram moldando algumas de suas concepções e crenças sobre o ensino-aprendizagem de Matemática. Dentre as quais, iniciamos destacando como numa sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas a participação engajada tanto do aluno quanto do professor é potencializada, pois como percebeu P8,

P8: O curso nos incentivou a **propor problemas em sala de aula para os nossos alunos**, como também **eles podem propor seus próprios problemas**. Nem sempre levar para eles o problema pronto ou sempre o mesmo problema, além de trabalhar com eles problemas da sua vivência do dia a dia.

Desse modo, os professores foram sistematizando, ao longo dos encontros algumas oportunidades de aprendizagem que o professor que ensina Matemática poderia gerar para os seus estudantes, ao envolve-los em uma experiência de proposição de problemas, seja propondo problemas para seus alunos ou incentivando-os a proporem seus próprios problemas.

Dentro dessa perspectiva, nos encontros realizados, alguns benefícios didáticos da proposição do problema advindo do professor (Jurado, 2013a) foram apontados como critérios para a realização do trabalho de proposição de problemas, como propor um problema para superar dificuldades conceituais que são encontradas pelos alunos no estudo de um determinado conteúdo matemático, conforme foi defendido por P7, P11 e P12; propor problemas próximos da realidade dos alunos, como afirmou P4, *“Porque, a partir do momento que eu proponho, eu conheço meu aluno, então, vou propor um problema bem mais perto da realidade do aluno do que o próprio livro”* e propor uma sequência de problemas, de modo a discutir uma ideia matemática com mais profundidade.

Aqui, acrescentamos que tal prática pode tirar o professor de uma “zona de conforto” em que se encontra, incentivando-o a pesquisar, transpondo o que os livros e materiais didáticos podem oferecer, em *prol* de uma aprendizagem que tenha significado para o aluno. Ademais, no decorrer do curso, surgiu o debate acerca do processo de avaliação de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, tendo a **proposição de problemas como ponto de partida**, bem como **durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas**. Na ocasião, discutimos que o professor terá mais elementos para avaliar, pois deverá considerar todo o trabalho realizado pelos alunos desde a escrita do problema, como também a resolução e a solução e, ainda, as reformulações dadas ao problema inicial, isto é, o professor terá a oportunidade de avaliar diferentes habilidades matemáticas manifestadas pelos alunos, tais como: explorar, problematizar, propor, resolver e reescrever/reformular problemas (por exemplo, Silva, L., 2013; Brandão, 2014; Silveira, 2016; Silva, 2016; Santos, E., 2019;

Silveira, Andrade, 2020, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2019, 2024).

Um direcionamento das pesquisas em Proposição de Problemas consiste em analisar como o ato de propor problemas pode sinalizar informações sobre o processo de pensamento dos alunos (Zhang, Cai, 2021; Cai, 2022). No nosso caso, como a Proposição de Problemas, pensada a partir da proposta de Exploração de Problemas, pôde nos revelar sobre os pensamentos dos professores e como eles orientam sua tomada de decisão acerca de aspectos conceituais, sociais e pedagógicos em uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, que tem como encaminhamento pedagógico explorar, propor e resolver problemas. De acordo com Abreu (2024),

A PP torna os professores mais ativos/preparados, revelando seu domínio de conteúdos matemáticos, seu conhecimento de mundo e suas habilidades pedagógicas. Proporciona uma autoavaliação desses aspectos e um refletir sobre o seu pensar/fazer a partir dos erros e dificuldades identificadas. Desenvolve a consciência de um ensino de matemática centrado na PP e não mais apenas na RP, fazendo os professores perceberem que essa também é uma tarefa sua (Abreu, 2024, p. 244).

Nesse contexto, com relação aos aspectos conceituais, chamamos a atenção para o trabalho de proposição de problemas em que os professores se autorregularam ao anteciparem o conteúdo matemático, bem como as (re)soluções dos problemas. Acerca disso, sublimamos principalmente o fazer de proposição de problemas realizado por P12 e P14 que, em sua maioria, controlavam a solução a intervi-la, e ratificando-a com a resolução do problema.

Nesse sentido, nosso interesse, *a priori*, foi identificar habilidades dos professores para propor problemas, e com isso, quando propomos problemas na perspectiva da Exploração de Problemas, entendemos que a resolução e solução dos problemas ficam em segundo plano, mas que em algum momento, o problema proposto exige do propositor uma (re)solução. Contudo, argumentamos sobre a importância da resolução e solução do problema, como uma forma de ratificar o quão foi bem sucedido o trabalho de proposição de problemas.

Ainda no desenrolar do curso, emergiram algumas sugestões, inclusive, levantadas pelos professores, sobre como pode ser organizada uma sala de aula de matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, tendo a proposição de problemas como ponto de partida, tal como, expõe P9 e P11, respectivamente, “*Podemos formar grupos e cada grupo formula dois problemas*”; “*Os grupos podem trocar os problemas entre si, e resolverem os problemas dos colegas. Acho que assim ficaria mais interessante*”.

Diante dessas constatações e munidos da compreensão de que uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é sempre inacabada, retomamos alguns problemas que foram propostos no encontro anterior para apresentar e sistematizar um conceito

matemático ou aprofundá-lo, buscando promover uma aprendizagem com significado. Esse movimento da ação didática decorreu de uma prática intencional, que visava analisar os problemas que foram propostos, e refletir, dentre eles, quais poderiam suscitar a discussão de ideias matemáticas previamente estabelecidas como prioridades na exploração das Narrativas Matemáticas.

Sobre isso, destacamos o estudo de Abreu *et al.* (2024), que evidenciaram um movimento não-linear durante todo o processo de exploração de problemas, tendo como ponto de partida a Proposição de Problemas. Ademais, os autores perceberam que o fim da discussão de uma atividade não demarca o fim da exploração do problema. Portanto, eles concluem advogando, “[...] que essa é uma característica ímpar da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas por enxergarmos que o problema não termina ao fim de um momento de exploração” (*Ibid.*, 2024, p. 241).

O movimento de idas e vindas, começos e recomeços, que promove o refinamento dos problemas com relação aos processos e conceitos matemáticos, como também relativo a questões de cunho sócio-político-cultural, foi intensificado com alguns encaminhamentos do professor-pesquisador, tal como a escolha de um problema para ser explorado, dando uma nova reescrita, bem como a troca dos problemas entre os pares de professores, na qual cada um deles ficou incumbido de reformular o problema do colega, em que nas duas situações, eles adotariam os critérios que considerassem convenientes para isso.

Vale ressaltar que orientamos os professores a resolverem os problemas antes mesmo de reformulá-los, pois a resolução e a solução do problema não só poderia fornecer *insights* para a proposição de novos problemas, mas, também, poderia ser um critério adotado para a reformulação do problema, caso os enunciados apresentassem informações dúbias que não permitissem chegar à solução do problema, por falta de articulação entre a linguagem materna e matemática e/ou, ainda, os dados insuficientes para resolver o problema. Em suma, não se caracterizasse um problema matemático, cabendo necessariamente uma reescrita do problema.

Estes movimentos didáticos frente a uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas fortalecem a ideia de que uma aula de Matemática, nesta concepção, é sempre inacabada e, com isso, é marcada por um descontentamento que busca sempre avançar e descobrir algo novo, com a intencionalidade de aprofundar o debate a partir de um caminhar não-linear que envolve o movimento **Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado**.

Ainda com relação ao problema que seria refinado por meio de um trabalho de reescrita, sendo este escolhido tanto pelo professor-pesquisador quanto pelos professores, notamos que o problema ganhou diferentes formatos, com o acréscimo de novos elementos. Então, alguns dos

novos problemas ganhavam uma melhor adequação do conteúdo matemático, sinalizavam certo nível de criatividade, ampliavam a discussão tanto em nível cognitivo, quanto sócio-político-cultural, aprofundavam em termos de processos e conceitos matemáticos, permitiam fazer relações entre conceitos matemáticos, possibilitavam transitar entre diferentes representações no estudo de Álgebra (verbal, numérica, algébrica e gráfica) e de Frações (percentual, decimal, fracionária), modificavam o conteúdo matemático etc (por exemplo, Silva, L., 2013; Brandão, 2014; Silveira, 2016; Silva, 2016; Granjeiro, 2020; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2019, 2024; Abreu, 2024).

Sobre isso, tomamos como exemplo a reescrita do problema: “*Qual seria a arrecadação mensal da empresa que fornece o abastecimento de água, sabendo que a cidade tem 5.050 residências, que $\frac{1}{5}$ das residências consomem 10 m^3 , $\frac{3}{5}$ consomem 12 m^3 e $\frac{1}{5}$ consomem 18 m^3 . Até $10\text{ m}^3 = 29,00$; < 10 até $15\text{ m}^3 = 2,50$ por m^3 excedido de 10 m^3 ; < 15 até $20\text{ m}^3 = 2,70$ por m^3 excedido de 15 m^3* ”, proposto por P7 no décimo episódio de sala de aula, e que foi selecionado pelo professor-pesquisador para ser aprofundado no décimo primeiro episódio de sala de aula.

Notou-se que este problema recebeu diferentes reescritas que sinalizavam como o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas expande o campo de discussão de uma atividade. Acerca das diferentes reescritas, destacamos as seguintes: no trabalho realizado por P2, acrescentou-se um dado transitando da forma fracionária para a percentual (62% consomem 12 m^3); P1 propôs uma nova variável, “*o abastecimento de água terá um aumento de 15% nos valores correspondentes ao consumo de água*”; já P6 apontou que há uma taxa de juros de 15% ao mês e que o consumo de água de uma residência está atrasada dois meses; na sua vez, P10 propôs uma sequência de problemas que buscam debater sobre a política de racionamento de água (dias pares e ímpares), de modo a identificar a quantidade de m^3 que seriam necessários para abastecer as 5.050 residências. Ainda contribuindo para a reescrita desse problema, P9 levanta um novo elemento em âmbito matemático ao contextualizar que dois amigos (João e Mateus) abrem uma empresa de abastecimento de água e dividirão o lucro proporcionalmente, isto é, “*João recebe $\frac{3}{5}$ e Mateus $\frac{2}{5}$ do faturamento mensal*”; bem como P5 que modificou os denominadores das frações com o intuito de que os alunos percebessem que a soma das frações com denominadores diferentes resulta no todo (100%). Por fim, a contribuição para essa reescrita dada por P14, sinaliza criatividade, pois o trabalho realizado apresenta frações com denominadores diferentes, de forma que será necessária uma sequência de procedimentos e conteúdos matemáticos para abarcar o problema.

A respeito do trabalho de reescrita dos problemas dos colegas, percebemos, inicialmente, que os professores buscavam melhorar a redação do problema tentando não desmerecer o trabalho realizado pelo colega, mas com o intuito de avançar, reescrevendo um novo problema, ao adotar alguns critérios que foram defendidos ao longo do compartilhamento do trabalho que foi realizado, tais como: reescrita respeitando a língua materna; a busca por uma melhor articulação entre a língua materna e a linguagem matemática; controlando o conteúdo ou conceito matemático que dará conta do novo problema; adequando a escrita de acordo com o contexto real que estava sendo descrito e apresentando uma sequência de problemas (ou melhorias) a partir do problema do colega.

Nessa perspectiva, percebe-se que o processo de aprofundamento do trabalho realizado é qualificado pelo caminhar de exploração de problemas que emerge a partir de novos elementos que vão sendo acrescentados ou modificados em um problema inicial e que se expande para novos problemas, novos conteúdos, novas reflexões e sínteses (Silveira, 2016; Silveira, Andrade, 2022; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2024; Abreu, 2024). Dessa forma, compreendemos que conscientemente o movimento didático de ir cada vez mais além vai sendo internalizado pelo indivíduo, como destacou P6 nos diferentes momentos de discussão das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas: “[...]ir além com *n* possibilidades de problemas que podem ser propostos”.

Diante do que foi exposto, destacamos que os diferentes momentos de implementação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas propiciou que a **proposição de problemas** ocorresse **antes, durante e depois** do **processo de resolução e exploração de problemas**. Isto posto, temos defendido ao longo deste trabalho que a proposição de problemas precisa ser o ponto de partida da atividade matemática (Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Silveira, Nascimento, 2023; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2024; Abreu, 2024) e, com isso, desde o primeiro momento, os professores foram desafiados a propor problemas a partir de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.

No entanto, a Proposição de Problemas, pensada sob a perspectiva da proposta de Exploração de Problema, não se limita apenas à proposição e (re)solução do problema. Por esse motivo, o caminhar de **proposição de problemas durante e depois do processo de resolução e exploração do problema** (por exemplo, Silva, L., 2013; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Santos, E., 2019; Granjeiro, 2020; Martins, Andrade, 2022; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2019, 2024; Abreu, 2024) emerge como movimento didático essencial para intensificar o

movimento de exploração-problematização-proposição de problemas, de forma que encaminhe a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novos conteúdos, a novas reflexões e novas sínteses. Nesse contexto, apontamos o trabalho de reescrita dos problemas, em ambos os encaminhamentos destacados acima, como alguns modos possíveis da proposição de problemas ser trabalhada depois do processo de resolução e exploração de problemas, tendo um problema como fonte geradora de novos problemas.

De posse dessa informação, um problema matemático pode ser resolvido com a proposição de novos problemas (**proposição de problemas durante o processo de resolução e exploração de problemas**) que possibilite um novo olhar sobre o problema inicial. Esse novo problema pode ser um problema mais simples, como também um problema mais complexo, que, ao fim, leve a uma aprendizagem com significado das ideias matemáticas que ambos os problemas oportunizam trabalhar.

Atentos a isso, durante o curso, destacamos os trabalhos, principalmente, de P2, P9, P10, P11, P12, P13 e P14 que, ao longo dos encontros, propuseram alguns problemas em que a proposição de problemas ocorreu durante o processo de exploração e resolução de problemas, o que permitiu implementar um processo/procedimento de resolução que deu conta do problema inicial (a exemplo do problema mais simples proposto por P11 no quarto episódio de sala de aula), como também ampliar o debate em âmbito de processos matemáticos (a exemplo do problema proposto por P2 no quarto episódio de sala de aula), ou, ainda, um problema alternativo que mantém a mesma estrutura conceitual para resolvê-lo (a exemplo da problematização levantada por P13 no primeiro episódio de sala de aula, envolvendo os apertos de mãos e da quantidade de jogos em campeonato de futebol com n times).

Ainda no decorrer dessa pesquisa, observamos que alguns elementos mediadores, como a calculadora convencional, a calculadora gráfica *Desmos*, o *smartphone* e a *internet* impulsionaram o movimento **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses**. Abreu *et al.* (2024) defendem que as Tecnologias Digitais (TD) têm potencializado o trabalho com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, pois, por meio delas, o aluno tem uma gama de possibilidades de contemplar momentos de exploração, proposição e resolução de problemas, de modo a ampliar as discussões de conceitos matemáticos em sala de aula. Sobre isso, Abreu (2024, p. 242) ressalta que “a EPRP passa a desenvolver um novo olhar sobre a Matemática, mais rico e humano e que sente a necessidade do uso de TD”.

Assim, enaltecemos que o uso de *smartphones* com pleno acesso à *internet* mostrou-se como uma excelente ferramenta que pode qualificar o trabalho de exploração, proposição e

resolução de problemas. A experiência com os professores revelou que eles buscavam e selecionavam informações através de *smartphones*, de forma a inspirá-los a propor problemas, reescrever/reformular problemas e, principalmente, a elaborar uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas.

O uso da *internet* pelos professores proporcionou, principalmente, que ao longo do curso eles percebessem como o uso de contextos reais podem motivar os alunos a aprenderem Matemática, pois podem ajuda-los a compreender aspectos de sua vida diária a partir de uma aula de Matemática, que, ancorada a um viés crítico, se propõe a ir além de conceitos e processos matemáticos. Nesse âmbito, o uso crítico dessas Tecnologias Digitais, além de ter potencializado o trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas, sinalizou também como o professor de Matemática pode tirar proveito dessas tecnologias para fins educativos.

