



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊN-
CIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DOUTORADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NARRATIVAS MATEMÁTICAS: UM CAMINHAR DE
EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS



2025

Adriano Alves da Silveira
Silvanio de Andrade

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

NARRATIVAS MATEMÁTICAS: UM CAMINHAR DE EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB

2025

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S587e Silveira, Adriano Alves da.
Narrativas Matemáticas: um caminhar de exploração,
proposição e resolução de problemas [manuscrito] / Adriano
Alves da Silveira. - 2025.
40 f. : il. color.

Digitado.

Produto Educacional apresentado ao Doutorado em Ensino
de Ciências e Educação Matemática/UEPB

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento
de Matemática - CCT".

1. Ensino-Aprendizagem de Matemática. 2. Exploração-
Proposição-Resolução de Problemas. 3. Narrativas
Matemáticas. 4. Formação de Professores. I. Título

21. ed. CDD 371.36

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

NARRATIVAS MATEMÁTICAS: UM CAMINHAR DE EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Produto Educacional vinculado à tese: Narrativas Matemáticas: um caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas

Área de concentração: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovado em: 26/02/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvanio de Andrade
(Orientador) – PPGECEM/UEPB

Documento assinado digitalmente
 **SILVANO DE ANDRADE**
Data: 30/04/2025 14:35:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos
(Examinador externo) – USP

Documento assinado digitalmente
 **VINICIO DE MACEDO SANTOS**
Data: 02/05/2025 00:17:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira
(Examinador externo) – IFG

Documento assinado digitalmente
 **NILTON CEZAR FERREIRA**
Data: 24/04/2025 10:19:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Cláudio Rejane da Silva Dantas
(Examinador interno) – PPGECEM/UEPB

Documento assinado digitalmente
 **CLAUDIO REJANE DA SILVA DANTAS**
Data: 23/04/2025 09:11:13-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Carlos Leal Júnior
(Examinador externo) – IFSP

Documento assinado digitalmente
 **LUIZ CARLOS LEAL JUNIOR**
Data: 25/04/2025 17:39:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

RESUMO

Este Produto Educacional (PE) tem como objetivo analisar como Narrativas Matemáticas podem impulsionar o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas na Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática. O respectivo PE é resultante da nossa pesquisa de doutorado, na qual trabalhamos atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas em um curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. O material que constitui o nosso Produto Educacional traz os seguintes elementos: uma construção teórica sobre a proposta de “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP)”; a Proposição de Problemas nas Pesquisas e na formação do professor que ensina Matemática; movimentos didáticos que podem orientar a prática do professor que ensina Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas; as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas; e apontamentos de conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser discutidos de acordo com alguns fragmentos de cada Narrativa Matemática. Esperamos que os professores e futuros professores que se debruçarem sobre a leitura do nosso PE e da nossa pesquisa de doutorado sintam-se tocados a replicar as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas na sala de aula de matemática, percebendo diferentes movimentos didáticos que impulsionaram a discussão de conceitos e conteúdos matemáticos, bem como o debate envolvendo questões de natureza sócio-político-cultural via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Palavras-chave: Narrativas Matemáticas; Formação de Professores; Sala de aula; Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| 1 APRESENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL..... | 5 |
| 2 EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA..... | 7 |
| 2.1 Exploração-Proposição-Resolução de Problemas em sala de aula..... | 7 |
| 2.2 Problema matemático, situação-problema e situação-geradora de problemas..... | 8 |
| 2.3 A Resolução de Problemas (RP) e a Proposição de Problemas (PP) pensadas a partir da proposta de Exploração de Problemas..... | 9 |
| 2.4 Problematização no processo de exploração de problemas..... | 13 |
| 2.5 Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC) e Justiça Social..... | 14 |
| 2.6 A Proposição de Problemas nas pesquisas e na formação do professor..... | 16 |
| 3 ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO FORMATO DE NARRATIVAS MATEMÁTICAS..... | 20 |
| 3.1 Movimentos didáticos para a sala de aula de matemática..... | 20 |
| 3.2 Jogo de Sueca..... | 24 |
| 3.3 Um “exame de problemas”..... | 26 |
| 3.4 Mercado de problemas..... | 29 |
| 3.5 A crise hídrica – um problema mundial..... | 32 |
| 3.6 Qual é o preço justo?..... | 34 |
| 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 37 |
| REFERÊNCIAS..... | 38 |

1 APRESENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional resultante da nossa pesquisa de doutorado, intitulado “**Narrativas Matemáticas: um caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas**”, consiste em **atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas** que, visa alcançar a Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, adentrar os cursos de Licenciatura em Matemática, como também podem ser adaptadas para serem discutidas no chão da escola da Educação Básica.

As atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas foram discutidas em um curso de Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática, intitulado “**Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social**”.

Com isso, ancorado a proposta de “**Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP)**”, o nosso Produto Educacional teve como objetivo analisar como Narrativas Matemáticas podem impulsionar o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas na Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática. Entendemos ainda, que as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas podem ser implementadas em outros contextos, tais como nos cursos de Licenciatura em Matemática e nas salas de aula de matemática da Educação Básica.

No decorrer do texto, apresentamos alguns movimentos didáticos para a sala de aula de matemática, as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas e conceitos e conteúdos matemáticos que podem ser abordados a partir de alguns enredos que compõem essas atividades.

A proposta de aplicação das Narrativas Matemáticas que elaboramos contempla diferentes movimentos, na qual acreditamos que possam impulsionar o processo de exploração, proposição e resolução de problemas, no âmbito da sala de aula de matemática.

Contudo, somos conscientes de que os direcionamentos tomados no âmbito das discussões e reflexões podem desencadear a necessidade de novos movimentos de exploração das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, tal processo é possível, uma vez que a proposta de “**Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP)**” se destaca por ser aberta, embora não solta, sendo assim, possível de ser operacionalizada durante os vários desdobramentos de um episódio de sala de aula.

Amparados à proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Andrade, 1998, 2017; Silveira, Andrade, 2020, 2022; Silveira, Abreu, Andrade, 2022; Silveira, Nascimento, Andrade, 2023), elencamos duas abordagens que contemplam diferentes olhares para as pesquisas e práticas em Resolução de Problemas e emergem como pontos marcantes da nossa pesquisa e, consequentemente, são vinculadas ao nosso Produto Educacional, bem como devem ser o foco da discussão durante a sua implementação. Veja a seguir:

Neste trabalho sugerimos a Proposição de Problemas como ponto de partida de uma aula de Matemática por meio de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.

As atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas promovem discussões que contemplam a dimensão sócio-político-cultural, visto que este enfoque continua recebendo pouca atenção nas pesquisas e práticas em Resolução de Problemas.

Por fim, destacamos que as discussões e reflexões desencadeadas com a aplicação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas pode contribuir para que os envolvidos (professores de Matemática em Formação Inicial e Continuada, pesquisadores em Educação Matemática e estudantes da Educação Básica) percebam o impacto de ir além da resolução e solução do problema, ao trabalhar com a exploração e a proposição de problemas em perspectivas múltiplas, enfocando a Proposição de Problemas como o ponto de partida e a dimensão sócio-político-cultural.

2 EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

2.1 Exploração-Proposição-Resolução de Problemas em sala de aula

Adotamos neste trabalho a proposta de Andrade (1998, 2017), originalmente, intitulada “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas (RECDP)”, que atualmente vem sendo denominada “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP)”.



Essa proposta também assume que o ensino de Matemática começa sempre com um problema ou uma situação-problema. “Os estudantes, através de um processo de codificação e descodificação, aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito ou ideia matemática explorando, resolvendo e propondo problemas ou situações-problema” (Andrade, 2017, p. 357).

Por sua vez, os conceitos ou ideias nunca são formados apenas a partir de um único problema ou situação-problema, mas carecem de um conjunto de problemas ou situações-problema, além disso, a exploração, a proposição e a resolução de um problema se desenvolve a partir do movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R)**, no qual o enunciado do problema ou situação-problema traz sempre algo novo a ser explorado no contexto de uma sala de aula e o planejamento do trabalho é sempre aberto, não fechado, embora não solto, possibilitando ganhar vários formatos e explorações ao longo do trabalho desenvolvido entre aluno, aluno-aluno, aluno-professor etc (*Ibid.*, 2017).

Por fim, Andrade (2017) enfatiza um novo modelo em que a exploração e a resolução de um problema são desenvolvidas a partir de um movimento aberto, não fechado, embora não solto, denominado de **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R)**. Ele explica que, numa aplicação prática desse modelo, inicialmente, é dado ou proposto um problema ou situação-problema, que pode partir tanto do professor quanto dos próprios alunos, esses mesmos alunos realizarão um trabalho sobre ele e, juntos, professor e alunos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e sínteses, chegando, desse modo, possivelmente, à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

2.2 Problema matemático, situação-problema e situação-geradora de problemas

Andrade (2017) ressalta que, na sua proposta, o **Problema** é entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que:

“a) O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução; b) O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; c) Se introduz ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo” (Andrade, 2017, p. 364).

Dentre as compreensões de um problema matemático apresentadas por Andrade (2017), ele chama atenção para a última, explicando que, no primeiro momento, não estamos interessados no fato de que o aluno resolva a tarefa ou a questão proposta, mas é importante que a situação ou tarefa proposta possa desencadear no aluno a realização de algum trabalho efetivo, que, num processo de reflexão e síntese, com a mediação-refutação do professor e/ou dos próprios alunos, os estudantes possam, então, ser bem-sucedidos na resolução e solução da tarefa proposta e ir, inclusive, além dela.

Percebe-se que a compreensão do que seja uma **situação-problema** pode diferir de acordo com a abordagem metodológica de Resolução de Problemas. Com relação à proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, assumimos a ideia de situação-problema apresentada por Martins (2024).

A **situação-problema** não é, necessariamente, uma pergunta ou um questionamento a ser respondido, mas um contexto que desperta a curiosidade e o interesse do aluno, o que o estimula a explorar e, a partir daí, propor o seu problema. As situações-problemas são atividades que em seu processo de problematização desencadeiam um problema ou um conjunto de problemas. Dessa forma, consideramos que o problema emerge da situação-problema, sendo ela um ponto de partida que potencializa a Proposição de Problemas, via Exploração de Problemas (Martins, 2024, p. 18, grifo nosso).

