



UEPB

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**

AMANDA DE ARAÚJO QUEIROZ

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO POR ATIVIDADES NO FOMENTO
A PRÁTICAS ARGUMENTATIVAS EM AULAS DE GEOMETRIA**

**CAMPINA GRANDE
2024**

AMANDA DE ARAÚJO QUEIROZ

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO POR ATIVIDADES NO FOMENTO
A PRÁTICAS ARGUMENTATIVAS EM AULAS DE GEOMETRIA**

Dissertação apresentada à
Coordenação do Curso de Mestrado
Acadêmico em Ensino de Ciências e
Educação Matemática da
Universidade Estadual da Paraíba,
como requisito parcial à obtenção do
título de Mestra em Ensino de
Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Ensino de
Ciências e Educação Matemática.

Linha de pesquisa: História,
Filosofia e Sociologia das Ciências e
da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida.

**CAMPINA GRANDE
2024**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

Q3 Queiroz, Amanda de Araújo.
 História da Matemática e ensino por atividades no fomento a práticas argumentativas em aulas de Geometria [manuscrito] / Amanda de Araújo Queiroz. - 2024.
 98 f. : il. color.
 Digitado.
 Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
 "Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática - CCT".
 1. Argumentação. 2. Geometria. 3. História da Matemática. 4. Ensino por Atividades. I. Título

21. ed. CDD 371.3

Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

1. Argumentação. 2. Geometria. 3. História da Matemática.
4. Ensino por Atividades. I. Título

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021

BC

AMANDA DE ARAÚJO QUEIROZ

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO POR ATIVIDADES NO FOMENTO
A PRÁTICAS ARGUMENTATIVAS EM AULAS DE GEOMETRIA

Dissertação apresentada à
Coordenação do Curso de Mestrado
Acadêmico em Ensino de Ciências e
Educação Matemática da
Universidade Estadual da Paraíba,
como requisito parcial à obtenção do
título de Mestra em Ensino de
Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Ensino de
Ciências e Educação Matemática.
Linha de pesquisa: História,
Filosofia e Sociologia das Ciências e
da Matemática.

Aprovada em: 21/11/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Daniel Cordeiro de Moraes Filho** (**.027.834-**), em **20/12/2024 13:58:58** com chave **b4291118bef311ef8ff32618257239a1**.
- **José Joelson Pimentel de Almeida** (**.846.264-**), em **20/12/2024 11:31:43** com chave **2265d7c0bedf11efa5ba1a7cc27eb1f9**.
- **Pedro Franco de Sá** (**.512.842-**), em **20/12/2024 11:37:11** com chave **e59afde2bedf11ef856206adb0a3afce**.
- **Arlandson Matheus Silva Oliveira** (**.607.674-**), em **20/12/2024 11:34:25** com chave **82c81d26bedf11efb3a41a7cc27eb1f9**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir. **Tipo de Documento:** Folha de Aprovação do Projeto Final
Data da Emissão: 20/12/2024
Código de Autenticação: 6e81cd



Aos professores do ensino básico brasileiro, cuja crença no poder libertador da Educação é um farol que guia a jornada coletiva em prol da transformação social.

AGRADECIMENTOS

Chegar até aqui por vezes pareceu muito distante, concluir o mestrado não era algo próximo da minha realidade. Alguém que passou a maior parte da vida em instituições de ensino públicas, que cresceu na zona rural de uma pequena cidade do interior de Pernambuco, e que precisou de esforços contínuos de tantos que compuseram sua vida até este momento. Mas aqui estou eu, escrevendo estes sonhados agradecimentos.

Começo agradecendo a Deus e aos seres de luz que me guiam, me orientam, me dão força e cuidam tão bem de mim nessa jornada terrena, abrindo meus caminhos e me livrando do mal.

Quero agradecer também a muitas pessoas, mas não poderia começar sem ser pelos meus pais, José Alberes e Vilma Cristina, um agricultor e uma professora primária, eles que desde cedo não me deixaram, sequer um dia, esquecer da importância da educação. E aqui incluo minha irmã, Maria Eulália, que chegou 5 anos depois de mim e desde cedo se tornou minha maior parceira e principal ouvinte, especialmente das lamúrias desses últimos anos como professora e mestranda. Sem vocês, eu não seria eu. Obrigada por serem minha base, meu tudo, por todo o apoio de sempre.

Aos meus amigos mais próximos durante essa jornada, especialmente Hayalla Cabral, Ian Ferreira, Joyce Raílla, Letícia Dornellas, Nicolas Dias e Stéphanie Barbosa. Vocês foram essenciais nesse período, nos dias bons e ruins, poder contar com vocês foi muito importante para mim. Obrigada por cada puxada de orelha e todo incentivo, tem um dedinho de vocês nesse trabalho.

Ao meu professor e orientador, Prof. José Joelson, por todos os ensinamentos, paciência, calma, colaboração, pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação, pela dedicação e por vezes, sem nem saber, esvaziar minha angústia e me encher de esperança de dias melhores.

Agradeço a todos os professores que passaram pela minha trajetória acadêmica, desde o primário até a pós-graduação, mas em especial aos meus queridos professores de matemática, Mirandolina Farias e Adílson

Ferreira (*in memorian*), que lá no ensino básico me mostraram os encantos e as belezas que a matemática pode oferecer.

Aos membros que compõe a banca examinadora deste trabalho, pelos ensinamentos e valiosas sugestões desde o exame de qualificação. Meu agradecimento especial ao Prof. Daniel Cordeiro, meu eterno professor, tutor e amigo, seus ensinamentos estão sempre comigo, ao escrever um texto, ao fazer uma demonstração, ao escrever no quadro-branco e ao apreciar as belezas da vida.

Aos meus alunos, principais sujeitos dessa pesquisa, nossa turma da “Eletiva de Poliedros” ficará sempre guardada em meu coração, o entusiasmo (mesmo que nem sempre presente) e a criatividade de vocês é um combustível na busca da melhoria constante como professora e pesquisadora.

Ao Grupo de Pesquisa Político-Pedagógico de Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT), por todas as discussões, contribuições em minha jornada, pelo companheirismo dos colegas e todo o aprendizado proporcionado.

Aos amigos da pós-graduação, ao nosso “Grupo do Vale” que se tornou um recanto de partilhas, acolhimento e amizade, obrigada pela troca de experiências e pelo incentivo constante. Vocês tornaram esse período mais fácil.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM), em especial, à coordenação e aos professores que colaboraram para a construção desta pesquisa. O comprometimento de todos, tornou esta jornada acadêmica possível.

Eu ainda poderia citar dezenas de nomes de pessoas importantes que foram valiosas no desenvolvimento desta pesquisa, mas são muitos e eu acabaria deixando alguém de fora. Dessa forma, a todos aqueles que não tem o nome citado aqui, mas contribuíram de alguma forma para que eu chegasse a este momento, meu muito obrigada!

“Se você realmente desejar ser alguém que procura a verdade, deve pelo menos uma vez na vida duvidar, ao máximo possível, de todas as coisas”.

- René Descartes (1596-1650) em
O Discurso do Método, 1637.

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo analisar de que forma a utilização do ensino por atividades e da História da Matemática pode suscitar o desenvolvimento da argumentação em aulas de geometria. A investigação ocorreu em uma turma de ensino médio da rede estadual de ensino do estado de Pernambuco, por meio de uma disciplina eletiva intitulada “Poliedros de Platão: uma viagem por diferentes contextos”. A abordagem da pesquisa é predominantemente qualitativa, dado que a investigação tem um caráter descritivo e interpretativo dos dados. Dessa forma, para analisar as construções argumentativas desenvolvidas, por meio de atividades exploratórias e das soluções de problemas propostos, utilizamos como aporte teórico autores como Toulmin (2006) e Sales (2011) constituindo assim a organização e a categorização dos argumentos. Nossos resultados evidenciam que, ao promover a argumentação, os professores podem transformar a experiência de aprendizado, tornando-a mais dinâmica e significativa. A implementação de estratégias que favorecem a discussão e a reflexão crítica em sala de aula se mostra eficaz na melhoria da capacidade argumentativa dos alunos, contribuindo para uma aprendizagem mais sólida e integrada.

Palavras-Chave: argumentação; geometria; história da matemática; ensino por atividades.

ABSTRACT

The present research aimed to understand how the use of activity-based teaching and the History of Mathematics can foster the development of argumentation in geometry classes. The investigation took place in a high school class from the state education network of Pernambuco through an elective course titled "Platonic Solids: A Journey through Different Contexts." The research approach is predominantly qualitative, as the investigation has a descriptive and interpretive nature. To analyze the argumentative constructions developed through exploratory activities and problem-solving tasks, we used theoretical frameworks from authors such as Toulmin (2006) and Sales (2011), organizing and categorizing the arguments accordingly. Our results highlight that promoting argumentation allows teachers to transform the learning experience, making it more dynamic and meaningful. The implementation of strategies that encourage discussion and critical reflection in the classroom proves effective in improving students' argumentative abilities, contributing to a more solid and integrated learning process.

Keywords: argumentation; geometry; history of mathematics; teaching by activity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Padrão de argumento de Toulmin (PAT)	27
Figura 2 - Retas Paralelas cortadas por uma transversal.....	29
Figura 3 - Padrão de Toulmin em problema de matemática.	30
Figura 4 – Esquema da Argumentação	34
Figura 5 – Tipos de Argumentação Justificatória.....	36
Figura 6 – <i>Fac-símile</i> do livro <i>Os elementos</i>	41
Figura 7 - <i>Fac-símile</i> da edição grega d' <i>Os elementos</i> (séc. IX)	42
Figura 8 - <i>Fac-símile</i> da capa da edição brasileira do livro <i>Os elementos</i>	43
Figura 9 – Poliedros de Platão esculpidos no período neolítico	54
Figura 10 – Poliedros Platônicos	54
Figura 11 – Definição de poliedro regular.....	55
Figura 12 – Definição dos poliedros platônicos	55
Figura 13 – Definição dos poliedros regulares.....	56
Figura 14 – Observação sobre os poliedros.	56
Figura 15 – Agrupando os sólidos.....	61
Figura 16 - Exposição sobre Platão	62
Figura 17 – Calcopirita, magnetita e galena.....	63
Figura 18 – Pirita	63
Figura 19 – Radiolários	64
Figura 20 – Vírus da Herpes	64
Figura 21 - Dodecaedro de Bronze	65
Figura 22 – Icosaedro de Bronze	65
Figura 23 – Tabela AT1.....	66
Figura 24 – Respostas da D1 a tabela AT1	67
Figura 25 – Respostas da D2 a tabela AT1	69
Figura 26 – Solução apresentada pela D2 a questão 3 da AT1	70
Figura 27 – Tabela AT2.....	72
Figura 28 – Respostas da D1 a tabela da AT2	73
Figura 29 – Respostas da D2 a tabela AT2	74
Figura 30 – Soluções apresentadas por D2 a questões 7 e 8 da AT2	75
Figura 31 – Kit utilizado e construção de ângulos poliédricos.....	77
Figura 32 – Tabela da AT3.....	78
Figura 33 – Respostas do G1 a AT3.....	79

Figura 34 – Icosaedro e dodecaedro de palitos e jujubas	80
Figura 35 – Poliedros platônicos de palitos e jujubas	80
Figura 36 – Tabela da AT4.....	81
Figura 37 – Respostas do G1 a AT4.....	81

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Conteúdo programático da disciplina.	23
Quadro 2 – Argumento da D1.....	67
Quadro 3 – Argumentos da D2.....	69
Quadro 4 – Argumentos da D2 a questão 3 da AT1	71
Quadro 4 – Argumentos da D1 a tabela da AT2.....	73
Quadro 5 – Argumentos da D1 a tabela da AT2.....	75
Quadro 6 – Argumentos da D2 a questão 8 da AT2.	76
Quadro 7 – Argumentos do G1 a AT3	79
Quadro 8 – Argumentos do G1 a AT4.	82

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
FGB	Formação Geral Básica
GEPAE	Grupo de Estudos e Pesquisa em Argumentação na Educação
IF	Itinerários Formativos
LEEMAT	Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de Pesquisa Político-Pedagógico
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PET	Programa de Educação Tutorial
TAP	<i>Toulmin's Argument Pattern</i>
UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Os primeiros passos no desenvolvimento desta pesquisa	15
1.1.1	<i>Escolha do tema.....</i>	15
1.1.2	<i>Justificativa</i>	19
1.1.3	<i>Problema de pesquisa e objetivos.....</i>	20
1.2	Metodologia	21
1.2.1	<i>Contexto da pesquisa</i>	21
1.2.2	<i>Produção de informações</i>	23
1.2.3	<i>Aspectos metodológicos da pesquisa</i>	24
2	ARGUMENTAÇÃO E MATEMÁTICA	31
2.1	Algumas definições	31
2.2	Primeiros passos na história	37
2.3	Argumentação nas aulas de ciências e matemática.....	38
3	NOS CAMINHOS DA GEOMETRIA.....	41
3.1	Axiomatização da geometria.....	41
3.2	Geometria e argumentação	44
3.3	O ensino de geometria no Brasil	47
3.4	Os poliedros de Platão	51
4	APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .	60
4.1	Organização das aulas e atividades	60
4.1.1	<i>Primeiro Encontro</i>	61
4.1.2	<i>Segundo Encontro</i>	61
4.1.3	<i>Terceiro Encontro</i>	62
4.1.4	<i>Quarto Encontro.....</i>	66
4.1.5	<i>Quinto Encontro</i>	72
4.1.6	<i>Sexto Encontro.....</i>	76
4.1.7	<i>Sétimo Encontro.....</i>	80
4.1.8	<i>Oitavo Encontro</i>	83
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
	REFERÊNCIAS.....	86
	APÊNDICE A - ATIVIDADE 1 (AT1).....	92
	APÊNDICE B - ATIVIDADE 2 (AT2).....	94
	APÊNDICE C - ATIVIDADE 3 (AT3).....	96

APÊNDICE D – ATIVIDADE 4 (AT4).....	98
-------------------------------------	----

1 INTRODUÇÃO

1.1 Os primeiros passos no desenvolvimento desta pesquisa

1.1.1 Escolha do tema¹

Durante o processo de formação docente muitos questionamentos são feitos e questionamentos são muito importantes para que possamos refletir nossa prática. Às vezes os caminhos da vida nos levam a determinados cenários que talvez nunca tenhamos nem imaginado, planejado ou buscado. No início deste trabalho contarei um pouco sobre como cheguei na licenciatura em Matemática, no mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática e, enfim, no tema desta pesquisa.

Eu venho da Zona Rural de uma cidadezinha do interior de Pernambuco chamada Casinhas, e sempre tive ao meu redor o incentivo para aprender. Filha de uma pedagoga e de um agricultor que estudou até o ensino fundamental, meus pais foram os primeiros a mostrar a educação como o caminho para liberdade. Minha família é cheia de professores e sempre vi, especialmente em minha mãe, o amor pela profissão, pelos estudantes e pela educação. Como contraponto, via como seu trabalho não era valorizado: salário baixo, sem condições básicas no local de trabalho, responsabilidades que transpassavam, e muito, seu horário na escola, entre outras tantas coisas.

Ver isso dentro de casa me fez buscar um caminho contrário à docência. Buscava por algo que fosse reconhecido e valorizado, inclusive financeiramente. Embora adorasse estudar as disciplinas de humanas, sempre tive mais afinidade pelas exatas, logo optei por estudar engenharia. E foi, para mim, uma decepção! Por diversos motivos não tive bom desempenho logo de início, o que me desestabilizou pois até ali sempre tinha sido uma aluna exemplar. Eu não podia desistir, pois muito estava sendo investido para que eu tivesse aquela formação. E assim se seguiu, por alguns longos anos até eu dizer: chega! Não foi fácil desistir, sair do comodismo e buscar o novo, o desconhecido, mas quando enfim tomei coragem, a questão passou a ser: o que eu vou fazer? Se engenharia não é pra mim, o que é?

¹ Nessa seção específica, falarei sobre minha experiência e relação com o tema, por este motivo o texto está na primeira pessoa do singular.

Meus pais me aconselhavam a seguir o caminho da docência, era mais simples e poderia me dar um retorno mais rápido, pois estava mais “dentro da minha realidade” do que a engenharia. Mas eu queria seguir esse caminho? Entrei no curso de licenciatura em matemática na Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) um tanto frustrada, pois no fundo não queria ser professora, buscava caminhos dentro do curso que pudessem me levar a lugares que não fossem a sala de aula.

Com o passar do tempo e dos estudos fui percebendo que aquele sentimento inicial de rejeição pela profissão foi se perdendo, já não queria mais fugir da docência. Na verdade, eu sentia prazer e me sentia importante estudando sobre educação, aquele sentimento de impotência que senti durante o curso de engenharia não existia ali, que aquele lugar que eu estava agora me possibilitava ser quem eu realmente sou e que sendo assim, eu podia de alguma forma fazer a diferença! Isso me deu ânimo, gás!

A partir daí as coisas começaram a fazer mais sentido para mim, e eu comecei a querer mais, a buscar mais! Um dos resultados disso tudo foi chegar no mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). E foi aqui, aprendendo e estudando cada vez mais sobre educação e os processos de ensino e de aprendizagem, onde pela primeira vez eu pude parar para refletir sobre o caminho que trilhei até este momento e como a educação sempre foi importante pra mim, mas mais ainda, quando percebi que posso mudar realidades com ela e não somente a minha realidade, como o que eu buscava antes.

Percebo então que esse desejo por mudança de realidades é na verdade uma busca por liberdade, aquela que meus pais desde cedo me diziam ser possível com a educação, mas que só fez sentido pra mim depois de caminhar com meus próprios pés o meu caminho e ter as minhas próprias experiências.

Um ponto que sempre me chamou atenção como estudante do curso de licenciatura em matemática, era perceber que muitos dos meus colegas eram demasiado cartesianos, gostavam muito de matemática e não tinham afinidade com outras áreas, como a história por exemplo. Ao iniciar minhas atividades docentes, percebia que isso começava desde cedo, havia uma divisão clara: exatas *versus* humanas *versus* biológicas.

É absolutamente normal que as pessoas tenham mais afinidade com alguma área, mas me incomodava perceber que parte das pessoas que gostam de matemática acha que, por isso, não precisam gostar ou “ser bons” em disciplinas das outras áreas, ou até mesmo, que a matemática não tem nada a ver com essas outras áreas, como se fossem conjuntos com interseção vazia.

Com um pouco mais de maturidade como estudante de matemática, é muito fácil perceber que essa interseção na verdade tem vários elementos, mas como levar isso de forma cativante aos meus alunos? Comecei então a buscar maneiras de responder tal questionamento, utilizando as ferramentas que estavam ao meu alcance e que eu tivesse mais afinidade.

Foi durante a graduação que tive um primeiro contato mais consciente com a História da Matemática, primeiro quando cursei a disciplina, depois como monitora da mesma disciplina. Ao final da graduação, pude utilizar a História da Matemática como metodologia de ensino em minhas aulas do Estágio Supervisionado, me levando assim a ter ainda mais interesse pelo tema. Essa com certeza seria uma das ferramentas que eu gostaria de utilizar.

Foi nesse período de formação enquanto docente que fiz parte do Programa de Educação Tutorial (PET), que entre muitos ensinamentos, me mostrou a necessidade de uma base matemática sólida na formação do professor de matemática, além da importância e possibilidade de apresentar demonstrações matemáticas (em nível adequado) aos nossos alunos, o que gerou como frutos alguns trabalhos, muito aprendizado e o desejo de continuar pesquisando sobre isso.