Dentre os professores, ressaltamos o trabalho realizado por P14, que se destacou ao fazer o uso dessas ferramentas (*smartphones* e *internet*) para a realização de diferentes tarefas solicitadas pelo professor-pesquisador. Tal uso culminou com reflexões críticas acerca da **importância do contexto no processo de proposição e resolução de problemas** (por exemplo, Liljedahl, Cai, 2021). Esse cuidado com o contexto real exposto por P14 pode ser visto nos seguintes exemplos: o valor médio do quilograma de amêndoa; a produção anual de café arábica que pode ser afetada pelo desaparecimento das abelhas, bem como o valor da saca desse tipo de café; o valor médio da cesta básica na cidade de João Pessoa-PB, dentre outros.

Já a calculadora gráfica *Desmos* foi utilizada em alguns encontros, ora com o objetivo de confirmar a solução de um problema, transitando da representação algébrica para a gráfica, ora utilizando como ferramenta de investigação que visou ir além da ratificação da solução do problema, ao intensificar o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas, levando a novos problemas, a novos conteúdos, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses, o que ampliou a discussão de ideias matemáticas.

Com o uso da calculadora gráfica *Desmos*, Abreu *et al.* (2024) notaram que, durante a exploração do problema selecionado, o uso da representação gráfica permitiu identificar equívocos com relação à representação algébrica, levando à compreensão de conceitos matemáticos. Ademais, a visualização dos objetos matemáticos desencadeou e impulsionou outros momentos e movimentos dentro da exploração do problema, tal como o surgimento de novos problemas. Com relação a algumas potencialidades da calculadora gráfica *Desmos* (CGD) na aprendizagem de Matemática, Abreu (2024) explica que,

A ferramenta facilita a movimentação do gráfico da função, amplia o campo numérico dos inteiros para os reais, possibilita o reconhecimento de padrões, a formulação de conjecturas e o desenvolvimento de conceitos matemáticos, aspectos que poderiam ser limitados em atividades com lápis e papel (Abreu, 2024, p. 4).

Assim, sobre os trabalhos realizados com o *Desmos*, destacamos a intervenção de P9, no décimo primeiro episódio de sala de aula, que propôs o seguinte problema: “*Como encontrar todas as funções a partir do gráfico?*”, depois do processo de resolução e exploração de problemas, tomando como ponto de partida uma função de várias sentenças. Notamos que devido aos aspectos dinâmicos e interativos desta ferramenta, localizou-se $f(19) = 52,3$, e, ao ser conhecido que $f(20) = 55$, adotou-se um Sistema de Equações do 1º grau que possibilitou encontrar a Função Afim correspondente a uma das faixas de consumo de água do município de Alagoinha-PB. Com isso, a experiência com os professores sinalizou que a calculadora gráfica *Desmos* pode ser uma excelente ferramenta que aflora o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas, potencializando a proposição de problemas antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas, que o impulsiona a compreensão de conceitos matemáticos com significados (por exemplo, Abreu *et al.*, 2024; Abreu, 2024).

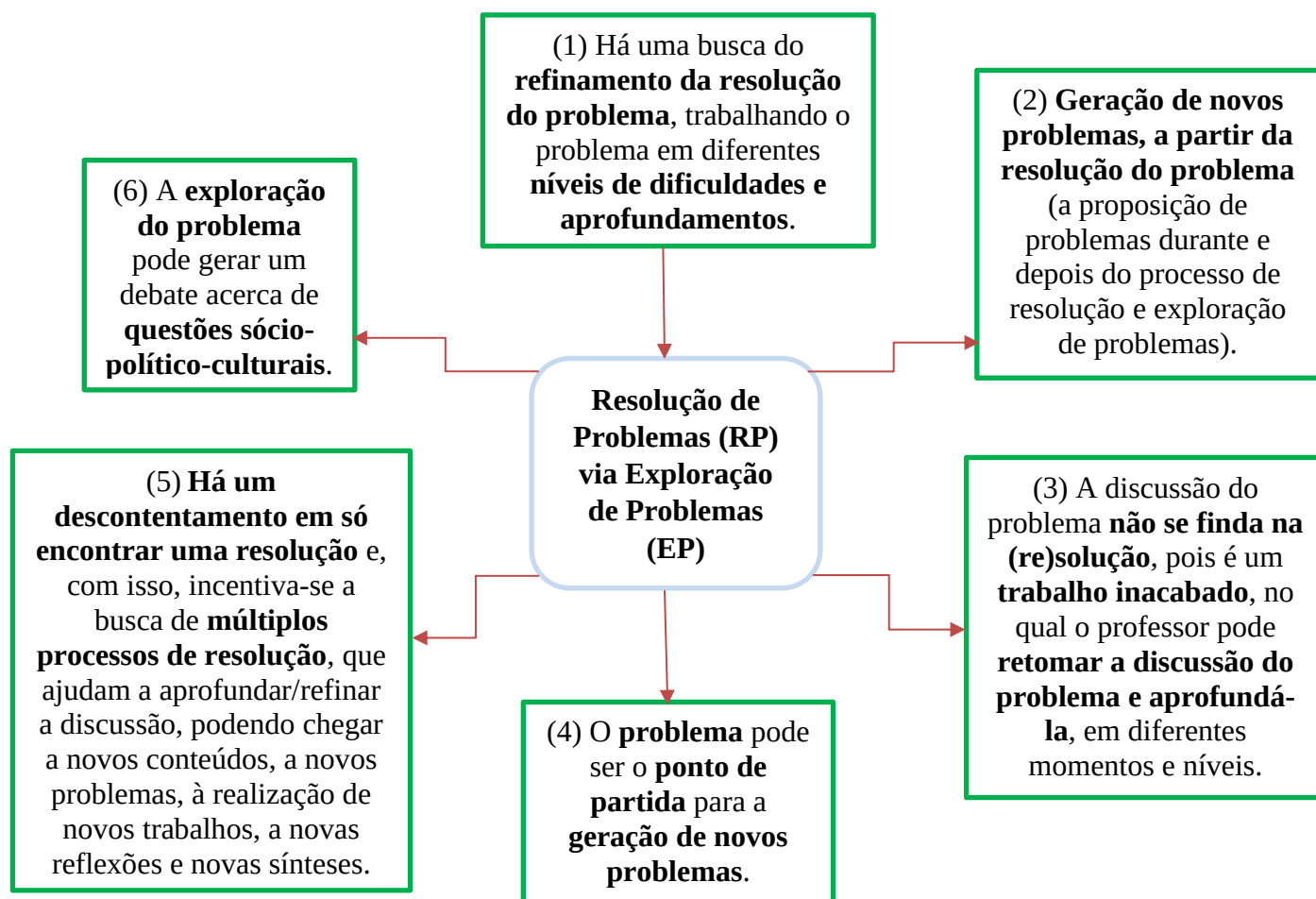
Sobre isso, na sua pesquisa de doutorado, Abreu (2024) notou que a CGD pode aprofundar significativamente as atividades de exploração-proposição-resolução de problemas devido às suas funcionalidades, como a interatividade, bem como estimula e fortalece a capacidade de transitar entre diferentes representações matemáticas (algébricas, numéricas, verbais e gráficas).

Em suma, destacamos que o curso, além de sinalizar como os professores podem propor problemas para os seus alunos, buscou capacitar os professores para gerir uma sala de aula em que os alunos proponham seus próprios problemas, munidos da concepção de ir sempre além da proposição e resolução do problema, capturando movimentos e facetas de um caminhar de exploração de problemas que não se contenta apenas em propor e resolver problemas, tornando-se consciente do que se espera da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas, ou seja, selecionando os problemas que são adequados para apresentar e sistematizar ideias matemáticas que foram previamente antecipadas com a atividade em foco.

7.14.1.1 Resolução de Problemas (RP) via Exploração de Problemas (EP)

A partir da análise das pesquisas do GEPEP e das reflexões geradas no âmbito do curso de Formação de Professores que ensinam Matemática, elaboramos um modelo que ajuda a elucidar **movimentos didáticos** que devem ser adotados em uma prática de **Resolução de Problemas (RP) via Exploração de Problemas (EP)**. Veja o modelo a seguir:

Figura 184 – Modelo de uma prática de Resolução de Problemas (RP) via Exploração de Problemas (EP)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Para ilustrar alguns destes **movimentos didáticos**, desenvolvidos com a aplicação prática da **Resolução de Problemas (RP) via Exploração de Problemas (EP)**, tomamos como exemplo um problema que foi proposto a partir da Narrativa Matemática “**Jogo de Sueca**”, na qual P11 problematizou o trecho da narrativa: “**Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si**”, chegando ao seguinte problema: “**Qual foi a quantidade de cumprimentos que eles fizeram entre si para começar o jogo?**”

O professor-pesquisador questiona: “*Que conceitos matemáticos podem ser utilizados para resolver este problema?*” Desse questionamento, resolve-se o problema a partir do Princípio Fundamental da Contagem $6 \cdot 5 = 30$. Daí, surge um novo questionamento: é um problema de Arranjo Simples ou Combinação Simples? Posteriormente, analisa-se se a ordem da contagem dos cumprimentos é importante.

Dessa reflexão, surgem múltiplos processos/procedimentos de resolução que ajudam a perceber a relevância da ordem ou não, como, por exemplo: a observação de padrões a partir de problemas mais simples propostos pelo professor-pesquisador (Quantos apertos de mãos

recebeu a primeira pessoa? E a segunda?...), o que culminou na sequência numérica: $5 + 4 + 3 + 2 + 1$, totalizando 15 apertos; utiliza-se a árvore de possibilidades para resolver o problema; a partir desta solução, relaciona-se com a primeira solução: $6 \cdot 5 = 30$ e, com isso, os professores descobrem que, ao utilizar essa estrutura multiplicativa, conta-se os apertos de mãos duas vezes, sendo necessário dividir por dois para eliminar a quantidade de apertos de mãos repetidos; relaciona-se esse problema com outro problema, de modo a perceber que conceito matemático ajuda a resolver ambos os problemas; e aponta-se como caminho alternativo para a resolução do problema a utilização do conceito da Soma dos termos de uma Progressão Aritmética.

A partir de todo o trabalho realizado pelos professores, o professor-pesquisador busca dar significado às descobertas deles, chegando à construção da fórmula de Combinação Simples. Desse caminhar, nota-se que **houve um refinamento e aprofundamento da resolução do problema (1)**, trabalhando o problema, abrangendo diferentes níveis de dificuldades, utilizando a ideia de Sequência Numérica e árvore de possibilidades, de forma a poder, assim, trabalhar este problema no Ensino Fundamental, bem como aprofundando as discussões de conceitos mais complexos do Ensino Médio, como Combinação Simples e a Soma dos termos de uma Progressão Aritmética. Ademais, foram propostos problemas mais simples, bem como relacionou-se o problema inicial e a geração de um outro problema – **(2) gera-se novos problemas, a partir da resolução do problema.**

Com esta Narrativa Matemática, pretendia-se trabalhar a resolução de Equação do 2º grau, a partir do problema dos apertos de mãos, então, **retoma-se o problema**, entendendo que é um **trabalho inacabado e que não se finda na resolução**, pois é necessário dar um novo aprofundamento ao problema **(3)**.

Para isso, P2 reescreve o problema proposto por P11, chegando à seguinte reformulação: **“Seis jogadores se reuniram para uma partida de baralho, tendo em vista que, antes de iniciar as jogadas, todos eles se cumprimentam entre si, um a um, quantos apertos de mão foram realizados nesses cumprimentos?”**, adotando como critério de reformulação melhorar a redação do problema, de modo a deixar mais claro o que se pede no problema. Nesse contexto, a partir do trabalho realizado por P2, desafiamos os professores a **proporem problemas tomando como ponto de partida o problema** dos apertos de mãos **(4)**. Desse modo, foram gerados os seguintes problemas ou condições para iniciar o processo de problematização – **“P9: Aumentar a quantidade de pessoas se cumprimentado. Colocar algumas restrições em que o participante 1 não cumprimenta o participante 2”**; **“P2: É, fulano não se entende com ciclano, com isso, não se cumprimentam. Poderia ser um abraço entre três integrantes”**; **“P4: Descobrir a quantidade de pessoas que se cumprimentaram”**; **“P2: Quantas pessoas**

se encontraram? Então, por exemplo, um total de pessoas se encontram e dão 15 apertos de mãos. Qual o total de pessoas?”

Do último trabalho realizado, percebe-se que a inversão de um dos elementos do espaço do problema gerou um novo problema. No problema proposto por P11, requer-se descobrir a quantidade de apertos de mãos (elemento desconhecido) dada a quantidade de pessoas que se cumprimentam, já no último problema proposto por P2, é dada a quantidade de apertos de mãos e se requer a quantidade de pessoas que se cumprimentaram (elemento desconhecido). Esse novo aprofundamento dado ao problema a partir da **geração de um novo problema** possibilita discutir um novo conteúdo: Equação do 2º grau.

De **todo o trabalho realizado**, houve um **descontentamento de encerrar a discussão na resolução do problema**, na qual nota-se que, a partir da busca de **múltiplos de processos de resolução** e geração de novos problemas, **chegou-se a novos conceitos e conteúdos, a novas reflexões e novas sínteses (5)**.

A discussão deste problema não focou na dimensão sócio-político-cultural. No entanto, ao longo do curso “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social**”, tivemos diversos problemas que foram propostos pelos professores, nos quais **a exploração do problema gerou o debate de questões sócio-político-culturais (6)**. Dos episódios de sala de aula, podemos destacar: os problemas que envolvem o impacto do desaparecimento das abelhas, uma vez que a solução destes problemas evidencia o aumento percentual dos alimentos que são polinizados, principalmente, pelas abelhas, bem como outros alimentos que, em sua produção, o mel é utilizado como matéria-prima, além do mais, vale destacar que o mel serve como matéria-prima para as indústrias farmacêuticas, diante disso, busca-se entender as causas deste desaparecimento e medidas de combate a este desaparecimento; os problemas que foram propostos com foco na compra das barras de chocolates e ovos de páscoa, uma vez que a solução evidencia uma discrepância dos preços de ambos, quando relacionados à quantidade de chocolate da barra e do ovo, surgindo, assim, o debate de mecanismos de sedução implementados pelo consumismo e pelo capitalismo, que buscam incentivar as pessoas a comprarem cada vez mais; os problemas que foram propostos a partir da compra realizada por Andrade, na Narrativa Matemática “**Qual o preço justo?**”, já que a análise crítica da solução dos problemas evidencia uma situação de injustiça social vivenciada por Andrade no ato de uma compra, na qual ele interveio a partir do conhecimento matemático, dentre outros.