Na perspectiva da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, temos utilizado o termo **situação-geradora de problemas**, provida de uma intencionalidade que, potencialmente, desperta, desafia o interesse do aluno e busca engajá-lo em um processo de exploração-problematização-proposição de problemas, desencadeando, assim, vários problemas, novos problemas ou novas situações-problemas, ampliadas com os sucessivos trabalhos de exploração-problematização realizados, podendo, assim, chegar a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.



Portanto, vale ressaltar que os/as problemas/questões que emergem desse caminhar não são, necessariamente, com viés matemático, isto é, também podem levar a descobertas que despertam preocupações, desejos e anseios dos alunos, promovendo o engajamento de forma crítica, ao anunciarem, por meio de problematizações, questões de natureza sócio-político-cultural, que precisam da intervenção do homem, em prol de uma vida digna para todos.

2.3 A Resolução de Problemas (RP) e a Proposição de Problemas (PP) pensadas a partir da proposta de Exploração de Problemas

No âmbito da proposta de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, temos utilizado o hífen conscientemente, compreendendo que há conexões entre a **Exploração de Problemas (EP)**, a **Proposição de Problemas (PP)** e a **Resolução de Problemas (RP)**, o que as promove a serem operadas como uma unidade, isto é, ao passo que a Exploração de Problemas potencializa o caminhar de proposição de problema, a Proposição de Problemas impulsiona e avança o processo de exploração de problemas, e ambas, ampliam e auxiliam no processo de resolução de problemas, bem como no aprofundamento da situação-problema. Com isso, é importante ressaltar que, no âmbito da proposta, a Exploração de Problemas é percebida como o carro-chefe, visto que agrega ao trabalho de proposição e resolução de problemas, possibilitando que o movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado** se mantenha sempre possível de ser operacionalizado.

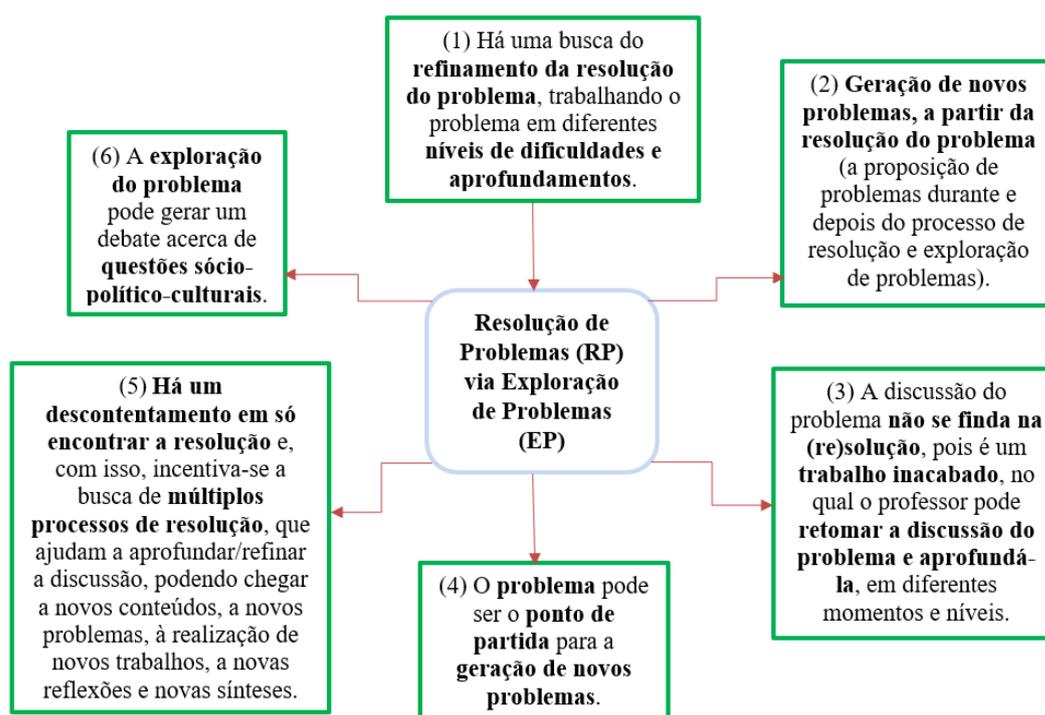
Nesse contexto, diante da experiência vivenciada com o tema Resolução e Exploração de Problemas, Andrade (2017) enfatiza o caminhar para uma experiência ligeiramente modificada que hoje denomina de Exploração, Resolução (exploração), Proposição (exploração) e Codificação - Decodificação de Problemas (ERPCDP). Conforme o autor, a nova denominação permite uma melhor compreensão e tomada de consciência do processo como um todo. Ele também destaca que colocar

o termo Resolução (exploração) implica numa tomada de consciência, percebendo a resolução como parte integrante e resultante de um caminhar feito num processo de exploração de problemas. Já o termo Proposição (exploração) implica numa tomada de consciência ao perceber a proposição também como parte impactante, integrante e resultante de um caminhar realizado ao longo de um processo de exploração de problemas.

Uma sala de aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é marcada por um descontentamento resultante de uma prática que não se limita à busca da solução do problema. Esse descontentamento abrange o professor, quando ele intervém e fomenta as discussões, propiciando ao aluno ir cada vez mais além, durante o processo de codificação e decodificação do problema. Além disso, esse descontentamento toca o aluno, que se sente desafiado e motivado a mergulhar cada vez mais profundo, a ir em busca do desconhecido que o leve a descobertas, fruto de um olhar amplo para um caminhar de resolução de problemas, que pode contemplar diferentes momentos/fases de exploração e proposições de problemas.

No movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado**, a solução do problema não pode ser admitida como o fim, já que, no caso do problema proposto pelo aluno, pode haver uma lacuna entre a solução e o enunciado do problema, carecendo, assim, de uma reescrita/reformulação. Dessa forma, a solução do problema pode ser o ponto de partida para a geração de novos problemas, desencadeados pelo processo de exploração de problemas, que se intensifica à medida que os alunos tomam a situação-problema para si, culminando em novos conteúdos e mantendo o movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado** vivo e possível de operacionalizar. Desse modo, cabe ao professor perceber o momento em que os alunos estão satisfeitos, e as sínteses e reflexões geradas por meio dos trabalhos realizados em torno da situação-problema possibilitam apresentar um novo conceito matemático, para finalizar, em alguns casos parcialmente, a discussão.

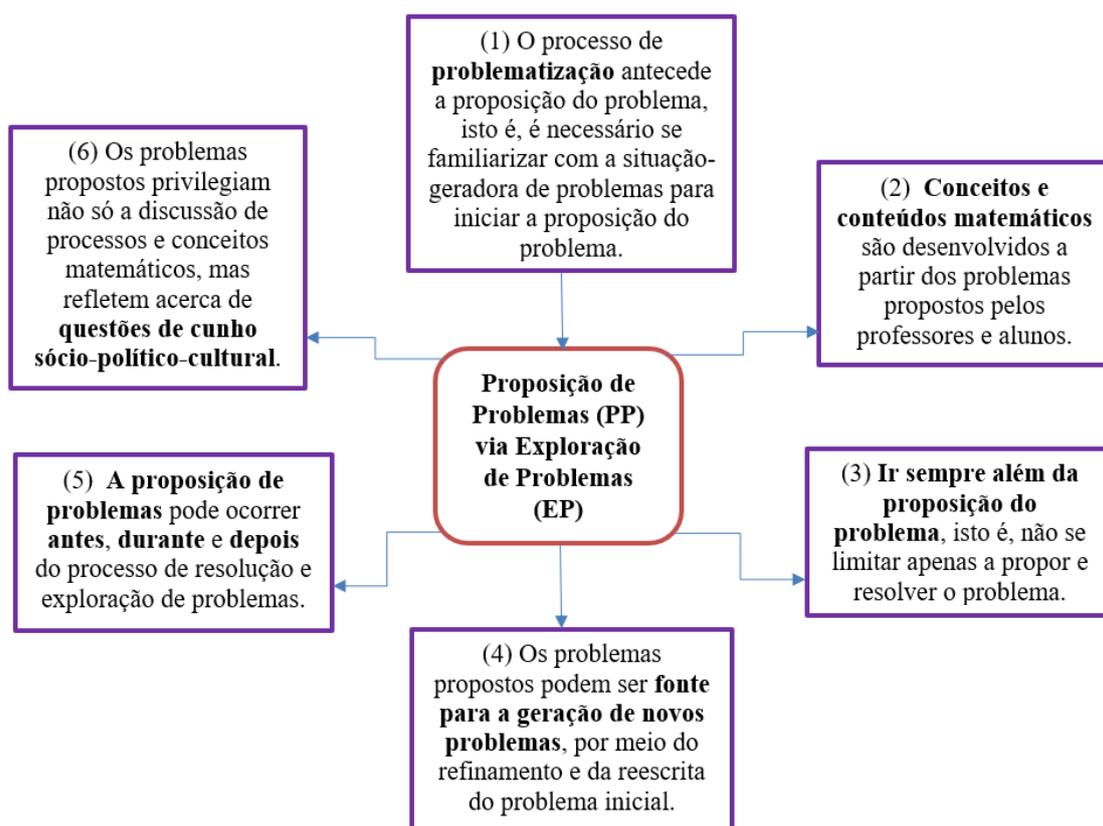
Nesse caminhar, percebe-se que, para trabalhar a **Resolução de Problemas (RP) via Exploração de Problemas (EP)**, é necessário incorporar alguns movimentos didáticos, dentre eles, destacamos:



Nesse contexto, a **Resolução de Problemas via Exploração de Problemas** é concebida como uma ferramenta que ocorre entre e no processo de exploração e proposição de problemas, que aprofunda a discussão por meio do trabalho efetivo em torno do problema, que ora é trabalhado em diferentes níveis de dificuldades, ora a (re)solução pode ser fonte para a geração de novos problemas, como também a exploração do problema pode gerar um debate que contempla questões de cunho sócio-político-cultural.