Foi também durante a graduação em Licenciatura em Matemática que tive meu primeiro contato com o campo da Argumentação, onde por meio de uma iniciação científica vinculada ao Programa de Educação Tutorial (PET) iniciei meus estudos sobre o tema, o que me levou a fazer parte do Grupo de Estudo e Pesquisa em Argumentação na Educação – GEPAEd da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

Cada discussão, compartilhamento de experiências, pesquisas, entre tantas outras coisas que puder participar nesse grupo, me fez acender o alerta da necessidade de que todos os alunos, mas especialmente dos alunos de matemática, desenvolvam as suas práticas argumentativas. São muitos os

benefícios do desenvolvimento dessas práticas, alguns deles serão apresentados mais a frente neste trabalho. Dessa forma, a argumentação também faria parte das ferramentas que eu gostaria de utilizar.

Já durante o mestrado me tornei integrante do LEEMAT, grupo de pesquisa político pedagógico em Leitura e Escrita em Educação Matemática, onde entre tantas leituras, discussões e desenvolvimento de atividades, fortificou-se a necessidade de uma pesquisa que apresente um caráter político, que dialogue com as realidades encontradas em nossa sociedade, e que tem me mostrado tão fortemente diversas formas de encarar o ensino de matemática e nosso trabalho como educadores desta área.

Até aqui pudemos, de forma breve, compreender como o tema desta pesquisa foi sendo delineado, mas pelo título desse trabalho já sabemos que além das ferramentas já mencionadas, mais uma foi escolhida: a geometria. E onde é que ela entra nisso tudo? Ao começar a estudar sobre as relações entre matemática e argumentação, um dos primeiros tópicos que emergem é a Grécia Antiga e a Lógica, e dentro da sala de aula, pensei que usar a geometria para fazer essa conexão podia ser muito conveniente. Já durante o mestrado, ao cursar a disciplina de Tópicos de Geometria, me convenci ainda mais de que seria a partir dela que eu iria buscar fazer essa ligação.

Por último, mas não menos importante, durante o exame de qualificação a banca examinadora me trouxe sugestões que enriqueceram a base teórica desta pesquisa, pude conhecer um pouco mais sobre o ensino por atividades, que é uma metodologia pautada na construção da autonomia do aluno na construção do seu conhecimento, o que já convergia bastante ao que já estava sendo pleiteado no desenvolvimento deste trabalho.

Dessa forma buscando unir essas áreas de meu interesse, sabendo da importância da utilização e desenvolvimento destas na sala de aula, aspirando demonstrar que a matemática pode e deve ser trabalhada em consonância com outras áreas e de forma mais atrativa e dinâmica, desenvolvo esta pesquisa.

1.1.2 Justificativa

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a capacidade de argumentar como uma das dez competências gerais propostas para a Educação Básica (Brasil, 2017). Para o desenvolvimento desta competência na Educação Básica, o documento orienta a utilização de processos pedagógicos que promovam ações que estimulem e provoquem nos alunos:

Processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum (Brasil, 2017, p. 535).

As práticas argumentativas para sala de aula vêm ganhando espaço na literatura internacional e nacional, por representarem uma forma de implicar de maneira ativa estudantes em processos de construção do conhecimento (Sasseron, 2015; Leitão, 2007) e de desenvolvimento de habilidades cognitivas orais e escritas (Macêdo, Ramírez & Leitão, 2020). Aprender a justificar as suas afirmações, a analisar e a questionar os métodos e as ideias dos outros, de forma a determinarem os seus pontos fortes e as suas limitações, permite aos alunos aprenderem a tornarem-se críticos no contexto matemático.

O desenvolvimento do pensamento argumentativo deveria ser uma parte fundamental da jornada educacional em matemática em todos os níveis escolares. Nunes e Almouloud (2013) observam que atividades focadas em estimular os alunos a se engajarem em argumentações matemáticas não são comuns em salas de aula em geral. Muitas pesquisas, especialmente em contextos internacionais, destacam a importância de introduzir tarefas que incentivem os alunos a explorar, conjecturar e provar em ambientes educacionais, mas essas práticas ainda não são amplamente adotadas na rotina escolar. Sem dúvidas, há necessidade de propostas que possam contribuir efetivamente para um ensino que priorize a argumentação em matemática (Boa Vida, 2005; Nunes, 2011).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) é necessário desenvolvermos em sala de aula de matemática situações que favoreçam o discente argumentar e defender seu ponto de vista, sobre proposições enunciadas no decorrer de soluções de problemas. Os PCN indicam também que os professores de matemática devem oferecer aos alunos

oportunidades para que eles possam fazer conjecturas, questionar ideias e validar afirmações por meio de experiências práticas e investigativas.

A História da Matemática tem grande destaque na educação matemática como um importante agente de cognição, no entanto, seu papel parece limitado ao seu aspecto de favorecer a motivação do aluno (Fossa, 2019), mas imagine que o papel da história nas aulas de matemática fosse apenas esse, motivador, estaríamos validando a ideia de que o ensino da própria história seria automotivador, o que sabemos que não é bem assim.

O uso conveniente da História da Matemática enriquece o aprendizado dos alunos fazendo-os discutir os impactos sociais, filosóficos e históricos do desenvolvimento da matemática na história, mas foi somente nos anos de 1970 que a ideia de que a história da matemática poderia desempenhar um papel na educação matemática começou amplamente a criar raízes na comunidade de educação matemática (Fried, 2014).

Assim, buscando também o desenvolvimento da autonomia do aluno na construção do seu conhecimento, temos o ensino por atividade, que é uma metodologia pautada na construção dessa, sendo essa a principal peculiaridade dessa metodologia, onde os conteúdos propostos possam ser descobertos pelo próprio aluno durante o processo de aprendizagem, tendo o professor apenas como orientador (Mendes; Sá, 2006, p. 13).

Essa metodologia busca apresentar os conteúdos matemáticos por meio da descoberta de leis gerais ou generalizações, sem a intervenção direta do professor em fornecer informações iniciais. Assim, os alunos constroem seu próprio aprendizado através de descobertas, ficando livres para explorar, conjecturar, discutir e então aplicar suas próprias conclusões. A escolha do ensino por atividade se justifica por acreditarmos nas potencialidades desta abordagem para promover um processo de aprendizagem da matemática mais dinâmico e participativo por parte dos estudantes, promovendo a argumentação.

1.1.3 Problema de pesquisa e objetivos

O principal questionamento que buscamos investigar nesta pesquisa é:

- Como aulas de geometria que utilizem a História da Matemática e o ensino por atividades podem favorecer o desenvolvimento da argumentação dos estudantes em Matemática?

A partir deste questionamento, trazemos então como objetivo geral analisar de que forma a utilização do ensino por atividades e da História da Matemática pode suscitar o desenvolvimento da argumentação em aulas de geometria. E para alcançarmos este objetivo, traçamos alguns objetivos específicos que devem nos guiar em nosso processo de pesquisa, são eles:

- Valer-se da História da Matemática como fonte para o ensino de geometria;
- Utilizar o ensino por atividades para promover práticas argumentativas nas aulas de geometria;
- Analisar a construção de argumentos desenvolvidos por alunos a partir das informações obtidas em sala de aula;
- Avaliar a prática implementada e suas contribuições para o desenvolvimento da capacidade de argumentar dos participantes.

1.2 Metodologia

1.2.1 Contexto da pesquisa

Esta pesquisa estava planejada inicialmente para acontecer em um período de seis aulas, numa turma do ensino médio da rede estadual da Paraíba onde a pesquisadora não era a professora titular, no entanto, próximo ao período em que ocorreria a ida à campo, a pesquisadora foi convocada para assumir um concurso público na rede estadual de Pernambuco, onde assumiu turmas do ensino médio e pôde efetuar a busca de dados e informações como titular da turma, trazendo assim benefícios à pesquisa.

Dessa forma, a produção das informações e dados analisados nesta pesquisa ocorreu numa escola da rede estadual de Pernambuco, localizada na cidade de Surubim-PE, no primeiro bimestre de 2024, entre os meses de fevereiro e abril, num período de 8 encontros. Os encontros eram semanais e compostos por duas aulas, cada uma com duração de 50 minutos.

A última reforma ocorrida no ensino médio trouxe atualizações para as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), com 1.800 horas destinadas a chamada Formação Geral Básica (FGB), e 1.200 horas aos Itinerários Formativos (IF). A carga horária destinada aos Itinerários Formativos está distribuída em tipos diferentes de unidades curriculares que são: obrigatórias, optativas, eletivas e projeto de vida.

Segundo o Currículo de Pernambuco (2021)

As Unidades Curriculares Eletivas, são aquelas que visam ampliar o universo de conhecimentos dos estudantes, em seus interesses mais diversos. Necessariamente, não precisam estar diretamente relacionadas à área de conhecimento escolhida pelo estudante. Essas eletivas serão propostas pela escola, em articulação com o interesse do educando e a formação dos professores, com acompanhamento da secretaria de educação do estado. Dessa forma, podem ser explorados conhecimentos sobre diversos temas, desde que atendam aos critérios acima descritos - interesse do educando e a formação dos professores - e corroborem para a formação dos estudantes. É importante salientar que dá-se ao estudante autonomia, nesse processo, para escolher qual eletiva cursará (Pernambuco, 2021. p. 63).

Ao receber a proposta de ministrar uma disciplina eletiva, a pesquisadora viu uma ótima oportunidade para a aplicação desta pesquisa e desenvolveu a disciplina *Poliedros de Platão: uma viagem por diferentes contextos*, e com duração semestral, ofertada para todas as turmas do 2º ano do ensino médio da escola, com limite de 40 vagas.

Por ser uma disciplina eletiva, os alunos tinham uma gama de opções, entre as quatro diferentes áreas de conhecimento, e após a apresentação da ementa para todos os alunos, a disciplina obteve 31 inscrições, com alunos de todas as turmas (2ºA, 2ºB, 2ºC e 2ºD).

Buscando responder à questão norteadora desta pesquisa, a disciplina foi pensada para possibilitar a investigação, o debate, o compartilhamento de ideias, o desenvolvimento do pensamento matemático e da argumentação, utilizando como base, a História da Matemática e o ensino por atividades.

O trabalho desenvolvido nesta disciplina teve como objetivo levar os alunos a compreenderem por si próprios os padrões e características dos poliedros, além do porque os poliedros regulares são apenas cinco, desenvolvendo passo a passo os conhecimentos necessários para se chegar a tal conclusão.

1.2.2 Produção de informações

Foi desenvolvido um conjunto de aulas e atividades sobre os poliedros, utilizando como metodologia de ensino a História da Matemática e o ensino por atividades, buscamos analisar a construção argumentativa dos alunos em suas observações e na realização das atividades. Os dados utilizados na pesquisa foram coletados por meio de diferentes fontes, ocorreram observações diretas durante a ministração das aulas e observações posteriores por meio dos registros escritos das atividades realizadas pelos alunos, o que possibilitou a análise das discussões geradas em sala.

A seguir, podemos ver o conteúdo programático da disciplina para os oito encontros que foram analisados nesta pesquisa:

Quadro 1 – Conteúdo programático da disciplina.

	CONTEÚDO PROGRAMÁTICO
22/02/2024	Apresentação da disciplina; Relembrando os polígonos: definição, elementos, classificação e nomenclatura.
29/02/2024	Diferenciando corpos redondos e poliedros – definição, elementos e propriedades; Conhecendo os principais personagens históricos envolvidos no desenvolvimento dos estudos sobre poliedros; Atividade investigativa sobre a nomenclatura dos poliedros platônicos.
07/03/2024	Apresentação de seminário, os alunos expuseram sobre vida e obra de dos matemáticos que contribuíram no desenvolvimento dos estudos sobre os poliedros; Descobrimos os poliedros na natureza: células, cristais, moléculas, organismos vivos, etc;
14/03/2024	Atividade investigativa sobre a relação entre quantidade de arestas e vértices em um poliedro ($2.A = V.n$).
21/03/2024	Atividade investigativa sobre a relação entre quantidade de arestas e faces em um poliedro ($2.A = F.n$).
04/04/2024	Exposição de conteúdo sobre ângulo poliédrico, seguido de atividade investigativa com materiais manipuláveis sobre o mesmo tema.
11/04/2024	Com kits formados por palitos e jujubas, os alunos construíram os cinco poliedros platônicos e depois disso investigaram a relação entre o número de faces, arestas e vértices dos poliedros, a chamada relação de Euler ($V + F = A + 2$).
18/04/2024	Pesquisa histórica e debate sobre o matemático Euler.

Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Como já comentado, as aulas tinham duração de 50 minutos e foram desenvolvidas tendo como base fundamental, sempre que possível, a História da Matemática, assim pôde-se discutir os principais filósofos e matemáticos envolvidos no desenvolvimento dos estudos sobre poliedros, de forma a levar os alunos a observarem e compreenderem algumas vivências e necessidades das antigas sociedades.

Imersos nesse contexto, os alunos foram motivados a partir de atividades exploratórias e da construção e manipulação de materiais concretos, compartilharem suas observações e descobertas. A partir de seus próprios conhecimentos, dúvidas e discussões, além da orientação da professora, os alunos foram provocados a argumentar e construir os conhecimentos matemáticos referentes ao tema estudado.

Ao decorrer deste trabalho apresentaremos aspectos observados em todas as aulas, mas focaremos em analisar os argumentos desenvolvidos em quatro atividades ocorridas entre as aulas dos dias 14/03/2024 e 11/04/2024.

1.2.3 Aspectos metodológicos da pesquisa

A escolha da metodologia a ser utilizada numa determinada investigação educacional depende de alguns fatores, como os objetivos pretendidos, os tipos de questionamentos que serão feitos, as condições para execução deste estudo, entre outros. Tendo em vista tais características, opto por uma investigação de caráter descritivo de cunho interpretativo.

Nesta investigação, foi utilizado o método da pesquisa pedagógica, mais especificamente o experimento de ensino, que consiste em um processo de intervenção para estudar as mudanças no desenvolvimento cognitivo dos alunos, por meio da participação ativa do pesquisador na experimentação.

Na visão de Freitas (2010), o experimento de ensino é uma investigação pedagógica de base histórico-cultural que tem, entre outros aspectos, como foco da pesquisa, o professor e os alunos em atividade de ensino e aprendizagem. Assim, o método do experimento de ensino vai além de um método de pesquisa, estendendo-se também, para método de ensino e de aprendizagem.

As vantagens do experimento de ensino são a semelhança com a própria aula, o que torna invisível a presença do pesquisador enquanto mero observador dos fatos e a escolha dos métodos e técnicas de ensino mais apropriadas ao nível e/ou a necessidade dos estudantes (Creswell, 2012), além de o experimento de ensino poder fornecer mais informações sobre os melhores percursos da aprendizagem para os profissionais, possibilita percepções dos estudantes em relação às descobertas científicas (Flick, 2009).

Como mencionado anteriormente nesse trabalho, em meados dos anos 1970 a ideia de que a História da Matemática poderia desempenhar um papel na educação matemática começou amplamente a criar raízes. Neste sentido, Miguel e Miorim (2019, p. 43) apresentam que estudiosos consideram que “a história pode ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar na atualidade”.

Como também já mencionado, é necessário que a História da Matemática não seja utilizada apenas como mero agente motivador nas aulas de matemática, à vista disso, Arsac, (1980, p. 398) diz que “a História da Matemática aparece como um elemento que poderia subsidiar a compreensão de certos tópicos matemáticos por parte do estudante, tópicos que lhe deveriam ser ensinados a partir de técnicas de resolução de problemas práticos”.

Em conjunto a isso, escolhemos trabalhar com a proposta do ensino de matemática baseado em atividades experimentais, pois esta prevê a condução do aprendiz por uma sequência de etapas, onde diversas noções matemáticas estão presentes. Portanto, a atividade deve não apenas incorporar a possibilidade de criar situações de ensino que reflitam essas noções matemáticas, mas também ser estruturada de maneira que sua implementação permita a configuração eficaz das etapas sucessivas a serem experienciadas pelo estudante.

O ensino por atividade é uma metodologia que foca na construção da autonomia do aluno em seu processo de aprendizado. A principal característica desta abordagem é permitir que os alunos descubram os conteúdos propostos por conta própria, enquanto o professor atua apenas como orientador (Mendes; Sá, 2006, p. 13).

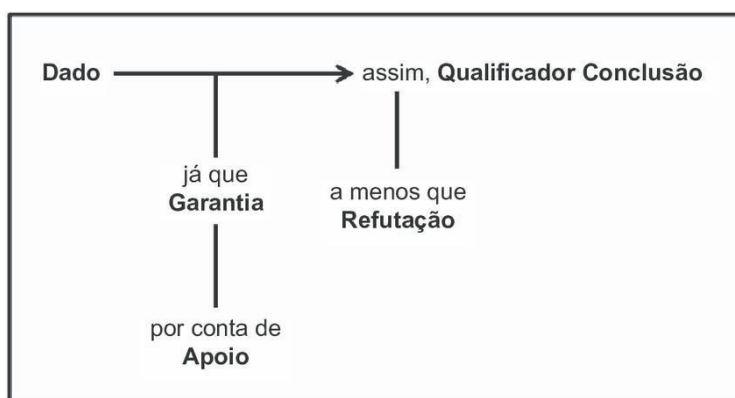
Essa metodologia busca apresentar os conteúdos matemáticos por meio da descoberta de leis gerais ou generalizações, sem a intervenção direta do professor no fornecimento de informações iniciais. Dessa forma, permite que o aluno construa seu aprendizado através de suas próprias descobertas, segundo Sá (2009):

A proposição do ensino de Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. Isso é evidenciado a partir da elaboração da mesma, até a sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante servirá de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção. Cabe, porém, ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso poderá ser decisivo no processo de aprendizagem do aluno (Sá, 2009, p.18).

Deste modo, o ensino não segue a sequência tradicional conduzida pelo professor, que normalmente envolve a apresentação de conceitos, definições, exemplos e exercícios. Em vez disso, começa com uma atividade composta por perguntas destinadas a instigar e orientar o aluno para a descoberta ou redescoberta de leis gerais ou generalizações. Dessa forma, o aluno é levado a identificar padrões que o ajudem a resolver a atividade e a assimilar o conhecimento. Assim, a atividade se concentra no próprio aluno e em seus interesses imediatos, o que fortalece a construção de seus esquemas mentais (Fossa, 2019). Nessa perspectiva, o aluno se torna um agente ativo e autônomo no processo de ensino/aprendizagem em que está envolvido.

Sendo por si só uma boa alternativa de estimular, na sala de aula, o espírito investigatório do aluno, quando aliado a História da Matemática, pode gerar bons resultados. No entanto, é nossa responsabilidade explorar essa curiosidade e orientar suas direções, de modo que as investigações se tornem eficazes, tenham base argumentativa e sejam produtivas para a reconstrução do conhecimento desenvolvido em períodos anteriores da história.

Como forma de representar e analisar a construção dos argumentos, escolhemos o esquema para representação dos argumentos proposto por Toulmin, que ficou conhecido como *Toulmin's argument pattern* (TAP), ou padrão de argumento de Toulmin (PAT), representado na Figura 1.

Figura 1 – Padrão de argumento de Toulmin (PAT)

Fonte: Toulmin, (2006, p. 150, com adaptações).

De acordo com esse modelo, temos os seguintes elementos: dado (D), garantia de inferência (G), apoio (A), qualificador (Q), refutação (R) e conclusão (C). A seguir estão descritos cada um desses elementos:

Dados: são o ponto de partida do argumento, correspondendo a alegações ou fatos, ou seja, afirmações que fundamentam uma conclusão.

Garantias: são afirmações que fornecem informações complementares ou que ilustram os dados, e funcionam como pontes que conectam os dados apresentados à conclusão.

Há garantias de vários tipos, e elas podem conferir diferentes graus de força às conclusões que justificam. Algumas garantias nos autorizam a aceitar inequivocamente uma alegação, sendo os dados apropriados; estas garantias nos dão o direito, em casos adequados, de qualificar nossa conclusão com o advérbio ‘necessariamente’; outras nos autorizam a dar provisoriamente o passo dos dados para conclusão; ou a só dá-lo sob certas condições, com exceções ou qualificações (Toulmin, 2001, p.144).

