UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ELIEUDO NOGUEIRA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DO CÁLCULO INTEGRAL EM UM AMBIENTE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E UTILIZAÇÃO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

CAMPINA GRANDE - PB
2025

ELIEUDO NOGUEIRA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DO CÁLCULO INTEGRAL EM UM AMBIENTE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E UTILIZAÇÃO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação de Professores em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca.

CAMPINA GRANDE - PB
2025

S586e Silva, Elieudo Nogueira.

Ensino-aprendizagem do cálculo integral em um ambiente de Resolução de Problemas e utilização das Tecnologias Digitais [manuscrito] / Elieudo Nogueira Silva. - 2025.

170 f. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, Campus I".

1. Resolução de Problemas. 2. Tecnologias Digitais. 3. DESMOS. 4. Cálculo Integral. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

ELIEUDO NOGUEIRA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DO CÁLCULO INTEGRAL EM UM AMBIENTE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E UTILIZAÇÃO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de C.

Aprovada em: 22/01/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **LEOMAQUES FRANCISCO SILVA BERNARDO** (***.437.214-**), em **11/04/2025 11:20:51** com chave **2bb4a70816e011f09eef2618257239a1**.
- **Roger Ruben Huaman Huanca** (***.567.928-**), em **11/04/2025 10:41:45** com chave **b574ef0816da11f080231a7cc27eb1f9**.
- **Helber Rangel Formiga Leite de Almeida** (***.552.404-**), em **11/04/2025 14:21:27** com chave **6708ca2816f911f08c701a1c3150b54b**.

A minha esposa Tayane Oceti, minha companheira, minha amiga, mãe do nosso maior tesouro Liam Matteo e meu maior apoio, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que me presenteou com a vida. Agradeço também por ter me concedido forças para chegar até este momento.

Agradeço à minha esposa, Tayane Oceti da Silva, e ao meu filho, Liam Matteo Nogueira Silva, por sempre me apoiarem e me fortalecerem ao longo da minha jornada. Vocês são o meu alicerce e o maior tesouro que o Senhor me confiou nesta vida.

Agradeço ao meu pai, Valdencar de Andrade Silva, à minha mãe, Eliane Paulo Nogueira, e aos meus irmãos, Eliones Nogueira Silva, Elialdo Nogueira Silva e Elânio Nogueira Silva, a minha cunhada Chagas Nunes, e em especial ao meu sobrinho Théo, por todo o apoio e força que sempre me ofereceram ao longo da minha vida.

Minha gratidão ao meu orientador, Prof. Roger Huanca, pelas valiosas oportunidades de aprendizado. Suas aulas e orientações, tanto individuais quanto coletivas, resultaram em contribuições significativas que levarei comigo por toda a minha vida. Foi sob sua orientação que aprendi o verdadeiro significado de ser pesquisador e, com seu apoio, pude dar propósito e profundidade à minha pesquisa. Professor Roger, meus eternos e sinceros agradecimentos.

Gostaria de expressar minha gratidão aos membros da banca, Prof. Helber Rangel Formiga Leite de Almeida e Prof. Leomaques Francisco Silva. O Prof. Helber é um docente excepcional, cujas aulas me proporcionaram uma compreensão brilhante sobre o que é a pesquisa na pós-graduação. Além disso, suas valiosas contribuições durante o exame de qualificação, especialmente no que se refere à metodologia da pesquisa, às Tecnologias Digitais e ao Cálculo, aprimoraram significativamente a qualidade do meu trabalho. O Prof. Leomaques, com quem tive o prazer de conviver durante o mestrado, também trouxe contribuições fundamentais sobre Cálculo Integral, elevando a precisão da minha escrita matemática. Agradeço imensamente ao Prof. Helber e ao Prof. Leomaques pela disposição, pela generosidade em compartilhar seus conhecimentos e pelas valiosas sugestões, que sem dúvida enriquecerão minha pesquisa.

Gostaria de agradecer ao meu amigo e parceiro de mestrado, José Genilson, pelos ensinamentos e pela parceria ao longo dessa jornada. Sua presença foi fundamental para o meu crescimento durante todo o processo.

Também expresso minha gratidão à família que nos acolheu em sua casa no primeiro dia de aula, oferecendo-nos um lugar seguro para passar a noite. Esse gesto de generosidade foi decisivo para que eu pudesse continuar nas aulas do mestrado e seguir em frente com o meu objetivo.

Agradeço a Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), que desde o início se mostrou disponível para me atender, acolher e oferecer contribuições valiosas ao meu desenvolvimento acadêmico.

Agradeço sinceramente aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da UEPB, campus Campina Grande, por todas as vivências e aprendizagens compartilhadas ao longo dessa jornada. Não menos importante, quero também registrar minha sincera gratidão pelos momentos enriquecedores vividos ao lado dos meus colegas de disciplina durante o mestrado.

Agradeço imensamente à Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (FECLI-UECE) e aos estudantes que participaram do desenvolvimento da pesquisa de campo. Sem o apoio e a colaboração de todos, a realização deste trabalho não teria sido possível. Cada momento vivido nesse processo foi de grande valor e de extrema relevância para a construção do meu estudo.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio e incentivo recebidos durante o desenvolvimento deste trabalho. O suporte oferecido foi fundamental para a realização desta pesquisa, e sou profundamente grato por essa parceria que contribuiu significativamente para o meu crescimento intelectual e profissional.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Aquele que busca métodos sem ter um problema definido em mente, busca, na maior parte das vezes, em vão”.

D. HILBERT.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é verificar as potencialidades e possibilidades na formalização do Cálculo Integral por meio da metodologia de Resolução de Problemas e da utilização da plataforma DESMOS. O referencial teórico para essa pesquisa estruturou-se nos seguintes eixos: a metodologia de Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais, mais especificamente a utilização da plataforma DESMOS. A pesquisa é qualitativa, orientada pela perspectiva metodológica de Bogdan e Bicklen, e foi realizada com nove estudantes dos cursos de Matemática e Física da Faculdade de Educação, Ciência e Letras de Iguatu (FECLI), campus da Universidade Estadual do Ceará (UECE), que cursavam Cálculo Diferencial e Integral II no primeiro semestre de 2024. A metodologia incluiu quatro encontros de campo, somando doze horas-aula: dois encontros com duração de quatro horas-aula e outros dois com duas horas-aula. A coleta de dados envolveu registros das atividades realizadas na plataforma DESMOS e das soluções apresentadas pelos alunos. Os resultados indicam que a metodologia de Resolução de Problemas despertou interesse nos estudantes, mas suscitou questionamentos sobre sua eficácia, sobretudo pela necessidade de um conhecimento prévio em Cálculo Integral. Como os alunos já haviam estudado o conteúdo antes dos encontros, os problemas propostos funcionaram como uma ferramenta para verificar e aprofundar sua compreensão. Esse resultado reforça a importância do conhecimento prévio para que a metodologia de Resolução de Problemas seja efetiva na consolidação e avaliação do aprendizado no ensino do Cálculo Integral.

Palavras-Chave: resolução de problemas; tecnologias digitais; desmos; ensino do cálculo integral.

ABSTRACT

The objective of this work is to verify the potentialities and possibilities in the formalization of Integral Calculus through the Problem Solving methodology and the use of the DESMOS platform. The theoretical framework for this research was structured around the following axes: the Problem Solving methodology and Digital Technologies, more specifically the use of the DESMOS platform. The research is qualitative, guided by the methodological perspective of Bogdan and Bicklen, and was carried out with nine students from the Mathematics and Physics courses at the Faculty of Education, Science and Letters of Iguatu (FECLI), campus of the State University of Ceará (UECE), who were studying Differential and Integral Calculus II in the first semester of 2024. The methodology included four field meetings, totaling twelve class hours: two meetings lasting four class hours and another two lasting two class hours. Data collection involved records of the activities carried out on the DESMOS platform and the solutions presented by the students. The results indicate that the Problem Solving methodology aroused interest among students, but raised questions about its effectiveness, especially due to the need for prior knowledge of Integral Calculus. Since students had already studied the content before the meetings, the proposed problems served as a tool to verify and deepen their understanding. This result reinforces the importance of prior knowledge for the Problem Solving methodology to be effective in consolidating and evaluating learning in the teaching of Integral Calculus.

Keywords: problem solving; digital technologies; desmos; teaching integral calculus.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática tem sido alvo de muitas reflexões, devido às mudanças culturais e ao avanço tecnológico. É essencial adaptar as diferentes abordagens de ensino à realidade dos estudantes, visando alcançar os objetivos educacionais, criando oportunidades de um aprendizado mais dinâmico, no qual os alunos compreendam a relevância da Matemática no dia a dia, alinhados ao que é ensinado na sala de aula.

Algumas abordagens metodológicas adotadas no ensino de Matemática enfatizam a memorização de textos, a simples repetição de conceitos matemáticos (definições, proposições, teoremas, listas de exercícios e, às vezes, situações-problemas), tudo centrado principalmente nos materiais didáticos. A utilização desses recursos sem planejamento prévio por parte dos professores pode despertar um sentimento de descrédito entre os estudantes, os quais reconhecem a importância de explorar além do conteúdo estabelecido.

Nesse contexto, reconhecer a importância da Matemática no cotidiano e sua aplicação em diversas situações pode promover o pensamento crítico e a formação de indivíduos preparados para a interação social. No contexto do Ensino Superior, o ingresso de jovens na universidade traz à tona uma série de desafios que envolvem tanto aspectos pessoais quanto acadêmicos. Ao adentrar a sala de aula, muitos estudantes manifestam um entusiasmo marcante por estarem ocupando assentos universitários, mas também carregam consigo os hábitos de estudo adquiridos durante a trajetória escolar anterior. No entanto, esses hábitos, muitas vezes centrados no estudo superficial e na preparação de última hora para provas, se revelam insuficientes para o sucesso nas exigências do Ensino Superior, que demanda um envolvimento mais profundo e contínuo com os conteúdos (Jesus, 2018).

Dentre os diversos assuntos que ilustram esta situação, destaca-se o Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Azevedo, Palhares e Figueredo (2020) enfatizam a importância de discutir esse tema, relacionando-o às dificuldades que os estudantes enfrentam, no que se refere à falta de compreensão dos conceitos primordiais das disciplinas que integram essa área da Matemática, seja na sua complexidade ou na metodologia de ensino adotada.

Historicamente, as disciplinas de Cálculo apresentam elevados índices de reprovação e evasão nos cursos de graduação, conforme apontam os estudos de Lima e Silva (2012) e Huanca, Silva e Souza (2021). Segundo Lima e Silva (2012), a falta de consenso sobre o ensino do Cálculo em Matemática levanta questões sobre a necessidade de uma reflexão aprofundada sobre o currículo, que pode impactar a formação profissional dos futuros matemáticos e professores.

Pesquisas na área de Educação Matemática, com ênfase no Ensino Superior, têm surgido com o objetivo de mudar essa situação, abordando tanto os processos de ensino quanto a aprendizagem e propondo estratégias diversificadas (Azevedo; Palhares; Figueredo, 2020). Entre as diversas estratégias de ensino no âmbito da Educação Matemática, apresentamos neste trabalho a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem, com foco especial no CDI. Essa abordagem pode tornar os conceitos mais acessíveis aos alunos, com base em estudos publicados sobre o assunto (Huanca; Silva; Souza, 2021).

Segundo Onuchic (1999), a Resolução de Problemas pode ser utilizada como uma metodologia de ensino na Matemática, funcionando tanto como um ponto de partida quanto como uma forma de introduzir novos conceitos e conteúdos antes de sua formalização. Isso significa que a prática de resolver problemas contribui para a construção do conhecimento matemático.

Nesse sentido, acreditamos que essa metodologia pode ser interessante para promover o ensino e a aprendizagem, pois, em sua essência, vai além de uma mera abordagem focada apenas no conteúdo. Além disso, ela não deve ser vista apenas como um acréscimo de metodologias a serem aplicadas em sala de aula, mas sim como uma alternativa que enriquece a abordagem de outras estratégias, promovendo debates significativos sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática (Huanca; Almeida, 2018).

Para Onuchic e Allevato (2011), a Resolução de Problemas tem como objetivo oferecer mais do que apenas uma resposta correta, pois busca capacitar os alunos a construir seu próprio conhecimento matemático por meio da exploração e investigação. Essa metodologia propõe reforçar ideias pré-existentes como base para introduzir e ensinar novos conceitos matemáticos.

Ao organizarmos essas ideias para utilizar essa metodologia no desenvolvimento da pesquisa, buscamos contribuir efetivamente para a aprendizagem dos alunos envolvidos. Além disso, em consonância com a busca por uma metodologia adequada para abordar o Cálculo Integral, propomos o uso de recursos tecnológicos, como a disponibilização do ambiente virtual da plataforma DESMOS, com o intuito de aprimorar a visualização do conceito, propriedades e gráficos da integral, aproveitando a acessibilidade e versatilidade da plataforma DESMOS, disponível em diversos sistemas operacionais e dispositivos móveis.

O DESMOS[1], também conhecido como DESMOS STUDIO, é uma plataforma *online* que oferece uma variedade de ferramentas, incluindo calculadoras gráficas, científicas, de matrizes e recursos de geometria. Todas essas ferramentas estão disponíveis gratuitamente e permitem que os usuários salvem seus resultados e compartilhem com outros (Antunes; Cambrainha, 2020).

Em nossa pesquisa, vamos focar na funcionalidade “Sala de Aula”, que permite aos professores criar atividades interativas para relacionar e esclarecer conceitos matemáticos de maneira teórica. Na tela inicial do DESMOS *Classroom*, ambiente dedicado à criação e divulgação de atividades, são apresentadas atividades em destaque com base no país dos usuários e são desenvolvidas por educadores locais. Existem atividades criadas pelos próprios desenvolvedores do DESMOS, com o objetivo de ajudar os usuários a se familiarizarem com as ferramentas disponíveis (Antunes; Cambrainha, 2020).

Adotaremos a abordagem qualitativa como metodologia de pesquisa, realizando um estudo que contribua para a formação acadêmica dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (FECLI), campus da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Com este trabalho, buscamos revisar definições de Cálculo Integral que muitas vezes são esquecidas, além de disponibilizar material de apoio para professores e estimular futuras pesquisas sobre o tema.

1.1 Justificativa

Durante minha trajetória acadêmica, pude vivenciar em primeira mão as dificuldades enfrentadas como estudante na disciplina de CDI. Muitos alunos, assim como eu, encontraram desafios significativos ao tentar compreender conceitos abstratos e complexos, como os da integral, que frequentemente exigem uma

[1] Endereço eletrônico: https://teacher.desmos.com.

mudança radical na forma de pensar e resolver problemas matemáticos durante a formação acadêmica.

Uma das principais dificuldades está na transição do Cálculo Diferencial para o Cálculo Integral. Enquanto o Cálculo Diferencial pode ser mais visual e intuitivo para alguns alunos, o Cálculo Integral muitas vezes é percebido como mais abstrato e desafiador. A ideia de acumular infinitas e pequenas partes pode ser difícil de conceituar e internalizar.

Além disso, uma questão recorrente é a abordagem excessivamente focada na resolução de questões de alguns livros didáticos, que são adotados em alguns cursos de Licenciatura em Matemática. Embora a prática de resolver questões seja importante, há possibilidade de que essa abordagem leve os alunos a se concentrarem apenas na aplicação de fórmulas e técnicas de resolução, em vez de desenvolverem uma compreensão profunda dos conceitos estudados e a capacidade de aplicá-los em diferentes contextos.

Diante desses desafios, ressaltamos a importância de explorar metodologias que promovam o ensino e a aprendizagem do CDI na formação do futuro professor de Matemática. Dentro dessa abordagem, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem se mostrado promissora nesse sentido, pois incentiva os alunos a explorarem ativamente conceitos matemáticos, a desenvolverem raciocínio crítico e a aplicarem seus conhecimentos em situações do mundo real.

Silva e Huanca (2020) argumentam que a Resolução de Problemas, como metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática, oferece um caminho para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina. Nessa metodologia, o problema serve como ponto de partida, permitindo que o professor faça novas conexões entre diferentes áreas da Matemática, possibilitando a compreensão de novos conceitos e conteúdos.

Entretanto, é essencial complementar essa metodologia com recursos que potencializem a visualização e a compreensão dos conceitos. Nesse contexto, destacamos a proposta didática do DESMOS, uma plataforma digital interativa que proporciona ferramentas dinâmicas e visuais. Com o DESMOS, os alunos podem explorar conceitos matemáticos de forma mais tangível e intuitiva, transformando a abstração em experiências concretas e envolventes. Essa integração tecnológica pode contribuir para o aprendizado, além de estimular o interesse e a curiosidade dos estudantes em relação à Matemática.

Ao integrar a metodologia da Resolução de Problemas com o uso do DESMOS, podemos criar uma experiência de aprendizado mais completa e significativa para os alunos. Esta pesquisa visa investigar como essa combinação pode impactar positivamente o ensino e aprendizado do cálculo integral, fornecendo conhecimentos valiosos para futuros professores da Educação Básica e contribuindo para o aprimoramento das práticas pedagógicas nessa área.

1.2 Objetivo Geral

Verificar as potencialidades e possibilidades na formalização do Cálculo Integral através da metodologia de Resolução de Problemas e a utilização da plataforma DESMOS.

1.3 Objetivos Específicos

- Analisar os pressupostos iniciais da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, investigando como essa metodologia pode ser aplicada para promover uma melhor compreensão dos conceitos de Cálculo Integral;
- Examinar a plataforma DESMOS como uma ferramenta pedagógica para auxiliar na compreensão dos conceitos fundamentais do Cálculo Integral, com foco na visualização gráfica e na representação dinâmica de funções, buscando destacar as contribuições dessa ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos;
- Fazer uma revisão das pesquisas recentes sobre o ensino-aprendizagem do Cálculo Integral, identificando as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes e as estratégias propostas para superá-las, especialmente no contexto do Ensino Superior;
- Criar e aplicar atividades (cinco problemas para os encontros presenciais) sobre Cálculo Integral, adaptando-os à resolução com a plataforma DESMOS.

1.4 Problemática

Segundo Martins, Araújo e Oliveira (2018), os alunos não são incentivados a entender o verdadeiro significado do Cálculo, permanecendo presos apenas ao método tradicional de resolução de questões, o que limita a expansão do conhecimento. Os autores afirmam que os professores podem abordar as disciplinas de Cálculo de forma que os alunos consigam operar logicamente com os conteúdos essenciais para sua formação, e que se dediquem ao aprendizado, além de haver uma revisão dos conceitos considerados pré-requisitos para a disciplina.

Já Azevedo, Palhares e Figueredo (2020) apontam os erros resultantes da aplicação inadequada de conceitos da Matemática do Ensino Básico, evidenciando a lacuna entre o que é ensinado nessa fase e no Ensino Superior, além das metodologias de ensino utilizadas. Os autores também destacam que as aulas de CDI frequentemente seguem um formato tradicional, no qual os alunos desempenham um papel passivo. Eles costumam apenas copiar ou, atualmente, fotografar as soluções dos exemplos e exercícios apresentados pelo professor no quadro.

Huanca, Silva e Souza (2021, p. 16) afirmam que “a aprendizagem de CDI, na grande maioria das vezes, resume-se ao domínio de algumas técnicas de resolução que não transcendem a compreensão algébrica”. Nesse sentido, Rezende (2003) ressalta a importância de tornar o ensino de Cálculo mais significativo e motivador para os alunos. O autor aponta que as dificuldades na aprendizagem de Derivadas e Integrais estão ligadas à falta de maturidade nas ideias de infinito e à compreensão de que o limite de uma sequência se aproxima, mas não atinge, seu ponto limite.

Diante disso, a problemática deste trabalho surgiu a partir das inquietações vivenciadas pelo pesquisador durante sua formação em Licenciatura em Matemática, quando se deparou com o CDI abordado de forma mecânica, ou seja, através de excessivas listas de exercícios, sem a devida compreensão dos conceitos. Além disso, essas preocupações foram reforçadas por suas experiências profissionais no Ensino Superior.

Já nas disciplinas do Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) o pesquisador se deparou com discussões em torno dos textos estudados e do Fenômeno de Interesse[2] a ser investigado. Diante disso, formulamos a seguinte questão da pesquisa:

[2] Cálculo Integral através da Resolução de Problemas.

Como a metodologia de Resolução de Problemas, aliada ao uso da plataforma DESMOS, pode potencializar a compreensão e a formalização da Integral no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral?

Para responder a essa questão, passaremos a relacionar as ideias de outros sobre Resolução de Problemas, Tecnologias e Cálculo Integral. Em seguida, prepararemos as atividades no ambiente virtual da plataforma DESMOS e, finalmente, aplicaremos essas atividades na pesquisa de campo, a partir de encontros presenciais com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e Física de uma instituição de Ensino Superior, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II.

1.5 Estrutura da dissertação

Estruturamos nossa investigação iniciando com a Introdução, onde abordamos elementos como o contexto da temática estudada, a motivação e a justificativa para a pesquisa em questão. Também apresentamos os objetivos que nos impulsionaram criar a questão norteadora da pesquisa.

No capítulo 2 – Resolução de Problemas – discorremos sobre essa temática, apresentando e destacando o papel do processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, suas contribuições para o ambiente escolar e sua relevância no Ensino Superior.

No capítulo 3 – Tecnologias Digitais – abordaremos essa temática, promovendo uma discussão teórica sobre o uso de recursos tecnológicos no contexto educacional e fornecendo uma breve descrição do ambiente virtual da plataforma DESMOS, a principal ferramenta empregada em nosso trabalho.

No Capítulo 4 – Cálculo Integral – faremos uma leitura panorâmica e uma contextualização do Cálculo Integral, com ênfase no ensino do CDI. Serão apresentadas referências relevantes da literatura, conceitos e definições para fundamentar a formalização do conceito de integral.

No capítulo 5 – Metodologia da Pesquisa – apresentamos os procedimentos metodológicos adotados na construção desta investigação, mostraremos o contexto da pesquisa, ou seja, destacando os participantes e instrumentos de coleta de dados.

No capítulo 6 – aplicação, resultados e análise da pesquisa – descrevemos os encontros realizados em episódios, visando informar ao leitor os principais aspectos abordados. E trazendo uma análise definitiva, procurando trazer a resposta para a questão norteadora da investigação.

Por fim, apresentamos o Capítulo 7 – Considerações Finais – em que recapitulamos os aspectos essenciais desta pesquisa, destacando os principais resultados obtidos, nossas reflexões sobre o estudo realizado e as implicações mais relevantes dos achados para o campo da Educação Matemática.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, visamos evidenciar a importância da Resolução de Problemas como um processo fundamental para a aprendizagem, particularmente no contexto da Educação Matemática. Destacaremos a relevância desse tema tanto na teoria do conhecimento quanto nas práticas pedagógicas, sublinhando como sua aplicação tem promovido impactos positivos e construtivistas nas salas de aula, o que justifica e execução do nosso estudo.

Para melhor organização iniciaremos o capítulo, com um breve resgate do contexto histórico do uso da Resolução de Problemas, destacando sua trajetória como ferramenta pedagógica. Em seguida, serão discutidas as diferentes abordagens de ensino de metodologia, seguidas pela apresentação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, que constitui a base do nosso estudo, discutindo seus principais conceitos e interfaces, e como os mesmos influenciam a prática da pesquisa.

2.1 Pressupostos iniciais da Resolução de Problemas

Em 1945, o matemático húngaro George Pólya, amplamente reconhecido como o Pai da Resolução de Problemas, publicou seu primeiro livro sobre o tema, intitulado *How to Solve It*, que foi traduzido no Brasil como *A Arte de Resolver Problemas*. Nessa obra, Pólya propôs uma sequência de etapas fundamentais para a resolução eficaz de problemas. Segundo o autor, as etapas devem ser seguidas da seguinte forma: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e, por fim, revisar a solução obtida (Pólya, 1994).

Nos anos seguintes, a pesquisa em Resolução de Problemas se intensificou em todo o mundo. O surgimento do Movimento da Matemática Moderna nas décadas de 1950 e 1960 promoveu uma significativa transformação no ensino de Matemática. Contudo, nas décadas seguintes, especialmente nos anos 1970, surgiram críticas e reflexões sobre o insucesso de aprendizagem dos estudantes com esse modelo de ensino (Onuchic; Allevato, 2011).

Assim, uma docência excessivamente abstrata, aliada ao despreparo dos professores para lidar com tal abordagem e à falta de envolvimento dos pais dos alunos, resultou no fracasso dessa fase da educação tanto nos Estados Unidos quanto nos países que adotaram o mesmo modelo. Isso motivou um movimento de retorno às bases do ensino tradicional de Matemática. Paralelamente, pesquisadores ao redor do mundo buscaram alternativas inovadoras para aprimorar o ensino da disciplina e garantir o sucesso dos alunos na educação básica, especialmente durante o ano de 1980 (Onuchic; Allevato, 2011).

Diante do contexto, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou um documento histórico na área da Educação Matemática, intitulado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's* (Uma Agenda de Ação: Recomendações para a Matemática Escolar dos anos 80). Esse documento delineou várias ações recomendadas para orientar o ensino de matemática durante os anos 80. Uma das recomendações principais foi que o ensino centrado na Resolução de Problemas deveria ser o foco central da Matemática Escolar naquela década (Onuchic, 1999).

O documento inspirou pesquisadores nos Estados Unidos a investigar o uso da Resolução de Problemas na Educação Matemática, explorando diversas abordagens em sala de aula. Segundo Nunes et al. (2022), em 1989, os pesquisadores americanos, Thomas L. Schroeder e Frank K. Lester Jr. apresentaram uma nova perspectiva: eles argumentaram que a Resolução de Problemas não deveria apenas ensinar a resolver problemas, mas também ser fundamental para a aprendizagem matemática.

No Brasil, tais ideias influenciaram diversos pesquisadores ao longo de quase quatro décadas. Luiz Roberto Dante iniciou esse movimento em 1986 com seu livro Didática da Resolução de Problemas, uma das primeiras obras originais sobre o tema no país, baseada nas ideias de Polya e explorando sua aplicação prática em ambientes educacionais (Nunes et al. 2022).

No final de 1989, após colaborar com os pesquisadores americanos *Judith Sowder* e *Larry Sowder* na *San Diego State University*, a professora Lourdes de la Rosa Onuchic introduziu em nosso país as ideias de ensino de matemática focado na Resolução de Problemas. Em 1992, ela fundou o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), que completou 30 anos em 2022. Originalmente estabelecido em 1992 e renomeado GTERP em 2002 por sugestão da professora Norma Suely Gomes Allevato, o grupo se dedica à pesquisa e discussão sobre o uso de problemas no ensino de matemática, buscando beneficiar alunos e professores em todos os níveis de ensino (Nunes et al. 2022).

Neste cenário, Nunes et al. (2022) enfatizam que as tendências atuais em Educação Matemática posicionam a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino. Esse posicionamento é evidenciado pelas orientações curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, que destacam a Resolução de Problemas como fundamental para a formação matemática dos alunos em todos os níveis da Educação Básica. No entanto, ensinar através dessa abordagem não é simples, exige planejamento diário, adaptação às necessidades dos alunos e aos objetivos educacionais.

Diante de tais desafios, surge a necessidade de explorar a utilização da Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para isso, Nunes et al. (2022, p. 58-59) destacam alguns motivos para a utilização da Resolução de Problemas na sala de aula, sendo eles:

> [...] (i) a Resolução de Problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e em dar sentido às mesmas; (ii) a Resolução de Problemas pode desenvolver nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido; (iii) a Resolução de Problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos e; (iv) a Resolução de Problemas desenvolve o potencial matemático.

De acordo com Nunes et al. (2022), a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), foi desenvolvida por meio das discussões do GTERP, se destacando por utilizar o problema como elemento central para o ensino de novos conceitos, conteúdos e habilidades matemáticas. Diferentemente de abordagens que focam apenas na resolução de problemas ou no desenvolvimento dessa habilidade isoladamente, a MEAAMaRP propõe um processo integrado de ensino, aprendizagem e avaliação ao longo da jornada para resolver um problema gerador específico.

O GTERP influenciou, desde sua fundação, significativamente a adoção da Resolução de Problemas como metodologia pedagógica no Brasil, estimulando a formação de diversos grupos de pesquisa interessados em explorar como as problemáticas podem motivar, facilitar e promover aprendizagens matemáticas nas salas de aula (Nunes et al. 2022).

2.2 Mas, o que é um Problema?

Quando abordamos a Resolução de Problemas, é fundamental estabelecer uma definição clara do que entendemos por “problema”, uma vez que essa palavra possui múltiplos significados. Cai e Lester (2012) apontam que nem todos os problemas com enunciados são, de fato, um obstáculo para os estudantes, e que até mesmo aqueles sem enunciado podem se tornar desafiadores. Isso reforça a complexidade dessa terminologia e ressalta a importância de uma compreensão precisa para orientar efetivamente a Resolução de Problemas.

Alguns autores apresentam suas definições sobre o termo, sendo suas contribuições consideradas relevantes para o nosso trabalho. Entre eles, destacamos Pólya (1994), Onuchic (1999), Dante (1991), Serrazina (2017), Onuchic e Allevato (2004, 2009, 2011), Van de Walle (2009) e Proença (2018).

Pólya (1994) destaca que ao buscamos os meios para alcançar um objetivo, estamos diante de um problema. Quando temos um desejo que não pode ser atendido de imediato, passamos a refletir sobre as maneiras de satisfazê-lo, e assim surge o problema.

Diante disso, Onuchic (1999, p. 215) define que um problema é “[...] tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver” e reforça que “o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória” (Onuchic, 1999, p. 215). Para Serrazina (2017, p. 60),

> um problema é uma situação para a qual se procura uma solução, não existindo à partida um procedimento que conduza a essa solução, havendo uma fronteira ténue entre problema e tarefa de investigação. Assim, constituem características de um bom problema: (i) ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática; (ii) ser adequado, permitindo relacionar o conhecimento que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptados e aplicados para completar tarefas; (iii) ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível.

Portanto, podemos compreender que um bom problema deve ser desafiante e interessante do ponto de vista matemático, adequado ao nível de conhecimento dos alunos, problemático, permitindo-lhes aplicar e adaptar o que já sabem. Ou seja, deve envolver um desafio no qual o caminho para a solução não está claramente definido. Essa ideia se aproxima do que Onuchic e Allevato (2004) afirmam sobre o problema. Para as autoras, o problema é

> é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em saber. [...] O problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. (Onuchic; Allevato, 2004, p. 221).

Além disso, Onuchic e Allevato (2009) enxergam o problema como um elemento essencial e fundamental para agilizar o processo de construção do conhecimento, por meio da Resolução de Problemas. As autoras consideram que:

> Um problema é o ponto de partida e orientação para aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através da resolução. Professor e aluno, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula (Onuchic; Allevato, 2009, p. 7).

Segundo Van de Walle (2001, apud Onuchic; Allevato, 2004, p. 221), "[...] um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, ou se quer a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta". Já Dante (1991, p. 10), acredita que "problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la", ou seja, o autor considera o problema como um desafio a ser superado ou resolvido.

Para Van de Walle (2009, p. 42), um problema é "qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta".

Nesse cenário, Proença (2018) enfatiza a distinção entre um problema e um exercício. Segundo o autor, uma situação é considerada um problema quando requer que o indivíduo utilize conceitos, princípios e métodos matemáticos que já foram adquiridos para resolver a questão. Em contraste, quando a solução envolve o uso direto de fórmulas ou regras conhecidas, a situação tende a ser classificada como um exercício.

Em vista disso, Van de Walle (2009) destaca três características essenciais a serem consideradas no ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas: a objeção deve ser baseada no nível de compreensão atual dos alunos, de modo que faça sentido para eles; o problema precisa estar vinculado à matemática que os alunos irão aprender, para que, ao resolvê-lo, eles construam significados sobre a matemática e, assim, desenvolvam uma compreensão mais profunda dos conceitos; e, por fim, a aprendizagem matemática requer que os alunos justifiquem as respostas que encontram, sendo essa justificativa uma parte fundamental do processo de Resolução de Problemas.

Dessa forma, a partir da perspectiva de Van de Walle (2009), Onuchic e Allevato (2004, 2009, 2011) e Serrazina (2017), entendemos o conceito de problema e elaboramos a sequência de atividades utilizadas nos encontros desta pesquisa, adotando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas.

Nessa circunstância, ao adotar a resolução de problemas como ponto de partida no ensino, espera-se que os professores despertem a curiosidade dos alunos e os preparem para lidar com uma variedade de situações ao longo da vida (Foster, 2019).

2.3 Abordagens da Resolução de Problemas

Segundo Onuchic e Allevato (2011), a Resolução de Problemas não se limita a fornecer uma resposta definitiva, mas sim capacita os alunos a construírem seu próprio conhecimento matemático ao descobrirem novos conceitos. Assim,

> [...] os problemas são postos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado" (Onuchic; Allevato, 2011, p. 85).

Em tal caso, as autoras enfatizam a importância da Resolução de Problemas como uma abordagem pedagógica que antecipa a formalização dos conceitos matemáticos necessários para sua solução. Essa metodologia encoraja os alunos e os envolvem ativamente na descoberta e compreensão dos conteúdos, contextualizando os temas matemáticos ao apresentá-los inicialmente através de desafios práticos e significativos (Onuchic; Allevato, 2011).

Ao começar com problemas que exploram aspectos-chave de um determinado tópico, os estudantes são incentivados a desenvolver habilidades de pensamento crítico, aplicar técnicas matemáticas apropriadas e buscar soluções de maneira autônoma (Onuchic; Allevato, 2011).

Entretanto, ensinar Matemática por meio de problemas não é uma tarefa simples. É fundamental que o professor planeje e escolha atividades diariamente, e, quando necessário, se empenhe para adaptar ou modificar as atividades ditas tradicionais propostas nos livros didáticos. Assim, Onuchic e Allevato (2004) oferecem algumas razões convincentes que justificam esse esforço, as quais apresentamos a seguir:

- A Resolução de Problemas direciona a atenção dos estudantes para as ideias e para o processo de “dar sentido” às situações. Ao resolverem problemas, os estudantes refletem sobre as ideias que estão implícitas e/ou relacionadas ao problema em questão;
- A Resolução de Problemas desenvolve o “poder matemático”. Ao solucionarem problemas em sala de aula, os estudantes se envolvem em todos os cinco padrões de procedimento descritos no *Standards 2000*[3], além de possibilitar uma compreensão mais profunda do conteúdo que está sendo abordado;
- A Resolução de Problemas fortalece a crença de que os estudantes são capazes de aprender Matemática e de que ela faz sentido. A cada problema resolvido em sala de aula, a compreensão, a confiança e a autoestima dos estudantes são aprimoradas;
- A Resolução de Problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser úteis tanto para os estudantes quanto para os professores;
- Professores que experimentam ensinar dessa forma nunca mais retornam ao modelo tradicional de “ensinar dizendo”;
- A formalização de toda a teoria matemática relevante para cada tópico abordado, dentro de um problema proposto, faz mais sentido para os estudantes.

Schroeder e Lester (1989), apresentam três abordagens para a resolução de problemas que podem auxiliar na compreensão e reflexão sobre as diferenças de entendimento ou de abordagem que surgem, com maior ou menor intensidade, no contexto do ensino.

A primeira delas é o ensino **sobre** resolução de problemas, seguindo o modelo de Pólya. O método enfatiza as fases de compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e revisão. Conforme Allevato e Onuchic (2014, p. 39) “O ensino sobre resolução de problemas corresponde a considerá-la como um novo conteúdo”. Além disso, inclui uma discussão explícita sobre os métodos utilizados para resolver problemas matemáticos (Schroeder; Lester, 1989).

Outra abordagem é o ensino **para** resolução de problemas, no qual os alunos são expostos a vários conceitos matemáticos e recebem muitas oportunidades para aplicá-los na resolução de problemas. O foco principal é desenvolver a capacidade

[3] Os Standards são diretrizes produzidas pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) em 2000, estabelecendo recomendações para educadores de matemática.

dos alunos em transferir o aprendizado para novas situações, demonstrando uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos e suas aplicações práticas (Schroeder; Lester, 1989). “Assim, nessa abordagem, apenas após ter desenvolvido a parte ‘teórica’ referente a um determinado tópico matemático, é que o professor propõe problemas aos alunos, de fato, como aplicação dos conteúdos estudados” (Allevato; Onuchic, 2014, p. 40).

A análise feita por Allevato (2014) aponta que essa formulação trata a Matemática de forma utilitária, o que pode levar os estudantes a acreditarem que a Resolução de Problemas só é possível após a introdução de um novo conteúdo. Além disso, ao se depararem com uma problemática inédita, os alunos podem se sentir incapazes de prosseguir, uma vez que as orientações e o caminho para a solução, que normalmente eram fornecidos pelo professor, não estarão mais claros.

Por fim, temos o ensino **através** da resolução de problemas, que inicia o ensino de um tópico matemático com a apresentação de situações-problema que exemplificam os conceitos centrais. Allevato e Onuchic (2021, p. 40) consideram que “a expressão “através” – significando “ao longo”, “no decurso” – enfatiza que ambas, matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente”. Nesse sentido, as técnicas matemáticas são desenvolvidas como soluções para problemas semelhantes, facilitando a transição da compreensão concreta das situações para a abstração simbólica na aprendizagem matemática (Schroeder; Lester, 1989).

Segundo Schroeder e Lester (1989), é importante reconhecer as limitações das abordagens “sobre” e “para” a resolução de problemas. No caso do ensino “sobre” resolução de problemas, essa abordagem pode sugerir que a resolução de problemas é ensinada como um tópico isolado, separado dos conteúdos matemáticos e suas inter-relações.

Por outro lado, no ensino “para” resolução de problemas, há uma limitação significativa, no qual resolver problemas é visto apenas como uma atividade subsequente à introdução de um novo conceito ou como uma aplicação de habilidades de cálculo ou algoritmos. Essas abordagens podem restringir a capacidade dos alunos de integrar a resolução de problemas de forma orgânica e contextualizada no aprendizado matemático.

Ainda sobre a terceira e última abordagem, apresentamos a fala de Onuchic e Allevato (2004, p. 221), que afirmam:

> Ensinar matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que a mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase do "durante", os alunos trabalham e o professor observa e avalia o trabalho. Na terceira, "depois", o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-los e conduz a discussão enquanto os alunos justificam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos (Onuchic; Allevato, 2004, p. 221).

Portanto, sabemos que trabalhar com a Resolução de Problemas em sala de aula pode ser uma tarefa desafiadora, e que muitas dúvidas podem surgir em relação a esse tema. No entanto, concordamos com Onuchic (1999), quando a mesma revela que a atividade Matemática escolar não se resume a observar soluções prontas e definitivas, mas a um processo de construção e apropriação de conhecimentos pelo aluno, que serão fundamentais para compreender e transformar a realidade.

Dessa forma, o ensino do Cálculo Integral sob a perspectiva da Resolução de Problemas pode incentivar a colaboração entre os estudantes na criação de significados, estimulando a reflexão sobre as diversas interpretações possíveis para um mesmo problema.

2.4 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Embora o ensino, a aprendizagem e a avaliação em Matemática sejam elementos distintos, não necessariamente ocorrendo simultaneamente ou como consequência um do outro, é considerado ideal que o ensino e a aprendizagem se integrem nas situações de sala de aula, frequentemente referidas como ensino-aprendizagem.

De acordo com Allevato e Onuchic (2014), houve uma revisão do conceito de avaliação. Reconhecendo a importância de adotar princípios de avaliação contínua e formativa, ela passou a ser integrada ao desenvolvimento dos processos de aprendizagem, priorizando o acompanhamento durante o processo ao invés do julgamento dos resultados finais.

A utilização da expressão Ensino-Aprendizagem-Avaliação visa refletir uma abordagem em que o ensino e o aprendizado acontecem de forma simultânea ao longo do processo de construção do conhecimento, com o professor atuando como orientador e os alunos como co-construtores desse saber. Além disso, essa metodologia incorpora uma visão mais contemporânea sobre avaliação, entendida como algo que se desenvolve durante a resolução de problemas, integrando-se ao ensino para acompanhar o progresso dos alunos, potencializar a aprendizagem e, quando necessário, reorientar as práticas em sala de aula (Allevato; Onuchic, 2009).

Nesse contexto, ao abordarmos o Ensino-Aprendizagem-Avaliação, é importante ressaltar que essas três atividades estão intimamente interconectadas. Juntas, elas compõem um todo que tem como meta principal promover o desenvolvimento do professor e a aprendizagem do aluno. O professor, responsável pelo ensino, trabalha para proporcionar uma melhor aprendizagem do aluno, que participa ativamente na construção de novo conhecimento com o apoio do professor como guia. A avaliação, integrada ao processo de ensino, aprimora as práticas tanto do professor quanto do aluno (Huanca, 2007).

Segundo Van de Walle (2001, apud Allevato; Onuchic, 2009, p. 139), um professor de matemática eficiente deve integrar quatro componentes essenciais em sua prática:

> (1) a valorização da disciplina Matemática em si mesma o que significa "fazer matemática"; (2) a compreensão de como os estudantes aprendem e constroem idéias; (3) a habilidade em planejar e selecionar tarefas de modo que os estudantes aprendam matemática num ambiente de resolução de problemas; (4) a habilidade em integrar a avaliação ao processo para aumentar a aprendizagem e aprimorar, no dia-a-dia, o ensino (Allevato; Onuchic, 2009, p. 139).

Diante disso, tanto o professor ensina quanto o aluno aprende simultaneamente, realizando avaliações. Portanto, o aluno assume um papel ativo, construindo conhecimento, enquanto o professor atua como mediador do aprendizado. Para que essa dinâmica ocorra de maneira eficaz, é essencial um planejamento e organização cuidadosos que facilitem essa interação.

Onuchic e Allevato (2011, p. 81) reforçam as ideias expostas, destacando que

> Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário (Onuchic; Allevato, 2011, p. 81).

Com o objetivo de atender à necessidade de fornecer aos estudantes os conhecimentos prévios essenciais para o desenvolvimento mais produtivo da metodologia, Onuchic e Allevato (2011) sugeriram um roteiro que organiza as atividades durante a Resolução de Problemas conforme as seguintes etapas:

- *Preparação do problema* - Selecionar um problema com o objetivo de desenvolver um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será denominado problema gerador. É importante destacar que o conteúdo matemático necessário para explicar o problema ainda não foi abordado em sala de aula.
- *Leitura individual* - Distribuir uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que leiam atentamente o enunciado.
- *Leitura em conjunto* - Formar grupos e pedir aos estudantes que leiam o problema novamente, agora em conjunto, dentro de seus grupos. Caso haja dificuldade na leitura do texto, o professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema em voz alta. Se, durante a leitura, surgirem palavras desconhecidas, isso poderá configurar um problema secundário. Nesse caso, o professor deve buscar formas de esclarecer as dúvidas, e, se necessário, consultar um dicionário com os alunos para esclarecer o significado das palavras.
- *Resolução do problema* – Por meio do entendimento do problema, sem dúvidas, os estudantes devem, em seus grupos, trabalhar de forma cooperativa e colaborativa para resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores do novo conteúdo matemático que se deseja abordar, o problema gerador servirá como um guia. Ao longo de sua resolução, ele conduzirá os alunos à construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula, permitindo que o aprendizado seja gradual e significativo.
- *Observar e incentivar* – Neste estágio, a função do professor transforma - se deixando de ser apenas transmissor de conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, se empenham na resolução do problema, o professor observa, analisa o comportamento deles e fomenta a colaboração entre os participantes. Como mediador, o docente incentiva o pensamento crítico, proporcionando tempo para que os alunos troquem ideias e reflexões. Além disso, o educador estimula os alunos a aplicarem seus conhecimentos prévios e as técnicas operatórias já dominadas, que são essenciais para a resolução do desafio proposto. O

professor também os motiva a explorar diferentes abordagens e métodos, a partir dos recursos que têm à disposição. Contudo, é essencial que o educador esteja atento às dificuldades dos alunos, atuando como interventor e questionador. Ao acompanhar o progresso das investigações, o professor oferece suporte na resolução de problemas secundários que possam surgir durante o processo, como notação, a transição da linguagem cotidiana para a linguagem matemática, e conceitos e técnicas operatórias relacionadas, garantindo que o trabalho possa seguir adiante.