A Resolução de Problemas pensada a partir da Exploração de Problemas não se contenta apenas com a solução. O mesmo ocorre com a Proposição de Problemas. Ou seja, não basta apenas propor e resolver o problema, mas explorar os possíveis caminhos que possibilitem apreender a situação como um todo. Desse modo, em algum momento a resolução e a solução dos problemas possibilitam avançar, inclusive, com o surgimento de novos problemas que possibilitem avançar cada vez mais. O movimento didático de ir além da proposição e a resolução de problemas, desencadeada no processo de exploração de problemas, ora leva a um problema, ora à resolução e à solução, ora a uma leitura de mundo a partir do surgimento de questões de cunho sócio-político-cultural, ora a um conceito matemático. Percebe-se que, para trabalhar a **Proposição de Problemas (PP) via Exploração de Problemas (EP)**, adota-se alguns movimentos didáticos, dentre eles, enfatizamos:



A **Proposição de Problemas via Exploração de Problemas**, é concebida como uma mola propulsora que expande o processo de resolução e exploração de problemas ao ser promovida por meio de sucessivos trabalhos contínuos e inacabados, como problematizações, refinamentos e reescrita de problemas, e (re)soluções, que são desencadeados pelo movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado**.



A Proposição de Problemas aparece como um dos avanços das pesquisas e práticas de Resolução de Problemas, e aqui é pensada a partir da Exploração de Problemas, ou seja, não se contenta em apenas propor e resolver o problema, mas é potencializado um movimento de problematização que permite ir cada vez mais longe, ir cada vez mais profundo. O limite é não ter limite, e sempre ir para onde as discussões nos levam, a partir de uma prática aberta e intencionalizada.

O que de fato ocorre é que uma aula de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é desenvolvida por meio de um movimento consciente de idas e vindas e/ou começos e recomeços, com a proposição de problemas ora fazendo parte do processo de problematização, ora qualificando o caminhar de exploração de problemas.

Assim, a proposição de problemas pode ocorrer tanto **antes** como **durante** e **depois** do processo de resolução e exploração de problemas. Contudo, o ideal é que a proposição de problemas seja sempre o ponto de partida de todo o processo de resolução e exploração de problemas (Andrade, 2017).

Sobre isso, Silveira e Andrade (2022) explicam que a proposição de problemas ocorre **antes** do processo de resolução e exploração de problemas, quando o foco principal não é a solução, e sim a proposição de novos problemas, tomando como ponto de partida alguma situação que tenha ligação com a Matemática ou com alguma experiência vivenciada pelo aluno. Desse modo, em algum momento os problemas propostos serão resolvidos. De outra forma, a proposição de problemas ocorre **durante** o processo de resolução e exploração de problemas, quando, a partir de um problema, são formulados e explorados novos problemas, tanto pelo professor como pelos alunos. Ao fim, podem-se fornecer *insights* ao solucionador, possibilitando a solução do problema inicial, como também potencializam e aprofundam o conceito matemático que está sendo construído. Ressaltamos ainda que a proposição de problemas pode ocorrer **depois** do processo de resolução e exploração de problemas, quando a (re)solução de um problema impulsiona um processo de reflexões e sínteses, gerando novos conteúdos e problemas em nível mais avançado ou não e provocando, assim, uma aprendizagem com compreensão.

Deste modo, dizemos que a proposição de problemas, pode ocorrer entre a resolução e a exploração de problemas, uma vez que o processo de resolução de um problema pode elucidar novas viagens que caminhar de exploração de problemas estava sinalizando. Por sua vez, a proposição de problemas transpõe todo processo de exploração de problemas, o qualificando e instrumentalizando-o, de modo a permitir que o movimento **Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado**, seja sempre possível de ser operacionalizado. Vale ressaltar que em ambos os casos, a codificação e descodificação de problemas emergem como ferramentas essenciais do processo como um todo.

Por fim, reforçamos que, no âmbito da proposta de **Exploração, Proposição e Resolução de Problemas**, compreendemos que a **Exploração de problemas EP**, a **Proposição de Problemas PP** e a **Resolução de Problemas RP** funcionam como uma unidade, isto é, ambas não são operacionalizadas de forma dissociadas entre si, e, portanto, elas interagem e se integram de tal forma que uma potencializa e impulsiona a outra. Contudo, assumimos a exploração de problemas como ferramenta principal de um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

2.4 Problematização no processo de exploração de problemas

Na sua proposta, Andrade (2017) destaca que a proposição de problemas, na sala de aula, é percebida como uma ferramenta de problematização consciente que impulsiona e avança tanto o processo da resolução como o da exploração do problema.

Com isso, percebe-se que o processo de problematização surge como uma alavanca, que faz com que o trabalho de exploração de problemas progrida. Nesse contexto, destacamos que “a problematização baseia-se em perguntas geradoras, feitas pelos alunos ou pelo professor, em processos que levam o aluno a se envolver com novos problemas e, portanto, à realização de novos trabalhos” (Andrade, 1998, p. 30). De modo geral, percebe-se, que “[...] essa problematização é provocada apenas pelo professor, principalmente nos casos em que o processo emperra. A arte do professor consiste em fazer nascer perguntas-problema ou situações-problema” (*Ibid*, 1998, p. 30).

Ampliando essa discussão, nos apoiaremos nas ideias da pesquisadora Domite (2001, n.p, tradução nossa)¹, que nos diz que “problematização é um movimento cognitivo, ainda não claramente delineado, feito para fazer perguntas e encontrar respostas sobre o que se espera que evolua para um problema”. A autora percebe o processo de problematização como ponto de partida para a proposição de problemas. Em convergência a esta perspectiva, Andrade (1998, p. 30) ressalta que “a problematização é o caminho para se chegar ao problema que, se bem formulado, pode desencadear, a partir do movimento P-T-RS, a construção de novos conhecimentos matemáticos”.

No processo de refletir sobre seu próprio fazer ou sobre o seu pensar, em um trabalho de problematização, Mendonça (1993) explica que,

[...] a **problematização** é o germe e a mola do conhecimento, pois este é sempre resultado de um diálogo com o próprio pensamento, com o outro e com o objeto a conhecer e, uma vez formulado o problema, entendemos que será dado a ele um **encaminhamento** e não uma solução definitiva [...] (Mendonça, 1993, p. 87, grifos da autora).

Por fim, destacamos que, no trabalho realizado em torno de uma situação-geradora de problemas, a problematização antecede a proposição de problemas e, por sua vez, a proposição de problemas

antecede a resolução de problemas, tendo a exploração de problemas como ferramenta mediadora entre todos estes processos.

2.5 Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC) e Justiça Social

A abordagem de Resolução de Problemas, operacionalizada no cotidiano de sala de aula na ótica de Andrade (1998, 2017), é pensada numa perspectiva da Educação Matemática Crítica. Com isso, algumas pesquisas desenvolvidas pelo **Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP)** com esse enfoque têm usado os termos: **Exploração Multicontextual Crítica de Problemas (EMC)** ou **Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC)**.

Nesse sentido, a Exploração, a Proposição, a Resolução de Problemas, além de serem assumidas como uma metodologia de ensino, são tratadas à luz de uma perspectiva de Educação Progressista, Crítica e Libertadora, de modo que não é olhada apenas no nível de processos e conceitos matemáticos, mas, também, no nível de questões de natureza sócio-político-cultural (Andrade, 2017). Assim,

Essa proposta metodológica, voltada num primeiro momento, para o ensino de matemática, em sua dinâmica, apresenta o conhecimento matemático num diálogo contínuo com os contextos sócio-político-culturais, ou seja, compreende que a Matemática não é um objeto de conhecimento distante das dores e dos sabores das vidas dos envolvidos (professores, estudantes, pais, mães, entre outros) (Silveira; Nascimento, 2023, p. 435).

Silveira, Nascimento e Andrade (2023) argumentam que trabalhar com a Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas de Matemática em sala de aula é,

[...] interrogar as familiaridades do fazer matemático e das práticas cotidianas, surpreender, desarmar, perturbar os discursos ditos verdadeiros, absolutos e hegemônicos. É introduzir as perturbações no interior do debate, problematizando as práticas, desarticulando as familiaridades aceitas, com análises densas e profundas sobre o presente ao educar com a matemática, na busca de Práticas Emancipatórias, de Desassujeitamento (Silveira; Nascimento; Andrade, 2023, p. 143).

Desse modo, um episódio de sala de aula à luz desta proposta possibilita uma discussão que abrange não apenas um olhar para a própria Matemática (dimensão cognitiva/internalista), mas, também, um olhar pela e/ou além da Matemática (dimensão externalista). Sobre estas distintas abordagens, Domite (2001) explica que,

[...] uma **abordagem internalista** que vê a matemática como uma forma explicativa clássica composta de uma série de declarações ligadas a conectivos lógicos enraizados na própria matemática, uma **abordagem externalista** à matemática fornece modelos matemáticos e estruturas conceituais que são gerados a partir de fenômenos externos aos sistemas simbólicos do campo. A grosso modo, uma visão externalista reconhece os aspectos socioculturais como os principais fatores da ação pedagógica (Domite, 2001, n.p, tradução nossa, grifos nosso).²

O estudo de Gutstein e Peterson (2013) trata-se de uma proposta de ensino que enfoca em vermos a Matemática como uma ferramenta para ajudar a tornar o mundo mais igual e justo, isto é, os autores sugerem o uso da Matemática para defender nossos direitos e perceber as injustiças ao nosso redor, por conseguinte, defendem o ensino de Matemática numa perspectiva crítica, permitindo aos alunos entenderem mais claramente suas vidas e seu entorno. Com isso, pontuamos que, neste estudo, desenvolveremos a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Andrade, 1998; 2017), com foco em uma abordagem de Matemática para Justiça Social (Gutstein; Peterson, 2013), o que nos tem levado a usarmos a denominação **“Exploração-Proposição-Resolução e Resolução de Problemas para Justiça Social”**.