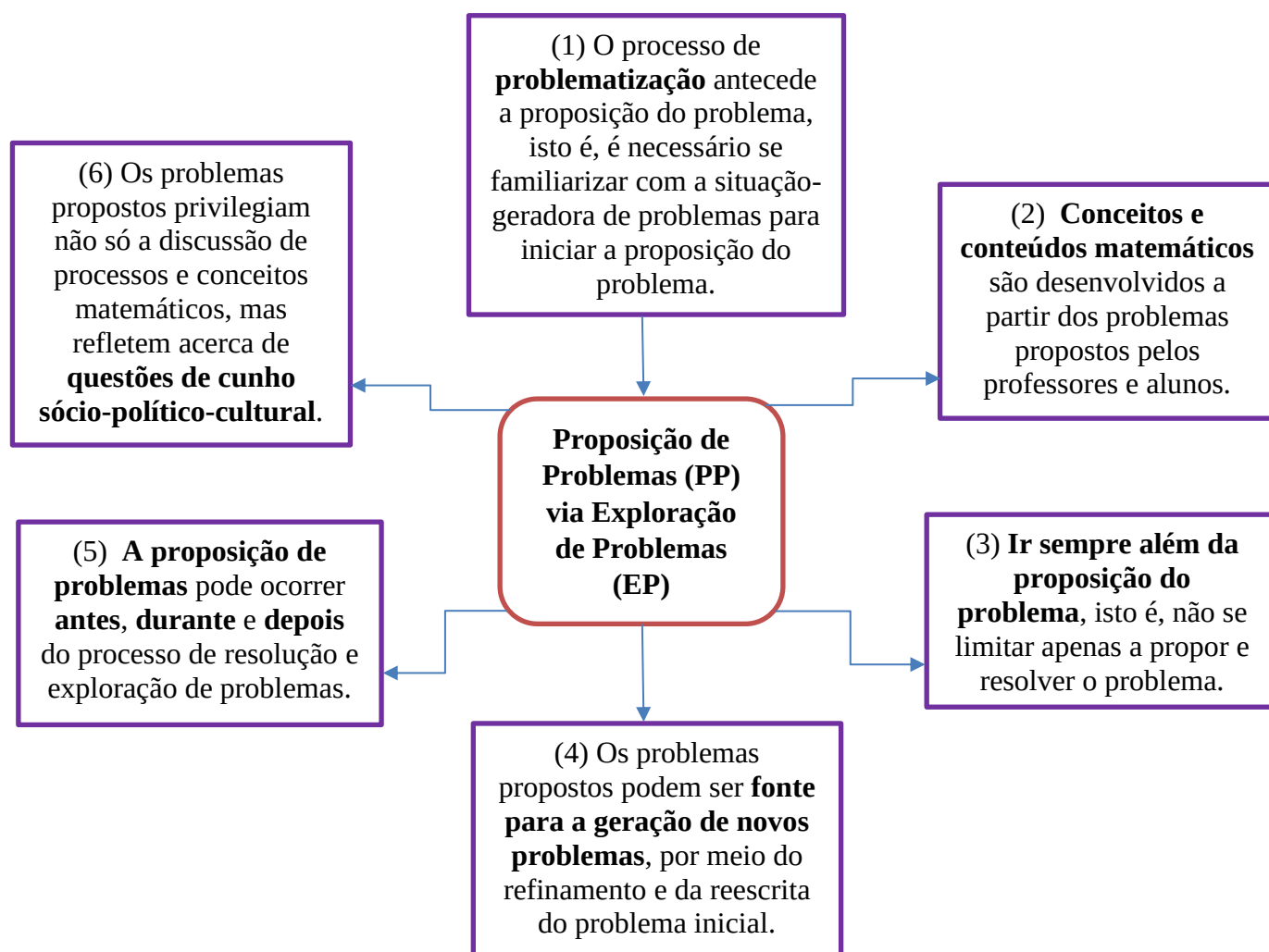
Portanto, a **Resolução de Problemas** via **Exploração de Problemas** é concebida como uma ferramenta que ocorre entre e no processo de exploração e proposição de problemas, que aprofunda a discussão por meio do trabalho efetivo em torno do problema, o qual ora é

trabalhado em diferentes níveis de dificuldades, ora a (re)solução pode ser fonte para a geração de novos problemas, como também a exploração do problema pode gerar um debate que contempla questões de cunho sócio-político-cultural.

7.14.1.2 Proposição de Problemas (PP) via Exploração de Problemas (EP)

Ainda apoiados na análise das pesquisas do GEPEP e nas reflexões críticas geradas no curso de Formação de Professores que ensinam Matemática, sintetizamos um modelo que ajuda a compreender **movimentos didáticos** que podem ser adotados em uma prática **de Proposição de Problemas (PP) via Exploração de Problemas (EP)**. Veja a seguir:

Figura 185 - Modelo de uma prática de Proposição de Problemas (PP) via Exploração de Problemas (EP)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Para se debruçar em uma análise teórico-prático-reflexiva e didático-pedagógica acerca de cada **movimento didático** do modelo acima, tomamos como exemplo o problema: “Supondo que 1kg de amêndoas custa R\$ 60,00, qual o seu valor após um aumento de

43%?”, proposto por P5 no quarto episódio de sala de aula, a partir da Narrativa Matemática Um “**exame de problemas**”.

Inicialmente, para propor o problema, é desencadeado o **processo de problematização**, uma vez que P5 se familiariza com as informações: “[...] a redução das abelhas aumentou em 43% o preço das amêndoas no mundo [...]” e, posteriormente, realiza uma pesquisa, apontando que, em média, o valor do quilograma no Brasil custa R\$ 60,00. Desse modo, o **processo de problematização antecedeu todo o caminhar de proposição de problemas (1)**, pois P5, além de não ter se limitado aos dados que tinha disponíveis, trouxe um novo dado, que, inclusive, possibilita ampliar o caminhar de exploração de problemas.

O discurso que o professor gera em uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas consiste em incentivar o aluno **a ir sempre além da proposição e resolução do problema (3)**. Para isso, são solicitados novos encaminhamentos que podem ampliar a compreensão do problema proposto inicialmente, chegando, assim, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

Nesse caminhar, o problema proposto inicialmente pode ser o **ponto de partida para a geração de novos problemas (4)**. Desse modo, os professores selecionam o problema que foi proposto por P5 para o explorar, de modo a **refiná-lo por meio da reescrita do problema**. A escolha do problema a ser explorado em sala de aula pode ficar a critério do professor, visando atingir objetivos instrucionais ou o aluno pode escolher o problema a partir do seu interesse em realizar algum trabalho efetivo em torno deste problema. Sobre o problema proposto por P5, os professores justificaram que selecionaram este problema pelo fato de abordar a ideia de Taxa Percentual e promover a discussão social acerca do papel das abelhas na produção de diversos alimentos naturais.

Vale destacar que os professores reescreveram este problema adotando os seguintes critérios: modificar o conteúdo matemático; acréscimos de novos dados, mantendo a redação do problema; controle da solução do problema; antecipar o conteúdo ou conceito matemático que ajuda a resolver o novo problema; reescrever o problema, de modo a aprofundar o debate sobre questões sócio-político-culturais; adequar a escrita de acordo com o contexto real que estava sendo descrito; e reescrever o problema, visando superar dificuldades com relação aos processos e conceitos matemáticos.

Do modelo que esboça **movimentos didáticos** da **Proposição de Problemas (PP)** via **Exploração de Problemas (EP)**, discutimos os **movimentos didáticos (3) e (4)** antes do **movimento didático (2)**, porque compreendemos que o processo de exploração, proposição e resolução de problemas ora leva a novos problemas, ora leva à (re)solução, ora leva a questões

de cunho sócio-político-cultural. Por sua vez, o professor, munido de uma intencionalidade, pode selecionar um dos **problemas que foi formulado ou reescrito para desenvolver conteúdos e conceitos matemáticos (2)**. Na ocasião, selecionamos o problema: “*A quantidade de abelhas representada no mundo está diretamente ligada à produção de vários alimentos vendidos no mercado. Com o desaparecimento das abelhas, considere que o preço do quilograma da amêndoa sofreu um aumento de 43%, e passou a custar R\$ 100,10. Qual o valor que era vendido o quilograma da amêndoa antes do aumento?*”, que é uma reescrita do problema proposto por P5, para chegar na construção da fórmula que calcula o valor final de uma mercadoria que sofre um acréscimo ou desconto de uma taxa percentual: $V_f = v_i (1 \pm i)$.

Um movimento importante que permite idas e vindas em um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas é resultante de uma prática que contempla a proposição de problemas **antes, durante e depois** do processo de resolução e exploração de problemas (5). Podemos perceber como se deu esse caminhar no desenvolvimento da Narrativa Matemática **Um “exame de problemas”**, tomando como exemplo um problema proposto por alguns professores (P2, P5, P7 e P11), que requeria calcular a velocidade média em km/h e/ou m/s atingida por uma pessoa que realiza um percurso de 1,5 km em 5min (proposição de problemas **antes** do processo de resolução e exploração de problemas).

Após o compartilhamento dos trabalhos de proposição de problemas realizados P2, P11, P5 e P7, respectivamente, P11 interveio, com a proposição de um novo problema: “*Se o percurso fosse de 300 m, qual seria a velocidade média de Lola?*” (proposição de problemas **durante** o processo de resolução e exploração de problemas).

Ademais, o professor-pesquisador incentiva a proposição de novos problemas **depois** do processo de resolução e exploração de problemas, emergindo, desse encaminhamento, o seguinte problema proposto por P2: “*A gente viu que a velocidade dele num percurso de 1,5 km foi de 5m/s, sendo este o primeiro trecho. Considerando o problema de P10, com a trajetória total de 2,1 km, significa que restam ainda 0,6 km. Se ele dobrar a velocidade, em quanto tempo realizará o restante do percurso?*”, bem como uma sugestão de problematização defendida por P4: “*Acho que, para que o aluno perceba que é um problema real, a velocidade deveria se reduzir à metade, já que ele realizou um trecho da corrida, vem a parte física, ele vai estar cansado*”, tomando como ponto de partida o trabalho de proposição de problemas realizado por P10.

Desse caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas que elucidamos para evidenciar como podem ocorrer cinco **movimento didáticos** de uma prática de **Proposição de Problemas via Exploração de Problemas**, observa-se que foram trabalhados

conceitos matemáticos (Taxa Percentual e o conceito de Razão entre duas grandezas a partir da ideia de Velocidade Média) a partir dos problemas propostos pelos professores.

Contudo, a proposta de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, também denominada de **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas**, tem como prerrogativa **ir além de processos e conceitos matemáticos**, por meio de uma análise crítica-reflexiva de **problemas que podem ser propostos pelos alunos e professores** para **debater questões** que envolvem **aspectos sociais, políticos e culturais (6)**. Nesse contexto, observa-se que a Narrativa Matemática **Um “enxame de problemas”** despertou o interesse dos professores para proposição de problemas e no debate das seguintes questões: *O que pode acontecer, de modo geral, com a extinção das abelhas? O que está ocasionando a redução das abelhas? O que podemos fazer para combater a redução das abelhas?*

A discussão destas questões possibilitou a geração de novas questões/problemas tanto em nível sócio-político-cultural, quanto em âmbito de processos e conceitos matemáticos. Nesse contexto, podemos partir da reflexão de problemas que focam no debate de questões sociais, políticas e culturais, para, posteriormente, discutir e sistematizar ideias matemáticas ou realizar o processo contrário. Assim, a escolha do foco que será dado à atividade de exploração, proposição de problemas (abordar primeiro conceitos matemáticos ou questões sociais) vai depender do desenrolar da atividade em termos de interesse apresentado e do trabalho desenvolvido pelos alunos ou, ainda, do objetivo instrucional da aula.

Portanto, compreendemos a **Proposição de Problemas via Exploração de Problemas** como uma mola propulsora que expande o processo de resolução e exploração de problemas ao ser promovida por meio de sucessivos trabalhos contínuos e inacabados, como problematizações, refinamentos, reescrita dos problemas e (re)soluções que são desencadeados pelo movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado**.

7.14.2 A construção e compreensão de conceitos matemáticos via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

Ao compreendermos a proposta de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas** como uma **abordagem metodológica de Resolução de Problemas**, estamos assumindo que conceitos e processos matemáticos serão apresentados e sistematizados a partir de um **problema, situação-problema ou situação-geradora de problemas**. No caso de uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o problema pode ser proposto tanto pelo professor quanto pelo aluno, sendo impulsionado através do **processo de**

exploração-problematização-proposição de problemas. Nessa direção, a experiência vivenciada com os professores enfocou na **Proposição de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas como ponto de partida de uma aula de Matemática.**

Para Silvanio de Andrade (cf. I Ciclo [...], 2020), uma perspectiva de Exploração de Problemas não se limita nem à perspectiva da Resolução de Problemas, nem à concepção da Proposição de Problemas, pois, muitas vezes, na proposição e na resolução de problema, há um interesse na busca do processo para resolver o problema. Contudo, na Exploração de Problemas, **a situação-problema é o ponto de partida** que pode levar a diferentes níveis de complexidade, que o impulsiona a uma melhor compreensão de processos e conceitos matemáticos.

Percebe-se que a compreensão do que seja uma **situação-problema** pode diferir de acordo com a abordagem metodológica de Resolução de Problemas. Com relação à proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, assumimos a ideia de situação-problema apresentada por Martins (2024).

A **situação-problema** não é, necessariamente, uma pergunta ou um questionamento a ser respondido, mas um contexto que desperta a curiosidade e o interesse do aluno, o que o estimula a explorar e, a partir daí, propor o seu problema. As situações-problemas são atividades que em seu processo de problematização desencadeiam um problema ou um conjunto de problemas. Dessa forma, consideramos que o problema emerge da situação-problema, sendo ela um ponto de partida que potencializa a Proposição de Problemas, via Exploração de Problemas (Martins, 2024, p. 18, grifo nosso).

Assim, esse movimento didático de ir sempre mais além pode ampliar e refinar o nível do debate acerca de conceitos matemáticos e questões de cunho sócio-político-cultural devido aos trabalhos-reflexões-sínteses que surgem do processo de explorar, problematizar, propor, reescrever/reformular e resolver problemas matemáticos ou de outros domínios, a partir de uma **situação-problema** ou uma **situação-geradora de problemas.**

Com isso, o primeiro encaminhamento direcionado pelo professor-pesquisador aos professores participantes da pesquisa consistiu em explorar, propor e resolver problemas a partir das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas. Diante da quantidade relevante de problemas que o professor-pesquisador precisava lidar, ele decidiu organizar os problemas em categorias tomando como referência cada fato/acontecimento que compõe as Narrativas Matemáticas.

Posteriormente, munido de uma intencionalidade, o professor-pesquisador selecionou alguns problemas propostos pelos professores para discutir uma ideia matemática com profundidade. Essa escolha decorria da antecipação de alguns problemas que, possivelmente, poderiam ser gerados durante o processo de exploração-problematização-proposição de problemas e que abordavam ideias-chave de um conteúdo matemático. Nesse caminhar,

buscamos evidenciar aos professores que, embora eles tenham uma quantidade relevante de problemas para lidar, há um movimento consciente de uma prática pedagógica via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas que tenciona com um certo grau de intencionalidade, pois, possivelmente, o professor não vai e nem precisa dar conta de todos os problemas que serão propostos, já que, dentre outros fatores, **não se possibilita o debate de conceitos matemáticos que foram planejados para uma determinada aula** (Cai, 2022).

De fato, o professor-pesquisador foi à lousa a partir dos problemas propostos e resoluções apresentadas pelos professores, para apresentar e sistematizar alguns conceitos matemáticos, como: Combinação Simples, Permutação Circular, Princípio Fundamental da Contagem, Taxas Percentuais, Aumentos e Descontos Sucessivos, Representações Múltiplas de Álgebra, ideias essenciais de Função, Representações Múltiplas de um número Racional, significados de Fração, dentre outros. Ademais, as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas possibilitaram o levantamento de conjecturas e a generalização de modelos matemáticos, tomando como ponto de partida contextos reais, como destacou P4,

P4: As narrativas trabalharam a inserção da Matemática no dia a dia, em especial às situações mais corriqueiras, as quais, todos, em especial os alunos vivenciam diariamente. As narrativas permitiram trabalhar definições, fórmulas e aplicações de forma conectadas com a realidade dos alunos, trabalhando a Matemática como uma ferramenta para compreender o mundo a nossa volta.

O nosso interesse com a operacionalização da principal orientação pedagógica de uma abordagem metodológica de Resolução de Problemas, isto é, que assume o problema ou a situação-problema como ponto de partida da aprendizagem de conceitos matemáticos (Onuchic, 1999; Andrade, 1998, 2017; Cai, 2010; Lester, Cai, 2016) e, conseqüentemente, inverte o modelo de uma aula tradicional de Matemática (definição-exemplos-exercícios de aplicação) foi evidenciar como este encaminhamento pedagógico contribui para as atribuições de significados às ideias matemáticas em foco.

Concomitantemente, o curso oportunizou aos professores perceberem que o movimento didático que consistiu em ir além da resolução e solução dos problemas com o desenvolvimento de um trabalho de exploração e proposição de problemas pode ampliar e aprofundar a compreensão de conceitos e processos matemáticos (por exemplo, Silva, L., 2013; Nascimento, 2014; Silva, 2015; Silveira, 2016; Silva, 2016; Santos, E., 2019; Granjeiro, 2020; Silveira, Andrade, 2022; Martins, Andrade, 2022; Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Abreu *et al.*, 2024; Martins, 2019, 2024; Abreu, 2024), como destacou P14: *“Esse curso de formação continuada serviu para aprofundar os conceitos preexistentes [...]”*. Sobre isso, chamamos atenção para a mobilização de Representações Múltiplas de Álgebra, a

sistematização de ideias essenciais de Análise Combinatória, a discussão de ideias essenciais de Função, o levantamento de Representações Múltiplas de um número Racional, dentre outras ideias matemáticas.