- *Registro das resoluções na lousa* – Os representantes dos grupos são convidados a registrar suas soluções na lousa. Tanto as resoluções corretas quanto as incorretas, ou aquelas realizadas por diferentes métodos, devem ser apresentadas para que todos os alunos tenham a oportunidade de analisar e discutir as diversas abordagens.
- *Plenária* – Nesta etapa, todos os alunos são convidados a participar da discussão das diferentes soluções registradas na lousa pelos colegas, com o objetivo de defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas. O professor atua como guia e mediador, incentivando a participação ativa e engajada de todos os alunos. Este momento é especialmente valioso para a aprendizagem, pois favorece a troca de ideias, a reflexão crítica e o aprofundamento do entendimento sobre o conteúdo em questão.
- *Busca do consenso* – Após esclarecer as dúvidas e analisar as resoluções e soluções apresentadas para o problema, o professor busca, com a participação de toda a classe, chegar a um consenso sobre a solução correta. Esse momento visa consolidar o aprendizado coletivo, promovendo a compreensão do conteúdo e a construção de um entendimento compartilhado entre todos os alunos.
- *Formalização do conteúdo* – Nessa etapa, o professor registra na lousa uma apresentação estruturada e organizada, utilizando a linguagem matemática formal. Logo o registro visa padronizar os conceitos, princípios e procedimentos que foram desenvolvidos ao longo da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades relevantes relacionadas ao tema em questão.

Nos últimos anos, a Proposição de Problemas ganhou destaque, consolidando-se como um elemento central nas pesquisas sobre o processo de Ensino-

Aprendizagem de Matemática, especialmente no contexto da Resolução de Problemas**.** Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2014) passaram a compreender que a Proposição de Problemas deveria ser incorporada como uma etapa adicional nesse roteiro de ensino, reconhecendo seu papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Essa abordagem amplia as possibilidades de aprendizagem, permitindo que os estudantes não apenas resolvam problemas, mas também se envolvam ativamente na criação e formulação de novos desafios matemáticos. A seguir, destacamos a versão publicada pelas autoras em 2014.

> [...] apresentamos nossa sugestão mais atual para esse trabalho em sala de aula, indicando que as atividades sejam organizadas em 10 (dez) etapas: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas (Onuchic; Allevato, 2014, p. 48).

Ao considerarmos essas informações, é importante entender que as autoras não oferecem um método definitivo e finalizado para promover a aprendizagem, mas sim uma direção para facilitar essa construção. Além disso, é importante que a estratégia de ensino deve ser cuidadosamente planejada para evitar sua aplicação inadequada, que pode resultar em aprendizagem superficial.

Portanto, resolver problemas sem uma exploração profunda pode levar os estudantes a verem a Resolução de Problemas apenas como uma habilidade técnica para executar cálculos, não percebendo seu verdadeiro potencial educacional e aplicação em contextos reais. Assim, Onuchic e Allevato (2014) reforçam que entender Matemática para os alunos significa principalmente estabelecer relações. Ou seja, a capacidade de discernir se um estudante compreende, interpreta incorretamente ou não compreende ideias matemáticas específicas muitas vezes surge durante a resolução de problemas.

O processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, por meio da Resolução de Problemas culmina com a avaliação, realizada tanto para os alunos quanto para o próprio professor. A avaliação desempenha um papel crucial, pois orienta e direciona as práticas pedagógicas em sala de aula, permitindo ajustes e aprimoramentos contínuos no ensino.

Assim, Pironel e Vallilo (2017) destacam que, durante o processo de avaliação, o professor pode perceber os significados que os alunos estão construindo ao se envolverem com um problema. Ao observar as dúvidas e estratégias dos estudantes frente ao problema gerador, o professor tem a oportunidade de propor questões que orientem o aluno a gerar significados relacionados ao conteúdo que está sendo trabalhado.

Assim sendo, a avaliação deve ser encarada como uma chance de aprendizado, com ênfase no aprimoramento dos procedimentos em vez de focar apenas nos resultados finais alcançados.

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS

Nas últimas décadas, o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) tem se expandido de maneira acelerada, transformando diversos aspectos da sociedade, incluindo os âmbitos familiar, profissional e social. Esse crescimento tem gerado mudanças significativas nesses ambientes, especialmente no contexto educacional. A introdução de recursos tecnológicos cada vez mais avançados possibilita novas maneiras de agir e interagir, redefinindo a forma como os indivíduos se relacionam com o mundo e com os outros, além de ampliar as possibilidades de perceber e estruturar processos de aprendizagem.

Nesse capítulo, abordaremos a temática das Tecnologias Digitais (TD) e seu crescente uso nas pesquisas da área de Educação Matemática. No contexto dessa pesquisa, as Tecnologias Digitais são apresentadas como um dos recursos explorados. Assim, discutiremos algumas considerações sobre o papel das Tecnologias Digitais na Educação Matemática, além de uma apresentação da Plataforma DESMOS, que funciona como um ambiente virtual de ensino-aprendizagem.

3.1 As Tecnologias Digitais na Educação Matemática

De acordo com Kenski (2012), as tecnologias desempenham um papel essencial na educação e no ensino, funcionando como uma forma de socialização da inovação. No que diz respeito ao uso do computador, ela ressalta que não é suficiente apenas ter o equipamento, é necessário saber utilizá-lo de maneira adequada e identificar as melhores formas de aproveitar seus recursos para obter o apoio desejado.

Nesse sentido, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) fornecem uma visão abrangente das influências das Tecnologias Digitais, como a internet e outras ferramentas, no ensino de Matemática nos últimos anos. Os autores apresentam as quatro fases do uso dessas tecnologias na Educação Matemática, abordando o impacto delas no processo de ensino e aprendizagem da disciplina. Além disso, eles oferecem uma compreensão mais profunda das transformações educacionais provocadas pelo acesso e uso dessas tecnologias digitais.

Segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), a primeira fase é marcada pela introdução das tecnologias no contexto educacional, a partir dos anos 1980, com foco no uso pedagógico de ferramentas como o *software* LOGO. Os autores apontam que, apesar de seu potencial, essa proposta não foi amplamente adotada nas escolas, o que é demonstrado pela falta de relatos de experiências de ensino com esse enfoque na formação e prática docente.

A segunda fase do uso de tecnologias no ensino de Matemática foi marcada pela acessibilidade e popularização dos computadores pessoais. Isso possibilitou o uso de *softwares* mais fáceis de manusear, focados em representações de funções e Geometria Dinâmica, permitindo aos estudantes manipular, construir e visualizar objetos matemáticos de forma interativa. Esse período foi marcado pelo desafio enfrentado pelos professores de sair da sua zona de conforto para aprender a utilizar essas novas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, conforme Borba e Zulato (2010), citado por Borba, Scucuglia, Gadanidis (2014).

Em relação ao estudo de funções ou pré-cálculo, Borba, Scucuglia, Gadanidis (2014) destacam que as tecnologias utilizadas para a representação gráfica de funções, nesse contexto, ampliaram as possibilidades de exploração matemática, permitindo a investigação de novos tipos de problemas em diferentes níveis de ensino.

A terceira fase, que se inicia por volta de 1999, é caracterizada pela introdução da internet e dos cursos à distância, proporcionando a interação entre professores e alunos, além de ampliar o acesso à informação. Nesse período, emerge o conceito de TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação), com ênfase nas interfaces interativas entre computadores e usuários. Essas inovações transformam a comunicação educacional e abrem caminho para o desenvolvimento da quarta fase (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2014).

Já a quarta fase do desenvolvimento das tecnologias, com início em meados de 2004, foi marcada pelo acesso rápido à internet, o que impulsionou a evolução das formas de comunicação *online* e o aprimoramento das conexões. Nesse contexto, o termo “Tecnologias Digitais” (TD) é utilizado de forma mais abrangente do que as TIC, englobando não apenas a informação e comunicação, mas também outras áreas como a produção de vídeos, aplicativos, ambientes de aprendizagem virtuais, entre outros dispositivos e tecnologias portáteis (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2014).

Os autores abordam o avanço das novas formas de pesquisa por meio das tecnologias digitais, ressaltando suas particularidades tanto no contexto do dia a dia quanto no âmbito do ensino-aprendizagem, especialmente na Matemática. Além disso, destacam que as diferentes fases desse desenvolvimento podem se sobrepor, com aspectos das etapas anteriores continuando a exercer influência nas fases mais recentes.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) destacam que as atividades de aprendizagem que envolvem tecnologia, particularmente aquelas que utilizam *softwares*, devem ter uma abordagem experimental, oferecendo múltiplas soluções e caminhos, proporcionando uma experiência qualitativamente superior à do ensino tradicional com lápis e papel. Nesse contexto, a visualização gerada pelos *softwares* pode desempenhar diversas funções, como a ilustração de conceitos ou o incentivo à formulação de hipóteses. Na prática, os alunos podem interpretar essas atividades de formas distintas das previstas no planejamento original.

Borba, Souto e Canedo Junior (2022) abordam o impacto das tecnologias digitais, em especial os vídeos digitais, na Educação Matemática, destacando a transição para a quinta fase das TD, associada à pandemia e ao aumento do uso de vídeos como ferramenta pedagógica. De acordo com os autores, a introdução desses recursos na educação, especialmente no contexto de processos avaliativos e de comunicação, foi acelerada pela necessidade de adaptação durante a crise sanitária global. Nesse sentido, as TD como a utilização dos vídeos é um fator importante e otimizam a compreensão dos conteúdos matemáticos, no nosso caso a integral.

Os autores também discutem as cinco perspectivas internacionais sobre o uso das TD na Educação Matemática, incluindo o uso de tecnologias móveis, cursos *online*, bibliotecas digitais, aprendizagem colaborativa e formação continuada de professores. Além disso, relacionam essa nova fase com as ideias de Paulo Freire, destacando a importância de os alunos escolherem os temas e de promover a autonomia no processo educativo. O uso dos vídeos vai além da simples transmissão de conteúdo matemático, buscando possibilitar que os alunos se envolvam ativamente na criação e produção de conhecimento, refletindo sobre as novas formas de aprendizagem oferecidas pelas mídias digitais (Borba; Souto; Canedo Junior, 2022).

Nossa pesquisa se insere na quarta fase das TD na Educação Matemática, conforme descrito por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014). Ao utilizar o ambiente virtual DESMOS para a realização de atividades relacionadas ao Cálculo Integral, destacamos como as plataformas digitais proporcionam uma experiência interativa e experimental, alinhando-se à proposta de explorar múltiplas representações e soluções com compreensão.

Nesse contexto, certos recursos digitais se destacam por sua capacidade de potencializar a aprendizagem, não com o intuito de substituir as aulas presenciais expositivas, mas para promover a colaboração, a interatividade e proporcionar oportunidades de *feedback* contínuo e qualificado dos professores aos alunos. Um exemplo disso é o DESMOS, uma plataforma digital de matemática que disponibiliza ferramentas como calculadora gráfica, geometria dinâmica, calculadora de matrizes, entre outras.

Em relação às orientações pedagógicas, o DESMOS disponibiliza, em sua página de suporte, uma seção voltada para atividades tanto para alunos quanto para professores, acessíveis por meio de *login*. As orientações estão disponíveis em inglês. Para os professores, o *site* oferece uma variedade de atividades interativas e criativas para serem utilizadas em sala de aula. Cabe ao docente adaptá-las conforme a realidade de sua escola, de modo a alcançar os objetivos desejados. Já o *software* instalado nos dispositivos não conta com essa funcionalidade, mas é possível criar gráficos a partir de modelos prontos, facilitando a análise.

Os usuários podem interagir e participar de atividades em grupo através do acesso ao site. O *software* possibilita a realização de diferentes conteúdos matemáticos, favorecendo diversos estilos de aprendizagem e, assim, promovendo a ampliação do conhecimento. Em relação às atividades disponíveis, elas podem ser manipuladas utilizando atalhos de teclado específicos do *software*, e também é possível utilizar textos ou representações matemáticas para expressar ideias.

3.2 Plataforma DESMOS: um ambiente virtual de ensino-aprendizagem

Nesta subseção, apresentaremos as funcionalidades da plataforma DESMOS no contexto dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, oferecendo uma descrição da plataforma que possibilite sua exploração e a identificação de algumas formas de aplicá-la nas aulas de Matemática.

Para a escolha do *software* DESMOS[4] para esta pesquisa, consideramos alguns critérios, entre os quais estão os sistemas de representação, a interface, a

[4] Link de acesso à plataforma DESMOS - https://teacher.desmos.com/?lang=pt-BR

interação do usuário e a facilidade de uso. Ao comparar os programas DESMOS e GeoGebra[5], podemos observar que o DESMOS se destaca pela sua acessibilidade e interface intuitiva, apesar de oferecer menos recursos. Nesse sentido, realizar uma análise inicial do *software* é fundamental para assegurar uma experiência de aprendizado adequada para os alunos, permitindo que eles tenham a liberdade de examinar e desenvolver seus projetos a qualquer momento.

O *software* DESMOS, objeto de estudo desta pesquisa, que em latim significa "vínculo" ou "conexão", é uma calculadora gráfica online desenvolvida pelo físico e matemático americano *Eli Luberoff* em 2011. Acessível por meio de páginas da web ou dispositivos móveis, a plataforma está disponível para PC/notebook e smartphones devido às linguagens de programação que utiliza, como *Javascript* e *HTML*. O aplicativo pode ser baixado gratuitamente tanto para dispositivos Android quanto para iOS.

Antunes e Cambrainha (2020) explicam que a plataforma oferece um espaço interativo e diversas ferramentas que exploram a natureza social dos estudantes por meio das interações *online*, proporcionando uma investigação matemática significativa. A plataforma registra as ideias e interações que ocorrem em uma sala de aula tradicional, permitindo que o professor aproveite essas informações para enriquecer o processo de aprendizagem da turma.

Para utilizá-lo, é suficiente escrever cada expressão algébrica, mesmo que em inglês, enquanto os efeitos são exibidos graficamente na tela ao lado. É possível inserir um número ilimitado de fórmulas matemáticas. Ao digitar uma expressão algébrica no lado esquerdo do editor, seja uma equação, inequação ou função, sua representação geométrica é imediatamente visualizada à direita, na malha quadriculada.

A estrutura e a interface interativa do DESMOS tornam a ferramenta muito fácil de usar, facilitando a representação de gráficos mais complexos. Em comparação com softwares educacionais como o GeoGebra, o DESMOS oferece menos recursos, mas essa simplicidade torna o processo de criação de atividades muito mais ágil. Por exemplo, para utilizar o número irracional π, basta digitar "pi" no editor à esquerda, e o símbolo aparecerá instantaneamente (Eusébio, 2018).

[5] Link de acesso à plataforma GeoGebra - https://www.geogebra.org/

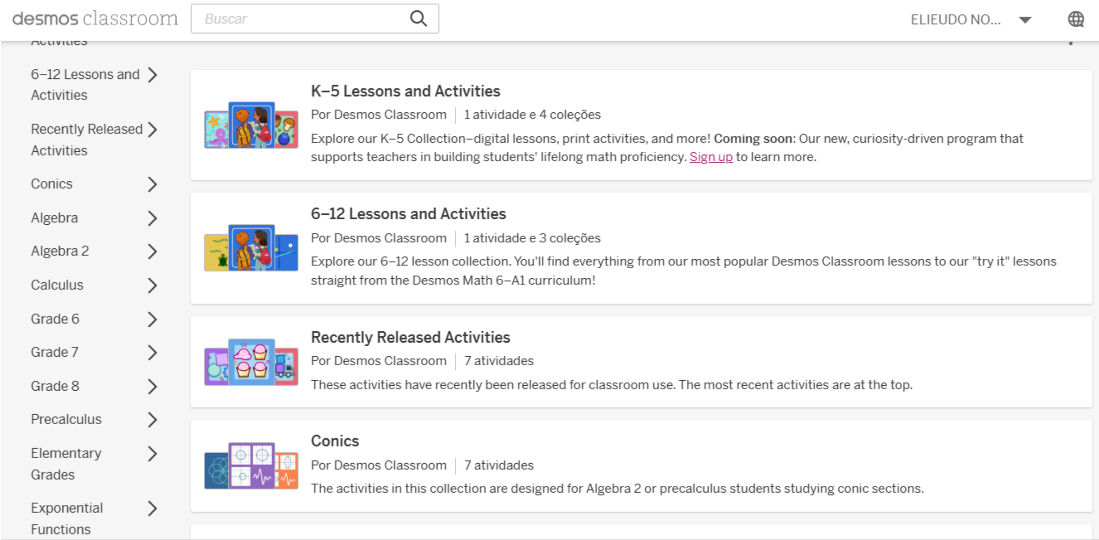
O DESMOS tem como ferramentas básicas (Figura 1): (a) calculadora gráfica; (b) calculadora científica; (c) calculadora com as quatro operações e raiz quadrada; (d) calculadora matricial; (e) ambiente de construções geométricas. Com auxílio destas ferramentas, podemos representar graficamente funções e conjuntos de dados, solucionar equações e inequações com apresentação gráfica dos resultados, investigar transformações matemáticas, realizar análises de regressão e estatísticas.

Figura 1 – Página inicial da plataforma DESMOS.

Fonte: https://www.desmos.com/?lang=pt-BR

O ambiente conta com outros dois recursos úteis para o ensino. O primeiro deles é o ambiente Atividades de Sala de Aula (*Desmos Classroom Activities*), onde é possível criar turmas online que permitem a realização de atividades já disponíveis dentro do próprio DESMOS; ou elaborar suas próprias atividades (Figura 2).

Figura 2 – Página de atividades da plataforma DESMOS.



Fonte: https://teacher.desmos.com/collection/651ca31cf69ee59aa9e3818a?r=w.hd&lang=pt-BR

Nas atividades de autoria própria, pode-se utilizar matérias teóricas quanto questões e problemas diversos. Os problemas propostos podem incluir texto, imagens estáticas ou animações. As respostas podem ser selecionadas entre opções de múltipla escolha, inseridas em campos de texto ou desenho à mão livre, ou ainda utilizando as ferramentas básicas disponíveis mencionadas anteriormente (Candido, 2022).

Para personalizar atividades, o DESMOS oferece a possibilidade de ir além do simples uso das existentes. Isso é alcançado por meio de sua Camada de Computação (*Computation Layer* - CL), que contém um conjunto de comandos que conectam blocos/componentes funcionais (Candido, 2022). Esses blocos podem ser inseridos em cada página da atividade (Figura 3). Dentro de cada bloco, é possível criar variáveis, as quais são “enxergadas” por qualquer outro bloco, desde que sejam nomeadas. Isso permite a automatização de ações, como, por exemplo, o surgimento de um gráfico após a submissão de uma fórmula inserida pelo usuário, seleções de alternativas em um bloco de múltipla escolha, caixa de seleção, tabela ou botão de ação. Ao criar uma atividade, os blocos funcionais disponíveis são ilustrados na figura abaixo.

Figura 3 – Componentes disponíveis na criação de uma atividade no DESMOS.

Fonte: Adaptado de Antunes e Cambrainha (2020, p. 33).

No quadro abaixo, apresentamos as funcionalidades de cada item que pode ser adicionado à página da atividade. Cada item possui características específicas que permitem personalizar a experiência e facilitar a interação com o conteúdo.

Quadro 1 – Descrição dos itens disponíveis na criação das atividades.

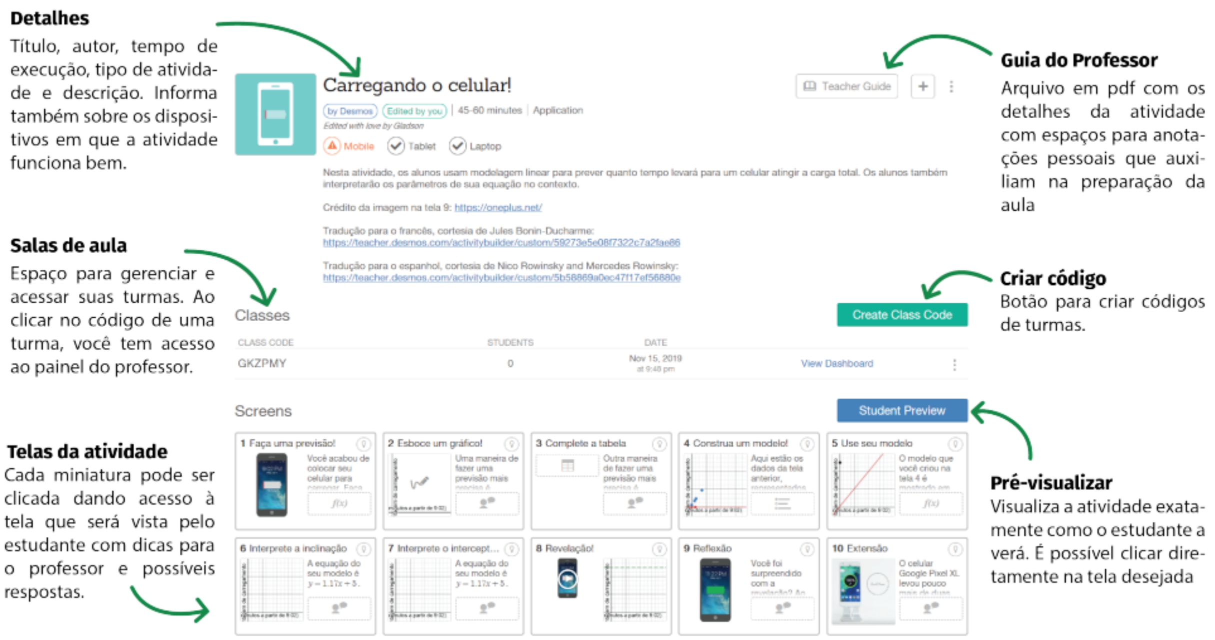
Item	Descrição
Nota	Insere um texto ou equação que será exibido para o aluno. Não é um item interativo, mas serve como base para fornecer informações e instruções nas atividades.
Entrada de texto	Coleta respostas dos alunos em formato de texto. É possível escolher se deseja tornar as respostas visíveis para os colegas ou não. Caso opte por torná-las visíveis, após o aluno compartilhar sua resposta, as respostas de outros colegas serão exibidas na tela.
Equação	Este recurso permite para coletar respostas dos alunos em formato de equação. É possível definir se o aluno deverá explicar sua resposta; nesse caso, após enviar a resposta, será exibida uma caixa de texto com o prompt “Explique seu raciocínio”. Também é possível configurar se as respostas dos alunos serão visíveis para os colegas ou não.
Múltipla escolha	Item geralmente relacionado a uma pergunta (utilizando o item de nota) em que o aluno seleciona uma das opções disponíveis. Assim como em uma equação, é possível decidir se o aluno precisará explicar sua resposta e se as respostas dos colegas serão visíveis. Há também a opção de embaralhar a ordem das alternativas e de alterar o formato dos botões de escolha. Nas alternativas, é possível incluir textos, equações ou gráficos.
Caixas de seleção	Item geralmente relacionado a uma pergunta (utilizando a opção “nota”), em que o aluno pode selecionar mais de uma alternativa entre as opções oferecidas. Além da possibilidade de escolher múltiplas alternativas, as demais opções de personalização são semelhantes às do item de múltipla escolha.
Lista ordenada	Item no qual o aluno deve alterar a ordem das alternativas, geralmente associado a uma pergunta (utilizando o item “nota”). É opcional incluir uma legenda que indique a ordem desejada, por exemplo, ao preencher “Ordenar de menor até maior”, as legendas “menor” e “maior” serão exibidas para o aluno. Existe a opção de tornar aleatório a ordem das alternativas e também de usar a ordem original como gabarito para os alunos. Nesse caso, a ordem das alternativas será automaticamente embaralhada, e o gabarito será utilizado para determinar se o aluno acertou ou errou, com o resultado aparecendo no resumo do painel de controle.

Gráfico	Este recurso é um elemento fundamental nas atividades em sala de aula e permite a criação de gráficos na página do aluno. Os gráficos podem ser utilizados para exibir informações e, além disso, podem incluir elementos interativos, como pontos móveis (arrastáveis) ou funções manipuláveis. No entanto, o aluno não terá acesso à lista de expressões, como ocorre na Calculadora Gráfica, e, portanto, não poderá inserir expressões diretamente no gráfico. Dependendo do nível de familiaridade com a Calculadora Gráfica DESMOS, é possível utilizar este recurso para criar pequenos *applets* interativos.
Desenho	Adiciona à página do aluno uma ferramenta que permite desenhar sobre um fundo pré-definido, que pode ser um gráfico, uma imagem ou um fundo branco. O aluno pode usar um traço livre, inserir segmentos de reta, adicionar textos e equações, além de contar com uma borracha e opções para alterar a cor e a espessura do traço.
Mídia	Permite adicionar imagens e vídeos à página do aluno. Ao inserir um arquivo de mídia, é possível incluir uma descrição da imagem ou uma transcrição do vídeo, garantindo que a atividade seja acessível a alunos com deficiência visual.
Tabela	Adiciona uma tabela à página do aluno, que pode conter informações em formato de texto ou equações. A tabela pode exibir todos os dados preenchidos ou ter algumas células em branco, permitindo que o aluno complete as informações.
Botão de ação	Permitem o controle de outros componentes na página utilizando a Camada de Computação (*Computation Layer*).
Calculadora gráfica	É um item que ocupa toda a tela, não podendo ser utilizado juntamente com outros itens. Esse item insere a calculadora gráfica da DESMOS na página, permitindo que o aluno realize todas as operações que faria na calculadora fora da Atividade em Sala de Aula. Mesmo assim, é possível inserir expressões iniciais, como notas ou equações, na janela de expressões, para deixar instruções ao aluno. Também é possível colocar expressões em uma pasta oculta, de modo que os alunos não tenham acesso ao que foi digitado.
Marbleslides	Este item ocupa toda a tela e, portanto, não pode ser utilizado junto com outros itens. Para que ele apareça no construtor de atividades, é necessário ativar a opção em (https://teacher.desmos.com/labs).
Ordenação de fichas	Este item ocupa toda a tela e, portanto, não pode ser usado junto com outros itens. Trata-se de uma atividade em que o aluno deve agrupar fichas criadas pelo professor, com base em características comuns entre elas. O professor é responsável por criar as fichas, que podem conter equações, textos, imagens ou gráficos. É opcional que o professor crie um gabarito, o qual aparecerá automaticamente no Resumo, no painel de controle, indicando se o aluno agrupou as fichas corretamente ou não.
Polygraph	Um item que ocupa toda a tela e, por isso, não pode ser utilizado junto com os outros itens. O *Polygraph* é um jogo interativo entre colegas, em que o objetivo é descobrir a função escolhida pelo parceiro sorteado a cada rodada, por meio de perguntas de “sim ou não” e raciocínio lógico. Trata-se de uma versão *online* e matemática do jogo Cara a Cara, lançado no Brasil em 1986 pela empresa Estrela.
Geometria	Para que este item apareça no construtor de atividades, é necessário primeiro ativar a opção em (https://teacher.desmos.com/labs?). Este item permite integrar o produto de geometria da DESMOS na atividade. Vale ressaltar que esta é uma funcionalidade em versão BETA e pode ser alterada ou removida sem aviso prévio.

Fonte: Adaptado de França (2022, p. 63-66).

Ao selecionar uma atividade pronta ou depois de criar uma nova, o usuário tem acesso a uma página que permite determinar seus objetivos, o tempo estimado para aplicação e o tipo de atividade (introdução, aplicação, exploração, prática, etc.). No canto inferior da página, é possível acessar os blocos disponíveis da atividade, bem como as dicas disponibilizadas pelo professor para sua realização (Figura 4).

Figura 4 – Visão geral de uma atividade no DESMOS.



Fonte: Antunes e Cambrainha (2020, p. 31)

Na parte superior da tela, são exibidos o título e os detalhes da atividade, como autor, tempo estimado, dispositivos compatíveis, tipo de atividade e uma descrição. Também há um link para o “Guia do Professor”, que oferece a opção de exportar um arquivo contendo miniaturas das telas das atividades, orientações para o professor, exemplos de respostas e dicas sobre como organizar a aplicação da atividade com a turma (França, 2022).

O ícone de “+”, visível somente após o *login*, permite adicionar a atividade a uma coleção. Abaixo da descrição da atividade, à direita, encontra-se um botão verde que possibilita atribuir a atividade a uma turma ou gerar um código de sessão único, que permite aos alunos participar sem necessidade de *login*. Caso a atividade já tenha sido atribuída anteriormente, é possível visualizar uma lista das sessões ativas dessa atividade. Ao final da página, há um botão azul para visualizar a prévia do aluno, permitindo navegar pelas diferentes páginas da atividade, com acesso a dicas para o professor, exemplos de respostas e auxílio ao aluno.

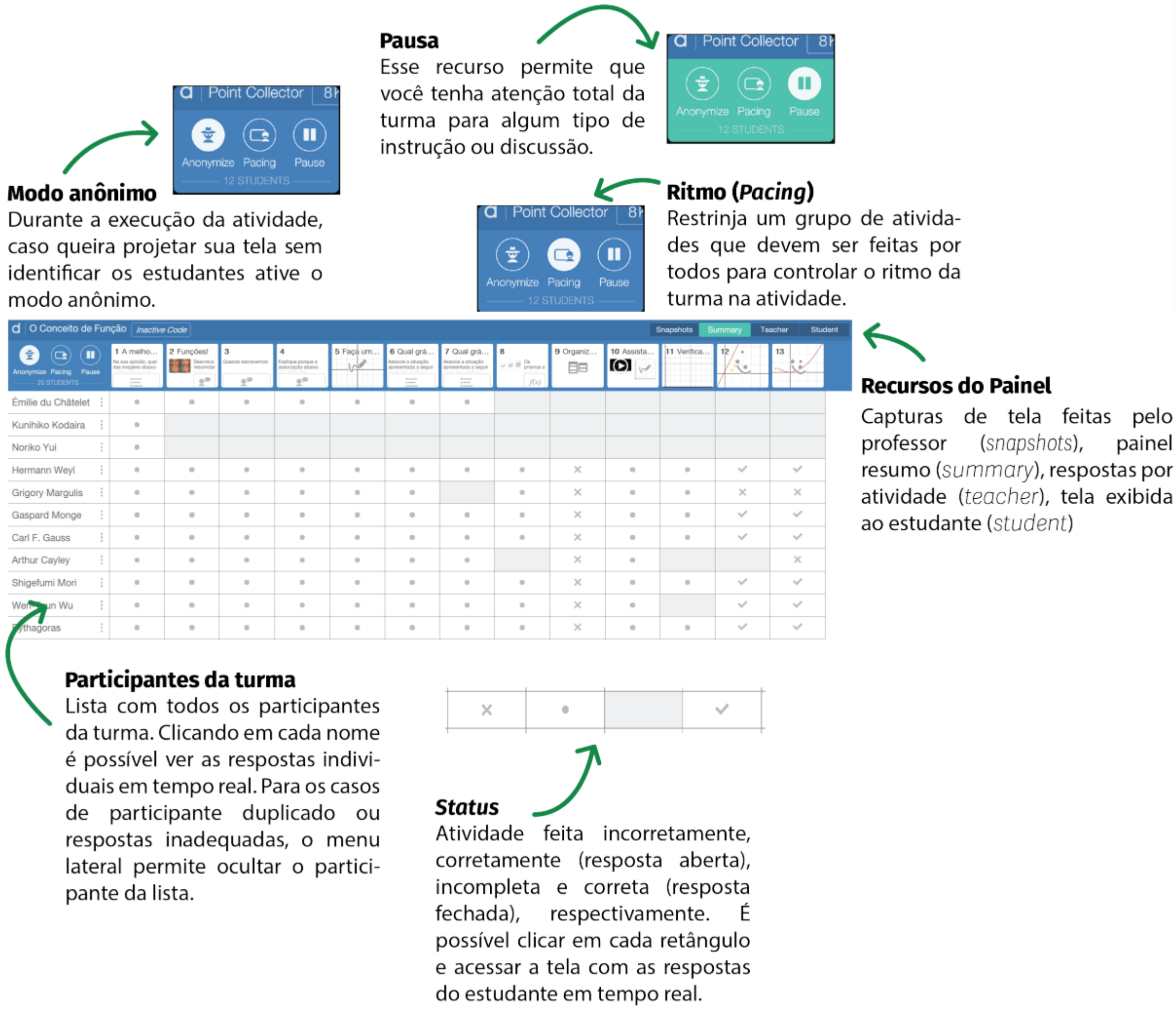
Antunes e Cambrainha (2020) destacam que o ambiente virtual de aprendizagem do DESMOS oferece uma vasta gama de atividades desenvolvidas digitalmente por professores da Educação Básica, disponíveis gratuitamente para qualquer professor utilizar. Além disso, os autores enfatizam alguns aspectos relevantes para a utilização dessas atividades em sala de aula, sendo eles:

> [...] os problemas propostos são fáceis e rapidamente entendidos, instigando os estudantes a iniciarem uma investigação em busca de respostas; o aprendizado é social e ocorre de forma coletiva; além disso, os processos são visíveis e os estudantes muitas vezes recebem *feedback* por escrito, geralmente de outros colegas. (Antunes; Cambrainha, 2020. p. 29).

Nesse sentido, receber um *feedback* que informa apenas o certo e o errado pode limitar o pensamento do aluno, restringindo-o a si mesmo. Por outro lado, o *feedback* escrito sobre a atividade que está sendo realizada de forma coletiva tende a direcionar a atenção dos estudantes para a resolução do problema proposto, incentivando a reflexão sobre diferentes abordagens e a troca de ideias entre os colegas. Isso promove um ambiente de aprendizado mais colaborativo e estimula o desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico e trabalho em equipe, contribuindo assim para uma compreensão mais profunda do conteúdo e para o fortalecimento do aprendizado (França, 2022).

O Painel de Controle (Figura 5), outro recurso disponibilizado pelo DESMOS, permite visualizar o andamento e o ritmo dos estudantes de forma individualizada, sem a necessidade de circular pela sala de aula. Caso um determinado estudante apresente erros consecutivos nas atividades, o professor pode ir até ele e oferecer orientação. Se um estudante está muito mais adiantado que o restante da turma, é possível ajustar o ritmo para restringir as atividades que podem ser feitas naquele momento, permitindo que a turma avance gradual e coletivamente. Por outro lado, também é válido, em certas situações, permitir que os próprios estudantes estabeleçam seus ritmos.

Figura 5 – Painel de Controle do professor.

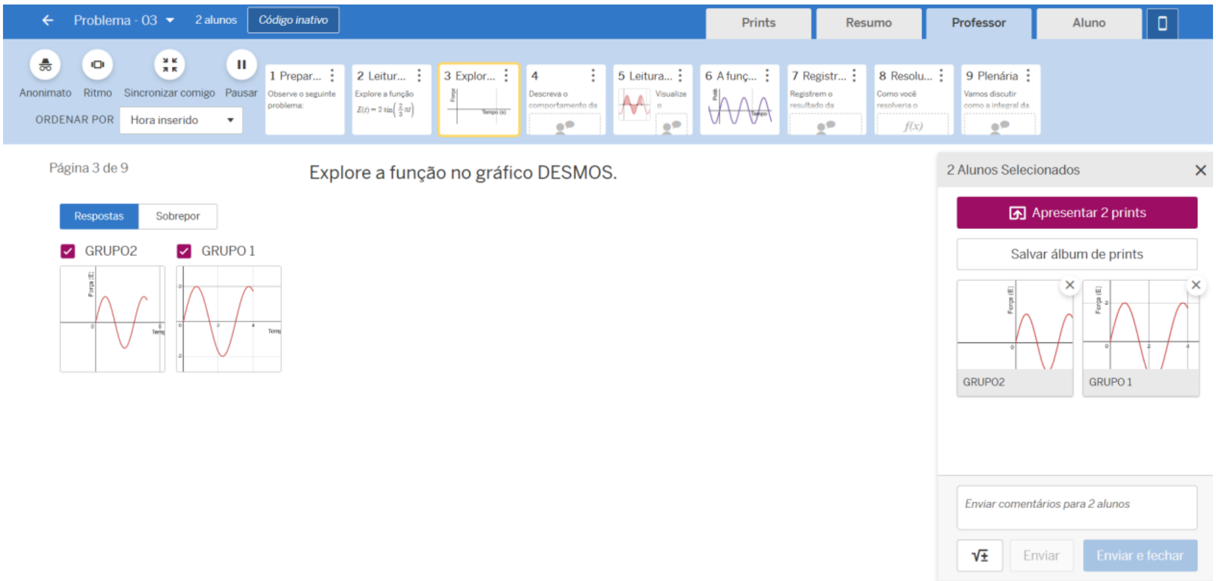


Fonte: Antunes e Cambrainha (2020, p. 32).

A Figura 5 apresenta os diferentes símbolos que podem ser exibidos na tela de resumo do painel de controle. O traço indica que não há atividades para o aluno realizar nesta página. O ícone de “ok” sinaliza que o aluno completou todas as atividades corretamente, enquanto o “xis” mostra que há algo incorreto na página. O ícone de aviso indica que o trabalho do aluno não está apenas incorreto, mas pode sugerir que o aluno não compreendeu o comando da atividade, necessitando de sua intervenção. O ponto indica que a página requer uma análise humana, pois o desempenho do aluno não pode ser resumido apenas pelos outros símbolos. Além disso, há ícones triangulares no canto superior direito de cada célula, que aparecem quando um *feedback* é fornecido ao aluno. O triângulo será inicialmente verde e mudará para cinza assim que o aluno visualizar o *feedback* (Lemos, 2021).

Na aba “Professor”, é possível visualizar um panorama geral das respostas dos alunos para cada página, como mostrado na Figura 6. O conteúdo exibido nesta aba varia conforme os componentes configurados em cada página, mas, de modo geral, é possível ver tanto as respostas individuais de cada estudante quanto as respostas coletivas de toda a turma. Caso a página tenha sido configurada para correção automática, será oferecida a opção de exibir as correções dos trabalhos dos alunos. Também é possível salvar o álbum de *prints*, enviando a seleção de respostas para a aba “Prints”, que será explicada a seguir.

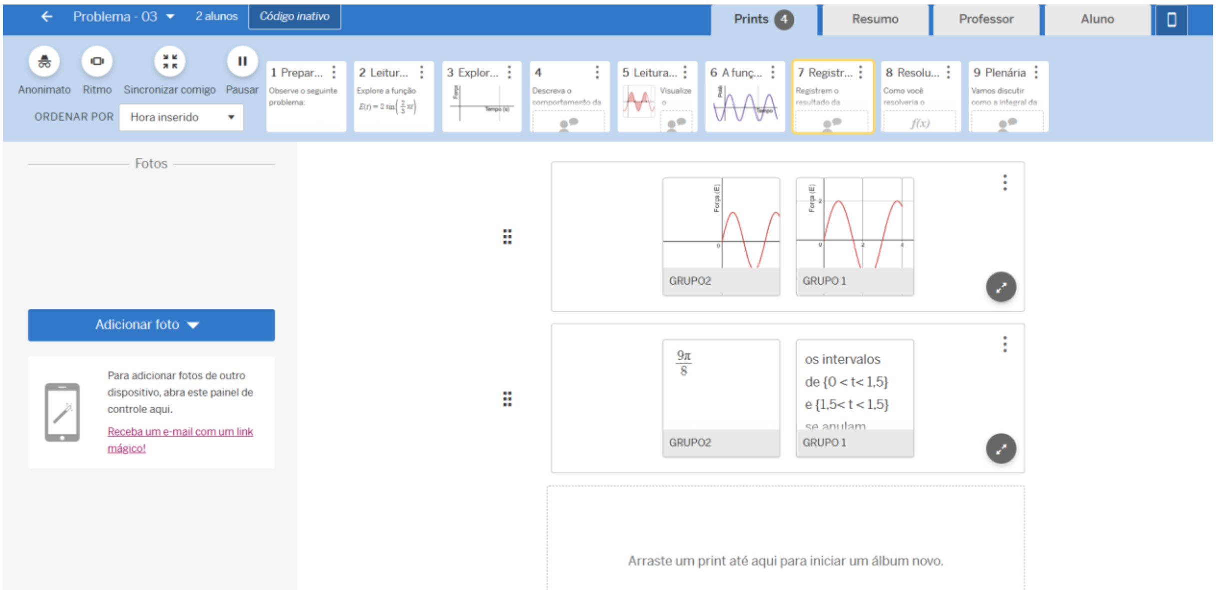
Figura 6 – Aba de Professor do Painel de Controle.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

É possível organizar as capturas de tela em álbuns, com até quatro imagens por álbum, e atribuir um título a cada um (Figura 7). Na mesma aba, é possível clicar no ícone “Apresentar álbum” para visualizar o álbum em tela cheia e exibir a seleção de capturas de tela para seus alunos. Também é possível adicionar fotos de um dispositivo móvel a essa aba. Para isso, no final da coluna da esquerda, há a opção de enviar um *link* para o *e-mail*, que dará acesso ao painel de controle.

Figura 7 – Aba de Prints do Painel de Controle.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

No painel de controle, há três opções adicionais para utilizar durante a aplicação da atividade com os alunos. A primeira delas é o modo de anonimato. Quando ativado, os nomes dos alunos são substituídos por nomes de matemáticos famosos, tanto no painel de controle quanto na visão individual de cada aluno. Esse recurso é útil quando o professor deseja exibir a tela sem revelar informações sobre os alunos, como as páginas às quais eles terão acesso, por exemplo. Ele permite organizar o percurso dos alunos pela atividade de maneira controlada, facilitando que toda a turma se concentre em uma página específica para um debate, ou assegurando que ninguém avance para uma determinada página antes de garantir que todos compreendam os conceitos necessários (França, 2022).

Para controlar as restrições de páginas, comece clicando no ícone de ritmo. Em seguida, selecione a página desejada, clicando na miniatura da página. Essa opção permite restringir os alunos a uma página específica ou a um conjunto de páginas. Após selecionar as páginas, clique no botão laranja “Restringir”. Qualquer aluno fora do intervalo de restrição será automaticamente redirecionado para a primeira página do intervalo, e, a partir de então, todos os alunos só poderão navegar entre as páginas pré-determinadas (França, 2022).

É possível desativar o modo de ritmo a qualquer momento, clicando no botão “Parar”, ou editar o intervalo de restrição clicando em “Editar” (Figura 8). Também é possível adicionar uma página à restrição ao clicar no ícone de “+”.

Figura 8 – Utilização da opção Ritmo no Painel de Controle.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Antunes e Cambrainha (2020) ressaltam a relevância do uso do Modo Anônimo pelo professor, a fim de evitar a exposição dos alunos e prevenir a criação de competições desnecessárias sobre o desempenho individual nas tarefas. Durante as discussões coletivas sobre as atividades, o professor pode capturar telas e organizá-las de maneira estratégica para orientar o debate. Como exemplo, ele pode selecionar respostas corretas e incorretas de uma questão específica, estimulando uma análise conjunta da turma.