Apoio: são bases teóricas para as garantias que justificam ou exemplificam um dado.

Refutação: são afirmações que se opõem aos dados ou às garantias, indicando circunstâncias em que as garantias não se aplicam ou condições de exceção à conclusão.

Qualificadores: são um complemento à estrutura do argumento. Eles vão modular o raciocínio mostrando qual o seu grau de probabilidade, sua força ou sua fraqueza. Então, por exemplo, quando usamos expressões que estão dentro das áreas da argumentação humana, tais como “provavelmente”, “possivelmente”, “presumivelmente”, dentro de uma estrutura retórica, podemos atingir maior adesão dos envolvidos.

Conclusão: é aquilo que se procura estabelecer com a argumentação, ou seja, afirmações que buscamos legitimar como válidas.

De acordo com Toulmin (2006), é possível construir um argumento com sua estrutura básica, contendo apenas dados, conclusão e garantias de inferência. Estas por sua vez podem ser melhor entendidas considerando a sua ancoragem em conhecimentos de base.

O Padrão de Argumento de Toulmin teve sua origem nos estudos do campo jurídico, mas acabou se difundindo amplamente em outras áreas. No contexto da argumentação no ensino de matemática, Costa (2022) nos diz que existe uma quantidade significativa de pesquisas que utilizam esse modelo. Ainda segundo ela, a diversidade das formas como o aluno se apropria dos conceitos matemáticos, assim como os métodos que utiliza para raciocinar e justificar as soluções dos problemas propostos pelos professores, tem sido ilustrada pelo modelo em diversas pesquisas.

O padrão de argumento de Toulmin (TAP) enfoca a estrutura do argumento, os elementos que o compõem e as conexões entre eles, ao invés de seu conteúdo, visando compreender a coerência argumentativa. Contudo, no contexto do ensino, especialmente no ensino de matemática, também consideramos o conteúdo que se articula dentro desses elementos estruturais. Isso nos permite entender como os alunos utilizam os conhecimentos matemáticos para justificar seus pontos de vista ou soluções apresentadas aos problemas propostos.

Em relação aos componentes (dados, garantias, etc.), as argumentações podem contemplar o padrão de forma parcial ou total. Para

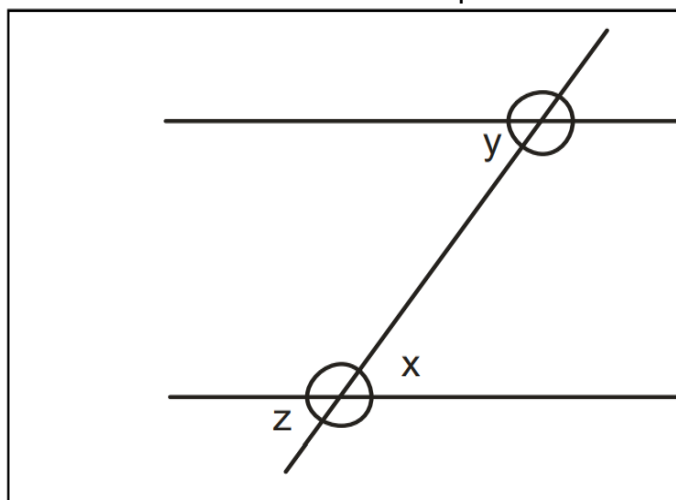
Nunes e Almouloud (2013) a explicitação desses componentes, em salas de aulas de matemática, depende das atividades propostas, da mediação do professor, do envolvimento dos discentes no processo, além de outros fatores relacionados à dinâmica que circunscreve argumentação como método de ensino.

Abaixo, apresentamos um exemplo, extraído de Sales (2010) em que o Padrão de Toulmin (2006) é aplicado à uma questão de matemática:

Questão: Quando, recorrendo ao recurso de um feixe de paralelas cortadas por uma transversal (fig. 2), um estudante diz:

- (1) X é alterno com y [e]
- (2) os ângulos alternos internos são de mesma medida, [tendo em vista que]
- (3) um é oposto pelo vértice ao ângulo (z) correspondente do outro, e
- (4) vale para [sempre que tivermos] paralelas cortadas por uma transversal.

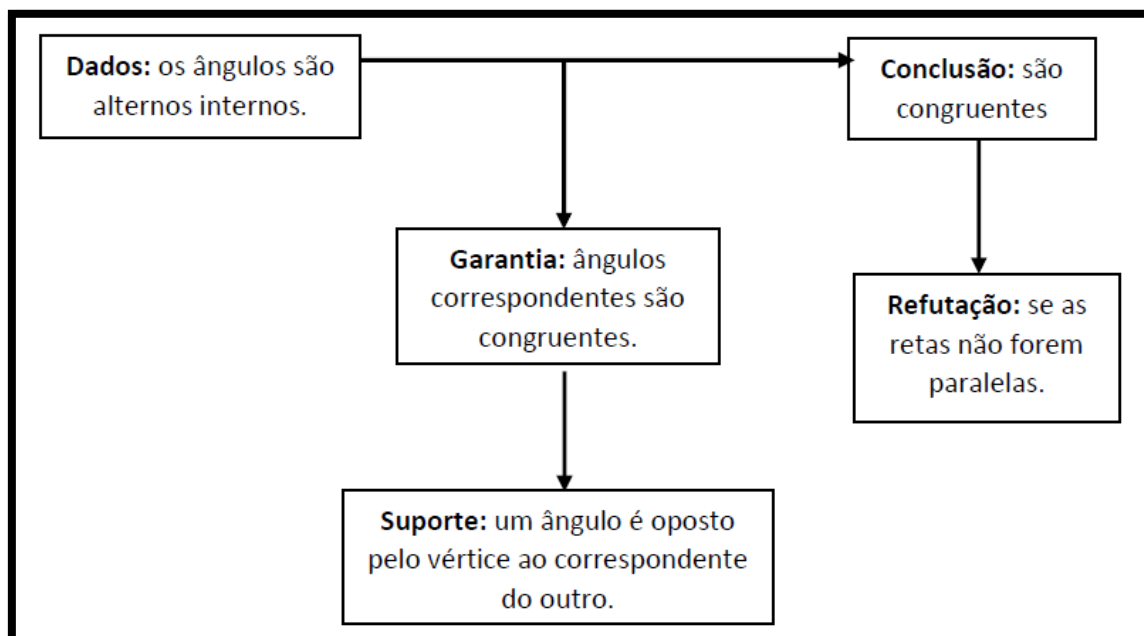
Figura 2 – Retas Paralelas cortadas por uma transversal



Fonte: Sales (2010, p. 111).

E utilizando o Padrão de Toulmin, é estruturado da seguinte forma:

Figura 3 – Padrão de Toulmin em problema de matemática.



Fonte: Sales (2010, p. 111).

Em nossa pesquisa, relatada nessa Dissertação, propomos que as análises das argumentações, oriundas das atividades exploratórias e das soluções de problemas propostos, possam ser constituídas pela organização dos argumentos no modelo estrutural, proposto por Toulmin (2006), e categorização pelos níveis de argumentação, propostos por Sales (2011), que estão apresentadas mais adiante.

2 ARGUMENTAÇÃO E MATEMÁTICA

2.1 Algumas definições

Quando falamos em argumentação, muitas são as definições para tal arte, e para darmos seguimento a este trabalho, precisamos estabelecer alguns delineamentos sobre esse assunto. Existem muitas definições para este conceito, várias delas bastante convergentes, outras com algumas diferenças que merecem ser apresentadas.

A argumentação é considerada como uma técnica ou método de discurso para estabelecer uma afirmação (Banegas, 1998), ou seja, um processo que produz um discurso lógico (não necessariamente dedutivo) sobre um dado assunto (Douek, 1999a). Para Leitão (2011), a argumentação é tomada como atividade intimamente ligada à reflexão e à construção de conhecimento, uma atividade discursiva presente em diversas esferas da nossa vida cotidiana. Para Van Eemeren *et al.* (1996) ela é definida como essencialmente verbal podendo manifestar-se também em ações não-verbais.

Argumentar, genericamente, consiste em oferecer um conjunto de razões a favor de uma conclusão ou oferecer dados favoráveis a essa mesma conclusão (Weston, 1996). Partindo disso, argumentos podem ser considerados tentativas de sustentar certos pontos de vista recorrendo à razão. No entanto, nos tempos atuais, especialmente na internet, muito se vê pessoas discutindo sobre diversos assuntos, esbravejando, reproduzindo discursos de ódio, tentando impor seus pontos de vista umas às outras, e percebemos que nem sempre argumentos recorrem à razão.

De acordo com Duval (1999), a argumentação não pode ser reduzida ao uso de um simples argumento, uma vez que requer a existência da capacidade de avaliar um argumento e opô-lo a outros argumentos, o que corresponde à dinâmica de qualquer situação de investigação ou debate. Ainda de acordo com Duval (1999), os argumentos tomam assim parte de um discurso, consistindo a argumentação no uso de um ou vários argumentos que estão logicamente ligados entre si (Douek, 1999).

Para Balacheff (1999), existem três autores cujas teorias, pelo contraste das suas problemáticas e pelas suas diferenças, podem ser utilizadas para estabelecer um sistema de referência em relação ao qual se podem situar os

trabalhos sobre argumentação: Chaïm Perelman, Stephen Toulmin e Oswald Ducrot. Enquanto que para Perelman a argumentação tem por objetivo convencer, para Toulmin a argumentação é encarada do ponto de vista estrutural, sendo as premissas do argumento aceites numa comunidade. Já para Ducrot a argumentação é colocada no coração da atividade do discurso e é dado enfoque às estruturas gramaticais.

Embora defendam diferentes concepções teóricas sobre a argumentação, estes autores permitem uma possível classificação da argumentação: a argumentação é o que convence uma outra pessoa, a argumentação tem uma estrutura lógica aceita na comunidade e a argumentação está presente em todo o discurso e fundada sobre elementos gramaticais (Reid; Knipping, 2010).

A problemática da argumentação está, portanto, associada ao reconhecimento do importante papel da comunicação e da interação social na aquisição de conhecimento (Duval, 1999). Este reconhecimento não só permite destacar a relevância da linguagem natural e a estreita ligação entre prova e convicção, mas também ajuda na comunicação, estimulando o debate de diferentes perspectivas.

A argumentação pode ser aplicada em muitos campos, como sociais, científicos, económicos, políticos, e ideológicos, sendo avaliada por áreas de conhecimento variadas, em particular pela área da educação matemática. No entanto, quer na matemática, quer em outras ciências, o contexto para produzir um argumento é diferente do encontrado em outras áreas da atividade social, onde se é levado a argumentar.

Ao fazermos o uso do termo argumentação no campo da matemática, é muito comum fazer relação com a prova matemática, a demonstração, e de fato, em diferentes trabalhos de investigação no âmbito da educação matemática, a argumentação frequentemente surge associada à prova (Reid; Knipping, 2010).

A educação matemática tem demonstrado interesse crescente em explorar a argumentação, o que tem levado a um aumento significativo de pesquisas nessa área. Esse interesse é motivado, em grande parte, pelo reconhecimento, por parte da filosofia e da linguística, de que a linguagem natural mais do que a linguagem formal é a base de pensamento e

comunicação humana, mas também pelo reconhecimento da própria educação matemática da importância do processo social na aprendizagem (Duval, 1999).

Embora haja um interesse evidente dos educadores matemáticos na importância da argumentação no processo de ensino, a relação desta com a demonstração não é completamente consensual. Em resumo, segundo Reid e Knipping (2010), é possível identificar quatro conclusões distintas entre os estudos realizados sobre o tema. De um lado, existem estudos que afirmam que a argumentação é fundamentalmente distinta da demonstração, o que constitui uma das causas da dificuldade de compreensão dos alunos sobre esta última. Por outro lado, há pesquisas que argumentam que a relação entre a argumentação e a demonstração é complexa, e que a primeira pode ser um obstáculo à aprendizagem da segunda. Alguns estudos apontam ainda que a argumentação é distinta da demonstração, mas é compatível com a sua aprendizagem. E por fim, existem pesquisas que enfatizam a importância da argumentação para o ensino e aprendizagem da demonstração.

Embora certos autores defendam que a demonstração possui características particulares e, portanto, não se assemelha à argumentação, Pedemonte (2002) acredita que a demonstração é uma forma particular de argumentação. Tal como a argumentação, a demonstração é um raciocínio (Duval, 1995), construído com o intuito de validar um enunciado e, nessa medida, tem também, por natureza, um caráter justificativo (Pedemonte, 2002).

Contudo, embora a argumentação resulte em um discurso lógico, ela não necessariamente implica em um raciocínio dedutivo, ao contrário da demonstração, que fornece uma justificativa dentro de um domínio teórico, onde uma proposição é derivada a partir de um sistema axiomático (Pedemonte, 2002).

De fato, frequentemente, as justificações em matemática são argumentações, embora nem todas as justificações matemáticas sejam consideradas argumentações matemáticas. Pedemonte (2002) destaca, assim, uma característica específica da argumentação matemática, que é o seu caráter justificativo, expresso por meio de um raciocínio, o que lhe confere um caráter de justificação racional.

Dessa forma, raciocínios matemáticos não podem ser reduzidos apenas aos raciocínios demonstrativos. Badegas (1998) observa que a análise de um

argumento em matemática nem sempre está relacionada com a prova matemática. Muitas das atividades e esforços humanos são argumentativos, mas não lógicos no sentido estrito (Krummheuer, 1998, p. 224).

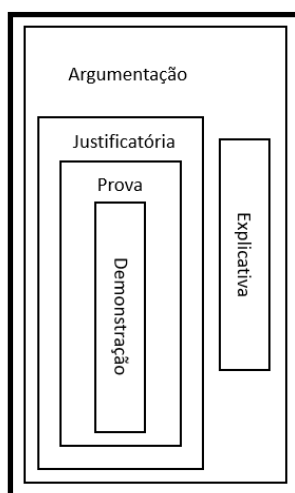
De acordo com Toulmin (2006), o domínio da comunicação racional seria estritamente restrito e a argumentação como uma forma possível de comunicação baseada na racionalidade, seria irrelevante, se a dedução lógica formal de conclusões, o raciocínio demonstrativo, fossem a única forma legítima de argumentação.

Para Sales (2011) “argumentar é a ação de fazer ou de mostrar como se faz e é também a ação de justificar porque se faz”. Ele traz duas classificações para a argumentação: explicativa e justificativa. A argumentação explicativa é aquela que não tem a pretensão de convencer alguém sobre determinado procedimento, já a argumentação justificativa tem por objetivo convencer. Em nosso caso, ou seja, no ensino de matemática, preocupa-se exibir o porquê do procedimento.

A argumentação não é um objeto matemático, ela tem suas raízes na Filosofia e no Direito. Representa qualquer forma de expressão do raciocínio, podendo ser uma explicação simples ou uma tentativa de persuasão. No contexto do estudo matemático, podemos identificar três níveis de profundidade na argumentação: a argumentação, a prova e a demonstração.

Sales (2011) elaborou o seguinte esquema para ilustrar essa situação:

Figura 4 – Esquema da Argumentação



Fonte: Sales (2022).

Até aqui pudemos notar que argumentação possui sentido amplo, porém para nossos estudos interessa especialmente as suas contribuições para o estudo da Matemática. Nesta perspectiva, Sales (2011) traz diferenças significativas entre argumentação, prova e demonstração. A demonstração, embora não seja um conceito puramente matemático, se processa através de objetos matemáticos ostensivos. A argumentação, mesmo sendo menos precisa e menos formal, também utiliza objetos ostensivos, matemáticos ou não, para cumprir o seu papel de procurar esclarecer ou convencer. Para Sales (2011), a prova, é uma explicação ou argumentação aceita por um grupo social. Não se trata necessariamente de algo rigoroso. É uma argumentação que possui coerência suficiente para convencer.

Arsac (1992) classifica a demonstração como uma prova aceita pela comunidade de matemáticos, ela é atemporal e impessoal. A demonstração, nessa perspectiva, é uma argumentação que satisfaz os requisitos exigidos por uma comunidade de especialistas. Demonstração é um caso particular de argumentação e de prova.

Como já mencionado, Sales (2011) classifica a argumentação em explicativa e justificatória, sendo esta última a que mais nos interessa no campo da educação matemática. A argumentação justificatória ainda pode ser classificada, quanto ao nível de racionalidade, em três níveis, são eles: folclórica, natural e racional.

A argumentação folclórica, ou baseada em evidências, inclui as categorias Ingênua e por Tradição. Casabó (2001) cunhou o termo "folclórica", e Pais (2008 apud Sales, 2011) explica que esse tipo de argumentação está repleto de jargões, crenças, tradições, estereótipos, soluções mágicas, modismos e mitos presentes no imaginário das pessoas. Embora nem todo argumento folclórico seja necessariamente errado, sendo às vezes uma simplificação de uma questão, a predominância desse tipo de explicação nos fenômenos educacionais compromete a profissionalização da carreira docente (Pais, 2008 apud Sales, 2011).

Argumentos ingênuos são aqueles que têm um caráter infantil ou simplista, como afirmar que um time vai ganhar porque "meu time não vai me

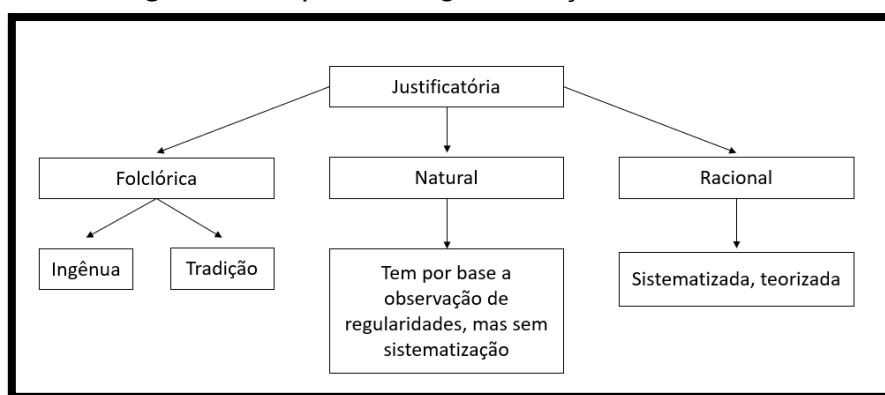
decepcionar" ou que um carro é melhor porque "tem mais presença e é mais bonito".

A argumentação por Tradição baseia-se em experiências e fatos observados, mas não questionados. Alguns exemplos de respostas a perguntas sobre a correção de um método incluem: "porque eu aprendi assim", "porque o professor fazia assim" ou "o livro traz assim". Um exemplo prático é a resolução de equações onde as frações são reduzidas ao mesmo denominador e depois os denominadores são eliminados, aceito como uma regra sem necessidade de explicação (Sales, 2010).

Já a argumentação é natural quando há elaboração de um raciocínio, um encadeamento de ideias, uma articulação entre as partes do raciocínio, mas falta sistematização. E quando o argumento se baseia em razões lógicas e evidências fundamentadas, quando há coerência e consistência nas premissas e conclusões e é sistematizado, temos então a argumentação racional.

Abaixo vemos na figura uma síntese do esquema apresentado:

Figura 5 – Tipos de Argumentação Justificatória



Fonte: Costa (2022, p. 41, com adaptações).

No ensino de matemática, apoiamos o uso da argumentação justificativa, pois acreditamos que não é suficiente apenas apresentar o algoritmo. É essencial justificar o processo, discutindo com os alunos os procedimentos subjacentes às fórmulas e, assim, incentivando a argumentação em sala de aula.