Após tal constatação, nos trabalhos de exploração-problematização-proposição de problemas desenvolvidos pelos professores, sinalizou-se a necessidade de antecipar ideias matemáticas que davam conta dos problemas antes mesmo da escrita e da solução destes, exigindo deles o controle de conceitos matemáticos, gerando a conscientização de que esse caminhar ampliava sua compreensão conceitual acerca de uma ideia matemática. Por conseguinte, a experiência vivenciada pelos professores promoveu o desenvolvimento de competências matemáticas ao problematizar fazendo relações de conceitos e conteúdos matemáticos com os fatos/acontecimentos que compõem as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.

No tocante ao processo de exploração de problemas, trabalhamos com os professores a busca de múltiplos processos/procedimentos de resolução que ampliassem a visão de ideias-chave inerentes ao problema em foco, viabilizando uma aprendizagem com compreensão. Além do mais, entendemos que tal processo qualificou o caminhar de exploração de problemas que nos possibilitou trabalhar um problema matemático abrangendo diferentes níveis de dificuldades, com isso, defendíamos que um mesmo problema poderia ser discutido em diferentes turmas e que cabia aos professores, a partir de uma aula intencionalizada, gerir a mobilização da ideia matemática que havia planejado para uma determinada aula.

Por fim, destacamos, ainda, que a organização de problemas em categorias contribuiu para fazer uma sequência de problemas que poderia promover a discussão de uma ideia matemática com mais profundidade, levando a uma aprendizagem com mais compreensão ao entender que um conceito matemático é construído a partir de um conjunto de problemas que convergem com relação ao ambiente matemático.

7.14.3 A dimensão sócio-político-cultural no ensino-aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

Dentre os muitos pontos importantes analisados, vale ressaltar que temos defendido ao longo deste trabalho que a proposta metodológica de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas** (ou **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas**) não se contenta em abordar apenas aspectos internos à própria Matemática, pois é pensada numa

perspectiva de Educação Matemática Crítica, como observou P6: “*Essa metodologia explora mais o raciocínio e o pensamento crítico*”. Sobre isso, Martins (2024) explana que,

[...] o trabalho de Exploração de Problemas se concentra na abrangência do problema, seja a nível de aprofundamento matemático, permitindo o desenvolvimento de outros conceitos, como questões sócio-políticas-culturais, despertando um olhar matemático crítico-reflexivo (Martins, 2024, p. 80).

Silvanio de Andrade (cf. I Ciclo [...], 2020) ressalta que o diferencial do seu trabalho em nível de mestrado foi discutir a Resolução de Problemas numa perspectiva sócio-político-cultural, de modo a pensar a Educação Matemática para uma cidadania crítica, por meio de um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

Nessa direção, Andrade (no prelo) expressa alguns movimentos de uma prática pedagógica via **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC)**, ao dizer que dada uma situação-problema, ao explorá-la, pode vir a serem geradas diversas questões/problemas e caminhos de exploração que possibilitam incentivar os alunos a discutirem, de forma mais aprofundada, termos matemáticos, bem como entrar em questões sociais relevantes, de modo a permitir a abordagem de contextos baseados na matemática e além dela. Ademais, a socialização dos problemas propostos e explorados pode possibilitar aos alunos uma discussão em sala de aula que adentra ao contexto do outro, os levando a aprenderem aspectos que, com suas experiências, por si só, não seriam possíveis de se perceber.

Assim, a proposta de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, por ser apoiada numa perspectiva de **Educação Matemática Crítica**, possibilitou-nos fomentar discussões através de uma prática intencionalizada, tomando como ponto de partida atividades de exploração, proposição e resolução de problemas que contemplavam a multicontextualidade de uma sala de aula de matemática. Notamos que o engajamento dos professores nas discussões tanto em nível de conceitos matemáticos quanto de questões sócio-político-culturais ampliaram o seu pensamento crítico acerca de temas de urgência social que precisam adentrar a sala de aula de matemática, de modo a educar e conscientizar os alunos de forma crítico-reflexiva, através do conhecimento matemático, bem como dos debates que surgem desse caminhar, que são interpretados sem a Matemática.

Desse modo, uma das concepções dos professores do que seja uma aula de Matemática que foi sendo reelaborada diante dos debates gerados ao longo dos encontros decorreu de perceberem que o ensino de Matemática pode transcender aspectos relativos a processos e conceitos matemáticos, como foi relatado por P4,

P4: [...] uma das coisas que me interessou foi à questão social, que depois deste curso me permitiu dedicar um olhar para este aspecto que eu não tinha antes, porque sempre

fui muito na linha de só olhar para a Matemática, e nunca indo para parte social, sem ver a importância disso.

De acordo com Silvanio de Andrade (cf. Mesa [...], 2021), na perspectiva da Exploração de Problemas, não há uma limitação na busca da resposta do problema, pois procura-se aguçar um olhar crítico para o problema que permite ir mais além, abrangendo múltiplos contextos.

A partir de uma análise teórico-prático-reflexiva e didático-pedagógica de um episódio de sala de aula via Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas que envolvem o clássico problema de Análise Combinatória acerca da formação de casais (4 meninas e 3 meninos), Silvanio de Andrade (cf. Mesa [...], 2021), Silveira, Nascimento e Andrade (2023) e Sousa *et al.* (2024) vão além de um olhar para processos e conceitos matemáticos, ao promover o debate sobre a temática gênero. De acordo com Silveira, Nascimento e Andrade (2023), a solução mais comum para este problema consiste no uso do Princípio Fundamental da Contagem e/ou árvore de possibilidades que resulta na estrutura multiplicativa: $4 \times 3 = 12$ casais. Esta, por sua vez, reforça o padrão heteronormativo (homem-mulher), amplamente difundido nos livros didáticos e materiais curriculares de Matemática como o único modelo possível para se formar um casal. Os trabalhos realizados em torno do problema promoveram-se a partir de um debate entre alunas, alunos e professor e surgiram diferentes caminhos de resolução (como a árvore de possibilidades) e diferentes Problematisações em uma turma de Prática de Ensino no âmbito de um curso de Licenciatura em Matemática nos anos letivos de 2020 e 2021 (Silveira, Nascimento, Andrade, 2023).

Para Sousa *et al.* (2024), as múltiplas soluções dadas ao problema dos casais são fruto de uma abordagem metodológica de Resolução de Problemas que possibilita ir mais além, ao envolver múltiplos contextos, dando, assim, significado às vozes que são silenciadas no padrão heteronormativo da Matemática. Nesse contexto, Silvanio de Andrade (cf. I Ciclo [...], 2020) defende que trabalhar com a **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas** em sala de aula é,

[...] interrogar as familiaridades do fazer matemático e das práticas cotidianas, surpreender, desarmar, perturbar os discursos ditos verdadeiros, absolutos e hegemônicos. É introduzir as perturbações no interior do debate, problematizando as práticas, desarticulando as familiaridades aceitas, com análises densas e profundas sobre o presente ao educar com a matemática, na busca de Práticas Emancipatórias, de Desassujeitamento (Extraído de I Ciclo [...], 2020, 1h14min32s).

Apoiado nos estudos de Paulo Freire, Andrade (no prelo) discute a Proposição de Problemas numa perspectiva sócio-político-cultural. Para o pesquisador, ao assumir uma perspectiva freireana, a Proposição de Problemas (PP) ou a Educação Problematisadora (PPE)

pretende criar oportunidades para o desenvolvimento de conceitos e ideias matemáticas numa perspectiva sócio-cultural-política.

Nesse sentido, notamos que promover uma abordagem de Matemática que contemple a proposição de problemas/questões que levem à discussão de questões de cunho sócio-político-cultural, inspirou os professores acerca de uma alternativa que pode motivar os seus alunos a aprenderem conteúdos matemáticos (por exemplo, Silva, L. 2013; Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Silveira, Nascimento, 2023), como aponta P2 e P4, respectivamente: “[...] *problemas sociais despertam o interesse dos alunos. Isso ajuda a criar e propor problemas*”; “*Às vezes o aluno pode nem gostar da Matemática, mas se a gente proponha uma questão social, o aluno entra naquela conversa, e começa ter interesse, e isso pode ser o ponto de entrada para trazer a atenção dele para a Matemática*”.

Sobre isso, Abreu (2024, p. 243) diz que, “[...] a EPRP promove a PP em sala de aula, refletindo a realidade dos alunos e tornando o ensino de matemática mais significativo e relevante.” Para o autor, essa metodologia, facilita a compreensão dos conceitos matemáticos, como também conecta o conhecimento do indivíduo com a sua vida cotidiana.

Acrescente-se a isso o que foi ressaltado por P13: “*O curso mexeu com nós, professores, pois debatemos sobre fatos políticos, sociais, ecológicos e econômicos do nosso país, como na região que a gente mora por meio da Matemática*”. Todas essas tomadas de consciência são decorrentes da intencionalidade do professor-pesquisador que viabilizou por meio das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas o debate acerca de temáticas de urgência social, que quando refletidas de forma crítico-reflexiva podem ampliar a visão de mundo dos alunos ao explicar diversos aspectos do funcionamento da sociedade, como enfatizado por P1: “*A metodologia utilizada em sala de aula nos possibilitou a desenvolver o pensamento crítico e reflexivo sobre temas sociais*”.

O nosso real interesse sempre foi envolver os professores em uma prática de matemática que os qualificassem a conduzir uma experiência em sala de aula em que os alunos fossem incentivados a ir além da Matemática por meio da interpretação de uma realidade social, política e cultural com os números e/ou sem os números (por exemplo, Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Silveira, Nascimento, 2023).

Contudo, percebemos que, para conduzir uma aula de Matemática com este enfoque, nos deparamos com alguns desafios, que serviram posteriormente como orientações pedagógicas, emergidos do processo crítico-reflexivo da experiência vivenciada por nós, a saber: discutir temas atuais, bem como aqueles que contemplem aspectos locais inerentes à comunidade em que a escola está inserida; ministrar uma aula de Matemática que aborde

aspectos sócio-político-culturais exige do professor uma preparação acerca da temática em foco (ir além da Matemática) para que ele possa lidar e debater com propriedade acerca das questões/problemas que surgem com este enfoque; e que o professor precisa estar atento à intencionalidade da aula, gerindo o tempo adequado para o debate em um patamar sócio-político-cultural, de modo a não perder o objetivo instrucional da aula em termos de processos e conceitos matemáticos.

Nessa perspectiva, amparados nos estudos de Gutstein e Peterson (2013), elaboramos e aplicamos atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, de tal forma que potencializassem o debate acerca de questões que envolvem in(justiça) social, como foi relatado por P4: *“Com o curso, consegui perceber a Matemática não somente como uma ferramenta que nos auxilia a solucionar problemas do dia a dia, mas também como um instrumento que nos possibilita a promoção da Justiça Social”*.

Silvanio de Andrade (cf. Esquenta [...], 2020) explica que, quando pensa a sala de aula de Matemática na perspectiva da Educação Matemática, não se preocupa apenas com o conhecimento matemático, mas como este conhecimento matemático pode contribuir para uma vida cidadã, para combater as injustiças sociais e o desenvolvimento de direitos humanos.

Ao pensar a Resolução de Problemas como meio de aprender Matemática, Mendonça (1993) se preocupou em propor uma Educação Matemática que estivesse ligada à vivência social do homem. Assim, ela explica que buscou como fonte para construção do conhecimento matemático questões que surgem da realidade social do aluno. A autora lista alguns pontos que evidenciam sua visão acerca da sala de aula de matemática, dentre eles, destacamos,

A prática pedagógica da Matemática é um movimento fecundo para a transformação social; o professor de Matemática pode atuar no desenvolvimento do educando, não só no aspecto cognitivo, mas também no aspecto social, aguçando seu espírito crítico de modo a torná-lo mais capaz de contribuir para o desenvolvimento de uma sociedade democrática (Mendonça, 1993, p. 22).

Nesse contexto, para pensar acerca de qualquer proposta pedagógica de ensino, seja Resolução de Problemas ou qualquer outra, é importante refletir como é que essa proposta pedagógica contribui para uma sociedade democrática e para a autonomia do ser humano (cf. Esquenta [...], 2020).

Notamos, assim, que a proposta de **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas** por meio do **processo de codificação e descodificação da situação-geradora de problemas** engajou os professores em diferentes discussões, de modo a inspirá-los acerca do desafio que se consistiu na busca de dar sentido à Matemática que está sendo ensinada em sala de aula. Sobre isso, P7, P9 e P10 descreveram

situações de injustiça social que vivenciaram, nas quais tiveram que intervir por meio da Matemática.

Nesse contexto, uma prática pedagógica via **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas** surge de um olhar para sala de aula de matemática que vê o conhecimento matemático na ótica das dimensões pedagógica e sócio-político-cultural.

Assim, refletimos que o professor de Matemática crítico-reflexivo precisa estar atento acerca de como os conceitos matemáticos podem emergir de uma situação do cotidiano dos alunos, para que, assim, possam ser utilizados como instrumentos de compreensão de aspectos da nossa sociedade. Nesse sentido, o professor precisa ser capaz de elaborar uma atividade que engaje os alunos em discussões em nível de conceitos matemáticos e sócio-político-cultural, buscando perceber os efeitos positivos na aprendizagem deles. No nosso caso, ao longo do curso, defendemos a atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas como propulsora para interlocução entre os conceitos matemáticos e questões de cunho sócio-político-cultural que emergiram por meio da metodologia de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, como enfatizou P5: *“Acredito que, através da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, podemos fazer com que os alunos explorem conceitos matemáticos de forma significativa, e trabalhar também com temas sociais, que discutam o contexto vivido por eles”*.

Concordamos com Abreu (2024), que sublinha que no ensino de Matemática nessa perspectiva, os alunos,

Além de aprenderem matemática, eles passam a utilizar esse conhecimento como uma ferramenta para entender e questionar o mundo ao seu redor. Dessa forma, a Matemática deixa de ser apenas uma disciplina abstrata e se transforma em um meio para promover a cidadania, incentivando os alunos a participarem ativamente de debates sociais e a tomarem decisões informadas (Abreu, 2024, p. 243).

De modo geral, acreditamos que o curso **“Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social”** promoveu o desenvolvimento de competências dos professores que modificaram suas concepções acerca do ensino de Matemática. Enaltecemos a sensibilidade de perceberem que uma aula de Matemática não deve se restringir a discussões internas à própria Matemática. Em suma, tal compreensão foi sendo construída no decorrer dos encontros que, por sua vez, forneceram *insights* sobre como eles podem planejar e ministrar uma aula em que questões de (in)justiça social podem ser interpretadas a partir do conhecimento matemático e de outras áreas do conhecimento, configurando a Matemática como impulsora e instrumento de transformação social (Mendonça, 1993; Domite, 2001; Gutstein, Peterson,

2013; Crespo, 2015; Santos, R. 2019; Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Silveira, Nascimento, 2023; Abreu, 2024).

Nesse contexto, Abreu (2024) diz que o movimento de exploração do problema ou da situação-problema precisa ser aberto, de modo que forneça condições de debater acerca de aspectos internalistas e externalistas da Matemática. O autor sublinha que “a compreensão dos aspectos socioculturais como dados importantes na ação pedagógica é o que torna a visão externalista relevante na EP, enquanto os aspectos internalistas fazem referência às relações, expressões e conceitos da própria Matemática” (*Ibid*, 2024, p. 48).

Sob essa ótica, entendemos que o curso contribuiu para a Formação Continuada dos Professores que ensinam Matemática ao desmitificar a Matemática como neutra, isto é, que se detém apenas a processos e conceitos matemáticos (visão internalista), perdendo, assim, o seu valor ao ignorar fatos que revelam, historicamente, como a Matemática se constituiu enquanto campo do conhecimento, em especial como uma ferramenta para resolver problemas cotidianos.

No enfoque internalista do conhecimento matemático, “[...] o terreno em que se apresenta as ideias matemáticas é somente o da própria Matemática, sem qualquer apelo às reflexões sobre os fatos do cotidiano” (Mendonça, 1993, p. 254).

Em contraposição à visão internalista para o ensino de Matemática, Abreu (2024) defende que a situação-problema precisa dar conta de desmistificar a neutralidade da Matemática e estimular professores e alunos a proporem e resolverem problemas que façam sentido na sua vida cotidiana.