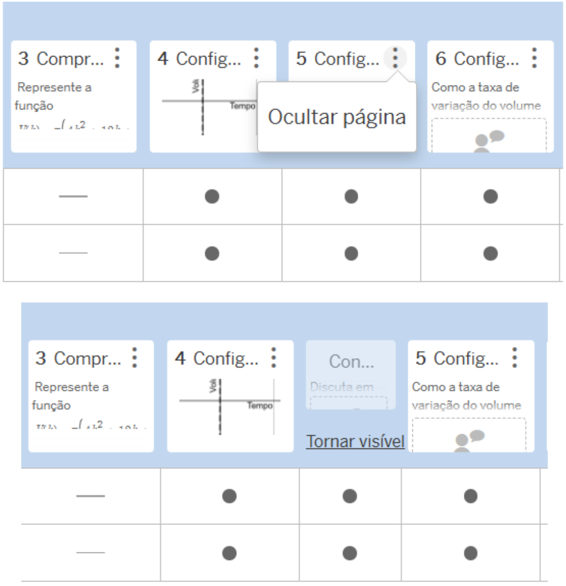
Dentro dos recursos disponíveis no Painel de Controle do professor, Antunes e Cambrainha (2020) evidenciam a importância do recurso de "Pausa" (Figura 9). Quando o ícone de pausa é ativado, todos os alunos recebem uma mensagem na tela indicando que a atividade foi pausada. Durante esse período, todas as opções de interação com a atividade são suspensas. Essa funcionalidade é útil quando o professor deseja interromper temporariamente a atividade para discutir algo com a turma ou fazer algum aviso, garantindo total atenção dos estudantes. Além disso, os autores apontam que nem sempre é necessário exibir na projeção o Painel de Controle durante a execução da atividade pelos estudantes.

Figura 9 – Recurso Pausa ativado no Painel de Controle.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Nesse sentido, caso o professor precise ajustar a atividade em função do tempo disponível ou das necessidades da turma, é possível ocultar uma tela específica. Para isso, basta clicar nos três pontos no canto superior direito da miniatura da página desejada e selecionar a opção “Ocultar página” (Figura 10). A página será escondida, e a miniatura da página ficará menor e opaca. As páginas seguintes serão renumeradas automaticamente, e o professor poderá tornar a página visível quando necessário.

Figura 10 – Utilização do recurso Ocultar página no Painel de Controle.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Outra funcionalidade prática é a possibilidade de copiar páginas de uma atividade para outra. Para isso, basta acessar a prévia do aluno, clicar no ícone de cópia (representado por dois retângulos) à direita do texto “Prévia da página do aluno” e, em seguida, colar a página no construtor de atividades. É possível copiar páginas de diversas atividades usando a prévia do aluno disponível na página de cada atividade. Copiar páginas de atividades prontas e adaptá-las é uma excelente maneira de aprender a usar o construtor de atividades e explorar novas funcionalidades da plataforma, especialmente a Camada de Computação (França, 2022).

4 CÁLCULO INTEGRAL

Este capítulo está dividido em três seções, cada uma destacando elementos importantes do CDI. A primeira será dedicada ao contexto histórico do CDI, onde apresentaremos algumas contribuições de matemáticos importantes para a construção do CDI.

Na segunda seção, fizemos um levantamento sobre trabalhos já realizados envolvendo o CDI, como aqueles publicados em revistas, dissertações e teses, subdividindo esta seção em duas subseções. Na primeira subseção, apresentamos algumas considerações sobre artigos que abordam essa temática, com base nos trabalhos disponíveis no Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Já na segunda subseção, realizamos um levantamento de dissertações e teses que discutem essa temática, relacionando a Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais no contexto do CDI. Ao todo, conseguimos mapear seis trabalhos, sendo quatro dissertações e duas teses.

Na terceira seção, trazemos alguns conceitos e definições da integral, nosso objeto de estudo, como fundamentação teórica para as discussões futuras.

4.1 Um olhar histórico do Cálculo

O desenvolvimento do Cálculo não pode ser atribuído a uma única figura, uma vez que sua origem remonta a questões filosóficas da Grécia Antiga e seu progresso até métodos algorítmicos no século XVII envolveu contribuições de diversos intelectuais ao longo dos séculos. No período conhecido como pré-cálculo, aproximadamente no século XVI, o avanço da Álgebra foi revolucionado pelas contribuições de François Viète. O francês introduziu o uso de símbolos para representar quantidades desconhecidas e constantes, simplificando não apenas os cálculos, mas também impulsionando o desenvolvimento da Geometria Analítica e do Cálculo. Essa abordagem permitiu expressar conceitos complexos de maneira mais clara e eficiente, transformando o pensamento algébrico da época e promovendo um avanço significativo na matemática (Eves, 2004).

Segundo Bueno (2021), Simon Stevin, um engenheiro belga, e Luca Valério, um matemático italiano, desempenharam papéis significativos no desenvolvimento inicial do Cálculo. Stevin, focando em aplicações práticas das ideias de Arquimedes na Hidrostática, evitou a complexidade da dupla redução ao absurdo, adotando diretamente o conceito de limite. Enquanto isso, Valério procurou manter o rigor matemático, substituindo o método de Arquimedes por teoremas gerais que simplificavam as demonstrações detalhadas. Para o autor, essas abordagens distintas contribuíram para moldar o que hoje entendemos como o conceito fundamental de limite na matemática.

O astrônomo, astrólogo e matemático alemão Johannes Kepler contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial ao estudar os volumes de barris de vinho, abordando problemas de máximos e mínimos. Ele observou que, à medida que os volumes máximos se aproximavam, a taxa de variação em relação às dimensões diminuía (Eves, 2004). Paralelamente, Bonaventura Cavalieri introduziu o método dos indivisíveis, inspirado possivelmente nos métodos de Kepler, apesar das negativas. Esse método envolvia decompor figuras em partes indivisíveis, comparando planos a linhas e sólidos a planos (Bueno, 2021; Bueno; Viali, 2023).

Os estudos do Evangelista Torricelli representaram um avanço na compreensão das tangentes em curvas, introduzindo o conceito de velocidade instantânea, um marco no desenvolvimento inicial do Cálculo. Suas contribuições foram predominantemente geométricas, concentrando-se na aplicação das tangentes em curvas como parábolas, sem explorar aspectos algébricos ou a criação de algoritmos gerais. Apesar disso, seu trabalho foi fundamental para o progresso subsequente do Cálculo e da Análise Matemática (Bueno; Viali, 2023).

Oliveira e Bellemain (2022) ressaltam as contribuições significativas que os matemáticos Gregory Saint Vincent, Roberval e Blaise Pascal fizeram para a evolução do entendimento sobre limites, séries infinitas e o cálculo de áreas e volumes no contexto do Cálculo. Gregory Saint Vincent foi pioneiro ao demonstrar que uma série infinita pode ter uma soma definida. Roberval, por sua vez, desenvolveu métodos para calcular tangentes e determinar volumes de sólidos gerados por curvas. Já Blaise Pascal utilizou seu renomado triângulo aritmético para obter resultados importantes relacionados ao Cálculo, definindo a área sob uma curva como a soma de retângulos infinitamente finos e mostrando que as diferenças poderiam ser reduzidas a quantidades arbitrariamente pequenas (Oliveira; Bellemain, 2022).

Pierre de Fermat contribuiu significativamente para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial ao introduzir um método inovador para encontrar pontos de máximo e mínimo em curvas polinomiais. De acordo com Bueno e Vialli (2023), Pierre comparava $f(x)$ em um ponto com $f(x + \Delta x)$ em um ponto vizinho próximo, onde a variação da função era mínima. Ao igualar $f(x)$ e $f(x + \Delta x)$, dividir por Δx e fazer $\Delta x = 0$, Fermat determinava as abscissas dos máximos e mínimos. Esse método, precursor do Cálculo moderno, utiliza diferenciação e limites para encontrar esses pontos críticos. Isaac Newton foi influenciado por esse método de Fermat em seu desenvolvimento posterior sobre tangentes, contribuindo significativamente para o avanço do Cálculo (Eves, 2004).

Isaac Barrow contribuiu significativamente para o desenvolvimento do cálculo diferencial, criando uma abordagem precursora do que é utilizado atualmente. Ele foi o primeiro a perceber plenamente que diferenciação e integração são operações inversas uma da outra, uma descoberta fundamental que é conhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo (Melchiors; Soares, 2013). No século XVII, os matemáticos utilizavam limites para calcular áreas de figuras com contornos curvos. Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) demonstraram que é mais eficiente utilizar integração para esses cálculos, pois se uma quantidade pode ser calculada exaustivamente (por soma de partes infinitesimais), então também pode ser calculada usando antiderivadas (Eves, 2004; Boyer, 2010).

Nesse contexto, Isaac Newton fez contribuições significativas para o Cálculo Diferencial e Integral (Bueno, 2021; Bueno; Viali, 2023). Ele desenvolveu métodos inovadores para determinar a inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto específico, além de criar técnicas para calcular áreas sob curvas, que foram fundamentais para o que hoje chamamos de integração. Em 1666, introduziu o conceito de "fluxões" para descrever variações instantâneas, uma ideia precursora do Cálculo Diferencial. Newton também foi o primeiro a formular e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, estabelecendo a relação essencial entre diferenciação e integração, que possibilitou resolver problemas complexos como a determinação de áreas sob curvas. Suas descobertas foram cruciais para a consolidação do Cálculo como uma ferramenta matemática fundamental em diversas áreas do conhecimento científico (Olivieira; Bellemain, 2022; Melchiors; Soares 2013).

As contribuições de Leibniz para o Cálculo Diferencial e Integral são significativas e fundamentais. De acordo com Bueno (2021), Leibniz desenvolveu um método sistemático para calcular tangentes a curvas, reconhecendo que isso envolve a razão entre diferenças infinitesimais das ordenadas e das abscissas. Introduziu uma notação diferencial inovadora, utilizando dx e dy para representar as menores variações em x e y, o que facilitou expressões matemáticas precisas.

Além disso, Leibniz percebeu que a determinação de áreas sob curvas (integral) está relacionada à soma de retângulos infinitamente finos, cada um com área ydx, e formalizou isso com sua notação integral. Estabeleceu o Teorema Fundamental do Cálculo, demonstrando a relação fundamental entre diferenciação e integração como operações inversas. Suas contribuições foram publicadas em obras como "*Nova methodus pro maximis et minimis*" (1684), marcando um avanço crucial no desenvolvimento matemático que influenciou profundamente o futuro do cálculo e da matemática em geral (Bueno, 2021; Bueno; Viali, 2023).

Notadamente, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz são comumente reconhecidos como os principais organizadores e sistematizadores das ideias que culminaram no Cálculo moderno; no entanto, eles desenvolveram suas visões de maneira independente e em períodos distintos, utilizando notações e abordagens diversas. A disputa histórica entre Newton e Leibniz sobre quem foi o verdadeiro precursor do Cálculo exemplifica essa complexidade, pois Newton defendeu sua prioridade com o apoio da Royal Society, enquanto Leibniz também reivindicava sua contribuição substancial para o campo, evidenciando assim a natureza colaborativa e evolutiva do desenvolvimento matemático.

Nessa perspectiva, os irmãos Bernoulli também desempenharam papéis fundamentais no desenvolvimento do Cálculo diferencial e integral. Segundo Bueno (2021) Jacques Bernoulli, primeiro matemático profissional da família, iniciou seu interesse no Cálculo após conhecer Leibniz e explorou técnicas avançadas como a palavra "integral" para problemas de quadratura e a análise de séries infinitas, incluindo a demonstração da divergência da série harmônica. Jean Bernoulli, por sua vez, cresceu como um talentoso matemático e se tornou um dos maiores defensores do Cálculo, colaborando estreitamente com Leibniz na disseminação desses conceitos. Jean também contribuiu com a regra de L'Hôpital, uma técnica essencial para resolver formas indeterminadas, que foi incluída no primeiro livro-texto de Cálculo publicado por L'Hôpital em 1696 (Bueno, 2021; Bueno; Viali, 2023).

O francês Jean le Rond d'Alembert teve um papel crucial ao identificar a derivada como um limite, embora sua formulação inicial não tenha alcançado a precisão formal que seria desenvolvida no século XIX. Essa contribuição foi fundamental para estabelecer a base conceitual da derivada, avançando o entendimento matemático sobre a variação instantânea de funções (Bueno, 2021).

Paralelamente, Leonhard Euler utilizou as expansões de séries para derivar funções elementares, baseando-se na concepção de diferenciais de Leibniz. Este avanço não apenas ampliou a aplicação prática do Cálculo, mas também consolidou o uso das séries como ferramenta essencial na análise matemática. Além disso, Joseph Louis Lagrange contribuiu significativamente ao desenvolver o método das séries de Taylor, que formalizou a definição da função derivada de maneira mais coerente e lógica (Melchiors; Soares, 2013). Esses matemáticos enriqueceram o campo do Cálculo Diferencial e Integral com novos métodos e conceitos, estabelecendo bases teóricas fundamentais que perduram até os dias atuais na teoria das funções de variável real (Eves, 2004)

Bernard Bolzano e Augustin-Louis Cauchy também contribuíram no desenvolvimento do rigor formal no Cálculo. Segundo Roque (2012), Bolzano iniciou uma abordagem analítica rigorosa ao demonstrar o teorema do valor intermediário para funções contínuas, marcando o início de um período de maior precisão matemática na disciplina. Enquanto isso, Cauchy refinou as definições de limite, derivada e integral, desvinculando-as de referências geométricas e introduzindo um formalismo matemático mais claro e preciso, fundamentado em definições precisas utilizando épsilons e deltas.

De acordo com Bueno (2021), o alemão Karl Weierstrass (1815-1897) complementou as contribuições de Bolzano e Cauchy com sua abordagem rigorosa e formal. Ele formulou definições precisas utilizando épsilons e deltas, o que eliminou as incertezas remanescentes na teoria dos limites. Especificamente, Weierstrass trabalhou na análise de funções e na definição de continuidade, estabelecendo critérios rigorosos para determinar se uma função era contínua em um ponto ou em um intervalo. Sua abordagem estática e puramente matemática, que evitava referências a movimento ou intuições geométricas, ajudou a consolidar o Cálculo como uma disciplina matemática precisa e formalmente fundamentada. Assim como Bolzano e Cauchy, Weierstrass contribuiu significativamente para a aritmetização da análise, um processo essencial para a formulação moderna do Cálculo.

4.2 Algumas considerações sobre o Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior

Apresentaremos a seguir algumas considerações sobre CDI a partir de artigos, disponíveis no portal de periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), além de dissertações e teses disponíveis na Biblioteca Digital Brasileira de Dissertações e Teses (BDTD), com o objetivo de explorar as abordagens adotadas sobre essa temática relacionadas ao ensino e aprendizagem do CDI, especialmente no que diz respeito ao conceito de integral.

4.2.1 Algumas considerações sobre CDI em artigos

As pesquisas analisadas nessa subseção, além de trazerem reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem do CDI, a metodologia de Resolução de Problemas e o uso de Tecnologias Digitais, oferecem contribuições valiosas quanto à aplicação de metodologias nesse contexto.

Os artigos foram selecionados de acordo com os critérios de inclusão e exclusão previamente definidos. Para isso, ao acessar o Portal de Periódicos da CAPES, utilizamos os termos de busca “Cálculo Diferencial e Integral” *AND* “Resolução de Problemas”, aplicando o filtro para que o tipo de documento fosse “Artigo Científico” e o período de publicação englobasse os anos de 2020 a 2023.

A escolha do período de 2020 a 2023 é justificada pelo momento das transformações significativas que ocorreram durante e após a pandemia da COVID-19. Esse recorte temporal possibilita entender as respostas da comunidade acadêmica e científica a tais mudanças, com ênfase nas novas práticas pedagógicas, inovações tecnológicas e nas diferentes estratégias que foram implementadas ou ampliadas ao longo da pandemia, além das suas implicações no contexto pós-pandêmico, também se justifica pelas pretensões do nosso projeto de utilizar plataformas digitais.

Esse processo resultou em um total de trinta (30) artigos. Desses, dezoito (18) passaram por revisão por pares. Ao analisar os trinta (30) artigos, verificamos que vinte e quatro (24) não atendiam aos critérios de inclusão estabelecidos, como a presença dos termos no título, e seis (6) não possuíam acesso aberto. Com base nessas verificações, apenas cinco (5) artigos foram selecionados para análise.

Em seguida, repetimos o processo com os mesmos filtros de seleção, agora utilizando os termos “Cálculo Diferencial e Integral” *AND* “Tecnologias Digitais”. Nesse caso, foram encontrados dez (10) artigos, dos quais sete (7) passaram pela revisão por pares. Ao revisar os dez (10) artigos, observamos que nove (9) não atendiam aos critérios de inclusão, como a presença dos termos no título, e um (1) não estava disponível em acesso aberto. Os nove (9) artigos abordavam subtemas relacionados às Tecnologias Digitais aplicadas ao ensino de conteúdos específicos de Cálculo Diferencial e Integral, e, por isso, não foram analisados em detalhes. Assim, apenas um (1) artigo atendeu plenamente aos critérios estabelecidos para nossa análise.

Ao todo, foram analisados seis (6) artigos nesta subseção, os quais estão organizados cronologicamente no quadro a seguir. Em seguida, apresentaremos uma síntese de cada pesquisa realizada.

Quadro 2 – Relação dos artigos analisadas.

Autor	Título	Palavras-chave	Revistas
Azevedo, Palhares e Figueiredo (2020)	Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas.	Metodologia de Resolução de Problemas, Ensino de Cálculo, Limite por definição	Revista de Educação Matemática - REMAT
Gomes e Stahl (2020)	A Resolução de Problemas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia: uma experiência.	Resolução de problemas, cálculo, engenharia, ensino-aprendizagem.	Revista Thema
Nunes, Reis, Ferreira e Silva (2020)	O Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas no Curso de Engenharia Civil.	Resolução de Problemas, Engenharia Civil, Ensino-aprendizagem do Cálculo	Revista de Educação Matemática - REMAT
Santos, Reis e Silva (2020)	Tecnologias digitais na educação superior: reflexões acerca da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, Cálculo Diferencial e Integral I, Ensino-Aprendizagem.	Brazilian Journal of Development
Rodrigues, Neves e Dörr (2023)	Cálculo Diferencial e Integral na Graduação em Matemática: Contribuições da Resolução de Problemas e da Análise da Produção Escrita	Cálculo Diferencial e Integral, Produção escrita, Intervenção pedagógica	Revemop
Sodré, Laudares e Furletti (2023)	Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral Contextualizados na Engenharia Civil.	Problemas contextualizados, Educação Matemática, Educação em Engenharia, Engenharia Civil, Cálculo diferencial e integral	Abakós

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

De maneira cronológica, apresentaremos a seguir um resumo detalhado de cada pesquisa analisada, destacando os principais pontos e contribuições de cada estudo.

O artigo dos autores Azevedo, Palhares e Figueredo (2020) foi publicado na Revista de Educação Matemática – REMAT e tem por objetivo exemplificar como, na prática, a metodologia de Resolução de Problemas foi implementada a partir das orientações do roteiro do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP). Esta pesquisa é um recorte de uma tese de doutorado que teve como objetivo desenvolver estratégias para integrar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática no ensino de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral durante os horários regulares de aula.

Na primeira parte desse trabalho, os autores apresentam um referencial teórico sobre a metodologia de resolução de problemas. Em seguida, descrevem a tarefa proposta, detalhando sua definição formal e explicando como se deu a dinâmica da aula, cujo enfoque pedagógico tinha como objetivo aplicar a metodologia de Resolução de Problemas.

Na terceira fase da pesquisa, Azevedo, Palhares e Figueredo (2020) discutem as modificações feitas no terceiro roteiro do GTERP para tornar possível a implementação da Metodologia de Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo. Além disso, eles realizaram um comparativo entre as adequações realizadas e o roteiro original.

Por fim, Azevedo, Palhares e Figueredo (2020) concluem que, embora a Metodologia de Resolução de Problemas favoreça a aprendizagem dos alunos, ela exige um grande esforço e dedicação por parte do professor. Para os autores, o docente precisa estar disposto a enfrentar desafios e mudanças em sua prática pedagógica, já que a metodologia exige uma postura ativa tanto do professor quanto dos alunos. A mudança para essa abordagem pode ser difícil, mas é necessária para superar o ensino tradicional, predominante no Ensino Superior brasileiro. O sucesso da Resolução de Problemas depende do engajamento de todos os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

O artigo produzido pelos autores Gomes e Stahl (2020) foi publicado na Revista Thema e tem como objetivo compreender de que forma a Metodologia de Resolução de Problemas pode contribuir para o aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral. Os autores realizam duas atividades contendo situações-problemas contextualizadas com assuntos da Engenharia, visando promover um ensino mais significativo da disciplina.

A pesquisa foi realizada com 31 alunos de cursos de Engenharia de três áreas (Produção, Mecânica e Computação), de uma instituição de ensino pública e outra privada, em Campos dos Goytacazes – RJ. Segundo Gomes e Stahl (2020), as atividades da pesquisa ocorreram em horários extraclasse, com o pesquisador atuando como professor e observador, com duração de aproximadamente duas horas por encontro.

Nesse sentido, Gomes e Stahl (2020) destacam alguns benefícios da aplicação da Resolução de Problemas no ensino de Cálculo, como a contextualização do conteúdo, o que facilita a compreensão dos conceitos e teorias pelos alunos. Além disso, a abordagem permite uma perspectiva multidisciplinar, pois as situações-problema possibilitam a integração de diferentes áreas do conhecimento, promovendo um diálogo entre elas e seus conceitos.

Os autores também afirmam que a apresentação de conteúdos contextualizados, alinhados aos conceitos e teorias da disciplina, permitiu explorar diversas áreas do conhecimento, favorecendo a multidisciplinaridade. Para eles, a metodologia de Resolução de Problemas coloca o aluno como protagonista no processo de construção do seu saber, estimulando o desenvolvimento do pensamento matemático, promovendo o aumento do interesse dos discentes, resultando em uma maior motivação para o aprendizado.

Dessa forma, Gomes e Stahl (2020) concluem seu trabalho expondo que a Metodologia de Ensino de Resolução de Problemas de Polya se configura como uma proposta pedagógica de grande potencial para a promoção de um ensino significativo em Cálculo Diferencial e Integral. Considerando suas contribuições, relevância e aplicabilidade, a Resolução de Problemas surge como uma alternativa às práticas tradicionais, podendo ser adotada pelos educadores para orientar os estudantes na construção do conhecimento em Cálculo Diferencial e Integral.

O artigo dos autores Nunes, Reis, Ferreira e Silva (2020) foi publicado na Revista de Educação Matemática – REMAT com o objetivo de investigar o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na compreensão do Cálculo Diferencial e Integral, sobretudo no estudo da Otimização no curso de Engenharia Civil. Assim, os autores desenvolveram a pesquisa com alunos de um curso de Engenharia Civil de uma faculdade privada, localizada no município de Teixeira de Freitas, Bahia. O estudo foi realizado em uma turma do terceiro semestre, composta por quinze (15) alunos.

No desenvolvimento desse trabalho, Nunes, Reis, Ferreira e Silva (2020) apresentam reflexões sobre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, focando na abordagem da Resolução de Problemas. Os autores também abordam questões teóricas relacionadas ao ensino de Cálculo nos cursos de Engenharia, seguido da análise e discussão dos resultados da pesquisa.

Como resultado da pesquisa, os autores evidenciam que a metodologia de Resolução de Problemas, proposta por Onuchic, trouxe resultados positivos no ensino de Matemática, destacando-se principalmente por: (1) permitir que os alunos adotassem uma postura de investigadores, aumentando sua confiança e motivação; (2) despertar a atenção dos futuros engenheiros para a importância da Matemática em suas profissões; e (3) tornar-se convincente e estimulante para os alunos, que demonstraram crescente entusiasmo nas aulas.

Além disso, Nunes, Reis, Ferreira e Silva (2020) defendem que o trabalho em grupo, especialmente dentro da metodologia de Resolução de Problemas proposta por Onuchic (1999), favorece o desenvolvimento de competências nos alunos de Engenharia, conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais do curso de graduação. Por fim, os autores destacam a importância da interação dos alunos no processo de aprendizagem, que os impulsiona a sair da zona de conforto e a se engajarem ativamente no processo educativo, transformando a sala de aula em um ambiente de investigação.

A pesquisa desenvolvida por Santos, Reis e Silva (2020) foi publicada na *Brazilian Journal of Development* (BJD) com o objetivo de analisar as pesquisas que utilizaram as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC's) efetivamente em sala de aula, como recurso didático, e não somente como fruto de pesquisa e/ou sugestão de utilização nos eventos Congresso Internacional de Educação Matemática (CIEM), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e Encontro Mineiro de Educação Matemática (EMEM) no período 2008-2018. A metodologia adotada nesta pesquisa foi qualitativa, com um caráter exploratório, utilizando o estado da arte como procedimento técnico.

De acordo com os dados, os autores enfatizam que todos os trabalhos analisados abordam as TDIC's em algum momento, mas nenhum deles as explora efetivamente em um processo de ensino e aprendizagem dentro da sala de aula, durante as aulas de Cálculo Diferencial e Integral 1. Além disso, esses trabalhos não apresentam resultados que permitam avaliar o impacto da utilização dos recursos tecnológicos, de modo a verificar se as TDIC's realmente potencializam ou não o ensino do conteúdo abordado.

No desenvolvimento da pesquisa, Santos, Reis e Silva (2020) descrevem a análise de quatro trabalhos (A, B, C, D) realizados em turmas de CDI 1, onde as TDIC's foram aplicadas para potencializar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo os autores, esses trabalhos têm em comum a aplicação em sala de aula, em parceria com os professores, e mostram como o uso dessas tecnologias pode contribuir para a aprendizagem dos alunos, ajustando-se aos diferentes estilos de aprendizagem e desafios enfrentados no processo educacional.

A importância das TDIC's é destacada pelos autores como uma ferramenta complementar e significativa para a construção do conhecimento. No entanto, Santos, Reis e Silva (2020) salientam que, apesar de uma produção significativa de conhecimento sobre as TDIC's na Educação Matemática nos últimos anos, a maior parte das pesquisas se concentrou em reflexões teóricas, em vez de estudos de intervenção prática.

Por fim, Santos, Reis e Silva (2020) sugerem que, no futuro, é necessário um maior foco em pesquisas que investiguem a aplicação efetiva das TDIC's em sala de aula, especialmente no contexto do CDI 1, para promover avanços pedagógicos. A conclusão desse trabalho aponta para a necessidade de um olhar mais atento para esses temas em futuros eventos acadêmicos e para o potencial das tecnologias educacionais nesse campo.

O artigo desenvolvido pelos autores Rodrigues, Neves e Dörr (2023) foi publicada na revista REVEMOP e teve como objetivo analisar a produção escrita de estudantes de graduação em matemática ao resolverem problemas de otimização e compreender as potencialidades dessas análises para a intervenção pedagógica. A abordagem adotada nesse trabalho utiliza o diálogo e as discussões matemáticas com base nas produções escritas dos alunos.

Rodrigues, Neves e Dörr (2023) adotam em sua pesquisa uma abordagem qualitativa, focando na análise da produção escrita dos estudantes de Matemática, especialmente em relação à resolução de problemas de otimização. Os autores discutem o Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática, abordando o uso de diferentes metodologias pedagógicas na disciplina de CDI, como aulas expositivas e práticas de resolução de problemas. Além disso, eles enfatizam a organização da disciplina, a atuação dos docentes e a dinâmica de apoio (monitoria e tutoria), destacando a diversidade de práticas pedagógicas entre os professores devido às diferentes formações e abordagens sobre o Ensino Superior.

Na análise e discussão dos resultados, Rodrigues, Neves e Dörr (2023) evidenciaram as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao tentar relacionar os conceitos de área e perímetro de um retângulo e usar a linguagem algébrica para modelar a função quadrática que descreve a área do retângulo. Segundo os autores, essas dificuldades podem estar relacionadas a problemas de compreensão do enunciado, bem como a dúvidas conceituais sobre tópicos como as propriedades dos quadriláteros, diferenciação entre retângulo e quadrado, e a construção e interpretação de gráficos de funções quadráticas, os quais fazem parte do currículo de matemática da educação básica desde o sexto ano do ensino fundamental.

Os autores revelaram que os estudantes apresentam níveis variados de compreensão de conceitos geométricos e de CDI, evidenciando tanto o uso correto quanto o incorreto desses conceitos. Rodrigues, Neves e Dörr (2023) elencam erros comuns, como falhas na derivação da função e na identificação de pontos máximos e mínimos, além de dificuldades com procedimentos algébricos e de escrita.

Rodrigues, Neves e Dörr (2023) concluem sua pesquisa enfatizando a importância da análise da produção escrita dos estudantes para entender seus conhecimentos e dificuldades em Matemática, particularmente em relação ao Ensino Superior e ao CDI. Para os autores, a análise mostrou que os estudantes enfrentam dificuldades não apenas nos conceitos do Ensino Médio, mas também em conceitos fundamentais de álgebra, geometria e cálculo. A pesquisa reforça a necessidade de devolutivas constantes e variadas (individuais e coletivas) para auxiliar no aprendizado e aprimorar a prática pedagógica. Além disso, ressalta a importância de metodologias de Ensino-Aprendizagem-Avaliação baseadas na Resolução de Problemas, e sugere a ampliação desses estudos para melhorar o ensino de CDI em turmas de ensino superior.

A pesquisa desenvolvida pelos autores Sodré, Laudares e Furletti (2023) foi publicada na revista Abakós. Esse trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa realizada por meio da aplicação de atividades investigativas, estruturadas como problemas, no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior e na Educação em Engenharia. O foco da pesquisa foi o ensino-aprendizagem contextualizado de Cálculo Diferencial e Integral.

O referencial teórico-metodológico adotado pelos autores no ensino de Cálculo se baseou na Resolução de Problemas e na Interdisciplinaridade entre Matemática e Engenharia, com foco na criação de atividades didáticas motivadoras e eficazes. Segundo Sodré, Laudares e Furletti (2023), as atividades foram desenvolvidas a partir de situações concretas da Engenharia Civil, com o objetivo de melhorar o ensino-aprendizagem dos conteúdos de Cálculo. A pesquisa foi realizada com dezoito (18) estudantes matriculados na disciplina de Cálculo II do curso de Engenharia da Faculdade de Engenharia da Fundação Mineira de Educação e Cultura (FUMEC), situada em Belo Horizonte/MG. Desses, seis (6) frequentavam o turno matutino e doze (12) o turno noturno.

No desenvolvimento desse estudo, os autores apresentaram e analisaram dois problemas de CDI, contextualizados na Engenharia Civil, abordados na pesquisa de mestrado do primeiro autor. O primeiro problema é sobre a derivada, relacionado à delimitação de área para assentamento de painéis fotovoltaicos, e o segundo é sobre integrais, tratando da determinação de elementos de fachada de um edifício. Sodré, Laudares e Furletti (2023) discutem as percepções dos participantes que resolveram esses problemas e o planejamento didático utilizado para contextualizar os problemas de Matemática na Engenharia Civil, com foco na interdisciplinaridade entre essas áreas.

Na análise e resultados da pesquisa, Sodré, Laudares e Furletti (2023) apontam que, ao resolver problemas, especialmente em temas de engenharia e CDI, os estudantes enfrentaram dificuldades, como a falta de verbalização das soluções e erros sequenciais em seus trabalhos. Assim, o papel do professor, como mediador, é fornecer orientações gerais sem direcionar claramente as soluções, permitindo que os alunos descubram e compreendam os conceitos por si mesmos. Os autores revelam que a inserção de problemas contextualizados da Engenharia Civil em uma disciplina teórica de Cálculo teve um impacto positivo, motivando os alunos a se dedicarem mais e a entenderem a importância dos conceitos matemáticos, especialmente no que se refere às suas aplicações práticas nas áreas técnicas e profissionais.

Por fim, Sodré, Laudares e Furletti (2023) concluem seu estudo evidenciando que a aplicação de atividades baseadas na resolução de problemas em cursos de engenharia visa integrar a ciência e a técnica no processo de formação dos estudantes. Para os autores, ao apresentar situações reais da profissão, a motivação dos alunos para a pesquisa foi aumentada. No entanto, foram encontradas dificuldades na resolução dos problemas, especialmente devido à necessidade de conhecimentos prévios em áreas como Matemática e termos técnicos, os quais os estudantes não haviam dominado por ainda não terem cursado disciplinas específicas.

Ao analisar os seis artigos em relação ao nosso tema de pesquisa, ficou evidente que, a Resolução de Problemas se destaca por promover um aprendizado ativo, colocando os alunos como protagonistas na construção do conhecimento. Ao resolverem problemas contextualizados, especialmente nas áreas de engenharia, os estudantes conseguiram visualizar a aplicação prática dos conceitos matemáticos, o que aumentou seu interesse e motivação. Além disso, também se percebeu que essa abordagem favoreceu o desenvolvimento do pensamento matemático e a interdisciplinaridade, esses alunos em tais artigos analisados também fizeram conexões do CDI com outras áreas do conhecimento e com sua futura profissão.

Entretanto, se percebeu que, a implementação da Resolução de Problemas exige que os professores adotem uma postura ativa, repensando suas práticas pedagógicas para incorporar essa abordagem investigativa e dinâmica. Isso pode ser desafiador, especialmente em um contexto de Ensino Superior tradicional, mas é essencial para promover um aprendizado mais significativo.

Ficou claro nesses artigos que, por sua vez, as TD oferecem grande potencial para complementar o ensino de CDI. As TD podem disponibilizar recursos que atendem à diversidade de estilos de aprendizagem, permitindo aos alunos uma experiência de aprendizado mais personalizada, por meio de vídeos, simulações e outros materiais digitais. No entanto, os estudos revisados indicam que, embora as TD sejam amplamente discutidas na literatura, sua aplicação efetiva nas aulas de CDI ainda é restrita.

Os artigos analisados nessa subseção apontam que a maior parte das pesquisas se concentra em reflexões teóricas, sem evidenciar resultados práticos que permitam avaliar o impacto real na aprendizagem dos alunos. Embora o uso dessas tecnologias possa facilitar a compreensão de conceitos complexos, ainda falta uma abordagem mais integrada e consistente em sala de aula para que elas realmente potencializem o processo educativo. Nesse sentido, nossa pesquisa tem um caráter mais específico da sua importância em utilizar as TD através da Resolução de Problemas.

4.2.2 Algumas considerações em dissertações e teses

Nessa subseção, realizamos uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) para identificar pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Encontramos uma grande quantidade de estudos sobre o tema, mas optamos por restringir nossa análise às investigações focadas na formação inicial do professor de Matemática. Em seguida, para afinar ainda mais nossa pesquisa, realizamos uma nova busca, agora especificamente voltada para estudos que abordam a Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais no contexto do Cálculo Diferencial e Integral.

Vale destacar que todos os estudos selecionados têm em comum a preocupação com o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina. A partir da análise das pesquisas encontradas, foi possível identificar uma diversidade de enfoques teórico-metodológicos relacionados tanto à Resolução de Problemas quanto à utilização de Tecnologias Digitais, os quais enriquecem a compreensão do nosso objeto de pesquisa.

Quadro 3 – Relação das dissertações e teses analisadas.

Autor	Título	Foco dos dados	Apontamentos (Resultados encontrados)
Ribeiro (2010)	O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas.	Alunos do curso de Engenharia, cursando a disciplina de Cálculo.	A construção do projeto destinado a trabalhar Integrais com alunos de um Curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia, com recursos à história da matemática e com os alunos, em grupos.
Costa (2010)	Educação on-line na Universidade: o processo de ensinar e aprender cálculo na era das tecnologias digitais.	Alunos de Graduação e de Pós-Graduação.	O trabalho coletivo foi uma estratégia que permitiu o desenvolvimento dessa prática educativa complexa.
Vogado (2014)	O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas.	Alunos do curso de licenciatura em Matemática.	A importância das discussões em grupo e suas contribuições para a aprendizagem do conceito de Integral.
Pereira (2019)	Cálculo diferencial e integral no curso de Agronomia: uma perspectiva de trabalho de projetos com modelagem matemática e tecnologias digitais de informação e comunicação.	Desenvolvimento de projetos sobre temas/assuntos da Agronomia do interesse dos estudantes.	Trabalho de Projeto foi implementado em diferentes formas de interações e teve, como principais agentes, os grupos de alunos e suas ações em produção coletiva.

Araújo (2020)	A construção do conceito de limite através da resolução de problemas.	Alunos do curso de licenciatura em Matemática.	As dificuldades na compreensão do conceito de limite estão ligadas a problemas mais amplos de fundamentação no ensino da Álgebra.
Hening (2023)	Análise de uma tarefa exploratória aliada ao uso de tecnologias digitais em aulas de cálculo no contexto remoto.	Alunos do curso de Engenharia, cursando a disciplina de Cálculo.	A resolução das tarefas no contexto remoto favoreceu a autonomia dos estudantes em buscar e desenvolver estratégias e métodos que poderiam ser utilizados para a solução da tarefa exploratória que foi proposta.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

De forma cronológica, apresentaremos, a seguir, uma síntese de cada pesquisa analisada.

A dissertação de Mestrado do autor Marcos Vinícius Ribeiro (Ribeiro, 2010), desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Rio Claro – SP, fundamentada na Metodologia de Romberg (1992), tem como objetivo analisar uma sala de aula de um curso de engenharia, focando no ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Nessa análise, o autor busca identificar os possíveis problemas que deram origem às diferentes formas de Integrais de Riemann e procurar acadêmicos da área de História da Matemática, além de buscar de diferentes autores de História de Matemática, na procura de um enunciado ou de uma narrativa de problemas práticos que necessitassem da investigação e da aplicação de Integrais.

De acordo com essa pesquisa, o autor percebe que a História da Matemática desempenhou um papel fundamental, pois proporcionou aos alunos a oportunidade de compreender como as ideias matemáticas surgiram e se desenvolveram ao longo do tempo. Além disso, permitiu refletir sobre como esse conhecimento pode ser aplicado nas atividades em sala de aula, considerando os desafios e os avanços encontrados durante a evolução do conceito de integral. Esse conceito, por sua vez, faz parte do Cálculo Diferencial e Integral, uma área essencial da História da Matemática.

Além disso, o autor ressalta que a abordagem da Resolução de Problemas mostrou-se uma estratégia eficaz para o trabalho em sala de aula, beneficiando tanto o professor quanto os alunos na busca pela solução de desafios. Por meio dessa metodologia, os alunos foram incentivados a investigar e a compreender conceitos, agora expressos por eles mesmos. Segundo Ribeiro (2010), essa prática permitiu que os estudantes se colocassem no papel dos pioneiros na exploração de novos conceitos de Matemática e Cálculo. Assim, essa metodologia proporcionou ao aluno a tensão e o prazer na busca pela resposta correta de um problema, ao mesmo tempo em que contribuiu para o fortalecimento de sua autoestima.

Por fim, o autor afirma que, embora o tempo disponível para o desenvolvimento deste projeto tenha sido curto, a sala de aula, inserida em um ambiente propício à aprendizagem significativa, se revelou um espaço de trabalho colaborativo, onde houve troca de conhecimentos e um forte espírito investigativo.

A dissertação de Mestrado da autora Patrícia Oliveira Costa (Costa, 2010) desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal de Uberlândia – UFU-MG. Ela iniciou esta pesquisa em 2006, quando ainda era professora contratada pela UFU, nos anos seguintes realizou um trabalho coletivo na disciplina de Cálculo, com a participação de professores e alunos bolsistas da Universidade. O objetivo desse trabalho foi utilizar um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) como suporte ao ensino presencial nas salas de aula e laboratórios de Informática.

Em continuidade a sua pesquisa, Costa (2010) analisou o desenvolvimento de um trabalho colaborativo envolvendo professores e alunos de Graduação e Pós-Graduação da Universidade Federal de Uberlândia, com o objetivo de criar um Ambiente Virtual de Aprendizagem voltado para o ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Nesse sentido, a autora destaca que, ao longo do processo de produção das atividades e projetos, foi observado que o grupo não apenas produzia, mas também refletia sobre sua própria produção. Isso resultou em um significativo desenvolvimento profissional, tanto nos conhecimentos relacionados ao conteúdo da disciplina quanto nas práticas pedagógicas. Além disso, houve um avanço considerável nos saberes técnicos, especialmente porque muitos dos professores envolvidos ainda não tinham experiência no uso de tecnologias em suas aulas.

Em relação ao uso da Educação on-line e o trabalho colaborativo realizado pelo grupo, Costa (2010) percebeu um avanço no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo, mediado pelas interações coletivas. Esse progresso ocorreu ao longo do tempo, à medida que as ferramentas para a construção conjunta de conhecimento se aprimoraram. A autora também destaca que, no Ambiente Virtual de Aprendizagem, houve intercâmbios unidimensionais, bidimensionais e multidimensionais, que favoreceram a produção, troca e socialização de saberes.

A tese de Doutorado do autor Giberto Emanoel Reis Vogado (Vogado, 2014), desenvolvida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, fundamentada a partir das pesquisas de Onuchic e Allevato (2004), Van de Walle (2001), bem como de recomendações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (1998), com o objetivo de investigar o desempenho estratégico dos licenciandos em Matemática ao resolverem problemas, por meio de uma sequência de ensino focada na introdução do conceito de Integral. Além de analisar, nas estratégias escritas, a manipulação individual e/ou simultânea dos aspectos fundamentais das atividades matemáticas, conforme proposto por Fischbein, que são: a intuição, o algoritmo e o formal.

Vogado (2024) destaca que a estratégia de ensino da matemática baseada na resolução de problemas demonstrou ser eficaz ao proporcionar aos estudantes a oportunidade de discutir suas abordagens, tanto em duplas quanto durante a socialização das soluções e nas discussões em plenária. Esse processo contribuiu para que os alunos desenvolvessem maior autonomia e capacidade crítica em suas produções.

Para Vogado (2024) a discussão em grupo é essencial para o aprendizado de conceitos, pois proporciona a reflexão sobre as estratégias a serem adotadas na resolução de problemas e promove a autonomia nas duplas durante o planejamento das soluções. Segundo autor, à medida que os encontros progrediam, notava-se um avanço significativo, com os alunos se mostrando mais motivados e engajados nas atividades. Isso corrobora a afirmação de Onuchic (1999) sobre a metodologia de ensino e aprendizagem da matemática por meio da Resolução de Problemas, destacando seus benefícios para o processo educativo.

O autor identifica que a maioria dos alunos conseguiu superar as dificuldades iniciais relacionadas ao conceito de Integral, destacando certos aspectos evidentes nas respostas fornecidas. Observou-se também, nas falas das duplas, a relevância do uso de *softwares* matemáticos no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Assim, Vogado (2014, p. 138) afirma que “o uso de um *software* matemático deve ser um caminho a ser seguido pelos educadores comprometidos com a educação”.

Em síntese, Vogado (2014) espera que seu trabalho também contribua para a nossa prática pedagógica, ao estimular a reflexão sobre a possibilidade e necessidade de proporcionar aos futuros professores oportunidades para vivenciar uma metodologia que favoreça sua formação inicial, promovendo o desenvolvimento de sua autonomia, capacidade crítica e conscientização sobre o potencial de construir seus próprios conhecimentos. Além disso, para os docentes que atuam no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, ele sugere uma sequência de ensino, incluindo as modificações que consideramos necessárias, na introdução do conceito de Integral.

A tese de Doutorado da autora Giselle Moraes Resende Pereira (Pereira, 2019), foi desenvolvida no programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal Uberlândia – MG, com o objetivo de analisar o processo e os resultados de um projeto que utilizou Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e Modelagem Matemática para o ensino e aprendizagem de Cálculo, desenvolvido de forma sequencial, sob a perspectiva dos estudantes do Curso de Graduação em Agronomia que participaram, visando compreender as interações proporcionadas e as contribuições alcançadas por meio dessa proposta.

O estudo de caráter qualitativo foi realizado a partir do acompanhamento e análise do desenvolvimento sequencial de um curso de Cálculo, no contexto das Ciências Agrárias. O curso foi estruturado com base na construção coletiva de um Trabalho de Projeto interdisciplinar, situado na interseção entre práticas educativas que incorporam a Modelagem Matemática e o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no ensino e aprendizagem de Cálculo no Ensino Superior.