Gutstein e Peterson (2013) apresentam benefícios potenciais dessa abordagem de Justiça Social para a Matemática, a saber,

Os alunos podem reconhecer o poder da matemática como uma ferramenta analítica essencial para compreender e potencialmente mudar o mundo, em vez de meramente considerar a matemática como uma coleção de regras desconexas a serem memorizadas e regurgitadas remotamente; Os alunos podem aprofundar sua compreensão sobre importantes questões sociais, como racismo e sexismo, assim como ecologia e classe social; Os alunos podem conectar a matemática com suas próprias histórias culturais e comunitárias e pode apreciar as contribuições que várias culturas e povos fizeram para matemática; Os alunos podem compreender seu próprio poder como cidadãos ativos na construção de uma sociedade democrática e se equipar para desempenhar um papel mais ativo nessa sociedade; Os alunos podem ficar mais motivados para aprender uma matemática importante (Gutstein; Peterson, 2013, p. 2, tradução nossa).³

Nesse sentido, a nossa responsabilidade, enquanto educadores matemáticos, consiste em preparar professores que deem conta da complexidade e multicontextualidade da sala de aula de Matemática, em direção às questões de justiça social que emergem nos dilemas da própria prática e do cotidiano escolar. Esse tipo de abordagem em sala de aula impulsiona a compreensão dos alunos sobre a sociedade e os prepara para ser participantes críticos e ativos em uma democracia (Gutstein; Peterson, 2013). Os alunos que experenciam/vivenciam uma aula de Matemática no contexto da Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas tem a oportunidade de,

[...] explorarem/proporem/resolverem problemas refletindo sobre o conhecimento matemático presente, bem como o diálogo desse conhecimento com outros que não estão necessariamente literalmente presentes no problema, mas são fundamentais para o desvelamento das injustiças sociais (Silveira; Nascimento, 2023, p. 436).

Desse modo, uma aula de Matemática, nessa perspectiva, visa aprofundar a compreensão dos indivíduos sobre a sociedade e prepará-los para serem participantes críticos e ativos, possibilitando-os fazerem intervenções em seu cotidiano. Esse tipo de abordagem nos permite compreender o nível de criticidade dos alunos e ajudá-los a aprofundar os conhecimentos, por meio do debate coletivo, impulsionado pela metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Nela, a Matemática não é problematizada apenas com o foco em determinados conteúdos e conceitos matemáticos, uma vez que ela pode e deve ser usada para debater problemas de cunho social e desenvolver a criticidade dos alunos, podendo ambas as temáticas ter o mesmo nível de importância dentro da situação-problema (Silveira; Abreu; Andrade, 2022).

A proposta de “**Exploração-Proposição-Resolução Multicontextual Crítica de Problemas (EPRMC)**” problematiza a multicontextualidade e cotidiano da sala de aula de matemática, uma vez que atende às questões que envolveram múltiplos contextos, ampliando, assim, a compreensão da situação-problema como um todo, a partir de um olhar internalista e externalista para o conhecimento matemático. Portanto, nosso interesse é desenvolver uma abordagem que dê conta de questões que podem emergir de uma sala real de matemática, como por exemplo, temáticas como consumismo e capitalismo (Silveira; Abreu; Andrade, 2022); questões de gênero (Silveira; Nascimento; Andrade, 2023). Tais discussões são fruto de múltiplos olhares para o movimento não-linear de um cotidiano de sala de aula que é tocado por tudo que, de fato, ocorre dentro e fora do chão da escola da Educação Básica.

As questões de natureza sócio-político-cultural revelam a necessidade de cada cidadão refletir com/sem Matemática acerca de soluções e alternativas que visam combater desafios advindos da interferência do homem em diferentes aspectos da sociedade. Nesse contexto, quando nos propomos ir além do olhar internalista para o conhecimento matemático, assumimos um movimento didático que tenciona a importância do papel ativo dos estudantes na construção de uma sociedade com equidade social.

Assim, a Matemática utilizada como um meio de identificar e combater injustiças sociais promove, no estudante, a ascensão à cidadania, uma vez que seu engajamento crítico resulta na transformação do contexto social, político e cultural que ele está inserido.

Portanto, idealizar uma aula de Matemática que verse sobre temas sociais, políticos e culturais decorre de uma tomada de consciência, oriunda da imersão do professor no cotidiano de sala de aula. Nessa concepção, a Matemática aparece como uma ferramenta para desvendar coisas do mundo, conseqüentemente, garante ao cidadão ser agente ativo e crítico de uma realidade que precisa ser transformada, devido à existência de injustiças e desigualdades que assolam a nossa sociedade.

2.6 A Proposição de Problemas nas pesquisas e na formação do professor

“A Resolução de problemas e a proposição de problemas têm sido de interesse da comunidade de educação matemática” (Liljedahl; Cai, 2021, p. 723, tradução nossa).⁴ Por conseguinte, os estudos de Resolução de Problemas têm se intensificado nas últimas décadas, se consolidando, concomitantemente, como campo de pesquisa em Educação Matemática. Nesse percurso, as pesquisas e práticas de Resolução de Problemas avançaram significativamente. O mesmo não ocorreu com a Proposição de Problemas, visto que esta ainda tem recebido menos atenção nos currículos de Matemática e nas pesquisas em Educação Matemática (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Crespo, 2015; Milinkovic, 2015; Jurado, 2016; Cai, Hwang, 2020).

Contudo, para avançar na pesquisa e na prática de Resolução de Problemas, as pesquisas sugeriram diferentes abordagens, como a Proposição de Problemas (Silver, 1994; Singer, Ellerton, Cai, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Jurado, 2016; Cai, Hwang, 2020; Liljedahl, Cai, 2021), já que “uma maneira de envolver os alunos na resolução de problemas é fazer com que eles formulem e resolvam seus próprios problemas” (Kilpatrick, 1985, p. 12, tradução nossa).⁵

Embora nos últimos anos os pesquisadores começaram a prestar mais atenção na Proposição de Problemas como temática de pesquisa e como uma forma de ensinar e aprender Matemática (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Jurado, 2013a, 2013b, 2017; Crespo, 2015; Milinkovic, 2015; Singer, Ellerton, Cai, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Cai, Hwang, 2020; Liljedahl, Cai, 2021; Cai, 2022), ainda há muito o que avançar para compreender o impacto de uma aula de Matemática que coloca a responsabilidade do problema advinda do aluno, como também do professor.

Percebe-se que a literatura faz referência aos estudos de Brown e Walter (1983), Kilpatrick (1987) e Silver (1994) pelo fato desses autores serem pioneiros, uma vez que situam a Proposição de Problemas como um tema de pesquisa no campo da Educação Matemática, sugerindo algumas estratégias pedagógicas para ajudar a propor problemas, de modo a apresentar a proposição de problema como um meio de ensinar Matemática, apontando algumas razões potenciais para se pensar em uma aula na perspectiva da Proposição de Problemas. Assim, eles chamam atenção a respeito da importância de compreender quais processos cognitivos são mobilizados quando os alunos propõem seus próprios problemas e sugerem questões ricas para futuras pesquisas de Proposição de Problemas.

Nota-se que, após décadas de estudos sobre Proposição de Problemas, sendo intensificado, principalmente, na metade da última década, as preocupações apontadas por esses pesquisadores ainda permanecem intactas e dignas de aprofundamento. Esses estudos tiveram o papel de fomentar a comunidade de Educação Matemática que, timidamente, começaram a perceber que a habilidade de propor problemas merecia mais atenção nas pesquisas e práticas de sala de aula.

Assim, a Proposição de Problemas não deve ser vista apenas como um objetivo de ensino, mas também como um meio de ensinar Matemática. Nesse sentido, a experiência de descobrir e criar os próprios problemas matemáticos deve fazer parte da formação de cada aluno (Kilpatrick, 1987).

Jurado (2013a) aponta diferentes potencialidades da Proposição de Problemas com relação à **aprendizagem** de Matemática, ou seja, quando o aluno propõe seus próprios problemas, contribuindo para,

[...] motivar ainda mais o estudo; fortalecer as capacidades de resolução de problemas, fazer perguntas, identificar problemas e investigar; ampliar a visão de matemática (muitas vezes, eles criam problemas cujas soluções requerem conhecimentos matemáticos que ainda não possuem); adquirir uma formação matemática mais sólida (são experiências que vão além de problemas do tipo operacional); ver aspectos matemáticos do ambiente que os rodeia; fazer conexões com outros campos do conhecimento; desenvolve a criatividade; e para fortalecer a autoestima do aluno (suas dúvidas e observações são levadas em consideração e ele verifica que pode propor problemas; aliás, o papel do professor é muito importante) (Jurado, 2013a, p. 130-131, tradução nossa).⁶

Em meados da década de 1990, os pesquisadores em Educação Matemática começam a prestar atenção na proposição de problemas advinda dos alunos, trazendo um olhar para a relação entre habilidades de resolução e proposição de problemas. Nos anos 2000, os pesquisadores começaram a se concentrar na proposição de problemas advinda do professor e como isso possibilita oportunidades de aprendizagem para os alunos (Crespo, 2015).

Jurado (2013a) descreve diversas razões didáticas que evidenciam o potencial da Proposição de Problemas no ensino, ou seja, quando o professor propõe seus próprios problemas, contribui para,

[...] propor problemas próximos das motivações dos alunos e aos contextos em que vivem; propor uma sequência de problemas de dificuldade gradual que levam a um problema particularmente importante; propor problemas que coletam as iniciativas, percepções ou dúvidas dos alunos, que contribuem para esclarecer ou expandir suas ideias, diante do desafio de solucionar problemas ou compreender matemática (isso fortalece muito uma dinâmica de aprendizagem por descoberta); [...] fortalecer a capacidade de pesquisa dos professores; melhorar a qualidade de avaliações; e consolidar a formação matemática de professores (Jurado, 2013a, p. 130, tradução nossa).⁷

Na literatura encontramos diferentes estudos que focaram na formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática, objetivando desenvolver habilidades e competências dos professores e futuros professores, atribuindo aos mesmos a responsabilidade de propor problemas para as suas aulas de Matemática (Crespo; Sinclair, 2008; Jurado, 2013a, 2017; Crespo, 2015; Ellerton, 2015; Zhang; Cai, 2021).

Ellerton (2015) percebe que as pesquisas têm dada pouca atenção para uma abordagem holística sobre a Proposição de Problemas Matemáticos, que visa envolver os professores em formação inicial e em exercício na proposição ativa de problemas; que oportuniza o planejamento e a reflexão sobre os problemas propostos, criticando e avaliando os próprios problemas, como também compartilhando e discutindo soluções para os problemas propostos com seus pares. Desse modo, as atividades de proposição de problemas que fazem parte de uma abordagem holística tornam esses professores (tanto prospectivos quanto praticantes) conscientes das ligações entre a Resolução de Problemas e Proposição de Problemas, contribuindo não só para a sua própria aprendizagem de Matemática, mas, também, para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas que usarão com seus próprios (ou seus futuros) alunos.