Por isso, de modo geral, argumentamos que os professores vivenciaram uma experiência a qual os qualificaram para desenvolverem uma aula de Matemática que deve ir além de aspectos internalistas do conhecimento matemático. Para tanto, recomendamos que eles precisavam ser conscientes de que devem aprofundar e ampliar seus conhecimentos sobre a temática de Justiça Social que se pretende discutir, para que possa gerir o debate tanto no âmbito de processos e conceitos matemáticos quanto no âmbito sócio-político-cultural.

Por fim, elegemos, ao longo dos episódios de sala de aula com os professores, a proposta de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas** como propulsora para o debate que privilegia a interpretação, intervenção e o tratamento de questões de in(justica) social. Portanto, ao explorar, propor e resolver problemas matemáticos (e/ou de outros domínios) se limitando às discussões internas a própria Matemática, negligencia-se o potencial da Matemática como um instrumento de combate às questões de injustiça social, de intervenção e de transformação da realidade, que impulsiona a leitura e a análise crítica de mundo, podendo, assim,

potencializar a formação cidadã, ética e moral do estudante em *prol* de uma sociedade melhor para todos.

7.14.4 O impacto da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na Formação Continuada do professor que ensina Matemática

O curso evidenciou algumas concepções dos professores quanto ao ensino-aprendizagem de Matemática, que foram sendo ressignificadas ao longo das discussões e reflexões das atividades de exploração, proposição, resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.

Para início de conversa, tomamos como ponto de partida a reflexão tecida por P6 em torno de como a abordagem metodológica de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas modifica a ordem de uma aula tradicional de Matemática que segue o modelo definição-exemplos-exercícios de aplicação. Percebemos que foi consensual entre os professores que operacionalizar uma aula de Matemática por meio desta proposta delega aos alunos a autonomia ao participarem ativamente na construção e elaboração do seu próprio conhecimento matemático, com isso, como destacou P2, é possível “*Dar sentido ao que está estudando*”, e ainda, como acrescentou P9, “*Aprender os conteúdos de forma motivadora*”.

Com relação ao papel do professor, de modo geral, os professores observaram, a partir da nossa postura e gerenciamento das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas, que cabe a eles observar, orientar e mediar o debate de ideias matemáticas (por exemplo, Silva, L., 2013; Silva, A., 2013; Brandão, 2014; Nascimento, 2014; Silva, 2015; Silveira, 2016; Araujo, 2016; Silva, 2016; Martins, 2019; Santos, E., 2019; Santos, R., 2019; Granjeiro, 2020, dentre outras pesquisas) e/ou questões sócio-político-culturais (Silva, L., 2013; Santos, R. 2019; Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Silveira, Nascimento, 2023; Sousa *et al.*, 2024), como foi ressaltado por P3, “[...] *perceber o papel de incentivador e mediador do professor entre o saber matemático e o aluno*”.

Nos discursos dos professores, surgiu a conscientização quanto a uma sala de aula de matemática que tem como principal recurso o livro didático e de como tal prática pode ser superada quando o professor que ensina Matemática formula seus próprios problemas (Crespo, Sinclair, 2008; Jurado, 2013a, 2017; Milinković, 2015; Ellerton, 2015). Ainda desenvolvendo essa discussão, sugerimos que o professor poderia reescrever/reformular problemas do livro didático (Crespo, 2015; Lester, Cai, 2016) com o propósito de abranger uma ideia matemática, bem como potencializar o interesse dos alunos ao problematizar atividades da sua vida diária,

tratando, também, de aspectos locais inerentes à comunidade que a escola está inserida (Mendonça, 1993; Domite, 2001; Crespo, 2015; Silveira, 2016; Jurado, 2016b; Silveira, Andrade, 2022).

Aliás, outra concepção que os professores apresentavam a respeito de uma aula de Matemática é que o problema precisa ser sempre proposto pelo professor (embora que seja retirado do livro didático ou da *internet*). Diante da operacionalização da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, os professores notaram que podem conduzir uma prática de sala de aula que direciona aos alunos à responsabilidade de propor problemas, como aponta P7: *“Gostei da ideia do professor não levar o problema pronto para os alunos, mas eles que devem elaborar os problemas”*. Nesse percurso, observamos que tal compreensão foi sendo reformulada quando o processo de exploração-problematização-proposição de problemas sinalizava diferentes benefícios que uma prática de proposição de problema promove na aprendizagem matemática dos alunos.

Diante disso, o processo de reflexão-desconstrução-reconstrução de uma aula de Matemática, em que o problema, situação-problema ou a situação-geradora de problemas precisa ser o ponto de partida para a aprendizagem de conceitos matemáticos foi ampliado com a operacionalização da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, à medida que os professores foram dando significado aos diferentes movimentos de exploração-problematização das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, principalmente, quando perceberam que devem superar a ação convencional de resolução e solução do problema matemático, como enfatizado por P10: *“A metodologia aplicada neste curso me levou a repensar a prática de sala de aula, pois hoje percebo a discussão de um problema pode ser melhorada, com a proposição e reformulação dos problemas”*.

Durante o desenvolvimento do curso com os professores que ensinam Matemática, refletimos várias questões que surgem a partir do processo crítico-reflexivo de uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, como, por exemplo, o planejamento de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas em que os professores devem questionar a si mesmos, levantando algumas questões pedagógicas, a saber: Os alunos de determinada turma conseguem explorar, propor e resolver problemas a partir dessa atividade? Que ideias matemáticas podem ser discutidas com essa atividade? Esta atividade promove o debate de questões sócio-político-culturais? Em quais turmas essa atividade pode ser desenvolvida? A atividade pode despertar e motivar o interesse dos alunos? Refletiu-se também questões relacionadas à Matemática, tais como: Há diferentes caminhos de exploração-

problematização-proposição de problemas que podem ampliar e aprofundar conceitos matemáticos? Esta atividade possibilita fazer conexões entre diferentes conteúdos matemáticos?

Nesse contexto, compreendemos que os professores precisam ficar cientes de que ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas exige tomadas de decisões que contemplem aspectos conceituais e pedagógicos sobre como gerir um ambiente de sala de aula que atribui ao aluno a responsabilidade de explorar, problematizar, propor e resolver problemas, decidindo o seguinte: em quais dos problemas propostos pelos alunos cabem uma exploração matemática mais profunda?; até que ponto pode-se finalizar a discussão sobre o problema ou situação-problema?; e quando retomar um problema para explorar ou discutir com profundidade conceitos e conteúdos matemáticos?

Para tanto, o professor-pesquisador incentivou os professores a refletirem em qual(is) turma(s) os problemas propostos poderiam ser trabalhados (**Conhecimento curricular**), o que demandou dos professores a identificação de ideias matemáticas que davam conta do problema (**Conhecimento pedagógico do conteúdo**). Tendo isso em mente, durante o processo de autorregulação do como e do porquê formular determinado problema matemático, a maioria dos professores, em alguns trabalhos de proposição de problema realizado, justificaram que um dos critérios para propor problemas decorreu da antecipação dos conceitos matemáticos que estariam em evidência na resolução e solução dos problemas propostos.

Na sua pesquisa de doutorado, Martins (2024) buscou identificar em quais aspectos uma Unidade Temática Álgebra, utilizando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como metodologia de ensino, pode auxiliar, fomentar e colaborar na formação inicial do professor de Matemática. A pesquisadora notou que desenvolver atividades na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode contribuir para que os futuros professores possam “[...] desenvolver o conhecimento relacionado ao conteúdo matemático, ao conhecimento pedagógico do conteúdo, ao ensino de matemática, à educação, aos contextos sociais, à educação matemática crítica, dentre outros” (*Ibid.*, 2024, p. 239).

Dessa maneira, o professor explorador-problematizador de problemas necessita de saberes profissionais que devem permear sua atuação e formação profissional e estar em constante reelaboração, como o conhecimento matemático, pedagógico e curricular. Acreditamos que, durante o curso, buscamos articular esses conhecimentos dos professores que ensinam Matemática com os fundamentos teóricos da abordagem de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Nessa esteira, mencionamos que a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de

Problemas leva em consideração o conhecimento matemático, mas é uma proposta que também leva em consideração outros saberes dos professores, os quais consideramos que pode colaborar no desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo (Martins, 2024, p. 46).

Ainda com relação a como poderia ser organizada uma sala de aula de matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, os professores atentaram para a possibilidade de ser incentivada a discussão em grupo que privilegie a participação efetiva de cada aluno, de modo a desenvolver um trabalho colaborativo e cooperativo (Silveira, 2016; Silva, 2016; Granjeiro, 2020; Silveira; Andrade, 2020, 2022) durante o processo de exploração-problematização-proposição de problemas, resolução e solução dos problemas.

Acrescentamos, ainda, que os alunos podem ser desafiados a buscar múltiplos processos/procedimentos de resolução dos problemas para os quais se sugere que se abra um espaço a fim de que eles compartilhem e defendam suas soluções na lousa. Assim, sobre a dinâmica de sala de aula, Martins (2024) explica que,

A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é utilizada como uma perspectiva metodológica, composta por momentos variados, que enfatizam, sobretudo, a construção e aprofundamento dos conceitos e ideias matemáticas, a participação ativa do aluno e a interação entre este e o professor (Martins, 2024, p. 6).

Diante de todo o exposto, destacamos que o curso possibilitou aos professores uma experiência de Proposição de Problemas que pode ajudá-los a propor problemas para os seus alunos, como também conduzir uma aula de Matemática que direciona ao aluno a responsabilidade de propor seus próprios problemas (Crespo, 2003; Crespo, Sinclair, 2008; Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Crespo, 2015; Milinković, 2015; Cai, 2022; Silveira, Andrade, Cai, 2024). Enfatizamos, ainda, que se precisa avançar para além de proposição e resolução de problemas, ao fazer uma investigação mais profunda com a geração de novos problemas que possibilitem discutir uma ideia matemática com significado.

7.14.5 Atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas: implicações para a sala de aula de matemática

Com relação às atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, destacamos que o **Movimento α : “Coloque suas curiosidades e reflexões em forma de problemas, explore-os e os resolva”** exigiu dos professores competências com relação à leitura e interpretação de texto e, com isso, eles enalteceram que as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas, no formato de Narrativas Matemáticas, podem ajudar no desenvolvimento de habilidades relativas à escrita e à leitura, como observou P6: “As narrativas incentivaram à leitura [...]”.

Com as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, buscamos entreter, comunicar e informar. Então, a exigência de escrita delas incentivou os professores a quererem debruçar-se na leitura, sentindo-se convidados a acompanhar as aventuras vivenciadas por Lola e seus amigos, como destacou P4: “[...] a partir das narrativas, podemos criar uma conversa ou um bate-papo que pode ajudar a atrair a atenção dos alunos para a Matemática”, ou seja, tencionamos que as diferentes interpretações dadas pelos professores a cada fragmento das Narrativas Matemáticas fosse o ponto de partida para o debate que contemplasse tanto aspectos cognitivos quanto sócio-político-culturais.

Nesse cenário, para emergir a discussão sobre processos e conceitos matemáticos e acerca de questões de (in)justiça social que estão nas entranhas de nossa sociedade, as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas esboçam uma sequência de dados reais (ou mais próximos possíveis da realidade) que estão ligados ao cotidiano dos alunos. Notamos que tal aspecto maximizou o interesse dos professores ao argumentarem que isso pode motivar os alunos a querer aprender Matemática, pois, como afirmou P13, *“a leitura das narrativas, dos textos e na internet, buscando dados verídicos para propor problemas contextualizados corretamente, que informa ao aluno sobre a sua realidade”*.

Apoiada nos estudos de Paulo Freire, bem como a partir de uma experiência vivida ao longo de um trabalho sob sua orientação, Mendonça (1993) sugere algumas recomendações à comunidade de Educação Matemática que podem desencadear momentos de aprendizagem, em especial, destacando-se: “[...] ensina-se Matemática a partir da formulação de problemas gerados dos elementos que educandos e educador recolhem, de forma desestruturada, na realidade social que estão inseridos” (Mendonça, 1993, p. 65).

De acordo com Abreu (2024), a abordagem de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode ter “[...] um impacto direto na formação de cidadãos críticos e reflexivos, pois, quando os alunos veem a Matemática aplicada a problemas reais e contextuais, eles desenvolvem habilidades para analisar e compreender melhor as questões que os cercam” (Abreu, 2024, p. 243).

Desse modo, a Matemática passa a ser vista com outros olhos pelos alunos, quando eles conseguem perceber sua relevância no mundo real. Certamente, isso pode acontecer quando eles reconhecem e propõem problemas matemáticos que explicam o funcionamento de diferentes aspectos do seu entorno (Silveira, 2016).

Ao discutir uma atividade de Análise Combinatória via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, Silveira e Andrade (2022)

notaram que os alunos foram capazes de fazer relações de uma ideia matemática em diferentes contextos. “Por consequência, o desenvolvimento desta atividade fomentou a aquisição de várias ideias que estavam implícitas no problema formulado, propiciando ao aluno a percepção das relações entre a matemática e sua realidade social” (*Ibid.*, 2022, p. 20).

Nesse contexto, o trabalho de exploração-problematização-proposição de problemas que pode ser desenvolvido pelos alunos exige do professor uma postura aberta para o surgimento de problemas/questões que, de antemão, não foram antecipados, inclusive, debates que podem transcender o contexto matemático, necessitando de conhecimentos de outra natureza para elucidar preocupações, anseios e necessidades pessoais, que são colocadas em forma de problema (ou pergunta). O ensino-aprendizagem de Matemática nesta concepção está apoiado num olhar externalista para o conhecimento matemático.

A respeito da dimensão sócio-político-cultural (visão externalista), os professores exaltaram o potencial das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas para fazer florescer diferentes questões sociais que podem incentivar os alunos a querer aprender Matemática, como destacou P1: “*As Narrativas Matemáticas nos possibilita trabalhar a Matemática de forma inovadora*”, podendo potencializar o trabalho de proposição de problemas, como ressaltaram P2 e P12,

P2: Com as narrativas a gente conseguiu trazer questões até sociais...problemas sociais. Citamos aqui preconceitos como o racismo. Citamos aqui problemas que levam a outros problemas econômicos, como foi à questão das abelhas, que afetava a economia. **E tudo isso pode despertar o interesse dos alunos. Isso ajuda a criar e propor problemas.** Com a responsabilidade de trazer números adequados da realidade.

P12: A **aplicação das narrativas** nas aulas de Matemática se mostra como uma ferramenta de suma importância, pois **enriquece a formulação de problemas.**

Decerto, as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas tiveram a Proposição de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas como ponto de partida da aprendizagem que, ancorada a esta proposta, não se limita a propor e resolver problemas, aventando transpor uma visão internalista com a proposição de problemas que contemple uma visão externalista, como observado por P6, “*As narrativas foram trabalhadas de forma interdisciplinar, envolvendo Matemática, problemas sociais e ambientais*”.

Uma abordagem externalista da Matemática supervaloriza a atividade que pode ser desencadeada a partir da realidade social do aluno para a aquisição do conhecimento. Assim, nesta concepção, o ensino de Matemática adota como ponto de partida um contexto não matemático e situa a Matemática como um dos elementos de análise, de interpretação e de busca

de solução (Mendonça, 1993), podendo, ainda, transitar em diferentes campos do conhecimento.

Para Mendonça (1993), é preciso conscientizar o professor que haverá maior possibilidade de impulsionar a aprendizagem do conhecimento matemático ao criar oportunidades de compreender uma situação da sua realidade social, problematizando-a. “Para tanto, o professor deverá ser efetivamente um professor/pesquisador e a experiência educativa – origem, processo e produto – deve ir além da sala de aula” (*Ibid.*, 1993, p. 291). A pesquisadora explica, também, que o papel do professor é atuar como organizador e animador de conceitos matemáticos dos alunos, buscando conciliá-los com outras visões e explicações para as situações e fenômenos problematizados.

De maneira concisa, os professores captaram os dois aspectos importantes da nossa pesquisa que foram incorporados as Narrativas Matemáticas: a Proposição de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas e a importância da dimensão sócio-político-cultural em uma abordagem de Resolução de Problemas (Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023; Silveira, Nascimento, 2023; Sousa *et al.*, 2024).