De acordo com os dados, Pereira (2019) afirma que são poucos os professores que adotam o ensino associado à pesquisa e extensão na universidade, que compreendem seus benefícios e buscam metodologias e tecnologias para aprimorar a qualidade do ensino. Além disso, a autora destaca que o Trabalho de Projeto foi desenvolvido com dinâmicas variadas a cada semestre, e as interações ocorreram de maneiras distintas, não apenas devido às estratégias adotadas em cada período. Essas diferenças se devem aos tempos diversos, à composição das turmas e dos grupos, que mudam a cada semestre – com alunos que se transformam, alteram suas ideias, interesses e competências – além da utilização de abordagens distintas.

Diante disso, Pereira (2019) enfatiza que os processos interativos foram observados de três formas: interações presenciais (entre alunos, professores e outros), interações mediadas por TDIC (como computador e celular) e interatividade envolvendo professores e alunos através dessas tecnologias. Assim, as TDIC também influenciaram o desenvolvimento do Trabalho de Projeto em três aspectos: criação de ambiente digital no Moodle, uso de softwares para modelagem de dados e fichas orientadoras, e comunicação entre os envolvidos via *WhatsApp*, *e-mail* e fóruns.

Em síntese, Pereira (2019) reflete que o Trabalho de Projeto proposto aos alunos exigiu envolvimento, preparação e criatividade, tendo o potencial de despertar entusiasmo e interesse pelos conteúdos de Matemática. Esse trabalho permitiu que os alunos reconhecessem a importância da disciplina como ferramenta essencial para a compreensão de situações relacionadas ao seu curso na área Agronômica.

A dissertação de Mestrado do autor Matheus Marque de Araújo (Araújo, 2020), foi desenvolvida no programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande – PB, com o objetivo de identificar os erros cometidos pelos estudantes a partir de suas atividades e avaliações.

O estudo desenvolvido por Araújo (2020) apresenta uma reflexão sobre a construção do conceito de Limite, iniciando com uma breve introdução à História do Cálculo Diferencial e Integral, destacando informações sobre a inserção dessa disciplina no currículo do Ensino Superior no Brasil. Em seguida, o autor aborda as principais definições, propriedades e teoremas relacionados aos Limites de Funções Reais, seguidas de uma análise crítica dos livros-textos de CDI. Também são destacados estudos sobre o ensino e a aprendizagem do CDI, com ênfase no ensino de Limites de Funções Reais. Além disso, Araújo (2020) discute a Resolução de Problemas no contexto da Educação Matemática, enfatizando a importância da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação baseada na Resolução de Problemas.

Nesse sentido, Araújo (2020) enfatiza que analisar erros não é uma tarefa simples para um professor inexperiente, ou, mesmo para um professor experiente, mas pouco inclinado a adotar inovações no ambiente escolar, como o uso de novas estratégias e metodologias de ensino e aprendizagem. No entanto, o autor acredita que, na prática, à medida que o professor se familiariza com essas abordagens, elas podem se tornar um procedimento naturalmente integrado aos demais processos didáticos adotados em sua rotina. Nesse contexto, o estudo dos erros cometidos pelos alunos permitiu ao autor perceber que a metodologia utilizada em sua prática antes desta investigação não estava conseguindo promover um ensino de Limite que favorecesse a compreensão, além de não estimular a discussão dos aspectos algébricos da Educação Básica.

Em síntese, Araújo (2020) concluiu que o ensino de Limites, quando desprovido de contextualização e baseado em um enfoque tecnicista, no qual o professor incentiva a resolução de extensas listas de exercícios e utiliza os livros-texto de CDI como única fonte, contribui de maneira significativa para o baixo desempenho dos alunos na disciplina. Além disso, a análise dos erros cometidos pelos estudantes, com base em suas atividades e avaliações, foi fundamental para identificar e compreender as principais dificuldades e fragilidades que surgiram durante o estudo do Limite. Esse diagnóstico contribuiu para a elaboração de uma proposta de ensino e aprendizagem, baseada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas.

A dissertação de Mestrado do autor Rogério Fabricio Hening (Hening, 2023), foi desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, *campi* Cornélio Procópio e Londrina – PR, com o objetivo de investigar os processos envolvidos na organização de ambientes educacionais nas disciplinas de Matemática do Ensino Superior e as consequências para a aprendizagem, além disso, busca compreender como se dá o desenvolvimento de uma tarefa exploratória por estudantes da disciplina de CDI 2 (que envolve o estudo de funções de mais de uma variável), em um contexto de ensino remoto.

De acordo com os dados, Hening (2023) enfatiza que a colaboração, a resolução e o uso de Tecnologias Digitais (TD) desempenham um papel fundamental na resolução de tarefas exploratórias no ensino de CDI envolvendo múltiplas variáveis. Quanto à Resolução da Tarefa, foram propostas diversas estratégias e modelos, com diferentes abordagens pelos grupos. Dentre as soluções apresentadas, destacam-se métodos como o de Multiplicadores de Lagrange, Integrais Múltiplas, Derivadas, entre outros. Além disso, os grupos empregaram conceitos de Geometria Plana e Espacial, Funções e outros tópicos fundamentais da Matemática Básica. O processo de resolução foi um momento significativo de trabalho colaborativo entre os estudantes, com o apoio de TD.

Segundo Hening (2023), as três categorias, apresentadas anteriormente, estão interconectadas, pois, durante o desenvolvimento de tarefas em pequenos grupos, ocorrem momentos de interação e colaboração entre os participantes, além de processos de pesquisa e validação da tarefa, com o auxílio de *softwares* e *applets*.

Por fim, Hening (2023) destacou que os resultados da pesquisa demonstram que a colaboração, o uso de TD e a resolução das tarefas propiciaram momentos de interação, criaram oportunidades para o desenvolvimento de estratégias e possibilitaram o uso de diversos recursos tecnológicos, visando à solução da tarefa proposta.

As pesquisas apresentadas nessa seção destacam abordagens teórico-metodológicas relevantes para o ensino de CDI, como a utilização de Projetos de Modelagem Matemática, e uso de Tecnologias Digitais, como *softwares* matemáticos. Neste contexto, nosso estudo visa explorar as potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas na formalização do Cálculo Integral, com o apoio da plataforma DESMOS. Para isso, desenvolveremos, aplicaremos e analisaremos algumas atividades realizadas a partir de encontros presenciais, integrando o ensino do Cálculo Integral com o uso do ambiente virtual DESMOS, a fim de atingir os objetivos específicos desta pesquisa.

Nas quatros dissertações e duas teses analisadas, podemos perceber que, a Resolução de Problemas emerge como uma metodologia central, destacando-se pela sua capacidade de fomentar autonomia e reflexão nos estudantes. Nesse sentido, ao resolverem problemas desafiadores, os alunos se posicionam como “exploradores” de conceitos matemáticos, o que os motiva a refletir sobre suas estratégias e a discutir suas abordagens com colegas, seja em pares ou em grupos maiores. Essa prática também fortalece a autoestima dos estudantes, uma vez que, ao enfrentarem e superarem desafios, eles desenvolvem maior confiança nas suas habilidades.

Outro aspecto relevante nessas dissertações e teses foi o trabalho colaborativo, que promoveu a troca de conhecimentos entre os estudantes e criou um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo. As TD desempenham um papel crescente no ensino de CDI, oferecendo novas possibilidades para interação e ensino colaborativo. Costa (2010) destaca o uso de Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA), como o *Moodle*, para complementar o ensino presencial, permitindo que os alunos acessem recursos fora da sala de aula e desenvolvam seu aprendizado de maneira mais flexível. A utilização de *softwares* matemáticos também é ressaltada, pois facilita a visualização e compreensão de conceitos complexos de Cálculo.

Hening (2023) observa que a combinação do ensino remoto, do uso de *softwares* e da colaboração entre os alunos cria um ambiente mais interativo, onde os alunos podem explorar conceitos, como integrais múltiplas ou multiplicadores de

Lagrange, de maneira mais prática. Pereira (2019) também explora como as TDIC podem ser integradas à Modelagem Matemática, criando espaços colaborativos e interativos que ajudam os alunos a conectar teoria e prática. As interações mediadas por TDIC, como o uso de ferramentas como *WhatsApp* e fóruns, são essenciais para promover a troca de saberes e a construção coletiva do conhecimento.

A aplicação de *softwares* matemáticos permite uma visualização interativa de conceitos matemáticos abstratos, como integrais, o que facilita a compreensão. Como aponta Araújo (2020), as tecnologias também podem auxiliar na análise dos erros cometidos pelos alunos, permitindo correções mais precisas e personalizadas, contribuindo assim para o aprimoramento contínuo do processo de ensino-aprendizagem.

Com base nas pesquisas, destacamos que nossa pesquisa foi desenvolvida no âmbito da Licenciatura em Matemática e Física, com ênfase no estudo da integral na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, dada a abordagem teórica e metodológica aprofundada desses cursos. Em contraste, nos cursos de Engenharia, o estudo da integral é abordado mais cedo, já na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, pois o objetivo principal é preparar os alunos para resolver problemas aplicados de forma eficiente e prática, refletindo a necessidade de um domínio mais imediato das ferramentas matemáticas para aplicação nas áreas tecnológicas e científicas.

4.2.3 Algumas considerações sobre a integral

Nesta subseção, abordamos os conceitos de integral definida, apresentando definições, propriedades e teoremas fundamentais, com base em conceitos pré-existentes. Examinamos, em detalhes, a integral definida e suas propriedades, incluindo o Teorema do Valor Médio para integrais. Além disso, discutimos técnicas importantes de integração, como o método de substituição e a integração por partes, e exploramos algumas aplicações da integral definida em contextos práticos e teóricos.

4.2.3.1 Somas de Riemann

As definições, proposições e teoremas apresentados nesta subseção podem ser encontrados no livro de Cálculo de George B. Thomas (Thomas; Weier; Hass, 2012). Os autores oferecem uma abordagem detalhada e rigorosa sobre os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, proporcionando uma base sólida para a compreensão dos tópicos discutidos.

A notação sigma permite expressar uma grande soma em forma compacta.

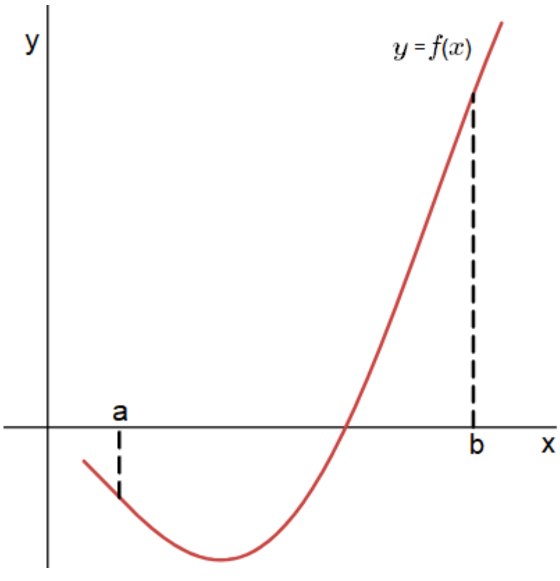
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

A letra grega maiúscula $\sum$ significa 'soma'. O índice k diz onde começa a soma (no número sob o $\sum$) e onde ela termina (no número acima do $\sum$). Quando o símbolo ∞ aparece acima do $\sum$, isso indica que os termos continuam indefinidamente. O limite inferior da somatória não precisa ser 1; pode ser qualquer número inteiro.

As somas nas quais estamos interessados são chamadas somas de Riemann, em homenagem a Georg Friedrich Bernhard Riemann. As somas de Riemann são construídas de um modo particular. Vamos descrever a construção formalmente, em um contexto mais geral que não nos limita a funções não negativas.

Começamos com uma função contínua arbitrária f definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Assim como a função traçada na Figura 11, ela pode ter valores negativos e positivos.

Figura 11 – Gráfico de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Então, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos escolhendo $n - 1$ pontos, digamos $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, entre a e b, sujeitos apenas à condição de que

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

Para tornar a notação coerente, denotaremos a por x_0 e b por x_n. O conjunto

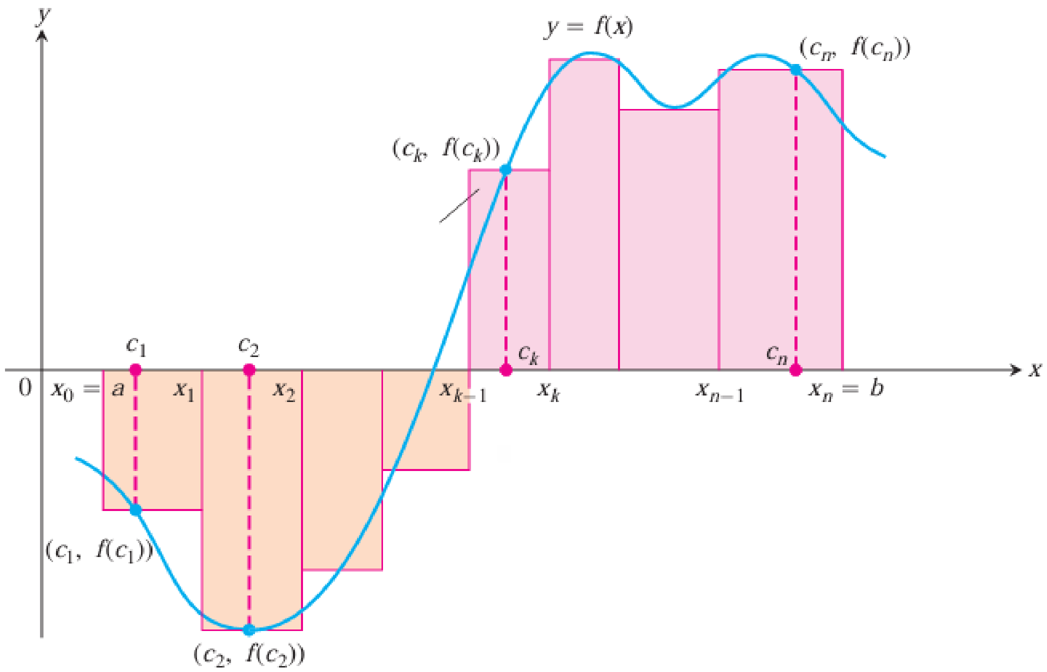
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

é chamado partição de $[a, b]$.

A partição P define n subintervalos fechados, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$. O subintervalo fechado típico $[x_{k-1}, x_k]$ é chamado k-ésimo subintervalo de P. O comprimento do k-ésimo subintervalo é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Em cada subintervalo selecionamos algum número. Denote o número escolhido do k-ésimo subintervalo por c_k. Depois, em cada subintervalo construímos um retângulo com uma base no eixo x e que toca a curva em $(c_k, f(c_k))$. Esses retângulos podem estar tanto acima como abaixo do eixo (Figura 12).

Figura 12 – Aproximação da região entre o gráfico da função $y = f(x)$ e o eixo x.



Fonte: Thomas, Weier e Hass (2012, p. 341).

Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Esse produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo de $f(c_k)$. Por fim, tomamos a soma desses produtos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Essa soma, que depende da partição P e da escolha dos números c_k, é uma soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$.

Exemplos resolvidos e exercícios com aplicação da definição podem ser encontrados no livro de Thomas, Weier e Hass (2012), a partir do capítulo 5.

4.2.3.2 A integral definida e propriedades

À medida que as amplitudes dos subintervalos de $[a, b]$ tornam-se cada vez menores esperamos que os retângulos definidos pelas partições aproximem a região entre o eixo x e o gráfico de f com precisão cada vez maior. Portanto, esperamos que as somas de Riemann associadas tenham um valor-limite. O Teorema 1, abaixo, nos assegura isso, desde que todos os comprimentos dos intervalos tendam a zero. Esta última condição é assegurada exigindo que o comprimento do maior subintervalo, chamado de norma de partição e denotado por $||\ P\ ||$, tenda a zero.

Apesar do potencial para variação nas somas $\sum f(c_k) \cdot \Delta x_k$ conforme as partições mudam e os c_k são escolhidos arbitrariamente nos subintervalos de cada partição, as somas sempre têm o mesmo limite para $||\ P\ || \to 0$ quando f é contínua em $[a, b]$.

Definição 1 (*A Integral Definida como Limite de Somas de Riemann*). Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Para qualquer partição P de $[a, b]$, escolha os números c_k arbitrariamente nos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

Se houver um número I tal que

$$\lim_{||\ P\ || \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k \ = \ I$$

independentemente de como P e os c_k forem escolhidos, então f será integrável em $[a, b]$ e I será a integral definida de f em $[a, b]$.

Teorema 1 (*A Existência de Integrais Definidas*). Todas as funções contínuas são integráveis. Isto é, se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então sua integral definida em $[a, b]$ existe.

Leibniz introduziu uma notação para a integral definida que captura sua construção como um limite de somas de Riemann. Ele imaginou as somas finitas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k$ se tornando uma soma infinita de valores de função $f(x)$ multiplicados por larguras de subintervalo “infinitesimais” dx. O símbolo de soma $\sum$ é substituído no limite pelo símbolo integral $\int$, cuja origem está na letra “S”.

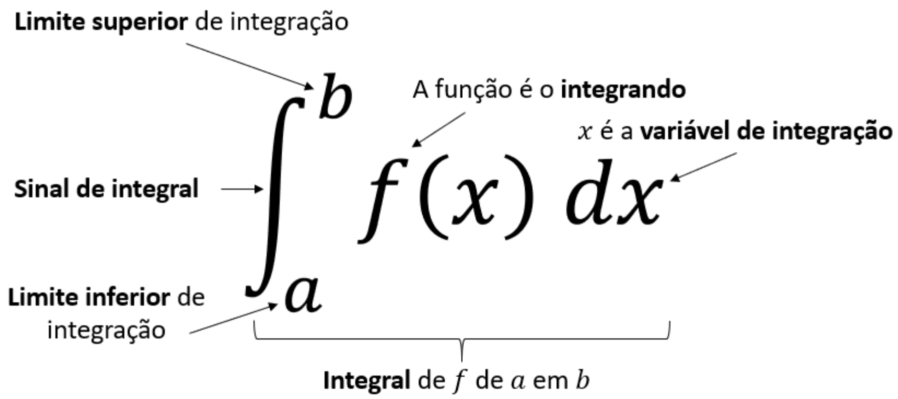
Os valores de função $f(c_k)$ são substituídos por uma seleção contínua de valores de função $f(x)$. As larguras de subintervalo Δx_k se tornam o diferencial dx. É como se estivéssemos somando todos os produtos da forma $f(x) \cdot dx$ conforme x vai de a para b. Embora essa notação capture o processo de construção de uma integral, é a definição de Riemann que dá um significado preciso à integral definida.

O símbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

é lido como “integral de a até b de f de x dx” ou às vezes como “integral de a até b de f de x em relação a x”. Os outros componentes também têm nomes:

Figura 13 – Componentes da integral definida.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Ao definir $\int_a^b f(x)dx$ como um limite de somas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, movemo-nos da esquerda para a direita ao longo do intervalo $[a, b]$. O que aconteceria se, em vez disso, nos movêssemos da direita para a esquerda, começando com $x_0 = b$ e terminando em $x_n = a$. Cada Δx_k na soma de Riemann mudaria de sinal, com $x_k - x_{k-1}$ agora negativo em vez de positivo. Com as mesmas escolhas de c_k em cada subintervalo, o sinal de qualquer soma de Riemann mudaria, assim como o sinal do limite, a integral $\int_b^a f(x)dx$. Como não demos anteriormente um significado à integração para trás, somos levados a definir

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Outra extensão da integral é para um intervalo de largura zero, quando $a = b$. Como $f(c_k)\Delta x_k$ é zero quando a largura do intervalo $\Delta x_k = 0$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

A seguir apresentaremos sete propriedades de integrais, dadas como regras que elas satisfazem, incluindo os casos anteriores. Essas propriedades podem ser encontradas no livro de Thomas, Weier e Hass (2012, p. 378). Além disso, estas regras tornam-se muito úteis no processo de cálculo de integrais.

Teorema 2 (*Propriedades da integral definida*). Quando f e g são integráveis, a integral definida satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Ordem de Integração:* $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (Uma definição).
2. *Zero:* $\int_a^a f(x)dx = 0$ (Uma definição).
3. *Multiplicação por constante:* $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (Qualquer número k).
4. *Soma e Subtração:* $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5. *Aditividade:* $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.
6. *Desigualdade Máx-Mín:* se $M = \text{máx}\, f$ e $m = \text{mín}\, f$ são valores máximos e mínimos de f em $[a,b]$, então
$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a).$$
7. *Dominação: Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$*

   Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (caso especial).

Agora podemos apresentar a noção de área de uma região com contorno curvo, capturando a ideia de aproximar pela soma de áreas de retângulos com bases de larguras infinitesimais. A área sob o gráfico de uma função contínua não negativa é definida como uma integral definida.

Definição 2 (*Área sob uma curva como uma integral definida*)**.** Se $y = f(x)$ é uma função não negativa e integrável em um intervalo fechado [a, b], então a área sob a curva $y = f(x)$ em $[a,b]$ é a integral de f de a a b,

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Essa definição vale nos dois sentidos: podemos usar integrais para calcular áreas e usar áreas para calcular integrais.

Agora, introduzimos informalmente o valor médio de uma função contínua não negativa f em um intervalo $[a, b]$, levando-nos a definir essa média como a área sob o gráfico de $y = f(x)$ dividido por $b - a$.

Definição 3 (*Valor Médio (Média)*). Se f for integrável em $[a, b]$, então seu valor médio (média) em $[a, b]$ é

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Podemos usar esta fórmula para dar uma definição precisa do valor médio de qualquer função contínua (ou integrável), seja positiva, negativa ou ambas.

4.2.3.3 O teorema do Valor Médio para integrais e outros

Apresentaremos agora dois dos mais importantes teoremas do Cálculo Integral. O Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas afirma que uma função contínua em um intervalo fechado assume seu valor médio ao menos uma vez no intervalo. O Teorema Fundamental relaciona integração e diferenciação, sendo apresentado em duas partes. Sua descoberta, feita independentemente por Leibniz e Newton, iniciou os avanços da matemática que alimentaram a revolução científica nos duzentos anos seguintes e constituem o que ainda é considerado a descoberta mais importante do cálculo na história da humanidade.

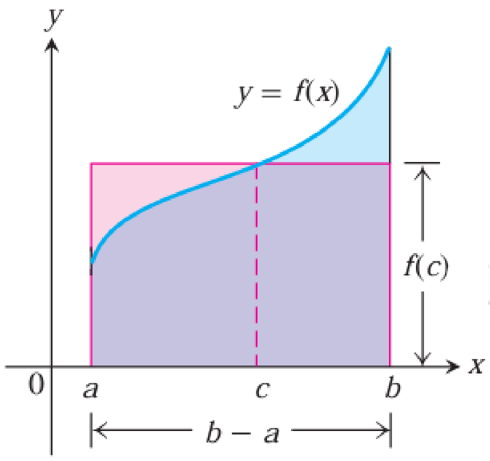
Teorema 3 (*Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas*). Se f for contínua em $[a, b]$, então em algum ponto c em [a, b],

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

A demonstração do Teorema 3 pode ser encontrada no livro de Thomas, Weier e Hass (2012, p. 387).

O teorema acima afirma que esse valor médio é sempre assumido pelo menos uma vez no intervalo. Isso não é mera coincidência. Olhe o gráfico da Figura 14 e imagine retângulos com base $(b - a)$ e alturas variando desde o mínimo de f (um retângulo muito pequeno para fornecer a integral) até o máximo de f (um retângulo muito grande). Em algum lugar entre elas existe um retângulo "perfeito", e se f for contínua seu lado superior irá cortar o gráfico de f.

Figura 14 – Visualização gráfica do Teorema do Valor Médio.



Fonte: Thomas, Weier e Hass (2012, p. 341)

Teorema Fundamental, Parte 1. Se $y = f(t)$ é uma função integrável em um intervalo finito I, então a integral de qualquer número fixo $a \in I$ para outro número $x \in I$ define uma nova função F cujo valor em x é

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (1)$$

Por exemplo, se f for não negativo e x estiver à direita de a, então $F(x)$ é a área sob o gráfico desde a até x. A variável x é o limite superior de integração de uma integral, mas F é como qualquer outra função de valor real de uma variável real. Para cada valor da entrada x, há uma saída numérica bem definida, neste caso a integral definida de f de a a x.

A equação (1) fornece uma maneira de definir novas funções, mas sua importância agora é a conexão que ela faz entre integrais e derivadas. Se f for qualquer função contínua, então o Teorema Fundamental afirma que F é uma função diferenciável de x cuja derivada é o próprio f. Em todo valor de x,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Essa ideia é tão importante que é a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

Definição 4 (*Primitiva de uma função) Seja f uma função definida num intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que $F'(x) = f(x)$.*

Teorema 4 (*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*). Se f é contínua em $[a, b]$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é derivável em todo ponto x em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

A demonstração do Teorema 4 pode ser encontrada no livro de Thomas, Weier e Hass (2012, p. 389).

Teorema Fundamental, Parte 2. A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo mostra como calcular integrais definidas diretamente a partir de primitivas.

Teorema 5 (*O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2*). Se f é contínua em todo ponto de $[a, b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

A demonstração do Teorema 5 pode ser encontrada no livro de Thomas, Weier e Hass (2012, p. 392).

Então, como calcular $\int_a^b f(x)\, dx$?

Passo 1. Determine uma primitiva F de f. Qualquer primitiva servirá, portanto, tome a mais simples que puder;

Passo 2. Calcule o número $F(b) - F(a)$.

Esse número será $\int_a^b f(x)dx$.

Notação de Cálculo de Integral. A notação usual para $F(b) - F(a)$ é

$$F(x)]_a^b \text{ ou } [F(x)]_a^b$$

dependendo de F ter um ou mais termos. Essa notação fornece uma "receita" compacta para o cálculo, permitindo calcular a primitiva em um passo intermediário.

Agora podemos calcular áreas usando primitivas, mas devemos ter cuidado para distinguir a área "resultante" (em que a área sob o eixo x é computada como negativa) da área total.

Para determinar analiticamente a área entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $[a, b]$ faça o seguinte.

Passo 1. Particione $[a, b]$ com os zeros de f;

Passo 2. Integre f em cada subintervalo;

Passo 3. Some os valores absolutos das integrais.

4.2.3.4 Método de substituição para integração e integração por partes

Existem dois métodos para avaliar uma integral definida por substituição. O primeiro método é encontrar uma antiderivada usando substituição e, então, avaliar a integral definida aplicando o Teorema Fundamental, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 6 (*A Regra da Substituição*). Se $u = g(x)$ é uma função diferenciável cujo alcance é um intervalo I e f é contínua em I, então

$$\int f\big(g(x)\big)g\,'(x)dx = \int f(u)du.$$

Para usar a fórmula, faça a mesma substituição u que você usaria para calcular a integral indefinida correspondente. Depois integre em relação a u desde o valor a partir daquele que u tem em $x = a$ até o valor que u tem em $x = b$.

A demonstração do Teorema 6 pode ser encontrada no livro de Thomas, Weier e Hass (2012, p. 401).

O segundo método, que vamos apresentar agora, estende o processo de substituição diretamente para integrais definidas. Aplicamos a nova fórmula introduzida aqui ao problema de calcular a área entre duas curvas.

Teorema 7 (*Substituição em Integrais Definidas*). Se g' for contínua no intervalo $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

A demonstração do Teorema 7 pode ser encontrada no livro de Thomas, Weier e Hass (2012, p. 408).

Definição 5 *(Integração por partes)*. Suponhamos f e g definidas e deriváveis num mesmo intervalo I. Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ou

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Supondo, então, $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observando que $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, então $f(x)g'(x)$ também admitirá primitiva em I e

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (*)$$

que é a regra de *integração por partes*. Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, o que nos permite escrever a regra $(*)$ na seguinte forma usual:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Em geral, ao decidir sobre uma escolha para u e dv, geralmente tentamos escolher u como uma função que se torna mais simples quando derivada. Ou ao menos não mais complicada. Contanto, que dv possa ser prontamente integrada para fornecer v.

Vejamos, agora, como fica a regra de integração por partes na integral definida (integral de Riemann). Sejam, então, f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

4.2.3.5 Aplicações da integral definida

Muitas das coisas que desejamos saber podem ser determinadas por meio de integrais: como o volume de sólidos, o comprimento de curvas, a quantidade de trabalho necessária para bombear líquidos do subsolo, as forças exercidas contra comportas, ou as coordenadas de pontos onde objetos sólidos estão em equilíbrio. Todas essas quantidades podem ser definidas como limites das somas de Riemann de funções contínuas em intervalos fechados, utilizando o cálculo, ou seja, como integrais – e é através delas que realizamos esses cálculos.

A seguir, apresentaremos algumas aplicações da integral definida. Nosso objetivo não será apresentar as demonstrações formais de cada resultado, mas sim expor os principais resultados que fundamentam essas aplicações. Dessa forma, procuraremos ilustrar a utilidade prática das integrais em diferentes contextos, destacando como elas fornecem soluções diretas e eficientes para problemas do mundo real, sem entrar em detalhes complexos das provas matemáticas.

Definição 6 (*Volume de um Sólido*). O volume de um sólido compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$ e cuja área da seção transversal por x é uma função integrável $A(x)$ é a integral de a a b de A,

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

Esta definição se aplica sempre que $A(x)$ for contínua, ou mais geralmente, quando for integrável. Para aplicar a fórmula na definição para calcular o volume de um sólido, siga os passos listados abaixo:

Passo 1. Esboce o sólido e uma seção transversal típica;

Passo 2. Encontre uma fórmula para $A(x)$;

Passo 3. Encontre os limites da integração;

Passo 4. Integre $A(x)$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Nosso objetivo a seguir é definir o trabalho realizado por uma força variável com a posição. Suponhamos, então, que sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força paralela ao deslocamento e variável com a posição x,

$$\vec{F}(x) = \mathrm{f}(x)\vec{k}.$$

Assim, $f(x)$ é a componente de $\vec{F}(x)$, na direção do deslocamento. Vejamos, então, como definir o trabalho realizado por $\vec{F}$ no deslocamento de $x = a$ até $x = b$. Suponha por um momento, $a < b$ e f contínua em $[a, b]$.

Definição 7 (*Trabalho*). Seja P: $a = x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Supondo $\text{máx}\, \Delta x_k$ suficientemente pequeno e tendo em conta a continuidade de f, o trabalho realizado de x_{k-1} até x_k $(k = 1,2, \ldots, n)$ deverá ser aproximadamente $f(c_k)\Delta x_k$; por outro lado, é razoável esperar que a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

deva ser um valor aproximado para o trabalho realizado por $\vec{F}$ no deslocamento de $x = a$ até $x = b$ e que esta aproximação seja tanto melhor quanto menor for $máx\, \Delta x_k$.

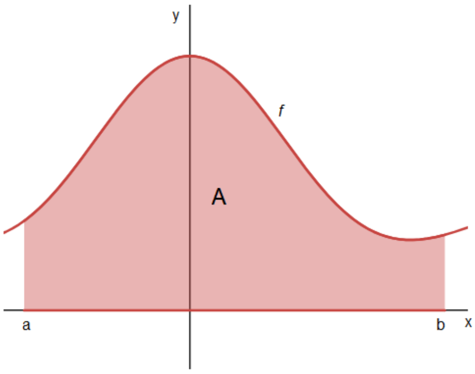
Nada mais natural, então, do que definir o trabalho realizado por $\vec{F}(x) = f(x)\vec{k}$, no deslocamento de $x = a$ até $x = b$, por

$$\tau = \int_a^b f(x)dx.$$

Na definição acima, a e b podem ser quaisquer e f integrável no intervalo fechado de extremidades a e b. Observe que, se $a < b$ e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, o trabalho realizado por $F(x) = f(x)\vec{k}$, de $x = a$ até $x = b$, é numericamente igual à área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e gráfico de $y = f(x)$.

Definição 8 (*Cálculo de Áreas*). Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) > 0$ em $[a, b]$. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$ (Figura 15).

Figura 15 – Área do conjunto A.



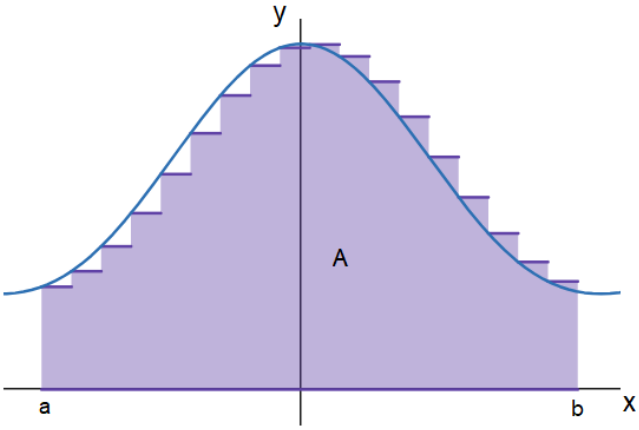
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Seja, então, $P: a = x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam $\bar{c}_k$ e $\bar{\bar{c}}_k$ em $[x_{k-1}, x_k]$ tais que $f(\bar{\bar{c}}_k)$é o valor mínimo e $f(\bar{c}_k)$ o valor máximo de f em $[x_{k-1}, x_k]$.

Uma boa definição para área de A deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{k-1}^{n} f(\bar{c}_k)\Delta x_k$ seja uma aproximação por falta da área de A e que $\sum_{k-1}^{n} f(\bar{\bar{c}}_k)\Delta x_k$ seja uma aproximação por excesso, isto é

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{c}_k)\Delta x_k \leq \text{área } A \leq \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\bar{c}}_k)\Delta x_k$$

Figura 16 – Aproximação da área de A.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x)dx$, quando $\text{máx}\,\Delta x_k \to 0$, nada mais natural do que definir a área de A por

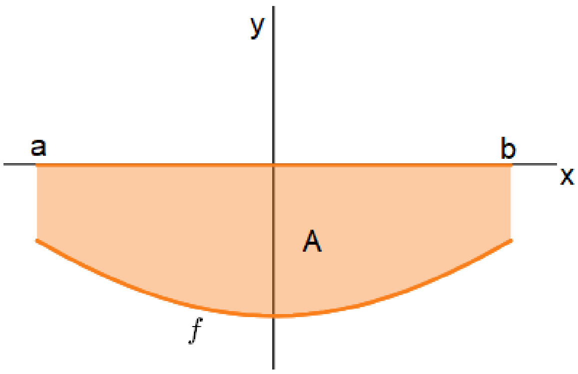
$$\text{área}\ A = \int_a^b f(x)dx.$$

Da mesma forma define-se área de A no caso em que f é uma função integrável qualquer, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

As situações que apresentamos a seguir sugerem como estender o conceito de área para uma classe mais ampla de subconjuntos do $\mathbb{R}^2$.

1º caso. Como $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$, $-\int_a^b f(x)dx$.

Figura 17 – Representação gráfica do 1º caso.



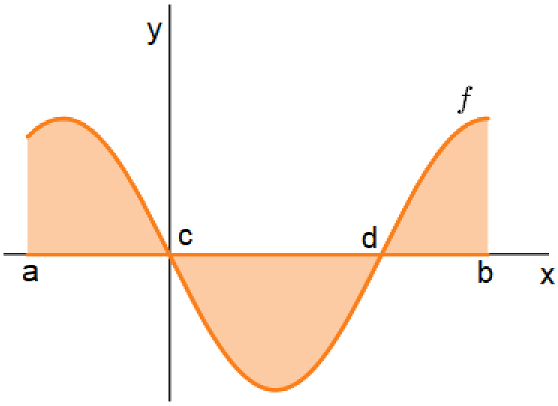
Fonte: Elaborada pelo autor, 2025.

2º caso. Seja A o conjunto representado na figura a seguir.

$$Área\ = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ou seja, a expressão acima indica a soma das áreas dos conjuntos acima do eixo Ox menos a soma das áreas dos conjuntos abaixo do eixo Ox.

Figura 18 – Representação gráfica do 2º caso.



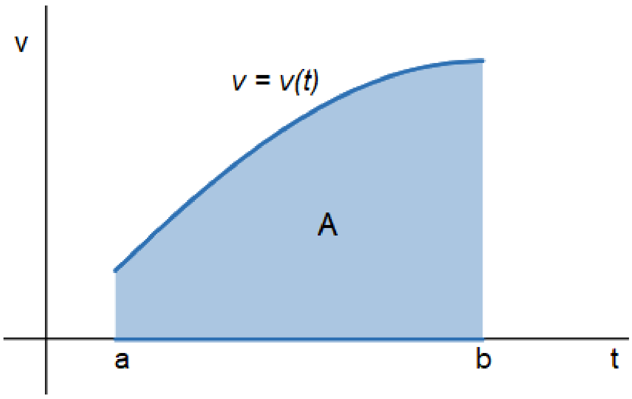
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Consideremos, agora, uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. A diferença $x(b) - x(a)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes a e b. Como $x(t)$ é uma primitiva de $v(t)$, segue o Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1) que

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v\,(t)dt.$$

Por outro lado, definimos o espaço percorrido pela partícula entre os instantes a e b por $\int_a^b v\,(t)dt$. Se $v(t) > 0$ em $[a, b]$, o deslocamento entre os instantes a e b será igual ao espaço percorrido entre estes instantes, que, por sua vez, será numericamente igual à área do conjunto A limitado pelas retas $t = a$, $t = b$, pelo eixo Ot e pelo gráfico de $v = v(t)$.

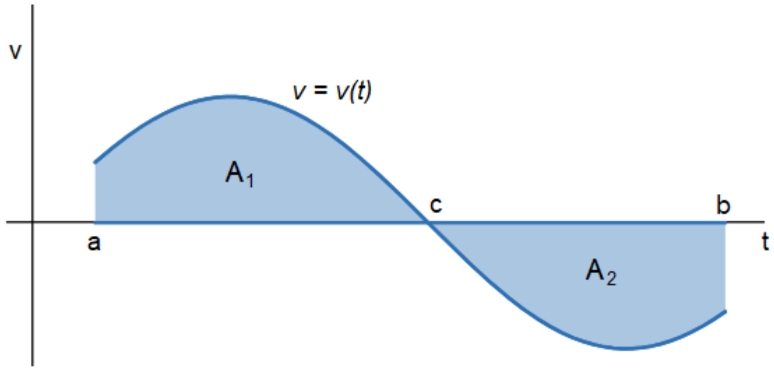
Figura 19 – Esboço do gráfico da função $v(t)$.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Suponhamos, agora, por exemplo, que $v(t) \geq 0$ em $[a, c]$ e $v(t) \leq 0$ em $[c, b]$.

Figura 20 – Gráfico da função $v = v(t)$ em $[a, b]$.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Neste caso, o deslocamento entre os instantes a e b será

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v\,(t)dt = \text{área } A_1 - \text{área } A_2$$

enquanto o espaço percorrido entre estes instantes será

$$\int_a^b |v\,(t)|dt = \int_a^c v\,(t)dt - \int_c^b v\,(t)dt = \text{área } A_1 + \text{área } A_2.$$

Definição 9 (*Comprimento de Gráfico de Função*). Seja $y = f(x)$ com derivada contínua em $[a, b]$ e seja $P: a = x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Indicando por $L(P)$ o comprimento da poligonal de vértices $P_k = \big(x_k, f(x_k)\big), k = 1,2, \cdots, n$, temos

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

onde $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$ é o comprimento do lado de vértices P_{k-1} e P_k. Pelo teorema do valor médio, para cada $k, k = 1,2, \cdots, n$, existe c_k, $x_{k-1} < c_k < x_k$, tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)\Delta x_k, \text{onde } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Segue que

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\ \Delta x_k$$

Daí, para $\text{máx}\,\Delta x_k$ tendendo a zero, $L(P)$ tenderá a $\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$. Nada mais natural, então, do que definir o comprimento do gráfico de f, ou da curva $y = f(x)$ de $x = a$ à $x = b$ por:

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

As formalizações (definições e teoremas relacionados à integral), apresentadas ao longo dessa subseção, foram fundamentais para a resolução dos problemas propostos nos encontros presenciais. Esses conceitos foram aplicados de forma prática, permitindo a compreensão mais profunda de suas aplicações e facilitando o desenvolvimento de soluções para desafios matemáticos complexos. O uso dessas ferramentas teóricas foi essencial para a construção do raciocínio necessário em diversas situações, mostrando a importância da teoria na prática e reforçando o aprendizado de todos os envolvidos nas atividades.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados na construção desta investigação, mostraremos o contexto da pesquisa, destacando os participantes e instrumentos de coleta de dados. Para isso, trazemos inicialmente alguns autores que abordam a Pesquisa Qualitativa.

Para Goldenberg (2004), a Pesquisa Qualitativa se distingue das abordagens quantitativas ao priorizar a compreensão aprofundada de grupos ou organizações, em vez de buscar a representatividade numérica. Os pesquisadores que adotam essa abordagem argumentam contra a ideia de um modelo único de pesquisa, defendendo que as ciências sociais possuem características próprias que exigem metodologias específicas. Além disso, eles rejeitam o modelo positivista aplicado ao estudo da vida social, enfatizando a importância de evitar que crenças e preconceitos do pesquisador influenciem os resultados da pesquisa.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a Pesquisa Qualitativa possui as seguintes características: i) a coleta de dados ocorre no ambiente natural, com o pesquisador atuando como o principal instrumento; ii) a investigação qualitativa tem um caráter descritivo; iii) o processo de pesquisa é tão relevante quanto os resultados ou produtos obtidos; iv) A análise dos dados é realizada de forma indutiva e v) o significado desempenha um papel fundamental na abordagem qualitativa.

Strauss e Corbin (2008) enfatizam que a Pesquisa Qualitativa envolve três elementos essenciais: os dados, que são coletados a partir de várias fontes, como entrevistas e observações; os procedimentos, que consistem na análise e organização desses dados; e a criação de categorias, que visam interpretar e conectar as informações de maneira sistemática e coerente.

A Pesquisa Qualitativa também se empenha em garantir a validade e a confiabilidade dos dados por meio da triangulação (que envolve a utilização de diversas fontes e métodos de coleta de dados) e da reflexividade (que se refere à autoconsciência do pesquisador sobre suas próprias influências, preconceitos e pressupostos), com o objetivo de assegurar a consistência e a imparcialidade dos resultados (Strauss; Corbin, 2008).

Nesse contexto, destacamos a seguir alguns pontos de nossa pesquisa que acreditamos se alinhar a esses aspectos: i) o ambiente natural desta pesquisa foi uma turma da disciplina Cálculo Diferencial e Integral II, na qual o pesquisador foi responsável pela elaboração do material para coleta de dados, assim como pela aplicação, observação, descrição e análise dos dados, sendo essa disciplina o principal instrumento da pesquisa; ii) os dados foram coletados por meio de encontros presenciais realizados durante a disciplina; iii) o foco das atividades desenvolvidas não estava nos resultados finais obtidos pelos alunos, mas no processo de resolução dos problemas de cada aluno, observando seu percurso ao longo da atividade.

A partir das discussões e da análise do desenvolvimento dos alunos durante os encontros, foram reunidos pressupostos relevantes para a reflexão sobre a utilização da metodologia de Resolução de Problemas no ensino do Cálculo Integral, bem como sobre as contribuições das Tecnologias Digitais, especialmente a partir da plataforma DESMOS. Considerando que os alunos já haviam tido contato prévio com o conteúdo abordado, os problemas propostos funcionaram como uma ferramenta para verificar e aprofundar sua compreensão, contribuindo para o desenvolvimento de novos conceitos.