2.2 Primeiros passos na história

Sendo a argumentação uma forma de comunicação presente no cotidiano, ela não é uma atividade exclusiva da matemática. Sociedades democráticas, que permitem e encorajam discussões, debates e divergências de opinião, favorecem o seu desenvolvimento.

Os primeiros registros de teorias sobre argumentação surgiram na Grécia Antiga, uma sociedade em que a palavra era uma ferramenta política fundamental para comunicar ideias e persuadir os outros (Pedemonte, 2002). Devido à sua condição geográfica, a Grécia não desenvolveu um governo central. A organização política dos gregos era a polis (cidade-estado). Em todas as cidades-estado, no entanto, cada indivíduo estava sujeito à lei, o que incentivava os cidadãos a desenvolver habilidades de argumentação e debate (Katz, 1993).

A Grécia Antiga é considerada o ponto de partida da civilização ocidental e do espírito científico, que busca explicar o Universo de forma racional. Os pensadores gregos não aceitavam passivamente as respostas de outros povos e gradualmente perceberam que o mundo ao seu redor era compreensível por meio da investigação racional.

Surgiu então uma nova visão de mundo, na qual o homem grego almejava ter controle sobre a natureza e a sociedade. Era exigido que as leis fossem lógicas, e a defesa de uma causa implicava o uso da argumentação para convencer os outros de que se respeitava a lei (Grimberg, 2008).

Na democracia grega, a questão sócio-política favoreceu um sistema político e social onde as diferentes partes disputavam seus interesses através de argumentos, criando um contexto em que a argumentação lógica era valorizada (Reid; Knipping, 2010), dessa forma, a argumentação política cotidiana serviu como modelo para o desenvolvimento da demonstração.

O início da matemática na Grécia está relacionado com a formação das cidades e a busca por explicações sobre o Universo, o que levou à ideia de que a matemática precisava ser demonstrada. O desenvolvimento de uma teoria da demonstração e, conseqüentemente, a axiomatização da matemática, segundo Pedemonte (2002) foram respostas a uma dupla necessidade: descrever um conhecimento e obter sua aceitação. Assim sendo, existia a necessidade de

em matemática se fazerem afirmações absolutas, isto é, afirmações que pudessem ser aplicadas a toda instância sem qualquer exceção.

A organização axiomática-dedutiva da matemática e a preocupação com a rigidez da prova foram evidenciadas no livro *Os elementos* de Euclides. Qualquer que tenha sido a razão, a origem da demonstração é creditada aos gregos, cuja inovação se espalhou por outras culturas, além disso, a Antiga Grécia notabilizou-se pela sua atenção singular a um aspecto adicional: a ênfase na argumentação, promovendo a discussão como forma de exercitar a razão.

2.3 Argumentação nas aulas de ciências e matemática

Caminhando agora para os tempos atuais, para as aulas de ciências e matemática, e tendo em vista a importância da organização, sistematização e apresentação de resultados, por parte dos alunos, principalmente, na formulação e teste de conjecturas durante uma argumentação, Gil (2012) nos diz que:

Uma vez que o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que se iniciam através da simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem, progressivamente, para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos números, da geometria e da álgebra, a história da matemática pode ter um papel muito útil na criação de contextos que permitam aos alunos pensar e discutir matematicamente (Gil, 2012, p.1).

As práticas argumentativas para sala de aula vêm ganhando espaço na literatura internacional e nacional, elas representarem uma forma de implicar de maneira ativa estudantes em processos de construção do conhecimento (Sasseron, 2015; Leitão, 2007) e de desenvolvimento de habilidades cognitivas orais e escritas (Macêdo; Ramírez; Leitão, 2020).

Defende-se que o uso da argumentação para construção do conhecimento se deve ao seu potencial epistêmico em que estudantes precisam revisar seus pontos de vista, justificar de forma substancial seus argumentos e avaliar de modo criterioso os argumentos de outros estudantes (Larrain, 2009), todos estes movimentos discursivos são entendidos como imprescindíveis ao aprender conteúdo científico. No campo do desenvolvimento cognitivo se entende que a argumentação é importante pois

estimula a metacognição (De Chiaro; Aquino, 2017) e práticas de autorregulação do pensamento (Macêdo; Ramírez; Leitão, 2020).

Existem muitos estudos sobre a importância da argumentação na educação, destacando a necessidade de aprimorar a habilidade argumentativa dos alunos, buscando melhorar a aprendizagem e contribuir para uma formação cidadã mais completa. (Boavida, 2005; Leitão, 2007).

Sobre essa temática, Banks-Leite (2011, p. 8) discorre sobre “a necessidade de se promover o desenvolvimento de capacidades/competências do argumentar como forma de adquirir um pensamento crítico, fundamental para que os indivíduos atuem em situações envolvendo posicionamento e valores”. De acordo com as intenções e atitudes do educador para promover a argumentação em sala de aula, os estudantes podem apresentar argumentos estruturados que explicitem suas ideias, hipóteses e opiniões acerca dos conteúdos matemáticos (Sasseron, 2013; Almeida, 2017).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática defendem a importância de uma formação cidadã contemporânea, em que os alunos devem ser estimulados a construir e analisar diferentes processos de resolução de situações-problemas, buscando argumentos plausíveis para solucioná-los (Brasil, 1998). Nesse documento norteador para o ensino de Matemática, a argumentação “está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la” (Brasil, 1998, p. 70).

Em 2021, os autores Lima, Queiroz e Macêdo efetuaram uma revisão sistemática sobre os trabalhos publicados sobre o uso da argumentação no ensino de ciências, os autores concluem um vertiginoso crescimento da pesquisa na área entre os anos de 2011 e 2021, mas nos mostram que apenas um dos trabalhos analisados era especificamente da área de matemática.

Tendo em vista esse resultado encontrado pelos autores, realizei minha própria pesquisa, desta vez buscando trabalhos que envolvessem argumentação associada a história da matemática. Utilizei como base de dados o catálogo e teses e dissertações da CAPES, os termos buscados foram “*matemática*” e “*argumentação*” onde inicialmente aparecem 1254 resultados, decidi utilizar os dados da *última década* (2013-2023) onde obtive então 727 resultados, já na área de avaliação escolhi os trabalhos na área de *ensino*,

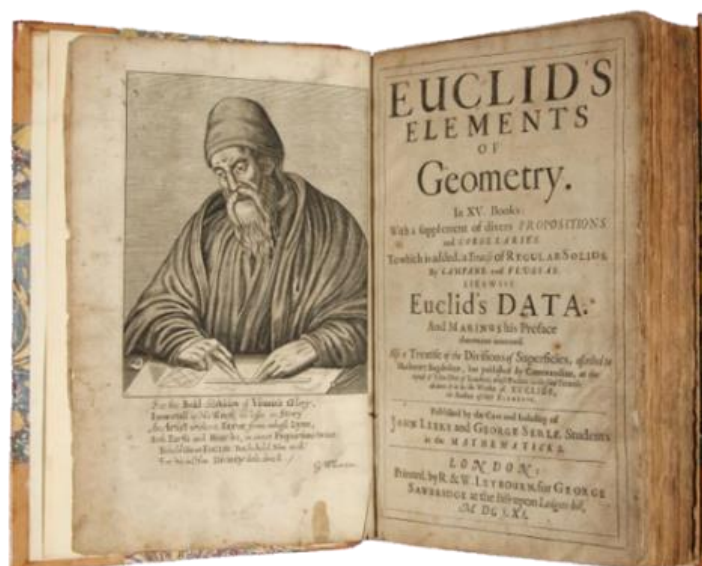
obtendo por fim 449 trabalhos. Para minha surpresa, apesar de haverem muitos novos trabalhos que envolvem matemática e argumentação, nenhum deles utiliza a história da matemática.

3 NOS CAMINHOS DA GEOMETRIA

3.1 Axiomatização da geometria

Acredita-se que foi com o matemático grego Tales de Mileto [624-558 a.C.] que se iniciou a preocupação de introduzir o formalismo na matemática, fundamentado no raciocínio lógico-dedutivo. No entanto, o primeiro e o mais famoso modelo axiomático que se conheceu foi o da geometria plana. Esse modelo foi estabelecido pelo matemático grego Euclides, por volta do século III a.C., em seu famoso tratado *Os elementos* (Figura 1).

Figura 6 – Fac-símile do livro *Os elementos*



Fonte: AFC Educação (2024)

O livro *Os elementos* é composto por treze livros, sendo que os seis primeiros se concentram na exploração da geometria plana. Euclides iniciou sua obra estabelecendo afirmações fundamentais denominadas axiomas ou postulados. A partir desses princípios, ele provou outras proposições que passaram a ser conhecidas como teoremas.

Dessa maneira, Euclides organizou e estruturou todo o conhecimento geométrico disponível na época com base nesses axiomas e noções comuns. Essa notável abordagem metodológica é consistentemente evidenciada ao longo de sua obra e hoje é reconhecida como o modelo euclidiano. Na figura

abaixo (Figura 7) temos uma edição grega de *Os elementos*, datada do Século IX e exposta no Museu do Vaticano, na qual vê-se uma demonstração do célebre Teorema de Pitágoras.

Figura 7 - *Fac-símile* da edição grega d'*Os elementos* (séc. IX)



Fonte: Moraes Filho (2016).

Euclides começa definindo algumas noções comuns, alguns postulados e, a partir destes, deduz os principais resultados da geometria e teoria dos números então conhecidos. Ainda hoje, em nossas escolas, quando devidamente ensinada, aprende-se geometria plana baseada em modelos axiomáticos.

São inúmeras as contribuições dadas por Euclides à geometria e aos estudos concernentes a ela com seu livro *Os elementos*, por esse motivo, ele é considerado o pai da geometria. Na Figura 8 vemos um *fac-símile* da capa da edição brasileira do livro (Euclides, 2009).

Figura 8 - *Fac-símile* da capa da edição brasileira do livro *Os elementos*



Fonte: Euclides (2009).

Morais Filho (2016) nos conta que, no final do século XIX e começo do século XX, houve uma preocupação muito grande em tornar as ideias e os procedimentos matemáticos mais rigorosos. Foi quando grande parte da Lógica-Matemática que hoje conhecemos começou a ser desenvolvida. Com essa finalidade, o modelo axiomático ressurgiu com toda força, sendo aplicado a outras áreas além da Geometria.

O modelo euclidiano é caracterizado pela sistematização lógica do conhecimento matemático a partir de elementos primitivos tais como definições, axiomas e postulados. Essa sistematização é expressa através de teoremas e corolários que são deduzidos dos elementos primitivos.

Destacamos aqui que não foi Euclides o criador desse sistema axiomático, por volta de 430 a.C., um grupo de filósofos da Grécia Antiga, os chamados *sofistas*, menos preocupados com a tradição, abordavam problemas de natureza matemática, como parte de uma investigação filosófica do mundo natural e moral, desenvolvendo uma matemática mais no espírito da compreensão que da utilidade (Struik, 1989). O autor ainda relata que no estudo de um problema central na matemática grega

Hipócrates demonstrou que os matemáticos gregos da idade de ouro da Grécia possuíam um sistema ordenado de geometria plana, em que o princípio da dedução lógica (apagoge), que permitia inferir uma

afirmação a partir de outra, tinha sido inteiramente aceite. Era o início da axiomática, como é indicado pelo nome do livro supostamente escrito por Hipócrates, Elementos (Stoicheia), que é o título de todos os tratados axiomáticos gregos, incluindo o de Euclides (Struik, 1989, p. 75 – 76)

Ainda de acordo com Struik (1989, p. 76), a obra de Hipócrates, citada acima, “já se situa naquilo a que podíamos chamar tradição euclidiana; no entanto, precede Euclides em mais de um século”. Assim, os primeiros registros de um sistema axiomático que define o modelo euclidiano datam da Grécia Antiga, precedendo a era de Euclides. Esses registros incorporam estruturas que empregam uma abordagem rigorosa de regras para inferência lógica e dedutiva na construção de um conjunto de verdades, fundamentado sempre nos axiomas ou postulados, que representam os pressupostos iniciais. Segundo Eves (2004, p. 115),

Em algum momento entre Tales, 600 a.C., e Euclides, 300 a.C., rematou-se a noção de discurso lógico como uma sequência de deduções rigorosas a partir de algumas suposições iniciais explicitamente enunciadas. Esse processo, o chamado *método postulacional*, tornou-se a verdadeira essência da matemática moderna; indubitavelmente, grande parte do desenvolvimento da geometria segundo esse modelo deve-se aos pitagóricos. Sem dúvida uma das maiores contribuições dos gregos primitivos foi o desenvolvimento desse método de raciocínio postulacional.

Podemos então perceber que o modelo euclidiano tem desempenhado um importante papel não somente para a matemática, mas também para outras ciências que, a partir de sua estruturação e argumentação lógica, tem servido de base para a compreensão de outros conceitos, característica marcante do livro de Euclides.

3.2 Geometria e argumentação

Apesar de ser reconhecida a importância da Geometria para o desenvolvimento humano e sua relevância para a realização de atividades cotidianas, este conhecimento matemático foi durante muitos anos colocado em segundo plano nas aulas de Matemática.

A falta de ênfase no ensino de Geometria ao longo da história da educação brasileira ainda tem impacto nos processos de ensino e aprendizagem atualmente, resultando em professores e alunos com pouco

domínio do assunto e dificuldades significativas em lidar com questões que envolvem conceitos geométricos (Pavanello, 1989, 2004; Lorenzato, 1995; Nacarato, 2007).

O ensino e aprendizagem da Geometria estão intrinsecamente ligados à manipulação, mas uma das principais características da Matemática é a exigência da presença de hipóteses para fundamentar conclusões. Essas hipóteses devem ser validadas e comprovadas por meio de demonstrações, procedimento fundamental na disciplina. No entanto, grande parte dos estudantes sai do Ensino Médio sem nunca ter feito ou até mesmo visto uma demonstração.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), é importante que o desenvolvimento da argumentação seja enfatizado e visto como uma habilidade essencial que deve ser aprimorada com a ajuda da Matemática. Os PCN também afirmam que a argumentação é fundamental para o desenvolvimento das habilidades necessárias para dominar a demonstração, que, como mencionado anteriormente, é raramente praticada, principalmente no Ensino Médio.

A falta de prática na demonstração pode ser atribuída à sua percepção como uma tarefa difícil para os alunos, enquanto a falta de estímulo à argumentação pode estar relacionada à sua suposta falta de objetividade. Em uma organização didática centrada na aprendizagem de técnicas, argumentar torna-se uma prática incoerente e demonstrar, uma prática desnecessária (Sales, 2010).

Já trouxemos aqui que argumentação é uma das práticas intelectuais mais antigas na história da humanidade, quer seja no plano cultural mais amplo do conhecimento social e científico e mais particularmente na construção do saber matemático. Para Pais (2016) “apresentar aos seus semelhantes argumentos convincentes sempre representou um tipo de poder, um nível de entendimento que promove a inteligência humana, bem como serve de instrumento para efetivar as ações individuais e institucionais”.

A relação entre argumentação e demonstração na matemática recebe de Arsac (1992) uma distinção clara e objetiva. Demonstração é um caso particular de prova que, por sua vez, está inserida num contexto mais amplo denominado argumentação.

Anteriormente neste trabalho pudemos perceber que o modelo euclidiano tem desempenhado um importante papel não somente para a matemática, mas também para outras ciências que, a partir de sua estruturação e argumentação lógica, tem servido de base para a compreensão de outros conceitos, característica marcante do livro de Euclides.

Com uma forte alusão a isto, reproduzimos aqui uma fala de Abraham Lincoln, presente no livro *White House with Abraham Lincoln: The story of a picture*, de Cartpenter (1866), conforme apresentado por Oliveira (2018):

Durante meus estudos de direito, constantemente me deparava com a palavra demonstrar. Inicialmente achei que compreendia seu significado, mas logo percebi que não. Me perguntei: o que faço quando demonstro mais do que quando penso ou provo? Como que demonstração difere de qualquer outra prova?

Eu consultei o dicionário Webster. Ele falava de uma “certa prova”, “uma prova além da possibilidade de dúvida”; mas eu não podia formar nenhuma ideia do tipo de prova que ela era. Pensei que diversas coisas eram provadas além da possibilidade da dúvida, sem recurso para nenhum processo extraordinário de razão, ao menos, como eu considerava que demonstração seria. Eu consultei todos os dicionários e livros de referência que pude encontrar, mas sem melhores resultados. Você poderia muito bem ter definido azul para um cego.

Afinal, eu disse, “Lincoln, você nunca será um advogado se não compreender o que demonstrar significa”; E eu larguei meu curso em Springfield, voltei para a casa dos meus pais e fiquei lá até poder fazer qualquer proposição nos seis livros de Euclides que tinha. Eu então descobri o que “demonstrar” significa e voltei para os meus estudos de direito.

(Carpenter, 1866, p.313-314 apud Oliveira, 2018, p.19-20, tradução de Oliveira).

Nesse trecho, Lincoln fala sobre a palavra demonstração e sua busca pelo que, para ele, seria seu verdadeiro sentido. Ele conclui que demonstrar significa provar sem nenhuma dúvida, e cita o livro de Euclides como caminho para chegar a tal conclusão, nos mostrando que ele utilizou do sistema lógico de Euclides na construção de seus argumentos. Neste sentido, Oliveira (2018) diz que devemos pensar em como podemos rigorosamente provar determinadas proposições, estando de uma forma moderna, porém essencialmente, estudando o que Euclides estabeleceu, com a certeza de que quando afirmamos algo podemos realmente prová-lo, o que é na verdade um pouco das ideias mais fundamentais da matemática.

Desenvolver a capacidade de argumentar se apresenta como uma necessidade cada vez mais importante em nossa atual sociedade, caracterizada principalmente pela rápida e curta comunicação e em que o diálogo se apresenta como uma rica e as vezes rara moeda.

Para Hanna e Jahnke (1996), a contribuição potencial da prova na Educação Matemática é a comunicação do entendimento matemático, com o objetivo de encorajar os estudantes a fazer conjecturas, explicar seu raciocínio, validar suas afirmações, além de discutir e questionar seu próprio raciocínio e a argumentação dos demais colegas.

3.3 O ensino de geometria no Brasil

Segundo Pavanello (1989), foi somente a partir da década de 1950 que surgiram novas propostas para melhorar o currículo e o ensino de Matemática. Nessa época, surgiram os primeiros congressos em nível nacional com foco exclusivo no ensino de Matemática nas escolas. Foi nesses congressos que as primeiras ideias do Movimento Internacional da Matemática Moderna começaram a ser discutidas e divulgadas, culminando em uma expressiva disseminação dessas ideias na década de 1960.

Nessa década, o ensino de Matemática no Brasil passou por mudanças significativas na educação básica. Essas mudanças foram motivadas por uma discussão internacional sobre uma nova abordagem para o ensino de Matemática, que propunha uma aproximação entre o ensino nas escolas e o desenvolvido nas universidades, utilizando a mesma linguagem e estrutura empregada pelos matemáticos da época. Essa abordagem ficou conhecida como Movimento da Matemática Moderna (MMM).

A ideia central da Matemática Moderna consistia em trabalhar a matemática do ponto de vista de estruturas algébricas com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Sob essa orientação, não só se enfatizava o ensino da álgebra, como se inviabilizava o da Geometria da forma como este era feito tradicionalmente. (Pavanello, 1989, p. 103)

Pires (2000) destaca que as mudanças propostas pelo Movimento da Matemática Moderna foram inspiradas pelo grupo de matemáticos franceses, conhecido pelo pseudônimo de Nicolas Bourbaki. Esse grupo organizou a

Matemática em termos de estruturas abstratas, sem se preocupar com as aplicações práticas para o ensino dessa área de conhecimento.