Constatado esse fato, mediado pelo processo de exploração-problematização-proposição de problemas, o debate, quando necessário, era retomado levando-nos a novas viagens visando atingir outro grau de compreensão, seja em nível de discussão de processos e conceitos matemáticos ou questões de cunho sócio-político-cultural, como destacou P5: “*As Narrativas Matemáticas trabalhou questões importantes...com vasta possibilidades de ser exploradas, o que ocasionou discussões muito boas, a cada discussão ficávamos surpresos com os resultados obtidos nas discussões*”.

Nesse contexto, nos atentamos para o impacto que essas atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas pode provocar nas salas de aulas de matemática dos professores que participaram do curso, isto é, como eles se sentiram tocados ao exporem suas impressões e ideias de como podem replicar estas atividades em suas turmas. Durante o desenvolvimento do curso, tivemos o *feedback* de alguns professores, como P10 e P13, que relataram que fizeram uso da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “**Um enxame**” de **problemas**, enquanto outros externaram o desejo de utilizá-las em sala de aula, como P4 e P9:

P4: Sem dúvidas vou adicioná-las às minhas aulas de Matemática.

P9: Mas eu nunca tive o olhar de trazer uma narrativa para propor problemas. Foi uma ideia que você trouxe eu que posso utilizar para ensinar algum conteúdo. Estou pensando em trabalhar na turma do 8º ano no quarto bimestre, para ver o desempenho dos alunos.

Inclusive, enaltecemos o trabalho realizado por P13 no décimo episódio de sala de aula, o qual escreveu uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, que julgamos ser um espaço fértil para a realização de um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas em perspectivas múltiplas (cognitiva/internalista e sócio-político-cultural/externalista).

Desse modo, mencionamos aos professores que a escrita das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas teve como inspiração a contextualização de um cenário e situações que foram vivenciados em nossa infância. Ademais, os contextos que expressam uma situação-problema podem ser do mundo real ou puramente matemático (Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Cai, Hwang, Melville, 2023). Assim, tomando como referência o nosso fazer, incentivamos os professores a contextualizarem situações do seu cotidiano, transformando-as em atividades de exploração, proposição e resolução de problemas. Evidentemente, ao longo de encontros, tivemos alguns depoimentos dos professores como P5, P7, P9, P10, P12, P13 e P14, que se inspiraram em situações por eles vividas para propor problemas.

Sobre isso, Crespo (2003) compreende a proposição de tarefas matemáticas como um dos desafios de aprender a ensinar Matemática. Notamos que o **Movimento γ : “Acrescente ou modifique uma “fala” dos personagens das Narrativas Matemáticas – refinando/aprofundando as Narrativas Matemáticas”**, solicitado aos professores, demandava um esforço cognitivo maior e, conseqüentemente, eles apresentaram dificuldades para realizarem tal tarefa. Compreendemos que a realização deste movimento de exploração das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas exigiu dos professores habilidades para a elaboração de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas. Observamos que o desafio se ampliava, pois os docentes deveriam ficar atentos em acrescentar ou modificar fatos das Narrativas Matemáticas de tal modo a dar continuidade ao espaço-tempo que a compunha, tornando-a um ambiente fértil que levasse à geração de problemas.

Este encaminhamento sinalizou a importância da **problematização**, uma vez que os professores apresentavam um **novo fragmento** que gerava novas reflexões e que poderia se **tornar novos problemas**. Sobre isso, Mendonça (1993, p. 176, grifos da autora) explica que o “**problema** é, portanto, resultado de um processo que se inicia a partir de uma **problematização** que nasce da interação do sujeito com o mundo e com outros sujeitos, dependendo, por conseguinte, de fatores reais, emocionais e culturais”.

Para tanto, argumentamos que os professores precisavam se regular e monitorar seu próprio pensamento (processo de metacognição), de modo a compreender o seu fazer, decidindo como a redação acrescentada pode vir a gerar novos problemas. Com isso, os professores foram desafiados a antecipar problemas de forma consciente a partir da nova escrita acrescentada, estabelecendo relações dos problemas que podem ser propostos com os novos fatos/acontecimentos. No processo de refletir sobre seu próprio fazer ou sobre o seu pensar, em um trabalho de problematização, Mendonça (1993) explica que,

[...] a **problematização** é o germe e a mola do conhecimento, pois este é sempre resultado de um diálogo com o próprio pensamento, com o outro e com o objeto a conhecer e, uma vez formulado o problema, entendemos que será dado a ele um **encaminhamento** e não uma solução definitiva [...] (Mendonça, 1993, p. 87, grifos da autora).

Em síntese, este movimento de discussão das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas buscou enriquecê-las com a geração de novos ambientes de problematizações. Compreendemos que a produção do Produto Educacional precisa ser uma construção conjunta, uma vez que, ambos, o professor-pesquisador e os participantes da pesquisa, em um processo de colaboração e cooperação, contribuíram com a produção deste material, pois os diferentes movimentos de exploração das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas impulsionaram algumas reflexões críticas que, a nosso ver, sinalizaram possibilidades e limitações que ajudaram a melhorar o respectivo material para que possa ser implementado em diferentes salas de aula de matemática.

Ainda nesse espaço discursivo, vamos destacar alguns fatos/acontecimentos que foram propostos pelos professores e que acrescentamos em cada atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática por entendermos que ampliam as tramas e podem impulsionar o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas em termos de conceitos matemáticos e questões de cunho sócio-político-cultural. É importante ressaltar que adotamos alguns trabalhos realizados pelos professores mantendo a essência das suas ideias, mas, quando necessário, adaptando-as de modo a não perderem o sentido do espaço-tempo que compõe as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.

Tratemos da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativa de Matemática “**Jogo de Sueca**”, na qual enaltece os trabalhos realizados por: P4, que, no trecho “*Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si*”, acrescentou que “Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si **com apertos de mãos e abraços**” e, ainda, “**O número de apertos de mãos dados foi do dobro do número de abraços**”; já P12, após a

fala “*Sr. Deda é comerciante há anos e sempre lida com situações envolvendo cálculo mental*”, acrescentou que:

Apesar do Sr. Deda ser bom em fazer cálculos mentais, nesses dias bateu uma dúvida na seguinte situação: vendeu um produto que custava R\$ 23,50, e o cliente lhe pagou com uma nota de R\$ 50,00, visando facilitar o troco que Sr. Deda teria que lhe devolver, o cliente falou que poderia se lhe passar mais R\$ 3,50 para que Sr. Deda devolvesse R\$ 30,00, Sr. Deda aceitou a sugestão, porém, ficou em dúvida se realmente teria ficado tudo correto.

Por sua vez, na atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática Um “**enxame de problemas**”, selecionamos os trabalhos realizados por P14, que dá continuidade e à fala de Cesinha acerca dos alimentos que podem ser afetados com a extinção das abelhas, acrescentando que “**Outro caso seria a polinização do café que sem a polinização feita pelas as abelhas, teria uma redução de 30% na sua produção**”; Expandindo o potencial matemático, com a possível geração de problemas envolvendo o tópico de Trigonometria, P5 acrescentou na fala de Perobinha: “*Os caras cortaram do lado errado, por isso o pé de caju caiu - explicou Perobinha*”, a partir do seguinte diálogo:

- Verdade ele já é bastante inclinado, cortando errado ou muito, independente do lado, ele iria cair – falou Nêm.
- Dias atrás passando nesse cajueiro percebi que ele deve ter aproximadamente 6 metros de altura, porém sabemos que é maior, pois está muito inclinado – disse Lola.
- Eu acho que a sua sombra deve ter uns 8 metros, observando ao sol de meio dia – disse Perobinha.

Na atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática “**Mercado de problemas**”, foram apresentadas e defendidas algumas propostas que ajudassem a convencer Nêm a comprar na vendinha de Sr. Deda, dentre elas, destacamos os trabalhos de P1, que apresentou uma proposta de desconto, “**Amanhã, cada quilo de batata vai estar com 15% de desconto, afirmou Sr. Deda**”; e P4, que buscou “seduzir” Nêm garantido que foram utilizados agrotóxicos biológicos na cultivação das batatas vendida pelo Sr. Deda,

Ainda com o objetivo de convencer Nêm a consumir em sua vendinha, Sr. Deda fez a seguinte afirmação:

- Nêm, caso opte por comprar a batata em minha vendinha você tem a garantia de que é um produto sem qualquer uso de agrotóxicos químicos, pois é cultivada no meu próprio sítio e só utilizamos agrotóxicos biológicos, quando necessário.
- Isso é um ponto importante, disse Nêm, e continuou, vi em *site* que de 2000 a 2022 o Brasil aumentou de 82 para 652 o número de agrotóxicos liberados.

Por fim, da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativa de Matemática “**A crise hídrica – um problema mundial**”, selecionamos o trabalho

realizado por P14, a partir da fala de Sr. Deda: *“Provavelmente, deve ser devido ao desperdício diário de água”*, acrescentamos e modificamos um pouco da escrita, ficando **“Outra coisa que li é o desperdício de água no Brasil, que, em relação à água tratada, a cada 100 litros de água, somente 63 litros são consumidos e o restante são perdidos”**. Nessa mesma narrativa, P5 dá continuidade à seguinte fala de Perobinha: *“O funcionário falou, também, que cada residência não pode exceder no mês o consumo de 20 m³ de água [...]”*, acrescentando a este trecho: **“porém, para empresas da cidade abastecidas pela empresa, não há um limite com a condição de que irá pagar R\$ 3,00 a mais por cada m³ excedido dos 20m³”**.

Por outro lado, vale ressaltar algumas limitações das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas que emergiram ao longo dos encontros com os professores. Inicialmente, chamamos a atenção para um dos problemas proposto por P12 no primeiro encontro, envolvendo a narrativa **“Jogo de Sueca”** que enunciou a seguinte escrita: **“Considere que cada partida, houve uma dupla vencedora”**. A preocupação apontada por P12 sugere a possibilidade de haver empate em algumas das partidas e que na prática, considerando um total de 32 partidas, de fato, é provável que isso ocorra. Assim sendo, sentimos a necessidade de deixar claro para o leitor que, em cada partida, sempre haveria uma dupla vencedora. Entendemos que um caminho para a problematização deste acontecimento na citada Narrativa Matemática seria, portanto, considerar que houve **n** empates, levando a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

Inquietação semelhante ocorreu na pré-validação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativas Matemáticas que realizamos junto aos participantes do GEPEP, na narrativa **Um “enxame de problemas”**. Os participantes questionaram o que significava a expressão *“tirar abelha”*, dúvida igual ocorreu com os professores, mais precisamente com P2, que formulou o seguinte problema: *“A que se refere à expressão “tirar uma abelha”, citada pelo personagem Lola, tendo em vista o contexto até o momento?”*. Na ocasião, explicamos que esta expressão surge do contexto cultural de um grupo social que denominamos de “tiradores de abelhas”, ou seja, “tirar uma abelha” significa o ato de retirar o mel da colmeia. Por isso, realçamos a importância de apresentar uma nota esclarecendo o significado desta expressão no contexto desta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática.

Faz-se necessário ressaltar que, durante os encontros, tivemos alguns depoimentos dos professores acerca do uso das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato Narrativas Matemáticas em sala de aula. Contudo, compreendemos que a sua

replicabilidade no “chão da escola” da Educação Básica exige adaptações dos professores, pois elas foram elaboradas visando discutir diferentes conceitos e conteúdos matemáticos. Deixamos claro para os professores que eles podem adaptá-las à sua realidade, adicionando novos fatos/acontecimentos na narrativa ou selecionando um fragmento que geradores de problemas que abordem ideias matemáticas que os docentes pretendem discutir na aula. Inclusive, no início do ano letivo de 2024, P12 entrou em contato conosco e sugerimos que, de acordo com o conceito matemático que ele pretendia discutir em sala de aula, escolhesse algum fragmento da atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática e oportunizasse aos seus alunos um ambiente de exploração, proposição e resolução de problemas.

Portanto, sublinhamos que o nosso Produto Educacional visa alcançar os professores da Educação Básica, como também recomendar que as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas possam ser implementadas nos cursos de Formação Inicial e Continuada de Professores que ensinam Matemática. Para isso, sugerimos que o/a professor (a) se debruce na leitura de cada encontro que tivemos com os professores que ensinam Matemática, de modo a nortear seu trabalho em sala de aula, percebendo movimentos e facetas que podem ser adotadas quando se propõe a ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e, se necessário, diante de limitações e possibilidades, adaptá-las à sua realidade.

7.14.5.1 Critérios para estratificação do nosso Produto Educacional: atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas

A aplicação do nosso **Produto Educacional (PE)** gerou reflexões que nos permitem analisá-lo, adotando os critérios de estratificação listados pelo Grupo de Trabalho de Produção Técnica da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a saber: 1) aderência; 2) impacto; 3) inovação; 4) aplicabilidade; e 5) complexidade (Brasil, 2019).

Com relação ao critério **aderência**, o nosso Produto Educacional está em consonância a com área de concentração “**Ensino de Ciências e Educação Matemática**” e com a linha de pesquisa “**Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática**” do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECM/UEPB), já que o nosso PE busca analisar como Narrativas Matemáticas podem impulsionar o caminhar de exploração,

proposição e resolução de problemas na Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática.

Desse modo, destacamos que o critério **impacto** do nosso PE é atendido, devido ao fato de que sua elaboração teve a participação engajada de 14 professores do brejo paraibano que lecionam Matemática em cidades da Paraíba e Rio Grande do Norte. Sobre isso, percebemos que as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas impactaram a formação continuada dos professores que participaram do curso “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social**”, desenvolvendo competências por meio da análise crítico-reflexiva de aspectos teóricos e práticos, durante a implementação do curso, de modo a instrumentalizar os docentes no que tange à operacionalização de uma aula de matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

A **inovação** desse PE decorre da elaboração de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, em que, na sua aplicação, junto aos professores que ensinam Matemática, é oportunizado um ambiente de exploração-problematização-proposição de problemas, que contempla a Proposição de Problemas (estado atual das pesquisas e práticas em Resolução de Problemas) como ponto de partida da aprendizagem matemática e potencializa o debate de questões de cunho sócio-político-cultural (direção futura das pesquisas e práticas em Resolução de Problemas).

No que diz respeito ao critério **aplicabilidade/replicabilidade**, o nosso PE, inicialmente, teve sua aplicação no âmbito da Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática. Contudo, entendemos que este PE pode ser replicável em diferentes contextos, seja na Formação Continuada de Professores, inserindo-se na escola como um espaço de aprendizagem que possibilite aos docentes refletirem sobre suas práticas e desenvolvimento profissional, ou na Formação Inicial, atendendo aos futuros professores que ensinarão Matemática (sendo aplicado por formadores de professores), de forma que os professores e futuros professores possam trabalhar as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas no âmbito da Educação Básica. Em todos os contextos elencados, os pesquisadores em Educação Matemática podem replicar o PE, buscando entender *nuances* e movimentos do ensino-aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Por fim, no critério **complexidade**, houve o engajamento dos professores que nos ajudou a perceber limites e possibilidades das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, como também a refletir sobre a prática

pedagógica desenvolvida com os professores em formação continuada, por meio das pesquisas do GEPEP, do levantamento da literatura em Resolução de Problemas em nível nacional e internacional, bem como do nosso referencial teórico.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a nossa pesquisa, analisamos quais as possibilidades das pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na prática pedagógica.

Para isso, o caminho que trilhamos constituiu-se, no primeiro momento, em descrever e analisar as dissertações desenvolvidas pelos membros do GEPEP que adentraram a sala de aula de matemática **via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas** (Andrade, 1998; 2017).

Na ocasião, buscamos elucidar a relevância desta abordagem de Resolução de Problemas na transformação de uma aula matemática que ora enfoca o problema, a situação-problema ou a situação-geradora de problemas como o ponto de partida no ensino-aprendizagem de Matemática, ora compreende que a proposição dos problemas deve partir do(a) aluno(a), isto é, defende a Proposição de Problemas como ponto de partida da aula de Matemática. E que ambas, a Resolução de Problemas e Proposição de Problemas, pensadas a partir da Exploração de Problemas, buscam desconstruir uma prática de Resolução de Problemas que se limita apenas a resolver o problema proposto pelo professor, ou, ainda, em um trabalho de Proposição de Problemas que se contenta em propor e resolver o problema, deixando de lado o processo de problematização que pode culminar em novos problemas, exigindo, assim, novas (re)soluções, novas reflexões e sínteses que podem ampliar a compreensão dos alunos acerca de processos e conceitos matemáticos.