5.1 Descrição do desenvolvimento da pesquisa

Esta proposta de pesquisa foi planejada em cinco fases. A seguir, descrevemos cada uma das fases e as atividades realizadas em cada uma delas.

A primeira fase foi dedicada à revisão da literatura, com o objetivo de contextualizar a questão de pesquisa e definir os objetivos do estudo. Em seguida, realizou-se o levantamento bibliográfico, visando aprofundar a compreensão para a elaboração da proposta e discussão dos dados.

A segunda fase envolveu a identificação dos problemas a serem abordados e o planejamento das atividades para os encontros presenciais. Essas atividades foram aplicadas aos estudantes dos cursos de Matemática e Física da Faculdade de Educação, Ciência e Letras de Iguatu (FECLI), campus da Universidade Estadual do Ceará (UECE), regularmente matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II.

A terceira fase consistiu no levantamento de dados, realizado por meio de quatro encontros presenciais. Dois desses encontros tiveram duração de quatro horas/aula e dois, de duas horas/aula cada, totalizando doze horas/aula. As atividades ocorreram por meio da referida disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, com alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física da Universidade Estadual do Ceará.

Esses estudantes foram selecionados com a intensão de abordar temas que fazem parte do componente curricular da disciplina, aproveitando os conhecimentos prévios da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, promovendo uma compreensão mais profunda do conteúdo abordado.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é ofertado no terceiro semestre de ambos os cursos de licenciatura, Matemática e Física, da respectiva Universidade. Sua oferta ocorre em turnos alternados a cada semestre. Além disso, os cursos dialogam entre si, possibilitando que um único professor seja responsável pela disciplina em ambas as licenciaturas.

A quarta fase consistiu na análise e descrição dos dados. À medida que as atividades eram aplicadas, os dados eram descritos e organizados. A turma de Cálculo Integral II contava com nove alunos matriculados, e todos aceitaram o convite para participar da pesquisa. Os encontros ocorreram de forma presencial nas salas de aula da Universidade, utilizando Data Show e notebooks para apoiar a apresentação dos slides.

Os encontros ocorreram nos dias de aula da referida disciplina, e isso só foi possível graças à parceria e permissão do professor titular, que incentivou a turma a participar das atividades propostas.

A quinta fase consistirá na análise dos dados coletados durante os encontros presenciais.

5.2 Instrumentos de coleta de dados

Para a coleta de dados da pesquisa, utilizamos diversos instrumentos que consideramos alinhados com nossos objetivos. Nesse contexto, realizamos observações, captamos fotografias e gravamos áudios e vídeos para registrar os dados pertinentes.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a coleta de dados fornece dados descritivos robustos e oferecem indícios sobre o que as pessoas valorizam e suas perspectivas de mundo. Além disso, apresentam uma visão histórica do ambiente e do objeto observado, embora não forneçam provas conclusivas, podem, em conjunto com outras fontes de dados, constituir um conjunto crescente de evidências.

A gravação de áudios e vídeos também foram fundamentais para que pudéssemos, após cada momento vivido, coletar e analisar os dados com calma, permitindo expressar resultados e discussões relevantes com base no estudo.

Valorizando a ética na pesquisa, destacamos que todos os participantes foram informados sobre os instrumentos que seriam utilizados ao longo do processo, e que os dados coletados seriam transcritos, sempre preservando suas identidades.

5.3 Descrição dos participantes

Os alunos participantes da pesquisa estavam regularmente matriculados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral II, oferecida nos cursos de Matemática e Física da Faculdade de Educação, Ciência e Letras de Iguatu (FECLI), campus da Universidade Estadual do Ceará (UECE), no turno da manhã. As aulas ocorreram na sala D07, um ambiente arejado, equipado com ventiladores e boa iluminação.

A disciplina é ofertada a partir do terceiro semestre de ambos os cursos, com alternância de períodos. Para se matricular, os alunos devem ter cursado os componentes curriculares de Matemática Elementar I e Cálculo Diferencial e Integral I. Entretanto, é comum que alunos de semestres mais avançados cursem essa disciplina, já que, frequentemente, ela é oferecida sem professor devido à falta de docentes no curso. Para minimizar os casos em que a disciplina é ofertada sem professor, as coordenações têm oferecido a disciplina em conjunto, visando atender a um maior número de alunos.

A turma era composta por nove alunos, sendo duas mulheres e sete homens, todos matriculados no curso diurno. Embora ainda estejam na graduação, alguns alunos já atuam ou atuaram como professores na Educação Básica, ou tiveram experiência docente por meio do Programa de Iniciação à Docência (PIBID) ou na Monitoria de disciplinas na universidade.

Quando a pesquisa teve início na turma em questão, as aulas do período letivo já estavam se aproximando do fim. O objetivo inicial era começar os encontros nas primeiras aulas da disciplina, com o intuito de oferecer uma abordagem introdutória dos conteúdos de Cálculo Integral II. No entanto, a Universidade atravessava um período de greve dos servidores, que teve início em abril e se estendeu até junho daquele ano. Esse contexto resultou em alterações no calendário acadêmico e impactou o planejamento dos docentes.

O ocorrido impactou diretamente nosso planejamento, o que exigiu ajustes nos objetivos inicialmente estabelecidos. Dessa forma, reestabelecemos contato com o professor titular da disciplina e acordamos a realização dos encontros nas aulas finais, permitindo, assim, a avaliação da aprendizagem dos alunos com relação aos conteúdos abordados ao longo da disciplina de Cálculo Integral II.

No capítulo seguinte, apresentamos uma descrição das ações realizadas para o levantamento e registro dos dados da pesquisa.

6 APLICAÇÃO, RESULTADOS E ANÁLISE DA PESQUISA

Neste capítulo, trazemos a descrição de como aconteceu a aplicação do projeto desta pesquisa, uma etapa muito importante para respondermos à questão norteadora. Mas, antes, também trazemos uma análise dos resultados dos encontros e o percurso planejado.

6.1 A coleta de dados

A pesquisa de campo, também conhecida como coleta de dados, foi realizada no segundo semestre de 2024 com uma turma da disciplina Cálculo Diferencial e Integral II. Os alunos participantes eram dos cursos de Licenciatura Plena em Matemática e Física da Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu (FECLI), campus da Universidade Estadual do Ceará (UECE), e as aulas ocorreram no turno da manhã.

Após consolidar o planejamento dos encontros em diálogo com o professor orientador do mestrado, fomos à referida instituição de ensino onde realizaríamos nossa pesquisa. O nosso primeiro contato foi com o professor da disciplina de Cálculo Integral II e, em seguida, com os coordenadores de cada curso. Neste momento, apresentamos a nossa pesquisa e quais métodos e procedimentos iríamos utilizar em cada encontro. Com a permissão concedida por meio de um termo de autorização para a realização da pesquisa, acordado entre orientador e coordenadores dos cursos, levamos a proposta aos licenciandos que participariam da pesquisa.

Ao conversar com os estudantes e eles aceitarem participar da pesquisa, solicitamos a assinatura de um termo onde esclarecemos o objetivo da pesquisa e os meios de coleta e análise de dados. Vale ressaltar que os modelos desses documentos se encontram nos anexos desta pesquisa.

Diante disso, a pesquisa de campo aconteceu em quatro encontros, sendo dois deles com duração de quatro horas/aulas e dois com duas horas/aula de duração cada, totalizando doze horas/aula. Além disso, estabelecemos um acordo com o professor da disciplina para incentivar a participação dos estudantes na pesquisa. De acordo com esse entendimento, os estudantes que se engajarem nas atividades propostas durante os encontros receberam uma pontuação adicional. Essa pontuação serviu como uma contrapartida pela participação deles, reconhecendo o valor de suas contribuições para o desenvolvimento do estudo. Essa colaboração visa não apenas enriquecer a pesquisa, mas também proporcionar aos estudantes uma oportunidade de aprimorar seu desempenho acadêmico.

Durante a descrição a seguir, apresentaremos alguns diálogos, ou seja, as falas dos alunos e do Professor-Pesquisador. Para garantir uma melhor organização e preservar a identidade dos participantes, adotamos as seguintes convenções: E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 e E9 serão usados para identificar os alunos que participaram dos diálogos; e P será utilizado para se referir à Professor-Pesquisador.

Esse procedimento objetiva garantir e resguardar a identidade dos participantes da pesquisa. Ressaltamos que essa nomenclatura será empregada na redação do texto sobre todos os encontros, independentemente das equipes a que os estudantes pertençam.

6.2 Descrição dos encontros e análise dos registros produzidos pelos estudantes

Para efetivação das atividades os estudantes foram organizados em pequenos grupos de forma espontânea desde o início e permaneceram até o último encontro. Vale destacar que todas as atividades foram realizadas em grupos, favorecendo o diálogo e a cooperação nas discussões entre eles na construção do conhecimento sempre utilizando a plataforma DESMOS. Abaixo traremos o Quadro 1 que mostra a sequência de atividades planejadas para serem desenvolvidas nos encontros.

Quadro 4 – Planejamento dos encontros a serem realizados pelo professor-pesquisador.

Data	Horas/aula	Descrição do conteúdo abordado
18/09/2024	4	1º momento (2 h/a) – Apresentação da pesquisa e introdução ao ambiente virtual da Plataforma DESMOS. 2º momento (2 h/a) – Aplicação dos problemas 1 e 2 sobre integrais definidas.
19/09/2024	2	Aplicação do problema 3 sobre Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).
26/09/2024	2	Aplicação do problema 4 sobre Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).
02/10/2024	4	1º momento (2 h/a) - Aplicação do problema 5 sobre Técnicas de Integração; 2º momento (2 h/a) – Retomada dos objetivos da pesquisa e aplicação de questionários sobre o uso do ambiente virtual da Plataforma DESMOS e sobre a metodologia da Resolução de Problemas.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Contudo, durante a pesquisa de campo, foi necessário ajustar o planejamento da aplicação da pesquisa devido a fatores como o tempo de realização das atividades pelos alunos. Assim, reorganizamos a distribuição dos problemas ao longo da execução da pesquisa.

A seguir apresentaremos a descrição de cada encontro.

6.2.1 Descrição do primeiro encontro

O primeiro encontro ocorreu no dia 18 de setembro de 2024, na sala D7 da instituição de ensino. Dos 9 alunos matriculados, apenas 7 compareceram neste dia. A aula iniciou às 7h40min da manhã, finalizando às 11h com uma pausa de 20 minutos de intervalo.

O objetivo desse primeiro momento era a apresentação da pesquisa, onde destacamos a utilização da Metodologia de Resolução de Problemas alinhada ao ambiente virtual da Plataforma DESMOS. Além disso, não abordamos diretamente a formalização de certos conceitos do Cálculo Integral II, pois o foco foi utilizar a metodologia para desenvolver os conceitos fundamentais necessários à compreensão dos métodos de resolução de problemas sobre integrais. Assim, o aluno deve aplicar seus conhecimentos prévios para se envolver ativamente na resolução de problemas, o que permite que ele aprenda não apenas o conteúdo que o professor deseja, mas também outros conceitos inesperados (Allevato; Vieira, 2016).

Nesse contexto, os estudantes foram incentivados a não se limitar a tópicos específicos na resolução de problemas, tendo a liberdade de escolher seus próprios caminhos na construção das soluções. Durante o encontro, houve uma recepção aos participantes, onde agradecemos pela participação e realizamos esclarecimentos sobre o termo que foi entregue para leitura e assinatura.

Em seguida, iniciamos a apresentação de alguns tópicos da pesquisa, nos quais os estudantes foram informados sobre a gravação e os objetivos do estudo, com ênfase inicial na temática do Cálculo Integral e sua importância para o curso de Licenciatura em Matemática e Física.

Findadas as dúvidas e considerações iniciais, passamos à apresentação da Metodologia de Resolução de Problemas aos participantes da pesquisa. Ao serem questionados sobre o conhecimento e a compreensão dessa metodologia, apenas dois estudantes relataram ter lido algo a respeito, enquanto os demais afirmaram não a conhecer. Diante dessa situação, apresentamos os objetivos da metodologia e destacamos alguns aspectos sobre seu desenvolvimento, além de como ela é abordada em documentos oficiais que regulam a Educação Básica no estado do Ceará.

Na oportunidade, destacamos o roteiro que orienta a resolução de problemas, desenvolvido por Onuchic e Allevato (2011, 2014), que delineia nove etapas para essa prática, com ênfase na abordagem de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, sendo que cada um dos passos foi explicado brevemente aos estudantes.

Figura 21 – Apresentação da pesquisa.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Após descrever a metodologia que será aplicada na pesquisa de campo, justifiquei a escolha do Cálculo Diferencial e Integral para a pesquisa, ressaltando as dificuldades que os estudantes enfrentam na disciplina, particularmente na compreensão de conceitos abstratos e complexos envolvendo a integral, que requerem uma mudança significativa na forma de abordar problemas matemáticos. Além disso, discutimos sobre a abordagem excessiva focada na resolução de exercícios nos livros didáticos que pode levar os alunos a se focarem apenas na aplicação de fórmulas e técnicas, em vez de desenvolverem uma compreensão profunda dos conceitos estudados.

Em seguida, começamos a apresentação do *software* DESMOS e suas ferramentas básicas, incluindo a calculadora gráfica, a calculadora científica, a calculadora para operações básicas e raiz quadrada, a calculadora matricial e o ambiente para construções geométricas. Esses recursos foram explorados rapidamente pelos estudantes, permitindo que se familiarizassem com o *software* dentro do tempo disponível.

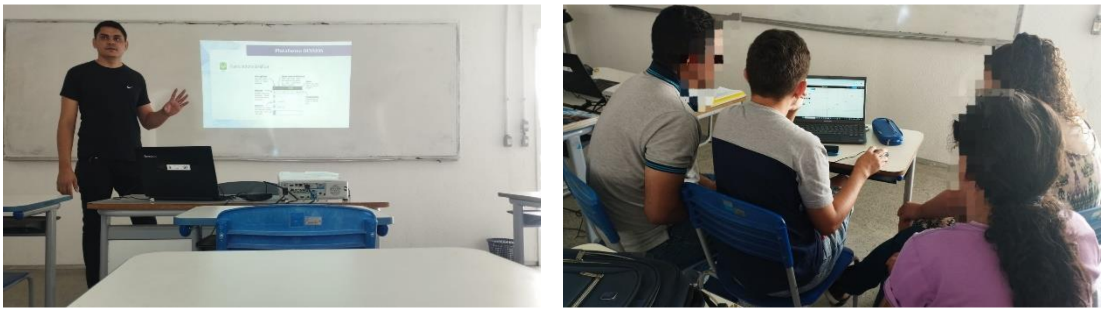
Quando questionados se tinham algum conhecimento sobre o *software*, apenas um aluno respondeu que ***sim***. Nesse contexto, reforçamos que, com as ferramentas disponíveis, é possível representar graficamente funções e conjuntos de dados, resolver equações e inequações com visualização dos resultados, investigar transformações matemáticas e realizar análises de regressão e estatísticas.

Figura 22 – Apresentação do *software* DESMOS.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Para aprofundar um pouco mais no *software*, realizamos algumas construções básicas para que os estudantes se familiarizassem com o ambiente e alguns comandos fundamentais. Em seguida, propomos atividades relacionadas aos assuntos abordados em outras disciplinas do curso, incentivando os estudantes a resolverem utilizando a calculadora gráfica do DESMOS.

Figura 23 – Acessando o ambiente DESMOS.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A cada atividade realizada, os estudantes demonstravam entusiasmo e atenção às orientações fornecidas. As principais dúvidas surgiram em relação à inserção de certos dados e comandos dentro do ambiente.

Depois de fazer alguns comentários gerais sobre as atividades iniciais, começamos a execução das atividades planejadas. Solicitamos que os grupos acessassem a página do aluno no ambiente virtual *Desmos Classroom* Activities para inserir o código de acesso a atividade. A proposta inicial era formar três grupos, cada um com três estudantes. No entanto, no dia da aplicação dos problemas, apenas sete alunos compareceram à aula. Dessa forma, os alunos foram organizados em dois grupos: um com quatro estudantes e outro com três. Os grupos foram designados como GRUPO 1 e GRUPO 2.

Ao inserir o código da primeira atividade, os grupos eram direcionados ao primeiro problema. Confere-se a seguir o problema.

Problema 01

Uma partícula se move ao longo de uma reta tal que sua velocidade no tempo t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medido em metros por segundo).

a) Encontre o deslocamento da partícula durante o período $1 \leq t \leq 4$,

b) Determine a distância percorrida durante este período.

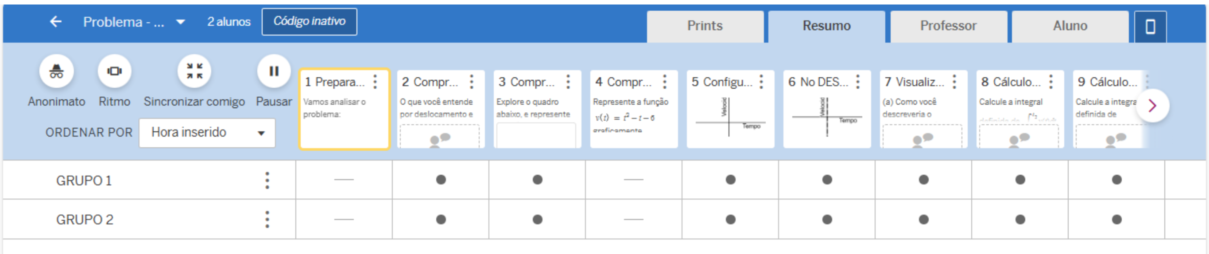
A escolha do problema sobre o movimento de uma partícula é justificada pela sua relevância conceitual e pela integração entre Matemática e Física, abordando o cálculo da integral definida para determinar deslocamento e distância percorrida. Essa abordagem estimula o desenvolvimento de habilidades críticas nos alunos, pois exige análise e interpretação de funções, além de permitir discussões sobre a diferença entre deslocamento e distância.

O contexto realista do problema torna o aprendizado mais acessível e motivador, enquanto a sua aplicação em sala de aula pode proporcionar discussões sobre o uso da metodologia de ensino em foco. Assim, o problema alinha-se perfeitamente aos objetivos da nossa pesquisa de mestrado.

O acesso ao ambiente virtual *Desmos Classroom Activities* permite que os alunos resolvam problemas em etapas. Para isso, o problema foi dividido em 11 telas de atividades, o que facilita a compreensão e formalização do conteúdo estudado. Além disso, essa plataforma possibilita explorar os conhecimentos prévios dos estudantes, oferece ferramentas para a construção do gráfico da função, permite anotações e a troca de respostas entre grupos, favorecendo a colaboração e o aprendizado coletivo.

Todas as ações realizadas pelos grupos eram acompanhadas pelo professor pesquisador através do painel de controle do professor. Neste ambiente, o professor é capaz de ver o progresso e o ritmo dos alunos de forma individualizada, sem a necessidade de percorrer a sala de aula.

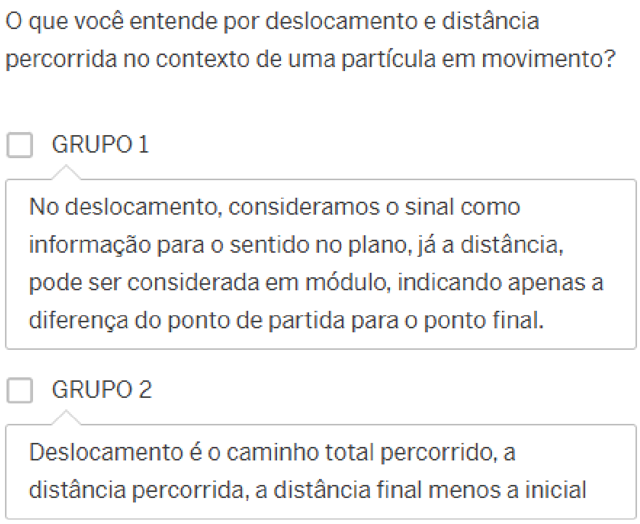
Figura 24 – Acompanhamento do Problema 1.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A primeira tela da atividade continha o problema proposto, onde solicitava a leitura atenciosa do problema. Na segunda tela, os estudantes foram questionados sobre o que eles compreendiam sobre os conceitos de distância percorrida e deslocamento. As respostas foram registradas no ambiente, como vemos a seguir.

Figura 25 – Tela 2 do Problema 1.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 aborda o deslocamento em relação ao sinal, o que é importante, pois o deslocamento é uma grandeza vetorial que considera a direção e o sentido. Além disso, destaca que a distância é medida em módulo, o que é correto, já que a distância é uma grandeza escalar que não leva em conta a direção. Já o GRUPO 2 se refere a “caminho total percorrido”, que é uma boa definição para a distância. A fala sobre “distância final menos a inicial”, o que, no entanto, precisa de ajustes. O deslocamento é a diferença entre a posição final e a inicial, não a distância percorrida. O GRUPO 2 confunde deslocamento com a distância, afirmando que deslocamento é “o caminho total percorrido”, quando, na verdade, é a diferença entre as posições inicial e final.

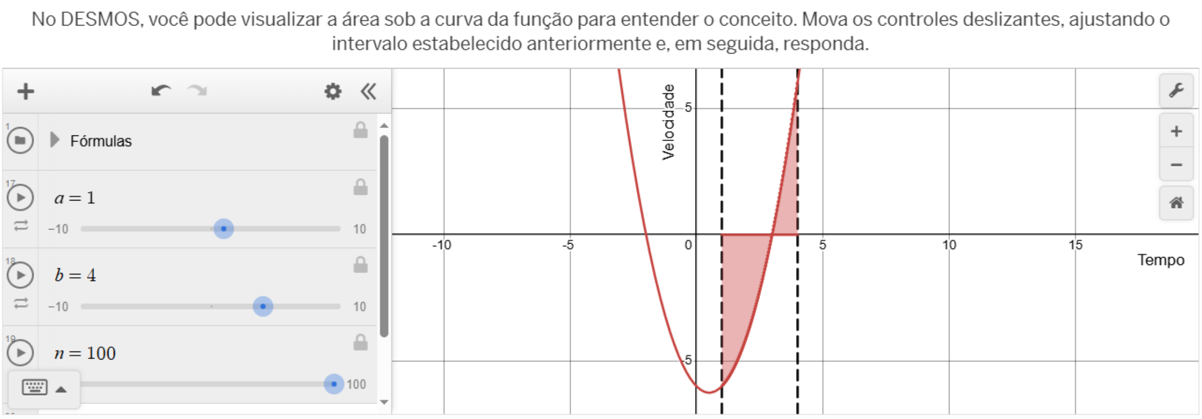
Na terceira tela da atividade, os grupos foram provocados a representar as respostas da segunda tela através de um desenho. Para isso, foi disponibilizado um quadro que possibilita a criação de desenhos através de uma caneta digital, inserir imagens, textos e informações gráficas de uma função. A seguir, podemos observar as respostas de ambos os grupos.

Figura 26 – Tela 3 do Problema 1.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na quarta tela, solicitamos a representação gráfica da função, que foi realizada de forma satisfatória pelos grupos na quinta tela da atividade. Na sexta tela, alguns comandos já estavam pré-definidos e os grupos foram orientados a mover os controles deslizantes *a*, *b* e *n* para que fosse possível visualizar a área sob o gráfico da função.

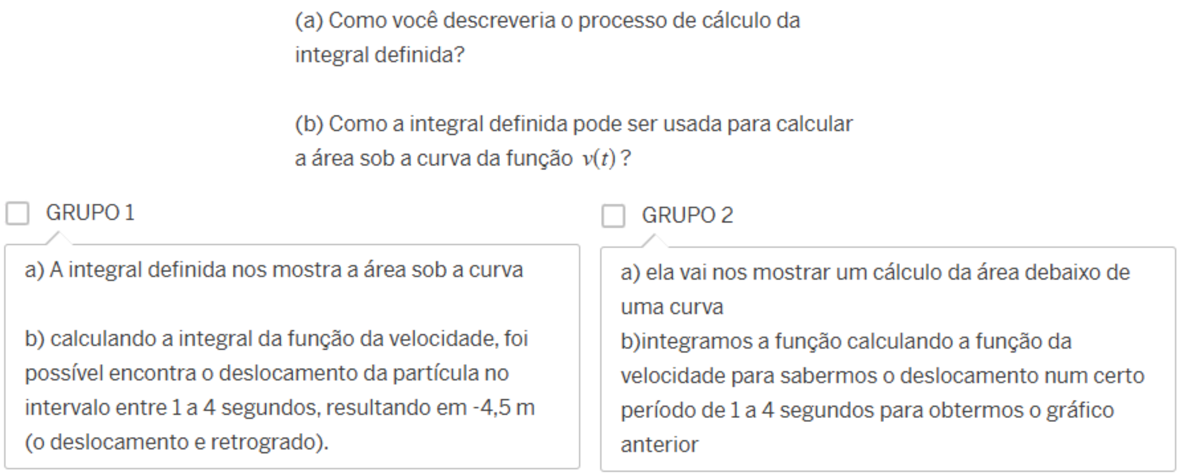
Figura 27 – Tela 4 do Problema 1.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na sétima tela, questionamos o que os grupos compreendiam sobre a integral definida e como ela pode ser utilizada para o cálculo da área sob o gráfico de uma função. O objetivo da pergunta era verificar a compreensão dos estudantes acerca de um conteúdo já estudado por eles anteriormente.

Figura 28 – Tela 7 do Problema 1.



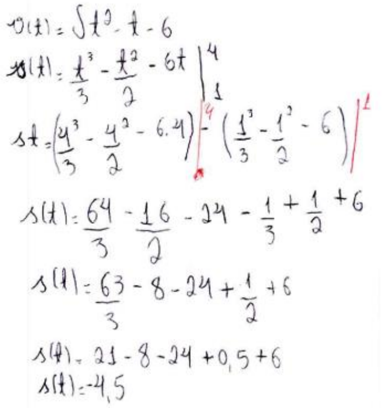
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 ao item (a) indica que a integral definida “nos mostra a área sob a curva”, o que é uma descrição correta e concisa, mas um pouco vaga. O mesmo ocorre no GRUPO 2. Porém, ambas poderiam ser melhoradas ao incluir que a integral definida é o limite da soma de áreas de retângulos sob a curva à medida que o número de retângulos aumenta, relacionando também com a soma de Riemann. No item (b), a inclusão do resultado (deslocamento retrógrado) pelo GRUPO 1 é positiva, pois demonstra uma compreensão prática do conceito. No GRUPO 2, a resposta fala sobre integrar a função para “sabermos o deslocamento num certo período”, mas a formulação é menos clara.

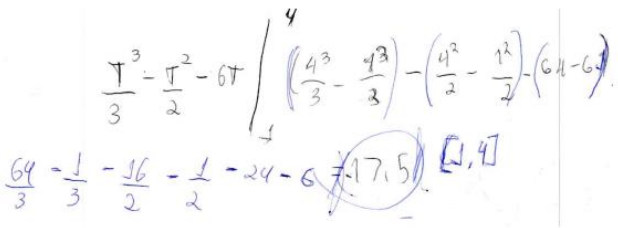
Na oitava tela, os estudantes realizaram o cálculo da integral da função $v(t) = t^2 - t - 6$, onde $1 \leq t \leq 4$, além disso, questionamos sobre qual seria a interpretação dessa integral em termos de deslocamento da partícula. A seguir, podemos observar as respostas apresentadas por cada grupo.

Fonte 29 – Resolução escrita do Problema 1.

GRUPO 1



GRUPO 2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resolução apresentada pelo GRUPO 1 está correta, pois corresponde ao resultado exato da integral calculada. No entanto, os intervalos de integração escritos em vermelhos estão colocados de forma incorreta, uma vez que eles já foram empregados na função na linha anterior. Já a resolução do GRUPO 2 está incorreta. O valor não corresponde ao resultado da integral e não reflete o deslocamento da partícula. O erro pode ter ocorrido devido a um cálculo errado na operação com números fracionários ou uma interpretação inadequada do problema. A falta de organização na resposta do grupo pode ter contribuído para o erro na resposta.

Nesse momento, observamos que nenhum dos grupos fez a interpretação da integral relacionada ao deslocamento da partícula. Assim, o professor-pesquisador aproveitou para incentivar os estudantes, enfatizando que

> ***P:*** *a integral definida* $\int_1^4 v(t)\, dt$ *fornece o deslocamento da partícula no intervalo de tempo de* $t = 1$ *a* $t = 4$*. Um resultado negativo, como* $-4{,}5\ m$*, significa que a partícula se moveu em direção oposta ao sentido positivo, sugerindo que sua posição diminuiu nesse intervalo.*

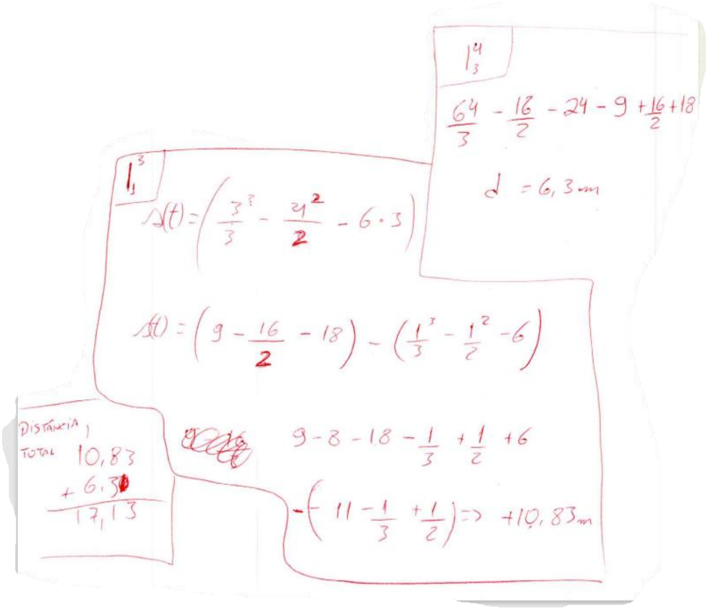
Após essa intervenção, os estudantes refletiram sobre a direção do movimento, como observamos nas falas do participante E5 e E9.

E5: *no deslocamento faz sentindo levar em consideração o sinal porque ele indica qual a direção e a distância não têm direção...*

E9: *a gente tem que considerar o sinal porque tipo se o ponto tá aqui né, se a gente colocar o deslocamento e posição positivo ele está indo para lá, no caso é negativo o movimento dele vai ser retrógrado.*

Na nona tela solicitamos o cálculo da integral definida $\int_1^4 |v(t)|\ dt$ e realizassem a interpretação dessa integral. O GRUPO 1 apresentou a solução abaixo (Figura 30) como resposta do problema, porém o resultado encontrado está incorreto.

Figura 30 – Resolução escrita do GRUPO 1 para o Problema 1.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Durante as discussões no GRUPO 1 ficou evidente que os estudantes não compreenderam o que é a integral do módulo dessa função e o que ela representa.

E5: *a gente diminui do quatro menos o três (se referindo a diferença entre os intervalos de integração) que a gente achou aqui. A gente achou o que no quatro? Nós achamos negativo? Há tá certo, é negativo? Tá certo isso? Eu não confio no meu potencial não, viu querido?.*

E9: *Mas, por que a gente tem que garantir se ele vai está no módulo, então vai ser o módulo...*

E5: *Não, o módulo é o segundo, de três até quatro...*

E9: *então assim, o sinal em si, vai papocar ...*

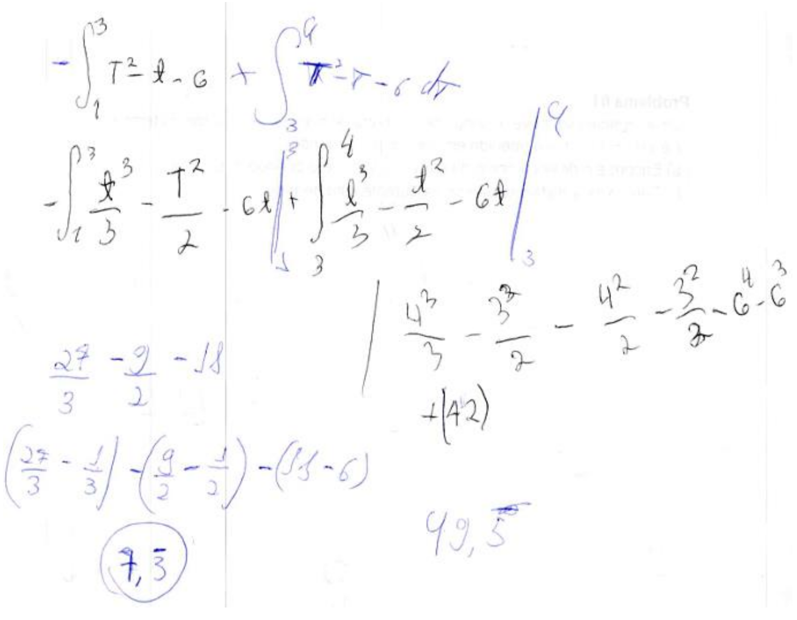
E5: *Vai papocar por que é a distância, não existe distância com esse sinal (se referindo o ao sinal negativo) é positiva por que é consequência ...*

Partindo dessas discussões, percebemos que a fala da estudante E5 reflete uma insegurança sobre a validade dos resultados. A dúvida sobre se o valor encontrado é negativo indica um entendimento de que, ao integrar a função de velocidade, o sinal pode afetar a interpretação física do resultado, por exemplo, se estamos lidando com distância, que deve ser positiva. Além disso, a insistência na utilização do módulo da função sugere uma compreensão clara de que a distância percorrida não pode ser negativa, independentemente da direção do movimento.

O uso da palavra “papocar” indica uma linguagem informal e dinâmica, mas também mostra um entendimento de que, em contextos físicos, o sinal negativo deve ser desconsiderado para o cálculo de distância. Destacamos também, o raciocínio sobre a diferença entre os intervalos de integração e a ênfase em “três até quatro” reforçam a necessidade de atenção aos limites, garantindo que todos os valores relevantes para a integral sejam considerados, mesmo que a função possa ser negativa em certos intervalos.

A resolução apresentada pelo GRUPO 2 estava incorreta. Além disso, o grupo evidenciou falta de organização em sua resposta, o que dificultou a compreensão do resultado final. O descuido na notação matemática também contribuiu para a confusão, especialmente em relação ao problema envolvendo a integral definida da função $\int_1^4 |v(t)|\, dt$, como podemos observar na figura abaixo.

Figura 31 – Resolução escrita do GRUPO 2 para o Problema 1.



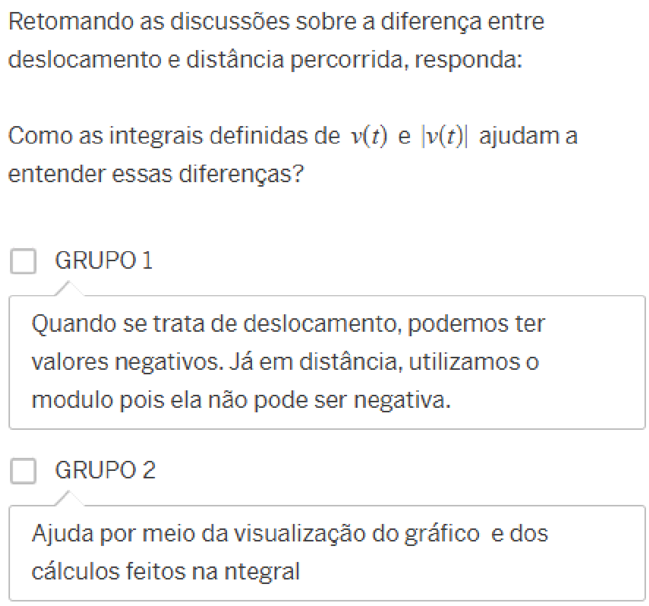
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Em seguida, o professor/pesquisador realizou uma intervenção esclarecedora, revisitando o gráfico da função $v(t) = t^2 - t - 6$ que os estudantes construíram anteriormente. Ele destacou a importância do uso do módulo ao calcular a integral no item (b) do Problema 1. Ao analisarem o gráfico, os alunos perceberam que, no intervalo de 1 a 3, a área sob a curva se localizava abaixo do eixo x. Isso indicou a necessidade de considerar o sinal negativo nesse intervalo. O professor-pesquisador enfatizou que, para obter a distância total percorrida, é crucial integrar o módulo da função, garantindo que a área negativa seja convertida em positiva, refletindo assim a verdadeira quantidade de deslocamento.

> ***P:*** *Aqui é negativo por que essa região está abaixo do eixo x, então indicamos com o sinal negativo, entende isso?*
>
> ***E9:*** *Então, o resultado vai da negativo?*
>
> ***P:*** *Não necessariamente. Mas, você tem que calcular a integral de 1 a 3 menos a função.*
>
> ***E4:*** *No caso o valor da função que vai ficar positivo.*
>
> ***E9:*** *Ah, entendi.*

Seguindo para as discussões finais do problema, na décima tela os estudantes foram questionados sobre a diferença entre deslocamento e distância percorrida, retomando os cálculos das integrais definidas de $v(t)$ e $|v(t)|$. As repostas foram inseridas no ambiente virtual do DESMOS.

Figura 32 – Tela 10 do Problema 1.

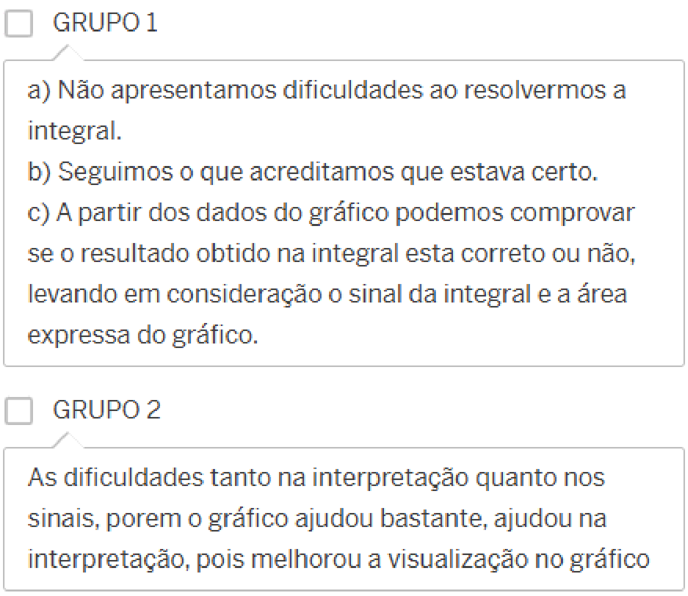


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 é direta e aponta corretamente que o deslocamento pode assumir valores negativos, enquanto a distância percorrida deve ser sempre positiva. Enquanto o GRUPO 2 menciona a importância da visualização gráfica e dos cálculos, o que é essencial para entender as diferenças entre as duas integrais. Assim, ambas as respostas abordam aspectos importantes, mas poderiam ser aprimoradas com explicações mais detalhadas e conexões entre os conceitos estudados.

Chegando ao fim do primeiro encontro, o professor-pesquisador direcionou os grupos a responderem a última tela desse problema. As seguintes questões foram apontadas: “Quais dificuldades você encontrou ao calcular as integrais? Como você resolveu essas dificuldades? Como a área sombreada sob a curva ajuda a entender o resultado da integral definida?”. Com esses questionamentos, o professor-pesquisador buscou desenvolver uma compreensão mais profunda das integrais definidas e suas interpretações geométricas, ao mesmo tempo em que se identificam e superam as dificuldades enfrentadas durante o processo de cálculo.

Figura 33 – Tela 11 do Problema 1.



GRUPO 1

a) Não apresentamos dificuldades ao resolvermos a integral.
b) Seguimos o que acreditamos que estava certo.
c) A partir dos dados do gráfico podemos comprovar se o resultado obtido na integral esta correto ou não, levando em consideração o sinal da integral e a área expressa do gráfico.

GRUPO 2

As dificuldades tanto na interpretação quanto nos sinais, porem o gráfico ajudou bastante, ajudou na interpretação, pois melhorou a visualização no gráfico

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 indica que o grupo não enfrentou dificuldades, o que pode sugerir confiança na abordagem utilizada. No entanto, essa afirmação pode levantar questões sobre a profundidade do entendimento dos estudantes, já que dificuldades são comuns em temas complexos como integrais. Já o GRUPO 2 reconhece que houve dificuldades, especialmente na interpretação e nos sinais. A menção específica a esses desafios é importante, pois oferece uma visão mais realista e comum do processo de aprendizado.

Neste momento, não dispúnhamos de tempo suficiente para mais discussões, o que tornou necessário encerrar o primeiro encontro. No entanto, o professor/pesquisador informou que, no próximo encontro, retomaremos o problema para chegarmos a algumas conclusões finais.

6.2.2 Descrição do segundo encontro

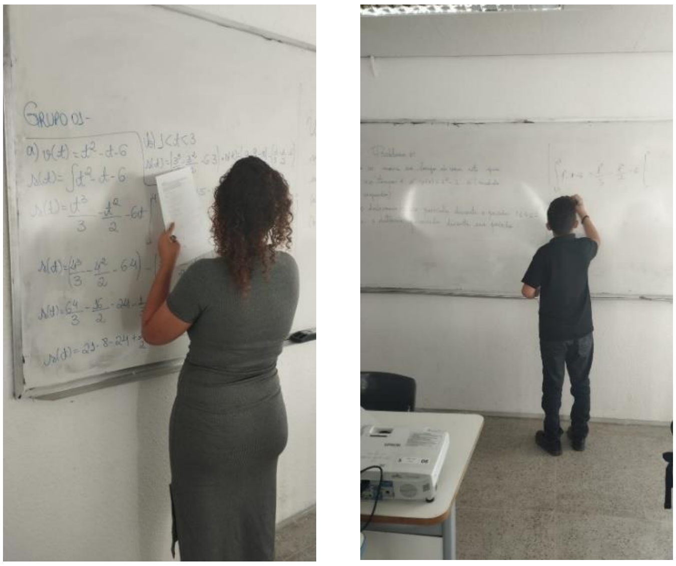
Esse encontro ocorreu no dia 19 de setembro de 2024, na sala D7 da instituição de ensino. Estiveram presentes apenas 6 estudantes neste segundo encontro. A aula iniciou às 7h48min da manhã, finalizando às 9h7min.

Começamos o encontro e retomamos o problema trabalhado anteriormente para as considerações finais. O professor-pesquisador apresentou as respostas das últimas perguntas e, em seguida, destacou alguns pontos observados no último encontro.

A proposta de dividir o problema em etapas (telas de atividade) transformou a forma como os estudantes abordaram a resolução. Alinhada à metodologia de Resolução de Problemas, cada etapa trouxe questionamentos relevantes sobre o estudo da integral definida, afastando-se do método tradicional, que se baseia apenas na manipulação algébrica. Esse formato permitiu observar um cuidado e uma preocupação nas respostas apresentadas, mesmo que os estudantes tivessem dúvidas sobre sua correção. As discussões e as opiniões divergentes dentro do grupo contribuíram significativamente para a compreensão do assunto em estudo.

Após o momento de reflexão do professor/pesquisador, foi solicitado que um membro de cada grupo apresentasse a solução do problema no quadro branco. O pedido foi prontamente atendido. O aluno E9, do GRUPO 1, e o aluno E2, do GRUPO 2, expuseram as respostas de seus respectivos grupos. Pedimos que eles apenas reproduzissem de modo fiel as respostas feitas no encontro anterior.

Figura 34 – Apresentação das respostas do Problema 1 no quadro.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Em seguida, o professor-pesquisador pediu que eles comparassem as respostas dos respectivos grupos. Os estudantes destacaram a diferença no resultado final, no qual o GRUPO 1 obteve o resultado de – 4,5 metros e o GRUPO 2, - 17,5 metros em relação ao item (a) do problema que pede o deslocamento da partícula. O professor/pesquisador destacou o resultado do GRUPO 2 e enfatizou sobre quais foram os possíveis erros cometidos na resolução do problema.