A tarefa de propor problemas para as suas aulas de Matemática se apresenta como uma atividade mais complexa para os professores do que para os alunos, sobretudo porque as responsabilidades dos mesmos são ainda maiores, visto que devem refletir não só a partir de perspectivas matemáticas do problema formulado, mas também olhar através de perspectivas pedagógicas (Crespo; Sinclair, 2008).

Por fim, Cai (2022) aponta alguns desafios que devem ser direcionados aos professores para que eles aprendam a ensinar via Proposição de Problemas: (1) a escassez de tarefas de proposição de problemas em materiais curriculares; e (2) a adesão dos professores ao ensino de Matemática via Proposição de Problemas, que, naturalmente, vão se deparar com a dificuldade de implementá-la em sala de aula. Por fim, destacamos que o professor tem papel relevante no trabalho com a Proposição de Problemas.

Notas

¹Problematization is a cognitive movement, not yet clearly delineated, made up of a push and pull between the asking of questions and the finding of answers about what is hoped will evolve into a problem.

²[...] na internalist approach that views mathematics as a classical explanatory form made up of a series of statements linked to logical connectives rooted in mathematics itself, an externalist approach to mathematics provides mathematical models and conceptual structures that are generated from phenomena external to the symbolic systems of the field. Roughly, an externalist point of view recognizes socio-cultural aspects as the principal factors of pedagogical action.

³Students can recognize the power of mathematics as an essential analytical tool to understand and potentially change the

world, rather than merely regarding math as a collection of disconnected rules to be rote memorized and regurgitated; Students can deepen their understanding of important social issues, such as racism and sexism, as well as ecology and social class; Students can connect math with their own cultural and community histories and can appreciate the contributions that various cultures and peoples have made to mathematics; Students can understand their own power as active citizens in building a democratic society and become equipped to play a more active role in that Society; Students can become more motivated to learn important mathematics.

⁴ Problem solving and problem posing have long been of interest to the mathematics education community.

⁵ One way of involving students in problem solving is to have them formulate and solve their own problems.

⁶ [...] motivar más el estudio; fortalecer las capacidades de resolver problemas, de formular(se) preguntas, de identificar problemas y de investigar; ampliar la visión de las matemáticas (suele ocurrir que creen problemas cuyas soluciones requieren conocimientos matemáticos que aún no los tienen); adquirir una formación matemática más sólida (son experiencias que van más allá de lo operativo y de los problemas tipo); ver aspectos matemáticos en el medio que los rodea; establecer conexiones con otros campos del conocimiento; desarrollar la creatividad; y a fortalecer la autoestima del alumno (sus preguntas y observaciones son tomadas en cuenta y verifica que puede crear problemas; por cierto, el papel del profesor es muy importante).

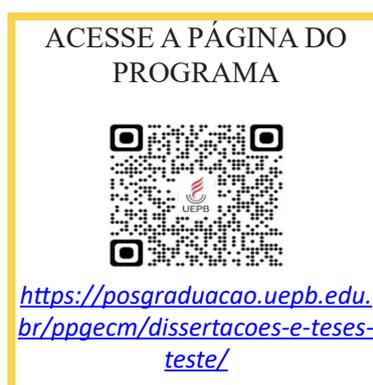
⁷ [...] proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los alumnos y a los contextos en los que viven; crear secuencias de problemas de dificultad gradual que lleven a un problema particularmente importante; proponer problemas que recojan las iniciativas, percepciones o interrogantes de los alumnos, que contribuyan a aclarar o ampliar sus ideas, ante el reto de resolver problemas o de comprender temas de matemáticas (esto fortalece mucho una dinámica de aprendizaje por descubrimiento); [...] fortalecer la capacidad de investigación de los profesores; mejorar la calidad de las evaluaciones; y a consolidar la formación matemática de los profesores.

3 ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO FORMATO DE NARRATIVAS MATEMÁTICAS

Quando nos deparamos com a empreitada de escrever **atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas** com o propósito de discuti-las a partir da metodologia de **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas**, sentimos a necessidade de nos ampararmos às vivências da nossa adolescência. Assim, visando que a escrita flua naturalmente, descrevemos um cenário real que vivenciamos por muitos anos, trazendo, também, personagens reais que fizeram parte deste ambiente, e juntos, servem como inspiração para a escrita destas narrativas.

Com isso, o que denominamos de atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas foram escritas em primeira pessoa, isto é, ao mesmo tempo em que narramos os fatos, também participamos ativamente dos acontecimentos. Ressaltamos, ainda, que, a priori, a maioria dos conteúdos matemáticos selecionados para discutir com a implementação das Narrativas Matemáticas foram amplamente trabalhados pelos membros do GEPEP. Entretanto, somos conscientes que durante o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas podem emergir novos conteúdos, os quais, até então, não tínhamos antecipados.

Para uma melhor compreensão acerca de como estas atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas foram trabalhadas em uma Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática por meio da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, recomendamos que os leitores façam a leitura da nossa pesquisa de doutorado, intitulada “**Exploração, Proposição e Resolução de Problemas: pesquisas do GEPEP e suas possibilidades para a prática pedagógica**”, que pode ser encontrada na página do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECM/UEPB).



3.1 Movimentos didáticos para a sala de aula de matemática

Nas atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas matemáticas escritas por nós, transcorremos acerca de uma sucessão de acontecimentos que podem ser um ambiente fértil para uma prática pedagógica de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Essas Narrativas Matemáticas foram pensadas, no primeiro momento, tendo a **Proposição de Problemas como um ponto de partida de uma aula de Matemática** – a proposição

de problemas ocorre **antes** do processo de resolução e exploração de problemas. Para isso, os estudantes e professores terão a incumbência de identificar e problematizar, na trama, diferentes acontecimentos/eventos que levam a geração de problemas em nível matemático e sócio-político-cultural. Além do mais, quando pensamos as Narrativas Matemáticas numa perspectiva da proposta Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, entendemos que não estamos diante de um trabalho pronto e acabado, uma vez que a estas atividades de exploração, proposição e resolução de problemas podem ser incorporados novos acontecimentos/fatos que possibilitam avançar o nível de compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e de questões cunho sócio-político-cultural.

As atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas **Jogo de Sueca, Um “enxame de problemas”, Mercado de problemas e A crise hídrica – um problema mundial** ocorrem num cenário e com personagens reais da nossa adolescência (Lola – eu, Perobinha, Nêm, Cesinha, PC e Sr. Deda). Enquanto a Narrativa Matemática **“Qual é o preço justo?”** é fruto da contextualização de um episódio real vivenciado pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade, que foi relatado por ele a partir de uma atividade desenvolvida numa disciplina de pós-graduação, sendo escrita em terceira pessoa.

Compreendendo que a produção do Produto Educacional deve ser uma construção conjunta, isto é, ambos, o professor-pesquisador e os participantes da pesquisa, em um processo de colaboração e cooperação, contribuíram com produção deste material, pois os diferentes movimentos de exploração das Narrativas Matemáticas, impulsionaram algumas reflexões críticas, que a nosso ver, sinalizam possibilidades e limitações que ajudou-nos a melhorar o respectivo material, para que possa ser implementado em diferentes salas de aula de matemática do Brasil.

Nesse contexto, acrescentamos alguns fatos/acontecimentos que foram propostos pelos os professores no âmbito do curso, **“Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para Justiça Social”**, nas atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática, por entendermos que ampliaram as tramas, e podem potencializar o caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas, em termos de conceitos matemáticos e questões em nível sócio-político-cultural. Vale ressaltar que adotamos alguns trabalhos realizados pelos professores, mantendo a essência das suas ideias, mas quando necessário, adaptando-as, de modo a não perder o sentido do espaço-tempo que compõe as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.

Para isso, expomos algumas notas explicativas que esclarecem a autoria do ambiente de problematização acrescentado ou modificado nas atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas. Ao todo, participaram 14 professores do curso, assim, visando preservar a identidade dos participantes da pesquisa, optou-se por denotar os professores por: P1, P2, P3, ..., P14.

Aqui, apresentaremos alguns movimentos didáticos que podem ser adotados durante a aplicação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas. Entretanto, queremos deixar claro que não se trata de um passo a passo ou um roteiro prescritivo que deve ser fielmente seguido quando se propõe a ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, e sim alguns movimentos didáticos que percebemos a partir do mapeamento das pesquisas do GEPEP, dos encontros do GEPEP, bem como de uma disciplina minis-

-trada pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade, que podem impulsionar o ensino-aprendizagem de Matemática por meio desta metodologia.

Posteriormente, serão apresentadas as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas que, possuem o potencial para abordar diferentes conteúdos e conceitos matemáticos. Contudo, iremos elencar, a priori, as principais ideias matemáticas que podem ser discutidas com profundidade na Educação Básica e no âmbito de cursos de Licenciatura em Matemática, como também na Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática.

1º Movimento α : Coloque suas curiosidades e reflexões em forma de problemas, explore-os e os resolva

Após a leitura das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, solicita-se que proponham, explorem e resolvam problemas. Para isso, será necessário identificar como os diferentes fatos narrados podem ser o ponto de partida para desencadear o processo de problematização que pode impulsionar e avançar no processo de resolução e exploração de problemas. Posteriormente, após a formulação dos problemas, abre-se espaço para que os participantes compartilhem os problemas, bem como possam explicar e justificar o processo de pensamento que os levaram à proposição dos problemas.

2º Movimento β : Selecione um problema para ser explorado e reescreva o problema do colega – refinamento/aprofundamento dos problemas

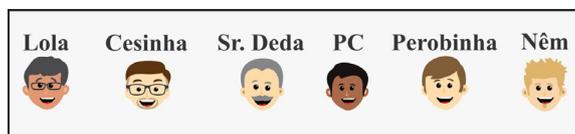
Com o propósito de refinar/aprofundar as discussões, seleciona-se um problema para ser explorado, tomando como critérios os interesses externados pelos participantes, os objetivos delineados com relação à apresentação e compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos ou o professor escolherá um problema que está assinalando um grande potencial para desenvolver um trabalho de exploração, proposição e resolução de problemas.