Nesse sentido, o mapeamento das pesquisas do GEPEP promoveu a apreensão de alguns *insights* sobre o que pode ocorrer em uma sala de aula de matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Sobretudo, foram elucidados **movimentos didáticos** que podem ajudar o professor ou o futuro professor que ensina Matemática na operacionalização de uma aula de Matemática cuja característica marcante expresse que a resolução e a proposição dos problemas sejam apenas o início de várias “viagens” que o caminhar de exploração de problemas pode indicar, tanto no nível de ideias matemáticas quanto no tratamento de questões de natureza sócio-político-cultural.

Imbuídos de tal percepção, ao adentrarmos às discussões atuais que vêm movimentando o campo de Resolução de Problemas, percebe-se que, desde a metade da última década, a **Proposição de Problemas** tem recebido uma notável atenção, principalmente no cenário internacional, embora de forma insuficiente quando comparado às pesquisas em Resolução de Problemas, carecendo assim de mais pesquisas que ampliem a nossa compreensão sobre como a habilidade de propor problemas impulsiona a aprendizagem matemática dos estudantes.

Dentro dessas perspectivas, destacamos os estudos de Andrade (1998, 2017), que percebeu a existência de uma carência de pesquisas que enfocam práticas de Resolução de Problemas em sala de aula que abordem questões de cunho sócio-político-cultural.

Com a pesquisa, sintetizamos algumas descobertas sobre como os estudos desenvolvidos pelos membros do GEPEP têm potencializado o **“Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas”** na prática de sala de aula. Além do mais, entendemos que as nossas contribuições para o campo de pesquisa em Resolução de Problemas consistiu-se em também desenvolver uma prática pedagógica por meio de **atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas na Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, priorizando a **Proposição de Problemas** (pensada a partir da **Exploração de Problemas**) como ponto de partida de uma aula de matemática, bem como dando destaque ao debate que privilegie uma **visão externalista para o ensino de Matemática**.

Ademais, um ponto de convergência entre as pesquisas analisadas decorre da imersão do professor-pesquisador no cotidiano da sala de aula de matemática munido de uma sensibilidade para a **multicontextualidade** da mesma, enfocando nos seguintes eixos de pesquisa: **I) Exploração, Proposição e Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Matemática; II) Educação Matemática Crítica e Pós-Crítica; e III) Sala de Aula de Matemática e o Cotidiano Escolar**.

Nesse contexto, amparados ao nosso objetivo de pesquisa, às discussões emergentes do campo e antevendo o progresso das futuras pesquisas em Resolução de Problemas, optamos pelas seguintes categorias de análise: **(i) Construção e compreensão de conceitos matemáticos, e indo além do processo de resolver e propor problemas; (ii) Dimensão sócio-político-cultural; (iii) A Proposição de Problemas em sala de aula; e (iv) Formação de professores que ensinam Matemática**.

De modo geral, as pesquisas do GEPEP analisadas evidenciaram que a construção e compreensão de conceitos matemáticos são promovidos por meio de um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas que consiste em ir além da resolução e solução dos problemas; há uma consciência de que o movimento de idas e vindas desencadeado em uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas promove uma aprendizagem com significado de conceitos matemáticos; o incentivo aos múltiplos processos/procedimentos de resolução de problemas impulsionam a sistematização de ideias matemáticas; o uso de tecnologias como elementos mediadores (*softwares, internet, a calculadora comum e*

calculadora gráfica) intensificam o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas, de modo a aprofundar o processo de investigação de uma atividade matemática.

Por outro lado, embora alguns pesquisadores do GEPEP tenham mostrado sensibilidade para questões de cunho sócio-político-cultural, notamos que ainda há poucos estudos em Resolução de Problemas que proporcionam este foco. Contudo, estes pesquisadores oportunizaram aos seus alunos diferentes olhares para uma situação-problema fruto de uma imersão no cotidiano de sala de aula que não se contentou apenas com a **visão cognitiva/internalista** do conhecimento matemático, mas contemplou, também, uma **visão externalista**, na qual emergiram problemas/questões que possibilitaram um olhar crítico para o mundo em que vivemos.

Além disso, temos defendido, ao longo deste trabalho, que uma prática de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas pode qualificar o trabalho do professor de Matemática em sala de aula, ao melhorar sua prática pedagógica e a aprendizagem dos alunos, quando ele se dispõe a propor problemas para os seus alunos, como também delegar a eles a responsabilidade de propor seus próprios problemas, tanto com relação a conceitos matemáticos quanto no que concerne a aspectos sócio-político-culturais. Alguns argumentos que sustentam essa nossa defesa, em especial quando os problemas são propostos pelos professores, foram amplamente defendidos pelos docentes ao longo do curso de formação com os professores que ensinam Matemática, ao expressarem que eles, ao conhecerem seus alunos, podem propor problemas para sanar dificuldades acerca de ideias matemáticas e atingir objetivos que foram traçados para fins de compreensão de um conceito matemático.

De modo geral, notamos que as pesquisas realizadas pelos membros do GEPEP, adotando a Proposição de Problemas na perspectiva da Exploração de Problemas sinalizam como os problemas propostos pelos alunos, futuros professores e professores em exercício geraram oportunidades de aprendizagem para todos, tanto numa dimensão conceitual e social quanto pedagógica, isto é, como os professores geriram os problemas propostos pelos alunos, identificando seu potencial para uma exploração matemática e para abordar um conceito matemático com profundidade.

Ainda acrescentando aos nossos estudos, as reflexões tecidas a partir da análise das pesquisas dos membros do GEPEP contribuíram para: entender algumas *nuances* sobre o que nos dizem uma sala de aula de matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas; sintetizar **movimentos didáticos** para a implementação da abordagem de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas via Narrativas Matemáticas em um curso de

Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática; e ajudar a compreender alguns dados levantados no curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática.

Destarte, retomamos a nossa questão de pesquisa: *Quais as possibilidades das pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na prática pedagógica?* Buscamos respondê-la a partir de um olhar voltado às pesquisas realizadas pelos membros do GEPEP, bem como ao curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática que ministramos fazendo uso de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas. Para tanto, elucidamos algumas concepções dos professores sobre o ensino-aprendizagem de Matemática por meio de uma abordagem metodológica de Resolução de Problemas (**Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas**). Neste processo de reflexão-desconstrução-reconstrução de uma aula de Matemática, notamos que as concepções dos professores foram sendo ressignificadas, podendo promover uma mudança significativa na atuação profissional com a promoção de saberes que permeiam sua prática docente.

A experiência vivenciada no âmbito do curso “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social**” sinalizou **movimentos** e **facetras** que devem ser assumidas pelos professores para ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, de modo a convergir com a nossa análise das dissertações dos membros do GEPEP. Dessa forma, os resultados evidenciam quais as possibilidades das pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) em Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na prática pedagógica, tais como elencadas a seguir:

- **A inversão de um modelo convencional de uma aula tradicional de Matemática que adota o modelo definição-exemplos-exercícios de aplicação.** Nas pesquisas do GEPEP com alunos da Educação Básica, licenciandos em Matemática e na intervenção juntos aos professores, discutiu-se o problema, a situação-problema ou a situação-geradora de problemas como ponto de partida de uma aula de Matemática com a intencionalidade de os alunos e professores perceberem as oportunidades de aprendizagem que podem ser criadas quando o professor gere um ambiente que atribui a autonomia ao aluno na produção do seu conhecimento matemático partindo de seus saberes prévios;
- **Os alunos aprendem Matemática explorando, problematizando, propondo, reescrevendo/reformulando e resolvendo problemas!** Os participantes das pesquisas

realizadas pelos membros do GEPEP e os professores que participaram do nosso curso tiveram a oportunidade de refletir sobre uma sala de aula de matemática em que os alunos podem aprender Matemática explorando, problematizando, propondo, reescrevendo/reformulando e resolvendo seus próprios problemas. Assim, há uma ruptura na visão obsoleta de uma aula de Matemática em que o professor é o único que possui autoridade para selecionar e propor os problemas, cabendo ao aluno apenas resolvê-los;

- **No ensino-aprendizagem de Matemática, é atribuição do professor propor problemas para as suas aulas de Matemática, e, quase sempre, são problemas selecionados do livro didático, materiais de apoio ou da *internet*.** Em contraposição a essa prática, o curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática promoveu o desenvolvimento de competências deles para formularem seus próprios problemas de modo a não sentirem tanta dependência de materiais didáticos prontos. Os debates críticos-reflexivos ao longo dos encontros evidenciaram alguns benefícios pedagógicos ativados quando os professores formulam seus próprios problemas para as suas aulas de Matemática. Ademais, os estudantes que se envolveram nas pesquisas dos membros do GEPEP e os professores que participaram do nosso curso via Narrativas Matemáticas puderam refletir acerca das oportunidades de aprendizagem que são geradas quando o próprio aluno formula seus problemas;
- **O ensino-aprendizagem de Matemática deve se limitar à discussão de processos e conceitos matemáticos.** Para desmistificar essa problemática, os professores, ao longo dos encontros experienciaram uma prática de Matemática sob uma perspectiva de Educação Matemática Crítica via Narrativas Matemáticas. Dessa forma, alguns problemas propostos refletiam, com/sem os números, sobre aspectos que elucidam questões de (in)justiça social. Inclusive, alguns professores defenderam que uma aula de Matemática que privilegia questões de cunho sócio-político-cultural pode potencializar o interesse dos alunos na aprendizagem de ideias matemáticas e na proposição de problemas;
- **Os participantes das pesquisas dos membros do GEPEP e os professores experienciaram uma prática de Resolução de Problemas que teve como orientação teórico-prática ir além da resolução e solução do problema.** Acreditamos que essa postura frente a um problema matemático ou a uma situação-geradora de problemas pode ter transformado a sala de aula desses participantes, ao perceberem que uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas pode ganhar diferentes

formatos, desde o trabalho de exploração, problematização, proposição, reformulação e resolução dos problemas, como também o movimento didático no qual se orienta que uma atividade na perspectiva da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é sempre inacabada. Além do mais, ela pode ser discutida abrangendo toda sua multicontextualidade, adentrando tanto em discussões que contemplam aspectos cognitivos quanto sócio-político-culturais;

- **Uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas foca na compreensão com significado de processos e conceitos matemáticos.** O movimento de idas e vindas, em que a proposição de problemas pode ocorrer antes, durante e depois do processo de resolução e exploração problemas, pode culminar numa apreensão mais profunda de ideias matemáticas, devido ao movimento investigativo que está sempre interessado em ir mais além, valorizando todo trabalho realizado pelo aluno e o desafiando a pensar sobre o que fez.

Vale destacar que a presente pesquisa ampliou a nossa visão no que se refere a uma sala de aula de matemática **via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, de modo a nos instrumentalizar a tecer algumas reflexões sobre a respectiva proposta metodológica de Resolução de Problemas.

De início, temos assumido que a **Proposição de Problemas**, pensada na perspectiva da **Exploração de Problemas**, é gerada por um movimento consciente de idas e vindas que tenciona e amplia o **processo de exploração-problematização-proposição de problemas**. Diante disso, afirmamos que a proposição de problemas pode ocorrer entre a resolução e a exploração de problemas, uma vez que o processo de resolução de um problema pode elucidar novas “viagens” que o caminhar de exploração de problemas estava sinalizando. Por sua vez, a proposição de problemas transpõe todo processo de exploração de problemas, qualificando-o e instrumentalizando-o de modo a permitir que o movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado** seja sempre possível de ser operacionalizado. É válido destacar que, em ambos os casos, a **codificação e decodificação de problemas** emergem como ferramentas essenciais do processo como um todo.

Assim, no âmbito da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, compreendemos que a **Exploração de Problemas (EP)**, a **Proposição de Problemas (PP)** e a **Resolução de Problemas (RP)** funcionam como uma unidade, isto é, ambas não são operacionalizadas de forma dissociadas entre si, e, portanto, elas interagem e se integram de tal forma que uma potencializa e impulsiona a outra.

Contudo, a **Exploração de Problemas**, por sua vez, é a ferramenta principal de todo o processo, que tenciona e amplia o caminhar de proposição e resolução de problemas por meio de um trabalho efetivo de idas e vindas, buscando mobilizar, conscientemente, múltiplos fazeres matemáticos, como explorar, problematizar, propor, reescrever/reformular e resolver problemas que podem gerar oportunidades de aprendizagem de ideias-chave de um conceito matemático, bem como envolver os alunos de forma crítico-reflexiva no tratamento de questões sócio-político-culturais.

Nesta discussão, chamamos atenção para o papel da **problematização** no desenvolvimento de um trabalho de exploração de problemas. Em nosso entendimento, a **problematização** é mobilizada por um processo consciente que ocorre entre o **caminhar de proposição de problemas e exploração de problemas**. Por conseguinte, desencadeia um movimento que leva a novos problemas em que, a partir do processo de codificação e descodificação de problemas, dada uma **situação-geradora de problemas**, busca-se levantar, relacionar, acrescentar ou modificar elementos que podem ser matemáticos ou não por meio da escrita e/ou reescrita de um problema, de modo a chegar no problema propriamente formulado ou reescrito/reformulado.

Na perspectiva da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, temos utilizado o termo **situação-geradora de problemas**, provida de uma intencionalidade que, potencialmente, desperta, desafia o interesse do aluno e busca engajá-lo em um processo de exploração-problematização-proposição de problemas, desencadeando, assim, vários problemas, novos problemas ou novas situações-problemas, ampliadas com os sucessivos trabalhos de exploração-problematização realizados, podendo, assim, chegar a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

No trabalho realizado em torno de uma situação-geradora de problemas, a **problematização** antecede a proposição de problemas e, por sua vez, a proposição de problemas antecede a resolução de problemas, tendo a exploração de problemas como ferramenta mediadora entre todos estes processos.

Assim, vale ressaltar que os/as problemas/questões que emergem desse caminhar não são, necessariamente, com viés matemático, isto é, também podem levar a descobertas que despertam preocupações, desejos e anseios dos alunos, promovendo o engajamento de forma crítica, ao anunciarem, por meio de problematizações, questões de natureza sócio-político-culturais, que precisam da intervenção do homem, em prol de uma vida digna para todos.

Nesse cenário, percebemos que os encaminhamentos dados em torno das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas evidenciaram a importância da **problematização** para o processo de exploração, proposição e resolução de problemas, pois a geração de problemas exigia dos professores, como demanda cognitiva o estabelecimento de relações entre os fatos/acontecimentos das Narrativas Matemáticas com ideias matemáticas e questões de cunho sócio-político-cultural. Dessa maneira, os professores traduziam estes fatos de modo a se tornarem problemas que exigiam uma solução, tendo o processo de exploração-problematização-proposição de problemas contínuo e sempre possível de ser operacionalizado durante os três movimentos de discussão das Narrativas Matemáticas.

Acerca da aplicação das **atividades de exploração, proposição, resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas**, esperamos que a experiência vivenciada pelos professores os tenha inspirado e que possam replicá-las em suas aulas de Matemática. Outrossim, almejamos que os professores e futuros professores que se debruçarem na leitura deste trabalho possam se sentir tocados a reproduzir as Narrativas Matemáticas na sua sala de aula de matemática, percebendo diferentes movimentos que impulsionaram a discussão de conceitos e conteúdos matemáticos, bem como o debate envolvendo questões de natureza sócio-político-cultural via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Faz-se aqui necessário, ainda, reiterar que o material que constitui o nosso Produto Educacional, intitulado “**Narrativas Matemáticas: um caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas**”, traz: uma construção teórica sobre a proposta de “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Decodificação de Problemas (EPRCDP)”, como também a Proposição de Problemas nas Pesquisas e na Formação do Professor que ensina Matemática; movimentos didáticos que podem orientar a prática do professor que ensina Matemática no desenvolvimento de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas; apontamentos de conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser discutidos de acordo com alguns fragmentos de cada narrativa; as Narrativas Matemáticas com o acréscimo de novos fragmentos que foram sugeridos pelos professores que, ao nosso ver, ampliam o processo de exploração-problematização-proposição de problemas; e revemos algumas limitações percebidas pelos professores.