> ***P:*** *a integral da função está realizada de forma correta, ou seja, vocês conseguiram apresentar uma primitiva da função. No entanto, ao aplicar os intervalos de integração a soma e subtração dos números racionais não aconteceu da forma certa. A organização na resolução pode ter prejudicado o resultado final. É muito importante termos cuidados com a notação e modo como organizamos as contas na hora de resolver um problema...*

Já em relação ao item (b), ambos os grupos apresentaram respostas incorretas. Novamente, o professor/pesquisador ressaltou alguns pontos na resolução de ambos os grupos.

> ***P:*** *O GRUPO 1 obteve 17,13 metros e o GRUPO 2, 49,5 metros em relação a distância percorrida. Só que ambas as respostas estão incorretas. Acredito que vocês não compreenderam ou não se atentaram ao uso correto do módulo ao integrar essa função. O GRUPO 1 não usou a notação de integral e nem de módulo, apenas acrescentou o sinal de menos no final, após integrar a função e calcular os intervalos de integração. Já o GRUPO 2, colocou o sinal antes da primeira integral, mas também não indicou o uso do módulo. Depois vocês integraram a função, porém deixaram o símbolo da integral, isso ficou um pouco confuso. Novamente, chamo atenção para o cuidado com a notação matemática, isso também é importante na resolução problema...*

Após essas falas, os estudantes ficaram pensativos e em silêncio. Então, o professor-pesquisador tentou motivá-los, parabenizando-os pelo empenho na resolução do problema e enfatizou que, apesar de os resultados estarem diferentes os grupos realizaram discussões pertinentes, sobre o uso da integral definida dentro do problema e como ela contribuiu para a compreensão dos conceitos de deslocamento e distância percorrida de uma partícula.

Imediatamente, apresentamos o segundo problema para a turma. Pedimos que todos voltassem aos grupos formados no último encontro e acessassem o ambiente virtual de atividades do DESMOS. Em seguida, devem inserir o novo código de acesso para visualizar o segundo problema, conforme detalhado abaixo.

Problema 02

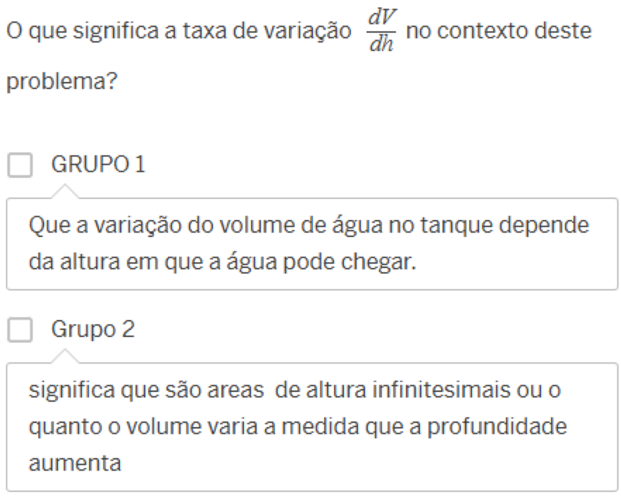
O volume de água em um tanque é de V centímetros cúbicos quando a profundidade da água é de h metros. Se a taxa de variação de V em relação a h é $\pi\,(4h^2 + 12h + 9)$, determine o volume de água no tanque quando a profundidade é de 3 m.

Justificamos, escolha do problema sobre o volume de água em um tanque mediante sua relevância na compreensão de conceitos fundamentais de Cálculo, como a taxa de variação e a integral definida. Ao explorar a relação entre volume e profundidade, os alunos podem aplicar a teoria estudada na disciplina a um contexto prático, facilitando a interpretação da derivada como taxa de variação. Esse exemplo concreto torna o conteúdo mais acessível e motivador, além de promover o desenvolvimento do pensamento crítico.

Diante disso, os grupos acessaram o ambiente virtual para trabalhar no problema 2, que estava dividido em 10 telas de atividades. À medida que avançavam pelas telas, cada uma apresentava uma pergunta que ajudava a construir o conhecimento necessário para a resolução do problema. Essa divisão permitiu que os alunos desenvolvessem uma compreensão progressiva, preparando-os melhor para abordar a solução final. Em seguida, o professor-pesquisador distribuiu uma folha A4 com o problema proposto, permitindo que os estudantes fizessem anotações pertinentes e relevantes para a pesquisa.

Na primeira tela apresentamos o problema. Nesse momento, os estudantes realizam a leitura atenciosa do problema. Em seguida, eles avançam e na segunda tela surge e primeira pergunta “O que significa a taxa de variação $\frac{dV}{dh}$ no contexto deste problema?”. As respostas foram inseridas no ambiente virtual e são apresentadas a seguir.

Figura 35 – Tela 2 do Problema 2.


O que significa a taxa de variação $\frac{dV}{dh}$ no contexto deste problema?

GRUPO 1

Que a variação do volume de água no tanque depende da altura em que a água pode chegar.

Grupo 2

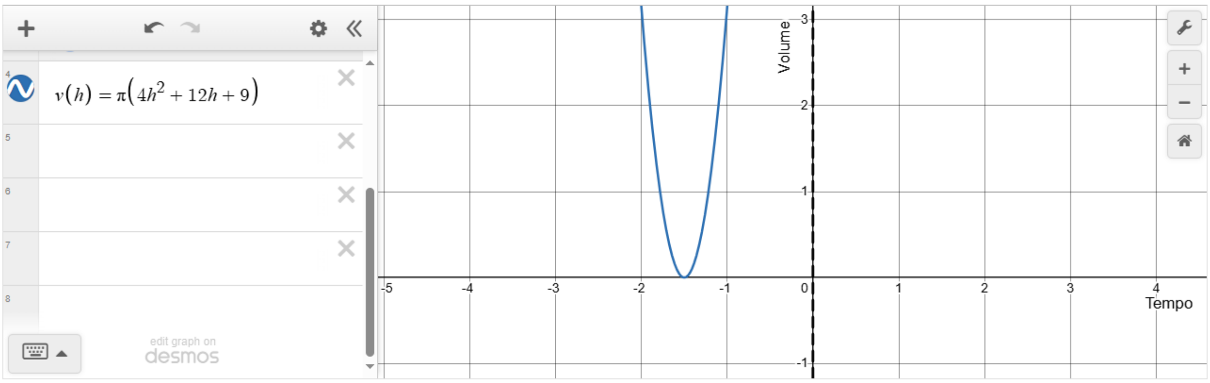
significa que são areas de altura infinitesimais ou o quanto o volume varia a medida que a profundidade aumenta

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 identifica corretamente que a taxa de variação está relacionada à altura da água. Além disso, indica uma compreensão de que existe uma relação entre a profundidade e o volume. Enquanto isso, a resposta do GRUPO 2 é mais técnica e aborda a ideia de variação infinitesimal, o que pode demonstrar um entendimento mais profundo do cálculo integral, ou seja, a relação é especificamente entre a variação do volume e a profundidade.

Na terceira tela, solicitamos a construção gráfica da função com auxílio da calculadora gráfica do DESMOS. Essa construção foi realizada na quarta tela da atividade, uma vez que o gráfico permite uma visualização clara da relação entre a profundidade h e a taxa de variação do volume $\frac{dV}{dh}$. Isso pode ajudar os alunos a entenderem como mudanças na profundidade impactam o volume de água no tanque.

Figura 36 – Tela 4 do Problema 2.

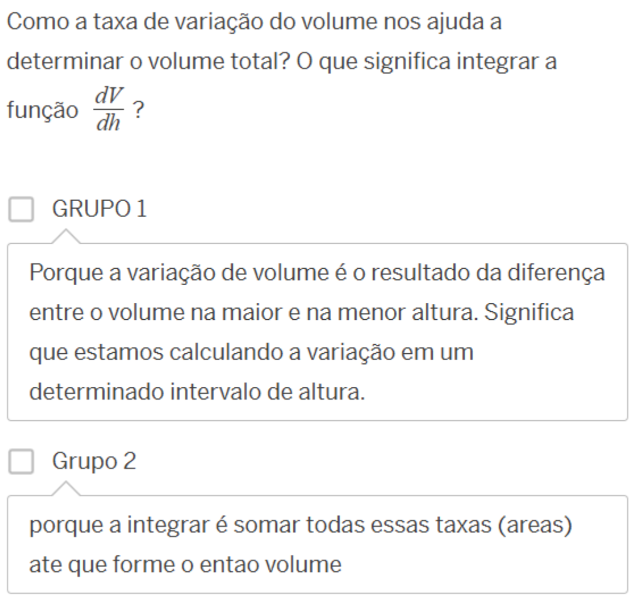


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Observamos que as perguntas da quinta página eram semelhantes às propostas na segunda tela da atividade. Para evitar que os alunos respondessem à mesma pergunta novamente, utilizamos a função “ocultar tela” disponível no ambiente do professor. Assim, os estudantes puderam continuar respondendo às demais perguntas sem interrupções.

Com o intuito de avaliar a compreensão dos alunos sobre como a integral está relacionada com a acumulação de quantidades, propomos na sexta tela a seguinte pergunta: “Como a taxa de variação do volume nos ajuda a determinar o volume total? O que significa integrar a função $\frac{dV}{dh}$?”. Assim, ao conectar a taxa de variação com o volume total, os alunos são incentivados a pensar de maneira mais profunda sobre o conceito de integração.

Figura 37 – Tela 6 do Problema 2.

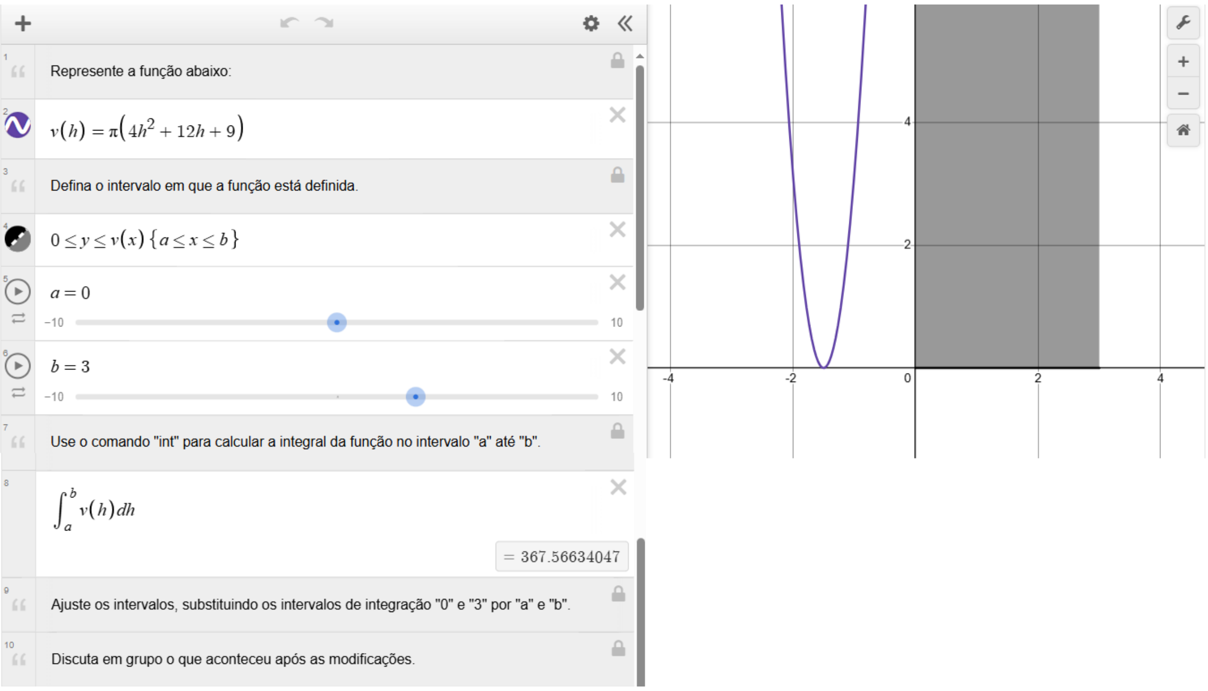


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 menciona que a variação de volume é a diferença entre o volume na maior e na menor altura, o que é uma maneira válida de pensar sobre o problema. No entanto, a explicação poderia ser mais precisa ao mencionar que a taxa de variação $\frac{dV}{dh}$ descreve como o volume muda à medida que a profundidade muda. Enquanto o GRUPO 2 foca na ideia de que integrar significa somar todas as taxas, ou seja, acumular as pequenas variações de volume ao longo da profundidade. Isso está correto, pois a integral de $\frac{dV}{dh}$ em relação a h fornece o volume total, acumulando todas as mudanças de volume ao longo do intervalo de profundidade considerado. A menção de “áreas” pode ser um pouco confusa, já que a integração é frequentemente associada à soma de áreas sob a curva, mas aqui está relacionada ao volume.

Na sétima tela, intitulada “Visualizando a Integral”, pedimos aos grupos que fizessem a construção gráfica da função $v(h)$ na calculadora gráfica do DESMOS. Dentro do ambiente da calculadora gráfica, é possível inserir, além das expressões, anotações de texto, tabelas e imagens. Nesse contexto, inserimos algumas notas de texto, orientando os grupos a executar alguns comandos na calculadora gráfica. Isso possibilitou a construção do gráfico da função, a definição dos intervalos, o cálculo da integral a partir do comando “int”, a inserção de controles deslizantes e a promoção da discussão entre os membros de cada grupo. A construção foi realizada na sétima tela, como podemos observar abaixo.

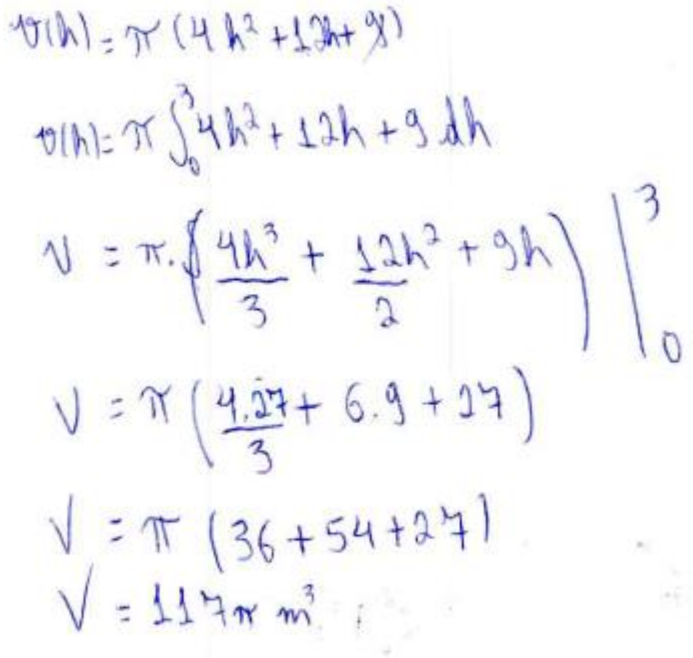
Figura 38 – Tela 7 do Problema 2.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na oitava tela, os grupos deveriam apresentar os cálculos realizados para a solução do problema. O professor-pesquisador solicitou que os cálculos fossem detalhados em uma folha A4 e, em seguida, cada grupo deveria inserir o resultado na plataforma do DESMOS e comparar com o resultado obtido anteriormente na calculadora gráfica.

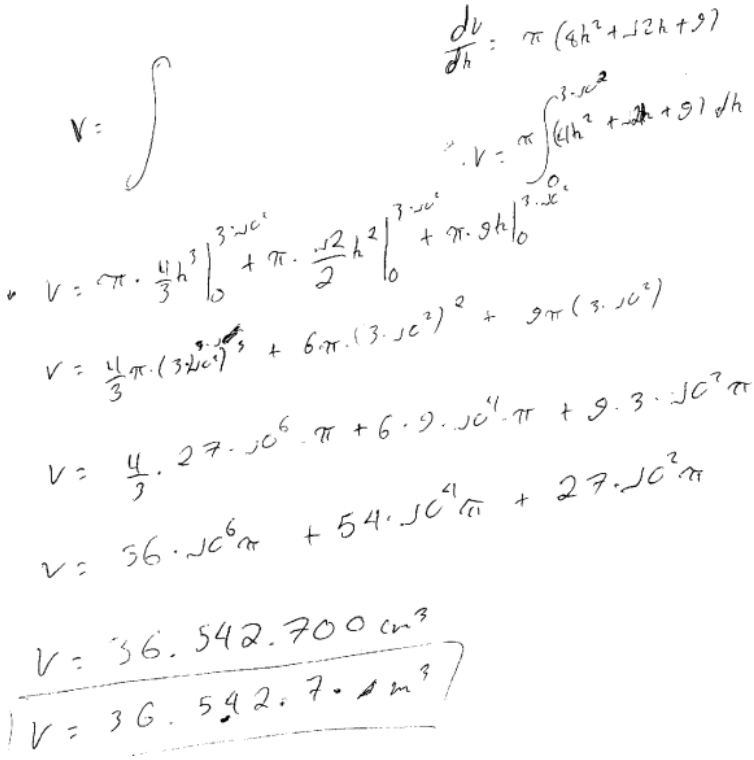
Figura 39 – Resposta escrita do GRUPO 1 para o Problema 2.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 está correta e segue os procedimentos usuais para o cálculo da integral definida. O GRUPO 2 apresentou uma resposta confusa, demonstrando uma falta de compreensão do problema proposto.

Figura 40 – Resposta escrita do GRUPO 2 para o Problema 2.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Ao realizar o cálculo da integral definida, o GRUPO 2 associou um dos intervalos de integração a uma potência de base dez e cometeu erros ao desenvolver os cálculos posteriores. O acréscimo da potência de base dez foi justificado pelas unidades de medidas apresentadas no problema, com a altura (h) que estava em centímetros e o volume (V) em centímetros cúbicos. As discussões do grupo evidenciam essa compreensão.

E6: *Aqui é zero e a profundidade é pra baixo. Como o (inaudível) é zero o h é três. Então vai ser de zero a três* (se referindo aos intervalos de integração) ...

E3: *tem que lembrar que toda essa expressão está em centímetros...*

E6: *toda essa expressão está em centímetros. Então aqui vai ser três vezes dez elevado a dois (*$3 \cdot 10^2$*)...*

Após ouvir esses comentários o professor/pesquisador aproximou-se do grupo e questionou o resultado final obtido pelo grupo. O estudante E6 explicou que o problema estava confuso e declarou que

E6: *pelo problema toda expressão está em centímetros, então se ele me deu um h de três metros a gente vai precisar transformar isso em centímetros pra fazer sentido na equação, por que na expressão aqui a gente calculou três vezes dez elevado a segunda centímetros pra fazer sentido porque ou você diria que V aqui na expressão está em metro ou centímetros.*

Em seguida o professor/pesquisador questionou

P: *O que você entende por volume?*

E6: *Volume seria o que preenche um, como posso dizer, uma região tridimensional...*

P: *então esse volume aqui é em centímetros cúbicos porque você tem uma figura tridimensional (tanque) com largura, altura e comprimento. Daí, quando calculamos a integral definida de zero a três é como se tivéssemos olhando apenas para o valor $V(3)$, pois o outro é zero.*

E6: *Ah sim, agora entendi, estava confundindo era tudo. Temos que refazer os cálculos...*

Após essa intervenção do professor-pesquisador os estudantes do GRUPO 2 refizeram os cálculos e chegaram na resposta correta do problema.

Figura 41 – Nova Resposta escrita do GRUPO 2 para o Problema 2.

$$\frac{dv}{dh} = \pi(4h^2 + 12h + 9) \rightarrow \int_0^v dv = \int_0^3 \pi(4h^2 + 12h + 9)\,dh$$

$$V = \pi \cdot \frac{4}{3}h^3\Big|_0^3 + \pi\frac{12}{2}h^2\Big|_0^3 + \pi 9h\Big|_0^3$$

$$V = \frac{27}{3} \cdot 4 \cdot \pi + 6 \cdot 9\pi + 9 \cdot 3 \cdot \pi$$

$$V = 36\pi + 54\pi + 27\pi$$

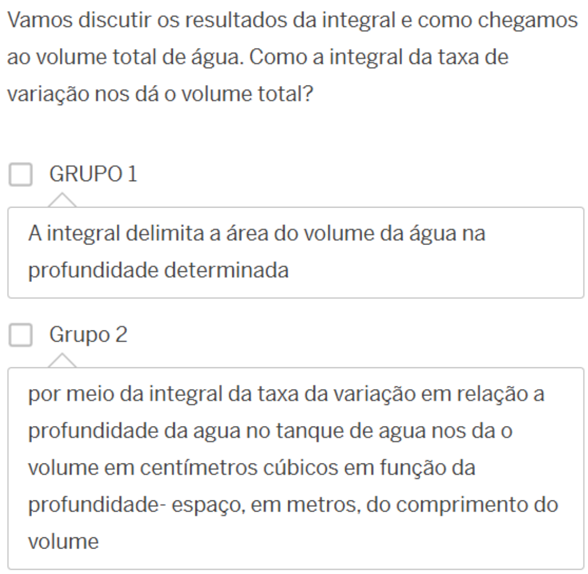
$$\boxed{V = 117\pi \text{ cm}^3}$$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Em seguida, ambos os grupos inseriram suas repostas no ambiente usando o comando “equação” e depois compartilharam com a turma. Na última tela dessa atividade, sugerimos que os alunos analisassem os resultados encontrados anteriormente, buscando compreender como a integral definida nos leva ao volume total de água a partir do problema proposto.

Além disso, fizemos a seguinte pergunta: “De que maneira a integral da taxa de variação nos proporciona o cálculo desse volume total?”. Assim, a pergunta sugere que a integral definida está sendo usada para calcular o volume total de água em um tanque, a partir da taxa de variação da água em função da profundidade.

Figura 42 – Tela 9 do Problema 2.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 menciona que a integral “delimita a área do volume”, o que não está totalmente correto. O conceito de integral aplicado ao volume normalmente envolve a soma (ou acumulação) das variações de volume, não apenas a delimitação da área. Além disso, a utilização da palavra “área” pode ser um pouco imprecisa aqui, pois o volume não é simplesmente uma área, mas uma soma de volumes em diferentes profundidades.

A resposta do GRUPO 2 usa a expressão “taxa da variação”, o que sugere que a integral está sendo usada para somar as variações de volume de água à medida que a profundidade varia. No entanto, o trecho “em função da profundidade-espaço, em metros” está um pouco confuso. A profundidade pode ser uma variável independente, mas a descrição da relação com o “espaço” e o “comprimento do volume” não é muito clara. Isso pode confundir a compreensão do processo de cálculo do volume.

Em seguida, o professor-pesquisador pausou a atividade, usando o comando “Pausa” e enfatizou alguns pontos pertinentes ao segundo problema.

> ***P:*** *O problema 2 traz uma outra aplicação da integral definida. Durante as discussões de cada grupo, pude perceber que a estrutura do problema causou uma confusão na interpretação, em especial as unidades de medida que tem no problema. Além de algumas perguntas do tipo: “Então eu vou calcular a derivada?” referindo ao cálculo da taxa de variação; “Quais são os intervalos de integração dessa função?”, uma vez que a função não estava estruturada da forma usual com o símbolo da integral e os*

respectivos intervalos de integração. Isso evidencia a importância da leitura individual e interpretação do problema. Contudo, a distribuição do problema nas telas de atividade possibilitou o esclarecimento dessas perguntas e pelo fato de vocês estarem em grupos as discussões contribuíram bastante para compreensão do problema.

Após a fala do professor pesquisador, o encontro foi encerrado respeitando o horário da disciplina, tendo em vista que alguns alunos teriam o segundo tempo de aula em outra disciplina.

6.2.3 Descrição do terceiro encontro

Esse encontro ocorreu no dia 26 de setembro de 2024, na sala D7 da instituição de ensino. Na ocasião, apenas cinco (5) dos nove (9) alunos estavam presentes na sala, sendo três (3) alunos integrantes do GRUPO 1 e dois (2) alunos do GRUPO 2. O encontro iniciou às 7h43min da manhã, finalizando às 9h15min.

O professor-pesquisador recebeu os estudantes e orientou a organização da sala nos grupos pré-estabelecidos desde o primeiro encontro. Em seguida, apresentou o problema à turma.

Dessa forma, foi solicitado que os grupos acessassem o ambiente virtual de atividades do DESMOS. Em seguida, eles deveriam inserir o novo código de acesso para visualizar o terceiro problema, conforme detalhado abaixo.

Problema 03

Em um circuito elétrico, E volts é a força eletromotriz em t segundos e

$$E = 2\, sen \frac{2}{3}\, \pi t$$

Determine a força eletromotriz média de 0 s em 4 s.

Escolhemos este problema devido à sua relevância para estabelecer uma conexão entre os conteúdos de Física e Matemática. A aplicação de integrais para calcular a força média em um circuito elétrico permite que os alunos vejam como conceitos matemáticos, como a integral definida, podem ser utilizados para resolver problemas práticos do cotidiano, como os encontrados no estudo de circuitos elétricos.

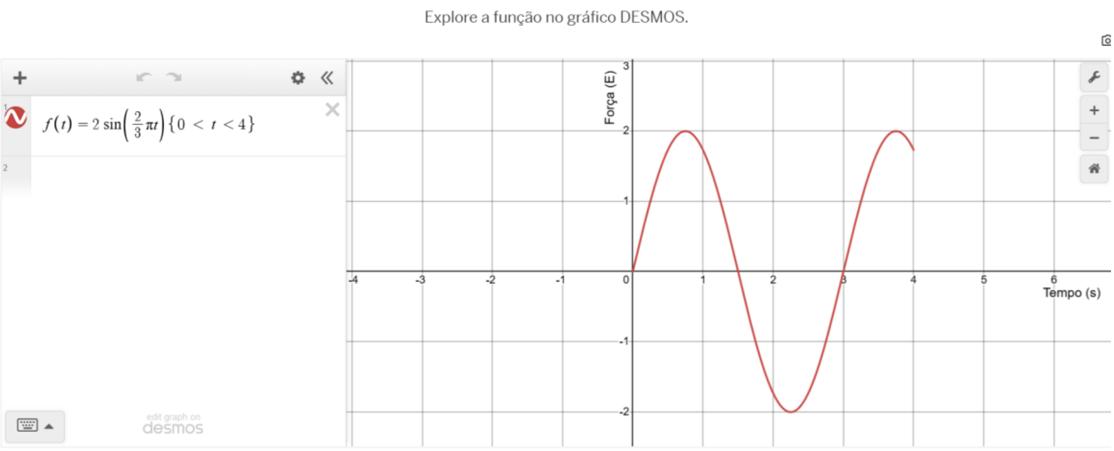
Além disso, calcular uma média, especialmente quando se trata de uma função variável ao longo do tempo, é uma excelente oportunidade para aplicar a integral definida. Isso ajuda os estudantes a entender como a integral pode ser usada para somar quantidades variáveis e, em seguida, normalizar o resultado, dividindo pelo intervalo de tempo.

Outro aspecto importante é que o problema oferece uma oportunidade para que os alunos pratiquem diretamente o Teorema Fundamental do Cálculo, ao integrarem uma função e aplicarem suas propriedades para calcular a diferença entre os valores da antiderivada nos limites de integração. Isso permite uma compreensão mais profunda da relação entre derivadas, antiderivadas e integrais.

Nesse sentido, os grupos acessaram o ambiente virtual para trabalhar no problema 3, que estava dividido em 9 telas de atividades. Em seguida, o professor/pesquisador distribuiu uma folha A4 com o problema proposto, possibilitando que os estudantes realizassem anotações pertinentes e relevantes para a pesquisa.

Na primeira tela de atividade, os grupos tiveram acesso ao problema, onde o comando orientava a leitura individual e em grupo do problema e, se possível, realizassem anotações sobre suas primeiras impressões do problema. Na segunda tela de atividade, o professor/pesquisador solicitou a exploração da função proposta no problema na calculadora gráfica do ambiente DESMOS, proporcionando a visualização gráfica da função, além de outras interpretações valiosas para a resolução do problema. Essa construção foi realizada na terceira tela da atividade.

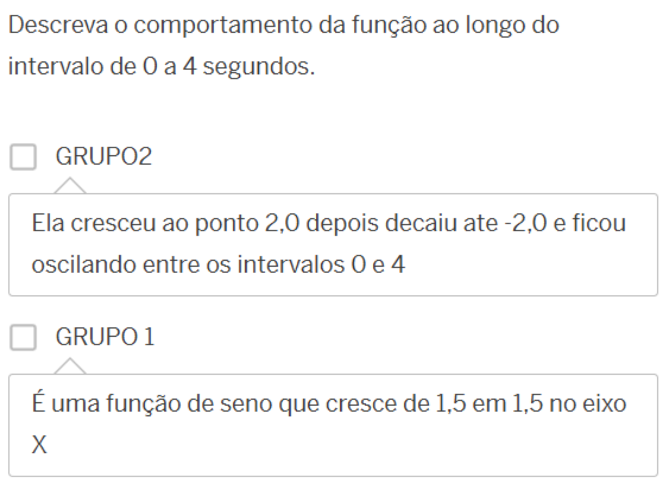
Figura 43 – Tela 3 do Problema 3.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na construção do gráfico, os grupos demonstraram maior familiaridade com o ambiente DESMOS. Além de explorarem o gráfico, eles inseriram o intervalo especificado no problema. Em seguida, na quarta tela da atividade, foi pedido que os grupos descrevessem o comportamento da função no intervalo de zero a quatro segundos. A seguir, apresentamos as respostas fornecidas pelos grupos.

Figura 44 – Tela 4 do Problema 3.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 está parcialmente correta, mas há um erro. A função realmente oscila entre -2 e 2, mas ela não “cresce” para 2 e depois “decai” para -2. Ela oscila em um ciclo senoidal. A explicação é vaga e não descreve com precisão o comportamento periódico da função. A função não apenas “cresce” e “decai”, ela segue uma forma de onda periódica.

Já a descrição do comportamento da função pelo GRUPO 2 está imprecisa. O comportamento da função não está relacionado a um crescimento linear regular de 1,5 unidades em cada incremento de t. Em vez disso, a função oscila conforme a fórmula $E(t) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{3}\pi t\right)$, com um ciclo completo ocorrendo a cada 3 segundos.

Nesse sentido, o professor-pesquisador, estava acompanhando as respostas dos alunos no ambiente DESMOS, fez o seguinte *feedback*:

> ***P:*** *Gostaria de chamar atenção para as respostas da tela 4. Ambos os grupos apresentaram interpretações imprecisas sobre a natureza da função, mas de maneiras distintas. A função é senoidal e realiza oscilações periódicas entre* -2 *e* 2*, não seguindo um padrão de crescimento ou decaimento linear. Enquanto o GRUPO 1 descreveu a função de forma vaga, sugerindo um crescimento até* 2 *e depois um decaimento até* -2*, a explicação do GRUPO 2 está incorreta ao associar um crescimento linear de 1,5 unidades por incremento de* t*. Na realidade, a função segue um comportamento oscilatório com um ciclo completo a cada 3 segundos, e não exibe progressão linear. Portanto, a descrição correta é que a função oscila periodicamente*

em torno de zero, com amplitude de 2, seguindo uma forma de onda senoidal com período de 3 segundos.

Após esse comentário, um integrante do GRUPO 2 respondeu

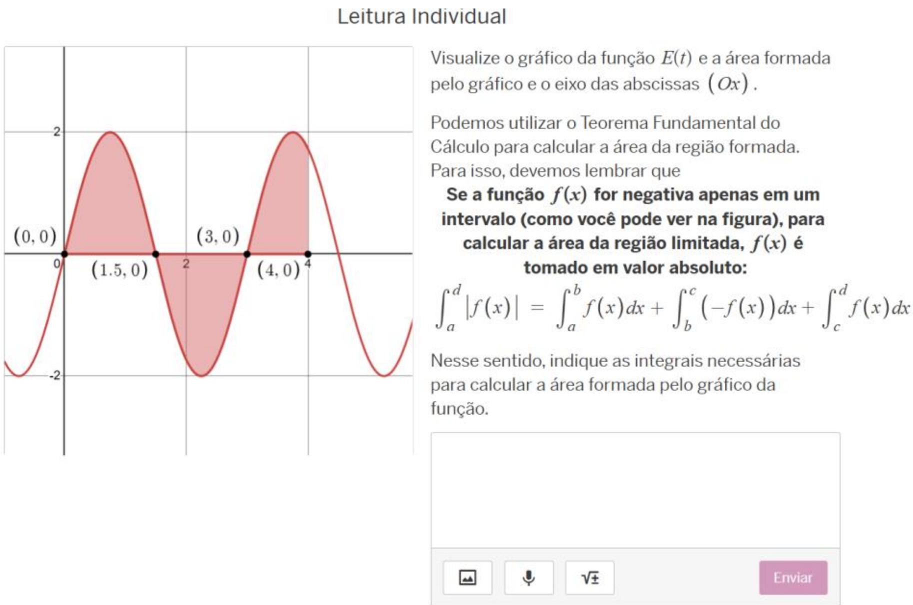
E3: *Agora eu percebo que a descrição que fizemos da função estava imprecisa. A gente pensou que a função seguia um padrão subindo e descendo, talvez fomos influenciado pela maneira como a equação foi interpretada no nosso grupo...*

Em seguida, o GRUPO 1 apresentou uma justificativa para a resposta

E4: *Entendemos que a função tem um comportamento da função seno e não cresce ou decai linearmente, como tentamos descrever. Isso significa que ela oscila entre* -2 *e* 2*, com um período de 3 segundos, o que é uma característica fundamental para a descrição da função...*

Fechando as considerações sobre a interpretação gráfica da função, o professor/pesquisador direcionou os grupos para a quinta tela da atividade. Nessa tela, além do gráfico da função e das regiões delimitadas pelo gráfico da função e o eixo x, a pergunta continha informações sobre a utilização do Teorema Fundamental do Cálculo e como ele poderia ser aplicado na resolução do problema. Assim, foi solicitado que os alunos realizassem uma leitura das informações e analisassem a representação gráfica novamente. Os grupos deveriam indicar as integrais necessárias para calcular a área da região formada pelo gráfico da função e o eixo x.

Figura 45 – Tela 5 do problema 3.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

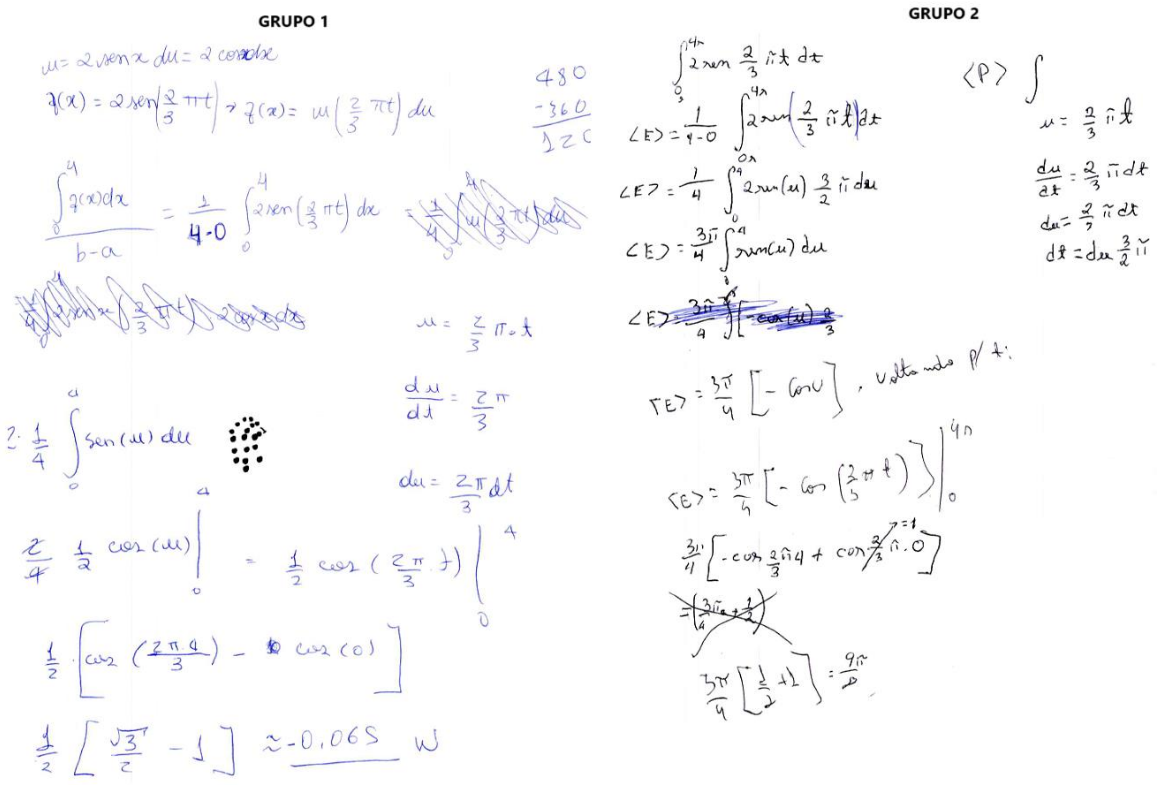
As respostas dos grupos foram inseridas no ambiente e representavam as integrais necessárias para o cálculo da área da região em destaque no gráfico. Em seguida, na sexta tela, os grupos deveriam utilizar os controles deslizantes disponíveis e ajustar a área da região delimitada pelo gráfico da função e o eixo das abscissas e utilizar o comando “int” para calcular a integral da função. Essa pergunta tinha como objetivo ajudar o aluno a compreender o conceito de integral definida de forma interativa. Além disso, ao mover os controles deslizantes, o aluno pode alterar o intervalo de integração da função, experimentando diferentes valores de limites inferior e superior.

Figura 46 – Tela 6 do problema 3.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Nesse sentido, a integral definida entre os limites especificados representa a área sob a curva da função nesse intervalo. Assim, espera-se que o aluno calcule esse valor, utilizando-se de uma ferramenta automatizada e comparando com o cálculo manual, apresentado logo em seguida.

Figura 47 – Respostas escritas do Problema 3.

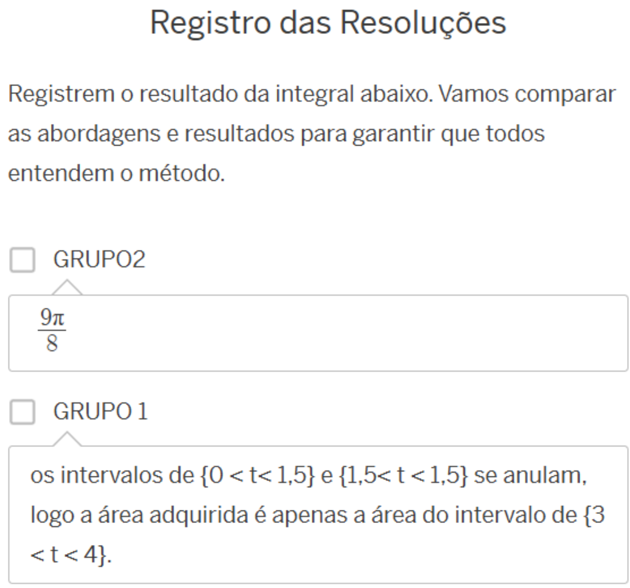


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na resposta do GRUPO 1, observamos a aplicação do método de substituição simples na resolução da integral, além do uso da fórmula do valor médio de uma função. O GRUPO 2 seguiu um procedimento semelhante. Ambos os métodos foram abordados e explicados previamente no texto desta pesquisa.

No entanto, o resultado apresentado pelo GRUPO 1 está incorreto. O grupo cometeu alguns erros, principalmente na aplicação dos intervalos de integração e na análise da função cosseno nos pontos $x = 0$ e $x = 4$ do eixo x. Por outro lado, o GRUPO 2 conseguiu resolver corretamente o problema. Destacamos novamente a falta de organização nas respostas escritas de ambos os grupos, o que pode ter influenciado os resultados obtidos. A clareza na apresentação das soluções é essencial para evitar mal-entendidos e garantir mais precisão dos cálculos. Em seguida, as respostas foram inseridas no ambiente e compartilhadas com a turma.

Figura 48 – Tela 7 do problema 3.



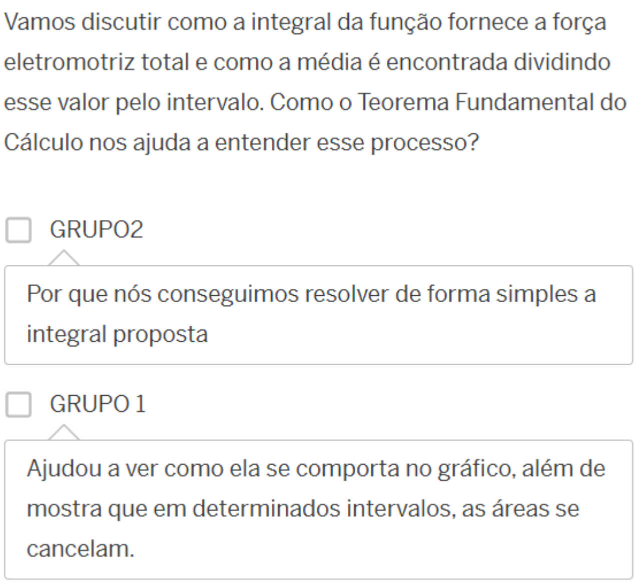
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na resposta apresentada pelo GRUPO 1, houve uma tentativa de dividir o intervalo em subintervalos, mas a divisão não faz sentido para este caso. Assim, a afirmação de que os intervalos de “$0 < t < 1{,}5$ e $1{,}5 < t < 1{,}5$ se anulam” não faz sentido matematicamente, e a conclusão de que apenas a área do intervalo [3,4] deve ser considerada está incorreta. Na realidade, a área deve ser calculada considerando todas as contribuições dos três intervalos, como explicamos no cálculo anterior. O correto é somar as áreas (com seus respectivos sinais), o que resulta em um valor total para a média da força eletromotriz no intervalo de [0,4].

Continuando com a atividade, na oitava tela perguntamos como você resolveria o problema proposto, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, para a função $E(t) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{3}\pi t\right)$, sem utilizar a calculadora gráfica do DESMOS. A resposta de ambos os grupos foi a “*utilização do método da substituição e, em seguida, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo*”.

Na última tela da atividade, buscamos discutir como a integral da função fornece a força eletromotriz total e como a média é encontrada dividindo esse valor pelo comprimento do intervalo. Além disso, os estudantes foram indagados sobre “Como o Teorema Fundamental do Cálculo nos ajuda a entender esse processo?”. As respostas foram inseridas no ambiente e apresentadas a seguir.

Figura 49 – Tela 9 do problema 3.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Novamente, o GRUPO 1 traz a ideia de “áreas se cancelando” se referindo à possibilidade de que, em certos intervalos, a integral de uma função possa ter valores positivos e negativos que se somam de forma a anular uns aos outros. Isso ocorre em funções oscilantes, por exemplo, e tem relevância na interpretação da força eletromotriz total, que pode ter contribuições positivas e negativas dependendo do intervalo de tempo. Enquanto o GRUPO 2 sugere que a integral foi resolvida de forma simples, o que pode indicar que o Teorema Fundamental do Cálculo foi útil para simplificar a resolução do problema, transformando a integral em uma diferença entre os valores da função em pontos do intervalo.