Dessa forma, com a forte liderança do professor Osvaldo Sangiorgi, que esteve à frente do MMM no Brasil, iniciou-se a introdução da matemática moderna no país. Na década de 1960, Sangiorgi participou de um seminário de verão na Universidade do Kansas, onde teve contato com matemáticos renomados, como George Springer, que o auxiliou a difundir o MMM em um curso de aperfeiçoamento organizado por ele mesmo no ano seguinte no Brasil (Oliveira, 2018).

Diversos indícios apontam que o regime militar que governava o Brasil naquela época colaborou no processo de divulgação do MMM no país, uma vez que esse assunto não era sujeito à censura. Para Oliveira, Silva e Valente (2011, p. 39), “a divulgação de atividades que, alegadamente, favoreciam o desenvolvimento do país ia ao encontro dos interesses da ditadura militar”, o que sugere que, de maneira indireta, o Movimento conseguiu ocupar as lacunas deixadas por manchetes que foram censuradas.

Durante esse período, o ensino de Geometria era predominantemente estático e fundamentado em um método axiomático, baseado em provas e demonstrações, influenciado pela obra de Euclides (Miguel; Fiorentini; Miorim, 1992). Essa abordagem teórica e axiomática não favorecia a inclusão de questões práticas ao contexto escolar e, muitas vezes, a Geometria era negligenciada nos anos iniciais de ensino. Quando abordada, era limitada ao reconhecimento de figuras geométricas e ao cálculo de perímetro e área de figuras planas.

Para Piaget (1984, p. 14), “no campo da Matemática, muitos fracassos escolares se devem àquela passagem muito rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico)”. Referindo-se ao ensino da Matemática Moderna, Piaget (1984) indicava que essa experiência poderia ser prejudicada pelo fato de que:

[...] embora seja ‘moderno’ o conteúdo ensinado, a maneira de apresentá-lo permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente adotar [...] uma forma axiomática. Uma coisa, porém, é inventar na ação e assim aplicar praticamente certas operações; outra é tomar consciência das mesmas para delas extrair um conhecimento reflexivo e, sobretudo

teórico, de tal forma que nem os alunos nem os professores cheguem a suspeitar de que o conteúdo do ensino ministrado se pudesse apoiar em qualquer tipo de estrutura natural. (Piaget, 1984, p. 16-17).

Com o passar do tempo, esses eventos acabaram gerando certo receio em muitos professores em relação ao ensino de Geometria e outras áreas, resultando em uma incerteza sobre o que ensinar. Como consequência, diferentes aspectos passaram a ser valorizados no Ensino Fundamental, e essa situação continua presente até os dias atuais. Em pesquisa realizada com professores da educação básica, Azambuja (2004) coloca:

[...] essa mudança refletiu-se, principalmente, nos livros didáticos, que conservaram as demonstrações mais tradicionais, porém mudaram radicalmente os exercícios, quase que eliminando os de natureza lógica e/ou demonstrativa. Além disso, os professores deixaram de estimular os alunos a fazerem demonstrações, alegando que não há tempo para ensinar Geometria, nem demonstrar teoremas. (Azambuja, 2004, p. 45).

Para Oliveira, Silva e Valente (2011), os livros didáticos são apontados como principais instrumentos de divulgação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil por dois motivos: “porque alcançavam os municípios mais afastados dos grandes centros, onde os professores não tinham outras oportunidades de acesso às informações sobre o movimento; porque tinham um impacto quase que direto e imediato sobre a sala de aula” (Oliveira, Silva e Valente, 2011, p. 33).

Além de serem uma forma importante de divulgação, eles detinham uma grande influência nas salas de aula. Muitos pesquisadores argumentam que os conteúdos geométricos estavam sendo negligenciados e frequentemente tratados apenas nos capítulos finais dos livros didáticos (Oliveira, 2018). Contudo, segundo Santos e Nacarato (2014, p. 14), os livros didáticos existentes naquela época traziam os conteúdos geométricos nos capítulos finais. Isso, de certa forma, contribuiu para que o ensino desse conteúdo se tornasse bastante insatisfatório, provocando o seu abandono pela escola.

De acordo com os PCN, os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (Brasil, 1997, p. 39). O artigo 26º da Lei nº 9.394 de 1996 (LDB), indica que os currículos devem abranger a aprendizagem da área da

matemática em caráter obrigatório, e relacioná-la ao mundo físico, natural, à realidade social e política.

Mais atualmente, visando garantir ao cidadão um ensino de qualidade, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi elaborada com o intuito de estabelecer não apenas o conhecimento básico, mas o essencial para a formação integral do cidadão (Brasil, 1996). Pela Base Nacional Comum Curricular,

A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência". (Brasil, 1996, p. 271).

Pais (2016) mostra que há uma tentativa imediata de valorização do ensino da geometria como sendo um conteúdo disciplinar importante à formação intelectual do aluno de primeiro grau; há também um certo reconhecimento de que esse ensino não tem sido desenvolvido de forma satisfatória e, finalmente, destaca-se que a percepção da importância de procedimentos lógico-dedutivos na construção do conhecimento geométrico não é normalmente manifestada pelos professores.

Conforme mencionado anteriormente, o Movimento da Matemática Moderna trouxe uma mudança no ensino da Matemática, enfatizando o uso de símbolos e introduzindo níveis mais avançados de abstração. No entanto, essa abordagem acabou distanciando a disciplina do contexto cotidiano, resultando em um baixo domínio de Geometria Espacial por parte dos alunos formados nesse currículo, além de uma limitada compreensão da relação entre esses conteúdos e a realidade ao seu redor.

Para Fucks (1970) a Matemática Moderna praticamente eliminou a geometria dos currículos escolares, dando ênfase aos símbolos e terminologias matemáticas excessivamente, e como consequência ocorreu uma defasagem na aprendizagem desse conteúdo, levando-nos a refletir sobre forma como os

docentes trabalhavam, bem como quais os erros que os discentes cometiam com maior frequência.

Quando consideramos o ensino da geometria nos dias de hoje, é essencial revisitar e reavaliar tanto o currículo quanto os objetivos do ensino da matemática. Isso é crucial devido à importância dessa disciplina como uma ciência que desempenhou e continua a desempenhar um papel significativo em nossa sociedade.

A respeito do ensino de geometria no Brasil, o Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de Pesquisa Político-Pedagógico (LEEMAT) têm empreendido esforços para compreender como se dá o ensino atualmente. Dentre outros projetos, no *Do espaço ao ponto, da universidade à escola*, do qual somos integrantes, chegou-se à conclusão que ainda há muitas dificuldades a serem superadas, principalmente no que diz respeito à formação que se tem nas licenciaturas em Matemática, uma vez que há pouca ênfase no ensino de geometria.

As constatações do LEEMAT levam à afirmação de que, embora se tenha avançado nas propostas acerca do ensino de geometria, tanto nos PCN quanto na BNCC, o ensino de geometria ainda é preterido porque muitos professores não se sentem seguros com o seu ensino. Isto pode ser constatado em Santos (2023), Silva (2023), Sousa (2022), Leite (2022), Oliveira (2018), dentre outras dissertações de mestrados produzidas por membros do grupo.

3.4 Os poliedros de Platão

Uma das pesquisas desenvolvidas na alçada do LEEMAT foi a que resultou na dissertação de Oliveira (2018), a qual versa sobre uma análise de algumas edições dos guias dos livros didáticos, disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), para o Ensino Médio, e de livros didáticos que foram aprovados por este PNLD para o ano de 2018. Oliveira (2018) propõe uma investigação que envolve o modo como o modelo euclidiano está presente nas abordagens dos poliedros de Platão nos livros didáticos analisados, relacionando-as com o Movimento da Matemática Moderna,

ênfatizando a presença d'Os *elementos* de Euclides em tais livros. Partimos, então, dessa narrativa apresentada por Oliveira (2018).

O conteúdo de geometria escolhido para desenvolver esta pesquisa foi o tópico de geometria espacial de Poliedros de Platão, tema este escolhido por diversos motivos, tal qual o estímulo ao pensamento crítico, dado que a compreensão dos poliedros de Platão exige raciocínio lógico e abstrato, estimulando o desenvolvimento do pensamento crítico e da resolução de problemas; a contextualização histórica e cultural, pois estudar os poliedros de Platão também oferece uma oportunidade de explorar a história da matemática e a influência da cultura grega antiga no desenvolvimento do pensamento geométrico; o desenvolvimento do pensamento espacial, já que o estudo dos poliedros de Platão ajuda os estudantes a desenvolverem habilidades de visualização espacial. Isso é crucial para a compreensão de conceitos geométricos.

Além disso, possibilita a conexão entre Matemática e Arte, os poliedros de Platão têm uma beleza intrínseca que pode atrair alunos que se interessam tanto por matemática quanto por arte. Isso cria uma ponte entre disciplinas aparentemente distintas, mostrando como a matemática pode ser criativa e inspiradora. Explorando conceitos como simetria e regularidade, os poliedros de Platão são exemplos perfeitos desses conceitos. Estudá-los permite que os alunos compreendam conceitos importantes de simetria, padrões e regularidade na geometria. Além de claro, aplicações práticas, embora possam parecer conceitos abstratos, os poliedros de Platão têm aplicações práticas em diversas áreas, como arquitetura, química (por exemplo, na estrutura de moléculas), design e engenharia. Conhecer essas formas desde cedo pode inspirar futuras explorações nessas áreas.

Estudar os poliedros de Platão no ensino básico não apenas fortalece as habilidades matemáticas dos alunos, mas também os prepara para compreender conceitos mais complexos no futuro, estimula a criatividade e a conexão entre disciplinas, e proporciona uma compreensão mais ampla do mundo ao nosso redor. A seguir, falaremos um pouco sobre Platão e os poliedros.

De acordo com Blackburn (1997), Platão nasceu em Atenas, tendo vivido entre o período de 429 a.C. a 347 a.C. Seu nome verdadeiro era

Arístocles, porém, devido a sua constituição física, ele recebeu o apelido de Platão – termo que significa amplo –. A família de Platão pertencia à aristocracia, e afirmava descender de Codros, rei de Atenas. Platão foi discípulo de Sócrates durante oito anos, e se preparou nesse período para continuar uma atuação política de sua família. Ainda segundo Blackburn (1997), Platão

Depois da morte de Sócrates em 399, viajou bastante. Durante esse período fez sua primeira viagem à Sicília, tendo-se envolvido significativamente na vida política interna daquela ilha; os céticos quanto à autenticidade da Carta VII supõem que se trata de uma falsificação, concebida para apoiar o partido da oposição do Díon contra Dionísio II. Ao todo, Platão visitou a Sicília pelo menos três vezes, tendo muitas dessas visitas sido ricamente subsidiadas por Dionísio. Depois de regressar da Sicília, começou o ensino formal no que depois se transformou na Academia (Blackburn, 1997, p. 298).

Em suas muitas viagens, foi a Cirene, uma antiga colônia grega na atual Líbia, que estudou matemática com Teodoro. Passou também pelo Egito, pela Baixa Itália e Sicília, onde conheceu os pitagóricos. Tornou-se amigo de Arquitas de Tarento e de Timeo de Lócrida. Por volta de 389 a. C. voltou à Atenas e fundou sua escola, onde dedicou o resto da sua vida ensinando e escrevendo sua filosofia natural, em parte baseada na dos pitagóricos. Para ele, todo o universo estava fundamentado na aritmética e na geometria. Por isso, acreditava que para aprender filosofia, era preciso primeiro saber geometria. Platão não contribuiu muito com obras matemáticas, mas cooperou para o avanço da lógica e de métodos de emprego da geometria.

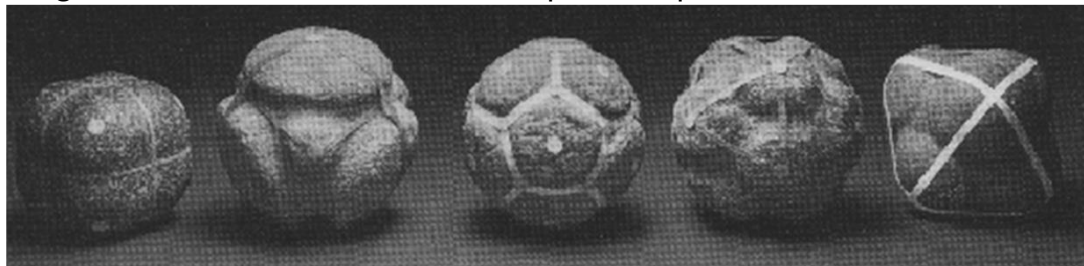
Dentre as suas contribuições para a matemática, destaca-se o estudo dos poliedros regulares, que curiosamente recebem seu nome. As origens desses poliedros ainda são desconhecidas, mas ganham esse nome pelo fato de Platão, ser o primeiro a demonstrar a existência de tais elementos, estabelecendo a descrição dos mesmos e mostrando como construí-los (Oliveira, 2018).

Para Eves (2004), esses poliedros são ditos de Platão de forma errônea, uma vez que três deles se devem aos pitagóricos, e os outros dois ao Teeteto. Assim, os poliedros de Platão são classificados em: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Existe no museu *Ashmolean Museum of Oxford* um conjunto de cinco pedras, que reproduzem com exatidão os poliedros de Platão, conforme a

Figura 9. Foram esculpidas por volta do ano de 1400 a. C., e tem aproximadamente o tamanho de um punho.

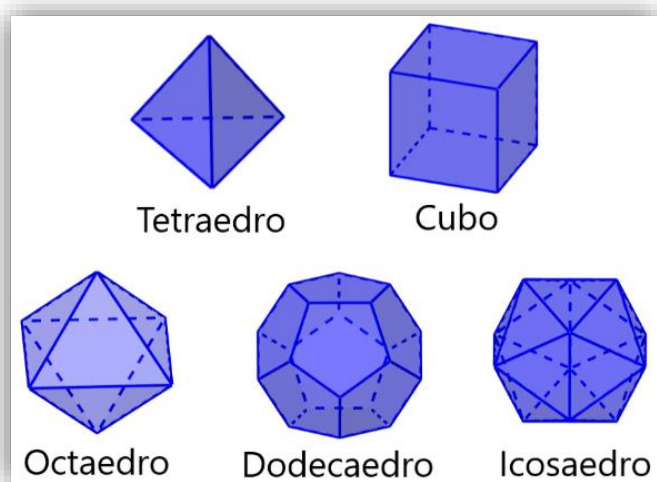
Figura 9 – Poliedros de Platão esculpidos no período neolítico



Fonte: Sartor (2013).

Desde a antiguidade são conhecidos os poliedros regulares, segundo Lima et al. (2004), poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares iguais e que em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. O livro XIII d'Os *Elementos* de Euclides é dedicado inteiramente aos sólidos regulares e contém extensos cálculos que determinam, para cada um, a razão entre o comprimento da aresta e o raio da esfera circunscrita. Na última proposição deste livro, prova-se que os poliedros regulares são apenas 5, os também chamados poliedros de Platão.

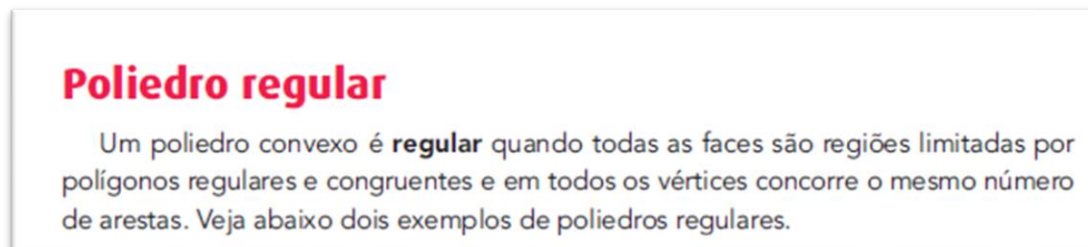
Figura 10 – Poliedros Platônicos



Fonte: <https://br.neurochispas.com/geometria/os-5-solidos-platonicos-propriedades-diagramas-e-exemplos/> (Acesso em 12 set. 2024).

No livro didático *Matemática em contextos* de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana (2020) temos a seguinte definição para poliedro regular:

Figura 11 – Definição de poliedro regular

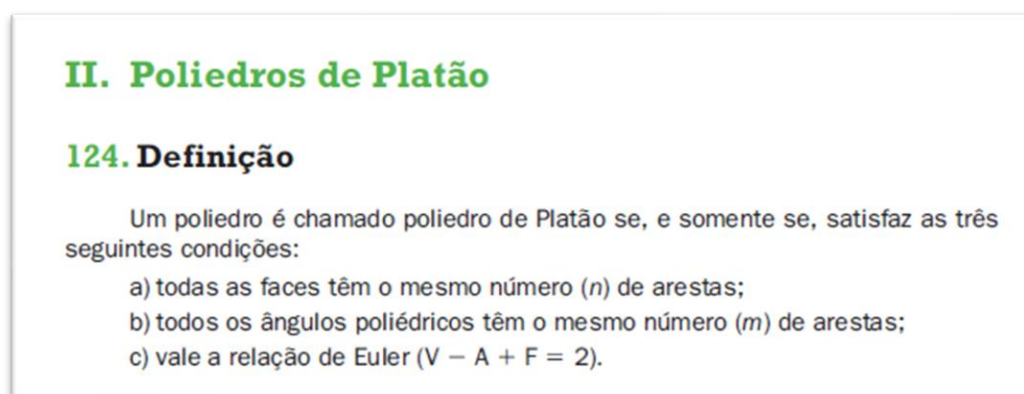


Fonte: Dante; Viana (2020).

Também se traz como propriedade desta definição que existem apenas cinco poliedros regulares convexos (os poliedros de Platão), sendo importante destacar que não é trazido nenhum tipo de demonstração desta propriedade.

No livro *Fundamentos de matemática elementar*, volume 10, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo (2013), são apresentadas duas definições diferentes para os poliedros de Platão e para os poliedros regulares. A primeira diz:

Figura 12 – Definição dos poliedros platônicos



Fonte: Dolce; Pompeu (2013).

E a segunda:

Figura 13 – Definição dos poliedros regulares.



Fonte: Dolce; Pompeu (2013).

Trazendo ainda, como observação:

Figura 14 – Observação sobre os poliedros.



Fonte: Dolce; Pompeu (2013).

Ao utilizar o chat GPT efetuando a pergunta “Existe diferença entre poliedro de platão e poliedro regular?” recebemos a seguinte resposta:

“Sim, existe uma diferença entre poliedros de Platão e poliedros regulares, embora os termos muitas vezes sejam usados de forma intercambiável.

- Poliedros de Platão: São poliedros convexos nos quais todas as faces são polígonos regulares idênticos (ou seja, todos os lados e ângulos são iguais) e todas as arestas têm o mesmo comprimento. Existem cinco poliedros de Platão: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Eles são chamados de "platônicos" em homenagem ao filósofo grego Platão, que os estudou e descreveu em seus diálogos.
- Poliedros Regulares: São poliedros nos quais todas as faces são polígonos regulares (não necessariamente iguais) e todos os vértices

têm o mesmo número de faces encontrando-se neles. Os poliedros de Platão são um subconjunto dos poliedros regulares, já que são poliedros regulares específicos que também atendem aos critérios de Platão de serem convexos, com faces poligonais regulares idênticas e arestas congruentes.

Portanto, enquanto todos os poliedros de Platão são poliedros regulares, nem todos os poliedros regulares são poliedros de Platão, pois os poliedros regulares podem ter diferentes tipos de faces regulares e não necessariamente todas as arestas ou ângulos são iguais.”

Sartor (2013) nos esclarece que dependendo da definição adotada, é possível existir cinco poliedros regulares, ou nove, ou infinitos. A partir da definição "Poliedro regular é todo poliedro convexo onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes", existem apenas cinco poliedros regulares: os de Platão. Já a partir da definição "Poliedro regular é todo poliedro onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes", existem nove poliedros regulares: os cinco de Platão e os quatro de Kepler-Poinsot. Mas se poliedro regular for considerado como "todo poliedro onde os vértices e as arestas são congruentes", então existem, além dos nove anteriores, os infinitos poliedros de Arquimedes.