Ao longo deste trabalho, temos defendido a relevância do próprio professor formular atividades de exploração, proposição e resolução de problemas para as suas aulas de Matemática. Por sua vez, no **movimento γ** , que visou o refinamento/aprofundamento das

atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, ao solicitarmos que os professores acrescentassem ou modificassem uma “fala” dos personagens das Narrativas Matemáticas, de modo a se tornar um ambiente fértil para o desenvolvimento de um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas, notamos que os docentes apresentaram dificuldades com relação à realização desta tarefa. Em outras palavras, eles ficaram incumbidos de elaborar uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas e explicar o processo de pensamento sobre o que fizeram com relação à dimensão cognitiva e/ou sócio-político-cultural.

Diante do que foi exposto, indicamos como possibilidade de direcionamento para pesquisas futuras analisar quais os efeitos positivos que se pode ter no ensino-aprendizagem de Matemática quando o professor elabora uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas. Para isso, recomendamos que os professores que ensinam Matemática, por meio de um curso de Formação Continuada, sejam desafiados a elaborar atividades de exploração, proposição e resolução de problemas. E que, posteriormente, compartilhem o seu processo de pensamento suscitado na realização desta tarefa, adotando como critérios de avaliação a análise das dimensões conceituais, pedagógicas e sócio-político-culturais que compõem a atividade que foi elaborada, visando mostrar as oportunidades de aprendizagem que podem ser geradas para ambos, ou seja, alunos e professores.

Com este estudo, concluímos que, numa prática pedagógica via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, o trabalho de exploração-problematização-proposição de problemas possibilitou que o problema ou a situação-geradora de problema fosse discutida em diferentes níveis de aprofundamento, indo além e além, com a realização do trabalho de: explorar, problematizar, propor, reescrever/reformular e resolver problemas. Outrossim, na experiência realizada com os professores que ensinam Matemática, notou-se que o processo de exploração de problemas impulsionou uma percepção melhor dos aspectos sócio-político-culturais em torno dos problemas propostos.

REFERÊNCIAS

ABRAMOVICH, S.; CHO, E. K. Using digital technology for mathematical problem posing. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015. p. 71-102.

ABRAMOVICH, S. **Integrating computers and problem posing in mathematics teacher education**. Singapore: World Scientific, 2019.

ABREU, J. D. **Aprendizagem móvel: explorando a matemática por meio de aplicativos educacionais em smartphones**. 2018. 233f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.

ABREU, Jair Dias *et al.* A Proposição de Problemas como recurso potencializador de um caminhar de exploração de problemas: uma experiência com a calculadora gráfica Desmos. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 17, n. 2, p. 231–242, 2024.

ABREU, J. D. **O uso da calculadora gráfica desmos na Exploração-Proposição-Resolução de Problemas: uma experiência na licenciatura em matemática**. 2024. 259f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2024.

ANDRADE, S. Didática de Resolução de Problemas de Matemática no ensino de 1º e 2º graus e no magistério (2º grau). In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EBEM), 4., 1991, Salvador. **Livro de Resumos...** Salvador: UFBA, 1991. p. 50-52.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1998.

ANDRADE, S. **A pesquisa em educação matemática, os pesquisadores e a sala de aula: um fenômeno complexo, múltiplos olhares, um tecer de fios**. 2008. 458f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, USP, São Paulo, SP, 2008.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M.(Orgs). **Perspectivas para Resolução de Problemas**, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-395.

ANDRADE, S. Prefácio In: SILVEIRA, A. A; ASSIS, J. L. **Ensino-aprendizagem de análise combinatória e probabilidade via resolução, exploração e proposição de problemas**. Curitiba: Appris, 2021.

ANDRADE, S. Critical Multicontextual Problem Posing: a Freirean Perspective. In: **The NCTM 2025 Virtual Conference**, NCTM, Estados Unidos, no prelo.

ARAÚJO, A. I. S. **Ensino-aprendizagem de álgebra através da resolução e exploração de**

problemas. 2016. 126f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BAUMAN, Z. **Modernidade Líquida**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2001.

BAUMAN, Z. **Vigilância Líquida: diálogos com David Lyon**. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

BEZERRA, A. S. V. **Conceito e representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas: um trabalho com alunos de graduação**. 2017. 309f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

BOAVIDA, Ana Maria *et al.* **A experiência Matemática no Ensino Básico** – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação – Direção-geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2008.

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Editora Porto, v.12, 1994.

BONOTTO, C.; SANTO, L. D. On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015. p. 103-123.

BRANDÃO, J. D. P. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas**. 2014. 211f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação e dos Desportos. Secretaria do Ensino Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 3º e 4º ciclos (5º a 8º séries)** – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL, CAPES. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Grupo de trabalho Produção Técnica**. Brasília, 2019. Disponível em: <<https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/ENSINO.pdf>>. Acesso em: 13 jan. 2025.

BROWN, S. I.; WALTER, M. I. **The art of problem posing**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1983.

CAI, J. Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion. In: **Theories of Mathematics Education: seeking new frontiers**. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010. p. 251-258.

CAI, Jinfa *et al.* Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015. p. 493-511.

CAI, J.; HWANG, S. Learning to teach through mathematical problem posing: theoretical considerations, methodology, and directions for future research. **International Journal of Educational Research**. v. 102, 2020, p.1-8.

CAI, J. What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. **Éducation et didactique**, v.16, p. 31-50, 2022.

CAI, Jinfa *et al.* Mathematical problem posing: Task variables, processes, and products. In: Fernandez, C. *et al.* (eds.). **Proceedings of the 45th of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. v. 1, p. 119-145, 2022.

CAI, J.; HWANG, S.; MELVILLE, M. Mathematical Problem-Posing Research: Thirty Years of Advances Building on the Publication of “On Mathematical Problem Posing”. In: CAI, J.; STYLIANIDES, G. J.; KENNEY, P. A. **Research Studies on Learning and Teaching of Mathematics, Research in Mathematics Education**. Springer, 2023. p. 01-25.

CARRILLO, J.; CRUZ, J. Problem-Posing and questioning: two tools to help solve problems. In: PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Posing and solving mathematical problems: advances and new perspectives**. Switzerland: Springer, 2016, p. 23-36.

CAVALCANTE, N. I. S. **Formação inicial do professor de matemática: a (in)visibilidade dos saberes docentes**. 2011. 139f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001, p.151-173.

CONNEY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. **Developing an essential understanding of functions: fo teaching mathematics in grades 9-12**. Reston, NCTM, 2010.

CRESPO, S. Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers’ practices. **Educational Studies in Mathematics**, v. 52, n. 3, p. 243–270, 2003.

CRESPO, S.; SINCLAIR, N. What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. **Journal of Mathematics Teacher Education**. v. 11, 2008, p. 395–415.

CRESPO, S. A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.).

Mathematical problem posing: from research to effective practice. New York: Springer, 2015. p. 493-511.

DOMITE, M. C. S. Problem Posing and Problemization in Learning and Teaching Mathematics. **Vhs DVV International**, 2001. Disponível em: <<https://www.dvvinternational.de/en/adult-education-and-development/editions/aed-572001/basiceducation-in-practice/problem-posing-and-problemization>>. Acesso em: 13 jan. 2025.

ELLERTON, N. F. Problem Posing as an Integral Component of the Mathematics Curriculum: A Study with Prospective and Practicing Middle-School Teachers. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing:** from research to effective practice. New York: Springer, 2015. p. 513-543.

ENGLISH, L.; SRIRAMANN, B. Problem solving for the 21st century. In: SRIRAMANN, B.; ENGLISH, L. (Eds.). **Theories of mathematics education:** seeking new frontiers. Heidelberg: Springer, 2010. p. 263-290.

ESQUENTA ECMAT 23/07 - Matemática Pura, Aplicada e Educação Matemática. Vídeo: 2h18min30s. Publicado pelo canal ECMAT IFPB CZ. 23 jul. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=7kkpSW0WxtM>. Acesso em: 13 jan. 2025.

FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Posing and solving mathematical problems:** advances and new perspectives. Switzerland: Springer, 2016.

FERREIRA, A. C. **Metacognição e o desenvolvimento profissional de professores de Matemática:** uma experiência de trabalho colaborativo. 2003. 268f. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2003.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRANGEIRO, O. B. **Ensino e aprendizagem de frações via Exploração-Resolução-Proposição de Problemas.** 2020. 196f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2020.

GUTSTEIN, E. PETERSON, B. (Eds.). **Rethinking Teaching: Social Justice by the Numbers.** Rethinking Schools, 2013.

I CICLO de Seminários GEPEMEUSP: 1º Encontro - Educação Matemática olhares críticos. Vídeo: 1h41min07s. Publicado pelo canal Educação Matemática GEPEMEUSP. 16 set. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=NrulmgzN9h0&t=4565s>. Acesso em: 13 jan. 2025.

JURADO, U. M. La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2013a, Montevideo. **Actas...** Montevideo, Uruguai: SEMUR, 2013a, p. 129-140.

JURADO, U. M. Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady. UNION, **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 34, p. 141–149, jun. 2013b.

JURADO, U. M. Problem Posing: An Overview for Further Progress. In: LILJEDAHN, PETER *et al.* **Problem solving in Mathematics education**. Hamburg, Germany, University of Hamburg, 2016a, p. 31-34.

JURADO, U. M. Creación de problemas. Avances y desafíos en la educación matemática. **REMATEC**, v. 11, n. 21, p. 79-90, 8 nov. 2016b.

JURADO, U. M. La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. In: SEGUNDO CONGRESO INTERNATIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2., 2017, Jáen. **Actas...** Jáen, Espanha, 2017. p. 1-14.

HANSEN, R., HANA, G.M. Problem Posing from a Modelling Perspective. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015. p. 35-46.

KILPATRICK, J. A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In: SILVER, E. A. (Ed.). **Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives**. Erlbaum, 1985. p. 1-16.

KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from? In SCHOENFELD, A. H. (Ed.). **Cognitive science and mathematics education**. NJ: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 123–147.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Campinas, SP: **Zetetiké**, vol. 4, nº 5, 1996.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica: do projeto à implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LESTER, F. Musings about mathematical problem solving: 1970–1994. **Journal of Research in Mathematics Education**. v. 25, 1994, p. 660-675.

LESTER, F.; CAI, J. Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In: FELMER, P; KILPATRICK, J; PEHKONEN, E (Eds.), **Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives**, Switzerland: Springer, 2016. p. 117–136.

LILJEDAHN, Peter *et al.* **Problem solving in Mathematics education**. Hamburg, Germany, University of Hamburg, 2016.

LILJEDAHN, P.; CAI, J. Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. **ZDM – Mathematics Education**, 2021, p. 723–735.

MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas**. 2019. 138f.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Ensino de Sistemas Lineares: uma Proposta Metodológica Utilizando a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas. **Educação Matemática em Revista**, v. 27, n. 77, p. 166-179, 2022.

MARTINS, F. C. **Exploração-proposição-resolução de problemas na licenciatura em matemática**: implicações para a sala de aula. 2024. 248f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2024.

MENDONÇA, M. C. D. **Problematização**: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática. 1993. 307f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, SP, 1993.

MESA: Verdades e Inverdades: Leituras Críticas a partir da Educação Matemática. Vídeo: 2h15min23s. Publicado pelo canal da SEBM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 22 jul. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=nXywRcrNtQE>. Acesso em: 13 jan. 2025.

MILINKOVIĆ, J. Conceptualizing Problem Posing via Transformation. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing**: from research to effective practice. New York: Springer, 2015. p. 47-70.

MINAYO, M.C.S. Trabalho de Campo: contexto de observação, interação e descoberta. In MINAYO, M.C.S. (Org.); DESLANDES, S.F; GOMES, R. **Pesquisa Social**: Teoria, método e criatividade. 29. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

NASCIMENTO, M. A. **Ensino-Aprendizagem de Trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar**. 2014. 219f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's**. Reston, VA: NCTM, 1980.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino – aprendizagem de Matemática através da Resolução de problemas. In: BORBA, M. de C.; BICUDO, M. A. V. (org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema** – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: autêntica editora, 2013.

PIMENTA, S. G. Formação de professores: identidade e saberes da docência. In: PIMENTA, S. G. (org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2007, p. 15-34.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SANTOS, Anderson Oramisio *et al.* As histórias de Júlio César de Mello Souza (Malba Tahan) e a aprendizagem da matemática. **Cadernos da Fucamp**, v. 21, n. 50, p. 60-78, 2022.

SANTOS, E. V. **Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2019. 228f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SANTOS, R. O. **Educação Fiscal nas aulas de matemática, cenários para investigação e exploração de problemas**. 2019. 167f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SCHOENFELD, A. Problem Solving in the United States, 1970-2008: Research and Theory, Practice and Politics. **The International Journal of Mathematics Education**, 39, p. 537-551.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. **Developing understanding in mathematics via problem solving**. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). *New directions for elementary school mathematics*. Reston: NCTM, 1989. p. 31-32.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 301f. Tese de doutorado. PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005.

SILVA, A. P. **Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da resolução de problemas**: um olhar para a sala de aula. 2013. 92f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.

SILVA, L. M. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 2013. 306f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande: UEPB, 2013.

SILVA, V. S. **Proposição e exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de matemática**. 2015. 132f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

SILVA, S. V. P. **Ideias/significados da multiplicação e divisão**: o processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do ensino

fundamental. 2016. 170f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

SILVEIRA, A. A. **Análise Combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas.** 2016. 234f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. 1-21, 01 mai. 2020.

SILVEIRA, A. A.; ASSIS, J. L. **Ensino-aprendizagem de análise combinatória e probabilidade via resolução, exploração e proposição de problemas.** 1. ed. Curitiba: Appris, 2021.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Proposição de Problemas de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 19, n. 01, p. 1-23, 2 jun. 2022.

SILVEIRA, A. A.; ABREU, J. D.; ANDRADE, S. Exploração, Resolução e Proposição de Problemas: um olhar crítico para anúncios de ovos de páscoa. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 14, 2022, **Anais...** Acre, 2022.

SILVEIRA, A. A.; NASCIMENTO, M. A. Não só de solução (sobre)vive o problema: diálogos e construções a luz da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. In: MANRIQUE, A. L.; GROENWALD, C. L. O. (Orgs.). **Anais do IX Congresso Iberoamericano de Educação Matemática.** São Paulo: Akademy, 2023. p. 432-437.

SILVEIRA, A. A.; NASCIMENTO, M. A.; ANDRADE, S. Análise Combinatória via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e Justiça Social. In: PANOSSIAN, M. L.; AMARAL-SCHIO, R. B.; SÁ, L. C. **Perspectivas plurais na Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.** Vitória - ES: Edifes, 2023. p. 131-153.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S.; CAI, J. Abordagens de Proposição de Problemas na formação do professor que ensina Matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 52, p. 1-17, 31 dez. 2024.

SILVER, E. A. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematics**, 14(1), p. 19–28, 1994.

SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. **Educational Studies in Mathematics An International Journal**. New York, v. 82, n. 3, p. 1-7, mar. 2013.

SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice.** New York: Springer, 2015.

SINGER, F. M.; VOICA, C. Is Problem Posing a Tool for Identifying and Developing Mathematical Creativity? *In*: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015. p. 141-174.

SOUSA, A. B. F. **Pesquisas em proposição de problemas: convergências e potencialidades**. 2021. 88f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2021.

SOUSA, José Jorge de *et al.* Identidade e poder: reflexões sobre gênero e sexualidade na Educação Matemática a partir da Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas. **Perspectivas em Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 17, n. 47, p. 1-21, 18 out. 2024.

STANIC, G.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *In*: R.I. CHARLES; E.A. SILVER (Eds.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**, USA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989. p. 1-22.

TÖRNER, G.; SCHOENFELD, A. H.; REISS, K. M. (Eds.). **Problem solving around the world: summing up the state of the art**. Dordrecht: Springer, 2007. *ZDM Mathematics Education*, v. 39, n. 5-6, p. 353-563, 2007.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação na sala de aula**. Tradução: Paulo H. Colenese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZHANG, H.; CAI, J. Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching case. **ZDM – Mathematics Education**, 2021, p. 961–973.

ZWIERNIK, L.; DALCIN, A. Lugares Matemáticos em Contos de Malba Tahan. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, Juiz de Fora, v. 4, n. 1, p. 1-20, jan/dez.