Ao finalizarem a atividade, o professor/pesquisador pausou a atividade e, com o auxílio do Datashow, expos no quadro as respostas dos grupos para um momento de análise e discussão com os estudantes, como podemos observar abaixo:

> ***P:*** *Bom gente, o problema três aborda mais uma aplicação da integral definida, né? Relacionado a força eletromotriz. Pelas respostas das atividades que vocês foram respondendo no ambiente, e eu estava acompanhando aqui pelo computador, pude observar alguns resultados interessantes. Primeiramente que vocês demonstraram mais habilidade com relação ao uso do ambiente DESMOS. Vocês conseguiram responder de forma correta algumas perguntas, e outras pude perceber que ainda faltam a interpretação do problema que é uma das fases que a gente trabalha na Resolução de Problemas e que é muito importante. Quando a gente perguntou aqui sobre o comportamento do gráfico, por exemplo, o GRUPO 1 ele analisou de forma incorreta, os intervalos em que a função está crescendo ou decrescendo. Na tela cinco,*

pedi para vocês desenvolverem a partir do Teorema Fundamental do Cálculo, o cálculo das áreas demarcada pelo gráfico, aqui eu pude perceber também que o GRUPO 1, através daquela análise incorreta feita anteriormente, também fez uma análise incorreta nesse momento aqui. O grupo tem algo a comentar, compartilhar com a turma que levou essa interpretação.

E8: *Pelo gráfico e pela região demarcada na questão nós compreendemos que uma área se cancelaria com a outra. Então por isso que nós apresentamos essa ideia, só que agora vendo a resposta aí do quadro acredito que erramos na digitação dos intervalos, a digitação ficou de forma incorreta, mas, nós compreendemos o problema e entendemos o que a pergunta queria...*

Em seguida, o professor parabenizou o grupo pelo trabalho e tranquilizou-os em relação às respostas apresentadas na atividade. Destacou, ainda, a importância do uso do Teorema Fundamental do Cálculo na resolução do problema, bem como da definição de valor médio de uma função. Esse destaque evidenciou tanto a compreensão teórica do conteúdo quanto sua aplicação na resolução de problemas.

Ao concluir a discussão do Problema 3, o professor orientou os grupos a começarem o Problema 4, exibindo o código de acesso no quadro para que os estudantes pudessem acessá-lo. A seguir, apresentamos o Problema 4.

Problema 04

O custo marginal de fabricar x jardas de um determinado tecido é $C'(x) = 3 - 0{,}01x + 0{,}000006x^2$ (em dólares por jarda). Encontre o aumento no custo se o nível de produção aumenta de 2.000 para 4.000 jardas.

O problema é inspirado em um cenário econômico real – o custo de produção de um bem. Isso torna o aprendizado mais tangível, já que o aluno pode ver como os conceitos abstratos de cálculo se aplicam a situações práticas do cotidiano. Nesse problema, o Teorema Fundamental do Cálculo conecta a derivada e a integral, afirmando que a integral definida de uma função derivada $f'(x)$ de a a b nos dá a variação da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

No contexto do problema, o custo marginal $C'(x)$ pode ser visto como uma derivada da função de custo $C(x)$. Portanto, a integral de $C'(x)$ no intervalo de 2000 a 4000 jardas nos dá a variação do custo total $C(x)$ entre esses dois pontos, ou seja:

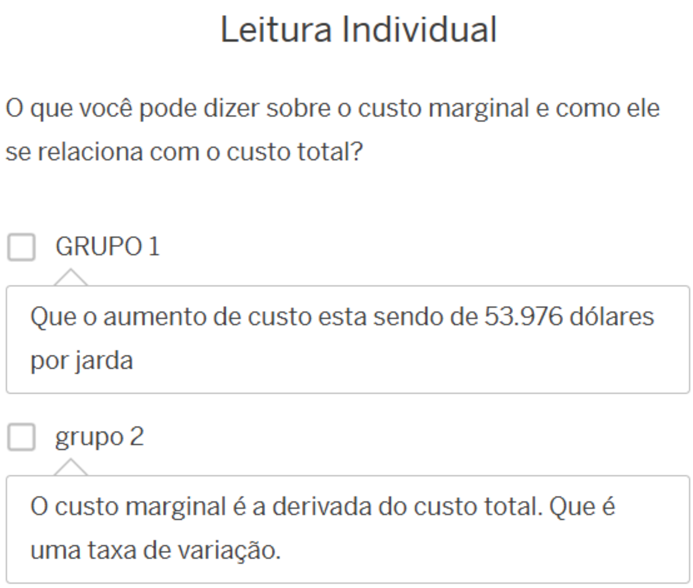
$$C(4000) - C(2000) = \int_{2000}^{4000} C'(x)\ dx.$$

Isso é uma aplicação direta e prática do Teorema Fundamental do Cálculo, que conecta a variação de uma função com a integral da sua derivada.

O problema foi dividido em nove telas. Na primeira tela, os grupos têm acesso ao enunciado do problema, o que possibilita tanto uma leitura individual quanto uma discussão em grupo. Em seguida, o professor ou pesquisador distribui uma folha A4 para que os participantes façam anotações iniciais e conduzam possíveis discussões dentro de seus grupos.

Na segunda tela, os estudantes são questionados sobre sua compreensão do conceito de custo marginal e sua relação com o custo total, no contexto do problema apresentado. As respostas de ambos os grupos foram registradas na plataforma, conforme demonstrado a seguir.

Figura 50 – Tela 2 do Problema 4.



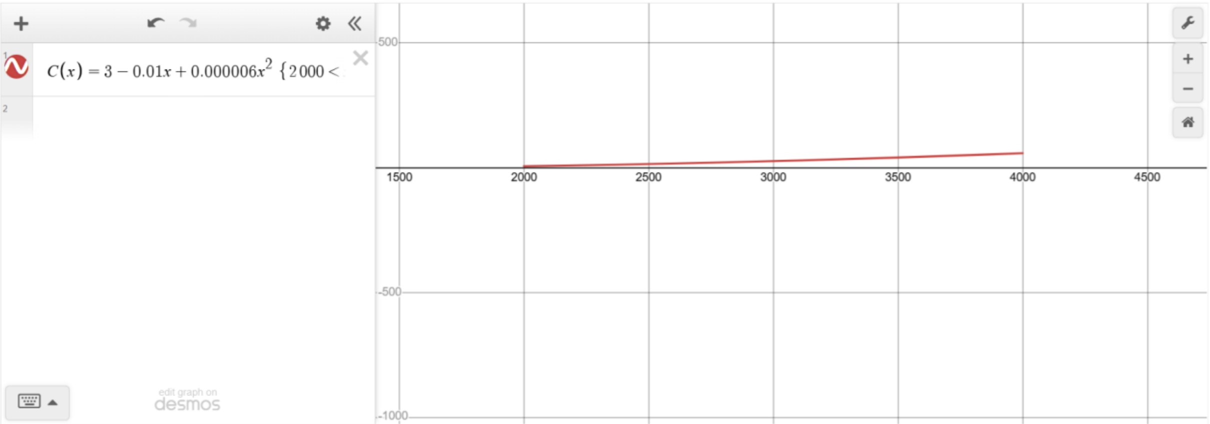
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

O GRUPO 1 afirma que o aumento de custo é “53.976 dólares por jarda”, o que está incorreta. O aumento no custo total será de 54.000 dólares**,** não 53.976. Ou seja, o valor fornecido pelo grupo se aproxima do resultado final, mas não é o correto. Além disso, o valor não deve ser considerado por jarda, já que o cálculo diz respeito ao custo total para a produção de 2000 a 4000 jardas. Então, o aumento é de 54.000

dólares no custo total. Enquanto o GRUPO 2 afirma corretamente que o custo marginal é a derivada da função de custo total, o que é uma definição padrão na teoria econômica. O custo marginal $C'(x)$ indica a taxa de variação do custo total conforme a produção aumenta. A resposta também faz referência ao conceito de taxa de variação, o que é uma boa explicação, pois o custo marginal é de fato a taxa de variação do custo em relação à quantidade produzida.

A terceira etapa da atividade pedia que os grupos utilizassem a calculadora gráfica do DESMOS para explorar a função apresentada no problema. Após isso, deveriam construir o gráfico correspondente e descrever como o custo marginal varia à medida que a produção aumenta, além de registrar as características principais da função. A figura a seguir apresenta o gráfico da função construído pelos grupos na quarta etapa da atividade.

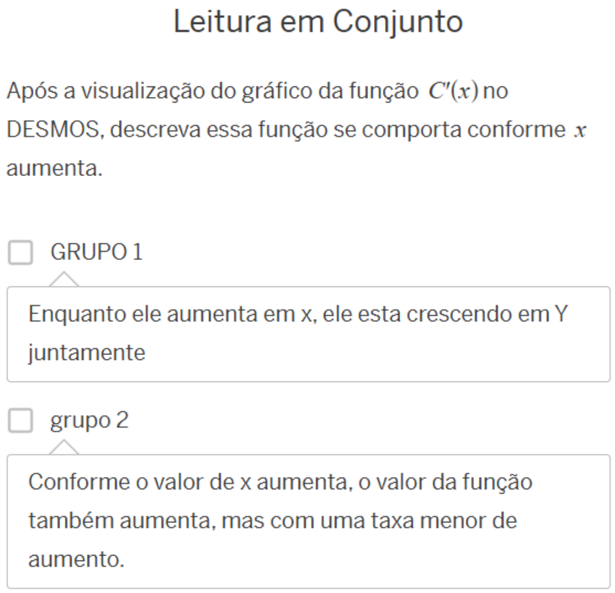
Figura 51 – Tela 4 do Problema 4.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Após a construção e a visualização do gráfico da função, o professor/pesquisador solicitou que os estudantes descrevessem o comportamento da função no intervalo estabelecido no problema.

Figura 52 – Tela 5 do Problema 4.

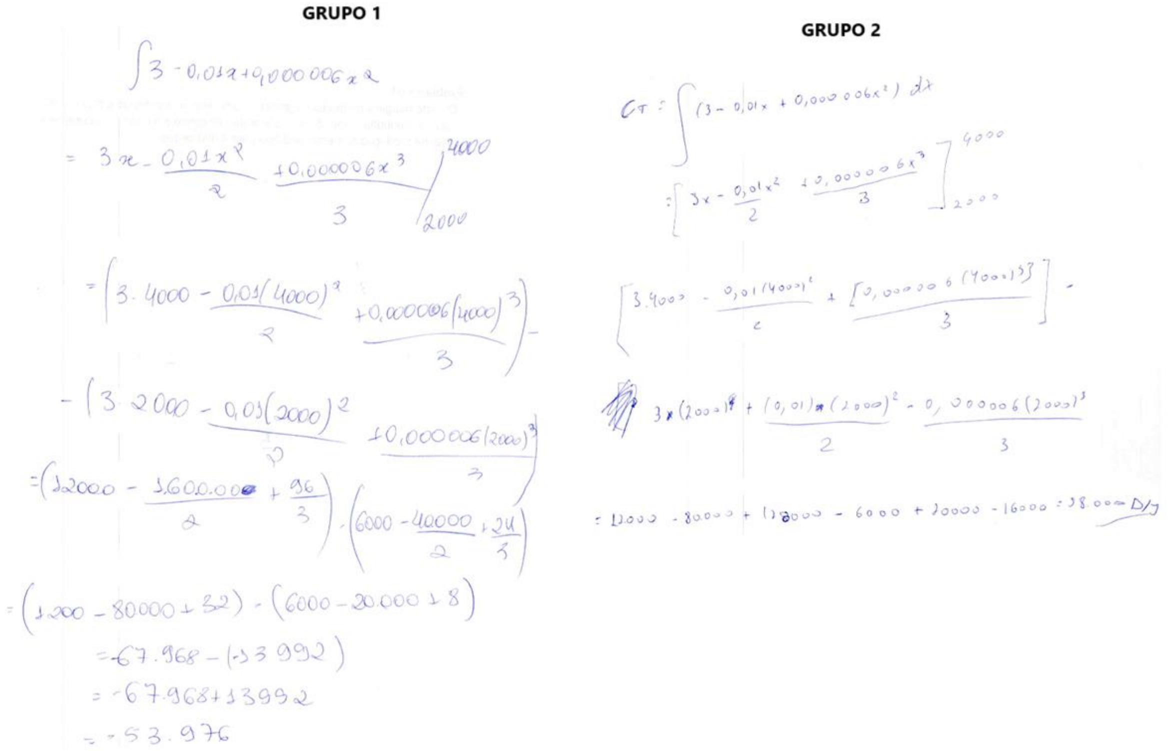


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do GRUPO 1 é muito vaga. O que ela sugere é que a função $C'(x)$ simplesmente está “crescendo” conforme x aumenta, mas ela não aborda corretamente o comportamento de diminuição da taxa de crescimento**.** A função $C'(x)$ cresce inicialmente, mas a taxa de crescimento diminui devido à presença dos termos $-0{,}01x$ e 3, e esse é o ponto crucial. Enquanto, o GRUPO 2 descreva adequadamente o comportamento da função. Conforme x aumenta, a função $C'(x)$ de fato aumenta, mas devido à forma quadrática da função, o aumento se torna menos acentuado à medida que x cresce. Esse é um ponto essencial sobre o comportamento da função $C'(x)$, já que a taxa de variação diminui conforme o valor de x cresce, o que reflete a diminuição no aumento do custo marginal à medida que a produção aumenta.

Na sexta tela, a orientação é calcular a integral definida da função $C'(x)$ para determinar o aumento no custo total quando a produção aumenta de 2.000 para 4.000 unidades. Isso nos permitirá encontrar a diferença no custo total. Nesse momento, os estudantes realizaram o cálculo na folha entregue inicialmente.

Figura 53 – Respostas escritas do Problema 4.

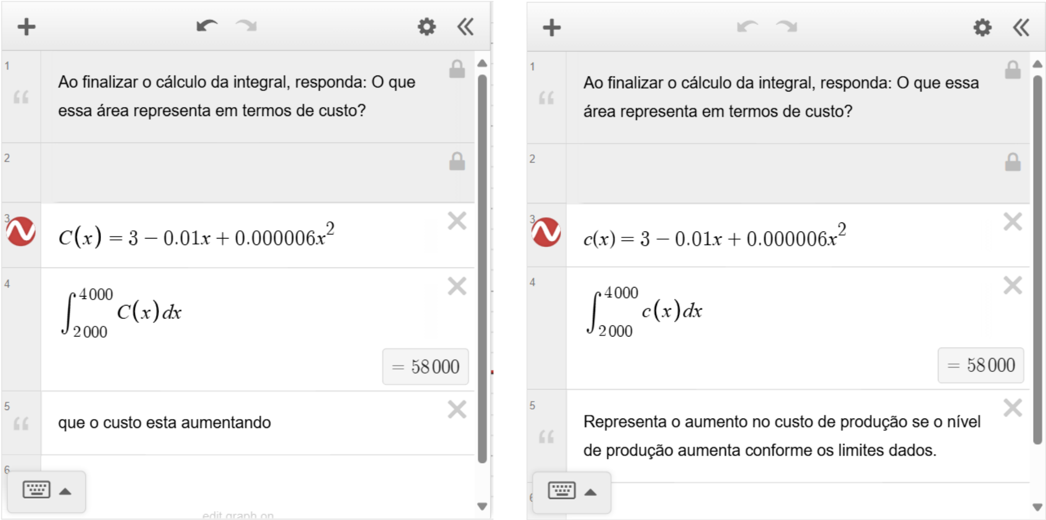


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

O GRUPO 1 reforça um resultado previamente apresentado e, a partir dessa resolução, é possível identificar que o erro ocorreu no desenvolvimento de operações básicas, como a potenciação. O GRUPO 2 apresenta o resultado correto do problema. No entanto, ambas as respostas estão um pouco desorganizadas.

Na sétima tela, os estudantes deveriam utilizar a calculadora gráfica do ambiente DESMOS e, em seguida, comparar o resultado obtido com o anterior. Além disso, o problema retomava a seguinte pergunta: “O que essa área representa em termos de custo?”. Os cálculos foram realizados e inseridos no ambiente, e apresentaremos a seguir os resultados obtidos.

Figura 54 – Tela 7 do Problema 4.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta à esquerda é do GRUPO 1 e à direita é do GRUPO 2. Embora seja verdade que a área sob a curva da função $C'(x)$ (o custo marginal) esteja associada ao aumento no custo, a explicação do GRUPO 1 não é suficiente nem completa. O aumento no custo não é a descrição precisa do que a integral representa. O aumento no custo total é calculado pela integral do custo marginal, mas a área sob a curva é especificamente o aumento no custo total, não apenas que o custo "está aumentando".

No entanto, ao calcular a integral da função $C'(x)$ entre os limites de 2.000 e 4.000 jardas, a área sob a curva de $C'(x)$ representa precisamente o aumento no custo total de produção quando a produção aumenta de 2.000 para 4.000 jardas, como respondeu o GRUPO 2. Assim, o aumento no custo é determinado pela integral do custo marginal sobre esse intervalo, que nos fornece a diferença no custo total entre esses dois níveis de produção. A resposta descreve adequadamente o que a área representa em termos de custo.

Na oitava tela, foi solicitado aos grupos que registrassem o resultado obtido anteriormente para compartilhar com os demais. Em seguida, na nona tela, os grupos deveriam descrever como a integral da função de custo marginal contribuiu para calcular o aumento total no custo, além de identificar quais conceitos do cálculo integral, como o Teorema Fundamental do Cálculo, ajudaram a compreender essa relação. Por fim, os alunos foram questionados sobre a importância da integral definida no contexto desse problema.

E4: *podemos ver de maneira mais adequada e com uma margem de erro menor, que o custo pode esta aumentando ou até mesmo se estivesse diminuindo...*

E1: *A integral definida, neste contexto, nos fornece um meio de expressar esse custo para facilitar na resolução do problema...*

Em relação as respostas apresentadas o professor/pesquisador fez a seguinte reflexão:

P: *Bom turma, estou pausando aqui a atividade para que possamos fazer uma pequena discussão sobre as respostas que foram apresentadas até aqui. A resposta dada pela colega do GRUPO 1 sugere que a integral ajuda a visualizar o aumento ou a diminuição do custo, mas a resposta não está totalmente correta, falta algumas informações ainda. Ou seja, a integral de uma função de custo marginal, no caso do nosso problema, ela não serve apenas para ver de maneira mais adequada, se o custo está aumentando ou diminuindo, na verdade ela fornece o valor exato do custo total ao calcular a área sobre a curva do custo marginal. Enquanto, a resposta dada pelo colega do GRUPO 2, está um pouco mais precisa, mas correta. De fato, a integral da função entre os intervalos do problema, nos fornece exatamente o custo total entre eles. Assim, o custo marginal da função nos dá a taxa de variação do custo total e ao integrar essa função no intervalo especificado, obtemos o aumento total no custo devido ao aumento na produção.*

Além disso, a resposta do GRUPO 2 menciona corretamente que a integral definida ajuda a facilitar a resolução do problema, fornecendo uma forma matemática precisa de calcular a diferença no custo total. O Teorema Fundamental do Cálculo também entra em cena, pois ele nos garante que a integral de uma função pode ser usada para encontrar a diferença entre os valores da função em dois pontos (no caso, o aumento do custo total entre 2000 e 4000 jardas).

Por fim, o professor-pesquisador finalizou o encontro, pois não havia mais tempo de aula disponível.

6.2.4 Descrição do quarto encontro

O encontro ocorreu no dia 2 de outubro de 2024, na sala D7 da instituição de ensino. Na ocasião, estavam presentes apenas seis dos nove alunos, sendo três integrantes do Grupo 1 e três do Grupo 2. O encontro teve início às 7h38 e terminou às 11h04. A programação foi dividida em dois momentos: o primeiro foi destinado à resolução do último problema, e o segundo, à aplicação do questionário de avaliação dos encontros.

Dessa forma, o professor-pesquisador expressou seu agradecimento a todos os estudantes presentes, reconhecendo a ativa participação ao longo de toda a pesquisa, bem como o comprometimento na resolução dos problemas propostos e nas discussões realizadas em cada encontro. Em seguida, os estudantes se organizaram em seus respectivos grupos. O professor, com o auxílio do Datashow, projetou o código de acesso ao ambiente virtual do DESMOS, permitindo que os grupos tivessem acesso ao quinto problema. A seguir, o problema é apresentado.

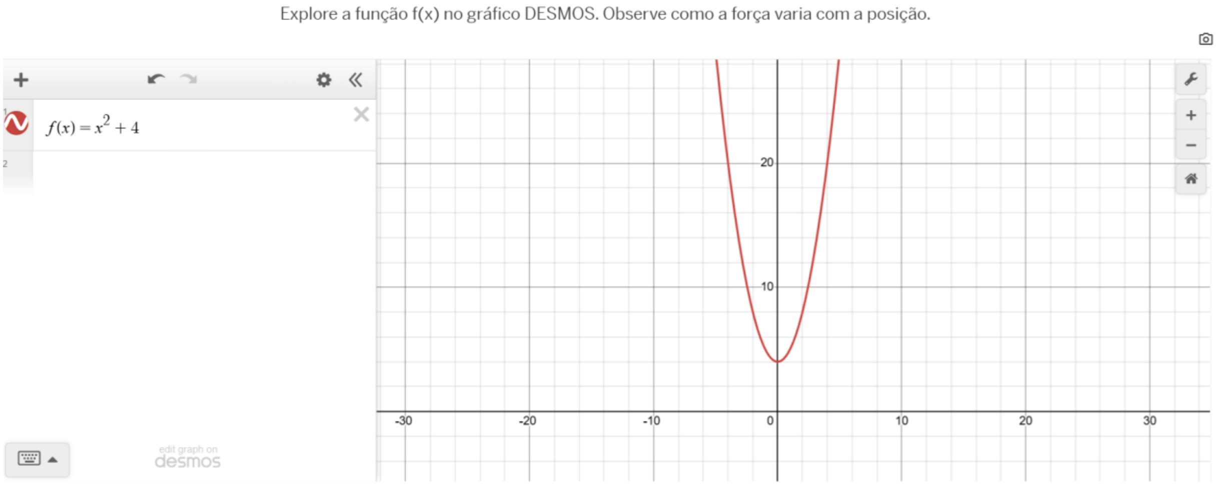
Problema 05

Uma partícula se move ao longo do eixo x devido à ação de uma força de $f(x)$ libras quando a partícula está a x pés da origem. Se $f(x) = x^2 + 4$, calcule o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde $x = 2$ até o ponto onde $x = 4$.

Nosso objetivo ao escolher esse problema como uma aplicação da integral é mostrar como as integrais podem ser usadas para modelar e resolver problemas físicos relacionados a forças e trabalho. A integral fornece uma forma de calcular o trabalho realizado por uma força variável, o que é uma aplicação direta da segunda lei de Newton no contexto de sistemas dinâmicos. Ao integrar a força ao longo do deslocamento, os alunos aprendem a interpretar a integral como uma medida de trabalho e a aplicar os conceitos de cálculo em situações práticas de Física.

Nesse contexto, na primeira tela, é apresentado o enunciado do problema. Nesse momento, os alunos podem ler o problema individualmente ou em grupo, realizando as primeiras anotações sobre ele. Na segunda tela, os grupos são direcionados para a calculadora gráfica do DESMOS, onde devem inserir a função proposta. Em seguida, devem observar o gráfico gerado, analisando suas características.

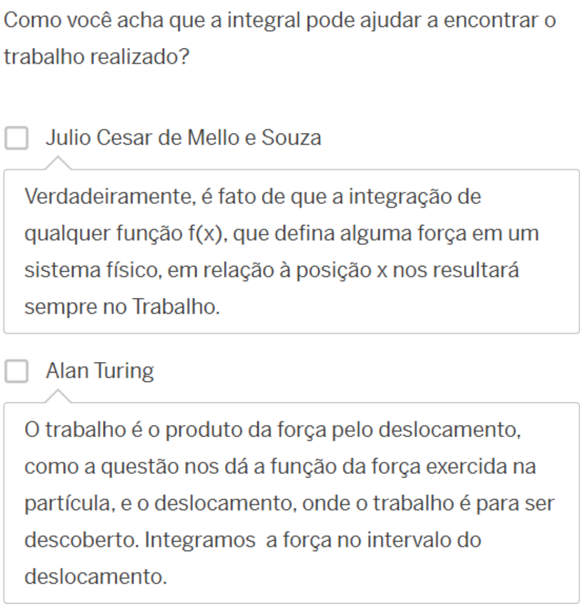
Figura 55 – Tela 2 do Problema 5.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na terceira tela, os grupos responderam a seguinte pergunta: “Como você acha que a integral pode ajudar a encontrar o trabalho realizado?”. O intuito era avaliar a compreensão do aluno sobre o conceito de trabalho em física e como a integral está relacionada a esse conceito. Em seguida, as respostas foram inseridas no ambiente virtual do DESMOS, como observamos a seguir.

Figura 56 – Tela 3 do Problema 5.



Como você acha que a integral pode ajudar a encontrar o trabalho realizado?

Julio Cesar de Mello e Souza

Verdadeiramente, é fato de que a integração de qualquer função f(x), que defina alguma força em um sistema físico, em relação à posição x nos resultará sempre no Trabalho.

Alan Turing

O trabalho é o produto da força pelo deslocamento, como a questão nos dá a função da força exercida na partícula, e o deslocamento, onde o trabalho é para ser descoberto. Integramos a força no intervalo do deslocamento.

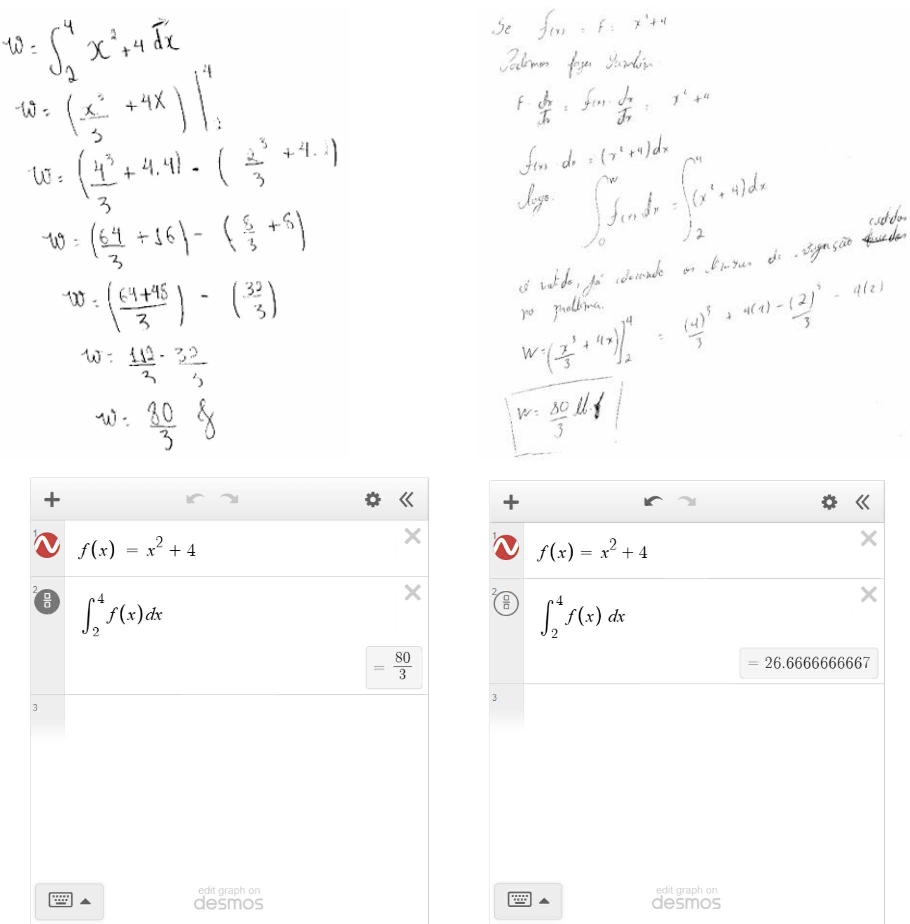
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta do Grupo 1, representada pelo matemático Alan Turing, está parcialmente correta, mas é um pouco vaga. O trabalho é, de fato, dado pela integral da força em relação à posição, mas a formulação de que “qualquer função $f(x)$” resultará “sempre no trabalho” pode ser interpretada de maneira muito geral. Assim, a resposta poderia ser mais precisa ao explicar que o trabalho é o valor da integral de

$f(x)$ no intervalo de deslocamento x_1 a x_2. Enquanto a resposta do Júlio Cesar de Mello e Souza, o GRUPO 2, está mais próxima da explicação correta. O trabalho é de fato o produto da força pelo deslocamento, mas no caso de uma força variável, como a que é dada na questão, esse "produto" é expresso de forma contínua como uma integral. A resposta faz a conexão correta entre a força variável $f(x)$ e o intervalo de deslocamento de $x = 2$ a $x = 4$. A explicação de "integrar a força no intervalo do deslocamento" é adequada.

Na quarta tela, os grupos deveriam fazer o cálculo da integral definida da função e determinar o trabalho realizado pela força no intervalo dado na folha A4, disponibilizada no início do encontro, e em seguida, utilizar a calculadora gráfica do DESMOS para comparar os resultados encontrados. A resposta foi inserida na quinta tela do problema, como veremos a seguir.

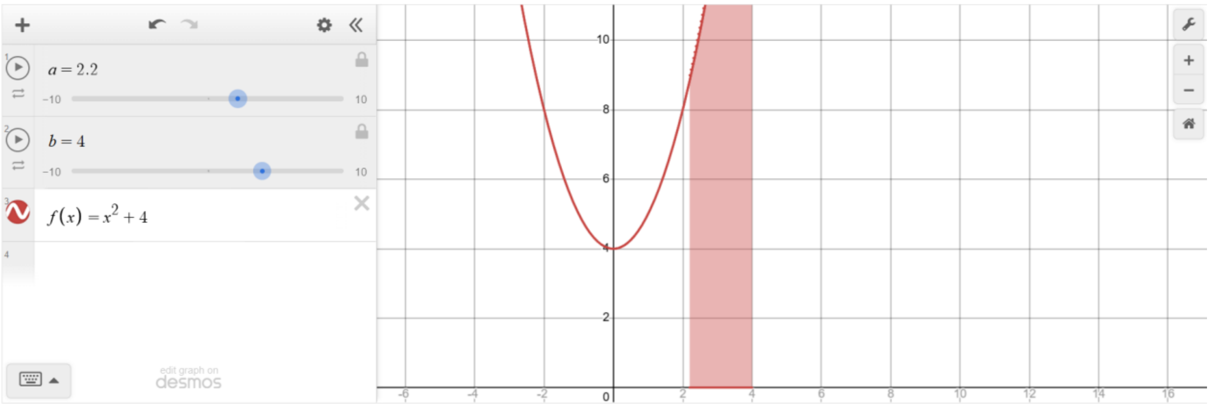
Figura 57 – Tela 5 e respostas escritas do Problema 5.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Ambos os grupos apresentaram as respostas corretamente. Ao comparar com o resultado obtido na calculadora gráfica do DESMOS, os estudantes ficaram satisfeitos ao confirmar que estavam no caminho certo. Na sexta tela, os grupos deveriam utilizar a ferramenta DESMOS para ajustar os limites da integral, configurando corretamente o intervalo de integração de acordo com os valores especificados no problema. Após calcular a integral, interprete o resultado obtido como o valor do trabalho realizado pela força sobre a partícula ao longo do percurso determinado. Esse foi o resultado obtido por ambos os grupos.

Figura 58 – Tela 6 do Problema 5.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na sétima e última tela do problema, a pergunta proposta tinha o objetivo de incentivar a reflexão sobre o uso da integral para resolver a questão, além de proporcionar uma oportunidade para discussão entre os grupos. As respostas a seguir refletem as discussões entre os grupos e suas compreensões sobre o problema.

Figura 59 – Tela 7 do Problema 5.

Qual é a importância da integral nesse contexto?

Como interpretamos o resultado obtido?

Julio Cesar de Mello e Souza

A importância se dá por ser um método eficiente para calcular o valor do trabalho. Podemos interpretar como a área, dentro do intervalo definido no eixo x, abaixo da linha do gráfico.

Alan Turing

A importância da integral é a precisão do cálculo da força, pois aproximamos calculando partes infinitesimais do deslocamento da partícula.

Que ao trabalho realizado é a área abaixo da função gerada a partir da integral definida da força.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A resposta de Júlio Cesar de Mello e Souza (GRUPO 2) destaca que a integral é “um método eficiente para calcular o valor do trabalho”, o que está correto, mas a explicação poderia ser mais detalhada sobre o porquê a integral é importante. A integral, neste caso, é usada para somar as pequenas quantidades de trabalho realizadas por uma força variável ao longo do deslocamento. Além disso, a segunda parte da resposta faz uma boa conexão ao afirmar que o resultado pode ser interpretado como a “área abaixo da linha do gráfico” dentro do intervalo de integração. No entanto, é importante deixar claro que essa área representa o trabalho realizado pela força, e a explicação poderia ser um pouco mais precisa, mencionando que a área sob o gráfico da força em função de x reflete a quantidade total de trabalho realizado ao longo do intervalo de deslocamento.

Já Alan Turing (GRUPO 1) sugere que a integral é importante porque “aproximamos calculando partes infinitesimais do deslocamento da partícula”. Essa explicação, apesar de estar em uma direção certa, está um pouco vaga. O conceito que a resposta tenta explicar é o de que, ao usar a integral, estamos somando pequenos “trabalhos” (infinitesimais) realizados por uma força ao longo de cada pequeno deslocamento. Seria mais preciso dizer que a integral permite somar contribuições infinitesimais de trabalho, já que a força varia ao longo do deslocamento. Na segunda parte da resposta, o grupo faz a afirmação correta de que “o trabalho realizado é a área abaixo da função gerada a partir da integral definida da força”. No entanto, o trecho “a função gerada a partir da integral” pode causar confusão. Na realidade, a função de força $f(x)$ é que gera a curva, e a integral calcula a área sob essa curva, não a “função gerada”. Um melhor entendimento do processo de integração poderia esclarecer melhor esse ponto.

Em seguida, o professor-pesquisador pausou a atividade e abriu o espaço para as discussões e reflexões do problema juntamente com a turma.

> ***P:*** *Então, o que vocês acharam do problema, de como ele estava formulado, das perguntas que foram propostas?*
>
> ***E2:*** *Para nós alunos da física o problema é tranquilo, nós estudamos essa aplicação da integral na disciplina, então foi de boa...*
>
> ***E8:*** *Eu que sou o único aluno do curso da matemática também achei legal o problema e consegui, juntamente com o grupo resolver o que ele pedia...*
>
> ***P:*** *Bom, ficou perceptível ao acompanhar a atividade aqui no ambiente, que as resoluções elas aconteceram de forma mais fluida vocês conseguiram, em alguns momentos é claro, apresentar questões mais aprofundadas sobre conceitos do cálculo integral e responder problemas envolvendo suas aplicações...*

Assim, o professor-pesquisador concluiu o primeiro momento do encontro e, em seguida, propôs uma pausa de vinte minutos, retomando as atividades logo após. Assim, o professor-pesquisador iniciou o segundo momento do quarto encontro.

No segundo momento desse encontro, foram aplicados dois questionários na etapa final da coleta de dados. O primeiro foi disponibilizado por meio de um *link* no *Google Forms* e teve como objetivo obter o feedback dos alunos sobre a experiência com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas e o uso da plataforma DESMOS no processo de ensino-aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II. O segundo questionário foi impresso em uma folha A4 e visava estimular a reflexão dos alunos sobre o uso da metodologia de Resolução de Problemas no ensino de Cálculo Integral, durante os encontros realizados.

As perguntas de ambos os questionários foram elaboradas em conjunto com o professor orientador da pesquisa, com o intuito de garantir maior objetividade na coleta dos dados.

Antes de distribuir os questionários, os alunos foram orientados a responder com sinceridade, sem se preocupar em agradar o professor-pesquisador ou temer eventuais represálias. Foi enfatizada a importância das respostas, esclarecendo que elas seriam fundamentais para a análise dos dados e, consequentemente, para a elaboração das conclusões da pesquisa.

Após a conclusão das atividades por parte de todos os alunos, o professor-pesquisador fez os agradecimentos finais, encerrando assim a pesquisa de campo. Inicialmente, expressou sua gratidão ao professor responsável, que, apesar de não ter participado diretamente dos encontros, manteve contato constante por telefone para acompanhar o andamento das aulas e também cedeu sua sala de aula para a realização da coleta de dados. Em seguida, agradeceu aos alunos pelo empenho e por aceitarem fazer parte da pesquisa como sujeitos de investigação. Após suas palavras, vários alunos compartilharam depoimentos.

Assim, registramos o seguinte diálogo entre alunos e o professor-pesquisador:

> ***E2:*** *Assim, eu não sei se é por causa que eu já tinha um certo conhecimento matemático, mas, eu não senti assim esse impacto positivo com essa metodologia estou sendo sincero. Mas, eu acredito que se eu não tivesse esse conhecimento da disciplina, eu acredito que me impactaria positivamente porque uso dos problemas,*

essa abordagem com o uso dos problemas foi muito legal, e a forma como os encontros foi conduzida foi muito legal...

***P:** Podem ser sinceros, fiquem tranquilos...*

***E8:** É sempre bom conhecer novas plataformas novos métodos de ensino e seu contribui muito para nossa formação...*

***E5:** Eu acho assim, que falando da metodologia, no meu caso como futura professora, eu acho que não é bom a gente se prender a algo que já está há muito tempo seguindo um padrão, por exemplo, não sou muito adepta da metodologia tradicional, mesmo que eu aprenda bastante, eu gosto mais desse tipo de metodologia. Então, assim, pra mim me deu segurança porque as vezes nas aulas de cálculo eu tinha alguma dificuldade e aqui eu percebia que eu consegui resolver com mais facilidade problemas com o mesmo nível de dificuldade. Então me deu uma segurança a mais de saber que eu tava aprendendo, assim, porque resolver integral aqui pra mim era totalmente natural e eu resolvia muito bem entendia, e, às vezes, nas aulas a gente travava e também percebo a necessidade de estudar melhor essa metodologia. Hoje em dia, no ensino médio, a gente vê que o ensino tradicional funciona só para uma parcela restrita dos alunos, então, como física, eu acho bem interessante essa metodologia de trazer problemas para que os alunos primeiramente fundamentem o conteúdo de acordo com o que eles entendem, na linguagem deles, no nível deles, pra depois eu introduzir os conceitos físicos. Porque quando os alunos tem um pré-conceito do que vai ser trabalhado, aí quando a gente chega com a parte formal eles recebem de uma forma mais leve, aí eles conseguem relacionar o que eles entendem com o que eu vou explicar. Então eu acho que a metodologia deu a interação muito boa pra relação professor-aluno na sala de aula...*

***P:** Mais alguém gostaria de falar?*

***E8:** Ela falou que eu ia falar... Mas foi muito bom, porque é sempre bom a gente utilizar novas metodologias. Porque às vezes o aluno ele aprende na forma tradicional, mas também tem outros alunos que precisam de outras formas para compreender o assunto, porque às vezes é mais disperso, então o professor tem que pensar em coisas que possam incluir toda a turma e essa metodologia ela se mostrou muito boa e muito interessante. Uma dificuldade que eu percebi é só a questão de poder levar essa questão da plataforma para sala de aula por conta da falta de laboratório de informática, computadores para que os alunos possam ter acesso, então é necessário fazer um planejamento para saber se vai dar certo.*

***E1:** Acho que assim a gente como futuros professores, eu não sei, acho que nem todos aqui vão ser professores, mas os que vão ser é muito importante cada vez mais a gente aprender novas metodologias de ensino, quanto mais melhor. Porque como a* *colega falou a gente não pode se prender a um só um tipo de metodologia de ensino, como aluno a gente ver como as aulas ficam terríveis e como professor a gente sabe que os alunos não vão pegar a matéria em si do jeito que eles devem aprender. Então assim é um ponto que a gente precisa estar se renovando está estudando e entender essa metodologia também e aprofundar cada vez mais.*

Esses diálogos confirmam que a pesquisa, fundamentada em uma estratégia de ensino-aprendizagem no contexto do Cálculo Integral, teve um impacto significativo nos alunos, levando-os a refletir e, na prática, perceber que são capazes de mudar velhos hábitos, tornando-se mais autônomos na busca por um aprendizado mais significativo. Assim, acreditamos que, para esses futuros professores, essa foi uma oportunidade rica para planejar o uso dessas estratégias em suas próprias aulas.

6.3 Uma análise da pesquisa na perspectiva da Resolução de Problemas e utilização das Tecnologias Digitais

Na subseção anterior estão descritos os quatros encontros que foram realizados durante a pesquisa de campo. Esses encontros foram de suma importância para a coleta de dados e sua análise. A partir desses dados coletados ficou evidente que podemos responder à nossa questão norteadora. Nesta subseção trazemos uma análise apoiada no Bogdan e Biklen (1994, p. 205):

> Apesar da analise ser complicada, constitui, igualmente, um processo que pode ser dividido em várias fases. Se for encarada como uma série de decisões e tarefas, em vez de ser vista como um imenso esforço de interpretação, a análise de dados surge como algo agradável.

Esses autores aconselham aos pesquisadores que realizem a análise de dados de forma descritiva, ou seja, na medida em que são recolhidos os dados paralelamente o pesquisador já vai efetivando sua análise. Nesse sentido, procuramos seguir parcialmente essa recomendação, ou seja, durante cada encontro o pesquisador gravou a fala dos participantes, evidenciando os principais acontecimentos em cada encontro. No final do quarto encontro aplicamos os questionários com os participantes da pesquisa. A seguir, apresentamos a análise sob a perspectiva da Resolução de Problemas e a utilização do DESMOS.

Durante os encontros, buscamos promover uma interação entre a teoria e a prática, permitindo aos alunos vivenciar situações mediante problemas, desafiando-os a aplicar conceitos matemáticos em situações práticas e reais, conforme é proposto por Onuchic e Allevato (2011). Na metodologia da Resolução de Problemas, o aluno é desafiado a aplicar e refletir sobre o que aprendeu, favorecendo a compreensão dos conceitos matemáticos, como demonstrado pelas experiências descritas pelos estudantes.

Na primeira pergunta, fizemos o seguinte questionamento: "***De que maneira a metodologia de Resolução de Problemas influenciou sua compreensão e aplicação dos conceitos de Cálculo Integral? Você pode dar um exemplo específico?***". As respostas foram transcritas e estão apresentadas a seguir.

> *E1 – Quando se resolve um problema induz a pensar no que aprendeu, montando assim o seu desenvolvimento.*
> *E6 – Me ajudou a compreender melhor a integração, o que seria uma área localizada abaixo de uma função no gráfico.*
> *E2 – Como já havia aprendido anteriormente, foi mais fácil. Porém, a ferramenta ajudou bastante.*
> *E5 – Me fez buscar nos meus conhecimentos a forma de resolução sem que ela fosse imposta e eu tivesse apenas que aplicar. Quando fomos resolver a primeira questão da pesquisa eu soube sem ninguém me dizer.*
> *E8 – Na prática pudemos ver o comportamento das funções e aplicação da teoria na prática, como é o caso do cálculo do trabalho dado a função força.*
> *E3 – Me permitiu aprofundar mais sobre os conceitos de cálculo. Resolver uma integral analisando a função no gráfico me faz ter um outro ponto de vista.*

Para Allevato e Onuchic (2009), a Resolução de Problemas pode levar os alunos a se engajarem de forma ativa no processo de aprendizagem, construindo significado a partir da análise do problema. Além disso, a metodologia requer que o aluno vá além da simples aplicação de técnicas matemáticas, incentivando-o a refletir criticamente sobre as soluções, o que promove o desenvolvimento do raciocínio matemático (Onuchic, 1999).

O estudante E6 ressalta que a metodologia foi útil para entender o conceito da integral como a área sob a curva, algo que também é destacado pelo estudante E3, que enfatiza que a análise gráfica da integral proporcionou uma compreensão mais aprofundada do conceito. Essa interação com o conteúdo, ao permitir a visualização do conceito por meio do gráfico, enriqueceu a compreensão do conceito de integração, ampliando-a para além de sua definição abstrata.