Ademais, com foco de ir cada vez mais além, solicita-se aos participantes que troquem os problemas formulados entre si, e cada um ficará incumbido de reescrever o problema do colega, dando uma nova redação, ao trazer novos elementos que possibilitam refinar/aprofundar a discussão ou, até mesmo, perceber, ao tentar solucionar o problema proposto pelo colega, que, de fato, o problema precisa de uma reformulação, devido à redação apresentar informações dúbias ou ainda tendo em vista a falta de mais dados, bem como apresentar equívocos com relação a conceitos matemáticos ou apresentar um contexto incompatível com a realidade.

3º Movimento γ: Acrescente ou modifique uma “fala” dos personagens das Narrativas Matemáticas – refinando/aprofundando as Narrativas Matemáticas

Para este momento, temos como objetivo a participação mais engajada dos envolvidos na co-construção das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas, modificando algum fato que compõe o enredo ou com o acréscimo de novos acontecimentos, que possibilitem ampliar a trama, de tal modo que a nova redação seja um ambiente fértil para a exploração, proposição e resolução de problemas em nível cognitivo como também sócio-político-cultural. Assim, o processo de reformulação das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas pode ajudar a perceber suas limitações e possibilidades, bem como sua replicabilidade em cursos de Formação Inicial de Professores de Matemática, como também no chão da escola da Educação Básica.

Apresentamos, a seguir, os personagens que fazem parte do enredo das Narrativas Matemáticas: **Jogo de Sueca, Um “enxame de problemas”, Mercado de problemas e A crise hídrica – um problema mundial:**



Vale destacar que o personagem “Lola” aparece, ao longo das Narrativas Matemáticas, narrando a “fala” de outros personagens, que, por sua vez, são indicados por meio de figuras localizadas ao lado direito de cada “fala”.

A seguir, apresentamos as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.

3.2 Jogo de Sueca¹



Eu (Lola) e os meus amigos Nêm, Perobinha, PC, Cesinha e Sr. Deda nos encontramos de segunda a sexta, durante a noite, para jogar algumas partidas de baralho e dominó. Na ocasião, conversamos sobre os mais variados assuntos do nosso cotidiano. Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si com apertos de mãos e abraços. O número de apertos de mãos dados foi o dobro do número de abraços.² Em um certo dia, Cesinha chegou atrasado e exclamou:



Vixe! Lola vai jogar cartas para mim, ô homem da “mão ruim”.



Em seguida, eu disse: Quem mandou tu chegar atrasado!



Ontem, sentei próximo de Nêm, deitei e rolei no jogo, disse Cesinha.



Perobinha falou com muita serenidade:



Para o jogo ficar justo, acho que toda noite nós deveríamos trocar de lugar na mesa. Essa é uma situação que a gente precisa conversar.



Em tom de indignação, falei: Eu concordo, mas hoje Cesinha vai sentar no lugar que sobrou. Sr. Deda chegou por último e percebendo que não entrávamos em consenso sobre onde cada um iria sentar, falou:



Eu tenho a solução, vamos jogar sueca ao invés de jogar baralho.



Boa ideia! Afirmou Nêm. Agora a arenga vai ser para formar as duplas.



Na primeira partida, Sr. Deda afirmou, com muita convicção, que a dupla de PC obteve 56 pontos. E continuou:





Ganhamos, me dá o baralho para eu traçar! Exclamou Sr. Deda, com muita serenidade: sou ágil, com os cálculos, passo o dia fazendo contas na minha vendinha.



Sr. Deda é comerciante há anos e sempre lida com situações envolvendo cálculo mental. Apesar do Sr. Deda ser bom em fazer cálculos mentais, nesses dias, bateu uma dúvida na seguinte situação: vendeu um produto que custava R\$ 23,50, e o cliente lhe pagou com uma nota de R\$ 50,00, visando facilitar o troco que Sr. Deda teria que lhe devolver, o cliente falou que poderia lhe passar mais R\$ 3,50 para que Sr. Deda devolvesse R\$ 30,00. Sr. Deda aceitou a sugestão, porém, ficou em dúvida se, realmente, teria ficado tudo correto.³

Durante a partida, Perobinha se mostrou indignado com uma aposta que ele tinha realizado no site de apostas esportivas “Só ganha quem aposta”:



Rapaz, fiz uma aposta em quatro jogos: São Paulo x Flamengo, Vasco x Fluminense, Fortaleza x Bahia e Atlético Paranaense x Palmeiras e perdi por que apostei na vitória do Palmeiras e quem venceu o jogo foi o Atlético Paranaense, explicou Perobinha.



Não sabe apostar, o Atlético Paranaense jogando em casa é muito forte, explicou PC.



Eu não gosto de fazer esses tipos de apostas, porque acredito que esse jogo não é justo, pois, na teoria, a casa de jogos tem mais chance de ganhar - afirmou Nêm



Na segunda partida, Cesinha interrompeu o jogo faltando três rodadas de cartas, afirmando que já tinha vencido o jogo, visto que já tinha obtido 61 pontos.

Não acredito! Está roubando! Conte para a gente ver! Falei, de forma incrédula. Cesinha fez a contagem dos pontos e provou que tinha vencido a partida.

Nessa noite, jogamos 32 partidas, a dupla de Sr. Deda venceu 2 partidas a mais que a dupla de Perobinha, 4 partidas a menos que a dupla de PC e não houve empates.⁴

Conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Sistematizar o conceito de Combinação Simples a partir de um fato que compõem a narrativa, tal como: “Durante a chegada, todos se cumprimentam entre si”. Ademais, aprofundar a discussão resolvendo problemas utilizando o conceito da Soma dos termos de Progressão Aritmética (P.A) e Equação do 2º grau;
- Apresentar o conceito de Permutação Circular a partir da figura que representa uma mesa circular, contendo 6 pessoas;
- Abordar o conceito do Princípio Fundamental da Contagem (PFC);
- Discutir a resolução de Sistemas Lineares (último parágrafo da narrativa), abordando Representações Múltiplas de Álgebra e transição entre elas, tal como fazer conexões com a Geometria associando a posição das retas no plano cartesiano com a classificação dos Sistemas Lineares.

3.3 Um “exame de problemas”



Rapaz, que perrengue passamos ontem viu. Deu até polícia, afirmou Nêm.
E ainda acrescentou: Lola, você sumiu. A gente pensou que a polícia tinha te prendido.



Respondi: Mas, homem, eu corri pela estrada perto do riacho até a casa de Joquinha. Fiquei escondido lá. Acho que percorri 1,5 km em 5 min. O que medo não faz né!?



Cesinha logo indagou: Mas o que vocês fizeram?



Rapaz, a gente ia “tirar uma abelha”⁵ em um cajueiro no terreno do Sr. José Henrique. Quando chegamos lá, os caras já tinham tirado a abelha, e ainda derrubaram o cajueiro. Foi tenso. Quando a gente olhou para estrada, ia passando uma viatura da polícia, aí só ouvi quando a filha dele gritou lá da casa — eita, pai, eles vieram de novo. Pense numa carreira, explicou Nêm.



Os caras cortaram do lado errado, por isso o pé de caju caiu - explicou Perobinha.



Verdade, ele já é bastante inclinado, cortando errado ou muito, independente do lado, ele iria cair – falou Nêm.⁶



Dias atrás, passando nesse cajueiro, percebi que ele deve ter aproximadamente 6 metros de altura, porém, sabemos que é maior, pois está muito inclinado.⁶



Eu acho que a sua sombra deve ter uns 8 metros, observando ao sol de meio dia – disse Perobinha.⁶



Mas e aí? Vocês têm muitos litros de mel? Questionou PC.



Que nada! Até agora, encontrei poucos enxames. A cada ano que passa, percebo que as abelhas estão sumindo- explicou Nêm.



Eu li em um *blog*⁷ que cientistas no mundo todo estão preocupados, porque as abelhas estão sumindo - disse Cesinha.





Preocupados por que iremos ficar sem mel, se caso elas desaparecerem? Indagou Perobinha!



Eu não sei exatamente. Mas lembro que a repórter explicou que a redução das abelhas aumentou em 43% o preço das amêndoas no mundo, pois sua reprodução depende 100% da polinização das abelhas; e que 52% dos alimentos vendidos no mercado, como alface, banana e maçã desaparecerão das prateleiras, caso o número de abelhas continue a diminuir. Outro caso seria a polinização do café que, sem a polinização feita pelas abelhas, teria uma redução de 30% na sua produção.⁸



Mas porque será que as abelhas estão morrendo? Questionou Nêm!



Eu respondi: Eu li em um livro⁹ que destacava o tempo necessário para termos uma nova colmeia, lá se falava sobre o processo de nascimento e morte das abelhas, dizendo que o número de abelhas numa família nova são 10.000 abelhas; a postura média da rainha são 2.000 ovos/dia; a longevidade das operárias/taxa de mortalidade corresponde a 40 dias; e o período entre a postura e o nascimento são de 21 dias. Ressaltava ainda, a hipótese desta família de abelhas possuírem idades equidistribuídas, isto é, idades entre 0 e 40 dias.

Mosaico formado pela repetição de hexágonos regulares



Será que é por causa disso? Ou seja, está morrendo mais abelhas do que nascendo? Indagou Nêm!



E todos ficaram curiosos sobre o que está ocasionando o desaparecimento das abelhas.

Conteúdos e conceitos matemáticos que podem abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Abordar o conceito de razão entre duas grandezas a partir da ideia de velocidade média;
- Discutir o mosaico formado pela a repetição de polígonos regulares (hexágonos);
- Trabalhar os conceitos de Taxa Percentual, Aumentos e Descontos Sucessivos a partir do enredo da narrativa: “a redução das abelhas aumentou em 43% o preço das amêndoas no mundo, pois sua reprodução depende 100% da polinização das abelhas; e que 52% dos alimentos vendidos no mercado, como alface, banana e maçã desaparecerão das prateleiras”;
- Discutir ideias essenciais de Função (a partir do fato que explica o processo de nascimento e morte das abelhas), abordando: lei da Função Afim, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio e a imagem da função, Função definida por várias sentenças e o esboço do seu gráfico. Para aprofundar, vamos buscar o entrelaçamento entre os tópicos de Função Polinomial do 1º Grau e Progressão Aritmética (P.A).

3.4 Mercado de problemas

Boa noite, pessoal! Vamos jogar o que hoje? Questionou Perobinha!