Em nosso trabalho adotaremos a definição de Lima *et al.* (2004), novamente enunciada abaixo:

Definição: Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Desde tempos antigos são conhecidos os poliedros regulares, o livro XIII dos "Elementos" de Euclides (cerca de 300 a.C.) é inteiramente dedicado aos sólidos regulares e inclui cálculos detalhados para determinar, em cada um deles, a relação entre o comprimento da aresta e o raio da esfera circunscrita. Na última proposição desse livro, é demonstrado que existem apenas cinco poliedros regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

A relevância desse fato se torna evidente ao observarmos que, nos séculos seguintes, há inúmeros exemplos de matemáticos, filósofos e astrônomos que tentaram formular teorias para explicar o universo com base na existência desses cinco sólidos regulares. Mesmo Kepler, 19 séculos após os "Elementos" de Euclides, procurou desenvolver uma cosmologia fundamentada nesses cinco poliedros regulares.

Veremos abaixo a prova de que existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Teorema: Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Dem.: Sejam n o número de lados de cada face (F) e p o número de arestas (A) que concorrem em cada vértice (V). Temos então $2A = nF = pV$, assim podemos reescrever

$$A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}.$$

Dessa forma, substituindo na Relação de Euler², a saber, $V + F = A + 2$, obtemos

$$\frac{nF}{p} + F = \frac{nF}{2} + 2$$

$$F = \frac{nF}{2} + 2 - \frac{nF}{p}$$

$$F - \frac{nF}{2} + \frac{nF}{p} = 2$$

Efetuada mais algumas manipulações,

$$F \left(1 + \frac{n}{p} - \frac{n}{2} \right) = 2$$

$$F = \frac{2}{1 + \frac{n}{p} - \frac{n}{2}}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} F &= \frac{2}{\frac{2p + 2n - pn}{2p}} \\ &= \frac{4p}{2p + 2n - pn} . \end{aligned}$$

Dessa forma, devemos ter $2p + 2n - pn > 0$, ou seja

² O leitor pode verificar a demonstração dessa relação em Lima et al. (2004).

$$2n > pn - 2p$$

$$2n > p(n - 2).$$

E como $n \geq 3$,

$$\frac{2n}{n-2} > p.$$

Mas como $p \geq 3$, só podemos ter $n < 6$. Temos então as seguintes possibilidades:

$$n = 3 \Rightarrow F = \frac{4p}{6-p} \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \Rightarrow F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ p = 4 \Rightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ p = 5 \Rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases}$$

$$n = 4 \Rightarrow F = \frac{2p}{4-p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 6 \text{ (hexaedro)}$$

$$n = 5 \Rightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 12 \text{ (dodecaedro)}.$$

Mostrando assim que existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

4 APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No presente capítulo, apresentamos de forma detalhada a distribuição das aulas e atividades trabalhadas com a turma, e focamos na análise argumentativa de quatro destas atividades, que são apresentadas mais adiante.

4.1 Organização das aulas e atividades

Como apresentado anteriormente neste trabalho, a prática da argumentação explicativa é a que mais aparece no ensino de matemática. É muito comum o professor iniciar um conteúdo com exemplos e exercícios, havendo cópia e repetição. Alguns livros de matemática incentivam essa prática de não convencer, nestes aparecem apenas fórmulas, regras matemáticas seguidas por vários exercícios repetitivos. O aluno tem que reproduzir algo que não compreendeu, sendo incentivado a decorar.

Buscando quebrar esse tipo de acontecimento, mas não necessariamente apresentando demonstrações e resultados prontos, os estudantes foram incentivados a por meio de suas próprias observações, a perceberem padrões e, quando necessário com o auxílio da professora, chegarem a suas próprias conclusões, resultados e generalização de conceitos. As aulas tiveram, quase sempre, os alunos como personagens centrais e ativos no processo de aprendizagem. As atividades foram planejadas para que eles se percebessem como sujeitos ativos e capazes de alcançar os objetivos pretendidos por si próprios.

Os três primeiros encontros (cada encontro é composto por duas aulas de 50 minutos) foram pautadas em conhecer a turma e alguns de seus conhecimentos prévios sobre geometria plana e espacial, para que pudessemos dar início, mais a frente, ao trabalho propriamente dito com os poliedros, onde já seria importante ter domínio sobre alguns conhecimentos preliminares. A partir do quarto encontro, as aulas tiveram como base o ensino por atividades. A seguir podemos ver detalhadamente o que ocorreu em cada um desses encontros:

4.1.1 Primeiro Encontro

Apresentação da disciplina; relembrando os polígonos: definição, elementos, classificação e nomenclatura.

O primeiro encontro com a turma foi um momento para conhecer um pouco da turma e fazer uma avaliação diagnóstica, para tentar compreender os conhecimentos prévios sobre geometria plana e espacial da turma. É importante destacar que esses alunos agora no 2º ano do ensino médio cursaram quase todo o ensino fundamental de forma remota durante a pandemia de covid-19.

Ao fazer questionamentos simples sobre algumas definições básicas como, por exemplo, o que são vértices ou arestas, muitos não se recordavam do que se tratava. Dada esta realidade, neste primeiro encontro buscou-se relembrar alguns destes conhecimentos, o que são polígonos, quais seus elementos, nomenclatura e classificação.

4.1.2 Segundo Encontro

Diferenciando corpos redondos e poliedros: definição, elementos e propriedades; conhecendo os principais personagens históricos envolvidos no desenvolvimento dos estudos sobre poliedros;

A fim de iniciar os estudos sobre poliedros, os alunos foram expostos a vários sólidos geométricos e a pesquisadora pediu para que quem se sentisse a vontade, separasse os sólidos em dois grupos e justificasse o critério utilizado para a separação. A seguir podemos ver alguns registros desse momento e algumas ordenações escolhidas:

Figura 15 – Agrupando os sólidos



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Somente após algumas tentativas, uma dupla fez a separação entre corpos redondos e poliedros. A partir disto começou-se a discutir algumas das características dos poliedros, diferenças entre poliedros regulares e irregulares, e então foi-se introduzido quais eram os poliedros platônicos. Ainda neste encontro foi solicitado que os alunos realizassem uma pesquisa para entender um pouco mais sobre a nomenclatura dos poliedros e quais foram os principais personagens históricos que contribuíram no desenvolvimento dos estudos sobre eles. Todas as atividades realizadas estão disponíveis no Apêndice ao final desta dissertação.

4.1.3 Terceiro Encontro

Apresentação de seminário; descobrindo os poliedros na natureza: células, cristais, moléculas, organismos vivos, etc;

Como fruto das pesquisas do encontro anterior, os alunos foram divididos em grupos e apresentaram sobre os principais personagens históricos envolvidos no desenvolvimento dos estudos sobre os poliedros platônicos, a saber, os Pitagóricos, Teeteto, Euclides e o próprio Platão. Abaixo podemos ver um registro deste momento:

Figura 16 - Exposição sobre Platão



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Após as apresentações e discussões, foi apresentado aos alunos alguns locais onde os poliedros de Platão são encontrados na natureza, como por exemplo em células, cristais, moléculas e organismos vivos. Todas as imagens e informações foram extraídas de Sartor (2013). Abaixo podemos ver algumas das imagens apresentadas aos alunos.

Figura 17 – Calcopirita, magnetita e galena



Fonte: Sartor (2013)

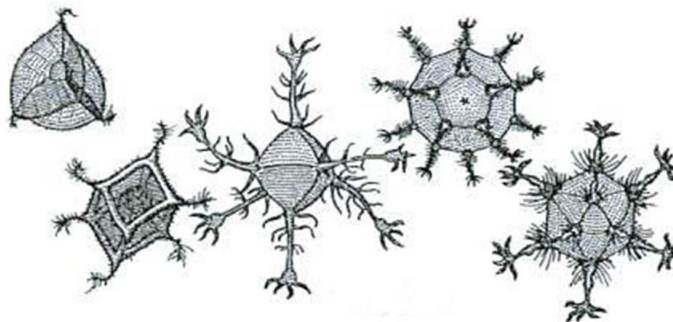
Acima podemos ver a calcopirita, a magnetita e a galena, minerais que se cristalizam quase sempre no formato de tetraedro, octaedro e hexaedro, respectivamente.

Figura 18 – Pirita



Fonte: Sartor (2013)

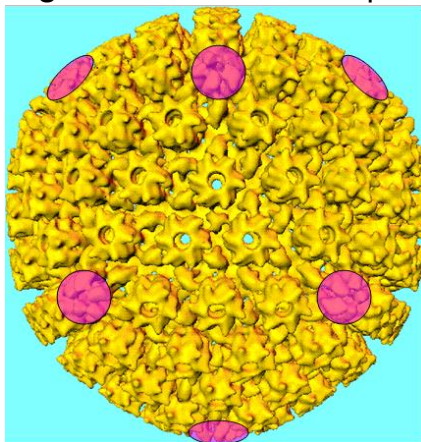
Além destes minerais, existe também a pirita, um dissulfeto de ferro, cujos cristais aparecem no formato de cubo, dodecaedro ou octaedro.

Figura 19 – Radiolários

Fonte: Sartor (2013).

Alguns radiolários, que são microfósseis, exclusivamente marinhos, como o *Circoporus octahedrus*, *Circogonia icosahedra*, *Lithocubus geometricus* e *Circorhagma dodecahedra*, também têm o formato de sólidos platônicos.

E por último, o vírus da herpes é um exemplo de organismo vivo que assume a simetria icosaédrica, já que o icosaedro é a maneira mais simples de montar subunidades proteicas idênticas repetidas, as quais constituem as estruturas virais.

Figura 20 – Vírus da Herpes

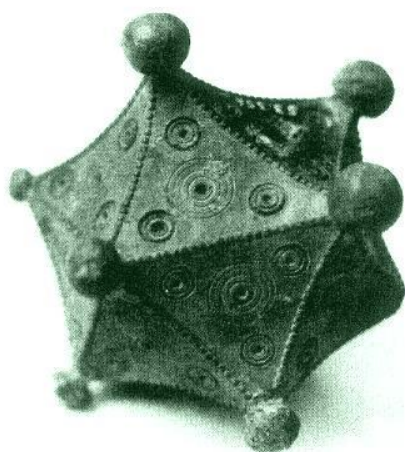
Fonte: Sartor (2013).

Além desses exemplos, também foi apresentado alguns artefatos históricos que possuem formatos poliédricos:

Figura 21 - Dodecaedro de Bronze

Fonte: Sartor (2013).

O dodecaedro de bronze, que podemos observar na figura acima, é um objeto encontrado em 1939 na Alemanha, que pode ter sido um candelabro, um instrumento de guerra ou de medida, ou até mesmo um objeto místico também é um exemplo da utilização dos poliedros de Platão. Já foram encontrados aproximadamente 100 desses objetos feitos em bronze ou em pedra, que datam dos séculos II ou III.

Figura 22 – Icosaedro de Bronze

Fonte: Sartor (2013)

Existe também o Icosaedro Romano de Bronze, que tal qual o Dodecaedro de Bronze, não se sabe a sua real utilização.

4.1.4 Quarto Encontro

Atividade investigativa sobre a relação entre quantidade de arestas e vértices em um poliedro.

A partir deste encontro, a principal metodologia utilizada foi o ensino por atividades, com o intuito de levar os alunos a observarem padrões e generalizarem conceitos. Neste momento, para completar as atividades propostas, eles manipulavam materiais concretos, faziam observações e eram incentivados a anotar suas impressões e descobertas para compartilhar com os colegas.

A primeira atividade (AT1) tinha como objetivo que os estudantes percebessem a relação entre o total de vértices (V), o total de arestas (A) e número de vértices que se encontram em cada vértice (n), e consistia em preencher a tabela abaixo, buscando perceber algum padrão em seus dados. As observações e conclusões deviam ser anotadas e compartilhadas com a turma.

Figura 23 – Tabela AT1

Nº	POLIEDROS	TOTAL DE ARESTAS (A)	TOTAL DE VÉRTICES (V)	QUANTAS ARESTAS SE ENCONTRAM EM CADA VÉRTICE? (n)	(V) . (n)
1	CUBO				
2	PRISMA QUADRANGULAR				
3	OCTAEDRO				
4	DODECAEDRO				
5	PIRÂMIDE HEXAGONAL				
6	PRISMA TRIANGULAR				
7	PRISMA HEXAGONAL				

OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES:

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Todas as atividades foram desenvolvidas tendo como base os produtos educacionais de Corrêa (2019) e Schunk e Sad (2021). A AT1 foi realizada em duplas e abaixo podemos ver as conclusões, justificativas e os argumentos apresentados por algumas das duplas. Utilizamos aqui o Padrão de Toulmin

(2006) para evidenciar a estrutura argumentativa encontrada na solução das atividades propostas:

A AT1 pedia que a partir da manipulação dos sólidos, fosse preenchida a tabela abaixo e que fossem anotadas as observações e conclusões advindas do preenchimento da mesma.

Dupla 1 (D1) formada pelos alunos A9 e A19:

Figura 24 – Respostas da D1 a tabela AT1

Nº	POLIEDROS	TOTAL DE ARESTAS (A)	TOTAL DE VÉRTICES (V)	QUANTAS ARESTAS SE ENCONTRAM EM CADA VÉRTICE? (n)	(V).(n)
1	CUBO	12	8	3	24
2	PRISMA QUADRANGULAR	12	8	3	24
3	OCTAEDRO	12	6	4	24
4	DODECAEDRO	30	20	3	60
5	PIRÂMIDE HEXAGONAL	6	7	1.6 + 6.3	24
6	PRISMA TRIANGULAR	9	6	3	18
7	PRISMA HEXAGONAL	18	12	3	36

OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES:

São divisíveis ou multiplicados.
2x a primeira coluna = a última coluna.
 $2 \cdot A = V \cdot n$

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Argumento da dupla D1:

Quadro 2 – Argumento da D1

DADO:	São divisíveis ou multiplicados. (Se divido a última coluna por dois, resulta na coluna 1, se multiplico a coluna 1 por dois, resulta na última coluna).
-------	--

CONCLUSÃO:	Duas vezes a primeira coluna é igual a última coluna ($2.A = V.n$).
GARANTIA DE INFERÊNCIA:	Já que: pôde-se verificar isso em quase toda a tabela $12 \times 2 = 24$ $30 \times 2 = 60$ $9 \times 2 = 18$ $18 \times 2 = 36$
CONHECIMENTO DE BASE:	Com base nos conhecimentos de multiplicação, divisão.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Observa-se que alguns equívocos foram cometidos ao preencher a tabela, no momento de contar a quantidade de vértices e arestas dos poliedros, tais equívocos foram notados em posterior discussão em sala e corrigidos pelos próprios estudantes.

Quase todas as duplas sentiram dificuldade de preencher a tabela quando o poliedro em questão era a pirâmide hexagonal e nesse momento precisou-se do auxílio da pesquisadora para o preenchimento da mesma. Além disso, no momento de realização desta atividade, pudemos notar uma dificuldade de boa parte dos alunos em transformar a linguagem materna, o português, para a linguagem simbólica da matemática.

Neste caso, pudemos observar que o nível de argumentação apresentado pela dupla foi natural, com base na observação de regularidades, mas não sistematizado.

Vejamos agora o que foi apresentado pela dupla 2 (D2) formada pelos alunos A12 e A18:

Figura 25 – Respostas da D2 a tabela AT1

Nº	POLIEDROS	TOTAL DE ARESTAS (A)	TOTAL DE VÉRTICES (V)	QUANTAS ARESTAS SE ENCONTRAM EM CADA VÉRTICE? (n)	(V).n
1	CUBO	12	8	3	24
2	PRISMA QUADRANGULAR	12	8	3	24
3	OCTAEDRO	12	6	4	24
4	DODECAEDRO	30	20	3	60
5	PIRÂMIDE HEXAGONAL	12	7	1.6+6.3	24
6	PRISMA TRIANGULAR	9	6	3	18
7	PRISMA HEXAGONAL	18	12	3	36

OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES:

Podemos observar que o cubo, o prisma quadrangular, o octaedro e a pirâmide hexagonal possuem a mesma quantidade de arestas. Multiplicando o total de vértices e quantas arestas se encontram em cada vértice chegamos a conclusão que eles também possuem o mesmo número de A.2.

observação $A.2 = V.n = \frac{A}{2} = \frac{V.n}{2}$

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Argumento da dupla D2:

Quadro 3 – Argumento da D2

DADO:	Total de vértices multiplicado pelo total de arestas que se encontram em cada vértice resulta no dobro de arestas ($2.A = V.n$).
CONCLUSÃO:	O cubo, o prisma quadrangular, o octaedro, e a pirâmide hexagonal possuem a mesma quantidade de arestas. Multiplicando o total de vértices e quantas arestas se encontram em cada vértice chegamos a conclusão que eles também possuem o mesmo número de A.2.
GARANTIA DE INFERÊNCIA:	Já que: observa-se a ocorrência na tabela.

	Já que: multiplicação das colunas 4 (V) e 5 (n) resultam exatamente no dobro da coluna 3 (A).
CONHECIMENTO DE BASE:	Com base na contagem e observação ao preencher a tabela e nos conhecimentos de multiplicação.

Fonte: Elaborado pela autora (2024);

Esta dupla fez algumas observações iniciais quanto à quantidade de arestas de alguns poliedros, mas estas não serviram como apoio para a argumentação principal, que neste caso diz respeito a relação entre vértices e arestas, e se enquadram em um argumento justificatório, mas de nível ingênuo. No entanto, percebemos também um argumento justificatório, de nível natural, quando a dupla mostra que percebeu a relação entre os dados encontrados com base nas observações das regularidades presentes na tabela.

A atividade trabalhada nesta aula era composta por uma segunda parte onde havia algumas questões que poderiam ser solucionadas a partir das conclusões desta primeira parte que acabamos de ver.

Como comentado anteriormente, quase 100% das duplas tiveram dificuldades ao preencher a tabela quando o poliedro em questão era a pirâmide hexagonal, e a parte dois da atividade serviu como um reforço para a compreensão da pequena adaptação necessária no momento do cálculo para poliedros que possuem quantidades diferentes de arestas partindo de alguns vértices.

Vejamos a solução apresentada pela dupla D2 na questão 3 desta atividade:

Figura 26 – Solução apresentada pela D2 a questão 3 da AT1

03. Um poliedro convexo tem 14 vértices. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de quatro outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. Qual o número de arestas do poliedro?

$$2.A = 14 \cdot 10 + 16 = \frac{2.240}{2} = 1.120$$

Handwritten notes: $5 \cdot 2 = 10$, $4 \cdot 4 = 16$

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Quadro 4 – Argumento da D2 a questão 3 da AT1

DADO:	O número de arestas que formam esse poliedro é 1120.
CONCLUSÃO:	$A = \frac{2240}{2} = 1120$
GARANTIA DE INFERÊNCIA:	Já que: $14 \cdot 10 \cdot 16 = 2240$, sendo 14 o número de vértices, $10 = 2 \cdot 5$ e $16 = 4 \cdot 4$.
CONHECIMENTO DE BASE:	Com base na relação observada por eles mesmos ao preencher a tabela, e nos conhecimentos de adição, multiplicação e divisão.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024;

Aqui é possível observar um pequeno obstáculo na compreensão deste tipo de problema que resulta em erros na busca da solução desejada. Foi possível observar este mesmo erro em diversas duplas diferentes, sendo necessário mais atenção do professor com alunos neste momento, para que seja oferecido o auxílio necessário.