O estudante E2 reconheceu que a metodologia ajudou a reforçar o que já havia sido aprendido, destacando o papel que a Resolução de Problemas pode ter, ao estudar conceitos de forma aplicada. A estudante E5 complementa essa ideia, refletindo que a Resolução de Problemas possibilitou o aprendizado autônomo, permitindo ao aluno buscar soluções próprias. O comentário do estudante E8 destacou de forma clara a aplicação prática dos conceitos que foram aprendidos.

As respostas à questão inicial reforçam a conexão entre o conhecimento abstrato e a realidade prática (Van de Walle, 2001). Isso está diretamente ligado ao que é proposto por Onuchic e Allevato (2004), no qual os alunos são estimulados a adotar diversas abordagens, incluindo a visualização, para explorar conceitos matemáticos. Além disso, o uso do software DESMOS na construção e análise gráfica possibilitou uma perspectiva mais rica e intuitiva, oportunizando que o aluno se aproprie dos conceitos de forma mais profunda.

Na segunda pergunta do questionário, solicitamos aos alunos que apontassem aspectos positivos ou negativos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, em comparação com as abordagens tradicionais de ensino. Assim, formulamos a seguinte questão: "***Como você compara a eficácia da Resolução de Problemas com as abordagens tradicionais de ensino em relação à aprendizagem do Cálculo? Quais vantagens e desvantagens você percebe?***". As respostas estão apresentadas a seguir:

> *E1 – A Resolução de Problemas induz ou provoca uma interação e um estudo ativo ao contrário da tradicional.*
>
> *E6 – No momento acredito numa eficácia semelhante a depender da ocasião. A vantagem é que chama atenção e desperta a curiosidade, pois você busca entender aquilo. A desvantagem seria uma possível frustração do aluno.*
>
> *E2 – Quanto a Resolução de Problemas tem uma vantagem por contar o elemento desafio, o que um estímulo a mais.*
>
> *E5 – Eu percebo a Resolução de Problemas como uma maneira de mostrar aos alunos que todo pensamento é válido e que não somos capazes de produzir e confiar no nosso próprio conhecimento. Desvantagens: tempo de estudo e produção do método e materiais. Vantagens: mais segurança por parte dos alunos e aprendizagem mais fluída.*
>
> *E8 – É uma metodologia de ensino bastante interessante e tem suas vantagens em comparação com o método tradicional. A desvantagem é que algumas pessoas podem não assimilar o conteúdo por ter vista ainda a teoria.*

E3 – Acho a Resolução de Problemas superior a tradicional. A vantagem da Resolução de Problemas é que o aluno tem o manejo com as ideias a serem ensinadas, como por exemplo o cálculo, o aluno pode ter um maior aprofundamento nos conceitos ao invés de apenas ouvir o professor falar.

Partindo das respostas apresentadas, é possível observar que a metodologia de Resolução de Problemas contribuiu na interatividade e no aprendizado ativo, estimulando a curiosidade e o desafio, proporcionando maior motivação aos alunos. Também valorizou o pensamento dos estudantes, permitindo que eles construíssem e aprofundassem seu conhecimento de forma mais autonomia. Esses pontos estão em consonância com a visão de Onuchic (1999), segundo a qual o ensino deve focar em ajudar o aluno a entender os conceitos, processos e técnicas necessários para o trabalho. Em outras palavras, os principais objetivos são promover o pensamento crítico e a compreensão.

A terceira pergunta aborda o trabalho colaborativo dentro da metodologia de Resolução de Problemas e seu impacto na compreensão dos conceitos pelos alunos. A pergunta é a seguinte: "***Você percebeu que o trabalho colaborativo nas atividades de resolução de problemas aprofundou sua compreensão do conteúdo? Como isso aconteceu?***".

E1 – Pelo uso de ferramentas tecnológicas e a disponibilidade do professor, o progresso surte efeito na própria aula.

E6 – Sim, de fato. Com resolução, às vezes divergia as respostas dos colegas, o que nos levava a questionar os conceitos para termos resultados iguais. O compartilhamento de ideias e o conhecimento ajudou a resolver e entender os problemas e conceitos.

E2 – Com certeza, a discussão sobre os assuntos foi um elemento chave para a compreensão dos assuntos tratados.

E5 – Sim. Porque é possível observar diferentes compreensões para uma mesma questão, fazendo com que tenhamos diferentes métodos para uma mesma resolução.

E8 – Sim. Pois foi através do trabalho colaborativo do grupo que conseguimos responder as atividades e só foi possível aprofundar a compreensão efetuando as ideias de cada um.

E3 – Sim. A comunicação ativa com meus colegas tornou o processo mais divertido e dinâmico.

Segundo Onuchic e Allevato (2011), a interação entre os alunos é uma das chaves para a construção do conhecimento, pois permite que eles explorem e confrontem diferentes soluções e abordagens, o que é corroborado pelas respostas dos alunos. Além disso, os estudantes mencionaram o papel do professor como mediador no processo, o que é consistentemente reforçado pela perspectiva das autoras. Observar e incentivar os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e métodos conhecidos para resolver problemas, além de acompanhar e intervir nas dificuldades que possam surgir, ajudando-os a superar obstáculos e a continuar com a resolução. Essas são algumas das iniciativas do professor para assegurar a compreensão e a aplicação dos conceitos e técnicas essenciais.

Na quarta pergunta, formulada como "***Quais habilidades você desenvolveu ao utilizar a metodologia de Resolução de Problemas, que considera importantes para sua formação como professor de Matemática e Física?***", o objetivo é compreender como essa metodologia contribui para o desenvolvimento de competências essenciais na formação de futuros professores dessas disciplinas. As respostas estão apresentadas a seguir:

E1 – No entendimento da proposta de ensino para quando e como usar de ferramentas e competências.

E6 – A explicação detalhada, espaçada e refletida, além da interação com gráficos e grupos, A habilidade de discutir em grupo.

E2 – A interpretação das questões e o modo de resolver.

E5 – Me senti desafiada a resolver as questões e confiar que a forma de resolução é aplicável. Como futura professora me inspirou a aprofundar essa metodologia e aplicar em sala de aula.

E8 – Durante a resolução de problema, a cooperação entre grupos se tornou uma habilidade primordial. Porquanto, essa habilidade foi bastante desenvolvida, tendo em vista as discussões da resolução do problema.

E3 – Ter novas visões sobre o conteúdo apresentado.

Por meio das falas destacadas, é possível perceber a relevância de termos essa preocupação com a formação docente, enfatizando as habilidades que podem ser desenvolvidas por intermédio da metodologia de Resolução de Problemas. Entre essas habilidades, os estudantes destacaram a capacidade de compreender a proposta de ensino e saber quando e como utilizar ferramentas e competências, a habilidade de explicar de forma clara e reflexiva, interagir e promover discussões em grupo.

Na quinta pergunta, indagamos: “***Durante as atividades, você se sentiu mais motivado ou engajado? O que contribuiu para isso, em comparação com as aulas mais tradicionais?***”. As respostas foram as seguintes:

> *E1 – A junção, os debates e as trocas de ideias deram uma quebra no “gelo” trazido das aulas tradicionais.*
>
> *E6 – Sim, o que contribuiu foi a interação entre os alunos para discutir possíveis resoluções, após termos o conhecimento necessário, discutimos os resultados, o que é raro ou não se tem nas aulas tradicionais.*
>
> *E2 – Como falado o fato do desafio ajudou muito a resolução quanto a conversa com os colegas.*
>
> *E5 – Sim. A abertura que foi dada e o incentivo do professor para acreditar que estava indo pelo caminho certo.*
>
> *E8 – Me senti muito motivado, cada atividade era um desafio. Me sentia mais engajado quando o grupo era mais participativo e estavam dispostos na resolução dos problemas.*
>
> *E3 – Acho que uma mistura dos dois Uma pedagogia mais dinâmica e interativa, algo não tão comum em aulas tradicionais.*

As respostas dos participantes destacam a interação, o compartilhamento de ideias e os desafios como fatores essenciais para aumentar a motivação e o engajamento. A ênfase nas discussões em grupo, nos debates e no apoio do professor demonstrou que os alunos apresentam – se mais motivados em ambientes mais informais e colaborativos, em contraste com as aulas tradicionais, que podem ser percebidas como mais monótonas ou centradas no professor. Diferente das abordagens tradicionais a utilização da Resolução de Problemas incentivou a interação, o debate, a troca de ideias, proporcionando um aumento na motivação e no engajamento dos alunos.

O segundo questionário foi aplicado por meio do *Google Forms* e teve como objetivo coletar o *feedback* dos alunos sobre a experiência com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Resolução de Problemas e o uso da plataforma DESMOS no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II. O questionário foi composto por dez perguntas, sendo oito de múltipla escolha e duas objetivas. A seguir, apresentamos a análise das respostas dos estudantes a cada pergunta.

A primeira pergunta foi a seguinte: “***Qual a sua percepção geral sobre a utilização da plataforma DESMOS nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral II?***”

e as opções de resposta foram bem definidas, com diferentes níveis de avaliação (Excelente, Boa, Regular, Ruim, Muito ruim), o que permitiu uma análise da satisfação da turma. A maioria dos participantes (66,7%) avaliou a plataforma como excelente, indicando uma percepção muito positiva em relação à utilização do DESMOS nas aulas. Além disso, 33,3% avaliaram como boa, o que também é uma avaliação positiva, embora um pouco menos entusiástica do que as respostas “Excelente”. A utilização do DESMOS nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral II é vista de maneira positiva pelos participantes da pesquisa.

A segunda pergunta foi formulada da seguinte maneira: “***Quais funcionalidades do DESMOS você considerou mais úteis para a sua aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II? (Você pode selecionar mais de uma opção)***”. O objetivo dessa questão era identificar quais funcionalidades do DESMOS foram mais eficazes para o aprendizado dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II.

As respostas foram as seguintes: todos os participantes apontaram os gráficos interativos como uma funcionalidade útil, destacando a importância da visualização gráfica de funções, limites, derivadas e integrais para a compreensão de conceitos complexos em cálculo. Já, 77,8% dos participantes consideraram as simulações de funções úteis, pois elas permitem explorar diferentes cenários matemáticos e visualizar como alterações nas variáveis impactam o comportamento das funções.

Enquanto isso, 55,6% indicaram que as análises de limites são fundamentais no cálculo, uma vez que capacidade de visualizar e manipular limites de forma dinâmica facilita a compreensão dos comportamentos assintóticos e contínuos das funções. A resolução das equações foi considerada úteis por 88,9% dos participantes. A opção “outros” foi indicada por apenas um participante (11,1%), que ressaltou a importância da “*interação possível entre vários grupos para uma discussão que leve a um resultado convincente*”.

A terceira pergunta, intitulada “***Como você avalia a sua compreensão dos conceitos matemáticos após a utilização da plataforma DESMOS?***”, teve como objetivo avaliar o impacto da plataforma DESMOS na melhoria da compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes. As opções de resposta foram: “Aumentou significativamente”, “Aumentou moderadamente”, “Permaneceu igual”, “Diminuiu moderadamente” e “Diminuiu significativamente”.

A maioria dos estudantes (66,7%) indicou que a percepção dos conceitos matemáticos aumentou moderadamente, sugerindo que a ferramenta contribuiu para uma melhora no entendimento do conteúdo. Já, 33,3% dos participantes afirmaram que sua assimilação aumentou significativamente, o que é um indicativo de que, para uma parte considerável dos usuários, a plataforma teve um impacto substancial na melhoria de seus conhecimentos matemáticos.

Na quarta pergunta, buscamos investigar se os estudantes encontraram alguma funcionalidade difícil de utilizar no DESMOS. A questão formulada foi: "***Houve alguma funcionalidade do DESMOS que você achou difícil de usar? Se sim, qual?***". As respostas obtidas revelaram que a maioria dos participantes (seis de nove) não enfrentaram dificuldades ao usar as funcionalidades do DESMOS, sugerindo que a interface e as ferramentas são claras e acessíveis para a maior parte dos usuários.

No entanto, dois participantes relataram dificuldades específicas ao utilizar a escrita matemática, especialmente na inserção de certos símbolos, como o de integral. O desafio com símbolos e a necessidade de algum "conhecimento de escrita" no ambiente da plataforma podem representar um obstáculo para o uso pleno do DESMOS. Além disso, um estudante mencionou dificuldades ao tentar plotar gráficos complexos ou ao ajustar configurações para visualizar as funções da maneira desejada.

A quinta pergunta foi formulada da seguinte forma: "***De que maneira a metodologia de Resolução de Problemas impactou a sua aprendizagem?***", com as seguintes opções de resposta: Impacto muito positivo; Impacto positivo; Sem impacto; Impacto negativo; Impacto muito negativo. A opção "Impacto positivo" foi escolhida por sete participantes, representando a maioria das respostas. Somente um estudante indicou que a metodologia teve um "impacto muito positivo". Apenas um estudante afirmou que a metodologia não teve impacto algum na sua aprendizagem. Dessa forma, a metodologia de Resolução de Problemas foi considerada benéfica ou, ao menos, pelo menos, teve um efeito favorável para a maioria dos participantes.

A sexta pergunta solicitou que os estudantes avaliassem o processo de interação e colaboração entre os grupos. As respostas mostram uma avaliação amplamente positiva sobre a interação e colaboração entre os alunos durante a resolução dos problemas propostos. Cinco respostas (55,6%) indicaram que mais da metade dos participantes consideraram a interação e colaboração como excelente. Quatro respostas (44,4%) classificaram-na como boa. Em termos gerais, a cooperação e a interação entre os estudantes foram percebidas de maneira favorável, com uma quantidade expressiva ressaltando a experiência como ótima ou satisfatória.

Na sétima pergunta, questionamos: "***Em sua opinião, quais etapas do processo de resolução de problemas foram mais eficazes para o seu aprendizado?***" Esta pergunta permite selecionar múltiplas opções. As etapas mais significativas para o aprendizado, segundo as respostas dos estudantes, foram: Resolução do problema (88,9%); Leitura em conjunto (77,8%); Plenária (55,5%) e Busca de consenso (55,5%). Além disso, a interação entre os participantes e a troca de ideias durante a leitura conjunta foram altamente valorizadas, promovendo uma compreensão mais profunda e um aprendizado significativo. A busca pelo consenso, visa alcançar um acordo sobre soluções ou ideias, estimulando a colaboração e o entendimento mútuo.

A oitava pergunta formulada foi: "***Você percebe que houve um desenvolvimento nas suas habilidades de resolução de problemas após essa experiência?***". Todos os participantes (100%) notaram algum grau de aprimoramento em suas habilidades de resolver problemas, no qual 44,4% indicaram um desenvolvimento significativo ("sim, muito") e 55,6% apontaram um progresso mais modesto ("sim, um pouco").

Na nona pergunta, questionamos: "***Quais sugestões você daria para melhorar a experiência de ensino-aprendizagem utilizando o DESMOS?***" As respostas fornecidas revelaram tendências e sugestões comuns, além de áreas com potencial para expandir o uso da plataforma. Entre as sugestões, destacam-se: gravação de vídeos, exploração de mais abordagens matemáticas, aprendizagem dos comandos para criação de atividades, foco em outras funcionalidades, interação entre alunos e resolução de problemas em grupo, e aulas mais voltadas para as funcionalidades gerais. Essas sugestões indicam a necessidade de uma maior personalização e aprofundamento no uso do DESMOS, com ênfase na interação e na utilização das diversas ferramentas da plataforma para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico e envolvente.

Na décima e última pergunta, perguntamos: "**Há mais algum comentário ou observação que você gostaria de compartilhar sobre sua experiência na turma?**". As respostas fornecidas sobre a experiência na turma revelam uma experiência predominantemente positiva e enriquecedora. Muitos participantes destacaram o aprendizado significativo, o que fica evidenciado por comentários como

“*Foi um momento de muito aprendizado”* e “*Foi uma ótima experiência onde eu revisei e aprendi conceitos básicos que eram verdadeiramente necessários*”.

Outros alunos expressaram satisfação com a metodologia utilizada, ressaltando sua natureza inovadora, interativa e simplificada, como observado na frase “É uma metodologia de fato interessante, porque propõe algo novo, interativo e simplificado”. A experiência também gerou confiança nos participantes, um deles mencionou que se sentiu mais seguro ao resolver integrais. Além disso, alguns participantes encontram - se inspirados pela pesquisa.

Um dos alunos afirmou que a vivência o estimulou a se concentrar em uma pesquisa relacionada que poderá ser aplicada em seu trabalho final de graduação. Mesmo com algumas respostas mais breves ou imparciais, a maior parte dos participantes mostrou um efeito positivo, tanto no aprendizado quanto na motivação para estudar.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No contexto atual, a proficiência em habilidades técnicas, como memorização de fatos e resolução de problemas rotineiros, já não é suficiente. Para preparar os alunos para os desafios do mundo moderno, é necessário desenvolver competências que possibilitem a resolução de problemas não convencionais, a busca por soluções inovadoras e a capacidade de comunicar e justificar resultados de forma clara e eficiente. Essas habilidades podem ser cultivadas por meio de abordagens pedagógicas que promovam o pensamento crítico, criativo e a inovação, permitindo que todos os alunos desbloqueiem seu pleno potencial.

Nesse sentido, esse trabalho teve como objetivo investigar o processo de ensino-aprendizagem do Cálculo Integral em um ambiente de Resolução de Problemas e utilização das Tecnologias Digitais, visando verificar as potencialidades e possibilidades na formalização do Cálculo Integral através da metodologia de Resolução de Problemas e a utilização da plataforma DESMOS.

A proposta dessa pesquisa foi analisar como o uso da metodologia de Resolução de Problemas e das Tecnologias Digitais, especialmente a plataforma DESMOS, pode contribuir para a compreensão e a formalização de conceitos do Cálculo Integral pelos estudantes. O trabalho buscou responder à seguinte questão: **Como a metodologia de Resolução de Problemas, aliada ao uso da plataforma DESMOS, pode potencializar a compreensão e a formalização da Integral no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral?**

Os resultados indicam que o uso da Resolução de Problemas em conjunto com a plataforma DESMOS tem grande potencial para auxiliar na compreensão de conceitos abstratos do Cálculo Integral, como integrais e a relação entre as representações algébricas e gráficas. A partir dos encontros realizados durante a pesquisa de campo os estudantes relataram uma maior facilidade para visualizar e manipular funções complexas, o que contribuiu para uma melhor compreensão dos conceitos. Esses achados corroboram a teoria de Onuchic e Allevato (2004, 2009, 2011), que destacam a Resolução de Problemas como uma metodologia capaz de antecipar a formalização dos conceitos, permitindo que os alunos construam seu próprio conhecimento a partir da exploração prática e da resolução de desafios matemáticos.

Entre os pontos mais destacados, está a melhoria no entendimento dos conceitos, especialmente quando os alunos são desafiados a resolver problemas de forma prática e visual, como observamos com o uso do software DESMOS. Esse recurso permitiu a visualização gráfica das funções e integrais e fortaleceu a compreensão dos alunos, especialmente ao conectar o conteúdo teórico com aplicações reais. A interação entre colegas e o trabalho colaborativo também foram mencionados como elementos chave para aprofundar o conhecimento, promovendo uma troca rica de ideias e soluções, conforme apontado pelas respostas dos estudantes.

Além disso, a metodologia possibilitou o desenvolvimento de competências importantes para futuros professores de Matemática e Física, como a habilidade de ensinar de forma reflexiva, de utilizar ferramentas adequadas no processo de aprendizagem e de fomentar discussões construtivas em grupo. A abordagem proporcionou aos estudantes a oportunidade de explorar novos caminhos, diferentemente das aulas tradicionais, que geralmente são mais expositivas e passivas.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, alguns desafios metodológicos foram identificados, particularmente no que se refere à integração da plataforma DESMOS com a metodologia de Resolução de Problemas. Um dos principais obstáculos foi a adaptação dos alunos ao uso do *software* de maneira autônoma, além de algumas limitações na plataforma em relação a funções específicas do Cálculo Integral.

No entanto, estratégias como a realização das atividades em grupo, o planejamento cuidadoso das atividades e a orientação contínua dos alunos ajudaram a superar esses desafios. Essas dificuldades, no entanto, estão em sintonia com a abordagem de Onuchic e Allevato (2004), que enfatizam a importância de um planejamento cuidadoso e da adaptação das atividades para que a Resolução de Problemas seja eficaz, especialmente quando envolve o uso de novas tecnologias.

Embora os resultados tenham sido promissores, a pesquisa enfrentou limitações, como a amostra restrita de alunos e a falta de um acompanhamento mais detalhado ao longo de um semestre completo. A familiaridade com as Tecnologias Digitais pode ser um desafio para alguns alunos, o que requer um suporte contínuo no uso da plataforma DESMOS. Essas limitações podem ser vistas como oportunidades para ajustar a metodologia e a abordagem de ensino, conforme sugerido por Onuchic e Allevato (2009), que defendem uma avaliação contínua e formativa do processo de aprendizagem, permitindo ajustes durante o desenvolvimento da pesquisa.

Acredita-se que esta pesquisa contribua para a literatura sobre o ensino de Cálculo Integral ao explorar de maneira mais instigante o uso das Tecnologias Digitais no ensino de conceitos complexos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Além disso, ao aplicar a metodologia de Resolução de Problemas, que coloca o aluno como protagonista do seu aprendizado, o estudo tem o potencial de promover um ensino mais ativo e com significado, alinhado com as tendências contemporâneas de ensino de Matemática. Como enfatizado por Onuchic e Allevato (2011), a Resolução de Problemas não se limita à busca de respostas definitivas, mas é uma oportunidade para explorar conceitos matemáticos de maneira contextualizada e crítica, permitindo aos alunos desenvolverem pensamento matemático e uma compreensão mais profunda.

Com base na experiência realizada neste trabalho, destacamos que a utilização da plataforma DESMOS, aliada à metodologia de Resolução de Problemas, oferece um vasto campo para o aprofundamento de pesquisas futuras no ensino do Cálculo Integral. Nesse sentido, sugerimos o aprimoramento contínuo das ferramentas da plataforma, incentivando outros professores a explorar novas abordagens para atividades relacionadas ao conceito de integral, em diferentes contextos.

Essa abordagem contribuiria para a criação de atividades interativos mais desafiadores, estimulando os alunos a relacionarem diferentes representações de uma integral, além de possibilitar simulações e experimentações com modelos matemáticos. Esse tipo de expansão tornaria o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico e envolvente, atendendo às diversas necessidades dos estudantes e promovendo uma maior imersão nos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI).

Portanto, outros pesquisadores poderiam investigar o uso da plataforma em tópicos como derivadas, limites e séries de Taylor, ampliando a abordagem interdisciplinar e prática do ensino de cálculo. A combinação de Resolução de Problemas e Tecnologias Digitais pode, assim, abrir novas fronteiras para o ensino de cálculo, favorecendo a compreensão de conceitos fundamentais e ampliando o horizonte para futuras pesquisas e inovações pedagógicas que incentivem a formação de competências críticas e criativas.

Em suma, a pesquisa apresenta resultados promissores, sugerindo que a metodologia de Resolução de Problemas, aliada ao uso de Tecnologias Digitais, tem um grande potencial para enriquecer a aprendizagem do Cálculo Integral.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco, 2014, p. 35-52.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes contextos. **VIDYA**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232, jun. 2014.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 33, n. 55, p.133-156, jul./dez. 2009. Disponível em: http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/77/228. Acesso em: 24 out. 2021.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio (org.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 40-63.

ALLEVATO; Norma Suely Gomes; VIEIRA, Gilberto. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**: Revista de Investigação em Educação Matemática, Lisboa, v. 25, n. 1, p. 113-131, jun. 2016. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22926/16992. Acesso em: 02 dez. 2023.

ARAÚJO, Matheus Marques de. A construção do conceito de limite através da resolução de problemas. 2020. 146f. **Dissertação** (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2022. Disponível em: http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/4163.

ANTUNES, Gladson; CAMBRAINHA, Michel. Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem. **IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, SBM**, 2020. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2020/07/e-book_Desmos_final.pdf. Acesso em: 20 mar. 2023.

AZEVEDO, Eliane Bihuna de; PALHARES, Pedro Manuel Baptista; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 17, p. e020012, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id252. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/187. Acesso em: 6 nov. 2023.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SCUCUGLIA, Ricardo Rodrigues da Silva; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SOUTO, Daise Lago Pereira; CANEDO JUNIOR, Neil da Rocha. **Vídeos na educação matemática:** Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

Bueno, Rafael Winícius da Silva. **A construção histórica do conceito de integral**. Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

BUENO, Rafael Winícius da Silva; VIALI, Lori. A construção histórica do conceito de integral e os Três Mundos da Matemática. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 11, p. e0007, 2023. DOI: 10.5965/2357724X112023e0007. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/17853. Acesso em: 15 jul. 2024.

CAI, Jinfa; LESTER, Frank. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 60, p. 147-162, jan./jun. 2012. Tradução: BASTOS, Antonio Sergio Abrahão Monteiro; ALLEVATO, Norma Suely Gomes.

CÂNDIDO, José Valério Moreira. **Sala Invertida de Funções Trigonométricas usando a Camada de Computação do Desmos**. 2022. 39 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/366977385_Sala_Invertida_de_Funcoes_Trigonometricas_usando_a_Camada_de_Computacao_do_Desmos. Acesso em: 12 jan. 2024.

COSTA, Patrícia Oliveira. Educação on-line na Universidade: o processo de ensinar e aprender cálculo na era das tecnologias digitais. 2010. 145 f. **Dissertação** (Mestrado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/13814. Acesso em: 5 mai. 2023.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de Matemática.** 3. Ed. São Paulo: Ática, 1991.

EUZÉBIO, Julian da Silva. Proposta de ensino de geometria analítica utilizando o Desmos. 2018. 120 f. **Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede

Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2018. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3833. Acesso em: 12 mai. 2023.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. P. 844.

FOSTER, Colin. **The fundamental problem with teaching problem solving**. ATM, 2019.

FRANÇA, Jéssica de Aguiar. Proposta para o ensino de funções usando a ferramenta digital Desmos. 2022. **Dissertação** (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2022. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/240889.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004.

GOMES, Diego Monteiro; STAHL, Nilson Sergio Peres. A Resolução de Problemas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia: uma experiência. **Revista Thema**, Pelotas, v. 17, n. 2, p. 294–308, 2020. DOI: 10.15536/thema.V17.2020.294-308.1664. Disponível em: https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1664. Acesso em: 6 nov. 2023.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

HENING, Rogério Fabricio. Análise de uma tarefa exploratória aliada ao uso de tecnologias digitais em aulas de cálculo no contexto remoto. 2023. **Dissertação** (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/31478.

HUANCA, Roger Ruben Huaman. A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da Sala de Aula. **Boletim de Educação Matemática**, v. 20, n. 27, 2007.

HUANCA, Roger Ruben Huaman; ALMEIDA, Beatriz Rodrigues de. O Ensino e a Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas na sala de aula: por quê? **Anais do III CONAPESC**, Campina Grande/PB, v. 1, 2018. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/43252. Acesso em: 02 dez. 2021.

HUANCA, Roger Ruben Huaman; SILVA, Diego Jonathan Bezerra; SOUZA, Pammella Queiroz de. **Cálculo Diferencial sob a Perspectiva da Resolução de Problemas**. Campina Grande: Eduepb, 2021, 144p. Disponível em: https://zenodo.org/record/5128399#.YVzB59rMLIU. Acesso em: 16. nov. 2021.

JESUS, Marcos Antônio Santos de. As atitudes e desempenho em cálculo diferencial e integral de estudantes de engenharia. *In:* GODOY, Elenilton Vieira; GERAB, Fábio (orgs.). **Ensino e aprendizagem na educação superior**: inivações, propostas e desafios. Rio de Janeiro: Atlas Books, 2018. P. 67-86.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. Campinas: Editora Papirus. 2012. 141p.

LEMOS, Leonardo Santos. **Uma proposta para o ensino remoto de áreas de figuras planas usando a calculadora gráfica Demos**. 2021. 62 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO, Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: http://hdl.handle.net/unirio/13343. Acesso em: 20 jan. 2024.

LIMA, Gabriel Loureiro De; SILVA, Benedito Antônio Da. O Ensino do Cálculo MATEMÁTICA 2012, Petrópolis. **Anais** [...] Petrópolis, 2012. Disponível em: sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT04/CC22407867874_A.pdf. Acesso em: 12 mar. 2023.

MARTINS, Elcimar Simão; ARAÚJO, Damião Júnio Gonçalves; OLIVEIRA, Rodolfo Ferreira de. Ensino e aprendizagem de Cálculo I em cursos de licenciatura: limites e possibilidades. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 3, n. 9, p. 18–32, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v3i9.52. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/52>. Acesso em: 14 jul. 2023.

MELCHIORS, Angeline; SOARES, Maricélia. História do Cálculo Diferencial e Integral. **Maiêutica**, Indaial, v. 1, n. 1, p. 67-79, jan. 2013. Disponível em: https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/view/556. Acesso em: 04 jan. 2022.

NUNES, Célia Barros; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; PIRONEL, Márcio; ANDRADE, Cecília Pereira de. Resolução de Problemas em sala de aula. **Com a Palavra, o Professor**, *[S. l.]*, v. 7, n. 18, p. 57–59, 2022. DOI: 10.23864/cpp.v7i18.867. Disponível em: http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/867. Acesso em: 17 nov. 2024.

NUNES, Célia Barros; REIS, Minervina Joseli Espíndola; FERREIRA, Luanne Lima; SILVA, Leonardo Brito da. O Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas no Curso de Engenharia Civil. **Revista de Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 17, p. e020029, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id291. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/204. Acesso em: 6 nov. 2023.

OLIVEIRA, Patrícia Benevides de; BELLEMAIN, Franck Gilbert René. Teorema Fundamental do Cálculo: uma análise epistemológica. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 18, n. 41, p. 159-175, dez. 2022. ISSN 2317-5125. Disponível em:

<https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/13576/9563>. Acesso em: 22 jul. 2024. doi:http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v18i41.13576.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiabi (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 199-220.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO; Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Formação de Professores: mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática. *In*: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian (orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Brasília: SBEM, 2009, p. 169-187.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO; Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 5, n. 41, dez, 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739/4625. Acesso em: 22 jul. 2024.

PEREIRA, Giselle Moraes Resende. Cálculo diferencial e integral no curso de Agronomia: uma perspectiva de trabalho de projetos com modelagem matemática e tecnologias digitais de informação e comunicação. 2019. 311 f. **Tese** (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. DOI http://doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2473.

PIRONEL, Márcio; VALLILO, Sabrina Aparecida Martins. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. . In: ONUCHIC, L.D.L.R; JUNIOR, L.C.L; PIRONEL,M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 279-304.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo enfoque do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. **Resolução de Problemas**: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. doi:10.11606/T.48.2003.tde-27022014-121106. Acesso em: 2024-11-16.

RIBEIRO, Marcos Vinícius. O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas. 2010. 324 f. **Dissertação** (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e

Ciências Exatas, 2010. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/91053. Acesso em: 06 nov. 2023.

RODRIGUES, Luciana Ávila; NEVES, Regina da Silva Pina; DÖRR, Raquel Carneiro. Cálculo Diferencial e Integral na Graduação em Matemática: Contribuições da Resolução de Problemas e da Análise da Produção Escrita. **Revemop**, v. 5, p. e202326, 31 dez. 2023. DOI: https://doi.org/10.33532/revemop.e202326. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/7110. Acesso em: 06 nov. 2023.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SANTOS, Guilherme Mendes Tomaz dos; REIS, Júlio Paulo Cabral dos; SILVA, Marcos Manoel da. Tecnologias digitais na educação superior: reflexões acerca da disciplina de cálculo diferencial e integral i / digitals technologies in higher education: reflections about the differential and integral calculation discipline i. **Brazilian Journal of Development**, *[S. l.]*, v. 6, n. 8, p. 55191–55201, 2020. DOI: 10.34117/bjdv6n8-078. Disponível em: https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/14554. Acesso em: 6 nov. 2023.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER, Frank K., JR. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SERRAZINA, Maria de Lurdes Marquês. Resolução de problemas e formação de professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, p. 55-83, 2017.

SILVA, Diego Jonathan Bezerra; HUANCA, Roger Ruben Huaman. Prática no ensino de matemática: resolução e exploração de um problema com o cálculo diferencial. **Anais IV CONAPESC**... Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/57125>. Acesso em: 17/11/2024.

SODRÉ, Renaldo; LAUDARES, João Bosco; FURLETTI, Saulo. Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral Contextualizados na Engenharia Civil. **Abakós**, v. 11, n. 2, p. 67-90, 13 nov. 2023. DOI: https://doi.org/10.5752/P.2316-9451.2023v11n2p67-90. Disponível em: https://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/30425. Acesso em: 6 nov. 2023.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

STRAUSS, Anselm A.; CORBIN, Juliet. **Pesquisa qualitativa**: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento da teoria fundamentada. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

THOMAS, George B.; WEIER, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**–volume 1 e 2. 2012.

VAN DE WALLE, John. **Matemática no Ensino Fundamental**: Formação de professores e Aplicações em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

VOGADO, Gilberto Emanoel Reis. O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas. 2014. 167 f. **Tese** (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11017.

APÊNDICE A – CARTA AO COORDENADOR DO CURSO DE FÍSICA

UEPB
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Campina Grande, setembro de 2024

Ilmo Sr.
Prof. Dr. Fernando Martins de Paiva
Coordenador do Curso de Física
UECE - Campus Iguatu

Prezado Coordenador

Na condição de professor orientador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB de Campina Grande – PB, venho, por meio desta, apresentar o meu orientando de mestrado **Elieudo Nogueira Silva** a esta instituição a fim de desenvolver a sua pesquisa de mestrado intitulado: **Ensino-Aprendizagem do Cálculo Integral em um ambiente de Resolução de Problema e utilização das Tecnologias Digitais** que, tem por objetivo contribuir significativamente com a formação inicial de futuros professores de Matemática e Física que deverão ensinar na Educação Básica.

Na certeza de contar com seu apoio gostaríamos de sua permissão para que o mesmo venha a realizar a coleta de dados, a partir de setembro, com os alunos do 3º semestre/período do curso de Física, ministrando a disciplina: "Cálculo Diferencial e Integral II". Coloco-me à disposição para esclarecimentos que se fizerem necessários.

Atenciosamente,

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca
Orientador da pesquisa

RECEBIDO
EM 19/09/2024

APÊNDICE B – CARTA AO COORDENADOR DO CURSO DE MATEMÁTICA

UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Campina Grande, setembro de 2024

Ilma Sra.
Maria Wanderlandia de Lavor Coriolano
Coordenadora do Curso de Matemática
UECE - Campus Iguatu

Prezada Coordenadora

Na condição de professor orientador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB de Campina Grande – PB, venho, por meio desta, apresentar o meu orientando de mestrado **Elieudo Nogueira Silva** a esta instituição a fim de desenvolver a sua pesquisa de mestrado intitulado: **Ensino-Aprendizagem do Cálculo Integral em um ambiente de Resolução de Problema e utilização das Tecnologias Digitais** que, tem por objetivo contribuir significativamente com a formação inicial de futuros professores de Matemática e Física que deverão ensinar na Educação Básica.

Na certeza de contar com seu apoio gostaríamos de sua permissão para que o mesmo venha a realizar a coleta de dados, a partir de setembro, com os alunos do 3º semestre/período do curso de Matemática, ministrando a disciplina: “Cálculo Diferencial e Integral II”. Coloco-me à disposição para esclarecimentos que se fizerem necessários.

Atenciosamente,

gov.br
Documento assinado digitalmente
MARIA WANDERLANDIA DE LAVOR CORIOLANO
Data: 19/09/2024 10:28:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Roger Rúben Huaman Huanca
Orientador da pesquisa

APÊNDICE C – TERMO DE ACEITE DE PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS DO CURSO DE FÍSICA

UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Campina Grande, setembro de 2024

PREZADOS ALUNOS

Somos pesquisadores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual Paraíba (UEPB) de Campina Grande/PB. Temos desenvolvido pesquisas sobre temas que envolvem o ensino e a aprendizagem de Matemática nos diferentes níveis de escolaridade. Atualmente, estamos envolvidos num projeto cujo objetivo é contribuir com a formação inicial do professor de Matemática e Física que deverá ensinar na Educação Básica propondo uma metodologia de trabalho em sala de aula.

Para isso, estabelecemos contato, na **Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu – FECLI**, Campus da Universidade Estadual do Ceará – UECE, com o Coordenador do Curso de Física, professor Fernando Martins de Paiva, pedindo-lhe permissão para realizar a coleta de dados que se dará em forma de aulas, na disciplina **Cálculo Diferencial e Integral II**. Nessa disciplina desenvolveremos atividades dentro da proposta da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas e a utilização da plataforma Desmos.

Para essa pesquisa, uma sequência de aulas dessa disciplina será gravada/filmada. Todas as prerrogativas éticas serão rigorosamente cumpridas e o Coordenador do curso estará informado de todos os momentos desse processo. Além disso, reiteramos que **seguiremos à risca todas as obrigações éticas** indicadas pela UEPB sendo que nenhum material relativo a essa gravação/filmagem será divulgado sem o conhecimento e a autorização explícita dos participantes.

Esta carta, portanto, tem a intenção **de informar a todos sobre esse processo de investigação e solicitar-lhes autorização** para sua participação. Para tanto, pedimos a gentileza de que esta carta, assinada abaixo, nos seja devolvida. Os resultados desta pesquisa estarão disponibilizados nesse Campus, em cópia impressa e digital, tão logo todo o trâmite tenha se completado.

Além disso, ficamos à disposição de todos para o que for julgado necessário, na secretaria do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Campus Campina Grande, telefone (83) 3315-3409. Contamos com sua colaboração num trabalho que visa à melhoria do processo de ensinar e aprender Matemática e Física.

Atenciosamente

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca Orientador	Elieudo Nogueira Silva Mestrando

Nome do Aluno: ____

APÊNDICE D – TERMO DE ACEITE DE PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS DO CURSO DE MATEMÁTICA

UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Campina Grande, setembro de 2024

PREZADOS ALUNOS

Somos pesquisadores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual Paraíba (UEPB) de Campina Grande/PB. Temos desenvolvido pesquisas sobre temas que envolvem o ensino e a aprendizagem de Matemática nos diferentes níveis de escolaridade. Atualmente, estamos envolvidos num projeto cujo objetivo é contribuir com a formação inicial do professor de Matemática e Física que deverá ensinar na Educação Básica propondo uma metodologia de trabalho em sala de aula.

Para isso, estabelecemos contato, na **Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu – FECLI**, Campus da Universidade Estadual do Ceará – UECE, com a Coordenadora do Curso de Matemática, professora Maria Wanderlandia de Lavor Coriolano, pedindo-lhe permissão para realizar a coleta de dados que se dará em forma de aulas, na disciplina **Cálculo Diferencial e Integral II**. Nessa disciplina desenvolveremos atividades dentro da proposta da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas e a utilização da plataforma Desmos.

Para essa pesquisa, uma sequência de aulas dessa disciplina será gravada/filmada. Todas as prerrogativas éticas serão rigorosamente cumpridas e a Coordenadora do curso estará informada de todos os momentos desse processo. Além disso, reiteramos que **seguiremos à risca todas as obrigações éticas** indicadas pela UEPB sendo que nenhum material relativo a essa gravação/filmagem será divulgado sem o conhecimento e a autorização explícita dos participantes.

Esta carta, portanto, tem a intenção de **informar a todos sobre esse processo de investigação e solicitar-lhes autorização** para sua participação. Para tanto, pedimos a gentileza de que esta carta, assinada abaixo, nos seja devolvida. Os resultados desta pesquisa estarão disponibilizados nesse Campus, em cópia impressa e digital, tão logo todo o trâmite tenha se completado.

Além disso, ficamos à disposição de todos para o que for julgado necessário, na secretaria do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Campus Campina Grande, telefone (83) 3315-3409. Contamos com sua colaboração num trabalho que visa à melhoria do processo de ensinar e aprender Matemática e Física.

Atenciosamente

______________________________	Elieudo Nogueira Silva ______________________________
Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca Orientador	Elieudo Nogueira Silva Mestrando

Nome do Aluno: ____

APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO DA PESQUISA DE CAMPO

PERGUNTAS PARA REFLEXÃO E DISCUSSÃO

01 – De que maneira a metodologia de Resolução de Problemas influenciou sua compreensão e aplicação dos conceitos de Cálculo Integral? Você pode dar um exemplo específico?

02 – Como você compara a eficácia da Resolução de Problemas com as abordagens tradicionais de ensino em relação à aprendizagem do Cálculo? Quais vantagens e desvantagens você percebe?

03 – Você percebeu que o trabalho colaborativo nas atividades de resolução de problemas aprofundou sua compreensão do conteúdo? Como isso aconteceu?

04 – Quais habilidades você desenvolveu ao usar a metodologia de Resolução de Problemas que, considera importantes para sua formação como professor de Matemática e Física?

05 – Em momentos das atividades, você se sentiu mais motivado ou engajado? O que contribuiu para isso em comparação com aulas mais tradicionais?

APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO APLICADO ONLINE DA PESQUISA DE CAMPO

Questionário

Este questionário pretende coletar feedback dos alunos sobre a experiência com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Resolução de Problemas e o uso da plataforma DESMOS no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II.

* Indica uma pergunta obrigatória

1. **Qual a sua percepção geral sobre a utilização da plataforma DESMOS nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral II?** *

   Marcar apenas uma oval.

   - Excelente
   - Boa
   - Regular
   - Ruim
   - Muito ruim

2. **Quais funcionalidades do DESMOS você considerou mais úteis para a sua aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II? (Você pode selecionar mais de uma opção)** *

   Marque todas que se aplicam.

   - [ ] Gráficos interativos
   - [ ] Simulações de funções
   - [ ] Análises de limites
   - [ ] Resolução de equações
   - [ ] Outro: ____________________

3. **Como você avalia a sua compreensão dos conceitos matemáticos após a utilização da plataforma DESMOS?** *

   Marcar apenas uma oval.

   - Aumentou significativamente
   - Aumentou moderadamente
   - Permaneceu igual
   - Diminuiu moderadamente
   - Diminuiu significativamente
   - Outro: ____________________

4. **Houve alguma funcionalidade do DESMOS que você achou difícil de usar? Se sim, qual?** *

5. **De que maneira a metodologia de Resolução de Problemas impactou a sua aprendizagem?** *

Marcar apenas uma oval.

- Impacto muito positivo
- Impacto positivo
- Sem impacto
- Impacto negativo
- Impacto muito negativo
- Outro: ____________

6. **Como você avaliaria a interação e colaboração entre os alunos durante a resolução dos problemas propostos?** *

Marcar apenas uma oval.

- Excelente
- Boa
- Regular
- Ruim
- Muito ruim
- Outro: ____________

7. **Em sua opinião, quais etapas do processo de resolução de problemas foram mais eficazes para o seu aprendizado? (Você pode selecionar mais de uma opção)** *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Preparação do problema
- [ ] Leitura individual
- [ ] Leitura em conjunto
- [ ] Resolução do problema
- [ ] Registro das resoluções na lousa
- [ ] Plenária
- [ ] Busca de consenso
- [ ] Formalização do conteúdo

8. **Você sente que houve um desenvolvimento em suas habilidades de resolução de problemas após essa experiência?** *

Marcar apenas uma oval.

- Sim, muito
- Sim, um pouco
- Não, pouco
- Não, nada
- Outro: ______________________

9. **Quais sugestões você daria para melhorar a experiência de ensino-aprendizagem utilizando DESMOS?** *

____
____
____
____
____

10. **Há mais algum comentário ou observação que você gostaria de compartilhar sobre sua experiência na turma?** *

____
____
____
____
____