Vamos jogar dominó, afirmou PC.

Ei, Nêm, eu passei e vi tu lá no mercado “Preço Imbatível”. Que tumulto era aquele que tinha até polícia? Questionou Perobinha!

Rapaz, parece que houve um caso de racismo por parte do segurança do mercado “Preço Imbatível” com uma pessoa que estava fazendo compras, afirmou Nêm.

Infelizmente, esse tipo de coisa ainda é muito presente em nossa sociedade, afirmei, com tom de indignação. E acrescentei: — Eu li na *internet*¹¹ que 7 a cada 10 negros sofrem preconceitos em lojas, restaurantes ou mercados. E li ainda que um levantamento feito por um instituto sobre o racismo nas corporações evidenciou que apenas 4% dos brasileiros se consideram racistas, apesar de a maioria achar que o país é racista.

Mas o que tu foi comprar no mercado, hein, Nêm? Questionou Cezinha!

Fui comprar batata, explicou Nêm!

Sr. Deda se mostrou inconformado, afirmando: — Mas, Nêm por que você não comprou na minha vendinha? Não precisava ir para a cidade.

Qual o valor do quilo de batata no mercado “Preço Imbatível”? Questionou PC!

O quilo custa R\$ 4,00, respondeu Nêm!

Visando convencer a todos que estavam presentes, Sr. Deda explicou:

Na minha vendinha, é R\$ 5,00 o quilo, mas você não vai gastar com transporte.

Quanto você gastou de gasolina na sua moto? Indagou Perobinha!



Eu gastei R\$ 6,00 no total, ida e volta, explicou Nêm!



Amanhã, cada quilo de batata vai estar com 15% de desconto, afirmou Sr. Deda.¹²



Ainda com o objetivo de convencer Nêm a consumir em sua vendinha, Sr. Deda fez a seguinte afirmação:¹³



Nêm, caso opte por comprar a batata em minha vendinha, você tem a garantia de que é um produto sem qualquer uso de agrotóxicos químicos, pois é cultivada no meu próprio sítio e só utilizamos agrotóxicos biológicos, quando necessário.¹³



Isso é um ponto importante, disse Nêm. E continuou: — vi em um *site* que, de 2000 a 2022, o Brasil aumentou de 82 para 652 o número de agrotóxicos liberados.¹³



Acho que a gente precisa analisar onde é vantajoso comprar batata, afirmou Cesinha!



Sr. Deda, amanhã estou indo comprar batata lá, mas com uma condição - vou dar uma nota de R\$ 20,00 na compra de 1 quilo de batata, e quero o meu troco em moedas de R\$ 0,50 e notas de R\$ 2,00, explicou PC.



Pode passar lá, PC, que eu dou um jeito, afirmou Sr. Deda!



Com esse negócio de ser vantajoso ou não, eu lembrei de uma publicação que vi no *Facebook*,¹⁴ com milhares de comentários e compartilhamentos, que fazia uma comparação do preço da barra de chocolate e do ovo de páscoa do mesmo sabor. Lá mostrava que o ovo de 500 gramas custava R\$ 49,99 e uma barra de 170 gramas do mesmo chocolate custava R\$ 2,50, explicou Cesinha!



Eita, eu gosto de chocolate e, agora, fiquei pensando o que é mais vantajoso, apesar de que, em época de páscoa, fica difícil deixar de comprar ovos de páscoa, afirmou Perobinha!



Conteúdos e conceitos matemáticos que podem abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Trabalhar o significado de Fração como uma Razão, a partir do fato: “7 a cada 10 negros sofrem preconceitos”;
- Transitar entre as diferentes Representações de um Número Racional;
- Discutir ideias essenciais de Função (a partir da situação que envolve a compra das batatas), abordando: lei da função, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio, a imagem e contradomínio da função, o esboço do gráfico, o significado dos coeficientes angular e linear no contexto dos problemas;
- Abordar o conteúdo de Equação do 1º grau com duas incógnitas a partir do troco das moedas de R\$ 0,50 e notas de R\$ 2,00. Para aprofundar, deve-se discutir as Representações Múltiplas de Álgebra e transição entre elas, tal como fazer conexões com a Geometria associando a posição das retas no plano cartesiano, que possibilite analisar a existência ou não de solução do sistema.

3.5 A crise hídrica – um problema mundial



Boa noite, pessoal! Cheguei atrasado porque aproveitei que tinha chegado água, para encher as vasilhas e os baldes, explicou PC.



A situação de água doce no nosso município está cada vez mais difícil, principalmente, com o aumento das residências devido à abertura de alguns loteamentos, explicou Cesinha.



Eu e meus colegas de escola fizemos uma entrevista com um funcionário da empresa autônoma que presta serviço de abastecimento de água potável no nosso município, afirmou Perobinha. Ele explicou que a empresa abastece 5050 residências. E ainda falou das tarifas pagas pelo consumo mensal de água em m³. Faixa 1: para o consumo de até 10m³, valor fixo de R\$ 29,00; Faixa 2: para o consumo maior que 10m³ e até 15m³, paga-se uma tarifa de R\$ 2,50 por m³, que ultrapasse 10m³; Faixa 3: para o consumo maior que 15m³ e até 20m³, paga-se uma tarifa de R\$ 2,70 por m³, que ultrapasse 15m³. O funcionário falou, também, que cada residência não pode exceder no mês o consumo de 20m³ de água, porém, para empresas da cidade abastecidas pela empresa, não há um limite, com a condição de que irá pagar R\$ 3,00 a mais por cada m³ excedido dos 20m³, finalizou Perobinha.¹⁵



A nossa situação é complicada porque dependemos de uma barragem pequena para dar conta das necessidades de todo o município, acrescentou Cesinha.



Acrescentei que: — Eu li¹⁶ que, no Brasil, cada pessoa consome, em média, 154 litros de água por dia. No entanto, a Organização das Nações Unidas (ONU) considera que cada pessoa necessita de 110 litros de água ao dia.



E o que explica essa diferença de 44 litros? Questionou PC.



Provavelmente, deve ser devido ao desperdício diário de água, explicou Sr. Deda.



Outra coisa que li foi sobre o desperdício de água no Brasil, que, em relação à água tratada, a cada 100 litros de água, somente 63 litros são consumidos e o restante é perdido.¹⁷



Muitos produtos que estão presentes no nosso dia a dia levam uma quantidade considerável de água, explicou Cesinha.



Eu lembro que, na aula de Ciências, a professora Filomena explicou que mais de 70% do corpo humano é composto por água. Ela falou, ainda, que cada quilograma de massa corporal corresponde a 35 ml de água que devemos ingerir diariamente, falou Perobinha.



Eu li,¹⁸ que a Terra possui 1,386 bilhões de metros cúbicos de água, sendo que apenas 2,5% desse total é água doce, e ainda que o Brasil possui a maior reserva de água doce da Terra, sendo aproximadamente 12% do total mundial. Além do mais, 1/6 da população mundial não tem acesso à água potável, acrescentou PC.



Conteúdos e conceitos matemáticos que podem abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Aprofundar ideias essenciais de Função partir do enredo da narrativa que destaca “as tarifas pagas pelo consumo mensal de água”, discutindo: lei da Função Afim, representações múltiplas de funções e a transição entre elas, o domínio e a imagem da função, Função definida por várias sentenças e o esboço do seu gráfico;

- Discutir o significado de Fração como Operador Multiplicativo, a partir do fato: “ 1/6 da população mundial não tem acesso à água potável”, como também outros significados que possa vir a surgir do movimento de exploração, proposição e resolução de problemas;

- Abordar o conceito de Taxa Percentual a partir de alguns enredos da Narrativa Matemática.

3.6 Qual é o preço justo?



Andrade é um professor de Matemática, amplamente preocupado com questões de (in)justiça social. Chegando as festas de final de ano, é comum as lojas promoverem promoções para finalizar seus estoques. Andrade entrou em uma determinada loja, com filiais em todo o Brasil, que estava com a seguinte promoção **leve 3 pague 2** (a peça que sairá de graça deve ser de igual ou menor valor. Promoção válida enquanto durarem os estoques). Ele escolheu os produtos que iria levar, dirigiu-se ao caixa e disse:



Boa tarde, moça.



Olá, boa tarde, senhor!



Em seguida, Andrade solicitou que a moça do caixa registrasse suas compras. Ao ver o valor da compra, ele interveio:



Há alguma coisa errada. De acordo com os meus cálculos, esse não é o valor real da compra.



A moça que estava no caixa afirmou:



Acho que o senhor se equivocou nas suas contas. O sistema está programado para realizar os cálculos de forma precisa.



Observe abaixo a nota fiscal contendo os produtos que seriam comprados, descontos e o valor final:

| Nota fiscal do consumidor | | | |
|---------------------------------|----------------|---------------|----------------|
| Kit | V. Unit. (R\$) | V. Desc.(R\$) | V. Total (R\$) |
| 01- Cueca | 15,90 | 4,71 | 15,90 |
| 02 - Cueca | 15,90 | 4,71 | 15,90 |
| 03 - Cueca | 15,90 | 4,71 | 15,90 |
| 04 - Cueca | 19,90 | 5,89 | 19,90 |
| 05 - Cueca | 19,90 | 5,89 | 19,90 |
| 06 - Cueca | 19,90 | 5,89 | 19,90 |
| 07 - Meia | 29,90 | 0,00 | 29,90 |
| 08 - Meia | 9,90 | 0,00 | 9,90 |
| 09 - Meia | 9,90 | 0,00 | 9,90 |
| 10 - Cueca | 29,90 | 0,00 | 29,90 |
| Valor Total dos Produtos | | | R\$ 187,00 |
| Valor Pago | | | R\$ 155,20 |
| Desconto | | | R\$ 31,80 |



Todos que estavam na fila do caixa direcionaram suas atenções para o diálogo entre Andrade e a moça do caixa. Ele, confiando nos seus conhecimentos matemáticos, falou:



Eu não vou levar essa compra, pode desfazer!



E todos atentos observavam como ele poderia provar a veracidade de suas reivindicações. Depois de encerrar a compra, o astuto Andrade resolveu intervir, visando mostrar a injustiça que o levou ao inconformismo. Ele solicitou:



Faça o seguinte, na primeira compra passe os três kits de cuecas (R\$ 15,90), dois kits de meias (R\$ 9,90) e os outros dois kits de meias (R\$ 29,90). Agora em outra compra, quero que você passe os três kits de cuecas (R\$ 19,90).