A dupla D2 compreende que está buscando o número de arestas, e que deve levar em consideração que quantidades diferentes de arestas partem de diferentes vértices, e eles argumentam isso por meio de seus cálculos: “de dois de seus vértices partem 5 arestas”, logo $5 \cdot 2 = 10$ e “de quatro outros partem 4 arestas”, logo $4 \cdot 4 = 16$, mas observa-se que a compreensão não foi completa quanto ao “e dos restantes partem 3 arestas”.

É importante frisar que é natural que haja dificuldades e é neste momento que o professor precisa estar atento para auxiliar os estudantes a ultrapassarem esses obstáculos.

4.1.5 Quinto Encontro

Atividade investigativa sobre a relação entre quantidade de arestas e faces em um poliedro.

A atividade trabalhada neste encontro teve como objetivo que os alunos percebessem a relação entre as faces (F) e as arestas (A) dos poliedros, e consistia em preencher a tabela abaixo, buscando perceber algum padrão em seus dados. As observações e conclusões deviam ser anotadas e compartilhadas com a turma.

Figura 27 – Tabela AT2

Nº	POLIEDROS	TOTAL DE ARESTAS (A)	TOTAL DE FACES (F)	QUAL OU QUAIS POLIGONOS FORMAM AS FACES DO POLIEDRO?	QUANTOS LADOS TEM ESSE POLIGONO? (n)	QUANTAS VEZES O POLIGONO SE REPETE NO POLIEDRO? (R)	(R) ₁ (n)
1	CUBO						
2	PRISMA QUADRANGULAR						
3	OCTAEDRO						
4	DODECAEDRO						
5	PIRÂMIDE HEXAGONAL						
6	PRISMA TRIANGULAR						
7	PRISMA HEXAGONAL						

OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES:

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Uma das principais dificuldades na AT1 foram os casos onde partem quantidades diferentes de arestas de determinados vértices, na AT2 existem casos parecidos, mas agora em relação a quantidade de lados dos polígonos que formam a faces dos poliedros. Dessa forma, a tabela desta atividade possui mais colunas, com o intuito dos estudantes observarem com mais cautela tal especificidade. Abaixo veremos as conclusões, justificativas e os argumentos apresentados por algumas das duplas (as duplas da AT2 não são necessariamente formadas pelos mesmos estudantes da AT1).

Respostas da dupla 1 (D1) formada pelos alunos A12 e A18:

Figura 28 – Respostas da D1 a tabela da AT2

Nº	POLIEDROS	TOTAL DE ARESTAS (A)	TOTAL DE FACES (F)	QUAL OU QUAIS POLIGONOS FORMAM AS FACES DO POLIEDRO?	QUANTOS LADOS TEM ESSE POLIGONO? (n)	QUANTAS VEZES O POLIGONO SE REPETE NO POLIEDRO? (R)	(R).(n)
1	CUBO	12	6	quadrado	4	6	24
2	PRISMA QUADRANGULAR	12	6	quadrado quadrado	4 4	4 2	24
3	OCTAEDRO	12	8	triângulo	3	8	24
4	DODECAEDRO	30	12	pentágono	5	12	60
5	PIRÂMIDE HEXAGONAL	12	7	triângulo hexágono	3 6	6 1	24
6	PRISMA TRIANGULAR	9	5	triângulo triângulo	3 3	3 2	18
7	PRISMA HEXAGONAL	18	8	hexágono hexágono	6 6	2 2	36

OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES:

Quando multiplicamos $(R).(n)$
(R) → quantos lados tem o polígono.
(n) → quantas vezes o polígono se repete no poliedro.
Conclui-se que o cubo, o prisma quadrangular, o octaedro e a pirâmide hexagonal têm o mesmo resultado 24, logo observamos que o número de R é o dobro de arestas $R_n = 2A$.

Fonte: Elaborado pela autora (2024);

Vamos analisar o argumento da dupla D1:

Quadro 4 – Argumentos da D1 a tabela da AT2.

DADO:	O valor de R (total de vezes que o polígono que forma as faces do poliedro se repete) vezes n (quantos lados tem esses polígonos) será sempre o dobro do número de arestas ($A \cdot 2$)
CONCLUSÃO:	O cubo, o prisma quadrangular, o octaedro e a pirâmide hexagonal têm o mesmo resultado; O número R (total de vezes que o polígono que forma as faces do

	poliedro se repete) multiplicado por n (quantos lados tem esses polígonos) é o dobro de arestas ($A \cdot 2$).
GARANTIA DE INFERÊNCIA:	Já que: multiplicação das colunas 6 (n) e 7 (R) resultam exatamente no dobro da coluna 3 (A).
CONHECIMENTO DE BASE:	Com base nas observações e conhecimentos de multiplicação.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024;

É interessante notar que esta dupla alcançou o objetivo desta atividade, de notar a relação entre as faces e as arestas, mas no momento de justificar essa observação, utilizou dois níveis de argumentos, sendo o primeiro do nível folclórico, na categoria por tradição, que não está errado, mas nesse contexto não é considerado relevante e o segundo do nível natural, baseado nas regularidades encontradas, mas sem uma sistematização.

Agora veremos as respostas da dupla 2 (D2) formada pelos alunos A14 e A20:

Figura 29 – Respostas da D2 a tabela AT2

Nº	POLIEDROS	TOTAL DE ARESTAS (A)	TOTAL DE FACES (F)	QUAL OU QUAIS POLÍGONOS FORMAM AS FACES DO POLIEDRO?	QUANTOS LADOS TEM ESSE POLÍGONO? (n)	QUANTAS VEZES O POLÍGONO SE REPETE NO POLIEDRO? (R)	(R)·(n)
1	CUBO	12	6	quadrado	4	6	24
2	PRISMA QUADRANGULAR	12	6	quadrado	4	6	24
3	OCTAEDRO	12	8	triângulo	3	8	24
4	DODECAEDRO	30	12	pentágono	5	12	60
5	PIRÂMIDE HEXAGONAL	12	7	triângulo hexágono	$T=3$ $H=6$	$n=6$ $R=1$	$3 \cdot 6 = 18$ $6 \cdot 1 = 6$ $18 + 6 = 24$
6	PRISMA TRIANGULAR	9	5	triângulo	$T=3$	$n=3$ $R=2$	$3 \cdot 3 = 9$ $3 \cdot 2 = 6$ $9 + 6 = 15$
7	PRISMA HEXAGONAL	18	8	hexágono	$H=6$	$n=6$ $R=2$	$6 \cdot 6 = 36$ $6 \cdot 2 = 12$ $36 + 12 = 48$

OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES:

$$2 \cdot A = (R) \cdot (n)$$

ou

$$\frac{(R) \cdot (n)}{2} = A$$

Fonte: Elaborado pela autora (2024);

Analisemos as justificativas apresentadas:

Quadro 5 – Argumentos da D1 a tabela da AT2.

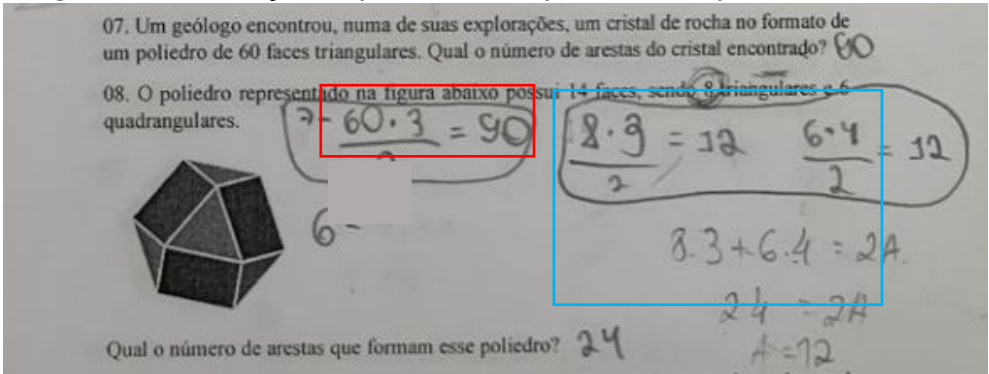
DADO:	O número de arestas A é igual a multiplicação de R por n , dividido por 2.
CONCLUSÃO:	O dobro do número de arestas ($2 \cdot A$) é igual ao valor de R (total de vezes que o polígono que forma as faces do poliedro se repete) vezes n (quantos lados tem esses polígonos).
GARANTIA DE INFERÊNCIA:	Já que: multiplicação das colunas 6 (n) e 7 (R) resultam exatamente no dobro da coluna 3 (A).
CONHECIMENTO DE BASE:	Com base nas observações e conhecimentos de multiplicação.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024;

Esta dupla mostrou compreender a relação, e foi bastante direta em suas observações e conclusões, utilizou um argumento natural, e com base nas regularidades observadas concluiu que $\frac{R \cdot n}{2} = 2$, sem sistematizações.

Ao observar a resolução de algumas questões da segunda parte desta atividade, percebemos como esses estudantes utilizaram os conhecimentos desenvolvidos, sem seguir necessariamente a fórmula que eles mesmos tinham apresentado na primeira parte da atividade:

Figura 30 – Soluções apresentadas pela D2 as questões 7 e 8 da AT2



Fonte: Elaborado pela autora (2024);

Dentro do retângulo vermelho temos a resposta da questão 7, obtida sem dificuldades e com aplicação direta da fórmula. Dentro do retângulo azul temos a resposta da questão 8, e podemos notar uma diferença em sua resolução, já que não houve a aplicação direta da fórmula, mostrando um outro tipo de raciocínio, observemos a argumentação utilizada:

Quadro 6 – Argumentos da D2 a questão 8 da AT2.

DADO:	O número de arestas que formam esse poliedro é 24.
CONCLUSÃO:	$A = 24$ (implícito $12 + 12 = 24$).
GARANTIA DE INFERÊNCIA:	Já que: $\frac{8.3}{2} = 12$ e $\frac{6.4}{2} = 12$.
CONHECIMENTO DE BASE:	Com base nos conhecimentos de adição, multiplicação e divisão.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Diferentemente da dupla analisada acima, em questões nas quais a aplicação da fórmula não é direta, pois há polígonos diferentes formando as faces dos poliedros, algumas duplas não conseguiram fazer as manipulações necessárias para resolver as questões. Sendo assim, muito importante as observações e o auxílio do professor para que o entendimento possa ocorrer de forma correta e esses obstáculos possam ser superados.

4.1.6 Sexto Encontro

Exposição de conteúdo sobre ângulo poliédrico, seguido de atividade investigativa com materiais manipuláveis sobre o mesmo tema.

Neste encontro, era necessário que os estudantes compreendessem o que é um ângulo poliédrico, para que a partir disso, fossem feitas explorações sobre este tema e os poliedros platônicos. Assim, a pesquisadora iniciou o encontro explicando a definição e apresentando alguns exemplos, a partir disso, utilizando um kit de palitos e jujubas os alunos começaram a construir alguns ângulos poliédricos.

Figura 31 – Kit utilizado e construção de ângulos poliédricos



Fonte: Elaborado pela autora (2024);

Euclides, em sua obra *Os elementos*, trata dos ângulos poliédricos no contexto dos poliedros regulares. A demonstração de Euclides sobre ângulos poliédricos se baseia nos seguintes princípios:

- **Definição de Ângulo Poliédrico:** Um ângulo poliédrico é formado pelo encontro de três ou mais arestas em um vértice de um poliedro. Cada ângulo é medido pelo ângulo sólido que ele forma no espaço tridimensional.
- **Classificação dos Poliedros Regulares:** Euclides demonstra que existem apenas cinco poliedros regulares: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Ele prova que estes são os únicos poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares congruentes e que possuem o mesmo número de arestas encontrando-se em cada vértice.
- **Soma dos Ângulos em Cada Vértice:** Um aspecto crucial da demonstração de Euclides é a observação de que, em um poliedro regular, a soma dos ângulos poliédricos que se encontram em um vértice deve ser menor que 360 graus. Isso é necessário para garantir que a estrutura forme um objeto tridimensional fechado e convexo.
- **Conclusão:** Euclides demonstra que, além dos cinco sólidos platônicos, não existem outros poliedros regulares, pois qualquer tentativa de formar um novo poliedro regular resultaria na soma dos ângulos poliédricos em um vértice ultrapassando 360 graus, o que é impossível para um poliedro convexo.

A abordagem de Euclides combina observações geométricas com rigor lógico para estabelecer a unicidade dos sólidos platônicos, realçando a relação entre ângulos poliédricos e a estrutura tridimensional dos poliedros.

Intencionando que os estudantes percebessem essa relação entre os ângulos poliédricos e os poliedros platônicos, após as manipulações iniciais do kit e da construção de alguns ângulos poliédricos, foi solicitado que os estudantes preenchessem a tabela a seguir, e fizessem suas observações aos dados encontrados.

Figura 32 – Tabela da AT3

Polígono	Número de polígonos	Soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértices de um poliedro	Formou um ângulo poliédrico?	Poliedro formado

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Analisemos as observações apresentadas pelo Grupo 1 (G1) formado pelos alunos A6, A14, A20, A23 e A27 a AT3.

Figura 33 – Respostas do G1 a AT3

Polígono	Número de polígonos	Soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértices de um poliedro	Formou um ângulo poliédrico?	Poliedro formado
triângulo	3	120	sim	tetraedro
triângulo	4	240	sim	triângulo de base quadrado
triângulo	5	300	sim	hexágono
Quadrado	3	270	sim	prisma com base triangular
Quadrado	3	270	sim	cuadrado
Quadrado	4	360	não	
Hexa	não dá para formar um poliedro com três hexágonos		Não	

Após a investigação realizada na atividade anterior, explique detalhadamente aqui suas conclusões.

O Hexágono não forma um poliedro pois é preciso que deformamos para formar um poliedro.

Os outros formam porque não precisamos deformar ou algo assim.

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Ao observar o preenchimento da tabela notamos alguns equívocos, no entanto as observações feitas são bastante interessantes:

Quadro 7 – Argumentos do G1 a AT3

DADO:	Com o hexágono não é possível formar um poliedro.
CONCLUSÃO:	Para formar um poliedro com hexágonos, seria necessário deformá-lo.
GARANTIA DE INFERÊNCIA:	Já que: com os outros polígonos notou-se que era possível formar ângulos poliédricos sem deformá-los.
CONHECIMENTO DE BASE:	Conhecimentos de geometria: se deformarmos um hexágono ele deixa de ser regular.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024

O objetivo desta atividade era de que os estudantes percebessem, sozinhos, a relação entre a medida do ângulo poliédrico e os poliedros platônicos, o que inicialmente não aconteceu. Os estudantes tiveram muitas

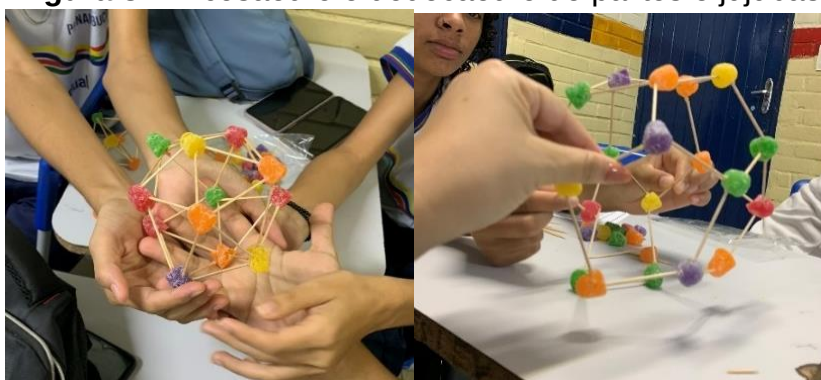
dificuldades para executar a atividade e precisavam constantemente de orientações. Ainda assim, surgiram argumentos interessantes, e que de forma implícita, demonstram conhecimentos matemáticos importantes.

4.1.7 Sétimo Encontro

Com kits formados por palitos e jujubas, os alunos construíram os cinco poliedros platônicos e investigaram a relação entre o número de faces, arestas e vértices dos poliedros, a chamada relação de Euler.

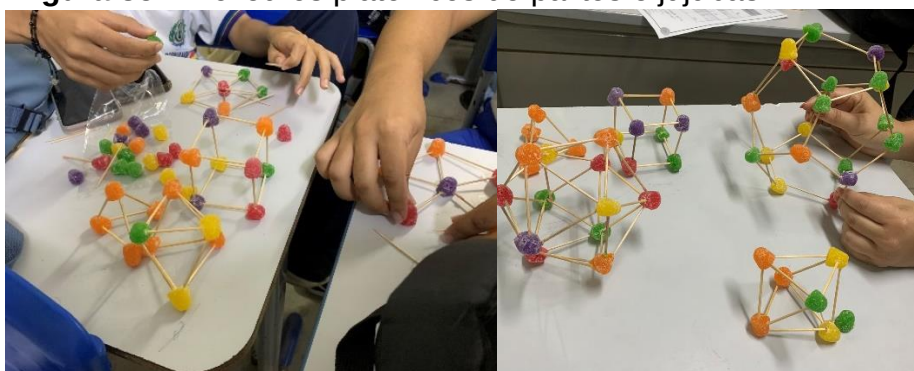
Utilizando mais uma vez os kits, os estudantes foram divididos em grupos e com o auxílio da professora, foi solicitado que os grupos construíssem os cinco sólidos platônicos e partir das construções, fossem feitas observações para o preenchimento da tabela da última atividade (AT4). Abaixo vemos alguns registros desse momento:

Figura 34 – Icosaedro e dodecaedro de palitos e jujubas



Fonte: Elaborado pela autora (2024);

Figura 35 – Poliedros platônicos de palitos e jujubas



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

A tabela a ser preenchida na AT4 está apresentada a seguir:

Figura 36 – Tabela da AT4

Poliedros	Vértices	Faces	Arestas
Tetraedro			
Hexaedro			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Pela construção dos poliedros com os kits, e por já estarem familiarizados com a dinâmica da atividade, os estudantes não tiveram dificuldades para preencher essa tabela e fazerem suas observações. Abaixo vemos a atividade resolvida pelo grupo 2 (G2) formado pelos alunos A1, A9, A17, A18 e A19.

Figura 37 – Respostas do G1 a AT4

Poliedros	Vértices	Faces	Arestas
Tetraedro	4	4	6
Cubo	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

Você consegue observar alguma relação entre o número de vértices, faces e arestas?

Todos os números são pares. $F + V = A - 2$.

A soma dos vértices e faces resulta em dois números a menos do número de arestas.

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Quadro 8 – Argumentos do G1 a AT4.

DADO:	$V + F = A + 2$
CONCLUSÃO:	A soma dos vértices e faces resulta em dois números a mais do número de arestas.
GARANTIA DE INFERÊNCIA:	Já que: Todos os números são pares; e $4 + 4 = 6 + 2$ $8 + 6 = 12 + 2$ $6 + 8 = 12 + 2$ $20 + 12 = 30 + 2$ $12 + 20 = 30 + 2$
CONHECIMENTO DE BASE:	Com base nos conhecimentos de adição.

Fonte: Elaborado pela autora, 2024;

Podemos perceber que mais uma vez temos o aparecimento de um argumento que pode ser considerado do nível folclórico, na categoria por tradição (todos os números são pares), pois não agrega na justificação principal, sendo mais uma observação, seguido de um argumento de nível natural, baseado nas regularidades observadas, mas sem sistematizações ou teorizações elaboradas.

De modo geral, assim como na maioria das argumentações apresentadas neste trabalho, tem-se um aparecimento maior de argumentos de nível natural, com base nas observações feitas nos dados das tabelas que eles mesmo preencheram, sem sistematizações ou teorizações, além do aparecimento de alguns argumentos do nível folclórico, em sua maioria na categoria por tradição.

4.1.8 Oitavo Encontro

Pesquisa histórica e debate sobre o matemático Euler.