Veja as notas fiscais das duas compras, abaixo:

| Nota fiscal do consumidor | | | |
|---------------------------------|----------------|---------------|----------------|
| Kit | V. Unit. (R\$) | V. Desc.(R\$) | V. Total (R\$) |
| 01- Cueca | 15,90 | 5,30 | 15,90 |
| 02 - Cueca | 15,90 | 5,30 | 15,90 |
| 03 - Cueca | 15,90 | 5,30 | 15,90 |
| 04 - Meia | 9,90 | 0,00 | 9,90 |
| 05 - Meia | 9,90 | 0,00 | 9,90 |
| 06 - Meia | 29,90 | 0,00 | 29,90 |
| 07 - Cueca | 29,90 | 0,00 | 29,90 |
| Valor Total dos Produtos | | | R\$ 127,30 |
| Valor Pago | | | R\$ 111,40 |
| Desconto | | | R\$ 15,90 |

| Nota fiscal do consumidor | | | |
|---------------------------------|----------------|---------------|----------------|
| Kit | V. Unit. (R\$) | V. Desc.(R\$) | V. Total (R\$) |
| 01- Cueca | 19,90 | 6,63 | 19,90 |
| 02 - Cueca | 19,90 | 6,63 | 19,90 |
| 03 - Cueca | 19,90 | 6,64 | 19,90 |
| Valor Total dos Produtos | | | R\$59,70 |
| Valor Pago | | | R\$ 39,80 |
| Desconto | | | R\$ 19,90 |



Andrade provou que, de fato, o valor inicial gerado no ato da compra não era condizente com a promoção vigente. Todos, a moça do caixa e os clientes presentes, ficaram impressionados com a forma como Andrade interveio em uma situação de injustiça social.

Conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser abordados com esta atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativa Matemática:

- Discutir os conteúdos de Taxa Percentual, Descontos e Proporção, a partir das tabelas e do enredo da narrativa “promoção leve 3 pague 2”;
- Transitar entre as diferentes Representações de um Número Racional.

Notas

- ¹ Regras do jogo de Sueca disponível em: <https://www.megajogos.com.br/sueca-online/regras>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- ² Trecho de problematização acrescentado por P4.
- ³ Trecho de problematização acrescentado por P12.
- ⁴ Trecho acrescentado por P12, enfatizando que houve empates.
- ⁵ Significa o ato de retirar o mel da colmeia.
- ⁶ Trecho de problematização acrescentado por P5.
- ⁷ Disponível em: <https://novainter.net/blog/abelhas-em-extincao-devido-uso-do-celular/>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- ⁸ Trecho de problematização acrescentado por P14.
- ⁹ BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2003.
- ¹⁰ Disponível em: <https://stock.adobe.com/br/images/bees-on-honeycomb/221175945>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- ¹¹ Disponível em: <https://exame.com/bussola/7-em-cada-10-negros-sofreram-preconceito-em-loja-restaurante-ou-mercado/>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- ¹² Trecho de problematização acrescentado por P1.
- ¹³ Trecho de problematização acrescentado por P4.
- ¹⁴ Disponível em:
<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=503972449707775&set=a.315172431921112.62796.100002850746678&-type=1&theater>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- ¹⁵ Trecho de problematização acrescentado por P5.
- ¹⁶ Disponível em: <https://ufscsustentavel.ufsc.br/2019/03/22/dia-mundial-da-agua-e-o-desperdicio-que-nao-se-ve/>. Acesso em: 06 jan. 2025.
- ¹⁷ Trecho de problematização acrescentado por P14.
- ¹⁸ Disponível em: <http://brasildasaguas.com.br/educacional/a-importancia-da-agua/>. Acesso em: 06 jan. 2025.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O material que constitui o nosso Produto Educacional, intitulado “**Narrativas Matemáticas: um caminhar de exploração, proposição e resolução de problemas**”, traz os seguintes elementos: uma construção teórica sobre a proposta de “**Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas (EPRCDP)**”, como também a Proposição de Problemas nas Pesquisas e na formação do professor que ensina Matemática; movimentos didáticos que podem orientar a prática do professor que ensina Matemática no desenvolvimento de uma atividade de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas; apontamentos de conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser discutidos de acordo com alguns fragmentos de cada narrativa; as Narrativas Matemáticas com o acréscimo de novos fragmentos que foram sugeridos pelos professores, e que ao nosso ver, amplia o processo de exploração-problematização-proposição de problemas e revemos algumas limitações percebidas pelos professores.

Os encaminhamentos dados em torno das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas evidenciaram a importância da problematização para o processo de exploração, proposição e resolução de problemas, pois a geração de problemas exige do indivíduo, como demanda cognitiva, o estabelecimento de relações entre os fatos/acontecimentos das Narrativas Matemáticas com ideias matemáticas e questões de cunho sócio-político-cultural. Deste modo, deve-se traduzir estes fatos, de modo a se tornarem problemas que exijam uma solução, tendo o processo de exploração-problematização-proposição de problema contínuo e sempre possível de ser operacionalizado durante os três movimentos de discussão das atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas.

Ademais, almejamos que os professores e futuros professores que se debruçarem na leitura da nossa pesquisa de doutorado, possam se sentir tocados a replicar as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas na sua sala de aula de matemática, percebendo diferentes movimentos didáticos que impulsionaram a discussão de conceitos e conteúdos matemáticos, bem como o debate envolvendo questões de natureza sócio-político-cultural via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Portanto, sublinhamos que o nosso Produto Educacional visa alcançar os professores da Educação Básica, como também recomendar que as atividades de exploração, proposição e resolução de problemas no formato de Narrativas Matemáticas possam ser implementadas nos cursos de Formação Inicial e Continuada de Professores que ensinam Matemática. Para isso, sugerimos que o/a professor (a) se debruce na leitura de cada encontro que tivemos com os professores que ensinam Matemática, de modo a nortear seu trabalho em sala de aula percebendo movimentos e facetas que podem ser adotadas quando se propõe a ensinar Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e se necessário, diante de limitações e possibilidades, adaptá-las a sua realidade.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1998.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M.(Orgs). **Perspectivas para Resolução de Problemas**, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-395.

BROWN, S. I.; WALTER, M. I. **The art of problem posing**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1983.

CAI, J.; HWANG, S. Learning to teach through mathematical problem posing: theoretical considerations, methodology, and directions for future research. **International Journal of Educational Research**. v. 102, 2020, p.1-8.

CAI, J. What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. **Éducation et didactique**, v.16, p. 31-50, 2022.

CRESPO, S.; SINCLAIR, N. What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. **Journal of Mathematics Teacher Education**. v. 11, 2008, p. 395–415.

CRESPO, S. A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015. p. 493-511.

DOMITE, M. C. S. Problem Posing and Problematization in Learning and Teaching Mathematics. **Vhs DVV International**, 2001. Disponível em:
<<https://www.dvvinternational.de/en/adult-education-and-development/editions/aed-572001/basic-education-in-practice/problem-posing-and-problematization>>. Acesso em: 06 jan. 2025.

ELLERTON, N. F. Problem Posing as an Integral Component of the Mathematics Curriculum: A Study with Prospective and Practicing Middle-School Teachers. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015. p. 513-543.

FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Posing and solving mathematical problems: advances and new perspectives**. Switzerland: Springer, 2016.

GUTSTEIN, E. PETERSON, B. (Eds.). **Rethinking Teaching: Social Justice by the Numbers**. Rethinking Schools, 2013.

JURADO, U. M. La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2013a, Montevideo. **Actas...** Montevideo, Uruguay: SEMUR, 2013a, p. 129-140.

JURADO, U. M. Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady. UNION, **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 34, p. 141–149, jun. 2013b.

JURADO, U. M. Problem Posing: An Overview for Further Progress. In: LILJEDAHL, PETER et al. **Problem solving in Mathematics education**. Hamburg, Germany, University of Hamburg, 2016, p. 31-34.

JURADO, U. M. La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. In: SEGUNDO CONGRESO INTERNATIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2., 2017, Jáen. **Actas...** Jáen, España, 2017. p. 1-14.

KILPATRICK, J. A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In: SILVER, E. A. (Ed.). **Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives**. Erlbaum, 1985. p. 1-16.

KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from? In: SCHOENFELD, A. H. (Ed.). **Cognitive science and mathematics education**. NJ: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 123–147.

LILJEDAHL, P.; CAI, J. Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. **ZDM – Mathematics Education**, 2021, p. 723–735.

MARTINS, F. C. **Exploração-proposição-resolução de problemas na licenciatura em matemática: implicações para a sala de aula**. 2024. 248f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2024.

MENDONÇA, M. C. D. **Problematização: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática**. 1993. 307f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, SP, 1993.

MILINKOVIĆ, J. Conceptualizing Problem Posing via Transformation. In: SINGER, F. M., ELLERTON, N. F., CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015. p. 47-70.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Proposição de Problemas de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 19, n. 01, p. 1-23, 2 jun. 2022.

SILVEIRA, A. A.; ABREU, J. D.; ANDRADE, S. Exploração, Resolução e Proposição de Problemas: um olhar crítico para anúncios de ovos de páscoa. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 14, 2022, **Anais...** Acre, 2022.

SILVEIRA, A. A.; NASCIMENTO, M. A. Não só de solução (sobre)vive o problema: diálogos e construções a luz da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. In: MANRIQUE, A. L.; GROENWALD, C. L. O. (Orgs.). **Anais do IX Congresso Iberoamericano de Educação Matemática**. São Paulo: Akademy, 2023. p. 432-437.

SILVEIRA, A. A.; NASCIMENTO, M. A.; ANDRADE, S. Análise Combinatória via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e Justiça Social. In: PANOSSIAN, M. L.; AMARAL-SCHIO, R. B.; SÁ, L. C. **Perspectivas plurais na Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio**. Vitória - ES: Edifes, 2023. p. 131-153.

SILVER, E. A. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematics**, 14(1), p. 19–28, 1994.

SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (Eds.). **Mathematical problem posing: from research to effective practice**. New York: Springer, 2015.

ZHANG, H.; CAI, J. Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching case. **ZDM – Mathematics Education**, 2021, p. 961–973.