Nesta aula tivemos como objetivo compreender um pouco da vida e a obra de Euler, e sua relação com os poliedros. Buscamos investigar e entender a biografia de Leonhard Euler, incluindo seu contexto histórico, formação, e principais contribuições para a matemática e outras ciências.

Neste encontro, buscamos desenvolver habilidades de pesquisa histórica, incentivando os alunos a utilizar fontes para pesquisar sobre a vida e o trabalho de Euler, avaliando a qualidade e a credibilidade das fontes; fomentar a habilidade de argumentação e debate; relacionar matemática e história; incentivar a reflexão crítica. Visando proporcionar uma experiência de aprendizagem rica e multifacetada, ajudando os alunos a entender a importância histórica e contemporânea de Leonhard Euler e sua contribuição aos estudos sobre os poliedros.

As informações utilizadas nesta pesquisa se baseiam nos dados produzidos até este encontro, mas destacamos que a disciplina teve continuidade até o final do primeiro semestre de 2024, e os alunos seguiram estudando os poliedros de Platão e suas características, além de construírem cada um dos poliedros platônicos tal como os “gregos antigos”, utilizando apenas um par de esquadros e um compasso.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta dissertação, exploramos a importância e os desafios da argumentação no ensino de matemática. Desde o início, ficou claro que a habilidade de argumentar de forma lógica e coerente é fundamental não apenas para a compreensão profunda dos conceitos matemáticos, mas também para o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes.

Inicialmente, discutimos as bases teóricas da argumentação, as diferentes definições e campos que a mesma está inserida, e no que se refere à área da matemática, destacamos a diferença entre argumentação, prova e demonstração, enfatizando como essas distinções são importantes e esclarecedoras para a prática pedagógica. A análise das dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao argumentar em matemática revelou a necessidade de uma abordagem educacional que vá além da mera apresentação de algoritmos e fórmulas, incentivando a justificativa e a compreensão dos processos subjacentes.

Os resultados deste estudo evidenciam que, ao promover a argumentação justificativa, os professores podem transformar a experiência de aprendizado, tornando-a mais dinâmica e significativa. A implementação de estratégias que favorecem a discussão e a reflexão crítica em sala de aula se mostra eficaz na melhoria da capacidade argumentativa dos alunos, contribuindo para uma aprendizagem mais sólida e integrada.

No entanto, durante a aplicação da pesquisa e em nossos resultados, percebemos a resistência que muitos alunos apresentam em expor suas ideias e raciocínios, muitas soluções ainda são apresentadas de forma simplista mesmo quando solicitado uma justificativa. Para enfrentar essa resistência é preciso uma postura firme, mas convidativa, do professor para solicitar aos estudantes que descrevam e discutam os procedimentos utilizados em determinadas atividades. As revelações dos conhecimentos e estratégias que os discentes utilizam para tratar de uma dada problemática que lhe seja posta, podem ser relacionadas às representações simbólicas apropriadas, revelando, assim, aspectos significativos da construção do conhecimento em questão.

Ao integrar práticas argumentativas no ensino de matemática, podemos criar um ambiente onde os alunos são encorajados a explorar, conjecturar e

validar suas ideias, o que fortalece não apenas seu conhecimento matemático, mas também suas habilidades comunicativas e analíticas. Este trabalho, portanto, não apenas reforça a importância da argumentação na matemática, mas também oferece insights práticos para educadores que buscam melhorar suas práticas pedagógicas.

A metodologia do ensino por atividades desempenha um papel crucial nesse contexto, pois permite que os alunos construam seu conhecimento de forma autônoma e participativa. Ao invés de seguir uma sequência tradicional de ensino, essa metodologia incentiva os alunos a descobrir e compreender os conceitos por meio de atividades que promovem a exploração e a experimentação. Esse enfoque não apenas estimula a curiosidade e o engajamento, mas também facilita a internalização dos conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais significativo e duradouro.

Por fim, a História da Matemática contribui de maneira significativa para enriquecer o ensino e a aprendizagem dessa disciplina. Ao contextualizar os conceitos matemáticos dentro de uma narrativa histórica, os alunos podem apreciar o desenvolvimento das ideias matemáticas ao longo do tempo e entender as razões e motivações por trás das descobertas. Isso não só humaniza a matemática, tornando-a mais acessível e interessante, mas também permite que os alunos vejam a disciplina como uma construção contínua e dinâmica, influenciada por diferentes culturas e épocas, levando-os a se sentirem mais confortáveis a discutir os temas e apresentar seus pontos de vista.

Em resumo, este estudo reafirma que a argumentação é uma ferramenta poderosa no ensino de matemática, capaz de engajar os alunos e promover um entendimento mais profundo e duradouro dos conceitos. A combinação da metodologia do ensino por atividades e a integração da História da Matemática proporciona uma abordagem educativa rica e multifacetada, que valoriza a argumentação como uma competência central no processo de aprendizagem da matemática. As implicações desta pesquisa sugerem caminhos promissores para futuras investigações e práticas educacionais que reconhecem e valorizam essas metodologias.

REFERÊNCIAS

ARSAC, Gilbert. **Initiation au Raisonnement Déductif au Collège**. Lyon: Presses Universitaires de Lyon, 1992.

BALACHEFF, N. (1999). **Is argumentation na obstacle?** Invitation to a debate. Acesso em 13 de dezembro de 2022. Disponível em <<https://eric.ed.gov/?id=ED435644>>. Acesso em: 25 abr. 2024.

BANEGAS, J. (1998). L'argumentació en matemàtiques. XIIè Congrés Valencià de Filosofia. Miguel Gimenez & Andrew Aberdein (Trad.), València.

BANKS-LEITE, L. Apresentação. In: Leitão, S.; DAMIANOVIC, A. C.

Argumentação na escola: O conhecimento em construção, (pp.7-11). Campinas: Pontes Editores, 2011.

BLACKBURN, Simon. **Dicionário Oxford de Filosofia**. Consultoria da edição brasileira, Danilo Marcondes; [tradução, Desidério Murcho... et. al.]. Rio de Janeiro: Jorge Zahar. Ed. 1997.

BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação em matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2005.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

CASABÓ, Marianna Bosch. **Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática**. Quarto Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: Universidade de Huelva, 2001.

CORRÊA, J. N. P. **O Ensino de Poliedros por Atividades**. 2019. 354f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Belém, 2019.

CRESWELL, J. **Educational Research: planning, conduction anda evaluating quantitative and qualitative research**. (Pesquisa Educacional: planejamento, condução e avaliação de dados quantitativos e pesquisa qualitativa.) 4 ed. Boston: 2012.

DE CHIARO, S.; AQUINO, K. A. Argumentação na sala de aula e seu potencial metacognitivo como caminho para um enfoque CTS no ensino de química: uma proposta analítica. **Educação e Pesquisa**, vol. 43, p. 411-426, 2017.

Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/ep/a/Tj5CF3DQrpbQHym76XBWFc/abstract/?lang=pt#>.

Acesso em: 25 jul. 2024.

DOUEK, N. Argumentation and conceptualization in context: A case study on sunshadows in primary school. **Educational Studies in Mathematics**. v. 39, pp.89–110, 1999a.

_____. **Argumentative aspects of proving of some undergraduate mathematics students' performances**. PME XXIII. Haifa, Israel: v. 2, p. 273-280, 1999b.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Édition: Peter Lang, Suisse.1995.

_____. Questioning argumentation. **La lettre de la Preuve**: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. nov./dez.1999. Disponível em:
<<http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.htm>> Acesso em 03 de fevereiro de 2023.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FLICK, U. **Métodos de Pesquisa**: introdução à pesquisa qualitativa. Rio de Janeiro: Artmed-Bookman, 2009.

FOSSA, J. A. Compreensão relacional metacognição e história da matemática. In: DE ALMEIDA, J. J. P; DANTAS FILHO, F. F. (org.). **Itinerários de Pesquisas em Ensino de Ciências e Educação Matemática**: volume 1, (p, 83-101). Campina Grande, EDUEPB, 2019.

FREITAS, R. A. M. M. Pesquisa em didática: o experimento didático formativo. In: **Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste**: Desafios da Produção e Divulgação do Conhecimento. v. 1, p. 1-11, 2010.

FRIED, M. N. **History of mathematics in mathematics education**. In: MATTHEWS, M. R. (Ed.). **International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching**. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014, pp. 669-703.

FUCKS, W. R. **Matemática Moderna**. São Paulo: Polígon, 1970.

GIL, P. D. B. **A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula** (Doutorado em Matemática) – Universidade de Minho, Instituto de Educação, 2012. Disponível em:
<https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/25355>. Acesso em: 30 abr. 2024.

GRIMBERG, G. **A Matemática grega e o ensino atual da Matemática**. 2008. Disponível em: <http://www.sbemrj.com.br/spemrj6/artigos/d2.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2024.

HANNA, G., JAHNKE, N. Proof and Proving. In: BISHOP, A.J. *et al.* (eds.), **International Handbook of Mathematics Education**, **Kluwer Academic**

Publishers, Dordrecht 1996, p. 877 - 908. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0>. Acesso em: 25 jul. 2024.

KATZ, V. **A History of Mathematics. An introduction**. New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

KRUMMHEUER, G. (1998). Formats of Argumentation in the Mathematics Classroom. In :H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A. Sierpiska (Eds.). **Language and communication in the mathematics classroom** (pp. 223 – 234). Reston, VA: NCTM.

LARRAIN, A. El rol de la argumentación en la alfabetización científica. **Estudios públicos**, vol. 116, no 4, p. 167-193, 2009.

LIMA, E. L. **Análise real**. Rio de Janeiro: Impa, 2004.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? In: **Educação Matemática em Revista** – SBEM 4, 1995, p. 3-13.

LEITÃO, S. Processos de construção do conhecimento: a argumentação em foco. **Proposições**, vol. 18, no 3, p. 75-92, 2007.

_____. O lugar da argumentação na construção do conhecimento. In: LEITÃO, S., & DAMIANOVIC, M.C (Ed.). **Argumentação na escola: o conhecimento em construção**. p.13-46, Brasil: Pontes. 2011.

LEITE, E. C. F. A. Caminhos para produção de significados por meio de representações semióticas e do dialogismo em aulas de cônicas. (Dissertação de mestrado) Campina Grande, PB: PPGECEM-UEPB, 2022.

MACÊDO, G. F. C. de; RAMÍREZ, N. L. R.; LEITÃO, S. El papel de los reguladores semióticos en la construcción y ejecución de un diseño instruccional argumentativo. **Cogency**, vol. 11, no 1-2, 2020.

MENDES, I. A; SÁ, P. F. de. **Matemática por atividades**: sugestões para a sala de aula. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MESERVE, B. **The History of Mathematics as a pedagogical tool**. Boston, USA: Birkhouser. 1980.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, Â. (1992). **Álgebra ou Geometria**: para onde Pende o Pêndulo? Pró-Posições. São Paulo: Cortez, v. 3, n. 1, pp. 39-54. 1992.

MORAIS FILHO, D. C. D. **Um convite à matemática**: com técnicas de demonstração e notas históricas. 3. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2016. 328 p. ISBN 9788583370703.

NACARATO, Adair Mendes. O Ensino de Geometria nas Séries Iniciais. In: **Anais – X ENEM**, 2007. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2007.

NUNES, J. M. V.; ALMOULOU, S.A. O modelo de Toulmin e a análise da prática da argumentação em Matemática. **Educação Matemática**, São Paulo, v.15, n.2, p.487-512, 2013.

OLIVEIRA, M. da S. **O Modelo Euclidiano nas abordagens dos poliedros de Platão em livros didáticos**: Reflexos do Movimento da Matemática Moderna? p. 132: Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria**: uma visão histórica. Universidade Estadual de Campinas. Dissertação de Mestrado em Educação. Faculdade de Educação. Universidade de Campinas. Campinas, 1989.

PIAGET, J. **Para onde vai a educação?** 8 ed. Rio de Janeiro: José Olympio Editora, 1984.

PIRES, C. M. Carolino. **Currículos de Matemática**: da organização Linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PAIS, L. C. Argumentação e Geometria. **Recanto das Letras**. Disponível em <<https://www.recantodasletras.com.br/artigos-de-educacao/5520534>>. 2016. Acesso em 11 de dezembro de 2022.

PEDEMONTE, B. (2002). **Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques**. Tese de doutoramento não publicada. Genova: Université Joseph Fourier-Grenoble I/Université de Genova, Itália. <<https://theses.hal.science/tel-00004579/preview/tel-00004579.pdf>>

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco**: ensino médio. Secretaria de Educação e Esportes, União dos Dirigentes Municipais de Educação. Recife: Secretaria, 2021.

REID, A. & KNIPPING, C. (2010). **Proof in Mathematics Education**. Research, Learning and Teaching. Rotterdam: Sense Publishers.
SÁ, P. F. de. **Atividades para o ensino de Matemática no ensino fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

SANTOS, C. A. dos; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em geometria na educação básica: a fotografia e a escrita na sala de aula**. – 1 ed. – Belo

Horizonte: Autêntica Editora, 2014. (Coleção Tendências em Educação matemática)

SARTOR, N. L. **O universo dos poliedros regulares**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Mato Grosso, 2013.

SASSERON, L. H. Interações discursivas e investigação em sala de aula: o papel do professor. In: A. M. P. Carvalho. **Ensino de ciências por investigação: Condições para implementação em sala de aula** (pp. 41-62). São Paulo: Cengage Learning, 2013.

_____. **Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola**. Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte), vol. 17, p. 49-67, 2015.

SALES, A. **Práticas Argumentativas no Estudo da Geometria por Acadêmicos de Licenciatura em Matemática**. 2010. 243p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande/MS, 2010.

_____. **Argumentação e Raciocínio: uma revisão teórica**. In: BIANCHESSI, C. (org.). **Diálogos Interdisciplinares em Educação: múltiplos saberes, novos olhares – Volume 1** [recurso eletrônico] Curitiba-PR: Editora Bagai, 2022, p. 99-108. Disponível em: <<https://editorabagai.com.br/product/dialogos-interdisciplinares-em-educacao-multiplos-saberes-novos-olhares-volume-1/>>. Acesso em: 17 jul. 2024.

_____. **Argumentação e Raciocínio: uma revisão teórica**. Nova Andradina: Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2011.

SANTOS, A. L. **Relações entre o plano e o espaço: exploração do pensamento geométrico por meio da arte fotográfica**. Campina Grande, PB: PPGECEM-UEPB, 2023. (Dissertação de mestrado).

SCHUNK, T. J. & SAD, L. A. **Alguns porquês sobre os poliedros de Platão e a relação de Euler**. Vitória: Edifes Acadêmico, 2021. 61p.

SILVA, A. A. **O ensino de transformações geométricas por meio de uma Trilha de aprendizagem em uma escola estadual do município De Quipapá-PE a partir de um trabalho colaborativo**. Campina Grande, PB: PPGECEM-UEPB, 2023. (Dissertação de mestrado).

STRUİK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. Gradiva publicações Ltda, 1989.

SOUSA, F. A. Uma conexão entre registro fotográfico e escrita em aulas de Geometria. Campina Grande, PB: PPGECEM-UEPB, 2022. (Dissertação de mestrado).

TOULMIN, S. E. (1958). Os Usos do Argumento. Tradução de Reinaldo Guarany. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

_____. **Os Usos do Argumento**, São Paulo: Martins Fontes. 2006.

VAN EEMEREN, F. H. et al. **Fundamentals of argumentation theory: A handbook of historical backgrounds and contemporary developments**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

WESTON, (1996). **A arte de argumentar**. Lisboa: Gradiva.

APÊNDICE A - ATIVIDADE 1 (AT1)

- 01.** Identifique os poliedros dentre os que estão a amostra.
- 02.** Determine o total de arestas e vértices nos poliedros identificados.
- 03.** Determine quantas arestas se encontram em cada vértice.
- 04.** Preencha o quadro a seguir:

Nº	POLIEDROS	TOTAL DE ARESTAS (A)	TOTAL DE VÉRTICES (V)	QUANTAS ARESTAS SE ENCONTRAM EM CADA VÉRTICE? (n)	(V).(n)
1	CUBO				
2	PRISMA QUADRANGULAR				
3	OCTAEDRO				
4	DODECAEDRO				
5	PIRÂMIDE HEXAGONAL				
6	PRISMA TRIANGULAR				
7	PRISMA HEXAGONAL				

OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES:

Com base em nossas descobertas anteriores, responda as seguintes questões:

01. Um poliedro tem 12 vértices e em cada um concorrem 5 arestas. Qual o número total de arestas desse poliedro?

02. Um poliedro possui 8 faces triangulares, sabendo que em cada um de seus 6 vértices concorrem 4 arestas. Qual o número de arestas desse poliedro?

03. Um poliedro convexo tem 14 vértices. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de quatro outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. Qual o número de arestas do poliedro?

04. Um poliedro possui 7 faces e 7 vértices, sendo que de um único vértice partem 6 arestas e dos demais vértices partem 3 arestas cada um. Qual o número de arestas do poliedro?

05. Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. Qual o número de arestas desse poliedro?

APÊNDICE B - ATIVIDADE 2 (AT2)

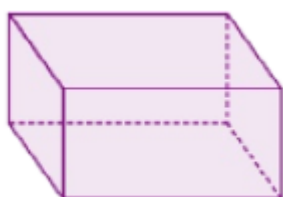
- 01.** Identifique os poliedros dentre os que estão a amostra.
- 02.** Determine o total de arestas e faces nos poliedros identificados.
- 03.** Determine qual ou quais polígonos formam as faces do poliedro identificado
- 04.** Preencha o quadro a seguir:

Nº	POLIEDROS	TOTAL DE ARESTAS (A)	TOTAL DE FACES (F)	QUAL OU QUAIS POLÍGONOS FORMAM AS FACES DO POLIEDRO?	QUANTOS LADOS TEM ESSE POLÍGONO? (n)	QUANTAS VEZES O POLÍGONO SE REPETE NO POLIEDRO? (R)	(R).(n)
1	CUBO						
2	PRISMA QUADRANGULAR						
3	OCTAEDRO						
4	DODECAEDRO						
5	PIRÂMIDE HEXAGONAL						
6	PRISMA TRIANGULAR						
7	PRISMA HEXAGONAL						

OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES:

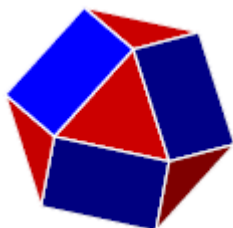
Com base em nossas descobertas anteriores, responda as seguintes questões:

01. Um poliedro possui 10 faces triangulares. Qual o número de arestas desse poliedro?
02. O dodecaedro possui 12 faces pentagonais. Qual o número de arestas desse poliedro?
03. Observe a figura:



Qual o número de arestas do poliedro?

04. O icosaedro possui 30 faces triangulares. Qual o número de arestas desse poliedro?
05. O hexaedro possui 6 faces quadrangulares e o octaedro possui 8 faces triangulares. Qual poliedro possui o maior número de arestas?
06. Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. Qual o número de arestas desse poliedro?
07. Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro de 60 faces triangulares. Qual o número de arestas do cristal encontrado?
08. O poliedro representado na figura abaixo possui 14 faces, sendo 8 triangulares e 6 quadrangulares.



Qual o número de arestas que formam esse poliedro?

09. Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. Qual o número de arestas desse poliedro?

2) Após a investigação realizada na tabela anterior, explique detalhadamente aqui suas conclusões:

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

APÊNDICE D – ATIVIDADE 4 (AT4)

- 1) Utilizando as construções geométricas dos poliedros de Platão, complete a tabela abaixo:

Poliedros	Vértices	Faces	Arestas
Tetraedro			
Hexaedro			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

- 2) Você consegue observar alguma relação entre o número de vértices, faces e arestas?
